GEOMETRIA 2, ESERCIZI 4-2 (TRATTI DA T. APOSTOL, CALCOLO, VOL. 2, GEOMETRIA, SEZ. 2.25 PAG. 91-93)

Ex. 0.1. *(a) Dimostrare che l'area della parte di piano racchiusa da un'ellisse di equazione*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

è l'area di un cerchio di raggio 1 *moltiplicata per ab.*
(b) Dimostrare che il volume del solido di rivoluzione generato dalla rotazione dell'ellisse (1) intorno al suo asse maggiore è il volume di una sfera di raggio 1 *moltiplicato per* a^2b*.*
(c) qual è il risultato se l'ellisse ruota attorno al suo asse minore? (NB: questi problemi possono essere risolti usando proprietà generali dell'integrale, senza fare nessun calcolo).

Ex. 0.2. *Determinare tutti i numeri positivi* A *e* B*, con* $A > B$*, tali che la regione racchiusa dall'ellisse di equazione* $Ax^2 + By^2 = 3$ *abbia la stessa area della regione racchiusa dall'ellisse di equazione* $(A+B)x^2 + (A-B)y^2 = 3$*.*

Ex. 0.3. *Un arco di una parabola con vertice l'origine e asse* $x = 0$ *ha base* b *e altezza* h*. Calcolare l'area della regione racchiusa dalla parabola e dalla base.*

Ex. 0.4. *Una regione limitata dalla parabola* $y^2 = 8x$ *e dalla retta* $x = 2$ *ruota intorno all'asse* x*. Si determini il volume del solido di rivoluzione così generato.*

Ex. 0.5. *Due parabole, di equazioni rispettivamente* $y^2 = 2(x-1)$ *e* $y^2 = 4(x-2)$ *racchiudono una regione* R*.*
(a) Calcolare l'area di R*.*
(b) Calcolare il volume del solido di rivoluzione ottenuto facendo ruotare R *intorno all'asse* x*.*
(c) Come (b), ma ruotando attorno all'asse y*.*

Ex. 0.6. *Per ogni* $p > 0$ *l'equazione*

$$px^2 + (p+2)y^2 = p^2 + 2p$$

rappresenta un'ellisse. Determinare (in funzione di p*) l'eccentricità e le coordinate dei fuochi.*
(b) Scrivere l'equazione dell'iperbole che ha gli stessi fuochi dell'ellisse della parte (a) ed eccentricità $e = \sqrt{3}$*.*

Ex. 0.7. *Si consideri il luogo* X *dei punti* P *di* $\mathbb{R}^2$ *tali che la distanza di* P *dal punto* $(2,3)$ *sia la somma delle distanze di* P *dai due assi coordinati.*

(a) Ricooscere che la parte di X contenuta nel primo quadrante è un pezzo di iperbole. Trovare gli asisntoti e fare un disegno approssimativo.
(b) Disegnare approssimativamente le parti di X contenute negli altri tre quadranti.

Ex. 0.8. *Un'omotetia (di ragione $a \in \mathbb{R}$) è una funzione $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ del tipo $L(\underline{x}) = a\underline{x}$.*
(a) Mostrare che un'omotetia trasforma un'ellisse con centro l'origine in un'altra ellisse con centro l'origine e uguale eccentricità.
(b) Mostrare che anche il viceversa è vero. In altre parole, che date due ellissi concentriche, asse maggiore sulla stessa retta e uguale eccentricità, c'è un'omotetia che manda l'una nell'altra.
(c) Dimostrare le precedenti affermazioni nel caso nell'iperbole.

Ex. 0.9. *(a) Mostrare che l'insieme di tutte le parabole è invariante per omotetia, Cioè un'omotetia trasforma una parabola in una parabola.*
(b) Descrivere tutte le parabole omotetiche alla parabola $y = x^2$.

Ex. 0.10. *Mostrare che le coniche che hanno stessa eccentricità e e centro l'origine sono le curve integrali dell'equazione differenziale*

$$y' = \frac{(e^2-1)x}{y}$$

Ex. 0.11. *Per quali valori del parametro c la retta $3x - 2y = c$ è tangente all'iperbole $x^2 - 3y^2 = 1$?*

Ex. 0.12. *La retta $x = y-4$ è tangente alla parabola $y^2 = 16x$. Determinare il punto di contatto.*

Ex. 0.13. *(a) Sia $a \neq 0$. Se le due parabole $y^2 = 4p(x-a)$ e $x^2 = 4qy$ sono tangenti allora l'ascissa del punto di contatto dipende solo da a.*
(b) Determinare una condizione in funzione di a, p, q che esprima che le due parabole del punto precedente sono tangenti.

Ex. 0.14. *Due parabole hanno in comune fuoco e asse, ma i vertici sono da parti opposte, alla stessa distanza dal fuoco. Mostrare che le due parabole si tagliano ortogonalmente, cioè le tangenti nei punti di intersezione sono perpendicolari.*

Ex. 0.15. *Mostrare che l'equazione*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1$$

rappresenta tutte le coniche simmetrice rispetto all'origine e fuochi in $(c, 0)$ e $(-c, 0)$.
(b) Si tenga fisso c e si denoti con S l'insieme di tali coniche al variare di a nell'insieme dei numeri reali positivi diversi da c^2. Mostare che ogni curva di S soddisfa l'equazione differenziale

$$xy(\frac{dy}{dx})^2 + (x^2 - y^2 - c^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

(c) Mostrare che S è auto-ortogonale, cioè che la l'insieme delle traiettorie ortogonali a curve di S (vedi esercizio precedente) è S stesso. (Suggerimento: sostituire y' con $1/y'$ nell'equazione differenziale precedente.)

Ex. 0.16. *Dimostrare che il luogo dei centri dei cerchi che passano per un punto dato e sono tangenti ad una retta data è una parabola.*

Ex. 0.17. *Dimostrare che il luogo dei centri che sono tangenti esternamente ad un cerchio dato e che sono tangenti ad una retta data è una parabola*

Ex. 0.18. *(a) Una corda di lunghezza $2|a|$ è tracciata perpendicolarmente all'asse della parabola $y^2 = ax$. Siano P e Q i punti in cui questa corda incontra la parabola. Si dimostri che il vettore $P-O$ e il vettore $Q-O$ sono perpendicolari.*
(b) La corda di una parabola che passa per il fuoco ed è parallela alla direttrice si chiama il lato retto*. Mostrare che la lunghezza del lato retto è il doppio della distanza del fuoco dalla direttrice.*
(c) Dimostrare che le tangenti alla parabola nei due estremi del lato retto intersecano l'asse nell'intersezione dell'asse con la direttrice.

Ex. 0.19. *Due punti P e Q si dicono* inversi rispetto a un cerchio dato *se sono allineati con il centro del cerchio e situati dalla stessa parte rispetto al centro stesso e, inoltre, il prodotto delle loro distanze dal centro è uguale al quadrato del raggio.*
Se il punto Q descrive la retta $x + 2y - 5 = 0$, qual è il luogo dei punti P inversi di Q rispetto al cerchio $x^2 + y^2 = 4$?