II Esonero di Geometria ed Algebra, Corso di Laurea in Ing. Elettronica, 19.02.2008
Accompagnare le soluzioni degli esercizi con spiegazioni chiare ed essenziali. Consegnare solo questo foglio.

1. Sia W il sottospazio di $\mathcal{V}_4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} x+y+u=0 \\ x+z+2u=0 \end{cases}$. (a) Determinare una base ortogonale $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ di $\mathcal{V}_4$ tale $L(v_1,v_2)=W$. (b) Determinare il punto di W più vicino a $(1,0,0,0)$ e il punto di $W^\perp$ più vicino a $(1,0,0,0)$.

Soluzione. (a) Risolvendo il sistema, si trova che una base di W è $\{w_1,w_2\}$, dove $w_1=(-1,1,1,0)$ e $w_2=(-2,1,0,1)$. Per trovare una base ortogonale $\{v_1,v_2\}$ di W si può porre $v_1=w_1$ e $v_2=w_2-\frac{w_2\cdot w_1}{\|w_1\|^2}w_1$. Facendo i conti, viene $v_2=(-1,0,-1,1)$.

Una base di $W^\perp$ è data da $\{w_3,w_4\}$ dove $w_3=(1,1,0,1)$ e $w_4=(1,0,1,2)$. Per trovare una base ortogonale $\{v_3,v_4\}$ di $W^\perp$ è sufficiente porre $v_3=w_3$ e $v_4=w_4-\frac{w_4\cdot w_3}{\|w_3\|^2}w_3$. Dunque, facendo i conti, risulta $v_4=(0,-1,1,1)$.

In definitiva, $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, dove $v_1=(-1,1,1,0)$, $v_2=(-1,0,-1,1)$, $v_3=(1,1,0,1)$, $v_4=(0,-1,1,1)$ è una base con le proprietà richieste.
(b) Denotiamo $v=(1,0,0,0)$. Il punto A di W più vicino a v è la proiezione di v su W, cioè $\frac{v\cdot v_1}{\|v_1\|^2}v_1+\frac{v\cdot v_2}{\|v_2\|^2}v_2$. Facendo i conti viene $A=(2/3,-1/3,0,-1/3)$.

Allo stesso modo, si trova che il punto di $W^\perp$ più vicino a $(1,0,0,0)$ è $B=(1/3,1/3,0,1/3)$.

2. Siano $u=(1,1,-1)$, $v=(1,1,0)$ e $w=(1,-1,1)$. Si consideri, per ogni $t\in\mathbf{R}$, la trasformazione lineare $S_t:\mathcal{V}_3\to\mathcal{V}_3$ tale che $S_t(u)=(1,0,-1)$, $S_t(v)=(1,t+1,1)$, $S_t(w)=(1,4,t+2)$.
(a) Determinare per quali $t\in\mathbf{R}$ la trasformazione lineare S_t è iniettiva. (b) Per $t=-5$ determinare: una base di $N(S_t)$, una base di $S_t(\mathcal{V}_3)$, un sistema di equazioni cartesiane per $N(S_t)$.

Soluzione. (a) Notiamo innanzitutto che $\{u,v,w\}$ è una base di $\mathcal{V}_3$. Sappiamo che T è iniettiva se e solo se è suriettiva, il che avviene se e solo se $S_t(u),S_t(v),S_t(w)$ sono indipendenti. Per vedere per quali t ciò avviene, si può (ad esempio) vedere quando il determinate della matrice A_t le cui colonne sono $\{S_t(u),S_t(v),S_t(w)\}$ è non nullo. Calcolando, risulta facilmente che $\det A_t=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&t+1&4\\-1&1&t+2\end{pmatrix}=t^2+4t-5=(t+5)(t-1)$.
Dunque S_t è iniettiva se e solo se $t\neq -5,1$.
(b) Per $t=-5$ si vede subito che una base di $S_t(\mathcal{V}_3=\{S_t(u),S_t(v)\}=\{(1,0,-1),(1,-4,1)\}$. Per quanto riguarda il nucleo, risolviamo il sistema omogeneo associato ad A_t. Risulta facilmente che lo spazio delle soluzioni del sistema è $L((-2,1,1))$ Ciò signica che $\{-2v+u+w\}$ è una base di $N(S_t)$. Quindi, facendo i conti, $\{(0,-2,3)\}$ è una base di $N(S_t)$ per $t=-5$. Il sistema di equazioni cartesiane cercato è dunque $\begin{cases} x=0 \\ 3y+2z=0 \end{cases}$.

3. Siano $u=(1,0,1)$, $v=(0,2,1)$ e $w=(0,0,1)$. Sia $T:\mathcal{V}_3\to\mathcal{V}_3$ la trasformazione lineare tale che $T(u)=2u,\ \ T(v)=-v$ e $T(w)=-w$.
(a) Determinare la matrice $A=m^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(T)$ (dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathcal{V}_3$). (b) Determinare autovalori e autospazi di T. (c) Determinare A^{10}.

Soluzione. (b) Rispondiamo alla domanda (b) perchè è facilissima: abbiamo, per definizione, che 2 e -1 sono autovalori di T e che u è un auovettore relativo all'autovalore 2, mentre v e w sono autovettori indipendenti relativi all'autovalore -1. Dunque il, primo autospazio ha dimesnione uno, ed è generato da u, mentre il secondo autospazio ha dimensione 2, ed ha $\{v,w\}$ come base.
(a) Sia $\mathcal{B}=\{u,v,w\}$. Sappiamo che $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T)=diag(2,-1,-1)$. Per trovare $m^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(T)$ basta sapere che

$m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T) = m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id)$. Inoltre, sappiamo che $m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e che $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id) = (m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id))^{-1}$.

Dunque, dobbiamo trovare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, che risulta essere, facendo i conti (facilissimi) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$. Dunque

$$m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Sia $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sappiamo che $A = C \cdot diag(2, -1, -1)C^{-1}$. Ne risulta che

$$A^{10} = (C \cdot diag(2, -1, -1) \cdot C^{-1}) \cdot (C \cdot diag(2, -1, -1) \cdot C^{-1}) \cdots (C \cdot diag(2, -1, -1) \cdot C^{-1}) =$$
$$= C \cdot diag(2 - 1 - 1)^{10} \cdot C^{-1} = C^{\cdot} diag(2^{10}, 1, 1) \cdot C^{-1}.$$

facendo i conti, viene $A^{(10)} = \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{10}+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (a) Diagonalizzare la forma quadratica $Q(x, y, z) = 2x^2 + 4xy + 8xz - y^2 + 4yz + 2z^2$.
In altre parole, determinare: una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathcal{V}_3$ e tre numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ in modo tale che $Q(x, y, z) = \lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + \lambda_3 {z'}^2$, dove (x', y', z') sono le componenti di (x, y, z) rispetto alla base $\mathcal{B}$.
(b) Stabilire se $Q(x, y, z)$ è definita, semidefinita, indefinita.

Soluzione. La matrice simmetrica associata alla forma quadratica è $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Il problema è consiste nel trovare (a) gli autovalori λ_i, $i = 1, 2, 3$. di A, e (b) una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathcal{V}_3$, formata da autovettori di A. Se (x', y', z') sono le coordinate di (x, y, z) rispetto a $\mathcal{B}$, risulta $Q(x, y, z) = \lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + \lambda_3 {z'}^2$. Per trovare gli autovalori, calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda + 1 & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda + 1 & -2 \\ -\lambda - 2 & 0 & \lambda + 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -2 & \lambda + 6 \\ -2 & \lambda + 1 & -4 \\ -\lambda - 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= (\lambda + 2)(\lambda^2 - 5\lambda - 14) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 7).$$

(Si è prima sottratto la prima riga dalla terza riga, e poi si è sommato la prima colonna alla terza colonna). Dunque gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ (doppio) e $\lambda_3 = 7$. Per trovare una base del primo autospazio, si risolve il sistema associato a $-2I_2 - A$ che è facilissimo. Risulta che il sistema è equivalente all'equazione $z = -2x - 2y$. Dunque $\{(1, 0, -2), (0, 1, -2)\}$ è una base del primo autospazio. Poichè gli autovettori di una matrice simmetrica, corrispondenti ad autovalori diversi, sono ortogonali tra loro, per forza $((1, 0, -2) \times (0, 1, -2) = (2, 2, 1)$ è un generatore del secondo autospazio. Ortonogonalizzando la base del primo autospazio, e dividendo tutti i vettori per le rispettive norme, viene che

$$\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, -2), \frac{1}{\sqrt{45}}(-4, 5, 2), \frac{1}{3}(2, 2, 1)\}$$

è una base come richiesto. Dunque $Q(x, y, z) = -2{x'}^2 - 2{y'}^2 + 7{z'}^2$. La forma è chiaramente indefinita (ponendo $x' = y' = 0$ risultano valori positivi, mentre ponendo $z' = 0$ risultano valori negativi).