GEOMETRIA 2, ESERCIZI 7

Ex. 0.1. *Siano* (ρ, θ) *le coordinate polari di un punto* (x, y) *della parabola di equazione* $y^2 = x$ *e sia* α *l'angolo tra il vettore* (x, y) *e la tangente alla parabola oin* (x, y)*. Esprimere* α *in funzione di* θ*.*

Ex. 0.2. *Mostrare che* $T = (y, 2c)$ *è tangente alla parabola* $y^2 = 4cx$ *nel punto* (x, y)*.*

Ex. 0.3. *Mostrare che la retta di pendenza* m *tangente alla parabola* $y^2 = 4cx$ *e'* $y = mx + (c/m)$*. Qual è il ptunto di contatto?*

Ex. 0.4. *In analogia con l'esercizio precedente, determinare la retta di pendenza* m *tangente alla parabola* $(y - y_0)^2 - 4c(x - x_0)$*. fare lo stesso con le parabole della forma* $(x - x_0)^2 = 4c(y - y_0)$*.*

Ex. 0.5. *Detto* P *un punto della parabola* $x^2 = y$*, sia* Q *il punto di intersezione della normale alla parabola in* P *con l'asse* y*. Determinare la posizione limite di* Q *quando* P *tende a* $(0, 0)$*. Cosa si pu` dire se si considera, invece della parabola, una qualsiasi curva* $y = f(x)$ *tale che* $f'(0) = 0$*?*

Ex. 0.6. *Considerati i due punti in cui la retta* $y = c$ *interseca la parabola* $y = x^2$*, determinare in funzione di* c *il raggio* $R(c)$ *della circonferenza passante per essi e per il vertice, e si precisi l'andamento di* $R(c)$ *per* $c \to 0$*.*

Ex. 0.7. *(a) Data l'ellisse di equazione* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$*, determinare equazione parametrica e cartesiana della tangente all'ellisse in un suo punto* (x_0, y_0)*.*
(b) Determinare i punti di tangenza con l'ellisse $x^2 + 4y^2 = 8$ *delle due tangenti parallele alla retta* $x + 2y = 7$*.*

Ex. 0.8. *Una circonferenza passa per entrambi i fuochi dell'ellisse e ha con essa due punti di tangenza. Determinare l'eccentricità dell'ellisse.*

Ex. 0.9. *Per un'iperbole di eccentrcità* 2*, sia* $2a$ *la distanza tra i vertici e sia* V *uno dei vertici. Considerato* P *un punto sullo stesso ramo di* V*, si indichi coin* A *l'area della regione limitata dall'iperbole e dal segmento* VP *e sia* r *la lunghezza del segmento* VP*.*
(a) Scelti in modo opportuno gli assi, scrivere l'equazione cartesiana dell'iperbole.
(b) Si esprima A *come un'integrale (senza calcolarlo) e mostrare che quando* P *tende a* V *la quantità* A/r^2 *tende ad un limite finito, e calcolarlo.*

Ex. 0.10. *Dta l'iperbole* $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$*, trovare equzione cartesiana e parametrica della tangente all'iperbole in un suo punto* (x_0, y_0)*.*

Ex. 0.11. *Si suppomga che, data una curva, la normale in un punto generico e la congiungente con l'origine formino un triangolo isoscele con base sull'asse* x*. Mostrare che la curva è un'iperbole.*

Ex. 0.12. *Si denotino $X(P)$ e $Y(P)$ le intersezioni della normale a una curve in un suo punto P con gli assi x e y. Se P è sempre il punto medio del segmento $\overline{X(P)Y(P)}$ e il punto $(4,5)$ appartiene alla curva, che curva è?*

Ex. 0.13. *Sia $\underline{\gamma}(t)$ una curva nello spazio definita su un inervallo chiuso $[a,b]$. Mostrare che il prodotto misto $\underline{\gamma}^{(}t)\cdot\underline{\gamma}(a)\times\underline{\gamma}(b)$ è nullo per almeno un $t\in(a,b)$. Interpretare geometricamente questo fatto.*