

Nei seguenti esercizi 1), 2), 3), 4) si suppone che i tutti i denominatori siano diversi da 0.

1. Dire quali delle seguenti semplificazioni sono corrette

$$\frac{2a+4b}{2a} = \frac{a+4b}{a}, \quad \frac{2a+4b}{2a} = \frac{a+2b}{a}, \quad \frac{a^3+1}{x^3} \frac{x^2}{a^2+1} = \frac{a^2+1}{x} \frac{1}{a+1}, \quad \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}.$$

2. Dire quali delle seguenti espressioni equivalgono a $-\frac{(x+1)(2-x)}{(2x+3)(x-4)}$

$$\frac{(x+1)(x-2)}{(2x+3)(x-4)}, \quad \frac{(-1-x)(x-2)}{(-2x-3)(4-x)}, \quad \frac{(x+1)(2-x)}{(-2x+3)(x-4)}, \quad \frac{(x+1)(x-2)}{(-2x-3)(4-x)}.$$

3. Semplificare le frazioni $\frac{a^6-a^2}{a^5-a^4}$, $\frac{a^3b^2+2a^2b+a}{a^2b^2-1}$. Svolgere la frazione $\frac{\frac{x}{2x-3} - \frac{1}{x+2}}{\frac{x^3-2}{x+4} - \frac{3x+1}{2x+3}}$.

4. Semplificare le espressioni $\frac{a^2b^5}{b^3}$, $\frac{(a^3b)^4}{(ab)^2}$, $\frac{(a\sqrt{a^3})^4}{a^5}$, $\frac{2^{5n}4^n}{8^{2n}}$.

5. Se $A = \{1, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, descrivere gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$. In generale, che cosa si può dire sul numero di elementi di $A \cup B$ se A e B sono entrambi insiemi con 3 elementi?

6. Dire quali dei seguenti numeri sono razionali: $\frac{3}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{7}$, $2\sqrt{2}+3$, $(\sqrt{2}+1)^2 - 2\sqrt{2}$.

7. Risolvere le equazioni $x^4 = 16$, $x^3 = 27$, $x^6 + 8 + 9x^3 = 0$, $(x+4)^5 = 32$, $x^4 = x^2$.

8. Scrivere $x^2 - 3x + 2$ nella forma $(x + \alpha)^2 + \beta$ con opportuni α, β numeri reali.

9. Risolvere le seguenti disequazioni $x^2 < 25$, $x^3 \leq 125$, $x^4 > 81$, $x^5 > 7$, $5(x-3) < x(x-3)$, $x^2(x^2-1) < 2$, $\frac{x}{1-x} \leq 2$, $\frac{x}{1-x} \leq \frac{x}{1+x}$, $\frac{x^9}{1-x} \leq \frac{x^9}{1+x}$.

10. Dire se $\left(\frac{587}{611}\right)^{87} > \left(\frac{587}{611}\right)^{72}$, $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}}\right)^{87} > \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}}\right)^{72}$, $(-476)^8 > 457^8$, $(-865)^6 \geq (-843)^6$ (Non usare la calcolatrice in questo esercizio).

11. Dire quali delle seguenti disuguaglianze sono vere, (cioè vere per ogni $x \in \mathbf{R}$), usando le regole delle potenze: $x^5 < (x+1)^5$, $x^6 < (x+1)^6$, $(x+x^3)^5 \geq x^5$, $(x+x^4)^5 \geq x^5$, $6^{x+7} > 6^x$, $(x-2)^7 > (x-2)^5$. Di alcune di queste si può dire che, pur non essendo vere per ogni $x \in \mathbf{R}$, sono vere per certi valori di x . Quali valori di x ?

12 Scrivere nella forma 2^a i numeri $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$, $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2\sqrt[5]{2}}}}$.

13. Siano dati i polinomi $P(x) = x^5 - 2x^3 + 6x^2 - 3x + 5$ e $T(x) = 3x^2 + 7$. Calcolare quoziente e resto della divisione di P per T .

Esercitazione 1. Richiami di teoria degli insiemi. Operazioni sugli insiemi: inclusione, unione e intersezione. Sottoinsiemi della retta reale e del piano cartesiano.

1. (\mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R}). Siano dati i numeri

$$\sqrt{5}, \quad 0,0013, \quad \sqrt{(-2)^2}, \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad |-5|, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{\sqrt{3}}, \quad (0.2)^2, \quad 0.04, \quad 3, \overline{232}, \quad 2^{-3}.$$

- (a) Determinare se appartengono ad \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} .
 (b) Metterli in ordine crescente.

2. Siano dati gli insiemi $A = \{1, 4, -2, 10, -20, 3/4, 5^{-1}, -(3+2\sqrt{2})\}$, $B = \{\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}, -2, 3/4, -20\}$,
 $C = \{5, 10, -3/4, |-0.4|, \sqrt{4}\}$.

- (a) Determinare se $B \subset A$.
 (b) Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \cap C$, $A \setminus C$, $A \cup C$.

3. Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x - 2 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x - 5 < 0\}$

$$C = \{x \in \mathbf{R} \mid \begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases}\} \quad D = \{x \in \mathbf{R} \mid \begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 5 < 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}\}.$$

Determinare quali delle seguenti relazioni valgono

$$C = A \cap B, \quad D = A \cap B, \quad D \subset A \cup B, \quad C \subset D, \quad D \subset C \subset A.$$

4. Siano dati gli intervalli $A = [-1, 1]$ e $B = (-1, 1)$.

- (a) Determinare quali dei seguenti elementi appartengono ad A e quali appartengono a B :

$$0.5, \quad 1, \quad 0.\bar{9}, \quad 0.0\bar{9}, \quad \sqrt{(-1)^2}, \quad -1.44, \quad (0.1 + \frac{1}{0.1})^2.$$

5. Siano dati $A = [\frac{5}{12}, \frac{101}{100}]$, $B = [\frac{18}{33}, \frac{105}{104}]$ e $C = [-0.001, 0.01]$. Determinare quali delle seguenti relazioni valgono:

$$A \subset B, \quad A \cap C \neq \emptyset, \quad (A \cup C) \cap B \neq \emptyset, \quad B \subset C.$$

6. Siano dati $A = \{x \in \mathbf{R} \mid (x-2) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid (x-5) = 0\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} \mid (x-10) = 0\}$,
 $D = \{x \in \mathbf{R} \mid (x-2)(x-5) = 0\}$, $E = \{x \in \mathbf{R} \mid (x-2)(x-5)(x-10) = 0\}$.

Determinare quali delle seguenti relazioni valgono

$$D = A \cap B, \quad D = A \cup B, \quad E = A \cup B, \quad D \subset E, \quad A \subset D \subset E.$$

7. Disegnare i seguenti sottoinsiemi del piano cartesiano:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid 3x - y = 0 \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid 3x - y > 0 \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid 3x - y < 0 \right\}.$$

Determinare a quale insieme appartengono gli elementi

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

8. Disegnare i seguenti sottoinsiemi del piano cartesiano:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2 \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid y > x^2 \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid y < x^2 \right\}.$$

Determinare a quale insieme appartengono gli elementi

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.05 \\ -0.25 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

9. Disegnare i seguenti sottoinsiemi del piano cartesiano:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x = 5 \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid y = -2 \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x < 2 \right\}.$$

Determinare almeno tre elementi in ognuno di essi.

10. Siano dati gli insiemi

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2 \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid y < 5 \right\}.$$

(a) Determinare e disegnare nel piano cartesiano:

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad B \cap C, \quad A \cap B \cap C.$$

(b) Determinare almeno tre elementi in ognuno degli insiemi del punto (a).