

GEOMETRIA ED ALGEBRA. ESERCIZI 1.

Oltre agli esercizi del libro di testo indicati nel Diario delle Lezioni, ecco altri esercizi di Geometria Analitica.

1. (a) Determinare equazione parametrica vettoriale ed equazione cartesiana per la retta L di $\mathcal{V}_2$ passante per $P = (2, 3)$ e ortogonale alla retta $(-1, 5) + t(-1, \sqrt{5})$.
(b) Determinare equazione parametrica vettoriale ed equazione cartesiana per la retta R di $\mathcal{V}_2$ passante per $P = (2, 3)$ e perpendicolare alla retta di equazione cartesiana $3x + 2y = 5$.
2. (a) Calcolare la distanza del punto $P = (1, -1)$ dalla retta $L : 2x - y = -2$. Determinare anche il punto di L di minima distanza da P .
(b) Calcolare la distanza del punto $P = (1, -1)$ dalla retta $(-1, 5) + t(-1, \sqrt{5})$.
3. Date le rette $L : 2x - y + 1$ e $R : (3, 1) + t(4, 3)$, determinare le due bisettrici di L e R , ossia il luogo dei punti $P \in \mathcal{V}_2$ tali che $d(P, L) = d(P, R)$.
4. (a) Sia P il punto d'intersezione delle rette $L : (-7, 0) + t(3, 1)$ e $R : (-3, 14) + t(-1/2, 3)$. Determinare la retta passante per P e $Q = (2, -1)$.
(b) Ripetere l'esercizio con $R : x + 2y = 1$.
(c) Ripetere l'esercizio con $L : 3x - y = 0$ e $R : x + 2y = 1$.
5. Siano $L : x + 2y = 1$ e $R : 2x - 3y = 0$. Le rette L e S dividono $\mathcal{V}_2$ meno le due rette (cioè l'insieme $\{(x, y) \in \mathcal{V}_2 \mid x + 2y \neq 1 \text{ e } 2x - 3y \neq 0\}$) in quattro parti. Rappresentare tramite disequazioni la parte che contiene il punto $P = (1, 2)$.
6. Determinare due equazioni parametriche vettoriali della retta $L : 3x + 7y = 1/2$.
7. Rappresentare tutti e soli i punti del segmento di estremi $P = (1, 1)$ e $Q = (2, -3)$ e determinarne il punto medio. Stabilire se $(3, -7)$ appartiene al segmento in questione.
8. Provare che l'insieme delle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} 2x - 6y + z = 1 \\ x - 3y - 5z = 0 \end{cases}$$
 è una retta e determinarne un'equazione parametrica.
9. (a) Dati i piani $M_1 : 2z + 4z = 1$ e $M_2 : x + 2y = 3$ determinarne i piani bisettori (cioè i piani i cui punti P verificano la condizione $d(P, M) = d(P, M_1)$).
(b) Ripetere l'esercizio con $M_1 = x + y - 2z = 1$ e $M_2 = 2x + 2y - 4z = 1$. In questo caso c'è un solo piano bisettore. Perché?
10. (a) Data la retta L di equazioni cartesiane $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$ determinare il piano contenente L e il punto $Q = (-1, -3, 0)$.
(b) Ripetere l'esercizio con $Q = (0, 5, 0)$.
11. Determinare la retta passante per $P = (1, -1, 1)$, parallela al piano $M : x - 3y = 2$ e perpendicolare alla retta $L : (0, 0, 1) + t(2, 1, 1)$.
12. Determinare il piano contenente la retta $L : (1, 2, 0) + t(1, -1, 3)$ e perpendicolare al piano $M : 2x - 4y + z = 5$.
13. Determinare, se esiste, una retta passante per $P = (1, -1, 2)$, parallela al piano $M : x - 2y = 1$ e incidente la retta $L : \begin{cases} z = 1 \\ x + y + z = \sqrt{2} \end{cases}$.
14. Data una retta L in $\mathcal{V}_3$, come si può trovare la minima distanza di un punto $Q \in \mathcal{V}_3$ da L ? Provare a calcolare la minima distanza del punto $Q = (1, 1, 1)$ dalla retta $L : \begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$. Trovare anche il punto di L più vicino a Q .
15. Sia $L : (1, 1, -1) + t(2, 1, -1)$. e siano $P = (1, 1, 0)$, $Q = (0, 1, -1)$. Determinare, se esistono, i punti R su L tale che l'area del triangolo di vertici P , Q e R sia uguale a 10.

- 16.** Siano $A_1 = (1, 1, -1)$, $A_2 = (1, 2, 0)$, $A_3 = (1, 1, 1)$. Stabilire se $\{A_1, A_2, A_3\}$ formano una base di $\mathcal{V}_3$ e, in caso affermativo, determinare le coordinate del vettore $B = (0, 1, 1)$ rispetto a tale base.
- 17.** Siano $A_1 = (1, 1, -1)$, $A_2 = (1, 2, 0)$, $A_3 = (-2, -5, -1)$. Stabilire se $\{A_1, A_2, A_3\}$ formano una base di $\mathcal{V}_3$ e, in caso negativo, esprimere un vettore di $\{A_1, A_2, A_3\}$ come combinazione lineare degli altri due.
- 18.** (a) Si considerino, al variare di $t \in \mathbf{R}$, i vettori $A_1(t) = (t + 1, t + 2, 2t)$, $A_2(t) = (1, t^2 + 1, 1)$, $A_3(t) = (1, 2, 1)$. Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ i vettori $A_1(t), A_2(t), A_3(t)$ formano una base di $\mathcal{V}_3$.
 (b) Si consideri, per ogni $t, s \in \mathbf{R}$, il sistema di equazioni lineari $x A_1(t) + y A_2(t) + z A_3(t) = (s, 2s, 1)$. Stabilire per quali t, s tale sistema ha soluzione unica, infinite soluzioni, nessuna soluzione.
 (c) Si considerino, per ogni $t \in \mathbf{R}$, i piani $M_1(t) : (t + 1)x + (t + 2)y + 2tz = 3$, $M_2(t) : x + (t^2 + 1)y + z = 0$, $M_3(t) : x + 2y + z = 2$. Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ tali piani si intersecano in un'unico punto. Calcolare tale punto per $t = 0$.
- 19.** Sia $A = (2, 2, -1)$. Determinare una base ortonormale di $\mathcal{V}_3$ contenente un vettore parallelo ad A .
- 20.** Siano $A = (2, 2, -1)$ e $B = (1, 1, 0)$. Determinare una base ortonormale di $\mathcal{V}_3$ contenente un vettore parallelo ad A e un vettore in $L(A, B)$.