Alcuni esercizi sulla risoluzione di sistemi lineari ed applicazioni

Oltre agli esercizi del libro di testo indicati nel Diario delle Lezioni, ecco altri esercizi sui Sistemi Lineari, Metodo di Eliminazione ed applicazioni .

1. Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\text{(a)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \end{cases} ; \quad \text{(b)} \begin{cases} 4x + y + z + 2v + 3w = 0 \\ 14x + 2y + 2z + 7v + 11w = 0 \\ 15x + 3y + 3z + 6v + 10w = 0 \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} 5x + 4y + 7z = 3 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + 3y + 5z = 2 \end{cases} \qquad \text{(d)} \begin{cases} 19x - y + 5z + t = 3 \\ 18x + 5z + t = 1 \\ 6x + 9y + t = 1 \\ 12x + 18y + 3t = 3 \end{cases}$$

2. Si considerino, per ogni $t \in \mathbf{R}$, i sistemi lineari

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (t+4)x_2 - 3x_3 = 1/2 \\ 2x_1 + (t-2)x_2 + (2t-6)x_3 = 5/2 \end{cases} , \quad \text{(b)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + tx_2 - 2x_3 = 4/7 \\ 2x_1 + (t+2)x_2 + (2t+2)x_3 = 18/7 \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x + (t-1)y + z = 1 \\ (2t-3)x + y + (t-1)z = 3 - t \\ 2x + ty + tz = t \\ tx + 2y + (2t-2)z = 4 - t \end{cases}$$

Per ogni sistema, stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ è compatibile e per quali $t \in \mathbf{R}$ ha un'unica soluzione.

3. Si consideri, per ogni $t \in \mathbf{R}$, il sistema lineare $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + (t-1)x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = t \end{cases}$

(a) Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ il sistema è compatibile e per quali $t \in \mathbf{R}$ la soluzione è unica.
(b) Per i $t \in \mathbf{R}$ tali che il sistema è compatibile, risolverlo.

4. Si considerino i seguenti vettori di $\mathcal{V}^3$: $A_1 = (1,2,1)$, $A_2 = (1,2,-1)$, e, per ogni $t \in \mathbf{R}$, $A_3(t) = (5, 3+t, 1)$. (a) Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ si ha che $\{A_1, A_2, A_3(t)\}$ sono linearmente dipendenti. (b) Determinare, per ogni $t \in \mathbf{R}$, dimensione e una base di $L(A_1, A_2, A_3(t))$.

5. Si considerino i seguenti vettori di $\mathcal{V}^4$: $A_1 = (1,2,1,-1)$, $A_2 = (1,2,1,3)$, $A_3 = (1,0,0,1)$, $A_4 = (1,2,1,-9)$. (a) Stabilire se A_1, A_2, A_3, A_4 sono linearmente indipendenti; (b) Determinare dimensione e una base di $L(A_1, A_2, A_3, A_4)$; (c) Stabilire se A_1 è combinazione lineare di A_2, A_3, A_4 e, in caso affermativo, mostrare una tale combinazione lineare; (d) Stabilire se A_3 è combinazione lineare di A_1, A_2, A_4 e, in caso affermativo, mostrare una tale combinazione lineare;

6. Siano $A = (1,2,1,-1)$, $B = (1,0,1,1)$, $C = (2,2,1,0)$, $D = (0,2,1,-2)$, $E = (1,1,-1,1)$
(a) Determinare dimensione e una base di $L(A,B,C,D,E)$;
(b) determinare lo spazio delle soluzioni del sistema $xA + yB + zC + vD + wE = O$;
(c) stabilire se $A \in L(B,C,D,E)$ e, in caso affermativo, esibire una tale combinazione lineare che esprima A come combinazione lineare di B,C,D,E.

7. Siano $A = (1,1,1,1)$, $B = (0,1,1,1)$, $C = (1,2,1,1)$, $D = (0,1,4,2)$. (a) Determinare una base di $L(A,B,C,D)$. (b) Sia $E = (-3,-3,0,0)$. Stabilire se $E \in L(A,B,C,D)$ e, in caso affermativo, le componenti di E rispetto alla base di $L(A,B,C,D)$ trovata precedentemente. (c) Determinare un sistema di equazioni cartesiane di $L(A,B,C,D)$. (d) Determinare una base dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $xA + yB + zC + vD = O$.

8. Determinare sistemi di equazione cartesiane per:
(a) $P + sA + tB + vC$, dove $A = (2,3,0,1)$, $B = (1,2,1,1)$, $C = (2,3,1,0)$, $D = (3,1,1,-2)$;
(b) $P + tA$, dove $P = (-7,2,-6,-5,3)$ e $A = (1,-1,-1,1,1)$;
(c) $L(A,B,C)$, dove $A = (1,0,2,1)$, $B = (3,1,0,1)$, $C = (0,1,1,1)$.

9. Sia $P = (1,0,0,1)$ e siano $A = (1,-1,0,0)$, $B = (1,2,1,1)$, $C = (1,11,4,4)$. Stabilire se $Q = (1,-3,-1,0)$ appartiene a $P + sA + tB + vC$.

10. Dato il piano $M:\ 2x + 3y - z = 4$ e la retta $L: \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$ stabilire se sono paralleli o incidenti, e determinare l'eventuale punto di intersezione.

11. Date le rette $L: \begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ e $M: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$ stabilire se sono parallele, incidenti in un punto, o nessuna delle due cose (in quest'ultimo caso le rette si dicono *sghembe)*.

12. *Stabilire se le rette* $(3,-1,2) + t(1,-1,2)$ *e* $(2,1,2) + t(-1,1,1)$ *sono parallele, incidenti o sghembe.*

13. *Stabilire se le rette* $L: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ *e* $R: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + y + z = 2 \end{cases}$ *sono parallele, incidenti o sghembe e, eventualmente, determinare il punto intersezione.*

14. *Risolvere i sistema lineari complessi:* (a) $\begin{cases} x + iy - z = 1 \\ x - iy - z = i \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - iy + z = 0 \\ ix - y + iz = 0 \\ x + iy + z = 0 \end{cases}$.