Esercizi 04.02.2008

1. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (a) Determinare tutti gli autovalori di A. (b) Stabilire se la trasformazione lineare $T : \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_4$ definita da $T(X) = A\,X$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una base di $\mathbf{V}_4$ composta di autovettori di T.

2. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$.
(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di T. (b) Stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{V}_3$ tale che la matrice rappresentativa di T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è una matrice diagonale. In caso affermativo, esibire una tale base e la corrispondente matrice diagonale.

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -4 & -1 \\ -6 & -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ e sia $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. (a) Verificare che -3 è un autovalore di A.
(b) Determinare tutti gli autovalori di A (suggerimento: usare le informazioni ottenute rispondendo al punto precedente). Stabilire se A è diagonalizzabile.
(c) Sia C la matrice dell'Esercizio 1. Determinare gli autovalori della matrice $C^{34}\,A\,((C^{34})^{-1})$.

4. Sia $\mathcal{B} = \{(0,1,-1),\ (0,1,1), (2,3,0)\}$.
(a) Mostrare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{V}_3$.
(b) Sia consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e sia $T : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$ la trasformazione lineare tale che $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = A$. Determinare tutti gli autovalori di T e la loro molteplicità algebrica.
(c) Determinare una base di ciascun autospazio di T.
(d) Stabilire se T è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una base di $\mathcal{V}_3$ composta da autovettori di T.
(e) Determinare, se possibile, una matrice invertibile C tale che $C^{-1}AC$è diagonale.
(f) Calcolare A^{20}.

5. Sia $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.
(a) Determinare gli autovalori di A.
(b) Stabilire se A è diagonalizzabile.
(c) Trovare (se possibile) una matrice invertibile C e una matrice diagonale D tali che $C^{-1}AC = D$.

6. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. (a) Determinare tutti gli autovalori di A. (b) Per ciascun autovalore, determinare una base del relativo autospazio. (c) Sia $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcolare $A^{51}\, v$.

7. Sia $T : V \to V$ una trasformazione lineare invertibile.
(a) Sia $v \in V$, $v \neq O$. Dimostrare che v è un autovettore di T se e solo se v è un autovettore di T^{-1}.
(b) Sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Dimostrare che λ è un autovalore di T se e solo se $\frac{1}{\lambda}$ è un autovalore di T^{-1}.

8. Sia $T : V \to V$ una trasformazione lineare e sia $n \in \mathbf{N}$.
(a) Dimostrare che se v è un autovettore di T, relativo all'autovalore λ, allora v è un autovalore si T^n, relativo all'autovalore λ^n.
(b) Mostrare un esempio di trasformazione lineare $T : V \to V$ tale che esiste un autovettore di T^2 che non è un autovettore di T.

9. Stabilire quando A è diagonalizzabile: $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & 9 \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

10. Si consideri, per ogni $t \in \mathbf{R}$, la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t+2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Sia $S_t : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$ la trasformazione lineare definita da: $S_t(X) = A_t\, X$. Stabilire per quali t si ha che S_t è diagonalizzabile.

11. Si consideri, per ogni $t \in \mathbf{R}$ la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t+2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Stabilire per quali t la matrice A_t è diagonalizzabile.

12. Sia $T : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$ la rotazione di angolo $\theta \neq \pi$, in senso antiorario, attorno alla retta orientata $t(1, 1, -1)$. Determinare autovalori e autovettori di T e stabilire se T è diagonalizzabile.

13. Sia $T : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_n$ un'isometria (vedi fogli precedenti). Dimostrare che, se λ è un autovettore di T, allora $|\lambda| = 1$.