I Esonero di Geometria ed Algebra, Corso di Laurea in Ing. Elettronica, 26.11.2007 (Versione 1)

Accompagnare le soluzioni degli esercizi con spiegazioni chiare ed essenziali. Consegnare solo questo foglio.

1. Si consideri il piano $M : P + sA + tB$, dove $P = (3, 1, 1)$, $A = (-2, 1, 0)$ e $B = (2, 1, 2)$. Sia inoltre $Q = (1, 1, 1)$.
(a) Determinare i piani paralleli a M tali che la distanza di Q da tali piani sia uguale a 2. (Per ognuno di tali piani, determinare sia un'equazione parametrica vettoriale che un'equazione cartesiana). (b) Inoltre, per ognuno di tali piani, determinare il punto più vicino a Q.

Soluzione. (a) Un vettore normale al piano M è $A \times B = \ldots = (2, 4, -4)$, o anche $N = (1, 2, -2)$. Quindi un piano parallelo a M ha equazione cartesiana

$$M' : x + 2y - 2z = d'.$$

Si ha che la distanza $d(Q, M') = \frac{|(P'-Q)\cdot N|}{\|N\|}$ dove P' è un qualsiasi punto di M'. Poichè $P' \cdot N = d'$ si ritrova la nota formula $d(Q, M') = \frac{|d'-Q\cdot N|}{\|N\|} = \frac{|d'-1|}{3}$. Dunque i piani cercati si hanno per $\frac{|d'-1|}{3} = 2$, cioè $\frac{d'-1}{3} = \pm 2$. Si trova quindi $d' = -5$ e $d' = 7$. Dunque i piani cercati sono due e hanno equazione cartesiana rispettivamente

$$M_1 : x + 2y - 2z = -5, \qquad M_2 : x + 2y - 2z = 7$$

Per quanto riguarda l'equazione parametrica vettoriale: visto che abbiamo gia' quella di un piano parallelo, cioè M, e' sufficiente provare un punto di M_1 e uno di M_2. Facendo, ad esempio, l'intersezione con l'asse x, viene che $(-5, 0, 0) \in M_1$ e $(7, 0, 0) \in M_2$. Dunque abbiamo le equazioni parametriche vettoriali:

$$M_1 : (-5, 0, 0) + sA + tB, \qquad M_2 : (7, 0, 0) + sA + tB$$

(b) I punti più vicini sono, rispettivamente

$$P_1 = Q + \frac{-5 - Q \cdot N}{\|N\|^2} N = (1, 1, 1) + \frac{-2}{3}(1, 2, -2) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3})$$

$$P_2 = Q + \frac{7 - Q \cdot N}{\|N\|^2} N = (1, 1, 1) + \frac{2}{3}(1, 2, -2) = (\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{3})$$

2. Sia $L : \begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 3 \end{cases}$ e sia $A = (1, 0, -1)$.
(a) Determinare il piano M contenente L e parallelo ad A. (b) Sia inoltre $Q = (0, -1, 1)$. Determinare la retta R perpendicolare a M e passante per Q. (c) Determinare $R \cap M$.

Soluzione. (a) Un piano che contiene L ha equazione cartesiana del tipo $\lambda(x-3y+2z)+\mu(2x-3y+z-3) = 0$. Dunque il vettore $N_{\lambda,\mu} = (\lambda + 2\mu, -3\lambda - 3\mu, 2\lambda + \mu)$ è normale a tale piano. Poichè si richiede che il piano sia parallelo ad A, si ha che $N_{\lambda,\mu} \cdot A = 0$, cioè $\lambda + 2\mu - (2\lambda + \mu) = 0$. Quindi $\lambda = \mu$. Dunque il piano cercato ha equazione cartesiana: $3\lambda x - 6\lambda y + 3\lambda z = -3\lambda$, dunque $3x - 6y + 3z = 3$, o anche

$$M : x - 2y + z = 1$$

(b) $L : (0, -1, 1) + t(1, -2, 1)$
(c) Sostituendo le equazioni parametriche di L nell'equazione cartesiana di di M risulta: $t-2(-1-2t)+1+t = 1$, cioè $t = -\frac{1}{3}$. Quindi $L \cap M = (0, -1, 1) - \frac{1}{3}(1, -2, 1) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

3. Siano $P = (0, -1, 0)$, $Q = (1, 0, -1)$, $R = (1, -1, 1)$.
(a) Calcolare l'area del triangolo di vertici $P, Q.R.$ (b) Sia inoltre $S = (1, -1, -2)$. Calcolare il volume del parallelepipedo determinato dai vettori $Q - P$, $R - P$ e $S - P$. (c) Determinare tutti i punti $T \in \mathcal{V}_3$ allineati con P e S, tali che il volume del parallelepipedo determinato dai vettori $Q - P$, $R - P$ e $T - P$ sia uguale a 2.

Soluzione. (a) L'area in questione è uguale a

$$\frac{\|(Q-P)\times(R-P)\|}{2} = \frac{\|(1,1,-1)\times(1,0,1)\|}{2} = \cdots = \frac{\|(1,-2,-1)\|}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

(b) Il volume in questione è calcolato dal prodotto misto

$$|[(S-P)(Q-P)(R-P)]| = |(S-P)\cdot(Q-P)\times(R-P)| = |(1,0,-2)\cdot(1,-2,-1)| = |3| = 3.$$

(c) La retta per i punti P e S ha equazione parametrica vettoriale $P + t(S - P)$. Sia dunque $T = P + t(S - P)$, per un dato $t \in \mathbf{R}$. Il volume del parallelepipedo determinato dai vettori $Q - P$, $R - P$ e $T - P$ è, come prima, $|[(T-P)(Q-P)(R-P)]| = |t(S-P)\cdot(Q-P)\times(R-P)| = |t(1,0,-2)\cdot(1,-2,-1)| = |3t|$. Dunque $|3t| = 2$ se e solo se $t = \pm\frac{2}{3}$. In definitiva, i punti richiesti sono due:

$$P + \frac{2}{3}(S-P) = (0,-1,0) + \frac{2}{3}(1,0,-2) = (\frac{2}{3}, -1, -\frac{4}{3}),$$

$$P - \frac{2}{3}(S-P) = (0,-1,0) - \frac{2}{3}(1,0,-2) = (-\frac{2}{3}, -1, \frac{4}{3})$$

4. Determinare l'equazione cartesiana dell'iperbole che ha per asintoti le rette $x - 3y = 0$, $x + 3y = 0$ e passa per il punto $(1, 2)$. Fare uno schizzo dell'iperbole.

Soluzione. Si vede facilmente, dalla posizione degli asintoti e del punto P, che l'equazione è della forma

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

da cui si ricava $x = \pm\frac{b}{a}\sqrt{y^2 - a^2} \overset{y\to\infty}{\sim} y$. Dunque gli asintoti hanno equazione del tipo $x = \pm\frac{b}{a}y$ e dunque $\frac{b}{a} = 3$, cioè $b = 3a$. Soatituendo nell'equazione cartesiana si ha

$$-\frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Usando che questa equazione è verificata da $(x, y) = (1, 2)$ si trova $1 = -\frac{1}{9a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{35}{9a^2}$. Dunque $a^2 = \frac{35}{9}$, $b^2 = 9a^2 = 35$ e l'equazione cercata è

$$-\frac{x^2}{35} + \frac{9y^2}{35} = 1$$

Oppure, moltiplicando per 35: $-x^2 + 9y^2 = 35.$

5. (a) Siano $A_1, \ldots, A_k$ vettori di $\mathcal{V}_n$. Come è definito l'insieme $L(A_1, \ldots A_k)$ (lo spazio lineare generato da $A_1, \cdots A_k$)?
(b) Siano $A, B, C \in \mathcal{V}_3$ e supponiamo che esista $D \in \mathcal{V}_3$ che non appartiene a $L(A, B, C)$. Allora: (stabilire quali tra i seguenti enunciati sono corretti e quali no, e spiegare perchè):

(a) A, B, C sono linearmente indipendenti; (b) Il prodotto misto $[ABC]$ è necessariamente nullo; (c) Il prodotto vettoriale $(B - A) \times (C - A)$ è necessariamente nullo; (d) A, B, C sono linearmente dipendenti; (e) A, B, C sono proporzionali a due a due.

Risposta. (a) $L(A_1, \dots A_k)$ è il sottoinsieme di $\mathcal{V}_n$ i cui elementi sono gli $A \in \mathcal{V}_n$ tali che esistono $c_1, .., c_k \in \mathbf{R}$ tali che $v = c_1 A_1 + \cdots + c_k A_k$.
(b) Sappiamo che, dati n vettori in $\mathcal{V}_n$, essi costituiscono una base di $\mathcal{V}_n$ se e solo se sono linearmente indipendenti. D'altra parte, se esiste $D \in \mathcal{V}_3$ che non sta in $L(A, B, C)$ allora $\{A, B, C\}$ non è una base, perchè non genera tutto $\mathcal{V}_3$. Quindi:
se esiste $D \in \mathcal{V}_3$ che non sta in $L(A, B, C)$ allora A, B, C sono linearmente dipendenti.
Vale anche il viceversa:
se A, B, C sono linearmente dipendenti, allora esiste qualche $D \in \mathcal{V}_3$ che non appartiene a $L(A, B, C)$
(infatti, se A, B, C sono dipendenti allora $L(A, B, C)$ è un piano o una retta contenenti l'origine).
Quindi:
(d) è corretto;
(a) non è corretto (conseguenza di (d);
(b) è corretto, perchè tre vettori sono dipendenti se e solo se il loro prodotto misto è nullo*;
(c) non è corretto. Ad esempio, se $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = A + B = (1, 1, 0)$, si ha che A, B, C sono linearmente dipendenti ma $(C - A) \times (C - B) = (0, 1, 0) \times (1, 0, 0) \neq O$.
(e) non è corretto. Se A, B, C sono dipendenti, non sono necessariamente proporzionali a due a due (vedi esempio precedente).

* È forse il caso di ricordare che la nullità o meno del prodotto misto non dipende dall'ordine in cui si prendono in tre vettori