I Appello scritto di Geometria ed Algebra, Corso di Laurea in Ing. Elettronica, 10.09.2008

COGNOME NOME

Accompagnare le soluzioni degli esercizi con spiegazioni chiare ed essenziali (soluzioni non motivate non verranno valutate).

1. Siano $A = (2, 1, -2)$ e $B = (1, 2, 2)$. Sia inoltre $P = (0, 1, 1)$.
Determinare, se esistono, due punti Q e R tali che: $Q - P$ sia parallelo e concorde ad A, $R - P$ sia parallelo e concorde a B, e il triangolo di vertici P,Q e R sia equilatero.

Soluzione. Punti Q ed R come richiesto NON ESISTONO. Infatti, posto $Q - P = tA$ e $R - P = sB$ $(t, s > 0)$, si dovrebbe avere $\| Q - P \| = 3t = \| R - P \| = 3s$ da cui $t - s$. Inoltre dovrebbe essere anche $\| R - Q \| = 3t$. Ma $\| R - Q \| = \| tB - tA \| = t \| B - A \|$. Quindi dovrebbe essere $t \| B - A \| = 3t$ che e' impossibile (si noti che $\| B - A \| \neq 3$).

Altrimenti, molto più semplicemente, si potrebbe osservare che, affinchè il tringolo in questione sia equilatero, è necessario che l'angolo tra A e B misuri $\pi/3$, il che non è vero.

2. Determinare una base ortogonale $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ di $\mathcal{V}_4$ tale che $L(E_1, E_2)$ coincida con il sottospazio vettoriale delle soluzione del sistema lineare $\begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ 2x - z + 2t = 0 \end{cases}$.

Soluzione. Sia V il sottospazio delle soluzioni dello spazio in questione. Sappiamo che ha dimensione due. Sappiamo anche che $V^{\perp} = L(v_1, v_2)$, dove $v_1 = (1, -1, -1, 1)$ e $v_2 = (2, 0, -1, 2))$. Dunque è sufficiente trovare una base ortogonale di $V^{\perp}$, diciamo $\{E_3, E_4\}$ e metterla insieme ad una base ortogonale di V, diciamo $\{E_1, E_2\}$.
Base ortogonale di $V^{\perp}$: $E_3 = v_1 = (1, -1, -1, 1)$, $E_4 = v_2 - \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|^2} v_1 = (1/4)(3, 5, 1, 3)$.
Base ortogonale di V: si trova prima una base di V, risolvendo il sistema lineare. Ad esempio, si trova che $z = 2x + 2t$ e $y = x - z + t = -x - t$. Dunque le soluzioni sono le 4-uple della forma $(x, -x-t, 2x+2t, t)$ al variare di x, t in $\mathbf{R}$, da cui segue che $\{(1, -1, 2, 0), (0, -1, 2, 1)\}$ è una base di V. Per trovare la proiezione ortogonale si ragiona come sopra, trovando $E_1 = (1, -1, 2, 0)$, $E_2 = (-5/6, 1/6, 1/3, 1)$. Si ha dunque che $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è una base come richiesto (si noti che la richesta è di una base *ortrogonale*, non necessariamente *ortonormale*).

3. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di $\mathcal{V}^3$. Per ognuna delle proprietà seguenti, stabilire se esiste un'applicazione lineare che soddisfa tali proprietà. In caso affermativo, stabilire anche se essa è unica e, in tal caso, determinarne la matrice rappresentativa rispetto alla base $\mathcal{B}$ (sia in partenza che in arrivo.
(a) $L : \mathcal{V}^3 \to \mathcal{V}^3$, tale che $L(v_1) = v_3$, $L(v_2) = v_3$ e $L(v_3) = 3v_2 - 2v_3$.
(b) $T : \mathcal{V}^3 \to \mathcal{V}^3$ tale che $T(v_1) = v_2$, $T(v_2) = v_3$ e $T(3v_2 - 2v_3) = v_1$.

Soluzione. (a) La risposta è: esiste ed è unica in quanto, per la teoria, data una base $\mathcal{B}$ di uno spazio vettoriale V, esiste ed è unica un'applicazione lineare definita su V le cui immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$ siano preassegnate (Apostol, Teorema 4.12). La matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L)$ è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
(b) La risposta è che l'applicazione lineare in questione esiste ed è unica. Si ragiona come sopra. Infatti, visto che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base, anche $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, 3v_2 - 2v_3\}$ lo è (facile ragionamento: le coordinate di $3v_2 - 2v_3$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono $(0, 3, -2)$ quindi, per l'unicità delle coordinate rispetto ad una base, non può essere che $3v_2 - 2v_3$ sia combinazione lineare di v_1 e v_2). Per trovare $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ si deve fare un cambiamento di base. Sappiamo che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ inoltre sappiamo che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, e dunque $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id) = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. Ora la matrice richiesta è trovata, poichè sappiamo che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Oppure, molto più semplicemente, si osserva che $v_3 = -1/2((3v_2 - 2v_3) - 3v_2)$. Quindi $T(v_3) = -1/2(v_1 - 3v_3) = -1/2v_1 + 3/2v_3$ da cui si ottiene direttamente $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T)$.

4. Sia $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$. (a) Determinare gli autovalori di A. (b) Stabilire se A è diagonalizzabile.

Soluzione. (a) Si trova, calcolando opportunamente il polinimio caratteristico, che gli autovalori sono $\lambda_1 = 4$ (semplice) e $\lambda_2 = -2$ (doppio).
(b) Si ha che $(-2)I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & -7 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango due, come si vede facilmente. Pertanto $\dim V_{-2} = 1$ e quindi A non è diagonaliizabile, perchè, per questo autovalore, la molteplicità geometrica è minore di quella algebrica.

5. Sia data la conica $\mathcal{C}$ di equazione $7x^2 - 10\sqrt{3}xy - 3y^2 + 12\sqrt{3}x - 12y - 12 = 0$. (a) Determinare la forma canonica di $\mathcal{C}$. (b) Determinare le coordinate dell'eventuale centro di simmetria e le equazioni parametriche degli assi di simmetria e degli eventuali asintoti. Disegnare approssimativamente la conica.

Soluzione. La parte quadratica è $Q(x,y) = 7x^2 - 10\sqrt{3}xy - 3y^2$, la cui matrice è $\begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}$, i cui autovalori risultano essere $\lambda_1 = 12$ e $\lambda_2 = -8$, corrispondenti rispettivamente agli autovettori ortogonali $u = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ (scelti in modo che $\mathcal{B} = \{u, v\}$ risulti una base ortogonale orientata positivamente). Dunque la conica – *se non degenere* – è un iperbole. Sia $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ (dove $\mathcal{E}$ è la base canonica). Dunque

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2x' + 1/2y' \\ -1/2x' + \sqrt{3}/2y' \end{pmatrix},$$

dove $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sono le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$. Senza fare calcoli, sappiamo dalla teoria che $Q(x,y) = 12{x'}^2 - 8{y'}^2$. Dunque

$$7x^2 - 10\sqrt{3}xy - 3y^2 + 12\sqrt{3}x - 12y - 12 = 12{x'}^2 - 8{y'}^2 + 12\sqrt{3}(\sqrt{3}/2x' + 1/2y') - 12(-1/2x' + \sqrt{3}/2y') - 12 =$$

$$= 12{x'}^2 - 8{y'}^2 + 24x' - 12 = 0$$

Dividendo per 4 si ottine quindi

$$3{x'}^2 - 2{y'}^2 + 6x' - 3 = 0$$

Rimane da sistemare la parte lineare. Riscriviamo l'ultima equazione nel modo segeuente

$$3{x'}^2 - 2{y'}^2 + 6x' - 3 = 3({x'}^2 + 2x') - 2{y'}^2 - 3 = 3(x'+1)^2 - 2{y'}^2 - 6 = 0$$

Dividendo per 6 si ottiene

$$\frac{(x'+1)^2}{2} - \frac{{y'}^2}{3} = 1$$

oppure, se si preferisce,

$$\frac{{x''}^2}{2} - \frac{{y''}^2}{3} = 1$$

(forma canonica metrica di $\mathcal{C}$), dove $\begin{pmatrix} x'' - 1 \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Mettendo tutto insieme, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2x'' - 1/2y'' - \sqrt{3}/2 \\ 1/2x'' + \sqrt{3}/2y'' + 1/2 \end{pmatrix}.$$

Dunque, nelle coordinate x, y, le coordinate del centro sono $(-\sqrt{3}/2, 1/2)$. Le equazioni parametriche degli assi di simmetria sono rispettivamente $(\sqrt{3}/2, -1/2) + t(\sqrt{3}/2, -1/2)$ e $(\sqrt{3}/2, -1/2) + t(1/2, \sqrt{3}/2)$. L'iperbole interseca l'asse $(\sqrt{3}/2, -1/2) + t(\sqrt{3}/2, -1/2)$.

Per finire, gli asintoti hanno equazioni cartesiane $x'' = \pm\sqrt{2}/\sqrt{3}\, y''$. Esprimendo le x'', y'' in funzione delle x, y si ha

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = A^{-1}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}) = A^T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}) = .. = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2x - 1/2y + 1 \\ 1/2x + \sqrt{3}/2y \end{pmatrix}$$

che, sostituite nelle equazioni cartesiane degli asintoti nelle coordinate x'', y'', ne forniscono le equazioni cartesiane nelle coordinate x, y (fare!).