IV Appello scritto di Geometria ed Algebra, Corso di Laurea in Ing. Elettronica, 10.09.2008

Accompagnare le soluzioni degli esercizi con spiegazioni chiare ed essenziali (soluzioni non motivate non verranno valutate).

1. Sia L la retta di equazione parametrica vettoriale $(1, 0, 1) + t(1, 0, 2)$ e sia M il piano di equazione parametrica vettoriale $(0, 1, 0) + t(1, 1, -1) + s(1, 0, 1)$. Sia inoltre $Q = (1, 0, 0)$.

(a) Determinare, se esistono, tutti i punti P di L tali che $d(P, M) = 1$.

(b) Determinare, se esistono, tutti i punti P di L tali che $d(P, Q) = 1$.

Soluzione. (a) Un punto di L è della forma $P_t = (1, 0, 1) + t(1, 0, 2)$.

Denotiamo l'equazione parametrica vettoriale di M nel modo seguente: $M = R + tA + sB$. Allora $d(P_t, M) = d(P_t, S)$, dove S è un qualsiasi punto di M , per esempio $S = R = (0, 1, 0)$. Inoltre $d(P_t, S) = \|pr_{L(A,B)^\perp}(P_t - S)\|$. Nel nostro caso, $L(A, B)^\perp = L(A \times B) = L(1, -2, -1)$. In definitiva:

$$d(P_t, S) = \|pr_{L(1,-2,-1)}((1, 0, 1) + t(1, 0, 2) - (0, 1, 0))\| = \frac{|-t+2|}{\sqrt{6}}$$

che da' luogo alle due equazioni $\frac{-t+2}{\sqrt{6}} = 1$, $-t+2 \geq 0$, che ha $t_1 = 2 - \sqrt{6}$ come soluzione, e $\frac{-t+2}{\sqrt{6}} = -1$, $-t+2 < 0$, che ha $t_2 = 2 + \sqrt{6}$ come soluzione.

Dunque punti come richiesto esistono, sono due, e precisamente $P_{t_1} = (1, 0, 1) + t_1(1, 0, 2)$ e $P_{t_2} = (1, 0, 1) + t_2(1, 0, 2)$, dove $t_1, t_2 = 2 \pm \sqrt{6}$.

(b) $d(P_t, Q) = d((1, 0, 1) + t(1, 0, 2), (1, 0, 0)) = \|(t, 0, 1 + 2t)\| = \sqrt{5t^2 + 4t + 1}$.

Imponendo $d(P_t, Q) = 1$ si ottiene $5t^2 + 4t = 0$, che ha come soluzioni $t_1 = 0$ e $t_2 = -4/5$. Dunque punti con la proprietà richiesta esistono, sono due e precisamente $P_0 = (1, 0, 1) + 0(1, 0, 2) = (1, 0, 1)$ e $P_{-4/5} = (1, 0, 1) - 4/5(1, 0, 2) = (-4/5, 0, -3/5)$.

2. Scrivere l'equazione cartesiana dell'iperbole passante per il punto $(0, 4)$ e avente come asintoti le rette di equazione $y = 3x + 1$ e $y = -3x - 2$. Disegnare approssimativamente l'iperbole in questione.

Soluzione. Il fatto che le direzioni degli asintoti siano simmetriche rispetto agli assi coordinati indica che gli assi di simmetria dell'iperbole sono traslati degli assi coordinati. Inoltre il centro di simmetria è l'intersezione degli asintoti, cioè $(-1/2, -1/2)$. Dunque l'equazione della parabola avrà una delle seguenti forme:

$$1) \quad \frac{(x+1/2)^2}{c^2} - \frac{(y+1/2)^2}{d^2} = 1 \qquad 2) \quad -\frac{(x+1/2)^2}{c^2} + \frac{(y+1/2)^2}{d^2} = 1$$

Gli asintoti hanno direzione $y = \pm d/c$. Quindi $d/c = 3$, cioè $d = 3c$. Sostituendo, le due equazioni diventano

$$1) \quad \frac{(x+1/2)^2}{c^2} - \frac{(y+1/2)^2}{9c^2} = 1 \qquad 2) \quad -\frac{(x+1/2)^2}{c^2} + \frac{(y+1/2)^2}{9c^2} = 1$$

Si vede facilmente (ragionando geometricamente oppure per sostituzione nelle equazioni) che il fatto che il punto $(0, 4)$ stia sull'iperbole implica che la forma dell'equazione è la 2). In altre parole, l'iperbole interseca l'asse di simmetria parallelo all'asse y . In definitiva, l'equazione è della forma

$$-\frac{(x+1/2)^2}{c^2} + \frac{(y+1/2)^2}{9c^2} = 1.$$

Imponendo il passaggio per $(0, 4)$ si ottiene $c^2 = 2$. Dunque l'equazione cercata è

$$-\frac{(x+1/2)^2}{2} + \frac{(y+1/2)^2}{18} = 1 \qquad \text{o anche} \qquad -(x+1/2)^2 + \frac{(y+1/2)^2}{9} = 2$$

- 3.** Sia $V = t(1, 1, -1)$, $t \in \mathbf{R}$. (a) Dato il vettore $A = (x, y, z) \in \mathcal{V}_3$, determinare le coordinate della riflessione di A rispetto a V . In altre parole, determinare la matrice rappresentativa, rispetto alla base canonica di $\mathcal{V}_3$, della riflessione $R_V : \mathcal{V}_3 \rightarrow \mathcal{V}_3$.
 (b) Determinare autovalori e autospazi di R_V e stabilire se R_V è diagonalizzabile.

Soluzione. (a) Ricordiamo che R_V è definita come segue: sappiamo che A si decompone (in modo unico) come: $A = pr_V(A) + pr_{V^\perp}(A)$. Per definizione $R_V(A) = pr_V(A) - pr_{V^\perp}(A)$.
 Visto che, dai dati che abbiamo, è semplice determinare $pr_V(A)$, è conveniente scrivere R_V come segue:
 $R_V(A) = pr_V(A) - (A - pr_V(A)) = 2pr_V(A) - A$. Quindi
 $R_V((x, y, z)) = 2pr_V((x, y, z)) - (x, y, z) = 2/3((x, y, z) \cdot (1, 1, -1))(1, 1, -1) - (x, y, z) = \frac{2}{3}(x+y-z)(1, 1, -1) - (x, y, z) = (-1/3x + 2/3y - 2/3z, 2/3x - 1/3y - 2/3z, -2/3x - 2/3y - 1/3z)$.

In termini di matrici,

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(R_V) = 1/3 \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Alternativamente, ma in modo un po' più lungo, si può applicare il cambiamento di base. Si trova una base di $V^\perp$, cioè dello spazio delle soluzioni di $x + y - z = 0$. Ad esempio $\{(1, -1, 0), (1, 0, 1)\}$. La si completa ad una base di $\mathcal{V}_3$ usando il generatore di V : $\mathcal{B} = \{(1, -1, -0), (1, 0, 1), (1, 1, -1)\}$. Si ha che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(R_V) = \text{diag}(-1, -1, 1)$. Poi si usa il fatto che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(R_V) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(R_V) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id), \quad (2)$$

che $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id) = (M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id))^{-1}$. Calcolando quest'ultima inversa e sostituendo tutto nella (2) si riottiene la matrice (1) (fatelo come esercizio!).

(b) La risposta è evidente: gli autovalori sono 1 (semplice) e -1 (doppio). L'autospazio relativo all'autovalore 1 è V mentre l'autospazio relativo all'autovalore -1 è $V^\perp$. R_V è diagonalizzabile. Ad esempio, $\mathcal{B}$ è una base di autovettori.

- 4.** Si consideri, al variare di $t \in \mathbf{R}$, la matrice $C_t = \begin{pmatrix} t & 2 & t & -1 \\ 1 & 1 & t & t-3 \\ 1 & 1 & 2t+2 & 2t+7 \\ 0 & 0 & 1 & t+1 \end{pmatrix}$.

- (a) Determinare $\det C_t$ al variare di $t \in \mathbf{R}$
 (b) Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ il sistema lineare di matrice completa (o aumentata) C_t è compatibile e, per tali t , stabilire se la soluzione è unica.

Soluzione. (a) Sottraendo la seconda riga dalla terza (operazione che non cambia il determinante), risulta

$$C'_t = \begin{pmatrix} t & 2 & t & -1 \\ 1 & 1 & t & t-3 \\ 0 & 0 & t+2 & t+10 \\ 0 & 0 & 1 & t+1 \end{pmatrix}, \text{ che è una matrice triangolare a blocchi (Apostol, es. 5.11.5 e 5.11.6 p.183).}$$

$$\text{Dunque } \det C_t = \det \begin{pmatrix} t & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} t+2 & 2t+10 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} = (t-2)(t^2+2t-8) = (t-2)^2(t+4).$$

(b) Per il punto precedente, si ha che $rg(C_t) = 4$ per $t \neq 2, -4$. Per tali t il sistema in questione non può essere compatibile, perchè il rango della matrice completa, cioè quattro, è necessariamente maggiore del rango della matrice incompleta, che è al massimo tre.

Se $t = 2$ risulta

$$C'_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In questo caso, come si vede facilmente, la matrice incompleta ha rango due, mentre la matrice completa ha rango tre. Quindi anche per $t = 2$ il sistema è incompatibile.

Per $t = -4$, si ha

$$C'_{-4} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

In questo caso, come si vede facilmente, sia la matrice incompleta che quella completa hanno rango tre. Quindi per $t = -4$ il sistema è compatibile.

In conclusione, il sistema lineare la cui matrice completa è C_t è compatibile se e solo se $t = -4$. In questo caso la soluzione è unica perchè è un sistema in tre incognite, e il rango è uguale a tre.