GEOMETRIA 2, TERZO APPELLO 2011-'12

Ex. 0.1. Si consideri la forma quadratica reale

$$Q((x,y,z)) = 3x^2 + 4xy + 8xz + 4yz + 3z^2$$

(a) Ridurla a forma quadratica trovando esplicitamente una base ortonormale rispetto alla quale la forma quadratica sia in forma diagonale.
(b) Si denoti con S^2 la sfera unitaria di $\mathbf{R}^3$. Trovare $max_{S^2}Q$ e tutti i punti di massimo. Trovare $min_{S^2}Q$ e tutti i punti di minimo.

Soluzione. (a) Calcolando, si trova che il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-8)$. Dunque gli autovalori sono $\lambda_1 = 8$ (semplice) e $\lambda_2 = -1$ (doppio). I relativi autospazi sono $V_8 = Span((2,1,2))$ e
$V_{-1} = Span((1,-2,-0),(0,-2,1))$. Una base ortogonale di V_{-1} risulta essere: $\{(1,-2,0),(-4,2,1)\}$. Dunque una base ortonormale come richiesto è $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$, dove

$$\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2,1,2) \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0) \quad \mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{21}}(-4,2,1)$$

Siano x', y' e z' tali che $(x,y,z) = x'\mathbf{u} + y'\mathbf{v} + z'\mathbf{w}$. Si ha che

$$Q(x,y,z) = 8(x')^2 - (y')^2 - (z')^2$$

(b) $max_{S^2}Q = 8$. I punti di massimo sono $\mathbf{u}$ e $-\mathbf{u}$.
$min_{S^2}Q = -1$. I punti di minimo sono i punti della circonferenza unitaria nel piano $Span(\mathbf{v},\mathbf{w})$. In altre parole sono i punti dell'insieme $\{a\mathbf{v}+b\mathbf{w} | a^2+b^2 = 1\}$.

Ex. 0.2. Siano $\mathbf{u} = (1,2,1)$ e $\mathbf{v} = (1,1,-1)$. Sia $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ una curva parametrizzata differenziabile tale che

$$\begin{cases} \gamma'(t) = \mathbf{u} \times \gamma(t) & \forall t \in I \\ \gamma(t_0) = \mathbf{v} \end{cases}$$

dove $t_0 \in I$.
(a) La curva soggiacente a γ è piana? (motivare)
(b) Calcolare la funzione velocità scalare di γ.
(c) Calcolare la funzione curvatura di γ.
(d) Descrivere la curva soggiacente a γ nel modo più preciso possibile.

Soluzione. (a) La curva soggiacente è contenuta nel piano $x + 2y + z = 2$. Infatti, si ha che $\gamma'(t)$ è sempre perpendicolare a $\mathbf{u}$. Dunque $(\gamma \cdot \mathbf{u})'(t) = \gamma'(t) \cdot \mathbf{u} \equiv 0$ e cioè $\gamma(t)' \cdot \mathbf{u} \equiv= cost = \gamma(t_0) \cdot \mathbf{u}$.
(b) La velocità scalare è costante. Infatti $\gamma''(t) = \mathbf{u} \times \gamma'(t)$. Dunque il vettore

accelerazione è sempre perpendicolare al vettore velocità, e ciò significa che la velocità scalare è costante. Dunque $v(t) \equiv v(t_0) = \| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \| = \sqrt{14}$.
(c) Anche la curvatura è costante. Infatti, sappiamo che $\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{v^3(t)}$. Ma i vettori velocità e accelerazione sono perpendicolari. Dunque $\| \gamma'(t) \times \gamma''(t) \| = \| \gamma'(t) \| \| \gamma''(t) \|$. Ma $\| \gamma''(t) \|$ è costante: infatti, essendo il vettore velocità sempre perpendicolare a $\mathbf{u}$ si ha che $\| \gamma''(t) \| = \| \mathbf{u} \| \| \gamma'(t) \| = \| \mathbf{u} \| v(t)$. usando la formula per il calcolo della curvatura, si ha che $\kappa(t) \equiv \frac{\|\mathbf{u}\|}{v} = \sqrt{\frac{3}{7}}$.
(d) La curva è piana, con curvatura costante. Quindi è un arco di circonferenza. La circonferenza ha raggio $\frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{7}{3}}$. Il centro è

$$\gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}(t_0),$$

dove $\mathbf{n}$ indica il vettore normale unitario, che risulta essere il vettore unitario avente stessa direzione e verso del vettore accelerazione, dunque $\mathbf{n}(t_0) = \frac{1}{\sqrt{21}}(-4, -2, 8)$.

Ex. 0.3. Sia $\mathcal{C}$ il luogo dei centri delle circonferenze in $\mathbf{R}^2$ che passano per un dato punto P e sono tangenti ad una data retta L (tale che $P \notin L$).
(a) Descrivere la curva $\mathcal{C}$.
(b) Trovare l'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$ nel caso in cui L sia l'asse delle y e $P = (4, 0)$.

Soluzione. (a) La curva $\mathcal{C}$ è la parabola di vertice P e direttrice L (motivare). (b) $x = \frac{1}{8}y^2 + 2$.

Ex. 0.4. Si consideri la curva parametrizzata

$$\gamma(t) = (1 + \cos t, 2 + \sin t, -1 + 2\cos t).$$

(a) Mostrare che la curva soggiacente è una conica e determinarne il tipo.
(b) Determinare il piano che la contiene.
(c) Determinarne il centro e i vertici.
(d) Determinarne la funzione curvatura.

Soluzione. Si ha che

$$\gamma(t) = (1, 2, -1) + \sqrt{5}\cos t\,(\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2)) + \sin t\,(0, 1, 0)$$

Poichè $\mathbf{u} = (\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2))$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ sono due versori perpendicolari, la curva è un'ellisse di assi $(1, 2, -1) + Span(\mathbf{u})$ e $(1, 2, -1) + Span(\mathbf{v})$. Il centro di simmetria è P. I vertici sono $P + \sqrt{5}\mathbf{u}$ e $P - \sqrt{5}\mathbf{u}$. La curvatura si calola facilmente usando le formule usuali. Risulta

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{5}}{(1 + 4\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

Ex. 0.5. Sia $\gamma(\theta)$ una curva regolare in $\mathbf{R}^2$, parametrizzata in funzione della coordinata polare θ (l'angolo tra il vettore posizione e l'asse delle x). La curva ha la proprietà seguente: i vettori $\gamma'(\theta)$ (vettore velocità) e $\gamma(\theta)$ (vettore posizione) formano un angolo costante al variare di θ.
Determinare l'equazione polare della curva soggiacente (cioè un'equazione delle forma $\rho = f(\theta)$ soddisfatta da ogni punto della curva soggiacente). Suggerimento: usare il fatto (visto a lezione) che, detto $\phi(\theta)$ l'angolo tra $\gamma'(\theta)$ e $\gamma(\theta)$, sussistono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \rho(\theta) = v(\theta)\sin\phi(\theta) \\ \rho'(\theta) = v(\theta)\cos\phi(\theta) \end{cases}$$

dove $v(\theta)$ è la velocità scalare.

Soluzione. Usando le relazioni del suggerimento, risulta che, essendo $v(\theta)$ sempre non nullo (la curva è regolare) e l'angolo $\phi(\theta)$ costante, uguale a ϕ,

$$\frac{\rho'}{\rho} \equiv costante\ = cotg\phi = a.$$

Integrando, risulta $\log\rho(\theta) = a\theta + b$, dove b è un'altra costante. Quindi

$$\rho(\theta) = e^b\, e^{a\theta} = ce^{a\theta}$$

dove $c = e^b$. La curva è quindi una spirale logaritmica (curva analiizata a lezione). Si noti che se $a = 0$ la curva è una circonferenza di centro l'origine.