Alcune (solo alcune) domande di ricapitolazione - 8.2.2008

(1) Che cos'‘e un numero complesso? Come si moltiplicano due numeri complessi? Come si trova l'inverso di un numero complesso rispetto alla moltiplicazione? Che cos'è il coniugato di un numeri complesso? Che sono i numeri complessi che sono uguali al loro coniugato?

(2) Che cosa si intende per *radice di un polinomio*? È vero che ogni polinomio a coefficienti reali ha sempre almeno una radice reale? È vero che un polinomio a coefficienti reali ha sempre almeno una radice complessa? È vero che ogni polinomio di grado n, a coefficienti complessi, ha n radici complesse (non necessariamente distinte)?

(3) Cosa si intende per $\mathcal{V}_n$? Che cosa si intende per $\mathcal{V}_n(\mathbf{C})$? Che cosa si intende per spazio lineare su $\mathbf{C}$?

(4) Che cosa si intende per *sottospazio lineare di un dato spazio lineare*?

(5) Che cosa si intende per *insieme di vettori linearmente indipendente*?

(6) È vero che *se un dato insieme di vettori è linearmente dipendente allora ogni vettore dell'insieme è combinazione lineare degli altri vettori?* È vero che *se un dato insieme di vettori è linearmente dipendente allora esiste almeno un vettore dell'insieme che è combinazione lineare degli altri vettori?*

(7) Che cos'‘e il sottospazio lineare generato da un un insieme di vettori?

(8) Cosa è una base? Dato uno spazio lineare V, una base $\mathcal{B}$ di V e un vettore $v \in V$, che cosa si intende per *componenti (o coordinate)* di v rispetto a $\mathcal{B}$? Come si trovano?

(9) Che cosa significa *completare un insieme di vettori linearmente indipendenti di un dato spazio lineare V a una base di V*?

(10) Cosa è *la dimensione di uno spazio lineare*?

(11) Che cosè un *prodotto scalare* su uno spazio lineare reale? Che cosè la *norma* di un vettore? Che cosa dice la *disuguaglianza di Schwartz* e che relazione ha con la nozione di *coseno dell'angolo compreso tra due vettori?*

(12) Che cosè un *prodotto scalare* su uno spazio lineare complesso? Che cosè la *norma* di un vettore? Perchè, anche se siamo sui numeri complessi, si può dire che la norma di un vettore è maggiore o uguale a zero?

(13) Che cos'è il *procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt*? Che cosa dice il Teorema di orgogonalizzazione?

(14) Sia V uno spazio lineare euclideo (che cosa significa?) e sia W un sottospazio lineare di V. Che cosè *l'ortogonale di W? Che dimensione ha?*

(15) Che cos'è una base ortogonale? Che cos'è una base ortonormale? Come si trovano le componenti di un vettore rispetto ad una base ortonormale? Che cos'è una matrice ortogonale? Come si caratterizzano le matrici ortogonali?

(16) Sia V uno spazio lineare euclideo e sia W un sottospazio lineare di V. Sia $v \in V$. Che cosa si intende per *proiezione ortogonale di v su W*. Sia $\mathcal{B} = \{w_1, .., w_k\}$ una base di W. Come si trova $P_W(v)$?

(17) Sia V uno spazio lineare euclideo e sia W un sottospazio lineare di V. Sia $v \in V$. Che cosa si intende per *distanza di v da W*? Come si calcola? Perchè la distanza di v da W è uguale a $\| P_{W^\perp}(v) \|$?

(18) Che cos'è una *trasformazione lineare*?

(19) Che cos'è il *nucleo* di una trasformazione lineare?

(20) Come si caratterizzano le trasformazioni lineari *iniettive*?

(21) Che cos'è il *rango*? (di una matrice, di una trasformazione lineare)

(22) Che cosa dice il *Teorema della nullità più rango* (o Teorema delle dimensioni)?

(23) Sia $T : V \to W$ una trasformazione lineare. Sotto quali condizioni su V e W si ha che: T iniettiva $\Leftrightarrow$ T suriettiva $\Leftrightarrow$ T biettiva? E perchè?

(24) Sia $T : V \to W$ una trasformazione lineare. Sia $\{v_1, .., v_n\}$ una base di V. Vero/Falso:
(a) $\{T(v_1), .., T(v_n)\}$ è sempre una base di W. (b) $\{T(v_1), .., T(v_n)\}$ è sempre una base di $T(V)$. (c) $\{T(v_1), .., T(v_n)\}$ è sempre un insieme di generatori di W. (d) $\{T(v_1), .., T(v_n)\}$ è sempre un insieme di generatori di $T(V)$.

(25) Che cosa si intende per *trasformazione lineare definita a partire dai valori che assume in una base*?

(26) Sia V uno spazio lineare e sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una base di V. Siano inoltre $w_1, .., w_n \in W$. Vero/Falso: (a) Esiste una trasformazione lineare $T : V \to W$ tale che $T(v_1) = w_i$, per ogni $i = 1, .., n$, solo se $w_1, ..., w_n$ sono linearmente indipendenti. (b) Esiste sempre una trasformazione lineare $T : V \to W$ tale che $T(v_1) = w_i$, per ogni $i = 1, .., n$.

(27) Sia $T : V \to W$ una trasformazione lineare. Sia $\{v_1, .., v_n\}$ una base di V. Supponiamo che $T(v_1), ..., T(v_n)$ siano linearmente dipendenti, Cosa si può dire su T?

(28) Cosa si intende per *matrice rappresentativa di una trasformazione lineare rispetto a certe basi*? Qual è la sua proprietà? Se $\dim V = k$ e $\dim W = r$ e $T : V \to W$ è una trasformazione lineare, una matrice rappresentativa di T quante righe e quante colonne ha?

(29) Come si definisce il prodotto di matrici? Qual è la sua relazione con la composizione di trasformazioni lineari?

(30) Il prodotto di matrici è associativo? Commutativo? Che cos'è la *matrice identità*?

(31) Cosa si intende per *matrice invertibile* e che realzione ha questa nozione con la nozione di *trasformazione lineare biettiva*? Che cosa si intende per *matrice inversa* di una matrice invertibile A?

(32) È vero che l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari a n incognite è sempre un sottospazio lineare di $\mathcal{V}_n$? E come si trova?

(33) Sia W un sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}_n$. È vero che esiste sempre un sistema lineare di cui W è l'insieme

delle soluzioni? E come si trova?

(34) Quali sono gli assiomi della *funzione determinante*? In che modo questi assiomi implicano che il determinante di una matrice le cui righe sono linearmente indeipendenti è nullo? In che modo questi assiomi implicano che, applicando le operazioni elementari sulle righe dell'eliminazione di Gauss, il modulo del determinante resta invariato? Quali sono le operazioni elementari che cambiano segno al determinante?

(35) Sia $A \in \mathcal{M}_n$. Se $t \in \mathbf{R}$ $\det(tA) =?$; $\det(tA^k) =?$; $\det((tA)^k) =?$; $\det(A^{-1}) =?$; $\det(A + A) =?$

(36) Che cosè un *autovalore* di una trasformazione lineare $T : V \to V$? E un *autovettore*? Se c'è una base di V formata da autovettori di T, com'è fatta la matrice rappresentativa di T rispetto a una tale base?

(37) Sia $T : V \to V$ lineare. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ due basi di V. Che relazione c'è tra le matrici rappresentative di T rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$? Che realzione c'è tra i loro polinomi caratteristici?

(38) Sia V uno spazio lineare di dimensione n? Sia $T : V \to V$ una trasformazione lineare. Quanti autovalori distinti ha, al massimo, T? Cosa si può dire sulla diagonalizzabilità di T se T ha il numero massimo di autovalori distinti? E perchè?

(39) Sia $T : V \to V$ lineare e sia λ un autovalore di T. Che relazione c'è tra la dimensione dell'autospazio relativo a λ e la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico?

(40) Sia $T : V \to V$ lineare e sia A una matrice rappresentativa di T rispetto ad una data base di V. Perchè gli autovalori di T sono le radici del polinomio caratteristico di A?

(41) Sia $T : V \to V$ lineare. Qual'è una condizione necessaria e sufficiente affinchè T sia diagonalizzabile?

(42) Che relazione c'è tra trasformazioni lineari autoaggiunte (o simmetriche) di uno spazio euclideo (reale) e le matrici simmetriche?

(43) Quante radici reali (non necessariamente distinte) ha il polinomio caretteristico di una matrice simmetrica?
Enunciare il Teorema dulla Diagonalizzazione delle trasformazioni autoaggiunte.
Enunciare il Teorema sulla diagonalizzazione delle forme quadratiche.

(44) Che cosa si intende per *forma quadratica associata ad una trasformazione lineare autoaggiunta*?

(45) Sia $T : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_n$ una trasformazione lineare autoaggiunta e sia $Q : V \to \mathbf{R}$ la forma quadratica associata (cioè $Q(v) = T(v) \cdot v$. Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Sia, infine $v \in V$ e sia X is suo vettore delle componenti rispetto a $\mathcal{B}$.
Si ha che $Q(v) = AX \cdot X$. Perchè?