Esercizi 20.12.2007

1. Siano $A = (2,0,1,-1)$, $B = (1,2,2,0)$, $C = (1,-1,1,1)$. (a) Trovare una base ortonormale $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ di $\mathcal{V}_4$ tale che $L(E_1) = L(A)$, $L(E_1, E_2) = L(A, B)$, $L(E_1, E_1, E_3) = L(A, B, C)$.
(b) Sia $A = 3E_1 + E_2 - 5E + 3 + 2E_4$ e $B = E_1 - 5E_2 + 3E_3 + 2E_4$. Determinare: $A \cdot B$, $\| A \|$, $parallel B \|$ e il coseno dell'angolo tra A e B.

2. Determinare una base ortonormale $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ di $\mathcal{V}_4$ tale che $L(E_1, E_2, E_3)$ sia uguale al sottospazio vettoriale delle soluzioni dell' equazione lineare $3x - 2y + z - 5u = 0$.

3. Determinare una base ortonormale $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ di $\mathcal{V}_4$ tale che $L(E_1, E_2)$ sia uguale al sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} x - 2y - z + t = 0 \\ 2x - z + 3u = 0 \end{cases}$.

4. Determinare una base ortonormale $\{E_1, E_2, E_3\}$ di $\mathcal{V}_3$ tale che $L(E_1, E_2)$ sia uguale al sottospazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione lineare $x - 2y + 2z = 0$.

5. Determinare una base ortonormale $\{E_1, E_2, E_3\}$ di $\mathcal{V}_3$ tale che E_1 formi un angolo di $\pi/3$ con il vettore $A = (1, 1, -1)$.

6. (a) Determinare la distanza del punto $P = (1,1,1)$ dalle retta $L : \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$.
(b) Determinare il punto di L più vicino a P.
(c) Determinare la distanza del punto $P = (1,1,1)$ dalle retta $R : \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$.
(d) Determinare il punto di R più vicino a P.

7. Si consideri $X = (1, 2, -3, 2)$. Siano inoltre $A = (1, 2, -1, 1)$ e $B = (1, 2, 0, 1)$. Scrivere X come somma di un vettore di $L(A, B)$ e di un vettore di $L(A, B)^{\perp}$.

8. Sia W il piano di equazione cartesiana $x - y + z = 0$. Sia $A = (1, 2, 3)$. (a) Determinare la proiezione di A su W e su $W^{\perp}$. (b) Sia $P = (1, 1, -1)$. Determinare la proiezione ortogonale della retta $P + tA$ su W.

9. Sia W il sottospazio delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} x - y + u = 0 \\ x - y + 2z + u = 0 \end{cases}$ e sia $X = (1, 2, 1, 3)$
(a) Determinare le proiezioni ortogonali di X su W e su $W^{\perp}$.
(b) Sia $P = (1, 1, 0, 1)$. Determinare la proiezione ortogonale su W della retta $P + tA$.
(c) Determinare la riflessione ortogonale di X rispetto a W.
(d) Determinare la riflessione ortogonale di X rispetto a $W^{\perp}$.
(e) Determinare la riflessione ortogonale rispetto a W della retta $P + tA$.
(f) Determinare la riflessione ortogonale rispetto a $W^{\perp}$ della retta $P + tA$.

10. Sia W il sottospazio delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} x - y + u = 0 \\ x - y + 2z + u = 0 \end{cases}$ e $P = (2, 1, 1, 0)$. Determinare $d(P, W)$.
(b) Stessa domanda con W uguale al sottospazio delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} x - y + u = 2 \\ x - y + 2z + u = -1 \end{cases}$.
(c) Stessa domanda con $W = L(A, B)$, dove $A = (1, -1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, 2, 0)$.
(d) Stessa domanda con $W = Q + tA + sB$, dove A e B sono come sopra e $Q = (0, 0, 2, 1)$.

Domande di ricapitolazione.

1. In uno spazio lineare *euclideo* (cioè dotato di un prodotto scalare), che cosa si intende per *angolo* tra due vettori dati?

2. Dato uno spazio lineare V, che cosa si inten de per *sotospazio lineare di* V?

3. Dato uno spazio lineare V, che cosa significa che V *ha dimensione finita*?

4. Sia V uno spazio lineare euclideo, di dimensione finita, uguale a n. Sia W un sottospazio lineare di V, di dimensione k. (a) Che cosa si intende per $W^\perp$? (b) Qual è la dimensione di $W^\perp$?

5. Sia V uno spazio lineare (di dimensione finita) e sia W un suo sottospazio lineare. (a) È vero che $\dim W \leq \dim V$? (b) È vero che se $\dim W = \dim V$ allora $W = V$?

6. È vero che se U e W sono sottospazi lineari di uno spazio lineare V, allora anche l'unione $U \cup W$ è un sottospazio lineare di V?

7. Sia W il sottospazio lineare di $\mathcal{V}_n$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$.

(1) Cosa possiamo dire su $\dim W^\perp$?
(a) $\dim W^\perp = k$, (b) $\dim W^\perp \leq k$, (c) $\dim W^\perp \geq k$.
(2) Cosa possiamo dire su $\dim W$?
(a) $\dim W = n - k$, (b) $\dim W \leq n - k$, (c) $\dim W \geq n - k$.