I Appello scritto di Geometria ed Algebra, Corso di Laurea in Ing. Elettronica, 21.02.2008 (Versione 1)

1. *Siano* $P = (2, 3, -4)$, $A = (1/2, 1, 1)$, *e* $B = (2, 2, 1)$.
Determinare due punti Q e R tali che: (i) $Q - P$ è parallelo e concorde ad A e $R - P$ è parallelo e concorde a B, (ii) $Q - P$ e $R - P$ hanno uguale lunghezza, e (iii) l'area del triangolo PQR è uguale a $9/2$.

Soluzione. La soluzione è: $Q = P + 2\sqrt{3}A$ e $Q = P + \sqrt{3}B$.
Per pervenire alla soluzione si procede in questo modo:
- Per (i), $Q - P = tA$ e $R - P = sB$, con $t, s > 0$.
- $\| Q - P \| = t \| A \| = \frac{3t}{2}$. $\| R - P \| = s \| B \| = 3s$. Poichè, per (ii), deve essere che $\| Q - P \| = \| R - P \|$, risulta $\frac{3t}{2} = 3s$, dunque $t = 2s$.
- Per trovare s, si usa (iii). Sappiamo che $area(PQR) = \frac{\|(Q-P)\times(R-P)\|}{2} = \frac{\|2sA\times sB\|}{2} = s^2\frac{\|2A\times B\|}{2} = s^2\frac{\|(-2,3,-2)\|}{2} = \frac{3s^2}{2}$. Dunque deve essere $\frac{3s^2}{2} = \frac{9}{2}$ cioè $s = \sqrt{3}$. Sostituendo in $Q - P = 2sA$ e $R - P = sB$ si ottiene il risultato.
(La soluzione dello stesso eserizio nella Versione 2 è: $Q = P + tA$, $R = P + 2tB$ con $t = \frac{3}{\sqrt[4]{65}}$.)

2. *Sia $T : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_2$ la trasformazione lineare tale che $T((1, 0, -1) = (1, -1)$, $T((0, 1, 1) = (0, 1)$ e $T((0, 1, 0)) = (2, 0)$. Si consideri inoltre la retta $L : P + tA$, dove $P = (1, 0, 0)$ e $A = (1, -2, 1)$.*
(a) Determinare $T(L)$. (b) Mostrare una retta R, passante per P e tale che $T(R)$ è un punto.
(c) Mostrare un piano M, passante per P e tale che $T(M)$ è una retta.

Soluzione. Si ha che $m^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_2}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per arrivarci, si ragiona nei soliti modi. Eccone uno: siano (x', y', z') le coordinate del vettore (x, y, z) rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (0, 1, 0)\}$. Allora si ha $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dove $B = m^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}(id) = (m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}(id))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Dunque $T((x, y, z) = x(1, -1) + (x + z)(0, 1) + (-x + y - z)(2, 0) = (-x + 2y - 2z, z)$.
(a) Per quanto calcolato sopra, si ha che $T((1, 0, 0)(= (1, 0)$ e $T((1, -2, 1)) = (-7, 1)$. Dunque $T(L) = (-1, 0) + t(-7, 1)$.
(b) Risolvendo il sistema $T(x, y, z) = (0, 0)$, cioè $(-x + 2y - 2z, z) = (0, 0)$, si ha $z = 0$, $x = 2y$. Dunque $N(T) = L((2, 1, 0))$. Quindi, se $R = P + t(-2, 1, 0)$, si ha che $T(R) = T(P) + O = T(P)$.
(c) È sufficente prendere $A = (2, 1, 0)$ e B un qualsiasi vettore non parallelo ad A. Se $M = P + tA + sB$ allora $T(M) = T(P) + O_s T(B) = T(P) + sT(B)$.

3. *Si considerino, al variare di $t \in \mathbf{R}$, i vettori $u_t = (1, t + 1, 1)$, $v_t = (1, t + 2, 2)$ e $w_t = (2, 1, t + 1)$. Sia inoltre $S_t : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$ la trasformazione lineare tale che $S_t(e_1) = u_t$, $S_t(e_2) = v_t$ e $S_t(e_3) = w_t$ (dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica).*
(a) Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ la trasformazione S_t è suriettiva; (b) Per tutti i t tali che S_t non è suriettiva, fornire una base e un sistema di equazioni cartesiane per $S_t(\mathcal{V}_3)$ (c) Si consideri la trasformazione S_t per $t = -1$. Determinare (se esiste) un vettore $v \in \mathcal{V}_3$ tale che $S_{-1}(v) = ((1, 0, 0))$.

Soluzione. (a) La risposta è $t \neq 0$. Infatti S_t è suriettiva se e solo se $rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ t+1 & t+2 & 1 \\ 1 & 2 & t+1 \end{pmatrix} = 3$ il che avviene se e solo se $0 \neq \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ t+1 & t+2 & 1 \\ 1 & 2 & t+1 \end{pmatrix} = 3t$.

(b) Per $t=0$ è facile vedere che $S_0(\mathcal{V}_3) = L(S_0(e_1), S_0(e_2)) = L((1,1,1),(1,2,2))$ che ha equazione cartesiana $y-z=0$.

(c) Risolvendo il sistema $x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ risulta che il vettore cercato è $v=(1/3,-1/3.1/3)$.

4. *Sia* $W=L((1,2,2),(1,0,1))$. *(a) Determinare la matrice, rispetto alla base canonica, della proiezione ortogonale su* W: $Pr_W : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$. *(b) Determinare autovalori e autospazi di* Pr_W, *stabilire se* Pr_W *è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare un base di autovettori.*

Soluzione. (a) Si ha che $N=(1,2,2)\times(1,0,1)=(2,1,-2)$ è un vettore normale a W. Dunque, $Pr_W((x,y,z)) = (x,y,z) - \frac{(x,y,z)\cdot(2,1,-2)}{9}(2,1,-2)$. Calcolando, risulta
$Pr_W((x,y,z)) = (5/9x-2/3y+8/9z, -2/3x+4/3z, 8/9x+4/9y+25/9z)$.
La matrice cercata è dunque $\begin{pmatrix}5/9 & -2/3 & 8/9\\ -2/3 & 0 & 4/3\\ 8/9 & 4/4 & 25/9\end{pmatrix}$.
(b) Se $w\in W$, $Pr_W(w)=w$. Se invece $u\in W^\perp$, $Pr_W(u)=O$. Quindi tutti i vettori di W sono autovettori, relativi all'autovalore 1 e tutti i vettori di $W^\perp = L(N)$ sono autovettori, relativi all'autovalore 0. Ne segue che 1 è un autovalore doppio e 0 è un autovalore semplice. Chiaramente la trasformazione è diagonalizzabile, una base di autovettori è $\{(1,2,2),(1,0,1),(2,1,-2)\}$.

5. *Sia* $\mathcal{C}$ *la conica di equazione:* $f(x,y)=xy+x+y+5=0$. *Stabilire di che tipo di conica si tratta, determinare le coordinate del centro di simmetria (o del vertice) e dei fuochi, e le equazioni degli assi di simmetria. Disegnare approssimativamente la conica.*

Soluzione. La parte quadratica è $Q(x,y)=xy$. La matrice simmetrica associata è $A=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2-1/4$. Gli autovalori sono $1/2$ e $-1/2$. La matrice ortogonale le cui colonne formano una base ortonormale di autovettori è $C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Le coordinate (x',y') rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono legate alle coordinate (x,y) dalla formula: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x'-y'\\x'+y'\end{pmatrix}$.
Quindi risulta che
$f(x,y)=\frac{1}{2}x'^2-\frac{1}{2}y'^2+\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')+\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')+5=\frac{1}{2}x'^2-\frac{1}{2}y'^2+\sqrt{2}x'+5=\frac{1}{2}(x'^2+2\sqrt{2}x)-\frac{1}{2}y'^2+5=$
$\frac{1}{2}(x+\sqrt{2})^2-2)-\frac{1}{2}y'^2+5=\frac{1}{2}(x+\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}y'^2+4$.
Dunque si trova l'equazione

$$-\frac{1}{8}(x+\sqrt{2})^2+\frac{1}{8}y'^2=1.$$

che è l'equazione di un'iperbole (equilatera) di centro $(x',y')=(-\sqrt{(}2),0)$. Quindi, nelle nostre coordinate (x,y), il centro di simmetria è $C\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$. Gli assi di simmetria sono $(-1,-1)+t(1,1)$ e $(-1,-1)+t(-1,1)$. Allo stesso modo si trovano i fuochi: $(-1,-1)+4(-1,1)=(-5,3)$ e $(-1,-1)-4(-1,1)=(3,-5)$.