Esercizi 23.01.2008

1. (a) Sia V uno spazio lineare e $\mathcal{B} = \{v_1, .., v_n\}$ una base di V. Sia $T : V \to V$ una trasformazione lineare tale che $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = diag(a_1, ..., a_n)$. Determinare $T(v_1)$, $T(v_2)$, ..., $T(v_n)$.
(b) Siano $v_1 = (1, 0, 1, -2)$, $v_2 = (0, 1, 2, 1)$, $v_3 = (0, 2, -1, 1)$, $v_4 = (2, 0, 1, 1)$.
(c) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathcal{V}_4$.
(d) Sia $T : \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_4$, lineare, tale che $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$. Determinare $T(v_1)$, $T(v_2)$, $T(v_3)$, $T(v_4)$.
(e) Determinare $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T^{-1})$

2. Sia V uno spazio lineare e $\mathcal{B} = \{v_1, .., v_n\}$ una base di V. Sia $T : V \to V$ una trasformazione lineare tale che la j-esima colonna di $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ è tE^j (dove $t \in \mathbf{R}$ e E^j è il versore del j-esimo asse coordinato, visto come vettore colonna). Chi è $T(v_j)$?

3. Sia V uno spazio lineare e $\mathcal{B} = \{v_1, .., v_n\}$ una base di V. Sia $T : V \to V$ una trasformazione lineare tale che $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ è triangolare superiore. Dimostrare che $T(L(v_1, ..., v_i)) \subseteq L(v_1, .., v_i)$ per ogni $i = 1, .., n$.

4. Sia V uno spazio lineare e $\mathcal{B} = \{v_1, .., v_n\}$ una base di V. Sia $T : V \to V$ una trasformazione lineare tale che $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ è una matrice a blocchi $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, dove $A \in \mathcal{M}_k$ e $B \in \mathcal{M}_{n-k}$. Vero/Falso?
(a) $T(v_i)$ è proporzionale a v_i per ogni $i = 1, .., n$. (b) $T(L(\{v_1, ..., v_k\}) \subseteq L(\{v_1, ..., v_k\})$ e $T(L(\{v_k, ..., v_n\}) \subseteq L(\{v_k, ..., v_n\})$. (c) Tè biettiva.

5. Siano $u = (1, -1, 0, 3)$ e $v = (0, 2, -1, 1)$.
(a) Esibire, se possibile, due diverse trasformazioni lineari $T, U : \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_2$ tali che $N(T) = N(U) = L(u, v)$.
(b) Esibire, se possibile, due diverse trasformazioni lineari $S, R : \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_4$ tale che $N(S) = N(R) = L(u, v)$
(c) Esibire, se possibile, una trasformazione lineare $H : \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_2$ tale che $L(u, v) \subseteq N(H)$ e $rg\,(H) = 1$.

6. Sia $T : \mathcal{V}_{\bigtriangledown} \to \mathcal{V}_6$ lineare, di rango uguale 3. Vero/Falso? (a) Esistono sottospazi vettoriali W di $\mathcal{V}_5$ tale che $\dim W = 3$ e $T(W) = 0$
(b) Esistono sottospazi vettoriali W di $\mathcal{V}_5$ tale che $\dim W = 2$ e $T(W) = 0$
(c) Esistono sottospazi vettoriali W di $\mathcal{V}_5$ tale che $\dim W = 1$ e $T(W) = 0$
(d) Esistono sottospazi vettoriali W di $\mathcal{V}_5$ tale che $\dim W = 4$ e $\dim T(W) = 1$
(e) Esistono sottospazi vettoriali W di $\mathcal{V}_5$ tale che $\dim W = 4$ e $\dim T(W) = 2$
(f) Esistono sottospazi vettoriali W di $\mathcal{V}_5$ tale che $\dim W = 4$ e $\dim T(W) = 3$
(g) Esistono sottospazi vettoriali W di $\mathcal{V}_5$ tale che $\dim W = 3$ e $\dim T(W) = 3$
(h) Esistono sottospazi vettoriali W di $\mathcal{V}_5$ tale che $\dim W = 4$ e $\dim T(W) = 4$.

7. Sia $T : \mathcal{V}_{\bigtriangledown} \to \mathcal{V}_6$ la trasformazione lineare tale che $T(E_1) = (1, 2, 0, 1, -1, 1)$, $T(E_2) = (2, -1, 1, 0, -1, 0)$, $T(E_3) = (3, 1, 1, 1, -2, 1)$, $T(E_4) = (1, -3, 1, -1, 0, -1)$, $T(E_5) = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$. Verificare che $rg(T) = 3$ e, se esistono, dare esplicitamente esempi di sottospazi che soddisfano alle condizioni (a)...(h) dell'esercizio precedente.

8. Siano $A, B \in \mathcal{M}_n$, invertibili. Vero/falso? (a) $A + B$ è invertibile, (b) AB è in invertibile, (c) tA è invertibile per ogni $t \neq 0$; (d) A^n è inveribile per ogni $n \in \mathbf{Z}$, (e) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

9. Siano $A, B \in \mathcal{M}_n$, invertibili. Vero/falso? (a) $\det(A + B) = \det A + \det B$. (a) $\det(tA) = t \det A$, (c) $\det(tA) = t^n \det A$, $\det(A^n) = (\det A)^n$ per ogni $n \in \mathbf{Z}$.