Esercizi 27.01.2008

1. Sia $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcolare $\det(C)$, $\det(\frac{1}{2}(C^{-1})^3)$ e la matrice C^{-1}.

2. Si consideri, al variare del parametro reale t, la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t & t & t & -t \\ 1 & 0 & t^2 - t & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ t^3 & t & t & -t \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare $\det(A_t)$ e stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ la matrice A_t ha rango quattro.
(b) Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ il sistema lineare di matrice completa A_t è compatibile (suggerimento: usare la risposta data al punto precedente). Per tali $t \in \mathbf{R}$, risolvere il sistema.

3. Siano $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Determinare (se esiste) una matrice C tale che $AC = B$.

4. Si consideri, per ogni $t \in \mathbf{R}$, la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 0 & t+2 & 1 \\ -2 & -2 & t-3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare, $\det A_t$ al variare di $t \in \mathbf{R}$ e stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ la matrice A_t è invertibile. (b) Calcolare $\det\big(-2(A_t^4)\big)$ al variare di $t \in \mathbf{R}$ e stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ la matrice $-2(A_t^4)$ è invertibile. (c) Calcolare (se esiste) la matrice inversa di A_t per $t = 1$.

5. Si consideri, per ogni $t \in \mathbf{R}$, la matrice $M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & t \\ t & t+2 & 1 & t+2 \\ t+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & t \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare $\det M_t$ al variare di $t \in \mathbf{R}$ e stabilire per quali t la matrice M_t ha rango quattro. (b) Si considerino, per ogni $t \in \mathbf{R}$, le rette L_t e R_t di equazioni cartesiane $L_t : \begin{cases} x_1 - x_2 = t \\ tx_1 + (t+2)x_2 + x_3 = t+2 \end{cases}$ e $R_t : \begin{cases} (t+1)x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = t \end{cases}$. Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ le rette L_t e R_t sono incidenti (suggerimento: usare (a)).

5′. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'inversa di A.

(b) Si consideri, per ogni $t \in \mathbf{R}$, la matrice $B_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & t & 0 \end{pmatrix}$. Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ esiste una matrice $X \in M_3$ tale che $B_t X = A$.

6. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. (a) Determinare A^{-1}.

(b) Sia $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Determinare tutte le matrici B tali che $AB = C$.

7. Si consideri, al variare di $t \in \mathbf{R}$, la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & 1 \\ t+2 & t^2+1 & 2 \\ 2t & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ la matrice A_t è invertibile. (b) Calcolare la matrice inversa della matrice A_2.
(c) Calcolare il rango di A_t al variare di $t \in \mathbf{R}$.

8. Si consideri, al variare di $t \in \mathbf{R}$, la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2+t & 0 \\ t & 1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$.
(a) Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ la matrice A_t è invertibile. (b) Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ il sistema lineare di 4 equazioni in tre incognite avente A_t come matrice completa è compatibile e , per tali $t \in \mathbf{R}$, risolvere esplicitamente il sistema. (c) Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ esiste almeno un vettore $b_t \in \mathbf{R}^4$ tale che il sistema $A_t x = b_t$ è incompatibile.

9. Siano $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (a) Determinare l'inversa di A.
(b) Calcolare $\det(2A^2B)$, $\det(4A+B)$, $\det(2(A^3B^{-2}))$.

Determinante = Volume

La seguente serie di esercizi serve a dimostrare (tra l'altro) che, data una matrice quadarata $A \in \mathcal{M}_n$, $|detA|$ è volume del parallelepipedo in $\mathcal{V}_n$ che ha come vertici $O, A_1, .., A^n$ (dove $A_1, ..., A_n$ sono le colonne di A). Ciò è stato verificato per $n = 2$ e $n = 3$ nella prima parte del corso.

10. Sia $A \in \mathcal{M}_n$ una matrice le cui colonne $A_1, ..., A_n$ formano una base ortogonale di $\mathcal{V}_n$. Dimostrare che

$$|\det(A)| = \| A_1 \| \cdots \| A_n \|$$

(Suggerimento: mostrare che $A^TA = diag(\| A_1 \|^2, ..., \| A_n \|^2)$ e poi usare il Teorema sul determinante di un prodotto e il fatto che $\det A = \det A^T$.)

11. Siano A e B due matrici, tali che abbia senso fare il prodotto AB. Dimostrare che $(AB)^T = B^TA^T$.

12. Sia $A \in \mathbf{M}_n$ una matrice quadrata. Dimostrare che le colonne di A formano una base ortogonale di $\mathcal{V}_n$ se e solo se le righe di A formano una base ortogonale di $\mathcal{V}_n$. (Suggerimento: usare la prima parte del procedimento dell'Esercizio 10 per dimostrare che le colonne di A formano una base ortogonale se e solo se A^TA è una matrice diagonale. Poi usare l'Esercizio 11.)

13. Siano $A^1, A^2 \in \mathcal{V}_2$ vettori indipendenti e si denoti $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$. Sia $B^1 = A^1$ e $B^2 = A^2 - \frac{(A_2 \cdot A_1)}{\|A_1\|^2} A_1$ (in altre parole, $B_2 = P_{L(A_1)^\perp}(A_2)$.) Si denoti $\mathcal{B} = \{B_1, B_2\}$.
(a) Dimostrare che l'area del parallelogramma di vertici O, A_1, A_2 è uguale all'area del rettangolo di vertici O, B_1, B_2, e che quest'ultima area è uguale a $|\det(m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id))|$.
(b) Dimostrare che $m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}} U$, dove U è una matrice della forma $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(c) Dedurre che l'area del parallelogramma di vertici O, A_1, A_2 è è uguale a $|\det(m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}}(id))|$

14. Estendere il ragionamento dell'Esercizio 13 al caso $n = 3$. In altre parole, sia $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ un insieme di vettori indipendenti di $\mathcal{V}_3$. Siano $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 - P_{L(A_1)}(A_2)$ e $B_3 = A_3 - P_{L(A_1,A_2)}(A_3)$ e sia $\mathcal{B}$ la base ortogonale $\{B_1, B_2, B_3\}$. Ragionare come nell'esercizio precedente per dimostrare che l'area del parallelepipedo di vertici O, A_1, A_2, A_3 è uguale a $|\det(m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id))| = |\det(m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}}(id))|$.

15. Estendere il ragionamento degli Esercizi 13 e 14 a n arbitrario.

16. Dimostrare che, data una matrice $A \in \mathcal{M}_n$, l'area del parellelepipedo di vertici $O, A_1, .., A_n$ (righe di A) è uguale all' area del parallelepipedo di area $O, A^1, ..., A^n$ (colonne di A).

17. Sia $T : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_n$ una trasformazione lineare che è anche un'isometria (vedi foglio 5). Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}_n$. Dimostrare che $|\det m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = 1$.