**II Appello scritto di Geometria ed Algebra, Corso di Laurea in Ing. Elettronica, 25.02.2008**
Accompagnare le soluzioni degli esercizi con spiegazioni chiare ed essenziali. RISPOSTE NON MOTIVATE NON VERRANNO VALUTATE. Consegnare solo questo foglio.

**1.** Si considerino le seguenti rette in $\mathcal{V}_2$: $L: (1,2)+t(0,1)$, $R: x+y=3$. Si consideri inoltre il punto $Q=(-2,-1)$.
(a) Determinare equazioni cartesiane per il luogo dei punti $P \in \mathcal{V}_2$ tali che $d(P,L)=d(P,R)$. Riconoscere di che tipo di oggetto geometrico si tratta e disegnarlo approssimativamente.
(b) Determinare equazioni cartesiane per il luogo dei punti $P \in \mathcal{V}_2$ tali che $d(P,L)=d(P,Q)$. Riconoscere di che tipo di oggetto geometrico si tratta e disegnarlo approssimativamente.

*Soluzione.* (a) Il luogo è l'unione delle due bisettrici. Per trovarne le equazioni, si vede che $N=(0,1)$ è un vettore normale a $N$. Dunque $d((x,y),L)=|(x-1,y-2)\cdot(1,0)|=|x-1|$. Inoltre $d((x,y),R)=|\frac{x+y-3}{\sqrt{3}}|$. Quindi le equazioni delle due bisettrici sono $\frac{x+y-3}{\sqrt{3}}=x-1$ e $\frac{x+y-3}{\sqrt{3}}=-x+1$.
(b) Il luogo è, per definizione, una parabola, di fuoco $Q$ e direttrice $L$. Per trovarne l'equazione, di vede che $d((x,y),Q)^2=(x+2)^2+(y+1)^2=x^2+4x+4+y^2+2y+1$. Quindi l'equazione è $x^2+4x+4+y^2+2y+1=(x-1)^2=x^2-2x+1$. Risulta: $y^2+2y+6x+4-0$.

**2.** Siano $u=(1,-1,0)$, $v=(1,0,1)$, $w=(1,1,0)$. Sia inoltre $T:\mathcal{V}_3\to\mathcal{V}_3$ la trasformazione lineare tale che $T(u)=u+2v$, $T(v)=2u+v$, $T(w)=3u-v$.
(a) Determinare dimensione, una base e equazione cartesiana di $T(\mathcal{V}_3)$. Determinare dimensione, una base e equazioni cartesiane di $N(T)$.
(b) Determinare la distanza di $(1,0,0)$ da $T(\mathcal{V}_3)$. (c) Determinare $T((1,0,0)))$.

*Soluzione.* (a) Chiaramente, $T(\mathcal{V}_3)=L(u,v)=L((1,-1,0),(1,0,1))$. L'equazione cartesiana è $x+y-z=0$. Il nucleo $N(T)=L(5u-7v+5w)$.
(b) Un vettore normale a $T(\mathcal{V}_3)$ è $N=(1,1,-1)$ (si vede dall'equazione cartesiana). La distanza in questione è dunque $|\frac{(1,0,0)\cdot(1,1,-1)}{\sqrt{3}}|=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
(c) Si trova, risolvendo il sistema, che $(1,0,0)=1/2u+1/2v$. Dunque $T((1,0,0))=1/2T(u)+1/2T(v)=1/2(u+2v)+1/2(2u+v)=3/2u+3/2v$.

**3.** Siano $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&1\\0&-2&1\end{pmatrix}$.
(a) Determinare $A^{-1}$.
(b) Per ognuna delle seguenti condizioni, stabilire (MOTIVANDO LA RISPOSTA) se esiste una matrice che la soddisfa. In caso affermativo, stabilire anche se la matrice in questione è unica, e, in tal caso, calcolarne il determinante: (i) $X\in\mathcal{M}_3$ tale che $AX=B$. (ii) $Y\in\mathcal{M}_3$ tale che $Y(A^{-1})=B$. (iii) $Z\in\mathcal{M}_3$ tale che $BZ=A$. (iv) $T\in\mathcal{M}_3$ tale che $BT=C$.

*Soluzione.* (a) $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\-1&2&-2\end{pmatrix}$.
(b). (i), Esiste ed è unica: $X=A^{-1}B$. $\det(X)=\det(A^{-1})\det(B)=0$ (si verifica che $\det(B)=0$).
(ii) Esiste ed 'e unica: $Y=(A^{-1})^{-1}B=AB$. $\det(Y)=\det(A)\det(B)=0$.
(iii) Non esiste: se esistesse si avrebbe $\det(B)\det(Z)=\det(A)$. Ma $\det(A)\neq 0$ e $\det(B)=0$. (iv) Ne esistono infinite: con l'eliminazione di Gauss si ha $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&1\\0&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-2&1\\0&-2&1\end{pmatrix}\to$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dunque il corrispondente sistema, a incognite vettoriali, in cui $B$ è la matrice dei coefficienti e $C$ è la matrice dei termini noti, è compatibile e ha infinite soluzioni.

**4.** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di $A$. (b) Determinare (se esistono) una matrice ortogonale $C$ e una matrice diagonale $diag(a, b, c, d)$ tali che $C^T AC = diag(a, b, c, d)$. (c) Determinare $C^{-1}$.

*Soluzione.* (a) $P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -4 \\ -2 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -4 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -4 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -4 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ \lambda & 0 & -4 \\ -4 & 0 & \lambda \end{pmatrix} =$ $\lambda^2(\lambda^2 - 16) - 4(\lambda^2 - 16) = (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 16) = (\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda + 4)(\lambda - 4)$. Dunque $A$ ha quattro autovalori semplici: $2, -2, 4, -4$.

(b) Si ricorda che una matrice ortogonale è una matrice le cui colonne formano una base ortonormale. Una matrice come richiesto esiste sempre, perchè $A$ è simmetrica. Per trovarla, si tratta semplicemente di trovare generatori dei quattro autospazi. Essi sono automaticamente ortogonali. Poi vanno normalizzati in modo da avere norma 1. Risulta $C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si ha che $C^T AC = diag(2, -2, 4, -4)$.

(c) $C^{-1} = C^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.