Esercizi 11.01.2007

1. Sia $T : \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_4$ l'applicazione lineare definita da: $T((x_1, x_2, x_3, x_4)) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare una base di $T(\mathcal{V}_4)$.
(b) Sia $v = (-3, -3, 0, 0)$. Stabilire se $v \in T(\mathcal{V}_4)$ e, in caso affermativo, determinare il vettore delle coordinate di v rispetto alla base di $T(\mathcal{V}_4)$ trovata precedentemente.
(c) Determinare un sistema di equazioni cartesiane di $T(\mathcal{V}_4)$.
(d) Determinare una base di $N(T)$.

2. Siano $v_1(1, -1, 1)$, $v_2 = (1, 1, -2)$, $v_3 = (0, 1, -1)$. Sia inoltre $T : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$ l a trasformazione lineare tale che $T(v_1) = (3, 1, 0)$, $T(v_2) = (0, 1, 1)$, $T(v_3) = (3, -1, -2)$.
(a) Calcolare $T((0, 1, 1))$ (b) Determinare dimensione e una base di $N(T)$ e di $T(\mathcal{V}_3)$.

3. Sia $T : \mathcal{V}^3 \to \mathcal{V}^3$ l'applicazione lineare tale che:

$$T((1, 1, -1)) = (1, 2, -1)), \quad T((1, 0, 2)) = (-1, 2, 2), \quad T((1, 1, 1)) = (5, 2, -7)).$$

Sia inoltre, per ogni $t \in \mathbf{R}$, $S_t : \mathcal{V}^2 \to \mathcal{V}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$S_t((2, 1)) = (-1, 10, 4), \quad S_t((1, -1)) = (t + 3, 4, 1).$$

(a) Determinare, per quali $t \in \mathbf{R}$ si ha che $S_t(\mathcal{V}_2) = T(\mathcal{V}_3)$.
(b) Stabilire se il vettore $w = (11, 6, -15)$ appartiene a $T(\mathcal{V}_3)$ e, in caso affermativo, determinare almeno un vettore $v \in \mathcal{V}_3$ tale che $T(v) = w$.

4. Sia $T : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_m$ una trasformazione lineare.
(a) Dimostrare che, per ogni retta L di $\mathcal{V}_n$, $T(L)$, cioè l'immagine di L tramite T, è una retta o un punto.
(b) Sia $L = P + tA$. Dimostrare che T(L) è un punto se e solo se $A \in N(T)$.
(c) Sia $L = (1, 2) + t(1, 3)$. Determinare $T(L)$ per le seguenti trasformazioni lineari
(i) $T = R_{\pi/3}$ (rotazione di $\mathcal{V}_2$ di $\pi/3$).
(ii) $T = P_{L((2,-3)}$ (proiezione ortogonale di $\mathcal{V}_2$ su $L((2, -3))$.
(iii) $T = P_{L(-3,1)}$.
(iv) $T(x, y) = (-6x + 9y, 2x - 3y)$.
(v) $T = R_{L(1,3)}$ (simmetria rispetto a $L(1, 3)$).
(vi) $T = R_{L(2,-3)}$.
(vii) $T((x, y)) = (3x - y + 2x, x - y + z, x - 4z)$.
(ix) $T : \mathcal{V}_2 \to \mathcal{V}_2$ è la trasformazione lineare tale che $T((1, 1) = (2, -1)$ e $T((-1, 1)) = (0, 2)$.
(d) Sia $L = (1, -1, 0) + t(1, 1, -2)$. Determinare $T(L)$ per le seguenti trasformazioni lineari
(i) $T(x, y, z) = (x - y, x + 2z, y - 3z)$
(ii) $T : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$ tale che $T((1, 1, 1) = (2, 1, 0)$, $T((2, 2, -1) = (-4, -2, 1)$, $T((0, 2, -1)) = (0, 1, 0)$.
(iii) $T : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$ tale che $T((1, 1, 1) = (2, 1)$, $T((1, -1, 0) = (-1, -1)$, $T((1, 1, 0)) = (0, 1)$.
(iv) $T = P_U$, dove $U = L((1, 2, 1), (1, -1, 2))$.
(iv) $T = R_U$, (riflessione rispetto a U), dove $U = L(0, 1, 1)$.

5. (a) Sia $T : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_m$, lineare. Dimostrare che l'immagine di un parallelogramma tramite T è un parallelogramma, o un segmento di retta o un punto. Dare un esempio di ciascun caso.
(b) Descrivere l'immagine de quadrato unitario di $\mathcal{V}_2$ per le trasformazioni lineari $T(X) = AX$, dove:
(i) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$.

Notazione. Con $diag(a_1, ..., a_n)$ si denota la matrice quadrata di ordine n che ha $a_1, .., a_n$ sulla diagonale principale e zero altrove. In altre parole, $diag(a_1, ..., a_n) = (a_{ij})_{i,=1,..n}$ con $a_{ij} = \begin{cases} a_i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se} i \neq j \end{cases}$. Una matrice di questo tipo è detta una matrice *diagonale*.

6. (a) Sia $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortogonale di $\mathcal{V}_n$. Dimostrare che una trasformazione lineare $T : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_n$ tale che la sua matrice rappresentativa rispetto alla base $\mathcal{B}$ (in partenza e in arrivo) è del tipo $diag(1, .., 1, -1, .., -1)$ è una simmetria (o riflessione ortogonale). Rispetto a quale sottospazio lineare di $\mathcal{V}_n$?
(b) Stessa domanda quando la matrice rappresentativa rispetto alla base $\mathcal{B}$ è $diag(1, -1, 1, -1, ...)$.

7. (a) Sia $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortogonale di $\mathcal{V}_n$. Dimostrare che una trasformazione lineare $T : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_n$ tale che la sua matrice rappresentativa rispetto alla base $\mathcal{B}$ (in partenza e in arrivo) è del tipo $diag(1, .., 1, 0, .., 0)$ è una simmetria (o riflessione ortogonale). Rispetto a quale sottospazio lineare di $\mathcal{V}_n$?
(b) Stessa domanda quando la matrice rappresentativa rispetto alla base $\mathcal{B}$ è $diag(0, .., 0, 1, ..., 1)$.

8. Sia T una trasformazione lineare $T : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_n$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base $\mathcal{B}$ (in partenza e in arrivo) è del tipo $diag(-1, .., -1, 0, .., 0)$. Descrivere T come composizione di una simmetria e di una proiezione ortogonale.

9. (a) Sia $R_\theta : \mathcal{V}_2 \to \mathcal{V}_2$ la rotazione di angolo θ (in senso antiorario). Scrivere la matrice rappresentativa $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(R_\theta)$ rispetto ad una base ortogonale di $\mathcal{V}_2$
((b) Sia $\mathcal{C} = \{(0, 1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$. Scrivere la matrice rappresentativa $m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(T)$.

10. (a) Sia $R_{U,\theta}$ la rotazione, in senso antiorario, di $\mathcal{V}_3$ di un angolo θ attorno alla retta orientata $U = L(v)$. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_1, v_3\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}_3$, orientata positivamente, tale che $L(v_1, v_2) = U^\perp$. e tale che $v_3 = \frac{1}{\|v\|}v$. Scrivere la matrice rappresentativa di $R_{U,\theta}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
(b) Sia $U = L((1, 2, -2)$. Determinare la matrice rsipetto alla base canonica della rotazione di $\mathcal{V}_3$ di angolo $\pi/4$ attorno all'asse U. (Suggerimento: applicare il punto precedente per trovare la matrice della trasformazione lineare $R_{U,\pi/4}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Successivamente, dedurre la matrice trasformazione lineare $R_{U,\pi/4}$ rispetto alla base canonica.

11. Siano V e W due spazi lineari e siano $v \in V$, $v \neq O$ e $w \in W$. Dimostrare che esistono trasformazioni lineari $T : V \to W$ tali che $T(v) = w$. Ce ne sono un numero finito oppure infinite? Che succede se $v = O$?

12. Siano V e W due spazi lineari e siano v_1 e v_2 due vettori di V, linearmente indipendenti.
(a) Dimostrare che esistono trasformazioni lineari $T : V \to W$ tali che $T(3v_1 + v_2) = v_1 - v_2$ e $T(v_1 - 2v_2) = -4v_1 + 3v_2$.
. Inoltre, esprimere $T(v_1 + v_2)$ e $T(v_2)$ in funzione di v_1 e v_2.

13. Vero/falso? (giustificare)
(a) Data una matrice $A \in \mathcal{M}_{5,6}$, $T(X) = AX$ definisce una trasformazione lineare $T : \mathcal{V})5 \to \mathcal{V}_6$.
(b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathcal{V}_6 \to \mathcal{V}_4$ è suriettiva.
(c) Ogni trasformazione lineare $T : \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_6$ è iniettiva.
(d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathcal{V}_6 \to \mathcal{V}_4$ tale che $\dim N(T) = 2$ è suriettiva.
(e) Ogni trasformazione lineare $T : \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_6$ tale che $\dim T(\mathcal{V}_4) = 4$ è suriettiva.
(f) Se $\dim V = \dim W$ una trasformazione lineare $T :\to W$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

14. Siano V e W spazi lineari e siano $v_1, ..., v_k \in V$.
(a) Dimostrare che se $T(v_1), ..., T(v_k)$ sono linearmente indipendenti allora $v_1, ..., v_k$ sono linearmente indipendenti.
(b) Dimostrare che se $v_1, ..., v_k$ sono linearmente indipendenti e T è iniettiva, allora $T(v_1), ..., T(v_k)$ sono linearmente indipendenti.

Isometrie

Definizione: una *isometria* di $\mathcal{V}_n$ è una funzione $f : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_n$ tale che $\| f(v) - f(u) \| = \| v - u \|$ per ogni $u, v \in \mathcal{V}_n$. (NB: In altre parole f è un "movimento rigido", cioè, dopo avere applicato la f, la distanza di due punti qualsiasi di $\mathcal{V}_n$ rimane invariata.)

15 . Dimostrare una isometria è sempre iniettiva.

16 . Dimostrare che una funzione $f : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_n$ è un'isometria se e solo se $f(v) \cdot f(w) = v \cdot w$ per ogni $v, w \in \mathcal{V}_n$.

17. Sia $T : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_n$ una trasformazione lineare.

(i) Dimostrare che se T è un'isometria, allora T ha la seguente proprietà: se $\{e_1, ..., e_n\}$ è una base ortonormale di $\mathcal{V}_n$, allora anche $\{T(e_1), ..., T(e_n)\}$ è una base ortonormale di $\mathcal{V}_n$.

(ii) Dimostrare che se esiste una base ortonormale $\{e_1, ..., e_n\}$ di $\mathcal{V}_n$ tale che $\{T(e_1), ..., T(e_n)\}$ è una base ortonormale di $\mathcal{V}_n$ allora T è un'isometria.

18. (a) Descrivere tutte le trasformazioni lineari $f : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_n$ che sono isometrie tali che il determinante di $m(T)$ (matrice rappresentativa di T rispetto alla base canonica) ha determinante positivo.
(b) Descrivere tutte le trasformazioni lineari $f : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_n$ che sono isometrie tali che il determinante di $m(T)$ ha determinante negativo.
(c) Descrivere tutte le trasformazioni lineari $T : \mathcal{V}_2 \to \mathcal{V}_2$ che sono isometrie.