GEOMETRIA 2, PRIMO APPELLO 2011-'12

Ex. 0.1. Scrivere esplicitamente l'isometria $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che manda il sistema di riferimento $\big(P, \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}\big) = \big((1,1), \{(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\}\big)$ nel sistema di riferimento $\big(Q, \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\}\big) = \big((1,-1), \{(0,1), (1,0)\}\big)$ (sttenzione: il secondo sistema di riferimento non è orientato positivamente).

Soluzione. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'isometria *lineare* che manda la base $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ nella base $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$. Poichè la prima base è orientata positivamente e la seconda negativamente, L è una *riflessione* rispetto ad una retta passante per l'origine. Facendo un piccolo disegno è facile vedere che la retta è quella che il cui angolo con l'asse x è $\pi/3$. Per l'Esercizio 1(c) del File 2, essa ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & \sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & -\cos\frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Risulta quindi che l'isometria cercata è

$$F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = A(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ex. 0.2. Sia $\mathcal{C}$ la parabola di fuoco $(0,0)$, direttrice $L: \ x + y = a$ (dove $a \in \mathbb{R}$), e tale che $P = (0,50) \in \mathcal{C}$.
(a) Suppondendo $a > 0$, determinare a, il vertice di $\mathcal{C}$ e l'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$.
(b) Suppondendo $a < 0$, determinare a e il vertice di $\mathcal{C}$.

Soluzione. (a) Per definizione di parabola (tramite le distanze) ha che $50 = \parallel P - O \parallel = d(P, L)$. Quindi (fare il disegno), poichè $a > 0$, si ha che

$$d(O,L) = 50 + \frac{(0,50)\cdot(1,1)}{\sqrt{2}} = 50(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$$

Quindi il punto $Q = d(O,L)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \frac{50}{2}(\sqrt{2}+1)(1,1)$ sta sulla retta L. Dunque $a = x + y = 50(\sqrt{2}+1)$. Dunque, ancora per definizione di parabola, il vertice è il punto di mezzo del segmento $\overline{OQ}$, cioè $V = \frac{50}{4}(\sqrt{2}+1)(1,1)$. L'equazione cartesiana è $x^2 + y^2 - 2xy + 2ax + 2ay = a^2$. (Alternativamente, si può prima trovare l'equazione cartesiana, poi trovare a imponendo il passaggio per P, e poi trovare V intersecando con la retta $Span((1,1))$.
(a) In modo simile si trova $a = -50(\sqrt{2}-1)$ e $V = -\frac{50}{2}(\sqrt{2}-1)(1,1)$.

Ex. 0.3. Data una matrice simmetrica A, denotiamo $Q_A(\underline{x}) = \underline{x}^t A \underline{x}$ la forms quadratica associata.
Trovare, se possibile, una matrice 2×2, simmetrica, tale che le seguenti

proprietà siano verificate:
(a) il massimo di Q_A sulla circonferenza unitaria è uguale a 3;
(b) $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ è un punto di minimo di Q_A sulla circonferenza unitaria.
(c) $\det A = -6$.

Soluzione. Il massimo e il minimo sono i due autovalori di A. Dalle condizioni (a) e (c) risulta che $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$. Inoltre sappiamo che $E(-2) = Span(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Poichè A è simmetrica, dal teorema spettrale $E(3) = E(-2)^{\perp} = Span(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Dunque, detta

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

si ha che $C^{-1}AC = diag(3, -2)$, cioè (osservando che $C^{-1} = C^t = C$)

$$A = C\, diag(3, -2)\, C^{-1} = C\, diag(3, -2) C = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$$

Inoltre A è l'unica matrice che soddisfa alle richieste dell'esercizio.

Ex. 0.4. Si consideri la curva parametrizzata

$$\underline{\gamma}(t) = (\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t)$$

(a) Calcolarne curvatura, torsione e riferimento di Frenet (cioè $\{T(t), N(t), B(t)\}$).
(b) Dimostrare che la curva soggiacente è una circonferenza, determinarne il piano in cui si trova, il raggio e il centro.

Soluzione. $\underline{\gamma}'(t) = (-\frac{4}{5}\sin t, -\cos t, \frac{3}{5}\sin t)$ ha norma uguale a 1, quindi $\underline{\gamma}$ è parametrizzata a velocità unitaria. Quindi $\gamma''(t) = T'(t) = (-\frac{4}{5}\cos t, \sin t, \frac{3}{5}\sin t)$ e dunque $k(t) = \| T'(t) \| \equiv 1$. Dunque $N(t) = (-\frac{4}{5}\cos t, \sin t, \frac{3}{5}\sin t)$ e $B(t) = T(t) \times N(t) \equiv (-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})$. Dunque $B(t)$ è constante quindi la torsione è sempre nulla. Quindi la curva è piana, e poichè ha curvatura costante uguale a 1, è una circonferenza di raggio 1. Si trova in un piano parallelo al piano di equazione cartesiana $B \cdot \underline{x} = 0$, quindi in un piano di equazione $3x + 4z = a$. Per trovare a, basta calcolare $3x + 4z$ in un punto della circonferenza, ad esempio, per $t = \frac{\pi}{2}$, $\underline{\gamma}(\frac{\pi}{2}) = (0, 0, 0)$. Si ha quindi $a = 0$. Il centro è $C \equiv \underline{\gamma}(t) + \frac{1}{k}N(t)$, quindi, per $t = \frac{\pi}{2}$,

$$C = (0, 0, 0,) + (0, 1, 0) = (0, 1, 0).$$

In conclusione, s i tratta della circonferenza di raggio 1 e centro $(0, 1, 0)$ nel piano $3x + 4z = 0$.