CAPITOLO I

SPAZI TOPOLOGICI

§1 Topologie su un insieme

Sia X un insieme. Una *topologia* su X è una famiglia τ di sottoinsiemi di X, che si dicono *aperti*. Gli aperti di una topologia su X devono soddisfare i seguenti assiomi:

($\mathcal{O}_1$) $\emptyset$, X sono aperti;
($\mathcal{O}_2$) l'unione di una qualsiasi famiglia di aperti è un aperto;
($\mathcal{O}_3$) l'intersezione di una qualsiasi famiglia finita di aperti è un aperto.

L'assioma ($\mathcal{O}_3$) è equivalente a

($\mathcal{O}_3'$) $A \cap B \in \tau \quad \forall A, B \in \tau$.

Uno *spazio topologico* è la coppia $\mathbf{X} = (X, \tau)$ formata da un insieme X e da una topologia τ su X.

Se Y è un sottoinsieme di uno spazio topologico $\mathbf{X}$, la famiglia $\mathcal{A}$ degli aperti A di $\mathbf{X}$ contenuti in Y è non vuota, perché $\emptyset \in \mathcal{A}$. L'unione $\bigcup \mathcal{A}$ è, per l'assioma ($\mathcal{O}_2$), il più grande aperto contenuto in Y. Esso si indica con $\overset{\circ}{Y}$ e si dice *parte interna* di Y. Gli aperti di $\mathbf{X}$ sono i sottoinsiemi di X che coincidono con la loro parte interna.

Lemma 1.1 *Sia $\mathbf{X}$ uno spazio topologico e siano A, B due sottoinsiemi di X. Allora:*

(i) Se $A \subset B$, anche $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

(ii) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Dim. (i): abbiamo $\overset{\circ}{A} \subset A \subset B$ e quindi $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ perché $\overset{\circ}{A}$ è un aperto contenuto in B.

(ii) Poiché $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ è un aperto contenuto in $A \cap B$, vale l'inclusione $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$.

D'altra parte $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$ è un aperto contenuto sia in A che in B e quindi in $A \cap B$.

Dunque vale anche l'inclusione opposta $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ e quindi l'uguaglianza.

Esempio 1.1 Sia X un insieme qualsiasi. Si dice *topologia discreta* su X quella per cui tutti i sottoinsiemi di X sono aperti e *topologia indiscreta* su X quella in cui soltanto $\emptyset$ e X sono aperti.

Se X contiene almeno due punti, la topologia discreta e quella indiscreta sono distinte e si possono definire su X topologie diverse da quella discreta e da quella indiscreta. Ad esempio, se $a \in X \neq \{a\}$, allora $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ è una topologia su X diversa sia da quella discreta che da quella indiscreta.

Siano τ_1 e τ_2 due topologie sullo stesso insieme X. Se $\tau_1 \subset \tau_2$ diciamo che τ_2 è *più fine* di τ_1, oppure che τ_1 è *meno fine* di τ_2.

Osserviamo che la topologia discreta è la più fine e quella indiscreta la meno fine tra le topologie su X.

La relazione di "*essere più fine di*" è una relazione di *ordinamento parziale* tra le topologie su un insieme X fissato. Se non vale né la relazione $\tau_1 \subset \tau_2$, né la relazione $\tau_1 \supset \tau_2$, diciamo che le due topologie *non sono confrontabili.* Si verifica facilmente che vale la:

Proposizione 1.2 *Sia X un insieme e sia $\{\tau_i \mid i \in I\}$ una famiglia di topologie su X. Allora L'intersezione $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ è una topologia su X.*

Abbiamo poi:

Proposizione 1.3 *Sia X un insieme e sia Γ una qualsiasi famiglia di sottoinsiemi di X. Vi è un'unica topologia τ su X caratterizzata dalla proprietà di essere la meno fine tra le topologie su X per cui gli elementi di Γ sono aperti. Ogni aperto di τ è unione di intersezioni finite di aperti di $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \{\emptyset, X\}$.*

Dim. La famiglia $\mathcal{T}$ delle topologie su X per cui gli elementi di Γ sono aperti contiene la topologia discreta e quindi è non vuota. Chiaramente $\bigcap \mathcal{T}$ è meno fine tra tutte le topologie su X per cui gli elementi di Γ sono aperti. Indichiamo con τ la famiglia di sottoinsiemi di X formata dalle unioni di intersezioni finite di elementi di $\tilde{\Gamma}$. Abbiamo $\tau \subset \bigcap \mathcal{T}$ e quindi per completare la dimostrazione basterà mostrare che τ è una topologia. Gli assiomi $(\mathcal{O}_1)$ e $(\mathcal{O}_2)$ sono di verifica immediata. Mostriamo che vale anche $(\mathcal{O}_3')$. Siano A e B due elementi di τ: $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, $B = \bigcup_{j \in J} B_j$, ove gli A_i e i B_j sono intersezioni finite di elementi di $\tilde{\Gamma}$. Per la proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione otteniamo: $A \cap B = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \cap B_j$; per ogni $(i,j) \in I \times J$ l'insieme $A_i \cap B_j$ è ancora un'intersezione finita di elementi di $\tilde{\Gamma}$ e quindi $A \cap B \in \tau$.

Se τ è la meno fine tra le topologie su X per cui gli elementi di $\Gamma \subset 2^X$ sono aperti, diciamo che Γ è una *prebase* di τ. Se ogni aperto non vuoto di τ è unione di aperti di $\Gamma \subset \tau$, diciamo che Γ è una *base* di τ.

Abbiamo:

Proposizione 1.4 *Sia X un insieme, τ una topologia su X e Γ una prebase di τ. Allora le intersezioni finite di aperti di $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \{\emptyset, X\}$ formano una base di τ.*

Proposizione 1.5 *Sia X un insieme, τ una topologia su X e $\mathcal{B}$ una famiglia di aperti. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\mathcal{B}$ sia una base di τ è che per ogni aperto non vuoto A di X ed ogni $p \in A$ vi sia un aperto $B \in \mathcal{B}$ tale che $p \in B \subset A$.*

Proposizione 1.6 *Sia X un insieme e $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\mathcal{B}$ sia una base degli aperti di una topologia su X è che*

$(\mathcal{B}_1)$ $\bigcup \mathcal{B} = X$;

($\mathcal{B}_2$) *Le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{B}$ sono unioni di elementi di $\mathcal{B}$.*

Dim. Si definisca τ come la famiglia formata dall'insieme vuoto e dalle unioni di elementi di $\mathcal{B}$. Si verifica allora che τ soddisfa gli assiomi di una topologia.

Esempio 1.2 (*Topologia Euclidea su* $\mathbb{R}$.) Sia $\mathcal{B}$ la famiglia degli intervalli aperti $]a,b[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<b\}$ di $\mathbb{R}$, al variare di a,b tra le coppie di numeri reali con $a<b$. Poiché ogni intersezione finita di intervalli aperti è o l'insime vuoto o un intervallo aperto, per la proposizione precedente la $\mathcal{B}$ è una base di una topologia su $\mathbb{R}$, che chiamiamo la topologia Euclidea su $\mathbb{R}$.

Si verifica che gli intervalli aperti con estremi razionali sono ancora una base della topologia Euclidea. Esempi di prebasi che non sono basi sono dati dalla famiglia delle semirette aperte $\{]a,+\infty[\,|a\in\mathbb{R}\}\bigcup\{]-\infty,a[\,|a\in\mathbb{R}\}$ e dalla sottofamiglia costituita dalle semirette aperte con origine razionale.

Esempio 1.3 (*Topologia dell'ordine*) Più in generale, sia X un insieme totalmente ordinato, mediante una relazione $\prec$. Allora le semirette aperte $S_a^-\{x\in X\,|\,x\prec a\}$ e $S_a^+\{x\in X\,|\,a\prec x\}$, al variare di a in X, formano una prebase di una topologia su X in cui gli intervalli aperti $\{x\in X\,|a\prec x\prec b\}$ sono aperti per ogni a,b in X.

Esempio 1.4 (*Topologia dell'ordine a destra*) Sia X un insieme totalmente ordinato mediante $\prec$. Allora la famiglia delle semirette aperte $\{S_a^+\,|\,a\in X\}$ è una prebase di una topologia su X, che si dice dell'*ordine a destra*.

In modo analogo si definisce la topologia dell'ordine a sinistra.

Sull'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, con l'ordinamento usuale, la topologia dell'ordine e dell'ordine a sinistra coincidono con la topologia discreta, mentre quella dell'ordine a destra è strettamente meno fine della topologia discreta.

Esempio 1.5 Su $\mathbb{R}$ la famiglia $\mathcal{B}$ degli intervalli $[a,b[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leq x<b\}$ chiusi a sinistra e aperti a destra è la base di una topologia strettamente più fine della topologia Euclidea.

§2 Sottoinsiemi chiusi

Sia $\mathbf{X}=(X,\tau)$ uno spazio topologico. I complementari in X degli aperti si dicono *chiusi* di $\mathbf{X}$. La famiglia dei chiusi di $\mathbf{X}$ soddisfa gli assiomi:

($\mathcal{C}_1$) $\emptyset$, X sono insiemi chiusi;
($\mathcal{C}_2$) l'intersezione di una qualsiasi famiglia di chiusi è un chiuso;
($\mathcal{C}_3$) l'unione di una famiglia finita di chiusi è un chiuso.

Viceversa, se chiamiamo "chiusi" gli elementi di una famiglia $\mathfrak{C}$ di sottoinsiemi di X che soddisfi gli assiomi ($\mathcal{C}_1$), ($\mathcal{C}_2$) e ($\mathcal{C}_3$), allora la $\tau=\{X\setminus A\,|\,A\in\mathfrak{C}\}$ è la famiglia degli aperti dell'unica topologia su X per cui la $\mathfrak{C}$ sia la famiglia dei chiusi.

Osserviamo che la proprietà ($\mathcal{C}_3$) è equivalente a:

($\mathcal{C}_3'$) Se A, B sono chiusi anche $A\cup B$ è chiuso.

Lemma 2.1 *Se A è un aperto e B un chiuso dello spazio topologico $\mathbf{X}$, allora $A\setminus B$ è un aperto e $B\setminus A$ un chiuso di $\mathbf{X}$.*

Dim. Abbiamo infatti:

$$A\setminus B=A\cap(X\setminus B),\quad B\setminus A=B\cap(X\setminus A)$$

e quindi $A \setminus B$ è aperto perché intersezione di due aperti e $B \setminus A$ è chiuso perché intersezione di due chiusi.

Sia Y un sottoinsieme di uno spazio topologico $\mathbf{X}$. La famiglia $\mathcal{K}$ dei chiusi di $\mathbf{X}$ che contengono Y è non vuota, in quanto $X \in \mathcal{K}$. Per l'assioma $(\mathcal{C}_2)$, l'intersezione $\bigcap \mathcal{K}$ è un chiuso, ed è il più piccolo chiuso di $\mathbf{X}$ che contiene Y. Esso si indica con $\overline{Y}$ e si dice la *chiusura* di Y. I punti di $\overline{Y}$ si dicono *aderenti* ad Y. Tutti i punti di Y sono aderenti ad Y. Un punto x aderente ad $Y \setminus \{x\}$ si dice *di accumulazione* per Y.

Un sottoinsieme Y di X è chiuso in $\mathbf{X}$ se e soltanto se è uguale alla propria chiusura.

Sia Y un sottoinsieme dello spazio topologico $\mathbf{X}$. Osserviamo che $\overset{\circ}{Y} \subset Y \subset \overline{Y}$. Chiamiamo *frontiera* di Y in $\mathbf{X}$, e indichiamo con bY, la differenza $\overline{Y} \setminus \overset{\circ}{Y}$.

Lemma 2.2 *Sia $\mathbf{X}$ uno spazio topologico e siano A, B due sottoinsiemi di X. Allora*

(i) *Se $A \subset B$, allora $\overline{A} \subset \overline{B}$;*
(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Dim. (i): Supponiamo sia $A \subset B$. Poiché $\overline{B} \supset B$, $\overline{B}$ è un chiuso che contiene A e quindi contiene la sua chiusura $\overline{A}$.
(ii): Abbiamo $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ perché $\overline{A} \cup \overline{B}$ è un chiuso che contiene $A \cup B$; poiché $\overline{A \cup B}$ è un chiuso che contiene sia A che B, esso contiene sia $\overline{A}$ che $\overline{B}$ e peciò vale l'inclusione opposta $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ e quindi l'uguaglianza.

Lemma 2.3 *Sia $\mathbf{X}$ uno spazio topologico e sia A un sottoinsieme di X. Allora:*

$$\overline{A} = X \setminus \overbrace{X \setminus A}^{\circ}, \qquad \overset{\circ}{A} = X \setminus \overline{X \setminus A}. \tag{2.1}$$

Dim. Osserviamo che $X \setminus \overline{X \setminus A}$ è un aperto contenuto in A e vale quindi l'inclusione $X \setminus \overline{X \setminus A} \subset \overset{\circ}{A}$. È poi $\overline{X \setminus A} \subset X \setminus \overset{\circ}{A}$ perché $X \setminus \overset{\circ}{A}$ è un chiuso che contiene $X \setminus A$. Tra i complementari vale l'inclusione opposta: $X \setminus \left(\overline{X \setminus A}\right) \supset X \setminus \left(X \setminus \overset{\circ}{A}\right) = \overset{\circ}{A}$ e perciò vale la seconda uguaglianza in (2.1).

La seconda uguaglianza in (2.1), applicata all'insieme $X \setminus A$, ci dà:

$$\overbrace{X \setminus A}^{\circ} = X \setminus \overline{X \setminus (X \setminus A)} = X \setminus \overline{A}.$$

Quindi $X \setminus \overbrace{X \setminus A}^{\circ} = X \setminus (X \setminus \overline{A}) = \overline{A}$ ed otteniamo la prima delle (2.1).

Esempio 2.1 (*Topologia di Zariski*) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Sia $\mathcal{A}(V)$ la $\mathbb{K}$-algebra delle funzioni polinomiali su $\mathbf{V}$ a valori in $\mathbb{K}$. Indichiamo con $\mathfrak{C}$ la famiglia degli insiemi

$$C(F) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid f(\mathbf{v}) = 0, \forall f \in F\}$$

al variare di F tra i sottoinsiemi di $\mathcal{A}(\mathbf{V})$. Gli elementi di $\mathfrak{C}$ sono i chiusi di una topologia su $\mathbf{V}$, che si dice *la topologia di Zariski* di $\mathbf{V}$.

Verifichiamo che valgono gli assiomi $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ e $(\mathcal{C}_3)$.

Infatti $\emptyset = C(\mathcal{A}(F))$ e $\mathbf{V} = C(\{0\})$ appartengono entrambi a $\mathfrak{C}$, e quindi vale la $(\mathcal{C}_1)$.

Sia $\{F_i\}_{i\in I}$ una qualsiasi famiglia di sottoinsiemi di $\mathcal{A}(\mathbf{V})$. Allora $\cap_{i\in I}C(F_i) = C(\cup_{i\in I}F_i)$ e quindi anche $(\mathcal{C}_2)$ è verificata.

Per dimostrare che vale la $(\mathcal{C}_3)$, osserviamo che se $F \subset \mathcal{A}(\mathbf{V})$ e indichiamo con (F) l'ideale di $\mathcal{A}(\mathbf{V})$ generato da F, allora $C\left((F)\right) = C(F)$. Si verifica quindi che, se $\{F_i\}_{i\in I}$ è una famiglia finita di sottoinsiemi di $\mathcal{A}(\mathbf{V})$, allora $\cup_{i\in I}C(F_i) = C\left(\cap_{i\in I}(F_i)\right)$.

§3 Intorni, frontiera

Sia $\mathbf{X} = (X, \tau)$ uno spazio topologico e sia $x \in X$. Si dice *intorno di x* un qualsiasi sottoinsieme U di X che contenga x nella sua parte interna.

Una famiglia $\mathcal{V}$ di intorni di x si dice *fondamentale* se ogni intorno U di x contiene un elemento V di $\mathcal{V}$.

Gli aperti di $\mathbf{X}$ sono tutti e soli i sottoinsiemi A di X che sono intorni di ogni loro punto. La topologia di $\mathbf{X}$ è quindi completamente determinata quando si conosca, per ogni $x \in X$, un sistema fondamentale $\mathcal{V}_x$ di intorni di x.

Indichiamo con $\mathcal{U}_x$ la famiglia degli intorni di $x \in X$ per una topologia τ su X. Si verifica che $\{\mathcal{U}_x \,|\, x \in X\}$ gode delle seguenti proprietà:

- $(\mathcal{U}_1)$ Per ogni $x \in X$, $\mathcal{U}_x \neq \emptyset$ e $x \in U$ per ogni $U \in \mathcal{U}_x$.
- $(\mathcal{U}_2)$ Per ogni $x \in X$ ed $U \in \mathcal{U}_x$ esiste $V \subset U$ tale che $x \in V$ e $V \in \mathcal{U}_y$ per ogni $y \in V$.
- $(\mathcal{U}_3)$ Se $U \subset V$ e $U \in \mathcal{U}_x$, allora anche $V \in \mathcal{U}_x$.
- $(\mathcal{U}_4)$ Se $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x$, allora anche $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_x$.

Viceversa, sia X un insieme e $X \ni x \to \mathcal{U}_x \subset 2^X$ un'applicazione che faccia corrispondere ad ogni punto x di X una famiglia $\mathcal{U}_x$ di sottoinsiemi di X, in modo che siano verificati gli assiomi $(\mathcal{U}_1)$, $(\mathcal{U}_2)$, $(\mathcal{U}_3)$, $(\mathcal{U}_4)$. Allora gli insiemi $A \subset X$ tali che $A \in \mathcal{U}_y$ per ogni $y \in A$ formano gli aperti di una topologia su X, per cui le $\mathcal{U}_x$ sono le famiglie degli intorni dei punti $x \in X$.

Possiamo caratterizzare la chiusura e la parte interna di un sottoinsieme di X utilizzando il concetto di intorno. Abbiamo infatti:

Lemma 3.1 *Sia $\mathbf{X}$ uno spazio topologico, A un sottoinsieme e x un punto di X. Allora:*

- *(i) $x \in \overset{\circ}{A}$ se e soltanto se A è un intorno di x;*
- *(ii) $x \in \overline{A}$ se e soltanto se ogni intorno di x ha con A intersezione non vuota.*

Siano x un punto e A un sottoinsieme di uno spazio topologico $\mathbf{X}$. Diciamo che:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x \text{ è } \textit{interno} \text{ ad } A & \text{se} & x \in \overset{\circ}{A}\,; \\ x \text{ è } \textit{aderente} \text{ ad } A & \text{se} & x \in \overline{A}\,; \\ x \text{ è } \textit{esterno} \text{ ad } A & \text{se} & x \notin \overline{A}\,; \\ x \text{ è } \textit{di frontiera} \text{ per } A & \text{se} & x \in \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = bA\,; \\ x \text{ è } \textit{di accumulazione} \text{ per } A & \text{se} & x \in \overline{A \setminus \{x\}} \end{array}}$$

L'insieme dei punti di accumulazione di A si dice il *derivato* di A. Un insieme chiuso che coincida con l'insieme dei suoi punti di accumulazione si dice *perfetto*.

Un sottoinsieme A di X si dice *denso* se $\overline{A} = X$ e *raro* se $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.

§4 Spazi metrici

Una *distanza* su un insieme X è una funzione

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

che gode delle proprietà seguenti:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\quad d(x,y) > 0 \quad \text{se} \quad x \neq y \in X \quad \text{e} \quad d(x,x) = 0 \quad \text{per ogni} \quad x \in X; \\ 2)\quad d(x,y) = d(y,x) \text{ per ogni } x, y \in X; \\ 3)\quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \text{ per ogni } x,y,z \in X. \end{array}}$$

Chiamiamo *spazio metrico* la coppia (X, d) formata da un insieme X e da una distanza d su X.

Esempio 4.1 Nello spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$, dati $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, .., y_n) \in \mathbb{R}^n$, poniamo:

$$d(x,y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,. \tag{4.1}$$

La d è una distanza, che si dice *distanza Euclidea* su $\mathbb{R}^n$.

Esempio 4.2 In $\mathbb{C}^n$, dati $z = (z_1, ..., z_n)$ e $w = (w_1, ..., w_n)$ poniamo

$$d(z,w) = |z - w| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i - w_i|^2}\,. \tag{4.2}$$

La d è una distanza su $\mathbb{C}^n$, che si dice *distanza Euclidea.* Osserviamo che essa coincide con la distanza Euclidea di $\mathbb{R}^{2n}$ quando si identifichi $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ ad $x = (\Re z_1, \ldots, \Re z_n, \Im z_1, \ldots, \Im z_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Esempio 4.3 (*Lo spazio metrico* ℓ_2) Sia ℓ_2 l'insieme delle successioni $\{a_n\}_{n \geq 1}$ di numeri reali tali che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. Se $a = \{a_n\}$, $b = \{b_n\} \in \ell_2$, poniamo

$$d(a,b) = \|a - b\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)^2}\,. \tag{4.3}$$

Questa funzione è ben definita su ℓ_2 in quanto

$$(d(a,b))^2 \leq 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right) < \infty.$$

La verifica che questa sia una distanza su ℓ_2 è analoga a quella per gli spazi Euclidei.

Sia (X,d) uno spazio metrico. Se $x \in X$ e r è un numero reale positivo, l'insieme

$$B(x,r) \;=\; \{y \in X \mid d(x,y) < r\} \tag{4.4}$$

si dice *palla aperta* di centro x e raggio r; l'iniseme

$$\bar{B}(x,r) \;=\; \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\} \tag{4.5}$$

si dice *palla chiusa* di centro x e raggio r; l'insieme

$$S(x,r) \;=\; \{y \in X \mid d(x,y) = r\} \tag{4.6}$$

si dice *sfera* di centro x e raggio r.

Siano (X,d) uno spazio metrico e A, B due sottoinsiemi di X. Poniamo

$$d(A,B) \;=\; \inf\{d(x,y) \mid x \in A,\, y \in B\}\,. \tag{4.7}$$

Se $x \in X$ scriveremo $d(x,A)$ invece di $d(\{x\},A)$.

Definiamo inoltre *diametro* dell'insieme A l'elemento di $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$\operatorname{diam}(A) \;=\; \sup\{d(x,y) \mid x,\, y \in A\}\,. \tag{4.8}$$

Quando $\operatorname{diam}(A) < \infty$ diciamo che l'insieme A è *limitato.*

Teorema 4.1 *Le palle aperte di uno spazio metrico (X,d) formano una base di una topologia su X.*

Dim. Siano x_1, ..., $x_n \in X$ e siano r_1, ..., r_n numeri reali positivi. Per ogni $x \in \cap_{i=1}^n B(x_i,r_i)$ poniamo $r(x) = \inf_{1\leq i\leq n} r_i - d(x,x_i)$. Il numero reale r è positivo e, se $y \in B(x,r(x))$, allora per ogni $1 \leq i \leq n$ abbiamo

$$d(y,x_i) \leq d(y,x) \,+\, d(x,x_i) < r_i.$$

Ciò dimostra che $B(x,r(x)) \subset \bigcap_{i=1}^n B(x_i,r_i)$
e quindi $\bigcap_{i=1}^n B(x_i,r_i) \;=\; \bigcup_{x\in\cap_{i=1}^n B(x_i,r_i)} B(x,r(x))$. Quindi vale la proprietà $(\mathcal{B}_2)$ della Proposizione 1.6. La proprietà $(\mathcal{B}_1)$ è senz'altro vera e quindi la tesi è dimostrata.

La topologia su X che ha come base le palle aperte di una distanza d si dice *topologia metrica.*

Osservazione Sia (X,d) uno spazio metrico. Per ogni punto x di X le palle aperte di centro x e raggio 2^{-n} (per $n \in \mathbb{N}$) formano un sistema fondamentale numerabile di intorni di x per la topologia indotta dalla metrica d.

Uno spazio topologico $\mathbf{X} = (X,\tau)$ che abbia come base le palle aperte di una distanza d su X si dice *metrizzabile.*

Come vedremo nel seguito, non tutte le topologie sono metrizzabili e, nel caso di topologie metrizzabili, diverse funzioni di distanza possono definire la stessa topologia. Due distanze che inducano sull'insieme X la stessa topologia si dicono *topologicamente equivalenti.*

Esempio 4.4 Sia X un insieme qualsiasi. La funzione:

$$X \times X \ni (x, y) \to d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

è una distanza che induce su X la topologia discreta.

Se $X = \mathbb{Z}$ questa distanza è topologicamente equivalente alla

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ni (x, y) \to |x - y| \in \mathbb{R}.$$

Esempio 4.5 La topologia indotta su $\mathbb{R}^n$ dalla distanza Euclidea si dice *topologia Euclidea* di $\mathbb{R}^n$.

Analogamente supporremo assegnata su ℓ_2 la topologia indotta dalla metrica che abbiamo definito sopra.

Osservazione Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ definita da

$$d_1(x, y) = \min\{d(x, y), 1\} \quad \forall x, y \in X.$$

La d_1 è una distanza su X, topologicamente equivalente a d. In particolare: *ogni distanza su un insieme X è topologicamente eqivalente ad una distanza in cui X è limitato.*

§5 Sottospazi e topologia indotta

Si verifica facilmente, utilizzando gli assiomi $(\mathcal{O}_1)$, $(\mathcal{O}_2)$, $((\mathcal{O}_3)$ che definiscono una topologia, che vale la seguente

Proposizione 5.1 *Sia τ una topologia su un insieme X e sia Y un sottoinsieme di X. Allora*

$$\tau|_Y = \{A \cap Y \,|\, A \in \tau\}$$

è una topologia su Y.

La topologia $\tau|_Y$ si dice la *topologia indotta* da $\mathbf{X} = (X, \tau)$ su Y e $\mathbf{Y} = (Y, \tau|_Y)$ si dice *sottospazio topologico* di $\mathbf{X}$. Se Y è un aperto di $\mathbf{X}$, allora gli aperti di $\mathbf{Y}$ sono anche aperti di $\mathbf{X}$. Se Y è un chiuso di $\mathbf{X}$, allora i chiusi di $\mathbf{Y}$ sono anche chiusi di $\mathbf{X}$.

Lemma 5.2 *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau)$ uno spazio topologico e $A \subset Y \subset X$ due sottoinsiemi di X. Allora la chiusura di A in $\mathbf{Y}$ è data da*

$$\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y.$$

La topologia indotta da $\mathbf{X}$ su A coincide con la topologia indotta su A da $\mathbf{Y}$.

Se la topologia τ su X è indotta da una distanza $d : X \times X \to \mathbb{R}$ su X, allora la topologia indotta su Y coincide con la topologia indotta dalla restrizione a Y della distanza su X.

Esempio 5.1 Indicheremo con

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}^n &= \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, ..., n\} \\
\mathbf{D}^n &= \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1^2 + ... + x_n^2 \leq 1\} \\
\mathbf{S}^n &= \{(x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_0^2 + x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\}
\end{aligned}$$

(per $n \geq 1$) rispettivamente il cubo e la palla unitari di dimensione n con la topologia di sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e la sfera di dimensione n (con $n \geq 0$) con la topologia di sottospazio di $\mathbb{R}^{n+1}$. Per $n = 0$, identifichiamo $\mathbf{I}^0$ e $\mathbf{D}^0$ all'insieme formato da un solo punto, con la topologia discreta. Se $n = 1$, scriviamo $\mathbf{I}$ invece di $\mathbf{I}^1$. Osserviamo che $\mathbf{S}^0$ è l'insieme formato da una coppia di punti, con la topologia discreta. Converremo che $\mathbf{I}^n = \mathbf{D}^n = \mathbf{S}^n = \emptyset$ se $n < 0$.

§6 Ricoprimenti

Sia A un sottoinsieme di X. Si dice *ricoprimento* di A una famiglia Γ di sottoinsiemi di X tale che $A \subset \bigcup \Gamma$. Un secondo ricoprimento Δ di A si dice *inscritto* in Γ o un *raffinamento* di Γ se si può definire un'applicazione $\iota : \Delta \longrightarrow \Gamma$ tale che $A \subset \iota(A)$ per ogni $A \in \Delta$. La ι si dice *funzione di raffinamento.* Se $\Delta \subset \Gamma$ e la funzione di raffinamento è l'inclusione, diciamo che Δ è un *sottoricoprimento* di Γ.

Se $\mathbf{X} = (X, \tau)$ è uno spazio topologico, un ricoprimento Γ di un suo sottoinsieme A si dice *aperto* (risp. *chiuso*) se ogni suo elemento è un aperto (risp. un chiuso) di $\mathbf{X}$.

Esso si dice *localmente finito* se ogni punto di X possiede un intorno U_x che ha intersezione non vuota con al più un numero finito di elementi di Γ.

È ovvio che in ogni ricoprimento aperto se ne può inscrivere uno i cui insiemi appartengano tutti a una base di aperti assegnata.

Un ricoprimento Γ di uno spazio topologico $\mathbf{X}$ si dice *fondamentale* se condizione necessaria e sufficiente affinché un sottoinsieme A di X sia aperto è che $A \cap B$ sia un aperto di B (per la topologia di sottospazio) per ogni $B \in \Gamma$.

Si ottiene una caratterizzazione equivalente dei ricoprimenti fondamentali sostituendo alla parola aperto la parola chiuso nella definizione precedente.

Teorema 6.1 *Ogni ricoprimento aperto e ogni ricoprimento chiuso localmente finito di uno spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau)$ sono fondamentali.*

Dim. È evidente che ogni ricoprimento aperto e ogni ricoprimento chiuso finito sono fondamentali.

Supponiamo ora che Γ sia un ricoprimento chiuso localmente finito. La famiglia Δ degli aperti di $\mathbf{X}$ che intersecano solo un numero finito di elementi di Γ è un ricoprimento aperto di $\mathbf{X}$ e dunque fondamentale. Sia A un sottoinsieme di X tale che $A \cap B$ sia aperto in B per ogni $B \in \Gamma$. Allora $A \cap B \cap C$ è un aperto di $B \cap C$ per ogni $B \in \Gamma$ e $C \in \Delta$. Poiché $\{B \cap C \mid B \in \Gamma\}$ è un ricoprimento chiuso finito di $C \in \Delta$, ne segue che $A \cap C$ è aperto in C per ogni $C \in \Delta$ e quindi che A è aperto in $\mathbf{X}$ in quanto Δ è fondamentale.

Esempio 6.1 Se A, B sono due sottoinsiemi di uno spazio topologico $\mathbf{X}$ tali che $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$, allora $\{A, B\}$ è un ricoprimento fondamentale di $\mathbf{X}$.

Se Γ è un ricoprimento fondamentale inscritto in un ricoprimento Δ, allora Δ è anch'esso fondamentale.

Proposizione 6.2 *Sia Γ un qualsiasi ricoprimento di un insieme X e sia assegnata, per ogni $A \in \Gamma$, una topologia τ_A su A. Allora*

$$\tau = \{Y \subset X \mid Y \cap A \in \tau_A \ \forall A \in \Gamma\}$$

è una topologia su X, rispetto alla quale Γ è un ricoprimento fondamentale. La topologia indotta dalla τ su ciascun sottoinsieme $A \in \Gamma$ è meno fine della τ_A.

DIM. Si verifica facilmente che τ è una topologia su X. Gli aperti di $\tau|_A$ sono tutti e soli i sottoinsiemi della forma $B \cap A$ con $B \in \tau$. Essi appartengono quindi a τ_A per la definizione di τ, onde $\tau|_A \subset \tau_A$. Da questo segue che Γ è un ricoprimento fondamentale per $\mathbf{X} = (X, \tau)$. Infatti un sottoinsieme B di X che intersechi ogni $A \in \Gamma$ in un aperto di $\tau|_A \subset \tau_A$ è aperto in $\mathbf{X}$ per la definizione della topologia τ e viceversa ogni aperto B di $\mathbf{X}$ interseca ogni A di Γ in un aperto della topologia relativa.

Sia Γ un ricoprimento qualsiasi di uno spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau)$. Per la proposizione precedente, la

$$\tau_\Gamma = \{B \subset X \mid B \cap A \in \tau|_A\}$$

è una topologia su X. Essa coincide con la τ se Γ è un ricoprimento fondamentale, mentre è strettamente più fine della τ se Γ non è fondamentale. La τ_Γ si dice la *topologia debole associata al ricoprimento* Γ.

ESEMPIO 6.2 Sia $\mathbf{X}$ uno spazio topologico e sia $\Gamma = \{\{x\} \mid x \in X\}$. La topologia debole del ricoprimento Γ è la topologia discreta su $\mathbf{X}$.

ESEMPIO 6.3 Su $\mathbb{R}^2$ con la topologia Euclidea consideriamo il ricoprimento Γ formato da tutte le rette passanti per l'origine. La topologia debole del ricoprimento Γ è strettamente più fine della topologia Euclidea. Infatti l'insieme A descritto in coordinate polari ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) da:

$$A = \{r < |\sin\theta|\} \cup \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

è un aperto di τ_Γ ma non è un intorno di $(0,0)$ nella topologia Euclidea, in quanto non contiene nessuna palla aperta di raggio positivo con centro in $(0,0)$.

§7 Applicazioni continue

Siano $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ e $\mathbf{Y} = (Y, \tau_Y)$ due spazi topologici.

Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice *continua* se l'immagine inversa mediante f di un qualsiasi aperto di $\mathbf{Y}$ è un aperto di $\mathbf{X}$:

$$(7.1) \qquad f : X \to Y \quad \text{è continua} \quad \iff \quad f^{-1}(A) \in \tau_X \quad \forall A \in \tau_Y .$$

Poiché per ogni $A \subset Y$ risulta $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$, un'applicazione $f : X \to Y$ è continua se e soltanto se l'immagine inversa di un qualsiasi chiuso di $\mathbf{Y}$ è un chiuso di $\mathbf{X}$.

TEOREMA 7.1 *Sia $\mathbf{Y} = (Y, \tau_Y)$ uno spazio topologico, X un insieme e $f : X \to Y$ un'applicazione. Allora la famiglia di sottoinsiemi di X*

$$f^*(\tau_Y) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \tau_Y\}$$

è una topologia su X.

Se Γ è una base (risp. prebase) di τ_Y, allora

$$f^*(\Gamma) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \Gamma\}$$

è una base (risp. prebase) della topologia $f^*(\tau_Y)$.

DIM. Abbiamo $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(Y) = X$. Inoltre, per ogni famiglia $\{A_i \,|\, i \in I\}$ di sottoinsiemi di Y risulta:

$$\bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right), \quad \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i) = f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$$

Da queste considerazioni segue immediatamente la tesi.

La topologia $f^*(\tau_Y)$ costruita nel teorema precedente si dice il *pull-back* o *immagine inversa* su X della topologia τ_Y su Y mediante l'applicazione $f : X \to Y$.

Un'applicazione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ e $\mathbf{Y} = (Y, \tau_Y)$ è continua se e soltanto se $f^*(\tau_Y) \subset \tau_X$, cioè se e soltanto se la topologia di $\mathbf{X}$ è più fine del pull-back su X, mediante f, della topologia di $\mathbf{Y}$.

Da questa osservazione ricaviamo il criterio:

TEOREMA 7.2 *Siano* $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$, $\mathbf{Y} = (Y, \tau_Y)$ *due spazi topologici e* $\Gamma \subset \tau_Y$ *una prebase degli aperti di* $\mathbf{Y}$. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione* $f : X \to Y$ *sia continua è che, per ogni aperto* A *della prebase* Γ, $f^{-1}(A)$ *sia un aperto di* τ_X.

TEOREMA 7.3 *La composizione di applicazioni continue è un'applicazione continua.*

DIM. Siano $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Z}$ tre spazi topologici e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due applicazioni continue. Se A è un aperto di $\mathbf{Z}$, allora $g^{-1}(A)$ è un aperto di $\mathbf{Y}$ e quindi $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$ è un aperto di $\mathbf{X}$. Dunque $g \circ f : X \to Z$ è un'applicazione continua.

LEMMA 7.4 *Sia* $f : X \to Y$ *un'applicazione continua tra due spazi topologici* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$. *Siano* $A \subset X$ *e* $B \subset Y$ *tali che* $f(A) \subset B$. *Allora l'applicazione*

$$f|_A^B : A \ni x \to f(x) \in B$$

è continua per le topologie di sottospazio su A *e* B.

DIM. Sia U un aperto di B. Possiamo allora trovare un aperto $\tilde{U}$ di $\mathbf{Y}$ tale che $U = B \cap \tilde{U}$. Allora

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(B \cap \tilde{U}) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(\tilde{U})$$

e quindi

$$(f|_A^B)^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(B) \cap f^{-1}(\tilde{U}) = A \cap f^{-1}(\tilde{U})$$

è un aperto della topologia indotta su A da $\mathbf{X}$.

L'applicazione $f|_A^B$ introdotta sopra si dice *abbreviazione* di f al dominio A e al codominio B. Se $B = Y$, scriviamo semplicemente $f|_A$ e chiamiamo tale applicazione *restrizione* di f ad A.

Osserviamo che $f : X \to Y$ è continua se e soltanto se $f|_X^{f(X)}$ è continua.

Per semplicità, indicheremo a volte l'abbreviazione $f|_A^B$ di f mediante $f : A \to B$.

Osservazione Sia $f : X \to Y$ un'applicazione tra due insiemi X e Y e siano $\tau_1 \subset \tau_2$ due topologie su X e $\sigma_1 \subset \sigma_2$ due topologie su Y. Se f è continua per la topologia τ_1 su X e la topologia σ_2 su Y, allora è continua anche per le topologie τ_2 su X e σ_1 su Y: un'applicazione continua rimane cioè continua quando si passi a una topologia meno fine nel codominio e a una più fine sul dominio.

Lemma 7.5 *La topologia di sottospazio su un sottoinsieme $A \subset X$ di uno spazio topologico $\mathbf{X}$ è la meno fine tra quelle che rendono l'applicazione di inclusione*

$$\iota : A \ni x \to x \in X$$

continua.

Teorema 7.6 *Sia Γ un ricoprimento fondamentale di uno spazio topologico $\mathbf{X}$. Supponiamo che per ogni $A \in \Gamma$ sia assegnata un'applicazione*

$$f_A : A \to Y$$

di A in uno spazio topologico $\mathbf{Y}$ che sia continua per la topologia di sottospazio su A. Se

$$f_A|_{A\cap B} = f_B|_{A\cap B} \quad \forall A,\, B \in \Gamma \tag{7.2}$$

risulta definita un'unica applicazione continua $f : X \to Y$ tale che $f|_A = f_A$ per ogni $A \in \Gamma$.

Dim. Osserviamo che la (7.2) ci consente di definire un'unica applicazione $f : X \to Y$ tale che $f|_A = f_A$ per ogni $A \in \Gamma$. Se U è un aperto di $\mathbf{Y}$, allora $f^{-1}(U)$ è un aperto di $\mathbf{X}$ perché

$$f^{-1}(U) \cap A = f_A^{-1}(U)$$

è un aperto di A per ogni elemento A del ricoprimento fondamentale Γ. Osserviamo che viceversa, per il Lemma 7.4, se f è continua, tutte le $f_A = f|_A$ sono continue.

Esempio 7.1 Siano $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ e $\mathbb{R}^-\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0\}$. Sia $\mathbf{X}$ uno spazio topologico e $f_+ : \mathbb{R}^+ \to X$, $f_- : \mathbb{R}^- \to X$ due applicazioni continue. Se $f_+(0) = f_-(0)$, allora l'applicazione $f : \mathbb{R} \to X$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} f_-(x) & \text{se} \quad x \leq 0 \\ f_+(x) & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

è continua. Infatti $\{\{x \leq 0\}, \{x \geq 0\}\}$ è un ricoprimento chiuso finito e quindi fondamentale di $\mathbb{R}$.

Sia $f : X \to Y$ un'applicazione tra due spazi topologici $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$. Diciamo che f è *continua nel punto* $x \in X$ se per ogni intorno V di $f(x)$ in $\mathbf{Y}$, $f^{-1}(V)$ è un intorno di x in $\mathbf{X}$. Chiaramente è sufficiente verificare questa proprietà al variare di V in un sistema fondamentale di intorni di $f(x)$ in $\mathbf{Y}$. In particolare, nel caso in cui uno o entrambi gli spazi $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ siano metrici, otteniamo il:

Teorema 7.7 *Sia (Y, d) uno spazio metrico, $\mathbf{X}$ uno spazio topologico. Condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione $f : X \to Y$ sia continua in $x_0 \in X$ per la topologia su Y indotta dalla metrica d è che per ogni $\epsilon > 0$ esista un intorno U_ϵ di x_0 in $\mathbf{X}$ tale che*

$$d\left(f(x), f(x_0)\right) < \epsilon \quad \forall x \in U_\epsilon.$$

Sia (X, d) uno spazio metrico, $\mathbf{Y}$ uno spazio topologico. Condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione $f : X \to Y$ sia continua in un punto $x_0 \in X$ è che, fissato un sistema fondamentale di intorni Γ di $f(x_0)$ in $\mathbf{Y}$, per ogni $V \in \Gamma$ esista un numero reale $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \in V \qquad \forall x \in X \quad \textit{con} \quad d(x, x_0) < \delta\,.$$

Siano (X, d), (Y, d') spazi metrici. Un'applicazione $f : X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ se e soltanto se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d'\left(f(x), f(x_0)\right) < \epsilon\,.$$

Teorema 7.8 *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione tra due spazi topologici $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia continua è che essa sia continua in ogni punto.*

Dim. Supponiamo f continua e sia $x \in X$. Un intorno V di $f(x)$ contiene un aperto A con $f(x) \in A \subset V$. Allora $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(A) \ni x$ è un intorno di x perché $f^{-1}(A)$ è aperto in quanto abbiamo supposto f continua.

Viceversa, se f è continua in ogni punto di X, l'immagine inversa di un aperto di $\mathbf{Y}$ è un aperto di $\mathbf{X}$ perché intorno di ogni suo punto.

Un'applicazione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ si dice un *omeomorfismo* se è bigettiva e sia f che f^{-1} sono continue.

Un'applicazione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici X e Y si dice un *omeomorfismo locale* se per ogni punto $x_0 \in X$ possiamo trovare un intorno aperto U di x_0 in X tale che

- (i) $f(U)$ sia un aperto di Y,
- (ii) $f|_U^{f(U)} : U \to f(U)$ sia un omeomorfismo.

Osservazione Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di spazi topologici, l'esistenza di un omeomorfismo tra due elementi di $\mathcal{F}$ è una relazione di equivalenza in $\mathcal{F}$.

Infatti l'applicazione identica è un omeomorfismo di uno spazio topologico in se stesso, l'inversa di un omeomorfismo è ancora un omeomorfismo e la composizione di omeomorfismi è ancora un omeomorfismo.

Esempio 7.2 $\overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| < 1\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Un omeomorfismo è descritto da:

$$\overset{\circ}{D}{}^n \ni x \to \frac{x}{1 - |x|} \in \mathbb{R}^n,$$

che ha come inversa
$$\mathbb{R}^n \ni y \to \frac{y}{1+|y|} \in \overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^n.$$

Esempio 7.3 Il cubo $\mathbf{I}^n$ è omeomorfo a $\mathbf{D}^n$.

La frontiera $b\mathbf{I}^n = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sup_{1\leq i\leq n} |x_i - 1/2| = 1/2\}$ di $\mathbf{I}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è omeomorfa a $\mathbf{S}^{n-1}$.

La parte interna $\overset{\circ}{\mathbf{I}}{}^n = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 < x_i < 1,\, i = 1, ..., n\}$ di $\mathbf{I}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è omeomorfa alla parte interna $\overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^n$ di $\mathbf{D}^n$ in $\mathbb{R}^n$.

Sia $\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Poniamo poi, per $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}\| = \sup_{i=1,...,n} |x_i|$. Consideriamo l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita da

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1/2\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x} + \mathbf{e}_1 + ... + \mathbf{e}_n\right) & \text{se} \quad \mathbf{x} \neq 0 \\ 1/2(\mathbf{e}_1 + ... + \mathbf{e}_n) \quad \text{se} \quad \mathbf{x} = 0 \end{cases}.$$

La sua abbreviazione a D^n, I^n, a S^{n-1}, bI^n, a $\overset{\circ}{D}{}^n$, $\overset{\circ}{I}{}^n$ dà gli omeomorfismi cercati.

Esempio 7.4 (Proiezione stereografica) Indichiamo con $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$. $\mathbf{S}^n - \{\mathbf{e}_0\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Un omeomorfismo è descritto dalla *proiezione stereografica*:

$$\mathbf{S}^n - \{\mathbf{e}_0\} \ni x = (x_0, x_1, ..., x_n) \to \left(\frac{2x_1}{1-x_0}, ..., \frac{2x_n}{1-x_0}\right) \in \mathbb{R}^n.$$

La sua inversa è data dalla:

$$\mathbb{R}^n \ni y \to \left(\frac{|y|^2-4}{|y|^2+4}, \frac{4y}{|y|^2+4}\right) \in \mathbf{S}^n.$$

Identificando $\mathbb{R}^n_y$ all'iperpiano affine $\Sigma = \{x_0 = -1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}_x$, la proiezione stereografica associa ad ogni punto x di $\mathbf{S}^n \setminus \{\mathbf{e}_0\}$ l'intersezione di Σ con la retta affine passante per i punti $\mathbf{e}_0$ e x.

Si possono ottenere altri omeomorfismi sostituendo a Σ, in questa costruzione, un qualsiasi altro iperpiano affine che non contenga il punto $\mathbf{e}_0$. In particolare, se scegliamo l'iperpiano equatoriale $\Sigma' = \{x_0 = 0\}$, otteniamo l'omeomorfismo (proiezione di Tolomeo)

$$\mathbf{S}^n \setminus \{\mathbf{e}_0\} \ni x \to \left(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_n}{1-x_0}\right) \in \mathbb{R}^n$$

con inversa

$$\mathbb{R}^n \ni y \to \left(\frac{|y|^2-1}{1+|y|^2}, \frac{2y_1}{1+|y|^2}, \dots \frac{2y_n}{1+|y|^2}\right) \in \mathbf{S}^n \setminus \{\mathbf{e}_0\}.$$

La proiezione di Tolomeo ha il vantaggio di essere *conforme*: essa trasforma cerchi di $\mathbf{S}^n$ in cerchi o rette di $\mathbb{R}^n$ e preserva l'angolo dell'intersezione di due cerchi di $\mathbf{S}^n$.

Esempio 7.5 Sia $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$. Allora per ogni intero $m \neq 0$ l'applicazione
$$f_m : \mathbf{S}^1 \ni z \to z^m \in \mathbf{S}^1$$
è un omeomorfismo locale. Essa è un omeomorfismo se e soltanto se $m = \pm 1$.

Sia infatti $z_0 = e^{i\theta_0}$ un punto di $\mathbf{S}^1$. Allora
$$U_{z_0} = \{e^{i\theta} \,|\, |\theta - \theta_0| < \pi/|m|\}$$
è un intorno aperto di z_0 in $\mathbf{S}^1$. L'applicazione
$$U_{z_0} \ni e^{i\theta} \to e^{im\theta} \in \{e^{i\phi} \,|\, |\phi - m\theta_0| < \pi\}$$
ha inversa continua $e^{i\phi} \to e^{i\phi/m}$ e quindi è un omeomorfismo. Osserviamo che $f_{\pm 1}^2 = id|_{\mathbf{S}^1}$ e quindi $f_{\pm 1}$ sono omeomorfismi; f_m non è un omeomorfismo quando $m \neq \pm 1$ perché non è iniettiva.

Esempio 7.6 L'applicazione
$$\mathbb{R} \ni \theta \to e^{i\theta} \in \mathbf{S}^1$$
è un omeomorfismo locale, ma non un omeomorfismo in quanto non è iniettiva.

Esempio 7.7 Sia $\dot{\mathbb{C}}$ l'insieme dei numeri complessi z diversi da 0. Consideriamo le applicazioni:
$$f_m : \dot{\mathbb{C}} \ni z \to z^m \in \dot{\mathbb{C}} \quad \text{e} \quad \exp : \mathbb{C} \ni z \to e^z = e^{\mathfrak{Re}\, z}(\cos(\mathfrak{Im}\, z) + i \sin(\mathfrak{Im}\, z)) \in \dot{\mathbb{C}}.$$
Le f_m sono omeomorfismi locali quando $m \neq 0$ ed omeomorfismi se $m = \pm 1$. L'applicazione esponenziale è un omeomorfismo locale.

Si chiama *immersione topologica* un'applicazione continua $f : X \to Y$ tra due spazi topologici $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ la cui abbreviazione $f|_X^{f(X)}$ sia un omeomorfismo.

Si chiama *immersione topologica locale* un'applicazione continua $f : X \to Y$ tra due spazi topologici $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ la cui abbreviazione $f|_X^{f(X)}$ sia un omeomorfismo locale.

Osserviamo che la restrizione di un'immersione topologica (o di una immersione topologica locale) $f : X \to Y$ a un aperto di X è ancora un'immersione topologica (risp. un'immersione topologica locale).[1]

Esempio 7.8 Se $X \subset Y$ è un sottospazio topologico di $\mathbf{Y}$, allora l'inclusione $\iota : X \to Y$ è un'immersione topologica.

Esempio 7.9 L'applicazione $\mathbb{R} \ni \theta \to e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ è una immersione topologica locale.

L'applicazione $[0, 2\pi[\ni \theta \to e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ non è né un'immersione topologica, né un'immersione topologica locale.

Esempio 7.10 L'applicazione
$$\mathbf{S}^1 \ni e^{i\theta} \to (1 - \cos(2\theta))e^{i\theta} \in \mathbb{C}$$

[1] Immersione e immersione locale corrispondono alle parole inglesi *embedding* e *immersion* rispettivamente.

è un'immersione topologica locale, ma non un'immersione topologica perché non è iniettiva.

Sia $\mathbf{X}$ uno spazio topologico e sia Y un sottoinsieme di X. Un'applicazione continua $X \to Y$ tale che $f(y) = y$ per ogni $y \in Y$ si dice una *retrazione* di X su Y. Un sottoinsieme Y di X per cui si possa trovare una retrazione di X su Y si dice un *retratto* di X.

Esempio 7.11 Ogni punto di uno spazio topologico è un suo retratto. L'insieme $\{0, 1\}$ non è un retratto di $\mathbb{R}$, ma è un retratto ad esempio del sottospazio $\mathbb{Q}$ di $\mathbb{R}$.

Teorema 7.9 *Sia $Y \subset X$ un sottoinsieme di uno spazio topologico $\mathbf{X}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché Y sia un retratto di X è che per ogni spazio topologico $\mathbf{Z}$ e ogni applicazione continua $f : Y \to Z$ si possa trovare un'applicazione continua $\tilde{f} : X \to Z$ che la estenda, tale cioè che $\tilde{f}|_Y = f$.*

Dim. Se $\phi : X \to Y$ è una retrazione, per ogni $f : Y \to Z$ continua da Y in uno spazio topologico $\mathbf{Z}$ possiamo definire l'estensione mediante $\tilde{f} = f \circ \phi$.

Viceversa, una retrazione $\phi : X \to Y$ non è altro che una estensione continua a X dell'applicazione identica di Y in sè.

Teorema 7.10 *Sia (X, d) uno spazio metrico e A un sottoinsieme non vuoto di X. Allora la funzione*

$$X \ni x \to d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\} \in \mathbb{R}$$

è continua per la topologia definita su X dalla distanza.

Dim. Siano $x, y \in X$ e $z \in A$. Allora

$$d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Passando all'estremo inferiore rispetto a $z \in A$, troviamo allora

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) \quad \forall x, y \in X$$

da cui si ricava (considerando l'analoga disuguaglianza che si ottiene scambiando y e x):

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Questa diseguaglianza implica la continuità.

Un sottoinsieme A di uno spazio topologico $\mathbf{X}$ si dice *ritagliabile* se è possibile trovare una funzione continua $f : X \to I = [0, 1]$ che valga 0 su A e sia positiva su $X - A$. In questo caso diciamo che f *ritaglia* A. Tutti gli insiemi ritagliabili sono chiusi e, per il teorema precedente, i chiusi di uno spazio topologico metrizzabile sono ritagliabili.

Esempio 7.12 Sia X un insieme e sia $\mathcal{B}(X)$ l'insieme di tutte le funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ limitate, tali cioè che $\sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty$. Allora

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

è una distanza su $\mathcal{B}(X)$.

Sia ora assegnata una topologia τ su X e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue e linitate su X a valori in $\mathbb{R}$. Se vi è una funzione $f \in \mathcal{B}(X)$ tale che

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d(f, f_n) = 0$$

allora f è continua.

Sia infatti $x \in X$ e sia $\epsilon > 0$. Fissiamo n in modo che $d(f, f_n) < \epsilon/3$. Possiamo trovare allora un intorno aperto U di x in $\mathbf{X}$ tale che $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon/3$ per ogni $y \in U$. Abbiamo quindi, per $y \in U$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| \leq & |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ \leq & d(f, f_n) + \epsilon/3 + d(f_n, f) < \epsilon \end{aligned}$$

e questo dimostra che f è continua in x. Dunque f è continua in ogni punto di X e pertanto è continua in x.

Un'applicazione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ si dice *aperta* (risp. *chiusa*) se trasforma aperti di $\mathbf{X}$ in aperti di $\mathbf{Y}$ (risp. chiusi di $\mathbf{X}$ in chiusi di $\mathbf{Y}$).

Un'applicazione continua, chiusa ed aperta si dice un *omomorfismo topologico.* Gli omeomorfismi sono esempi di omomorfismi topologici.

Teorema 7.11 *Se $f : X \to Y$ è un omeomorfismo locale, allora è aperta.*

Dim. Sia A un aperto di $\mathbf{X}$. Per ogni punto $x \in A$ possiamo trovare un intorno aperto U_x di x tale che $f(U_x)$ sia un aperto di $\mathbf{Y}$ e $f|_{U_x}^{f(U_x)}$ sia un omeomorfismo. In particolare $V_x = f(U_x \cap A)$ è un aperto di $f(U_x)$ e quindi di $\mathbf{Y}$. Allora $f(A) = \cup_{x \in A} V_x$ è un aperto di $\mathbf{Y}$.

CAPITOLO II

COSTRUZIONI TOPOLOGICHE

§1 Prodotti topologici

Dal Teorema I.5.1 e dalla Proposizione I.1.1 segue immediatamente:

Teorema 1.1 *Sia X un insieme e sia $\{\mathbf{X}_i = (X, \tau_i) \,|\, i \in I\}$ una famiglia di spazi topologici, parametrizzata da un insieme I di indici. Supponiamo assegnata, per ogni $i \in I$, un'applicazione $f_i : X \to X_i$. Vi è un'unica topologia τ su X, meno fine tra tutte quelle che rendono continue tutte le applicazioni f_i. Una prebase Γ di tale topologia è costituita dai sottoinsiemi di X:*

$$\Gamma = \bigcup_{i\in I} \{f_i^{-1}(A) \,|\, A \in \tau_i\}$$

e una base $\mathcal{B}$ dai sottoinsiemi

$$\mathcal{B} = \{\cap_{i\in J} f^{-1}(A_i) \,|\, J \subset I \text{ finito},\ A_i \in \tau_i\ \forall i \in J\}.$$

La topologia τ è infatti la meno fine tra tutte le topologie su X che sono più fini di ognuna delle $f_i^*(\tau_i)$.

Ricordiamo che il prodotto cartesiano $X = \prod_{i\in I} X_i$ di una I-upla $(X_i \,|\, i \in I)$ di insiemi è l'insieme di tutte le applicazioni $x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ tali che $x(i) = x_i \in X_i$ per ogni $i \in I$. Chiaramente $X = \emptyset$ se uno dei fattori X_i è vuoto. Ammetteremo nel seguito che valga l'*assioma della scelta*, che cioè, se $I \neq \emptyset$ e $X_i \neq \emptyset$, il prodotto cartesiano di una qualsiasi I-upla[2] di insiemi non vuoti sia un insieme non vuoto.

Sia $(\mathbf{X}_i = (X_i, \tau_i) \,|\, i \in I)$ una I-upla di spazi topologici non vuoti. Sia $X = \prod_{i\in I} X_i$ il loro prodotto cartesiano. Per ogni indice $h \in I$ indichiamo con

$$\pi_h : X \ni x \to x(h) = x_h \in X_h$$

la proiezione sulla h-esima coordinata.

Chiamiamo *topologia prodotto* su X la meno fine tra le topologie che rendono continue tutte le proiezioni π_h per $h \in I$. L'insieme $X = \prod_{i\in I} X_i$, con la topologia prodotto τ, si dice *prodotto topologico* della I-upla di spazi topologici $(\mathbf{X}_i)_{i\in I}$.

[2]Supporremo sempre nel seguito $I \neq \emptyset$.

LEMMA 1.2 *Sia m un intero positivo, $(\mathbf{X}_i = (X_i, \tau_i) \mid i = 1, ..., m)$ una m-upla di spazi topologici non vuoti e sia $\mathbf{X} = (X, \tau)$ il loro prodotto topologico. Allora*

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times ... \times A_m \mid A_1 \in \tau_1, ..., A_m \in \tau_m\}$$

è una base della topologia τ.

DIM. Il lemma è una conseguenza immediata del Teorema 1.1 e della definizione di topologia prodotto.

ESEMPIO 1.1 La topologia Euclidea di $\mathbb{R}^n$ è la topologia prodotto di n copie di $\mathbb{R}$ con la topologia Euclidea.

ESEMPIO 1.2 Consideriamo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (insieme delle successioni di numeri reali) con la topologia di prodotto topologico di una famiglia numerabile di copie di $\mathbb{R}$ con la topologia Euclidea. Un sistema fondamentale di intorni di una successione $a = (a_n)$ in questa topologia è dato dalla famiglia

$$\mathcal{U}_a = \left\{\{x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid |x_j - a_j| < 2^{-m} \quad \text{per} \quad j \leq m\} \mid m \in \mathbb{N}\right\}.$$

ESEMPIO 1.3 Sia Y un insieme contenente almeno due punti, su cui consideriamo la topologia discreta. Sia $X = Y^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni a valori in Y, con la topologia prodotto. La topologia di X è strettamente meno fine della topologia discreta: una base degli aperti di X è costituita dagli insiemi

$$\{(y_n) \mid y_j = a_j \quad \forall j \leq m\}$$

al variare di m tra gli interi positivi e di $(a_0, ..., a_m)$ tra le m-uple di elementi di Y.

OSSERVAZIONE Nel caso di un prodotto *finito* di spazi topologici una base di aperti per la topologia prodotto è data dai prodotti di aperti dei singoli fattori. Invece nel caso di un prodotto *infinito* $\prod_{i \in I} X_i$ una base di aperti è costituita dai prodotti di aperti $\prod_{i \in I} A_i$ in cui tutti gli A_i, tranne al più un numero finito, siano uguali ad X_i. Infatti una base del prodotto sarà costituita dalle intersezioni finite di elementi della prebase definita nel Lemma 1.2. In particolare *se A è un aperto nella topologia prodotto, abbiamo $\pi_i(A) = X_i$ per tutti, tranne al più un insieme finito di indici $i \in I$.*

OSSERVAZIONE Se $(\mathbf{X}_i = (X_i, \tau_i) \mid i \in I)$ è una I-upla di spazi topologici non vuoti, la famiglia $\alpha = \left\{\prod_{i \in I} A_i \mid A_i \in \tau_i\right\}$ è una base di una topologia su $\prod_{i \in I} X_i$, che si dice la *topologia delle scatole*. Essa coincide con la topologia prodotto se il numero di fattori del prodotto che contengano più di un elemento è finito, ed è strettamente più fine della topologia prodotto se tale numero è infinito.

Consideriamo ad esempio l'insieme X di tutte le applicazioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esso si può considerare come il prodotto cartesiano di tante copie di $\mathbb{R}$ quanti sono i numeri reali. Una base della topologia prodotto su X si ottiene considerando i sottoinsiemi di X:

$$\{f \in X \mid f(x_i) \in]a_i, b_i[, \quad i = 1, ..., n\}$$

al variare di n tra i numeri naturali, e di x_i e $a_i < b_i$ tra i numeri reali. Questa è la topologia della *convergenza puntuale*. La topologia delle scatole ha invece come base degli aperti insiemi della forma

$$\{f \in X \mid \alpha(x) < f(x) < \beta(x)\}$$

al variare di α, β tra le coppie di funzioni reali di variabile reale tali che $\alpha(x) < \beta(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Questa topologia è più fine di quella della convergenza uniforme.

TEOREMA 1.3 *Sia $f : Y \to X$ un'applicazione di uno spazio topologico Y in uno spazio topologico prodotto $X = \prod_{i \in I} X_i$. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia continua è che siano continue tutte le applicazioni $f_i = \pi_i \circ f : Y \to X_i$ (per $i \in I$) che si ottengono componendo la f con le proiezioni sui singoli fattori.*

DIM. Poiché le proiezioni sui singoli fattori sono continue, se f è continua anche le f_i sono continue perché composte di applicazioni continue.

Supponiamo viceversa che tutte le f_i siano continue. Gli aperti $\pi_i^{-1}(A)$ al variare di i in I e di A tra gli aperti di X_i formano una prebase della topologia di X. Per ciascuno di questi aperti $f^{-1}(\pi_i^{-1}(A)) = f_i^{-1}(A)$ è aperto in Y. Quindi f è continua perché sono aperte in Y le immagini inverse degli aperti di una prebase di X.

TEOREMA 1.4 *Sia $\mathbf{X} = (X = \prod_i X_i, \tau)$ il prodotto topologico di una I-upla di spazi topologici non vuoti $(\mathbf{X}_i = (X_i, \tau_i) \mid i \in I)$. Fissato un elemento $x^0 \in X$ e un indice $h \in I$, indichiamo con $X_h(x^0)$ il sottospazio di X:*

$$X_h(x^0) = \{x \in X \mid x_i = x_i^0 \quad \forall i \neq h\}.$$

Sia $\iota = \iota_{h,x_0}$ l'applicazione $\iota : X_h \to X$ definita da

$$(\iota(t))_i = \begin{cases} x_i^0 & \forall i \neq h \\ t & \text{per} \quad i = h. \end{cases}$$

L'applicazione ι è un'immersione topologica, che ha per immagine il sottospazio $X_h(x^0)$ di X.

DIM. La continuità di ι segue dal teorema precedente: $\pi_i \circ \iota$ è costante se $i \neq h$ e l'identità su X_h quando $i = h$. La $\iota|_{X_h}^{X_h(x^0)}$ è un omeomorfismo topologico perché la sua inversa è continua essendo la restrizione $\pi_h|_{X_h(x^0)}$ della proiezione π_h al sottospazio $X_h(x^0)$.

TEOREMA 1.5 *Sia $\mathbf{X} = (X = \prod_i X_i, \tau)$ il prodotto topologico di una I-upla di spazi topologici non vuoti $(\mathbf{X}_i = (X_i, \tau_i) \mid i \in I)$. Le proiezioni sulle coordinate $\pi_i : X \to X_i$ sono applicazioni aperte.*

DIM. Usiamo le notazioni introdotte nel teorema precedente.

Fissiamo un indice $j \in I$. Se A è un aperto di $\mathbf{X}$, allora $A \cap X_j(x)$ è un aperto di $X_j(x)$ per ogni $x \in X$. Per il teorema precedente le applicazioni $\pi_j|_{X_j(x)} : X_j(x) \to X_j$ sono omeomorfismi per ogni $x \in X$. In particolare tutti gli insiemi $\pi_j(A \cap X_j(x)) = \pi_j|_{X_j(x)}(A \cap X_j(x))$ sono aperti di X_j e quindi

$$\pi_j(A) = \bigcup_{x \in X} \pi_j(A \cap X_j(x))$$

è un aperto di X_j.

Proposizione 1.6 *Sia $\mathbf{X}$ il prodotto topologico di una I-upla di spazi topologici $(\mathbf{X}_i \,|\, i \in I)$. Sia F_i, per ogni indice $i \in I$, un sottoinsieme chiuso di $\mathbf{X}_i$. Il prodotto $\prod_{i \in I} F_i$ è un chiuso di $\mathbf{X}$.*

Dim. Per ogni indice $i \in I$ l'insieme $A_i = X_i - F_i$ è aperto in $\mathbf{X}_i$. Quindi

$$X - \prod_{i \in I} F_i = \bigcup_{j \in J} \pi_j^{-1}(A_J)$$

è aperto in $\mathbf{X}$.

Teorema 1.7 *Sia $\mathbf{X}$ il prodotto topologico di una I-upla di spazi topologici $(\mathbf{X}_i = (X_i, \tau_i) \,|\, i \in I)$, ciascuno dei quali contenga almeno due elementi.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\mathbf{X}$ sia metrizzabile è che ciascuno dei fattori $\mathbf{X}_i$ sia metrizzabile e che l'insieme di indici I sia finito o al più numerabile.

Dim. Supponiamo che $\mathbf{X} = (X, \tau)$ sia metrizzabile. Allora tutti i suoi sottospazi sono metrizzabili. Per il Teorema 1.3 ogni fattore sarà allora metrizzabile perché omeomorfo a un sottospazio topologico di $\mathbf{X}$. Per dimostrare che l'insieme di indici I è al più numerabile, fissiamo una distanza d su X che induca la topologia prodotto di $\mathbf{X}$. Sia x^0 un punto di $\mathbf{X}$. Allora gli intorni aperti $B(x^0, 2^{-n}) = \{x \in X \,|\, d(x, x_0) < 2^{-n}\}$ di x^0 al variare di n in $\mathbb{N}$ formano un sistema fondamentale di intorni aperti di x^0 in $\mathbf{X}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme I_n degli indici $i \in I$ per cui $\pi_i(B(x^0, 2^{-n})) \neq X_i$ è finito. Quindi $I' = \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ è un insieme finito o al più numerabile. Mostriamo che $I = I'$. Ragioniamo per assurdo. Se così non fosse, potremmo trovare un indice $h \in I \setminus I'$. Per la definizione di I' abbiamo $X_h \subset \pi_h\left(B(x_0, 2^{-n})\right)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $\pi_h(U) = X_h$ per ogni intorno U di x^0 in $\mathbf{X}$.

Fissiamo una distanza d_h su X_h che induca la topologia τ_h di X_h. Poiché X_h contiene almeno due punti, possiamo fissare in X_h un punto x_h^1 distinto da x_h^0. Sia $0 < r < d_h(x_h^1, x_h^0)$. Allora $U = \pi_h^{-1}(B_h(x_h^0, r))$ è un intorno aperto di x^0 in $\mathbf{X}$, con $\pi_h(U) \underset{\neq}{\subset} X_h$. Abbiamo ottenuto una contraddizione e quindi $I = I'$ è finito o al più numerabile.

Supponiamo ora che I sia un insieme numerabile o finito e gli $\mathbf{X}_i$ siano tutti metrizzabili. Possiamo supporre che $I \subset \mathbb{N}$. Fissiamo su ciascuno degli spazi topologici $\mathbf{X}_i$ una distanza d_i che induca su X_i la topologia τ_i e rispetto alla quale X_i abbia diametro ≤ 1. Definiamo allora una funzione d su $X \times X$ a valori reali mediante:

$$d(x, y) = \sum_{i \in I} 2^{-i} d_i(x_i, y_i) \quad \forall x, y \in X.$$

Si verifica immediatamente che d è una distanza su $\mathbf{X}$. Resta da dimostrare che essa induce la topologia prodotto su X. A tal fine mostriamo innanzi tutto che le palle aperte della distanza d sono aperti di $\mathbf{X}$. Sia $x^0 \in X$ e $r > 0$. Fissiamo un punto $y \in B_d(x^0, r)$. Sia $\rho = r - d(y, x^0) > 0$ e sia I' l'insieme degli indici $i \in I$ tali che $2^{-i} < \rho/4$. L'insieme $I'' = I \setminus I'$ è finito e quindi

$$U = \bigcap_{i \in I''} \pi_i^{-1}\left(B_{d_i}(y_i, \rho/2))\right)$$

è un intono aperto di y nella topologia di $\mathbf{X}$. Esso è contenuto in $B_d(x^0, r)$ perché, se $x \in U$ abbiamo:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{i \in I} 2^{-1} d_i(x_i, y_i) \\ &\leq \sum_{i \in I''} 2^{-i} \rho/2 + \sum_{i \in I'} 2^{-i} < \rho. \end{aligned}$$

Quindi la topologia indotta dalla distanza d è meno fine della topologia prodotto.

Sia ora U un aperto della topologia prodotto e sia x^0 un punto di U. Possiamo allora trovare un numero reale positivo r e un insieme finito di indici $I' \subset I$ tale che

$$\bigcap_{i \in I'} \pi_i^{-1}(B_{d_i}(x_i^0, r)) \subset U.$$

Fissato un intero positivo m tale che $2^{-m} < r/2$, risulta allora

$$B_d(x^0, 2^{-m-1}) \subset U.$$

Ciò dimostra che la topologia indotta dalla distanza è più fine della topologia prodotto e quindi le due topologie coincidono.

Teorema 1.8 (Proprietà associativa del prodotto topologico)

Sia $(\mathbf{X}_i \,|\, i \in I)$ una I-upla di spazi topologici non vuoti e sia $\mathbf{X}$ il loro prodotto topologico. Sia $\{J_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ una partizione dell'insieme di indici I: ciò significa che $I = \cup_{\alpha \in A} J_\alpha$ e che $J_{\alpha_1} \cap J_{\alpha_2} = \emptyset$ se $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in A$. Consideriamo sui prodotti

$$Y_\alpha = \prod_{j \in J_\alpha} X_j$$

la topologia prodotto. L'applicazione bigettiva naturale

$$f : X \to \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha.$$

è un omeomorfismo per le topologie prodotto.

Dim. Indichiamo con $\tilde{\pi}_\beta : \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha \to Y_\beta$, per $\beta \in A$, e con $\hat{\pi}_j : Y_\alpha \to X_j$, per $j \in J_\alpha$, le proiezioni sulle coordinate. Dimostriamo che la f è continua: a questo scopo è sufficiente dimostrare che le $\tilde{\pi}_\alpha \circ f$ sono continue per ogni $\alpha \in A$. Ciò è conseguenza del fatto che le $\hat{\pi}_j \circ \tilde{\pi}_\alpha \circ f = \pi_j$ sono continue per ogni $j \in J_\alpha$.

Analogamente f^{-1} è continua perché $\pi_j \circ f^{-1} = \hat{\pi}_j \circ \tilde{\pi}_\alpha$ è continua se $j \in J_\alpha$.

Infine si verifica facilmente che vale il:

Teorema 1.9 (Proprietà commutativa del prodotto topologico) *Sia $(\mathbf{X}_i)_{i\in I}$ una I-upla di spazi topologici e sia $\sigma \in \mathfrak{S}(I)$ una permutazione dell'insieme I degli indici. L'applicazione*

$$\sigma_* : \prod_{i\in I} \mathbf{X}_i \ni (x_i) \to (x_{\sigma_i}) \in \prod_{i\in I} \mathbf{X}_{\sigma_i}$$

è un omeomorfismo.

§2 Quozienti topologici

Proposizione 2.1 *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio topologico, Y un insieme e $f : X \to Y$ un'applicazione. Allora*

$$f_*(\tau_X) \;=\; \{A \subset Y \,|\, f^{-1}(A) \in \tau_X\}$$

è una topologia su Y. Essa è la più fine tra le topologie su Y che rendono la f continua.

Dim. Osserviamo che $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(Y) = X$, onde $\emptyset$, $Y \in f_*(\tau_X)$. Inoltre

$$\bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i) \;=\; f^{-1}\left(\cap_{i\in I} A_i\right) \quad \text{e} \quad \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) \;=\; f^{-1}\left(\cup_{i\in I} A_i\right))$$

per ogni famiglia $\{A_i \,|\, i \in I\}$ di sottoinsiemi di Y. Quindi $f_*(\tau_X)$ è una topologia su Y e chiaramente essa è la più fine tra quelle che rendono la f continua.

Lemma 2.2 *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio topologico, Y, Z due insiemi e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ due applicazioni. Allora*

$$(g \circ f)_*(\tau_X) \;=\; g_*(f_*(\tau_X)).$$

Dim. Un sottoinsieme A di Z è un aperto della topologia $(g\circ f)_*(\tau_X)$ se e soltanto se $(g \circ f)^{-1}(A)$ è un aperto di $\mathbf{X}$. Se quindi A è un elemento di $(g \circ f)_*(\tau_X)$, $g^{-1}(A)$ è un aperto di $f_*(\tau_X)$. Questo dimostra che $(g \circ f)_*(\tau_X) \subset g_*(f_*(\tau_X))$. Sia viceversa A un elemento di $g_*(f_*(\tau_X))$. Allora $g^{-1}(A)$ è un elemento di $f_*(\tau_X)$ e quindi $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g\circ f)^{-1}(A)$ è un aperto di $\mathbf{X}$. Questo dimostra l'inclusione opposta $g_*(f_*(\tau_X)) \subset (g \circ f)_*(\tau_X)$ e quindi le due topologie coincidono.

Ricordiamo che una *relazione di equivalenza* $\sim$ su un insieme X è una relazione tra gli elementi di X che è

(1) *riflessiva*: $x \sim x \quad \forall x \in X$,
(2) *simmetrica*: $x, y \in X$ e $x \sim y \Rightarrow y \sim x$,
(3) *transitiva*: $x, y, z \in X$ e $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Una relazione di equivalenza determina una *partizione* dell'insieme X: posto

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

la

$$X/_{\sim} = \{[x] \mid x \in X\}$$

è una famiglia di sottoinsiemi di X che gode delle proprietà:

(1) $\bigcup_{x\in X}[x] = X$,
(2) $x, y \in X$ e $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$.

L'insieme $X/_{\sim}$ delle classi di equivalenza di X rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ si dice *quoziente* di X rispetto a $\sim$ e l'applicazione naturale surgettiva

$$\pi : X \ni x \longrightarrow [x] \in X/_{\sim}$$

proiezione sul quoziente.

Un sottoinsieme A di X si dice *saturo* rispetto alla $\sim$ se è unione di classi di equivalenza:

$$A = \bigcup_{x\in A}[x] = \pi^{-1}(\pi(A)).$$

Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio topologico, $\sim$ una relazione di equivalenza sull'insieme X, e sia $\pi : X \longrightarrow X/_{\sim}$ la proiezione naturale nel quoziente. La $\pi_*(\tau_X)$ si dice *topologia quoziente* su $X/_{\sim}$. Essa è la più fine tra le topologie che rendono la proiezione π continua. Lo spazio topologico $(X/_{\sim}, \pi_*(\tau_X))$ si dice *quoziente topologico* di $\mathbf{X}$ rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$.

Gli aperti (risp. i chiusi) del quoziente sono le immagini degli aperti (risp. chiusi) saturi di $\mathbf{X}$.

Esempio 2.1 Se A è un sottoinsieme dell'insieme X, indichiamo con $X/_{(A)}$ il quoziente ottenuto mediante la relazione di equivalenza

$$x \sim y \Leftrightarrow (x = y \quad \text{oppure} \quad x, y \in A)\,.$$

Diciamo che $X/_{(A)}$ è ottenuto *identificando a un punto l'insieme A.*

Esempio 2.2 Sia $\mathbb{R}$ la retta reale con la topologia Euclidea e sia $\mathbb{R}/_{\mathbb{Q}}$ il quoziente di $\mathbb{R}$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Allora la topologia quoziente di $\mathbb{R}/_{\mathbb{Q}}$ è la topologia indiscreta. Infatti $\mathbb{R}$ è il solo aperto saturo non vuoto.

Esempio 2.3 Lo spazio proiettivo reale di dimensione n è il quoziente

$$\mathbb{RP}^n = \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)/_{\sim}$$

di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ sono linearmente dipendenti.}$$

Su di esso consideriamo la topologia quoziente della topologia di sottospazio di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Osserviamo che la proiezione nel quoziente

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$$

è aperta. Infatti per ogni $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'omotetia

$$\omega_t : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \ni x \to tx \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

è un omeomorfismo. Quindi per ogni aperto A di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, il saturato

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \omega_t(A)$$

è un aperto di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Se $a \in \mathbf{GL}(n+1, \mathbb{R})$, l'abbreviazione di a definisce un omeomorfismo di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ in sè. Per passaggio al quoziente essa definisce un omeomorfismo di $\mathbb{RP}^n$ in sè. Quindi

(1) *le proiettività di $\mathbb{RP}^n$ sono omeomorfismi.*

Abbiamo inoltre:

(2) *L'applicazione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{RP}^n$ definita in coordinate omogenee da*

$$\mathbb{R}^n \ni (x_1, ..., x_n) \to (1, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{RP}^n$$

è un'immersione topologica che ha come immagine un aperto di $\mathbb{RP}^n$.

In particolare gli U_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ definiti in coordinate omogenee $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ da:

$$U_i = \{\pi(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid x_i \neq 0\}$$

formano un ricoprimento aperto di $\mathbb{RP}^n$ e sono tutti omeomorfi a $\mathbb{R}^n$.

Esempio 2.4 Sullo spazio proiettivo complesso di dimensione n, definito da

$$\mathbb{CP}^n = \left(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\right) /\sim$$

ove

$$z \sim w \Leftrightarrow z \text{ e } w \text{ sono linearmente dipendenti in } \mathbb{C}^{n+1},$$

si considera la topologia quoziente della topologia di sottospazio di $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$. Come nel caso reale, abbiamo:

(1) *Le proiettività sono omeomorfismi di $\mathbb{CP}^n$.*

(2) *L'applicazione definita in coordinate omogenee da:*

$$\mathbb{C}^n \ni (z_1, ..., z_n) \to (1, z_1, ..., z_n) \in \mathbb{CP}^n$$

è un'immersione topologica che ha come immagine un aperto di $\mathbb{CP}^n$.

Gli U_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ definiti in coordinate omogenee $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ da:

$$U_i = \{\pi(z_0, z_1, \ldots, z_n) \mid z_i \neq 0\}$$

formano un ricoprimento aperto di $\mathbb{CP}^n$ e sono tutti omeomorfi a $\mathbb{C}^n$.

Siano X, Y due insiemi e siano $\mathcal{R}_X$ una relazione di equivalenza su X e $\mathcal{R}_Y$ una relazione di equivalenza su Y. Indichiamo con $[x]_X$ e $[y]_Y$ rispettivamente le classi di equivalenza di $x \in X$ rispetto alla $\mathcal{R}_X$ e di $y \in Y$ rispetto alla $\mathcal{R}_Y$ e con

$$\pi_X : X \to X/_{\mathcal{R}_X}, \quad \pi_Y : Y \to Y/_{\mathcal{R}_Y}$$

le relative proiezioni sui quozienti.

Sia $f : X \to Y$ una applicazione. Condizione necessaria e sufficiente affinché si possa trovare una applicazione $\hat{f} : X/_{\mathcal{R}_X} \to Y/_{\mathcal{R}_Y}$ che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \pi_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} \\ X/_{\mathcal{R}_X} & \xrightarrow[\hat{f}]{} & Y/_{\mathcal{R}_Y} \end{array} \tag{2.1}$$

è che $f([x]_X) \subset [f(x)]_Y$. L'applicazione $\hat{f}$ è allora univocamente determinata da

$$\hat{f}([x]_X) = [f(x)]_Y \quad \forall x \in X.$$

Abbiamo:

Teorema 2.3 (di omomorfismo)*Siano* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *due spazi topologici e siano* $\mathcal{R}_X$, $\mathcal{R}_Y$ *relazioni di equivalenza sugli insiemi* X *e* Y *ed* $f : X \to Y$ *un'applicazione tale che* $f([x]_X) \subset [f(x)]_Y$ *per ogni* $x \in X$. *Se* f *è continua, allora anche la* $\hat{f}$ *descritta dal diagramma commutativo (2.1) è continua.*

Dim. Sia A un aperto di $Y/_{\mathcal{R}_Y}$ per la topologia quoziente. L'insieme $B = \hat{f}^{-1}(A)$ è un aperto di $X/_{\mathcal{R}_X}$ per la topologia quoziente se e soltanto se $\pi_X^{-1}(B)$ è un aperto di $\mathbf{X}$. Ma

$$\pi_X^{-1}(B) = \pi_X^{-1} \circ \hat{f}^{-1}(A) = (\hat{f} \circ \pi_X)^{-1}(A) = (\pi_Y \circ f)^{-1}(A).$$

Quest'ultimo insieme è aperto perché $\pi_Y \circ f$ è continua in quanto composizione di applicazioni continue.

Questo teorema si poteva ottenere anche come un corollario del seguente

Teorema 2.4 *Siano* $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ *e* $\mathbf{Y} = (Y, \tau_Y)$ *due spazi topologici e* $\sim$ *una relazione di equivalenza su* X. *Un'applicazione* $f : X/_\sim \to Y$ *è continua se e soltanto se l'applicazione composta* $f \circ \pi : X \to Y$, *dove* $\pi : X \to X/_\sim$ *è la proiezione naturale nel quoziente, è continua.*

Dim. La condizione è necessaria perché, se f è continua, anche $f \circ \pi$ è continua in quanto composta di funzioni continue. Essa è anche sufficiente: supponiamo che $f \circ \pi$ sia continua. Se A è un aperto di Y, allora $(f \circ \pi)^{-1}(A)) = \pi^{-1}(f^{-1}(A)$ è un aperto perché immagine inversa di un aperto mediante una applicazione continua. Per la definizione di topologia quoziente $f^{-1}(A)$ è allora un aperto di $X/_\sim$. Quindi la f è continua.

Data una applicazione $f : X \to Y$ tra due insiemi X e Y, la relazione

$$x_1(f)x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

è una relazione di equivalenza su X. L'applicazione $\hat{f} : X/_{(f)} \to Y$ che si ottiene per passaggio al quoziente è una applicazione iniettiva e si dice il *quoziente iniettivo* dell'applicazione f. Abbiamo

Proposizione 2.5 *Un'applicazione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ è continua se e soltanto se il suo quoziente iniettivo è continuo.*

Dim. L'enunciato è una facile conseguenza del precedente.

Un'applicazione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ si dice *decomponibile* se il suo quoziente iniettivo è un omeomorfismo.

Osserviamo che ogni applicazione decomponibile è surgettiva e, per il teorema precedente, continua.

Un'applicazione decomponibile ci permette di identificare il codominio a un quoziente topologico del dominio e viceversa la proiezione di uno spazio topologico su un suo quoziente topologico è decomponibile.

Esempio 2.5 Sia $f : \mathbb{R} \ni \theta \to e^{i\theta} \in \mathbf{S}^1 \subset \mathbb{C}$, in cui si considerino su $\mathbb{R}$ la topologia Euclidea e su $\mathbf{S}^1$ la topologia di sottospazio di $\mathbb{C}$ con la topologia Euclidea. Allora f è decomponibile e, in particolare, $\mathbf{S}^1$ è omeomorfo al quoziente di $\mathbb{R}$ rispetto al suo sottogruppo abeliano $2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Per verificare questa affermazione, è sufficiente osservare che l'applicazione f è aperta in quanto è un omeomorfismo locale e che il saturato di un aperto A di $\mathbb{R}$ è un aperto: infatti

$$\pi^{-1}\pi(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{x + 2k\pi \mid x \in A\}$$

è aperto perché unione di aperti (le traslazioni sono omeomorfismi di $\mathbb{R}$). Da questo segue che $\hat{f}$ è aperta e quindi un omeomorfismo.

Osserviamo che *condizione necessaria e sufficiente affinché una applicazione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$, $\mathbf{Y} = (Y, \tau_Y)$ sia decomponibile è che $f_*(\tau_X) = \tau_Y$.*

Teorema 2.6 *Siano $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ tre spazi topologici e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ due applicazioni. Allora:*

1. *Se f e g sono decomponibili, anche $g \circ f$ è decomponibile.*
2. *Se f è decomponibile e $g \circ f$ continua, allora g è continua.*
3. *Se f e g sono continue e $g \circ f$ decomponibile, allora g è decomponibile.*

DIM. (1). Supponiamo f e g decomponibili. La $g \circ f$ è surgettiva e quindi $g \circ f$ è decomponibile per il Lemma 2.2.
(2). Supponiamo f decomponibile e $g \circ f$ continua. Per il primo teorema di omomorfismo $g \circ \hat{f} : X/_{(f)} \to Z$ è continua. Poiché f è decomponibile, la $\hat{f} : X/_{(f)} \to Y$ è un omeomorfismo. Allora $g = g \circ \hat{f} \circ \hat{f}^{-1}$ è continua perché composta di funzioni continue.
(3). Supponiamo f e g continue e $h = g \circ f$ decomponibile. Indichiamo con $\hat{h}$ il quoziente iniettivo di h. Esso è un omeomorfismo di $X/_{(g \circ f)}$ su Z.

Dobbiamo dimostrare che $\hat{g} : Y/_{(g)} \to Z$ è un omeomorfismo. Essa è una applicazione continua ed è surgettiva perché $g \circ f$ è surgettiva. È quindi bigettiva. Sia $\hat{f}$ il quoziente iniettivo di f. Allora $\hat{g}^{-1} = \hat{f} \circ \hat{h}^{-1}$ è continua perché composta di applicazioni continue e quindi $\hat{g}$ è un omeomorfismo e g è perciò decomponibile.

TEOREMA 2.7 *Se $f : X \to Y$ è una applicazione surgettiva, continua e aperta (oppure chiusa) tra due spazi topologici $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, allora f è decomponibile.*

DIM. Basta osservare che, se f è aperta (risp. chiusa) il suo quoziente iniettivo $\hat{f}$ è un'applicazione aperta (risp. chiusa) e quindi un omeomorfismo.

Siano $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ due relazioni d'equivalenza sullo stesso insieme X. Indichiamo rispettivamente con $[x]$ ed $[x]'$ le classi d'equivalenza di $x \in X$ rispetto alle relazioni $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$. Diciamo che $\mathcal{R}$ è *più fine* di $\mathcal{R}'$ se

$$[x] \subset [x]' \quad \forall x \in X,$$

se cioè le classi di equivalenza di $\mathcal{R}'$ sono unioni di classi di equivalenza di $\mathcal{R}$. In questo caso risulta definita un'applicazione naturale

$$X/_{\mathcal{R}} \ni [x] \to [x]' \in X/_{\mathcal{R}'}.$$

PROPOSIZIONE 2.8 *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio topologico e siano $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ due relazioni di equivalenza su X. Se $\mathcal{R}$ è più fine di $\mathcal{R}'$, allora l'applicazione naturale*

$$g : X/_{\mathcal{R}} \ni [x] \to [x]' \in X/_{\mathcal{R}'}$$

è decomponibile per le topologie quoziente.

DIM. Sia $\pi : X \to X/_{\mathcal{R}}$ la proiezione nel quoziente. Allora $g \circ \pi : X \to X/_{\mathcal{R}'}$ è la proiezione nel quoziente. Usiamo il Teorema 2.6. Per il punto (2), g è continua perché π è decomponibile e $g \circ \pi$ è continua. Per il punto (3) allora g è decomponibile perchè π e g sono continue e $g \circ \pi$ è decomponibile.

TEOREMA 2.9 *Sia $\{A, B\}$ un ricoprimento fondamentale dello spazio topologico $\mathbf{X}$. Sia $\iota : A \to X$ l'inclusione e sia $\hat{\iota}$ l'applicazione definita dal diagramma commutativo:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota} & X \\ {\scriptstyle \pi_A}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_B} \\ A/_{(A \cap B)} & \xrightarrow[\hat{\iota}]{} & X/_{(B)} \end{array}$$

dove le applicazioni π_A e π_X sono le proiezioni nel quoziente. Allora $\hat{\imath}$ è un omeomorfismo.

Dim. L'applicazione $\hat{\imath}$ è continua e bigettiva. Essa è aperta: se U è un aperto di $A/_{(A\cap B)}$, allora

$$\pi_X^{-1}(\hat{\imath}(U)) = \begin{cases} \pi_A^{-1}(U) & \text{se} \quad \pi_A^{-1}(U)\cap B = \emptyset \\ \pi_A^{-1}(U)\cup B & \text{se} \quad \pi_A^{-1}(U)\cap B \neq \emptyset. \end{cases}$$

Questo è un aperto di $\mathbf{X}$ perchè $\{A, B\}$ è un ricoprimento fondamentale. Quindi $\hat{\imath}$ è continua, surgettiva e aperta e quindi è un omeomorfismo.

Esempio 2.6 *Il quoziente $\mathbf{D}^n/(\mathbf{S}^{n-1})$ è omeomorfo a $\mathbf{S}^n$.*
Consideriamo l'applicazione continua

$$f : \mathbf{D}^n \ni x \to (2|x|^2 - 1, 2\sqrt{(1-|x|^2)}x) \in \mathbf{S}^n.$$

La sua abbreviazione

$$\overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^n \ni x \to (2|x|^2 - 1,\, 2x\sqrt{(1-|x|^2)}) \in \mathbf{S}^n - \{\mathbf{e}_0\}$$

dove $\mathbf{e}_0 = (1, 0, ..., 0)$ è il primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$ è un omeomorfismo: la sua inversa è infatti l'applicazione continua

$$\mathbf{S}^n - \{\mathbf{e}_0\} \ni (y_0, y') \to \frac{y'}{\sqrt{4-(1+y_0)^2}} \in \overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^n.$$

Dimostriamo che f è una applicazione chiusa. Se F è un chiuso di $\mathbf{D}^n$ che non contiene punti di $\mathbf{S}^{n-1}$, allora possiamo trovare[3] un numero reale $r < 1$ tale che $|x| < r$ per ogni $x \in F$. Poichè i due aperti $\mathbf{S}^n - \{\mathbf{e}_0\}$ e $\{y \in \mathbf{S}^n \,|\, y_0 > 2r^2 - 1\}$ formano un ricoprimento fondamentale di $\mathbf{S}^n$, ed $f(F)$ è un chiuso del primo insieme perchè l'abbreviazione di f è un omeomorfismo e ha intersezione vuota con il secondo, se ne conclude che $f(F)$ è un chiuso di $\mathbf{S}^n$. Se F interseca $\mathbf{S}^{n-1}$, allora $f(F) = f(F \cup \mathbf{S}^{n-1})$. Osserviamo che $F \cup \mathbf{S}^{n-1}$ è un chiuso di $\mathbf{D}^n$. Possiamo quindi limitarci a considerare il caso in cui $\mathbf{S}^{n-1} \subset F$. Il suo complementare è allora un aperto di $\mathbf{D}^n$ che è tutto contenuto in $\overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^n$ e la sua immagine, complementare dell'immagine di $f(F)$, un aperto di $\mathbf{S}^n$ in quanto aperto dell'aperto $\mathbf{S}^n - \{\mathbf{e}_0\}$ mediante l'omeomorfismo $f|_{\overset{\circ}{\mathbf{D}}{}^n}^{\mathbf{S}^n - \{\mathbf{e}_0\}}$. Essendo continua e chiusa, la f è decomponibile. Il suo quoziente iniettivo ci dà allora un omeomorfismo tra $\mathbf{D}^n/_{\mathbf{S}^{n-1}}$ ed $\mathbf{S}^n$.

Una relazione di equivalenza $\sim$ su uno spazio topologico $\mathbf{X}$ si dice *aperta* (risp. *chiusa*) se la proiezione nel quoziente $\pi : X \to X/_\sim$ è una applicazione aperta (risp. chiusa). In modo equivalente: la $\sim$ è aperta se il satutato di un aperto è ancora un aperto, chiusa se il saturato di un chiuso è ancora un chiuso.

Esempio 2.7 La relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

[3] $\{|x| \,|\, x \in F\}$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ e quindi ha massimo per il teorema di Weierstrass.

è aperta.

ESEMPIO 2.8 La relazione di equivalenza su $\mathbf{S}^n$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$$

è aperta e chiusa.

§3 Incollamenti e attaccamenti

Descriviamo in questo paragrafo alcune costruzioni topologiche, che si deducono dalle operazioni di prodotto topologico e di quoziente, utili in topologia algebrica e in analisi funzionale.

A. SOMME DISGIUNTE Sia $(X_i \,|\, i \in I)$ una I-upla di insiemi. La loro *somma disgiunta* è l'insieme:

$$X = \bigsqcup_{i \in I} X_i = \left\{ (x, i) \in \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \times I \ | \ x \in X_i \quad \forall i \in I \right\}$$

Definiamo le applicazioni $\iota_i : X_i \to X$ mediante $\iota_i(x) = (x, i)$ per ogni $i \in I$ e $x \in X_i$.

Se su ciascuno degli insiemi X_i è assegnata una topologia τ_i, la *topologia somma disgiunta* su $\sqcup X_i$ è la più fine tra le topologie che rendono continue tutte le applicazioni ι_i. Lo spazio topologico $\mathbf{X} = \sqcup_{i \in I} \mathbf{X}_i$ si dice *la somma topologica disgiunta* della I-upla $(\mathbf{X}_i)_{i \in I}$. Osserviamo che $\iota_i : X_i \to X$ è un'immersione topologica e che i sottospazi $\iota_i(X_i)$ sono aperti e chiusi in $\mathbf{X}$. In particolare $\{\iota_i(X_i) \,|\, i \in I\}$ è un ricoprimento fondamentale di X mediante insiemi due a due disgiunti.

B. INCOLLAMENTI Sia $(\mathbf{X}_i)_{i \in I}$ una I-upla di spazi topologici e sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su $\sqcup \mathbf{X}_i$. Lo spazio topologico quoziente $\mathbf{Y} = \sqcup_{i \in I} \mathbf{X}_i /_{\mathcal{R}}$ si dice ottenuto per *incollamento* mediante la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$. L'applicazione composta

$$\mathfrak{j}_i : X_i \ni x \to \pi \circ \iota_i(x) \in Y,$$

ove $\pi : \sqcup_{i \in I} X_i \to Y$ è la proiezione nel quoziente, si dice *affondamento i-esimo.* Vale la seguente:

PROPOSIZIONE 3.1 *La famiglia $\{\mathfrak{j}_i(X_i) \,|\, i \in I\}$ è un ricoprimento fondamentale di $\mathbf{Y}$. Un'applicazione $f : Y \to Z$ dell'incollamento topologico $\mathbf{Y}$ in uno spazio topologico $\mathbf{Z}$ è continua se e soltanto se le $f \circ \mathfrak{j}_i : X_i \to Z$ sono continue per ogni $i \in I$.*

C. SOMME TOPOLOGICHE Sia $(\mathbf{X}_i)_{i \in I}$ una I-upla di spazi topologici. Per ogni coppia $(i, j) \in I \times I$ siano assegnati un sottospazio $X_{i,j} \subset X_j$ e una applicazione bigettiva[4] $\phi_{i,j} : X_{i,j} \to X_{j,i}$, in modo tale che valgano, per ogni $i, j, k \in I$:

(1) $X_{i,i} = X_i$ e $\phi_{i,i}$ è l'identità su X_i;

[4]Per semplicità supporremo che la funzione vuota sia l'unica applicazione bigettiva sull'insieme vuoto, a valori nell'insieme vuoto.

(2) $\phi_{i,k}(X_{i,k} \cap X_{j,k}) = X_{j,i} \cap X_{k,i}$ e il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} X_{i,k} \cap X_{j,k} & \xrightarrow{\phi_{i,k}} & X_{j,i} \cap X_{k,i} \\ {\scriptstyle \phi_{j,k}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi_{j,i}} \\ X_{i,j} \cap X_{k,j} & \xlongequal{\quad} & X_{i,j} \cap X_{k,j}. \end{array}$$

Risulta allora definita su $\sqcup_{i \in I} X_i$ la relazione di equivalenza:

$$(x,i)\mathcal{R}(y,j) \Leftrightarrow y \in X_{i,j} \quad \text{e} \quad \phi_{i,j}(y) = x.$$

Il quoziente topologico $\mathbf{Y} = \sqcup_{i \in I} \mathbf{X}_i /_{\mathcal{R}}$ si dice *somma topologica* di $(\mathbf{X}_i)$ mediante le funzioni di incollamento $\phi_{i,j} : X_{i,j} \to X_{j,i}$ e sarà indicata con $\bigoplus (X_i, X_{ij}, \phi_{ij})$.

Osserviamo che una somma topologica è un incollamento in cui tutti gli affondamenti sono applicazioni iniettive. Viceversa, si verifica che ogni incollamento in cui tutti gli affondamenti siano iniettivi è una somma topologica.

Osservazione Se i sottospazi X_{ij} sono tutti vuoti e quindi le funzioni di incollamento ϕ_{ij} sono tutte vuote, allora la somma topologica coincide con la somma disgiunta.

Proposizione 3.2 *Se tutti i sottospazi $X_{i,j} \subset X_j$ sono chiusi (oppure tutti aperti) e le $\phi_{i,j}$ sono tutte omeomorfismi, allora gli affondamenti $\mathfrak{j}_i$ sono immersioni topologiche per ogni $i \in I$.*

Dim. Supponiamo che tutti i sottospazi $X_{i,j}$ siano chiusi e tutte le $\phi_{i,j}$ siano degli omeomorfismi. Se F è un chiuso di X_j, allora $\iota_i^{-1}\left(\pi^{-1}(\mathfrak{j}_j(F))\right) = \phi_{i,j}\left(F \cap X_{i,j}\right)$ è un chiuso in X_i per ogni $(i,j) \in I \times I$. Quindi le $\mathfrak{j}_j : X_j \to Y$, essendo applicazioni chiuse, sono immersioni topologiche. Lo stesso ragionamento, sostituendo alla parola chiuso la parola aperto, si applica nel caso in cui tutti i sottospazi $X_{i,j}$ siano aperti.

Esempio 3.1 Sia $X_i = \mathbf{D}^2$ per $i = 1, 2$, $X_{1,2} = X_{2,1} = \mathbf{S}^1$ e $\phi_{1,2} = \phi_{2,1}$ sia l'identità su $\mathbf{S}^1$. Allora la somma topologica di X_1 ed X_2 mediante le $\phi_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq 2)$ è omeomorfa alla sfera $\mathbf{S}^2$.

D. Topologia debole associata a un ricoprimento Sia $\Gamma = \{A_i \mid i \in I\}$ un ricoprimento di uno spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau)$. Poniamo $X_{i,j} = A_i \cap A_j$ per ogni $i, j \in I$ e utilizziamo l'identità sui sottoinsiemi $X_{i,j} = X_{j,i}$ come funzioni di incollamento. La somma topologica che otteniamo si può identificare a un nuovo spazio topologico (X, τ'), dotato di una topologia τ' in generale più fine della topologia τ di $\mathbf{X}$. Infatti un sottoinsieme B di X è un aperto di τ' se e soltanto se, per ogni $i \in I$, l'insieme $B \cap A_i$ è aperto in $\tau|_{A_i}$. Osserviamo che tutte le $\mathfrak{j}_i$ sono immersioni topologiche.

E. Limiti e filtrazioni Sia $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di spazi topologici. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia assegnata una immersione topologica $\phi_n : X_n \to X_{n+1}$. Poniamo

$$X_{m,n} = \begin{cases} X_n & \text{se } n \leq m \\ \phi_n \circ \phi_{n-1} \circ \ldots \circ \phi_m(X_m) & \text{se } n > m, \end{cases}$$

$$\phi_{n,m} = \begin{cases} \phi_m \circ \phi_{m-1} \circ \ldots \circ \phi_n|_{X_m}^{X_{m,n}} & \text{se } n < m \\ \mathrm{id}|_{X_n} & \text{se } n = m \\ (\phi_n \circ \phi_{n-1} \circ \ldots \circ \phi_m)^{-1}|_{X_{n,m}}^{X_{m,n}} & \text{se } n > m. \end{cases}$$

La somma topologica degli $(\mathbf{X}_n)$ rispetto alle funzioni di incollamento $(\phi_{m,n})$ si dice il loro *limite induttivo stretto* e si indica con

$$\varinjlim_n (\mathbf{X}_n, \phi_n).$$

Esempio 3.2 Sia X_n l'insieme di tutte le funzioni continue $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tali che

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \neq 0\}} \subset \{|x| \leq n\}.$$

Su X_n consideriamo la topologia indotta dalla distanza:

$$d_n(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x) - g(x)| \quad \forall f, g \in X_n.$$

Abbiamo ovviamente un'immersione topologica: $\phi_n : X_n \hookrightarrow X_{n+1}$. Il limite induttivo stretto della successione $(\mathbf{X}_n)$ è lo spazio $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^N)$ delle *funzioni continue a supporto compatto* in $\mathbb{R}^n$.

Esempio 3.3 Sia X_n l'insieme di tutte le serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con $a_n \in \mathbb{C}$ che convergono assolutamente su $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1/n\}$, con la topologia indotta dalla distanza

$$\sup_{|z| \leq 1/(n+1)} |f(z) - g(z)| \quad \forall f, g \in X_n.$$

Le restrizioni $\phi_n : X_n \to X_{n+1}$ sono immersioni topologiche. Il limite induttivo stretto delle X_n si indica con $\mathcal{O}_0$ e si dice *lo spazio dei germi di funzioni olomorfe* nell'origine 0 di $\mathbb{C}$.

Una successione $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di sottospazi di uno spazio topologico $\mathbf{X}$ si dice una *filtrazione* se:

(a) $X_n \subset X_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
(b) $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ e $\{X_n\}$ è un ricoprimento fondamentale di $\mathbf{X}$.

In questo caso abbiamo $\mathbf{X} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{X}_n$ rispetto alle funzioni di inclusione $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$.

F. Attaccamenti Siano $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ spazi topologici, $\mathbf{Y}$ un sottospazio di $\mathbf{X}_1$ e $\phi : Y \to X_2$ una funzione continua. Sia $\mathcal{R}_\phi$ la relazione di equivalenza su $X_1 \sqcup X_2$ che identifica i punti di Y alla loro immagine in X_2 mediante ϕ:

$$x \mathcal{R}_\phi y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y & \text{se } x, y \in X_1 \sqcup X_2 \setminus (Y \sqcup \phi(Y)) \\ y = \phi(x) & \text{se } x \in Y,\ y \in X_2 \\ x = \phi(y) & \text{se } y \in Y,\ x \in X_2 \\ \phi(x) = \phi(y) & \text{se } x, y \in Y. \end{cases}$$

Lo spazio topologico quoziente

$$\mathbf{X}_1 \bigcup_\phi \mathbf{X}_2 = (\mathbf{X}_1 \sqcup \mathbf{X}_2) /_{\mathcal{R}_\phi}$$

si dice l'*attaccamento di* $\mathbf{X}_1$ *a* $\mathbf{X}_2$ *mediante* ϕ.

Proposizione 3.3 *L'affondamento* $\mathfrak{j}_2 : X_2 \to X_1 \bigcup_\phi X_2$ *è un'immersione topologica.*

Dim. Sia $\pi : X_1 \sqcup X_2 \to X_1 \cup_\phi X_2$ la proiezione nel quoziente. Sia A un sottoinsieme di X_2. Allora il saturato $\pi^{-1}(\mathfrak{j}_2(A))$ di $\mathfrak{j}_2(A)$ è il sottoinsieme $\mathfrak{j}_2(A) \cup \mathfrak{j}_1\left(\phi^{-1}(A)\right)$. Esso è aperto in $\mathbf{Y} \sqcup \mathbf{X}_2$ se e soltanto se A è aperto in $\mathbf{X}_2$, perché ϕ è continua. Supponiamo che A sia un aperto di $\mathbf{X}_2$ e sia B un aperto di $\mathbf{X}_1 \sqcup \mathbf{X}_2$ tale che $B \cap (Y \sqcup X_2) = \mathfrak{j}_2(A) \cup \mathfrak{j}_1\left(\phi^{-1}(A)\right)$. Allora

$$\mathfrak{j}_2(A) = \pi(\iota_2(A)) = \pi(B) \cap \mathfrak{j}_2(X_2).$$

Osserviamo che B è un aperto saturo di $\mathbf{X}_1 \sqcup \mathbf{X}_2$ e quindi $\pi(B)$ è un aperto di $\mathbf{X}_1 \cup_\phi \mathbf{X}_2$. Questo dimostra che l'abbreviazione $\mathfrak{j}_2 : X_2 \to \mathfrak{j}_2(X_2)$ è un'applicazione aperta e quindi, essendo continua e bigettiva, un omeomorfismo con l'immagine.

§4 Coni, sospensioni e giunti

A. Coni Sia $\mathbf{X}$ uno spazio topologico. Si dice *cono topologico* di base $\mathbf{X}$ lo spazio topologico quoziente:

$$C\mathbf{X} = (\mathbf{X} \times \mathbf{I}) / (\mathbf{X} \times \{0\}). \tag{4.1}$$

Sia $\pi : \mathbf{X} \times \mathbf{I} \to C\mathbf{X}$ la proiezione nel quoziente. Scriviamo per semplicità $t \cdot x$ invece di $\pi(x,t)$ se $x \in X$, $t \in [0,1]$; osservando che $0x = 0y$ per ogni $x, y \in X$, indichiamo tale punto con 0 e lo diciamo *vertice* del cono $C\mathbf{X}$.

L'applicazione

$$\mathbf{X} \ni x \to t \cdot x \in C\mathbf{X}$$

è un'immersione topologica per ogni $t \in]0,1]$.

Per ogni $s \in [0,1]$, l'applicazione $C\mathbf{X} \ni t \cdot x \to (st) \cdot x \in C\mathbf{X}$ è continua.

Proposizione 4.1 *Se* $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *è un'applicazione continua tra due spazi topologici, allora*

$$Cf : C\mathbf{X} \ni t \cdot x \to t \cdot f(x) \in C\mathbf{Y} \tag{4.2}$$

è ancora un'applicazione continua.

Dim. Abbiamo infatti il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \times \mathbf{I} \arrow[r, "f \times \mathrm{id}"] \arrow[d] & \mathbf{Y} \times \mathbf{I} \arrow[d] \\ C\mathbf{X} \arrow[r, "Cf"'] & C\mathbf{Y} \end{tikzcd}$$

in cui le frecce verticali denotano proiezione nel quoziente. L'applicazione $f \times \mathrm{id}$ è continua perché prodotto di applicazioni continue. Quindi Cf è continua per il teorema di omomorfismo.

Osservazione Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e sia K il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$ definito da:

$$K = \{(t, tx_1, ..., tx_n) \,|\, 0 \leq t \leq 1,\ (x_1, ..., x_n) \in A\}.$$

L'applicazione

$$CA \ni t \cdot x \to (t, tx) \in K$$

è continua e bigettiva. La sua inversa è ovviamente continua in tutti i punti (t, tx) con $0 < t \leq 1$ e $x \in A$. Essa non è però in generale continua nel punto $(0, 0)$: lo è nel caso in cui il sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ sia chiuso e limitato. La topologia di CA è quindi in generale più fine della topologia indotta dalla topologia Euclidea sul cono geometrico K corrispondente.

Esempio 4.1 Il cono $C\mathbf{S}^n$ è omeomorfo ad disco $\mathbf{D}^{n+1}$.
L'omeomorfismo è dato da

$$C\mathbf{S}^n \ni t \cdot x \to tx \in \mathbf{D}^{n+1}$$

B. Sospensioni Sia $\mathbf{X}$ uno spazio topologico. Definiamo su $\mathbf{X} \times \mathbf{I}$ una relazione di equivalenza ponendo:

$$(x, t)\mathcal{R}(y, s) \Leftrightarrow \begin{cases} s = t = 0, \text{ oppure} \\ s = t = 1, \text{ oppure} \\ 0 < s = t < 1 \text{ e } x = y. \end{cases}$$

Il quoziente topologico

$$S\mathbf{X} = (\mathbf{X} \times \mathbf{I})/_{\mathcal{R}}$$

si dice la *sospensione topologica* di $\mathbf{X}$. Detta $\pi : \mathbf{X} \times \mathbf{I} \to S\mathbf{X}$ la proiezione nel quoziente, l'insieme $\pi(\mathbf{X} \times \{1/2\})$ si dice *base* di $S\mathbf{X}$. Osserviamo che per ogni $0 < t < 1$, l'applicazione

$$\mathbf{X} \ni x \to \pi(x, t) \in S\mathbf{X}$$

è un'immersione topologica. L'applicazione naturale $C\mathbf{X} \to S\mathbf{X}$ è decomponibile e $S\mathbf{X}$ è omeomorfo al quoziente che si ottiene identificando a un punto la base del cono $C\mathbf{X}$.

Osservazione Abbiamo gli omeomorfismi:

$$S\mathbf{D}^n \simeq \mathbf{D}^{n+1}$$
$$S\mathbf{S}^n \simeq \mathbf{S}^{n+1}.$$

Gli omeomorfismi si ottengono per passaggio al quoziente dalle applicazioni:

$$\mathbf{D}^n \times \mathbf{I} \ni (x, t) \to (2\sqrt{t - t^2}x, 2t - 1) \in \mathbf{D}^{n+1}$$

e

$$\mathbf{S}^n \times \mathbf{I} \ni (x, t) \to (2\sqrt{t - t^2}x, 2t - 1) \in \mathbf{S}^{n+1}.$$

Possiamo definire per ricorrenza la sospensione k-esima $S^k\mathbf{X}$ dello spazio topologico $\mathbf{X}$ ponendo

$$\begin{cases} S^0\mathbf{X} = \mathbf{X} \\ S^k\mathbf{X} = S\left(S^{k-1}\mathbf{X}\right) \quad \text{se } k \geq 1. \end{cases}$$

C. Giunti topologici Siano $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ due spazi topologici. Consideriamo sul prodotto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \mathbf{I}$ la relazione di equivalenza:

$$(x_1, x_2, t)\mathcal{R}(y_1, y_2, s) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < s = t < 1 \text{ e } x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \text{ oppure} \\ s = t = 0 \text{ e } x_1 = y_1, \text{ oppure} \\ s = t = 1 \text{ e } x_2 = y_2. \end{cases} \tag{4.3}$$

Il quoziente topologico:

$$\mathbf{X}_1 * \mathbf{X}_2 \ = \ (\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \mathbf{I})/_{\mathcal{R}}$$

si dice il *giunto topologico* di $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$. Sia $\pi : \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \mathbf{I} \to \mathbf{X}_1 * \mathbf{X}_2$ la proiezione nel quoziente. I sottospazi $\pi(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \{0\})$ e $\pi(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \{1\})$ si dicono *basi* del giunto.

Lemma 4.2 *L'applicazione*

$$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \mathbf{I} \ni (x_1, x_2, t) \to ((1-t) \cdot x_1, t \cdot x_2) \in C\mathbf{X}_1 \times C\mathbf{X}_2$$

definisce per passaggio al quoziente un'immersione topologica

$$\alpha : \mathbf{X}_1 * \mathbf{X}_2 \to C\mathbf{X}_1 \times C\mathbf{X}_2. \tag{4.4}$$

Dim. Osserviamo che $\alpha(\mathbf{X}_1 * \mathbf{X}_2)$ è il sottospazio chiuso Y di $C\mathbf{X}_1 \times C\mathbf{X}_2$ definito da

$$Y = \{(t \cdot x_1, s \cdot x_2) \in C\mathbf{X}_1 \times C\mathbf{X}_2 \,|\, s + t = 1\}.$$

Consideriamo le applicazioni continue:

$$\begin{aligned} \phi &: \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \mathbf{I} \ni (x_1, x_2, t) \to (x_1, 1-t, x_2, t) \in \mathbf{X}_1 \times \mathbf{I} \times \mathbf{X}_2 \times \mathbf{I} \\ \psi &: \mathbf{X}_1 \times \mathbf{I} \times \mathbf{X}_2 \times \mathbf{I} \ni (x_1, s, x_2, t) \to (x_1, x_2, t) \in \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \mathbf{I}. \end{aligned}$$

L'applicazione composta $\psi \circ \phi$ è l'identità su $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \mathbf{I}$. Per passaggio ai quozienti otteniamo un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \mathbf{I} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathbf{X}_1 \times \mathbf{I} \times \mathbf{X}_2 \times \mathbf{I} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \mathbf{I} \arrow[d] \\ \mathbf{X}_1 * \mathbf{X}_2 \arrow[r, "\alpha"'] & C\mathbf{X}_1 \times C\mathbf{X}_2 \arrow[r, "\beta"'] & \mathbf{X}_1 * \mathbf{X}_2 \end{tikzcd}$$

dove le frecce verticali rappresentano le proiezioni nei quozienti. La β è continua e la sua restrizione all'immagine di α è l'inversa dell'abbreviazione di α. Questo dimostra che α è un'immersione topologica.

In modo analogo si dimostrano gli omeomorfismi:

Lemma 4.3 *Siano $\mathbf{X}_i$, per $i = 1, 2, 3$ spazi topologici. Abbiamo allora omeomorfismi naturali:*

$$\mathbf{X}_1 * \mathbf{X}_2 \simeq \mathbf{X}_2 * \mathbf{X}_1, \tag{4.5}$$

$$(4.6) \qquad (\mathbf{X}_1 * \mathbf{X}_2) * \mathbf{X}_3 \simeq \mathbf{X}_1 * (\mathbf{X}_2 * \mathbf{X}_3)\,.$$

Dim. Il primo omeomorfismo si ottiene a partire dall'omeomorfismo

$$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \mathbf{I} \ni (x_1, x_2, t) \to (x_2, x_1, 1-t) \in \mathbf{X}_2 \times \mathbf{X}_1 \times \mathbf{I}$$

per passaggio ai quozienti. Il secondo si ricava utilizzando l'immersione topologica descritta nella proposizione precedente: sia $\mathbf{Y}$ il sottospazio di $C\mathbf{X}_1 \times C\mathbf{X}_2 \times C\mathbf{X}_3$ definito da:

$$\mathbf{Y} = \{(t_1 \cdot x_1, t_2 \cdot x_2, t_3 \cdot x_3) \,|\, x_i \in \mathbf{X}_i,\ t_i \in \mathbf{I}\ i = 1,2,3,\ t_1 + t_2 + t_3 = 1\};$$

abbiamo le immersioni topologiche:

$$\alpha' : (\mathbf{X}_1 * \mathbf{X}_2) * \mathbf{X}_3 \to \mathbf{Y} \subset C\mathbf{X}_1 \times C\mathbf{X}_2 \times C\mathbf{X}_3,$$
$$\alpha'' : \mathbf{X}_1 * (\mathbf{X}_2 * \mathbf{X}_2) \to \mathbf{Y} \subset C\mathbf{X}_1 \times C\mathbf{X}_2 \times C\mathbf{X}_3,$$

che si ottengono per passaggio al quoziente e abbreviazione dalle applicazioni:

$$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \mathbf{I} \times \mathbf{X}_3 \times \mathbf{I} \to \mathbf{X}_1 \times \mathbf{I} \times \mathbf{X}_2 \times \mathbf{I} \times \mathbf{X}_3 \times \mathbf{I},$$

definita da

$$(x_1, x_2, s, x_3, t) \to (x_1, (1-t)(1-s), x_2, (1-t)s, x_3, t)$$

e

$$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{I} \times \mathbf{X}_2 \times \mathbf{X}_3 \times \mathbf{I} \to \mathbf{X}_1 \times \mathbf{I} \times \mathbf{X}_2 \times \mathbf{I} \times \mathbf{X}_3 \times \mathbf{I},$$

definita da:

$$(x_1, s, x_2, x_3, t) \to (x_1, s, x_2, (1-s)(1-t), x_3, (1-s)t).$$

La $\alpha'' \circ \alpha'^{-1}$ dà l'omeomorfismo cercato.

Se $(\mathbf{X}_i)_{1 \le i \le m}$ è una m-upla di spazi topologici, possiamo definire, utilizzando l'associatività dell'operazione di giunto topologico dimostrata nella proposizione precedente, lo spazio topologico $\mathbf{X}_1 * ... * \mathbf{X}_m$: esso si identifica in modo canonico al sottospazio

$$\{(t_1 \cdot x_1, ..., t_m \cdot x_m) \,|\, x_i \in \mathbf{X}_i,\ t_i \in \mathbf{I},\ 1 \le i \le m,\ t_1 + ... + t_m = 1\}$$

del prodotto topologico $\prod_{i=1}^m C\mathbf{X}_i$.

Proposizione 4.4 *Sia $(\mathbf{X}_i)_{1 \le i \le m}$ una m-upla di spazi topologici. Allora $C(\mathbf{X}_1 * ... * \mathbf{X}_m)$ è omeomorfo a $\prod_{i=1}^m C\mathbf{X}_i$.*

Dim. Definiamo un'applicazione continua

$$\phi : (\mathbf{X}_1 * ... * \mathbf{X}_m) \times \mathbf{I} \to \prod_{i=1}^m C\mathbf{X}_i$$

identificando $\mathbf{X}_1 * ... * \mathbf{X}_m$ al sottospazio di $\prod_{i=1}^m C\mathbf{X}_i$ formato dalle m-uple $(t_1 \cdot x_1, ..., t_m \cdot x_m)$ con $x_i \in \mathbf{X}_i$, $t_i \in \mathbf{I}$ per $i = 1, ..., m$ e $t_1 + ... + t_m = 1$ e ponendo

$$\phi(t_1 \cdot x_1, ..., t_m \cdot x_m, t) = ((tt_1) \cdot x_1, ..., (tt_m) \cdot x_m) .$$

Il suo quoziente iniettivo è l'omeomorfismo cercato.

Proposizione 4.5 *Sia* $\mathbf{X}$ *uno spazio topologico. Abbiamo i seguenti omeomorfismi:*

$$\begin{array}{l} \mathbf{X} * \mathbf{D}^0 \simeq C\mathbf{X} \\ \mathbf{X} * \mathbf{S}^0 \simeq S\mathbf{X} \\ \mathbf{X} * \mathbf{S}^k \simeq S^k\mathbf{X}. \end{array}$$

Dim. Il primo si ottiene per passaggio al quoziente dall'applicazione:

$$\mathbf{X} \times \mathbf{D}^0 \times \mathbf{I} \ni (x, 0, t) \to (x, t) \in \mathbf{X} \times \mathbf{I};$$

il secondo per passaggio al quoziente e abbreviazione da:

$$\mathbf{X} \times \mathbf{S}^0 \times \mathbf{I} \ni (x, s, t) \to (x, (1 + st)/2) \in \mathbf{X} \times \mathbf{I},$$

(nota che $s = \pm 1$).

Il terzo omeomorfismo si ricava dalla proprietà associativa del giunto topologico:

$$\begin{aligned} S^{k+1}\mathbf{X} &\simeq S^k(\mathbf{X} * \mathbf{S}^0) \simeq S^{k-1}(\mathbf{X} * \mathbf{S}^0 * \mathbf{S}^0) \\ &\simeq S^{k-1}(\mathbf{X} * \mathbf{S}^1) \simeq ... \\ &... \simeq \mathbf{X} * \mathbf{S}^k \end{aligned}$$

in qunto $\mathbf{S}^j * \mathbf{S}^0 \simeq \mathbf{S}^{j+1}$ per ogni intero non negativo j.

Esempio 4.2 Siano $m_1, ..., m_n$ interi non negativi. Abbiamo gli omeomorfismi:

$$\begin{array}{ll} (1) & \mathbf{S}^{m_1} * \mathbf{S}^{m_2} * ... * \mathbf{S}^{m_n} \simeq \mathbf{S}^{m_1+m_2+...+m_n+n-1} \\ (2) & \mathbf{D}^{m_1} \times \mathbf{D}^{m_2} \times ... \times \mathbf{D}^{m_n} \simeq \mathbf{D}^{m_1+m_2+...+m_n} \\ (3) & \mathbf{D}^{m_1} * \mathbf{D}^{m_2} * ... * \mathbf{D}^{m_n} \simeq \mathbf{D}^{m_1+m_2+...+m_n+n-1}. \end{array}$$

Basta dimostrare che gli omeomorfismi valgono per $n = 2$. Quindi la (1) è stata già verificata. La (2) è ovvia se $m_1 = 0$ o $m_2 = 0$. Se $m_1, m_2 \geq 1$, abbiamo la catena di omeomorfismi:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{m_1} \times \mathbf{D}^{m_2} &\simeq C\mathbf{S}^{m_1-1} \times C\mathbf{S}^{m_2-1} \simeq C\left(\mathbf{S}^{m_1-1} * \mathbf{S}^{m_2-1}\right) \\ &\simeq C\left(\mathbf{S}^{m_1+m_2-1}\right) \simeq \mathbf{D}^{m_1+m_2}. \end{aligned}$$

Anche per la (3) possiamo limitarci a considerare il caso $m_1, m_2 \geq 1$. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{m_1} * \mathbf{D}^{m_2} &\simeq \left(C\mathbf{S}^{m_1-1}\right) * C\left(\mathbf{S}^{m_2-1}\right) \simeq \mathbf{S}^{m_1-1} * \mathbf{D}^0 * \mathbf{S}^{m_2-1} * \mathbf{D}^0 \\ &\simeq \left(\mathbf{S}^{m_1-1} * \mathbf{S}^{m_2-1}\right) * \mathbf{D}^0 * \mathbf{D}^0 \simeq \mathbf{S}^{m_1+m_2-1} * \mathbf{D}^0 * \mathbf{D}^0 \\ &\simeq C\mathbf{S}^{m_1+m_2-1} * \mathbf{D}^0 \simeq \mathbf{D}^{m_1+m_2} * \mathbf{D}^0 \\ &\simeq C\mathbf{D}^{m_1+m_2} \simeq \mathbf{D}^{m_1+m_2+1}. \end{aligned}$$

CAPITOLO III

ASSIOMI DI SEPARAZIONE

L'esistenza di funzioni continue a valori reali non banali su uno spazio topologico **X** è naturalmente legata alle proprietà della struttura topologica. In questo capitolo esamineremo alcuni degli assiomi di separazione e numerabilità collegati a questo problema e le loro conseguenze.

§1 Assiomi di separazione

Un *intorno* di A di uno spazio topologico $\mathbf{X}$ è un qualsiasi sottoinsieme B di X tale che $A \subset \overset{\circ}{B}$.

Diciamo che uno spazio topologico $\mathbf{X}$ soddisfa l'*assioma di separazione* T_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ se:

(T_1) *Per ogni $x \neq y \in X$, esiste un intorno di x in $\mathbf{X}$ che non contenga y.*
In modo equivalente: *Per ogni punto $x \in X$, l'insieme $\{x\}$ è chiuso in $\mathbf{X}$.*

(T_2) *Due qualsiasi punti distinti di X ammettono intorni disgiunti: per ogni $x \neq y \in X$, possiamo trovare un aperto $U_x \ni x$ e un aperto $U_y \ni y$ tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$.*

(T_3) *Se F è un chiuso di $\mathbf{X}$ e x un punto di X non appartenente ad F, esiste un aperto $A \supset F$ e un aperto $U \ni x$ tali che $A \cap U = \emptyset$.*
Questa prorietà è equivalente al fatto che: *Ogni punto x di X ha un sistema fondamentale di intorni chiusi.*

(T_4) *Ogni coppia di chiusi disgiunti di $\mathbf{X}$ ammette una coppia di intorni disgiunti.*
Se cioè F, G sono due chiusi di $\mathbf{X}$ con $F \cap G = \emptyset$, allora esistono due aperti $A \supset F$ e $B \supset G$ di $\mathbf{X}$ tali che $A \cap B = \emptyset$.

Uno spazio topologico che soddisfi l'assioma T_2 soddisfa anche l'assioma T_1 e si dice *di Hausdorff* o *separato.*

Uno spazio topologico che soddisfi gli assiomi T_1 e T_3 soddisfa anche l'assioma T_2 e si dice *regolare.*

Uno spazio topologico che soddisfi gli assiomi T_1 e T_4 soddisfa anche gli assiomi T_2 e T_3 e si dice *normale.*

Esempio 1.1 Un qualsiasi insieme X che contenga almeno due punti, con la topologia indiscreta, soddisfa T_3 e T_4 ma non T_1 e T_2.

Esempio 1.2 La topologia dell'ordine su un insieme X linearmente ordinato soddisfa T_2.

Siano infatti $x < y$ due punti distinti di X. Se esiste $a \in X$ tale che $x < a < y$, allora le semirette $\{z \in X \mid z < a\}$ e $\{z \in X \mid a < z\}$ sono intorni aperti disgiunti di x e y rispettivamente. Se non esiste nessun elemento a per cui sia $x < a < y$, allora $\{z \in X \mid z < y\}$ e $\{z \in X \mid x < z\}$ sono intorni aperti disgiunti di x ed y rispettivamente.

Esempio 1.3 Sia X un insieme che contenga almeno due punti, a un punto di X. La topologia $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ rende X uno spazio T_4 ma non T_3. Infatti se A e B sono due chiusi disgiunti di $\mathbf{X}$, uno dei due è necessariamente vuoto. Il chiuso $X \setminus \{a\}$ e il punto a non hanno intorni disgiunti, in quanto X è l'unico aperto di $\mathbf{X}$ che contiene $X \setminus \{a\}$.

Esempio 1.4 Sia $\mathbf{X}$ lo spazio topologico ottenuto considerando sull'intervallo $[0,1]$ di $\mathbb{R}$ la topologia τ che ha come prebase degli aperti la famiglia Γ formata dagli insiemi $[0,b[$, $]b,1]$ al variare di b in $]0,1[$ e dall'insieme

$$U = \{x \in [0,1[\mid x(1+n) \notin \mathbb{N} - \{0\} \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Lo spazio topologico così ottenuto soddisfa T_2 ma non T_3. La topologia che si ottiene su $[0,1]$ è più fine della topologia Euclidea e quindi è separata. Mostriamo che essa non soddisfa l'assioma T_3: l'insieme $F = \{(1+n)^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un chiuso di $([0,1],\tau)$ che non contiene il punto 0. Ma 0 ed F non hanno intorni disgiunti: infatti gli aperti $U_b = [0,b[\cap U$ di 0 , al variare di b in $]0,1[$, formano un sistema fondamentale di intorni di 0 nella τ. Fissato $b \in]0,1[$, possiamo trovare $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $(1+\nu)^{-1} < b$. Un qualsiasi aperto contenente F contiene un intervallo $](1+\nu)^{-1} - \epsilon, (1+\nu)^{-1} + \epsilon[$ per qualche $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo e quindi ha intersezione non vuota con U_b.

Esempio 1.5 Lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$, con la topologia di Zariski, soddisfa T_1, ma, se $\mathbb{K}$ contiene infiniti elementi e $n \geq 1$, non soddisfa gli assiomi T_2, T_3, T_4.

Teorema 1.1 *Un sottospazio di uno spazio topologico che soddisfa l'assioma di separazione T_i soddisfa ancora l'assioma di separazione T_i se $i = 1,2,3$. Un sottospazio chiuso di uno spazio topologico che soddisfi l'assioma T_4 soddisfa l'assioma T_4.*

Dim. Sia $\mathbf{Y}$ un sottospazio topologico dello spazio topologico $\mathbf{X}$.

Se $\mathbf{X}$ soddisfa T_1, i sottoinsiemi di Y formati da un solo punto sono chiusi in $\mathbf{X}$ e quindi a maggior ragione nella topologia di sottospazio di Y. Quindi anche $\mathbf{Y}$ soddisfa T_1.

Supponiamo che $\mathbf{X}$ sia di Hausdorff. Se $x \neq y \in Y$, esistono due intorni aperti disgiunti U_x di x e U_y di y in $\mathbf{X}$. Allora $U_x \cap Y$ e $U_y \cap Y$ sono intorni aperti disgiunti di x e y in $\mathbf{Y}$. Quindi $\mathbf{Y}$ è anch'esso di Hausdorff.

Supponiamo ora che $\mathbf{X}$ soddisfi T_3. Siano F un chiuso di $\mathbf{Y}$ e y un punto di Y non appartenente ad F. Per la definizione della topologia di sottospazio, esiste un sottoinsieme chiuso A di $\mathbf{X}$ tale che $A \cap Y = F$. Allora A è un chiuso di $\mathbf{X}$ che non contiene il punto y e possiamo trovare aperti B ed U in $\mathbf{X}$ tali che

$$A \subset B, \quad y \in U, \quad B \cap U = \emptyset.$$

Allora $B \cap Y$ e $U \cap Y$ sono intorni disgiunti di F ed y in $\mathbf{Y}$.

Supponiamo infine che $\mathbf{X}$ soddisfi l'assioma T_4 e che Y sia un chiuso di $\mathbf{X}$. Se F_1 ed F_2 sono chiusi disgiunti di $\mathbf{Y}$, allora essi sono anche chiusi disgiunti di $\mathbf{X}$ e vi sono quindi due aperti A_1, A_2 di $\mathbf{X}$ tali che

$$F_1 \subset A_1, \quad F_2 \subset F_2, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

Allora $A_1 \cap Y$ e $A_2 \cap Y$ sono intorni aperti disgiunti di F_1 ed F_2 in $\mathbf{Y}$.

Osservazione Vedremo nel seguito che un sottospazio chiuso di uno spazio normale può non essere un sottospazio normale.

Teorema 1.2 *Ogni spazio metrizzabile è normale.*

Dim. Sia $\mathbf{X}$ uno spazio metrizzabile e sia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una distanza che definisce la topologia di $\mathbf{X}$.

Dimostriamo innanzi tutto che $\mathbf{X}$ è di Hausdorff: se $x \neq y \in X$, le palle aperte $B(x, \frac{1}{2}d(x,y))$ e $B(y, \frac{1}{2}d(x,y))$ sono due intorni aperti disgiunti di x e y.

Siano ora A e B due chiusi disgiunti di $\mathbf{X}$. Poiché le funzioni $X \ni x \to d(x, A) \in \mathbb{R}$ e $X \ni x \to d(x, B) \in \mathbb{R}$ sono continue, i due insiemi

$$U = \{x \in X \mid d(x,A) < d(x,B)\} \quad \text{e} \quad V = \{x \in X \mid d(x,A) > d(x,B)\}$$

sono aperti disgiunti $\mathbf{X}$, che contengono rispettivamente A e B.

Teorema 1.3 *Ogni retratto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.*

Dim. Sia $Y \subset X$ un retratto dello spazio topologico di Hausdorff $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$. Sia $\rho : X \to Y$ una retrazione. Se $Y = X$, la tesi è banalmente vera. Supponiamo quindi $Y \neq X$ e sia $x \in X - Y$. Poiché $\mathbf{X}$ è di Hausdorff, x e $\rho(x)$ hanno intorni aperti disgiunti U e V. Poiché ρ è continua, possiamo trovare un intorno aperto U' di x contenuto in U tale che $\rho(U') \subset V$. Ma questa inclusione implica in particolare che $\rho(y) \neq y$ se $y \in U'$, cioè $U' \cap Y = \emptyset$. Quindi $X \setminus Y$ è intorno di ogni suo punto, perciò aperto e Y è chiuso.

Teorema 1.4 *Condizione necessaria e sufficiente affinché uno spazio topologico $\mathbf{X}$ sia di Hausdorff è che la diagonale $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$ sia chiusa nel prodotto topologico $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$.*

Dim. Supponiamo che $\mathbf{X}$ sia di Hausdorff e siano $x \neq y$ due punti distinti di $\mathbf{X}$. Se U_x, U_y sono intorni aperti disgiunti di x e y rispettivamente, allora $U_x \times U_y$ è un intorno di (x,y) in $X \times X$ che non interseca Δ_X. Questo dimostra che $X \times X \setminus \Delta_X$ è aperto in $X \times X$.

Supponiamo viceversa che Δ_X sia chiusa in $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$. Se x, y sono punti distinti di X, allora $(x,y) \notin \Delta_X$ e possiamo trovare un intorno aperto $U = U_x \times U_y$, con U_x e U_y aperti di $\mathbf{X}$, che non interseca Δ_X. Chiaramente U_x e U_y sono in $\mathbf{X}$ intorni disgiunti di x e di y rispettivamente.

Proposizione 1.5 *Siano $f, g : X \to Y$ due applicazioni continue definite su uno spazio topologico $\mathbf{X}$ e a valori in uno spazio di Hausdorff $\mathbf{Y}$. Allora*

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

è chiuso in $\mathbf{X}$.

Dim. L'applicazione

$$(f, g) : X \ni x \to (f(x), g(x)) \in Y \times Y$$

è continua. La diagonale $\Delta_Y = \{(y, y) \mid y \in Y\}$ è chiusa in $\mathbf{Y} \times \mathbf{Y}$ perché $\mathbf{Y}$ è di Hausdorff e dunque la sua immagine inversa mediante (f, g) è un chiuso di $\mathbf{X}$.

Teorema 1.6 *Sia h uno degli interi $1, 2, 3$. Il prodotto topologico $\mathbf{X} = (X, \tau)$ di una I-upla $(\mathbf{X}_i)_{i \in I}$ di spazi topologici non vuoti soddisfa l'assioma T_h se e soltanto se ogni spazio topologico $\mathbf{X}_i$ soddisfa l'assioma T_h.*

Dim. La condizione è necessaria perché ogni spazio $\mathbf{X}_i$ ammette un'immersione topologica nel prodotto $\mathbf{X}$.

Il prodotto di spazi T_1 è T_1 perché il prodotto di chiusi è un chiuso.

Supponiamo ora che tutti gli $\mathbf{X}_i$ siano separati. Se x, y sono punti distinti di X, vi è almeno un indice $i \in I$ per cui $x_i \neq y_i$. Se A, B sono intorni aperti disgiunti di x_i, y_i in $\mathbf{X}_i$, allora $\pi_i^{-1}(A)$ e $\pi_i^{-1}(B)$ sono intorni aperti disgiunti di x e y in $\mathbf{X}$.

Supponiamo ora che tutti gli $\mathbf{X}_i$ soddisfino l'assioma T_3. Sia x un punto di $\mathbf{X}$. Vogliamo dimostrare che esso ammette un sistema fondamentale di intorni chiusi. Sia U un qualsiasi intorno di x in $\mathbf{X}$. Esso contiene un intorno aperto di x della forma

$$\bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(A_j)$$

ove $J \subset I$ è finito e A_j, per $j \in J$, un intorno aperto di x_j in $\mathbf{X}_j$. Poiché $\mathbf{X}_j$ è T_3, possiamo trovare chiusi B_j tali che

$$x_j \in \overset{\circ}{B}_j \subset B_j = \overline{B}_j \subset A_j \quad \forall j \in J.$$

Allora

$$U \supset B = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(B_j) \supset \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(\overset{\circ}{B}_j) \ni x$$

e quindi B è un intorno chiuso di x contenuto in U. Ciò dimostra che $\mathbf{X}$ soddisfa l'assioma T_3.

Osservazione In generale il prodotto di spazi normali può non essere uno spazio normale.

§2 Funzioni di Urysohn

Lemma 2.1 *Siano A e B due chiusi disgiunti di uno spazio topologico $\mathbf{X}$ che soddisfa l'assioma T_4. Sia Γ la famiglia degli intorni aperti di A che non intersecano B e sia Δ l'insieme di tutti i numeri razionali della forma $m \cdot 2^{-n}$ con m ed n interi e $0 \leq m \cdot 2^{-n} \leq 1$. Esiste una applicazione*

$$\phi : \Delta \to \Gamma$$

tale che

$$\overline{\phi(r_1)} \subset \phi(r_2) \quad \forall r_1, r_2 \in \Delta \quad \textit{con} \quad r_1 < r_2.$$

Dim. Indichiamo con Δ_n l'insieme

$$\Delta_n = \{m2^{-n} \mid m \in \mathbb{N},\, 0 \leq m \leq 2^n\}.$$

Osserviamo che $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$. Dimostriamo per induzione su n che è possibile definire $\phi_n : \Delta_n \to \Gamma$ tale che

(1) $\overline{\phi_n(r_1)} \subset \phi_n(r_2) \quad \forall r_1, r_2 \in \Delta_n \quad \text{con} \quad r_1 < r_2$,
(2) $\phi_{n+1}|_{\Delta_n} = \phi_n$ se $n \geq 0$.

Sia $n = 0$. Allora $\Delta_0 = \{0, 1\}$. Definiamo $\phi_0(1) = X \setminus B$. Poiché $\mathbf{X}$ soddisfa T_4, A ammette un intorno chiuso F contenuto in $X - B$. Possiamo porre allora $\phi_0(0) = \overset{\circ}{F}$.

Supponiamo di aver definito ϕ_n per un $n \geq 0$. Definiamo allora ϕ_{n+1} sugli elementi $(2m) \cdot 2^{-n-1} = m \cdot 2^{-n}$ mediante $\phi_{n+1}(2m \cdot 2^{-n-1}) = \phi_n(m \cdot 2^{-n})$. Per ogni intero dispari $0 < 2m + 1 < 2^{n+1}$, dopo aver scelto un intorno chiuso F_m di $\overline{\phi_n(m \cdot 2^{-n})}$ in $\phi_n((m + 1) \cdot 2^{-n})$, poniamo $\phi_{n+1}((2m + 1) \cdot 2^{-n-1}) = \overset{\circ}{F}_m$. La ϕ_{n+1} così definita soddisfa le condizioni (1) e (2). Ottenuta la successione delle ϕ_n, definiamo l'applicazione $\phi : \Delta \to \Gamma$ mediante

$$\phi|_{\Delta_n} = \phi_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tale applicazione soddisfa la tesi.

Teorema 2.2 (Lemma di Urysohn) *Siano A e B due chiusi disgiunti di uno spazio topologico $\mathbf{X}$ che soddisfa l'assioma T_4. Allora esiste una funzione continua*

$$f : X \to [0, 1]$$

tale che

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in A, \qquad f(x) = 1 \quad \forall x \in B.$$

Dim. Sia $\phi : \Delta \to \Gamma$ l'applicazione definita nel lemma precedente. Definiamo una funzione $f : X \to \mathbf{I} = [0, 1]$ ponendo:

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \in \Delta \,|\, x \in \phi(r)\} & \text{se} \quad x \in \phi(1) \\ 1 & \text{se} \quad x \notin \phi(1). \end{cases}$$

Questa funzione vale 0 su A e 1 su B. Inoltre

(*i*) $f^{-1}([0, r[) = \bigcup_{\substack{s \in \Delta \\ s < r}} \phi(s)$ è aperto in $\mathbf{X}$ per ogni $r \in [0, 1]$;

(ii) $f^{-1}([0, r]) = \bigcap_{\substack{s \in \Delta \\ s > r}} \phi(s) = \bigcap_{\substack{s \in \Delta \\ s > r}} \overline{\phi(s)}$
è chiuso in $\mathbf{X}$ per ogni $r \in [0, 1]$;
quindi $f^{-1}(]r, 1]) = X - f^{-1}([0, r])$ è aperto per ogni $r \in [0, 1]$.

Poiché gli aperti della forma $[0, r[$ e $]r, 1]$ formano una prebase della topologia di $\mathbf{I} = [0, 1]$, ne segue che $f : X \to \mathbf{I}$ è continua.

Una funzione continua $f : X \to \mathbf{I} = [0, 1]$ che valga 0 su A e 1 su B si dice una *funzione di Urysohn della coppia* (A, B). Abbiamo quindi il

Teorema 2.3 *Condizione necessaria e sufficiente affinché uno spazio topologico* $\mathbf{X}$ *soddisfi l'assioma* T_4 *è che ogni coppia di chiusi disgiunti di* $\mathbf{X}$ *ammetta una funzione di Urysohn.*

Osservazione Sia $\mathbf{X}$ uno spazio topologico che soddisfa l'assioma di separazione T_4 e sia (A, B) una coppia di chiusi disgiunti di $\mathbf{X}$. Se A è ritagliabile, possiamo trovare una funzione di Urysohn della coppia (A, B) strettamente positiva su $X \setminus A$: se infatti $f : X \to \mathbf{I}$ è una funzione di Urysohn della coppia (A, B) e $g : X \to \mathbf{I}$ una funzione continua tale che $g(x) = 0$ per $x \in A$ e $g(x) > 0$ se $x \notin A$, allora la funzione

$$\max(f, g) : X \ni x \to \max(f(x), g(x)) \in \mathbf{I}$$

è ancora continua e gode delle proprietà desiderate.

Se A e B sono due chiusi disgiunti ed entrambi ritagliabili, allora possiamo trovare una funzione di Urysohn della coppia (A, B) tale che $A = f^{-1}(0)$ e $B = f^{-1}(1)$. Se infatti $f_1 : X \to I$ una funzione di Urysohn della coppia (A, B) con $A = f_1^{-1}(0)$ e $f_2 : X \to I$ una funzione di Urysohn della coppia (B, A) con $f_2^{-1}(0) = B$, allora la $f : X \ni x \to f_1(x)\,(1 - f_2(x)) \in I$ è una funzione di Urysohn della coppia (A, B) con le proprietà desiderate.

Osservazione Componendo funzioni di Urysohn con le trasformazioni affini

$$\mathbb{R} \ni t \to at + b \in \mathbb{R}$$

(ove $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$) si possono ottenere funzioni continue che assumano arbitrari valori reali $\alpha \neq \beta$ su una coppia di chiusi disgiunti (A, B) di uno spazio topologico X che soddisfi T_4.

La caratterizzazione di Urysohn degli spazi che godono della proprietà di separazione T_4 suggerisce di introdurre la seguente nozione:

Uno spazio topologico $\mathbf{X}$ *si dice* completamente regolare *se per ogni chiuso* A *di* $\mathbf{X}$ *ed ogni punto* $x \notin A$ *di* X *esiste una funzione continua* $f : X \to I$ *tale che*

$$f(x) = 0, \qquad f(y) = 1 \quad \forall y \in A.$$

Uno spazio topologico che sia completamente regolare e T_1 si dice *di Tychonoff.*

Teorema 2.4 *Un sottospazio topologico di uno spazio normale è di Tychonoff.*

Dim. Siano $\mathbf{Y}$ un sottospazio topologico di uno spazio normale $\mathbf{X}$, F un chiuso di $\mathbf{Y}$ e y un punto di Y non appartenente ad F. Se B è un chiuso di $\mathbf{X}$ tale che $B \cap Y = F$, posto $A = \{y\}$, osserviamo che A è chiuso in $\mathbf{X}$ perché $\mathbf{X}$ è normale e dunque in particolare T_1, ed è disgiunto da B. La restrizione a Y di una funzione di Urysohn della coppia (A, B) ci dà una funzione continua $f : Y \to \mathbf{I}$ che vale 0 in y e 1 nei punti di F. Questo dimostra che $\mathbf{Y}$ è completamente regolare. È anche T_1 perché sottospazio di uno spazio T_1 e quindi di Tychonoff.

Teorema 2.5 *Un prodotto topologico di spazi completamente regolari è completamente regolare.*

Dim. Sia $\mathbf{X} = (X, \tau)$ il prodotto topologico della I-upla di spazi topologici completamente regolari $(\mathbf{X}_i)_{i \in I}$. Fissato un punto x di X e un chiuso F di $\mathbf{X}$ che non lo contenga, possiamo trovare un sottoinsieme finito J di I ed aperti $A_j \ni x_j = \pi_j(x)$ di $\mathbf{X}_j$, per $j \in J$, tali che

$$\bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(A_j) \cap F = \emptyset.$$

Per ogni $j \in J$ sia $f_j : X_j \to \mathbf{I}$ una funzione continua tale che $f_j(x_j) = 1$ ed $f_j(y) = 0$ per $y \in X_j \setminus A_j$. Allora

$$f : X \ni y \to \prod_{j \in J} f_j(\pi_j(y)) \in \mathbf{I}$$

è una funzione continua che vale 1 in x e 0 su F.

§3 Estensione di funzioni continue

Teorema 3.1 (Teorema di estensione di Urysohn) *Sia A un chiuso non vuoto di uno spazio topologico $\mathbf{X}$ che soddisfa l'assioma di separazione T_4. Per ogni funzione continua*

$$f : A \to \mathbb{R}$$

possiamo trovare una funzione continua

$$\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$$

che prolunga f: tale cioè che risulti

$$\tilde{f}|_A = f.$$

Inoltre possiamo fare in modo che $\tilde{f}(X)$ sia contenuto nell'inviluppo convesso di $f(A)$.

Per dimostrare questo teorema utilizzeremo il seguente

Lemma 3.2 *Sia $\mathbf{X}$ uno spazio topologico T_4 e F un chiuso non vuoto di $\mathbf{X}$. Sia L un numero reale positivo e*

$$\phi : F \to [-L, L]$$

una funzione continua. Esiste allora una funzione continua

$$\psi : X \to [-L, L]$$

tale che

$$(i) \qquad |\psi(x)| \leq L/3 \quad \forall x \in X$$

$$(ii) \qquad |\psi(x) - \phi(x)| \leq 2L/3 \quad \forall x \in F.$$

Dim. I sottoinsiemi:

$$A = \{x \in F \mid \phi(x) \leq -L/3\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in F \mid \phi(x) \geq L/3\}.$$

sono due chiusi disgiunti di $\mathbf{X}$. Per il Lemma di Urysohn esiste una funzione continua $\psi : X \to [-L/3, L/3]$ che valga $-L/3$ su A e $L/3$ su B. Tale funzione soddisfa le condizioni (i) ed (ii).

Dimostrazione del Teorema 3.1 Supponiamo inizialmente che la funzione f sia a valori nell'intervallo $[-1, 1]$. Dico che allora possiamo trovare una successione $\{g_n\}$ di funzioni continue $g_n : X \to [-1, 1]$, per $n \geq 0$, tale che

$$(*) \qquad \begin{cases} |g_n(x)| \leq 2^{-1}(2/3)^n \\ |f(x) - \sum_{j=1}^n g_j(x)| \leq (2/3)^n \qquad \forall x \in X. \end{cases}$$

La successione $\{g_n\}$ può essere definita per ricorrenza: poniamo $g_0 = 0$ e supponiamo di aver costruito $g_0, ..., g_n$ che soddisfino le $(*)$. Allora

$$A \ni x \to f(x) - \sum_{j=1}^{n} g_j(x) \in [-(2/3)^n, (2/3)^n]$$

è una funzione continua e per il lemma precedente possiamo trovare una funzione continua $g_{n+1} : X \to [-(2/3)^n, (2/3)^n]$ che soddisfi:

$$|g_{n+1}(x)| \leq (1/3)(2/3)^n \quad \forall x \in X,$$

$$|f(x) - \sum_{j=1}^{n+1} g_j(x)| \leq (2/3)^{n+1} \quad \forall x \in A.$$

La serie $\sum_{j=0}^{\infty} g_n$ converge allora uniformemente a una funzione continua $g : X \to \mathbb{R}$ ed abbiamo:

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} g_n(x) \right| \leq (1/3) \sum_{j=0}^{\infty} (2/3)^n = 1,$$

$$g|_A = f.$$

Consideriamo ora il caso generale. Sia J l'inviluppo convesso di $f(A)$ in $\mathbb{R}$. Se J è un intervallo della forma $[a, b]$ con $-\infty < a < b < \infty$, ci riconduciamo al caso precedente componendo la f con la trasformazione affine

$$\mathbb{R} \ni t \to h(t) = \frac{2t - a - b}{b - a} \in \mathbb{R}.$$

La $h \circ f$ è una applicazione continua su A a valori in $[-1, 1]$. Se $g : X \to [-1, 1]$ è una sua estensione continua, la $\tilde{f} = h^{-1} \circ g$ è una estensione continua di f a valori in $[a, b]$. Se J è un intervallo limitato, consideriamo la sua chiusura $\overline{J}$ in $\mathbb{R}$. Per le considerazioni appena svolte, possiamo supporre $\overline{J} = [-1, 1]$ e trovare un'estensione $g : X \to [-1, 1]$ di f. Allora F e $g^{-1}([-1, 1] - J)$ sono chiusi disgiunti di X e possiamo trovare una funzione continua $\chi : X \to I = [0,1]$ che valga 1 su F e 0 su $g^{-1}([-1,1]-J)$. La $\tilde{f} : X \ni x \to g(x)\cdot\chi(x) \in J$ è allora l'estensione cercata. Infine, se J non è un intervallo limitato di $\mathbb{R}$, ci riconduciamo ai casi precedenti componendo f con l'omeomorfismo

$$\mathbb{R} \ni t \to \frac{t}{1+|t|} \in]-1,1[.$$

§4 Partizione dell'unità negli spazi normali

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali definita su uno spazio topologico $\mathbf{X}$. Si dice *supporto* di f la chiusura in $\mathbf{X}$ dell'insieme dei punti x di X in cui $f(x) \neq 0$:

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Sia Γ un ricoprimento di X. Una *partizione continua dell'unità* su X *subordinata al ricoprimento* Γ è il dato di una famiglia

$$\{\phi_A : X \to \mathbb{R} \mid A \in \Gamma\}$$

di applicazioni continue tali che

(*i*) $\phi_A(x) \geq 0 \quad \forall A \in \Gamma, \quad \forall x \in X$;
(*ii*) $\{\text{supp}\phi_A \mid A \in \Gamma\}$ è un ricoprimento localmente finito di X;
(*iii*) $\sum_{A\in\Gamma} \phi_A(x) = 1 \quad \forall x \in X$.

Lemma 4.1 *Sia* $\mathbf{X}$ *uno spazio topologico che soddisfa l'assioma* T_4 *e sia* $\Gamma = \{A_i \mid i \in I\}$ *un ricoprimento aperto localmente finito di* X. *Possiamo allora trovare un ricoprimento aperto* $\Delta = \{B_i \mid i \in I\}$ *di* X *tale che* $\overline{B}_i \subset A_i$ *per ogni* $i \in I$.

Dim. Introduciamo su I un buon ordinamento[5] $<$. Costruiremo la famiglia Δ per induzione transfinita, in modo che

(1) $\overline{B}_i \subset A_i \quad \forall i \in I$,
(2) $\forall j \in I$, $\{B_i \mid i \leq j\} \cup \{A_i \mid j < i\}$ è un ricoprimento aperto di X.

Fissiamo $j_0 \in I$ e supponiamo di aver costruito i B_i per $i < j_0$ in modo che la (1) valga per $i < j_0$ e che per ogni $h \in I$ con $h < j_0$ $\{B_i \mid i \leq h\} \cup \{A_i \mid h < i\}$ sia un ricoprimento aperto di X.

Allora

$$\Delta_{j_0} = \{B_i \mid i < j_0\} \cup \{A_i \mid i \leq j_0\}$$

è un ricoprimento aperto di X. Infatti, se $x \in X$, allora $J = \{i \in I \mid x \in A_i\}$ è finito per l'ipotesi che Γ fosse un ricoprimento localmente finito. Se qualche $i \in J$ è $\geq j_0$, allora Δ_{j_0} contiene un aperto A_i che contiene x. Altrimenti, indichiamo con j' il più grande elemento di J. Poiché per l'ipotesi induttiva

$$\{B_i \mid i \leq j'\} \cup \{A_i \mid j' < i\}$$

[5] Ciò significa che I è totalmente ordinato rispetto a $<$ e che ogni sottoinsieme non vuoto di I ammette minimo rispetto a $<$.

è un ricoprimento aperto di X, $x \in B_i$ per qualche $i \leq j' < j_0$ e dunque appartiene a un $B_i \in \Delta_{j_0}$.

Consideriamo ora l'insieme

$$F = X \setminus \left(\bigcup_{j<j_0} B_j \cup \bigcup_{j_0<j} A_j \right).$$

Esso è un chiuso contenuto in A_{j_0} in quanto Δ_{j_0} è un ricoprimento di X. Essendo X uno spazio T_4, il chiuso F ha un intorno chiuso G contenuto in A_{j_0}. Posto $B_{j_0} = \overset{\circ}{G}$, chiaramente

$$\{B_i \,|\, i \leq j_0\} \cup \{A_i \,|\, j_0 < i\}$$

è un ricoprimento aperto di X e vale la (1) per $j \leq j_0$.

Per induzione transfinita otteniamo quindi una famiglia $\Delta = \{B_i \,|\, i \in I\}$ tale che valgano le (1), (2). Chiaramente Δ è un ricoprimento aperto di X: se $x \in X$ e j è il minimo indice in I tale che $x \notin A_j$, la (2) ci dice che $x \in B_i$ per qualche $i \leq j$.

La dimostrazione è completa.

Teorema 4.2 *Sia Γ un ricoprimento aperto localmente finito di uno spazio topologico $\mathbf{X}$ che soddisfi l'assioma di separazione T_4. Allora esisteuna partizione continua dell'unità subordinata a* Γ.

Dim. Sia $\Gamma = \{A_i \,|\, i \in I\}$. Utilizzando il lemma precedente, otteniamo due ricoprimenti aperti $\mathcal{B} = \{B_i \,|\, I \in I\}$ e $\mathcal{D} = \{D_i \,|\, i \in I\}$ tali che

$$\overline{D}_i \subset B_i \subset \overline{B}_i \subset A_i \quad \forall i \in I.$$

Per ogni $i \in I$ sia $\psi_i : X \to \mathbf{I}$ una funzione continua tale che

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad x \in \overline{D}_i \\ 0 & \text{per} \quad x \in X \setminus B_i. \end{cases}$$

La somma

$$\psi(x) = \sum_{i \in I} \psi_i(x)$$

è localmente finita e quindi definisce una funzione continua su $\mathbf{X}$. Inoltre $\psi(x) \geq 1$ per ogni $x \in X$. Ponendo quindi

$$\phi_i(x) = \psi_i(x)/\psi(x) \quad \forall x \in X, \quad \forall i \in I$$

otteniamo la partizione dell'unità continua cercata.

Osservazione Nel caso in cui il ricoprimento aperto Γ sia numerabile o finito, possiamo dimostrare il teorema sull'esistenza di partizioni continue dell'unità subordinate a Γ facendo uso del solo assioma di induzione di Peano.

§5 Funzioni semicontinue e spazi normali

Indichiamo con $\overline{\mathbb{R}}$ la retta reale estesa:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

con la relazione d'ordine usuale.

Una funzione

$$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$$

definita su uno spazio topologico $\mathbf{X}$ si dice
semicontinua superiormente se $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ è aperto in $\mathbf{X}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;
semicontinua inferiormente se $\{x \in X \mid f(x) > a\}$ è aperto in $\mathbf{X}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Osservazione In modo equivalente: $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è semicontinua superiormente se $\{x \in X \,|\, f(x) \geq a\}$ è chiuso in $\mathbf{X}$ per ogni $a \in R$;

è semicontinua inferiormente se $\{x \in X \,|\, f(x) \leq a\}$ è chiuso in $\mathbf{X}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Osservazione Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ per cui la $X \ni x \to f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ sia contemporaneamente semicontinua superiormente e inferiormente è continua.[6]

Indichiamo con $\mathrm{SCS}(X)$ (risp. $\mathrm{SCI}(X)$) l'insieme delle funzioni semicontinue superiormente tali che $f(X) \subset [-\infty, +\infty[$ (risp. inferiormente tali che $f(X) \subset]-\infty, +\infty]$) sullo spazio topologico $\mathbf{X}$.

Indichiamo con $\mathcal{C}(X)$ l'insieme di tutte le funzioni continue a valori reali sullo spazio topologico $\mathbf{X}$.

Per l'osservazione precedente,

$$\mathrm{SCS}(X) \cap \mathrm{SCI}(X) = \mathcal{C}(X).$$

Esempio 5.1 Sia X un insieme e A un sottoinsieme di X. Si dice *funzione caratteristica dell'insieme* A la funzione $\chi_A : X \to I \subset \mathbb{R}$ definita da:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A \\ 0 \text{ se } x \notin A. \end{cases}$$

Se $\mathbf{X}$ è uno spazio topologico, la funzione caratteristica χ_A è semicontinua superiormente se e soltanto se l'insieme A è chiuso, semicontinua inferiormente se e soltanto se l'insieme A è aperto.

Infatti: se χ_A è semicontinua superiormente,

$$A = \{x \in X \mid \chi_A(x) \geq 1\}$$

è un chiuso. Viceversa, se A è un chiuso, χ_A è semicontinua superiormente perché:

$$\{x \in X \mid \chi_A(x) \geq a\} = \begin{cases} X \text{ se } a \leq 0 \\ A \text{ se } 0 < a \leq 1 \\ \emptyset \text{ se } a > 1 \end{cases}$$

è chiuso per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Se χ_A è semicontinua inferiormente, allora

$$A = \{x \in X \mid \chi_A(x) > 0\}$$

[6] In questo paragrafo, per semplificare le notazioni, non faremo distinzione tra una funzione f a valori in un sottoinsieme A di $\overline{\mathbb{R}}$ e la funzione a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ che si ottiene componendola con l'inclusione $A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

è un aperto. Viceversa, se A è aperto:

$$\{x \in X \mid \chi_A(x) > a\} = \begin{cases} X \text{ se } a < 0 \\ A \text{ se } 0 \leq a < 1 \\ \emptyset \text{ se } a \geq 1 \end{cases}$$

è aperto per ogni $a \in \mathbb{R}$ e quindi χ_A è semicontinua inferiormente.

Lemma 5.1 *Siano $f, g \in \mathrm{SCS}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Allora*
(1) $f + g \in \mathrm{SCS}(X)$,
(2) $\lambda f \in \mathrm{SCS}(X)$,
(3) $\max\{f, g\} \in \mathrm{SCS}(X)$
(4) $-f \in \mathrm{SCI}(X)$.

Analogamente: Siano $f, g \in \mathrm{SCI}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Allora
(1′) $f + g \in \mathrm{SCI}(X)$,
(2′) $\lambda f \in \mathrm{SCI}(X)$,
(3′) $\min\{f, g\} \in \mathrm{SCI}(X)$
(4′) $-f \in \mathrm{SCS}(X)$.

Dim. Verifichiamo la (1). Siano $f, g \in \mathrm{SCS}(X)$. La funzione $f + g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è a valori in $[-\infty, +\infty[$. Inoltre, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in X \mid f(x) + g(x) < a\} = \bigcup_{s+t<a} (\{x \in X \mid f(x) < s\} \cap \{x \in X \mid g(x) < t\})$$

è aperto perché unione di aperti.

La verifica della (2) e della (4) sono immediate.

Mostriamo che $\max\{f, g\} \in \mathrm{SCS}(X)$ se $f, g \in \mathrm{SCS}(X)$. Intanto

$$-\infty \leq \max\{f, g\}(x) < +\infty \text{ per ogni } x \in X$$

perché $-\infty \leq f(x),\ g(x) < +\infty$. Se poi a è un qualsiasi numero reale,

$$\{x \in X \mid \max\{f, g\}(x) < a\} = \{x \in X \mid f(x) < a\} \cap \{x \in X \mid g(x) < a\}$$

è aperto perché intersezione di due aperti.

Le affermazioni relative a $\mathrm{SCI}(X)$ si verificani in modo analogo.

Lemma 5.2 *Sia A un sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$ e $\phi : A \to \mathbb{R}$ una funzione non decrescente. Se $\phi \in \mathrm{SCS}(A)$, $f \in \mathrm{SCS}(X)$ e $f(X) \subset A$, allora $\phi \circ f \in \mathrm{SCS}(X)$. Se $\phi \in \mathrm{SCI}(A)$, $f \in \mathrm{SCI}(X)$ e $f(X) \subset A$, allora $\phi \circ f \in \mathrm{SCI}(X)$.*

Dim. Supponiamo $f \in \mathrm{SCS}(X)$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'insieme:

$$E_a = \bigcup_{\phi(t)<a} \{x \in X \mid f(x) < t\}.$$

Esso è aperto perché unione di aperti e

$$E_a \subset \{x \in X \mid \phi \circ f(x) < a\}$$

perché ϕ è non decrescente.

Per dimostrare che $\phi \circ f \in \mathrm{SCS}(X)$, mostriamo che questi due insiemi coincidono. Sia $x_0 \in X$ tale che $\phi \circ f(x_0) < a$. Posto $f(x_0) = s$, abbiamo $\phi(s) < a$ e, poiché abbiamo supposto la ϕ semicontinua superiormente, possiamo trovare un $\epsilon > 0$ tale che $\phi(t) < a$ se $s - \epsilon < t < s + \epsilon$. Allora $x_0 \in \{x \in X \mid f(x) < s + \frac{\epsilon}{2}\} \subset E_a$. Questo dimostra che

$$\{x \in X \mid \phi \circ f(x) < a\} \subset E_a$$

e quindi i due insiemi coincidono.

La dimostrazione dell'enunciato che riguarda le funzioni semicontinue inferiormente è analoga.

Teorema 5.3 *Sia $\{f_i \mid i \in I\}$ una qualsiasi famiglia di funzioni di $SCS(X)$. Allora la*

$$f : X \ni x \to \inf_{i \in I} f_i(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

è ancora una funzione semicontinua superiormente della classe $\mathrm{SCS}(X)$. *Sia $\{f_i \mid i \in I\}$ una qualsiasi famiglia di funzioni di $SCI(X)$. Allora la*

$$f : X \ni x \to \sup_{i \in I} f_i(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

è ancora una funzione semicontinua inferiormente della classe $\mathrm{SCI}(X)$.

Dim. Supponiamo $\{f_i \mid i \in I\} \subset \mathrm{SCS}(X)$ e $f(x) = \inf_{i \in I} f_i(x)$ per ogni $x \in X$. Fissato un qualsiasi numero reale a l'insieme:

$$\{x \in X \mid f(x) < a\} = \bigcup_{i \in I} \{x \in X \mid f_i(x) < a\}$$

è aperto perché unione di aperti. Quindi la f è semicontinua inferiormente e chiaramente è a valori in $[-\infty, +\infty[$ se tutte le f_i sono a valori in tale insieme.

La dimostrazione della seconda parte del teorema è del tutto analoga.

Lemma 5.4 *Siano $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ due successioni di funzioni continue a valori in* $\mathbf{I}$, *definite su uno spazio topologico* $\mathbf{X}$. *Supponiamo che* $\inf_n f_n = f \le g = \sup_n g_n$. *Possiamo allora trovare una funzione continua $h : X \to \mathbf{I}$ tale che $f \le h \le g$.*

Dim. Sostituendo a f_n la funzione continua $\min\{f_0, ..., f_n\}$ e a g_n la funzione continua $\max\{g_0, ..., g_n\}$ possiamo supporre che $f_n \ge f_{n+1}$ e $g_n \le g_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Definiamo ora due successioni di funzioni continue $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ ponendo

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_n = \max_{j \le n} \min\{f_j, g_j\} \text{ se } n > 0 \\ \beta_0 = 1 \\ \beta_n = \max\{\alpha_{n-1}, f_n\} \text{ se } n > 0. \end{cases}$$

Le funzioni

$$h_1 : X \ni x \to \sup_n \alpha_n(x) \in I,$$

$$h_2 : X \ni x \to \inf_n \beta_n(x) \in I,$$

sono la prima semicontinua inferiormente e la seconda semicontinua superiormente su $\mathbf{X}$. Inoltre $\alpha_n \leq g_n$ e $\beta_n \geq f_n$ per ogni n ci dicono che $h_1 \leq g$ e $h_2 \geq f$.

Vogliamo dimostrare che $h_1 = h_2 = h$: la h risulterà continua e soddisferà la tesi del lemma.

Sia $\mathbb{R} \ni t < h_1(x)$ per un punto $x \in X$. Poiché la successione delle α_n è non decrescente, possiamo trovare un intero $\nu \geq 1$ tale che $\alpha_n(x) > t$ per ogni $n \geq \nu$. In particolare, per un indice μ con $1 \leq \mu \leq \nu$ abbiamo $f_\mu(x) > t$ e $g_\mu(x) > t$. Quindi

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq ... \geq f_\mu(x) > t < \alpha_\mu(x) \leq \alpha_{\mu+1}(x) \leq ...$$

e quindi anche $\beta_n(x) > t$ per ogni n. Ciò dimostra che $h_1 \leq h_2$.

Sia ora t un numero reale con $t > h_1(x)$. Scegliamo un altro numero reale s tale che $h_1(x) < s < t$. Allora $\alpha_n(x) < s$ per ogni n e quindi $\min\{f_n(x), g_n(x)\} < s$ per ogni n. Se fosse $f_n(x) > t$ per ogni n, avremmo $g_n(x) < s$ per ogni n e dunque $g(x) \leq s < t \leq f(x)$ ci darebbe una contraddizione. Deve quindi essere $f_\nu(x) \leq t$ per qualche intero positivo ν e dunque $\beta_\nu(x) \leq t$. Allora $h_2(x) \leq t$. Ne segue che è anche $h_2 \leq h_1$ e dunque le due funzioni sono uguali. La dimostrazione è completa.

Lemma 5.5 *Sia* $\mathbf{X}$ *uno spazio topologico* T_4 *e siano* $f \in \mathrm{SCS}(X)$, $g \in \mathrm{SCI}(X)$ *due funzioni tali che*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \leq 1 \quad \forall x \in X.$$

Esiste allora una funzione continua $h : X \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X.$$

Dim. Per ogni coppia di interi positivi m, n con $1 \leq m \leq n$ sia $\phi_{n,m} : X \to [\frac{m}{n}, 1] \subset \mathbb{R}$ una funzione continua che valga $\frac{m}{n}$ sul chiuso $\{x \in X \mid g(x) \leq \frac{m-1}{n}\}$ e 1 sul chiuso $\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{m}{n}\}$. Abbiamo $\phi_{n,m}(x) \geq f(x)$ su X. Per ogni intero positivo n consideriamo allora la funzione continua

$$\phi_n : X \ni x \to \min_{1 \leq m \leq n} \phi_{n,m}(x) \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo allora $\phi_n(x) \geq f(x)$ su X e inoltre $\phi_n(x) \leq \frac{m+1}{n}$ se $g(x) \leq \frac{m}{n}$. Posto

$$f_0(x) = \inf_n \phi_n(x) \text{ per } x \in X,$$

otteniamo una funzione semicontinua superiormente tale che

$$f(x) \leq f_0(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X.$$

Applicando lo stesso ragionamento alle funzioni $x \to 1 - g(x)$ e $1 - f_0(x)$, che sono la prima semicontinua superiormente e la seconda semicontinua inferiormente, possiamo trovare una successione $\{\psi_n\}$ di funzioni continue $\psi_n : X \to \mathbf{I}$ tali che, posto $G_0 = \inf_n \psi_n$, risulti $1 - g(x) \leq G_0(x) \leq 1 - f_0(x)$ per ogni $x \in X$. Allora $g_0(x) = 1 - G_0(x)$ è l'estremo superiore di una successione di funzioni continue e risulta

$$f(x) \leq f_0(x) \leq g_0(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X.$$

Per il lemma precedente possiamo trovare una funzione continua $h : X \to \mathbf{I}$ tale che $f_0(x) \leq h(x) \leq g_0(x)$ per ogni $x \in X$. Tale funzione h soddisfa la tesi.

Osservazione La proprietà espressa dal Lemma ?? caratterizza gli spazi topologici T_4. Siano infatti A e B due chiusi disgiunti dello spazio topologico $\mathbf{X}$. Dette χ_A e χ_B le loro funzioni caratteristiche, le funzioni $1 - \chi_A$ e χ_B sono la prima semicontinua inferiormente, la seconda semicontinua superiormente e

$$\chi_B(x) \leq 1 - \chi_A(x) \quad \forall x \in X.$$

Una funzione continua $h : X \to I$ tale che

$$\chi_B(x) \leq h(x) \leq 1 - \chi_A(x) \quad \forall x \in X$$

è una funzione di Urysohn della coppia (A, B).

Quindi, uno spazio topologico $\mathbf{X}$ per cui valga l'enunciato del Lemma ?? soddisfa necessariamente l'assioma di separazione T_4.

Teorema 5.6 (Teorema di interpolazione) *Sia $\mathbf{X}$ uno spazio topologico T_4 ed $f \in \mathrm{SCS}(X)$, $g \in \mathrm{SCI}(X)$ due funzioni tali che*

$$-\infty < f(x) \leq g(x) < +\infty \quad \forall x \in X.$$

Esiste allora una funzione $h : X \to \mathbb{R}$ continua tale che

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X.$$

Dim. Consideriamo la funzione $\alpha : \mathbb{R} \to I$ definita da:

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} + \frac{t}{1 + 2|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Essa definisce un omeomorfismo crescente di $\mathbb{R}$ sull'intervallo aperto $\overset{\circ}{I} =]0, 1[$, che ha inversa

$$\beta(s) = \begin{cases} \frac{2s-1}{4s} \text{ per } 0 < s \leq 1/2 \\ \frac{2s-1}{4(1-s)} \text{ per } 1/2 \leq s < 1. \end{cases}$$

Consideriamo la funzione $\alpha \circ f$. Essa è ancora semicontinua superiormente perché composta di una funzione semicontinua superiormente e di una funzione continua e crescente.

Analogamente $\alpha \circ g$ è ancora semicontinua inferiormente perché composta di una funzione semicontinua inferiormente e di una funzione continua e crescente.

Per il lemma precedente possiamo trovare una funzione continua $\lambda : X \to \mathbf{I}$ tale che

$$\alpha \circ f(x) \leq \lambda(x) \leq \alpha \circ g(x) \quad \forall x \in X.$$

La funzione continua $h = \beta \circ \lambda$ soddisfa allora le condizioni del teorema.

Teorema 5.7 *Sia* **X** *uno spazio normale. Allora*

(1) *Ogni* $f \in \mathrm{SCS}(X)$ *limitata superiormente è estremo inferiore di una famiglia di funzioni continue.*
(2) *Ogni* $f \in \mathrm{SCI}(X)$ *limitata inferiormente è estremo superiore di una famiglia di funzioni continue.*

Dim. Sia $f \in \mathrm{SCS}(X)$ e supponiamo che $f(x) \leq c$ su X per una costante $c \in \mathbb{R}$. Supponiamo vi sia un punto $x_0 \in X$ in cui $f(x_0) < c$. Fissato un qualsiasi numero reale s con $f(x_0) < s < c$, la funzione

$$\psi(x) = \begin{cases} s \text{ se } x = x_0 \\ c \text{ se } x \in X \setminus \{x_0\} \end{cases}$$

è semicontinua inferiormente perché $X \setminus \{x_0\}$ è aperto in quanto abbiamo supposto che **X** soddisfi l'assioma T_1. Per il teorema di interpolazione, possiamo trovare una funzione continua $h : X \to \mathbb{R}$ tale che

$$\max\{f(x), s\} \leq h(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in X.$$

Da questa osservazione segue che, detto $\mathcal{F}$ l'insieme di tutte le funzioni continue $h : X \to \mathbb{R}$ tali che $h \geq f$, abbiamo

$$f(x) = \inf\{h(x) \,|\, h \in \{\}.$$

La dimostrazione della (2) è analoga.

§6 Assiomi di numerabilità e di separabilità

Uno spazio topologico **X** si dice *separabile* se contiene un sottoinsieme D denso e numerabile.

Esempio 6.1 La retta reale $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea è separabile, in quanto l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è denso in $\mathbb{R}$ e numerabile.

Diciamo che uno spazio topologico **X** *soddisfa al primo assioma di numerabilità* se ogni punto di X ammette un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Diciamo che uno spazio topologico **X** *soddisfa al secondo assioma di numerabilità* o che è a base numerabile se ammette una base numerabile di aperti.

Teorema 6.1 *Uno spazio topologico* **X** *che soddisfa il secondo assioma di numerabilità soddisfa anche al primo ed è separabile.*

Dim. Sia $\mathcal{B} = \{A_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ una base numerabile degli aperti della topologia τ_X di **X**. Fissato un punto x di X, la famiglia $\{A_n \in \mathcal{B} \,|\, x \in A_n\}$ è una base numerabile di intorni di x in **X**.

Per ogni n appartenente all'insieme $\mathbb{N}'$ dei numeri naturali per cui $A_n \neq \emptyset$, scegliamo un elemento $x_n \in A_n$. Allora $D = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}'\}$ è un sottoinsieme denso e numerabile di X.

Teorema 6.2 *Uno spazio topologico metrizzabile soddisfa al primo assioma di numerabilità. Esso soddisfa al secondo assioma di numerabilità se e soltanto se è separabile.*

Dim. Sia $\mathbf{X}$ uno spazio topologico metrizzabile e d una distanza su X che ne definisca la topologia. Per ogni $x \in X$ le palle aperte $B_d(x, 2^{-n})$ di X per la distanza d formano un sistema fondamentale di intorni numerabile di X.

Abbiamo già osservato che se $\mathbf{X}$ soddisfa al secondo assioma di numerabilità allora è separabile. Supponiamo ora viceversa che X sia separabile. Sia $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un sottoinsieme denso e numerabile di X. Dico che allora

$$\mathcal{B} = \{B_d(x_n, 2^{-m}) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

è una base numerabile di $\mathbf{X}$. Sia infatti A un aperto di $\mathbf{X}$ e $x \in A$. Possiamo allora trovare un $\epsilon > 0$ tale che $B_d(x, \epsilon) \subset A$. Scegliamo un intero positivo m tale che $2^{-m} < \epsilon/2$. Poiché D è denso in X, esiste $x_n \in D$ tale che $d(x, x_n) < 2^{-m}$. Allora $x \in B_d(x_n, 2^{-m}) \subset A$. Quindi ogni punto di un aperto A è contenuto in un elemento di $\mathcal{B}$ contenuto in A. Questo dimostra che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbf{X}$. Chiaramente la base $\mathcal{B}$ che abbiamo ottenuto è numerabile.

Si verifica facilmente la:

Proposizione 6.3 *Un sottospazio di uno spazio topologico che soddisfi al primo (risp. al secondo) assioma di numerabilità soddisfa anch'esso al primo (risp. al secondo) assioma di numerabilità.*

Esempio 6.2 Un sottospazio di uno spazio topologico separabile non è necessariamente separabile. Sia $\mathbf{X} = (\mathbb{R}, \tau)$ ove τ è la topologia che ha come base degli aperti gli intervalli chiusi a sinistra e aperti a destra della forma $[a, b[$ con $a < b$. Lo spazio topologico prodotto $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ è separabile, in quanto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ne è un sottoinsieme denso e numerabile. D'altra parte la topologia indotta sul sottospazio $Y = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ è la topologia discreta e quindi Y non è separabile con la topologia di sottospazio.

Teorema 6.4 *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau)$ il prodotto topologico di una I-upla $(\mathbf{X}_i)_{i \in I}$ di spazi topologici, ciascuno dei quali contenga almeno due punti. Allora*

(1) $\mathbf{X}$ soddisfa al primo assioma di numerabilità se ogni $\mathbf{X}_i$ soddisfa al primo assioma di numerabilità e I è finito o numerabile.

(2) $\mathbf{X}$ soddisfa al secondo assioma di numerabilità se ogni $\mathbf{X}_i$ soddisfa al secondo assioma di numerabilità e I è finito o numerabile.

(3) $\mathbf{X}$ è separabile se e ogni $\mathbf{X}_i$ è separabile e I ha al più la potenza del continuo.

Dim. (1) Sia $x \in X$ e per ogni $i \in I$ sia $\mathcal{U}_i$ un sistema fondamentale numerabile di intorni di $x_i = \pi_i(x)$ in $\mathbf{X}_i$. Allora

$$\mathcal{U} = \{\cap_{i \in J} \pi_i^{-1}(U_i) \mid J \subset I \quad \text{è finito} \quad \text{e} \quad U_i \in \mathcal{U}_i\}$$

è un sistema fondamentale di intorni numerabile di x.

(2) Per ogni $i \in I$ sia $\mathcal{B}_i$ una base numerabile di $\mathbf{X}_i$. Allora

$$\mathcal{B} = \{\cap_{i\in J}\pi_i^{-1}(A_i)\,|\,J \subset I \quad \text{è finito} \quad \text{e} \quad A_i \in \mathcal{B}_i\}$$

è una base numerabile di τ.
(3) Se I ha al più la potenza del continuo, possiamo supporre che $I \subset [0,1[\subset \mathbb{R}$. Indichiamo con Λ l'insieme di tutte le partizioni finite di $[0,1[$ in intervalli chiusi a sinistra e aperti a destra con estremi razionali. L'insieme Λ è numerabile. Per ogni indice $i \in I$ sia $D_i = \{x_{in}\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme numerabile e denso di $\mathbf{X}_i$. Consideriamo il sottoinsieme di X:

$$\begin{aligned} D = \{x \in X\,|\,\exists\{E_1,...,E_k\} \in \Lambda, \quad n_1,...,n_k \in \mathbb{N} \\ \text{tali che} \quad \pi_i(x) = x_{in_s} \text{ se } i \in E_s \cap I \quad 1 \le s \le k\}. \end{aligned}$$

L'insieme D è numerabile. Esso è denso in $\mathbf{X}$. Se infatti J è un sottoinsieme finito di I e, per ogni $j \in J$, A_j un aperto di $\mathbf{X}_j$, possiamo trovare una partizione $\{E_1,...,E_k\} \in \Lambda$ tale che ciascun insieme della partizione contenga al più un elemento j di J. Per ogni $j \in J$ l'aperto A_j di $\mathbf{X}_j$ contiene un elemento x_{jn_j} di D_j. Allora l'elemento x di D definito da

$$x_h = \begin{cases} x_{hn_j} \text{ se } h,j \in E_s \quad \text{per qualche} \quad 1 \le s \le k \\ x_{h0} \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a $\cap_{j\in J}\pi_j^{-1}(A_j)$.

Teorema 6.5 *Ogni spazio topologico che soddisfi l'assioma T_3 e sia a base numerabile soddisfa anche l'assioma T_4.*

Dim. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di aperti di uno spazio topologico $\mathbf{X}$, che soddisfi anche l'assioma di separazione T_3. Siano A e B due chiusi disgiunti di $\mathbf{X}$. Per ogni punto $x \in A$ esiste un intorno aperto $U_x \in \mathcal{B}$ di x tale che $\overline{U}_x \cap B = \emptyset$ e per ogni $y \in B$ un intorno aperto $V_y \in \mathcal{B}$ di y tale che $\overline{V}_y \cap A = \emptyset$. Poiché $\mathcal{B}$ è numerabile, possiamo trovare due successioni $\{x_n\} \subset A$ e $\{y_n\} \subset B$ tali che

$$\{U_x\,|\,x \in A\} = \{U_{x_n}\,|\,n \in \mathbb{N}\}, \quad = \{V_y\,|\,y \in B\} = \{V_{y_n}\,|\,n \in \mathbb{N}\}.$$

Poniamo $U_n = U_{x_n}$ e $V_n = V_{y_n}$. Allora $\{U_n\}$ e $\{V_n\}$ sono due ricoprimenti aperti di A e B rispettivamente che sono numerabili e hanno la proprietà:

$$\overline{U}_n \cap B = \emptyset, \quad \overline{V_n} \cap A = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poniamo

$$\begin{aligned} U'_0 &= U_0 \\ U'_n &= U_n \setminus \textstyle\bigcup_{j=1}^{n-1} \overline{V}_j \\ V'_n &= V_n \setminus \textstyle\bigcup_{j=0}^{n} \overline{U}_j. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} U &= \textstyle\bigcup_{j=0}^{\infty} U'_n \quad \text{è un aperto contenente } A \\ V &= \textstyle\bigcup_{j=0}^{\infty} V'_n \quad \text{è un aperto contenente } B. \end{aligned}$$

Dico che i due aperti U e V sono disgiunti. Se infatti fosse $x \in U \cap V$, avremmo $x \in U'_n \cap V'_m$ per due interi $m,n \ge 0$. Non può essere $n \le m$ perché in questo caso

$U'_n \cap V'_m \subset U_n \cap (V_m \setminus U_n) = \emptyset$, né $n > m$ in quanto in questo caso $U'_n \cap V'_m \subset (U_n \setminus V_m) \cap V_m = \emptyset$. Quindi $U \cap V = \emptyset$. La dimostrazione è completa.

§7 Un teorema di immersione e metrizzabilità

Teorema 7.1 *Ogni spazio regolare a base numerabile ammette un'immersione topologica in ℓ_2.*

Dim. Sia $\mathbf{X}$ uno spazio topologico regolare a base numerabile e sia $\mathcal{B}$ una base numerabile degli aperti di $\mathbf{X}$. Sia

$$\Delta = \{(U, V) \,|\, U, V \in \mathcal{B},\ \overline{U} \subset V\}.$$

L'insieme Δ è numerabile e possiamo quindi trovare una applicazione surgettiva

$$\mathbb{N} \ni n \to (U_n, V_n) \in \Delta.$$

Per il Teorema 6.4 $\mathbf{X}$ è uno spazio normale. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste quindi una funzione di Urysohn f_n della coppia $(\overline{U}_n, X - V_n)$. Consideriamo l'applicazione

$$f : X \ni x \to (2^{-n} f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2.$$

L'applicazione f è iniettiva: se $x \neq y$ sono due punti distinti di $\mathbf{X}$, possiamo trovare una coppia di aperti $A, B \in \mathcal{B}$ tali che $x \in A \subset \overline{A} \subset B \not\ni y$ e quindi un indice $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \in U_n$ e $y \notin V_n$. Allora $f_n(x) = 0$, $f_n(y) = 1$ e dunque $f(x) \neq f(y)$.

Dimostriamo che f è continua: fissiamo $x_0 \in X$ ed $\epsilon > 0$. Possiamo scegliere $m \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande, in modo che

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-2n} < \epsilon^2/2.$$

Poiché ciascuna delle funzioni f_n è continua, possiamo poi trovare un intorno aperto W di x_0 tale che

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon/2 \quad \text{per } n = 0, ..., m.$$

Allora

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\|^2 &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} |f_n(x) - f_n(x_0)|^2 \\ &\leq (\epsilon^2/4) \textstyle\sum_{n=0}^{m} 2^{-2n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-2n} < \epsilon^2, \\ &\forall y \in W. \end{aligned}$$

Sia ora $g : f(X) \to X$ la funzione inversa dell'abbreviazione $f|_X^{f(X)} : X \to f(X)$. Sia $y_0 = f(x_0) \in f(X)$ e sia W un intorno di x_0 in $\mathbf{X}$. Possiamo allora trovare una coppia $(U_n, V_n) \in \Delta$ con $x \in U_n \subset V_n \subset W$. Se $y \in B(y_0, 2^{-n}) \cap f(X) = \{f(x) \,|\, \|f(x) - y_0\| < 2^{-n}\}$ avremo in particolare $|f_n(x) - f_n(x_0)| = f_n(x) < 1$ e quindi $x \in V_n \subset W$. Questo dimostra che anche g è continua e quindi f è un'immersione topologica.

Poiché un sottospazio di uno spazio metrizzabile è metrizzabile, abbiamo ottenuto il

TEOREMA 7.2 *Uno spazio topologico a base numerabile è metrizzabile se e soltanto se è regolare.*

ESEMPIO Sia τ la topologia su $\mathbb{R}$ che ha come base di aperti la famiglia $\mathcal{B} = \{[a,b[\,|\,a,b \in \mathbb{R}, \quad a < b\}$ degli intervalli chiusi a sinistra e aperti a destra. Poiché $]a,b[= \bigcup_{a<c<b} [c,b[$, la topologia τ è più fine di quella Euclidea e quindi è separata. Inoltre $(\mathbb{R},\tau)$ soddisfa al primo assioma di numerabilità ed è separabile, perché l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali è numerabile e denso in $(\mathbb{R},\tau)$. Dico che $(\mathbb{R},\tau)$ soddisfa l'assioma di separazione T_4. Per dimostrare questo fatto mostriamo che:

Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ è chiuso in $(\mathbb{R},\tau)$ se e soltanto se ogni sottoinsieme non vuoto di A limitato inferiormente ammette minimo in A.

Sia infatti A un chiuso di $(\mathbb{R},\tau)$, sia B un sottoinsieme di A e sia $b = \inf B$. Se fosse $b \notin A$, esisterebbe un $\epsilon > 0$ tale che $[b, b+\epsilon[\subset \mathbb{R} \setminus A$. In particolare $x \geq b + \epsilon$ per ogni $x \in B$, contraddicendo il fatto che $b = \inf B$.

Sia viceversa $A \subset \mathbb{R}$ un insieme che contiene gli estremi inferiori dei suoi sottoinsiemi limitati inferiormente. Se $a \in \mathbb{R} \setminus A$, consideriamo l'insieme $B = \{x \in A\,|\,x > a\}$. Se $B = \emptyset$, allora $[a, +\infty[$ è un intorno aperto di a in $(\mathbb{R},\tau)$ disgiunto da A. Se $B \neq \emptyset$, allora B, essendo limitato inferiormente da a e contenuto in A, ha un minimo $b \in A$. Abbiamo allora $a < b$ perché $a \notin A$ e $[a,b[$ è un intorno aperto di a un $(\mathbb{R},\tau)$ disgiunto da A. Questo dimostra che A è chiuso.

Siano ora A e B due chiusi disgiunti di $(\mathbb{R},\tau)$. Per ogni $a \in A$ sia x_a l'estremo inferiore dell'insieme $\{x \in B\,|\,x > a\}$ (ricordiamoci la convenzione che $\inf \emptyset = +\infty$). Abbiamo $a < x_a$ perché $x_a \notin A$ e quindi $U_a = [a, x_a[$ è un intorno aperto di a in $(\mathbb{R},\tau)$. Analogamente, per ogni $b \in B$ poniamo $y_b = \inf\{y \in A\,|\,y > b\}$ e $V_b = [b, y_b[$. Allora $U = \bigcup_{a \in A} [a, x_a[$ e $V = \bigcup_{b \in B} V_b$ sono intorni aperti disgiunti di A e B, rispettivamente.

Ciò dimostra che $(\mathbb{R},\tau)$ soddisfa l'assioma di separazione T_4.

Osserviamo che $(\mathbb{R},\tau)$ non è né a base numerabile, né metrizzabile. Infatti il sottospazio $\{x + y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ del prodotto topologico di due copie di $(\mathbb{R},\tau)$ ha la topologia discreta e quindi non è a base numerabile. Quindi il prodotto topologico $(\mathbb{R}^2, \tau \times \tau)$ non è a base numerabile e quindi non lo sono i suoi fattori. D'altra parte, essendo separabile, se $(\mathbb{R},\tau)$ fosse metrizzabile sarebbe anche a base numerabile.

CAPITOLO IV

COMPATTEZZA

§1 Definizioni e prime proprietà

Uno spazio topologico si dice *compatto* se ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.

Esempio 1.1 Uno spazio topologico $\mathbf{X}$ che contenga un numero finito di punti è compatto. Uno spazio topologico $\mathbf{X}$ con la topologia discreta è compatto se e soltanto se contiene un numero finito di punti.

Un sottoinsieme A di uno spazio topologico $\mathbf{X}$ si dice *compatto* se è compatto per la topologia indotta. Ciò equivale al fatto che ogni ricoprimento aperto di A in $\mathbf{X}$ ammetta un sottoricoprimento finito.

Se $A \subset B$ sono sottoinsiemi di uno spazio topologico $\mathbf{X}$, diciamo che A è *relativamente compatto in* B se la sua chiusura in B è compatta. Scriviamo $A \Subset B$ per indicare che A è relativamente compatto in B, che cioè $\overline{A} \cap B$ è compatto.

Lemma 1.1 *Siano $A \subset B$ due sottoinsiemi di uno spazio topologico $\mathbf{X}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $A \Subset B$ è che ogni ricoprimento aperto di B contenga un sottoricoprimento finito di $\overline{A} \cap B$.*

Dim. Supponiamo che $A \Subset B$. Sia Γ un ricoprimento aperto di B. Esso è allora un ricoprimento aperto di $\overline{A} \cap B$, che per ipotesi è compatto. Possiamo quindi estrarre da Γ un sottoricoprimento finito di $\overline{A} \cap B$.

Viceversa, supponiamo che da ogni ricoprimento aperto di B si possa estrarre un sottoricoprimento finito di $\overline{A} \cap B$. Sia Γ un ricoprimento aperto di $\overline{A} \cap B$. L'insieme $B \setminus \overline{A}$ è un aperto di B ed esiste quindi un aperto G di $\mathbf{X}$ tale che $G \cap B = B \setminus \overline{A}$. Allora $\Gamma' = \Gamma \cup \{G\}$ è un ricoprimento aperto di B. Da esso per ipotesi possiamo estrarre un ricoprimento finito Δ' di $\overline{A} \cap B$. Allora $\Delta = \Delta' \setminus \{G\} \subset \Gamma$ è un ricoprimento aperto finito di $\overline{A} \cap B$.

Da questo lemma si ricava immediatamente il:

Teorema 1.2 *Ogni sottospazio chiuso di uno spazio topologico compatto è compatto. Ogni sottoinsieme di uno spazio compatto è in esso relativamente compatto.*

Esempio 1.2 Sia X un insieme che contiene infiniti elementi. Fissato $a \in X$, consideriamo su X la topologia τ che ha come base degli aperti la famiglia $\mathcal{B}$ di tutti i sottoinsiemi di X che contengono a. Abbiamo $\tau = \mathcal{B} \cup \{\emptyset\}$. Il sottoinsieme $\{a\}$ di X è finito e quindi compatto in (X, τ). Abbiamo $\overline{\{a\}} = X$, che non è compatto perché il ricoprimento aperto $\Gamma = \{\{a, x\} \,|\, x \in X \setminus \{a\}\}$ di X non ammette un sottoricoprimento finito.

In uno spazio topologico generale $\mathbf{X}$ un sottoinsieme compatto può quindi non essere relativamente compatto in X.

Sia Γ una famiglia di sottoinsiemi di un insieme X. Diciamo che Γ ha la *proprietà dell'intersezione finita* se una qualsiasi intersezione di una sottofamiglia finita di Γ è non vuota.

TEOREMA 1.3 *Sia $\mathbf{X}$ uno spazio topologico. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\mathbf{X}$ sia compatto è che l'intersezione di una qualsiasi famiglia Γ di chiusi di $\mathbf{X}$ che goda della proprietà dell'intersezione finita sia non vuota.*

DIM. Supponiamo che $\mathbf{X}$ sia compatto. Sia Γ una famiglia di chiusi di $\mathbf{X}$ che goda della proprietà dell'intersezione finita. Se $\bigcap \Gamma$ fosse vuota, allora $\{X - A \mid A \in \Gamma\}$ sarebbe un ricoprimento aperto di X. Potremmo allora, per la compattezza di $\mathbf{X}$, trovare un sottoinsieme finito $\{A_1, ..., A_n\}$ di chiusi di Γ tali che

$$\bigcup_{j=1}^{n} (X \setminus A_j) = X.$$

Ma questa relazione equivale a

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \emptyset,$$

che contraddice l'ipotesi che Γ godesse della proprietà dell'intersezione finita.

Supponiamo ora che ogni famiglia di sottoinsiemi chiusi di $\mathbf{X}$ che abbia la proprietà dell'intersezione finita abbia intersezione non vuota. Sia Γ un ricoprimento aperto di $\mathbf{X}$.

La famiglia di chiusi $\{X \setminus A \mid A \in \Gamma\}$ non gode della proprietà dell'intersezione finita, perché

$$\bigcap_{A \in \Gamma} (X \setminus A) = \emptyset.$$

Esiste quindi un sottoinsieme finito $\{A_1, ..., A_n\}$ di Γ tale che

$$\bigcap_{j=1}^{n} (X \setminus A_j) = \emptyset.$$

Ciò equivale al fatto che $\{A_1, ..., A_n\}$ sia un ricoprimento di X. Questo dimostra che $\mathbf{X}$ è compatto.

TEOREMA 1.4 (TEOREMA DI WEIERSTRASS) *Ogni funzione reale semicontinua superiormente su uno spazio compatto ammette massimo.*

Ogni funzione reale semicontinua inferiormente su uno spazio compatto ammette minimo.

DIM. Sia $f : X \to [-\infty, +\infty[$ una funzione semicontinua superiormente su uno spazio compatto $\mathbf{X}$ e sia $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ l'estremo superiore di f in X. Allora per ogni numero reale $a < \alpha$, l'insieme

$$F_a = \{x \in X \mid f(x) \geq a\}$$

è un sottoinsieme chiuso non vuoto di $\mathbf{X}$. La famiglia di chiusi $\{F_a \,|\, a < \alpha\}$ gode della proprietà dell'intersezione finita, in quanto

$$F_{a_1} \cap .... \cap F_{a_n} = F_a \quad \text{se} \quad a = \max\{a_1, ..., a_n\}.$$

La sua intersezione

$$F = \bigcap_{a<\alpha} F_a$$

è non vuota perché $\mathbf{X}$ è compatto. Ogni punto di F è punto di massimo per f.

La dimostrazione dell'esistenza di minimo per funzioni reali semicontinue inferiormente è analoga.

Osservazione In particolare: *Ogni funzione continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ su uno spazio compatto $\mathbf{X}$ ammette massimo e minimo.*

Teorema 1.5 *Compatti disgiunti di uno spazio di Hausdorff ammettono intorni disgiunti.*

Ogni compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.

Ogni spazio di Hausdorff compatto è normale.

Dim. Siano A e B due compatti disgiunti di uno spazio di Hausdorff $\mathbf{X}$. Per ogni $x \in A$ e $y \in B$ possiamo trovare un intorno aperto $U(x, y)$ di x e un intorno aperto $V(x, y)$ di y in $\mathbf{X}$ tali che $U(x, y) \cap V(x, y) = \emptyset$. Fissato $y \in B$, gli aperti $\{U(x, y) \,|\, x \in A\}$ formano un ricoprimento aperto di A. Poiché A è compatto, possiamo trovare $x_1, ..., x_n \in A$ tali che

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} U(x_j, y) = G_y.$$

Poniamo

$$W(y) = \bigcap_{j=1}^{n} V(x_j, y).$$

Abbiamo $W(y) \cap G_y = \emptyset$ per ogni $y \in B$. Inoltre, $\{W(y)\}$ è un ricoprimento aperto di B e perciò, essendo B compatto, possiamo trovare $y_1, ..., y_m \in B$ tali che

$$W = \bigcup_{j=1}^{m} W(y_j) \supset B.$$

Allora

$$G = \bigcap_{j=1}^{m} G_{y_j}$$

è un intorno aperto di A disgiunto da W. Questo dimostra la prima affermazione del teorema.

Sia ora A un compatto di uno spazio di Hausdorff $\mathbf{X}$. Se $x \notin A$, poiché $\{x\}$ è un compatto disgiunto da A possiamo trovare un intorno aperto U di x disgiunto da A. Ciò dimostra che $X - A$ è aperto e quindi che A è chiuso.

Dalle prime due affermazioni del teorema segue immediatamente che uno spazio di Hausdorff compatto è normale.

Teorema 1.6 *Se $\mathbf{X} = (X, \tau)$ è uno spazio compatto che soddisfa l'assioma di separazione T_1, ogni suo ricoprimento fondamentale numerabile ammette un sottoricoprimento finito.*

Dim. Sia $\Gamma = \{A_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ un ricoprimento fondamentale numerabile di X. Se X non fosse ricoperto da una sottofamiglia finita di sottoinsiemi di Γ, potremmo trovare una successione x_n di elementi di X tali che

$$x_n \notin \bigcup_{j=0}^{n} A_j.$$

Sia $K = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Questo insieme contiene infiniti punti ed è chiuso perché la sua intersezione con ogni elemento del ricoprimento fondamentale Γ è finita e quindi chiusa perché $\mathbf{X}$ soddisfa T_1. Dunque K è compatto perché sottospazio chiuso di uno spazio compatto. D'altra parte ogni sottoinsieme di K interseca ciascuno degli A_n in un numero finito di punti: quindi è chiuso e la topologia di K come sottospazio di $\mathbf{X}$ è la topologia discreta. Abbiamo così ottenuto una contraddizione, perché uno spazio topologico compatto con la topologia discreta contiene al più un numero finito di punti.

Teorema 1.7 (Teorema di Alexander) *Sia $\mathbf{X}$ uno spazio topologico e sia Γ una prebase degli aperti della topologia di $\mathbf{X}$. Allora $\mathbf{X}$ è compatto se e soltanto se ogni ricoprimento $\Delta \subset \Gamma$ ammette un sottoricoprimento finito.*

Dim. La condizione è ovviamente necessaria. Per dimostrare la sufficienza ragioniamo per assurdo. Se $\mathbf{X}$ non è compatto, la famiglia $\mathcal{G}$ dei ricoprimenti aperti di X che non ammettono sottoricoprimenti finiti è non vuota. Essa è parzialmente ordinata mediante inclusione ed è induttiva: se $\{\Delta_j \,|\, j \in J\}$ è una sottofamiglia totalmente ordinata[7] di $\mathcal{G}$, allora $\Delta = \bigcup_{j \in J} \Delta_j$ è ancora un elemento di $\mathcal{G}$. Se non lo fosse, infatti, si potrebbero trovare un numero finito di aperti $A_1, ..., A_n \in \Delta$ tali che $X = \bigcup_{h=1}^{m} A_h$. Se $A_h \in \Delta_{j_h}$, allora $\{A_1, ..., A_n\} \subset \Delta_\ell$ con $\ell = \max\{j_1, ..., j_n\}$ contraddice $\Delta_\ell \in \mathcal{G}$.

Per il Lemma di Zorn[8] la famiglia $\mathcal{G}$ possiede un elemento massimale Δ. Abbiamo $\bigcup \Delta = X$ e per la massimalità di Δ, se A è un qualsiasi aperto di $\mathbf{X}$ che non appartenga a Δ, $\Delta \cup \{A\}$ ammette un sottoricoprimento finito.

Osserviamo che $\Gamma \cap \Delta$ non può essere un ricoprimento di X perché tutti i ricoprimenti contenuti in Γ ammettono un sottoricoprimento finito. Sia quindi

[7] Ciò significa che J è un insieme totalmente ordinato rispetto a una relazione d'ordine $<$ e che $\Delta_{j_1} \subset \Delta_{j_2}$ se $j_1 < j_2$.

[8] Il lemma di Zorn è equivalente all'assioma della scelta e al principio del buon ordinamento. Esso si enuncia nel modo seguente: *Sia E un insieme non vuoto, con una relazione di ordine parziale rispetto alla quale ogni suo sottoinsieme totalmente ordinato ammetta un maggiorante. (Un insieme parzialmente ordinato con questa proprietà si dice induttivo). Allora E contiene un elemento massimale, cioè un elemento che non precede nessun altro elemento distinto da esso.*

$x \in X \setminus \cup(\Gamma \cap \Delta)$ e sia A un elemento di Δ che contenga x. Poiché Γ è una prebase, potremo trovare $B_1, ..., B_n \in \Gamma$ tali che

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} B_j \subset A.$$

Poiché $x \notin \cup(\Gamma \cap \Delta)$, nessuno dei B_j appartiene a Δ. Quindi, per ogni $j = 1, ..., n$ possiamo trovare un sottoinsieme finito Δ_j di Δ tale che

$$X = \left(\bigcup \Delta_j\right) \cup B_j.$$

Ma allora $\left(\bigcup_{j=1}^{n} \Delta_j\right) \cup \{A\}$ è un ricoprimento di X contenuto in Δ. Infatti

$$\begin{aligned} A \cup (\bigcup \Delta_1) \cup ... \cup (\bigcup \Delta_n) &\supset (B_1 \cap ... \cap B_n) \cup (\bigcup \Delta_1) \cup ... \cup (\bigcup \Delta_n) \\ &\supset \bigcap_{j=1}^{n} (B_j \cup (\bigcup \Delta_j)) = X. \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto una contraddizione. Il teorema è completamente dimostrato.

Esempio 1.3 *L'intervallo $I = [0, 1]$, con la topologia euclidea, è compatto.*
Osserviamo che

$$\Gamma = \{[0, a[\, | a \in]0, 1[\} \cup \{]a, 1] \,|\, a \in]0, 1[\}$$

è una prebase della topologia di I. Sia Δ un ricoprimento aperto di I contenuto in Γ. Sia α l'estremo superiore dell'insieme dei numeri reali $a \in]0, 1[$ tali che $[0, a[\in \Delta$ e β l'estremo inferiore dei numeri reali a tali che $]a, 1] \in \Delta$. Allora $\alpha > 0$ e $\beta < 1$. Se fosse $\beta \geq \alpha$, ci sarebbe un numero reale r con $\alpha \leq r \leq \beta$ e questo non potrebbe appartenere a $\bigcup \Delta$. È dunque $\beta < \alpha$ e quindi potremo trovare $0 < a_2 < a_1 < 1$ tali che $[0, a_1[$ e $]a_2, 1]$ appartengano a Δ. Essi formano un sottoricoprimento finito, formato da due elementi, di Δ.

Teorema 1.8 *L'immagine di un compatto mediante un'applicazione continua è un compatto.*

Dim. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$. Sia A un compatto di $\mathbf{X}$ e Γ un ricoprimento aperto di $f(A)$. Allora $\{f^{-1}(A) \,|\, A \in \Gamma\}$ è un ricoprimento aperto di A in $\mathbf{X}$. Poiché A è compatto, possiamo trovare $A_1, ..., A_n \in \Gamma$ tali che $\{f^{-1}(A_1), ..., f^{-1}(A_n)\}$ sia un ricoprimento di A. Allora $\{A_1, ..., A_n\} \subset \Gamma$ è un ricoprimento finito di $f(A)$.

Teorema 1.9 (Teorema di Tychonoff) *Un prodotto topologico di spazi topologici non vuoti è compatto se e soltanto se ciascuno dei fattori è compatto.*

Dim. Sia $\mathbf{X} = (X, \tau)$ il prodotto topologico della famiglia di spazi topologici non vuoti $\mathbf{X}_j = (X_j, \tau_j)$. Se $\mathbf{X}$ è compatto, ciascuno degli $\mathbf{X}_j$ è compatto perché immagine di $\mathbf{X}$ mediante l'applicazione continua $\pi_j : X \to X_j$. Per dimostrare la sufficienza della condizione, applichiamo il teorema di Alexander. Sia Γ la prebase di $\mathbf{X}$ formata dagli aperti $\pi_j^{-1}(A)$ al variare di $j \in J$ e di A tra gli aperti di $\mathbf{X}_j$. Sia $\Delta \subset \Gamma$ un ricoprimento di $\mathbf{X}$. Per ogni indice $j \in J$ poniamo

$$\Delta_j = \{\pi_j^{-1}(A) \,|\, A \in \tau_j\} \cap \Delta.$$

$$\Delta'_j = \{A \in \tau_j \,|\, \pi_j^{-1}(A) \in \Delta\}.$$

Supponiamo che per qualche indice $j \in J$ la famiglia di aperti Δ_j sia un ricoprimento di X. Allora Δ'_j è un ricoprimento aperto di X_j e per la compattezza di $\mathbf{X}_j$ potremo allora trovare $A_1, ..., A_n \in \Delta'_j$ tali che

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = X_j.$$

Allora

$$\bigcup_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(A_j) = X$$

e $\{\pi_j^{-1}(A_1), ..., \pi_j^{-1}(A_n)\}$ è un sottoricoprimento finito di X contenuto in Δ.

Se per nessun indice j la famiglia Δ_j ricopre X, allora potremo trovare un punto x in X tale che $x_j = \pi_j(x) \notin \bigcup \Delta'_j$ per ogni $j \in J$. Il punto x allora non appartiene a $\bigcup \Delta$ e quindi Δ non è un ricoprimento di X, contro l'ipotesi.

Esempio 1.4 *I sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}^n$ sono compatti.* Sono infatti compatti in $\mathbb{R}$ gli intervalli chiusi e limitati $[a, b]$ con $a < b$ reali. Un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio chiuso di un prodotto di intervalli chiusi e limitati e quindi un compatto perché sottoinsieme chiuso di un compatto.

§2 Compattezza e completezza negli spazi metrici

Sia $\mathbf{X} = (X, \tau)$ uno spazio topologico e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in X. Un elemento $L \in X$ si dice *limite* della successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, e si scrive

$$L \in \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n$$

se, per ogni intorno U di L in $\mathbf{X}$ possiamo trovare un numero naturale ν tale che

$$x_n \in U \quad \forall n \geq \nu.$$

Una successione che ammetta limite si dice *convergente*.

Se lo spazio topologico $\mathbf{X}$ è separato, una successione convergente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in $\mathbf{X}$ ammette un unico limite L, che si dice allora *il limite* della successione e si indica con

$$L = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n.$$

Uno spazio topologico $\mathbf{X}$ si dice *compatto per successioni* se da ogni successione a valori in X se ne può estrarre[9] una convergente.

[9]Se $\{x_n\}$ è una successione a valori in un insieme X, si dice *estratta* da essa ogni successione $\{y_n\}$ tale che risulti $y_n = x_{k_n}$ per una successione crescente $\{k_n\}$ di numeri naturali.

Teorema 2.1 *Ogni spazio topologico compatto che soddisfi il primo assioma di numerabilità è compatto per successioni.*

Dim. Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio topologico compatto e sia $\{x_n\}$ una successione a valori in X. Per ogni numero naturale n indichiamo con F_n la chiusura in $\mathbf{X}$ dell'insieme $\{x_m \mid m \geq n\}$. La famiglia di chiusi F_n ha la proprietà dell'intersezione finita e quindi ha intersezione non vuota

$$F = \cap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$

Sia $L \in F$. Poiché $\mathbf{X}$ soddisfa il primo assioma di numerabilità, possiamo trovare un sistema fondamentale di intorni numerabile $\{U_n\}$ di L in $\mathbf{X}$. A meno di sostituire ad U_n l'intorno $\bigcap_{m \leq n} U_m$ di L, possiamo supporre che $U_n \supset U_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Costruiamo una successione estratta dalla $\{x_n\}$ che converge a L ponendo

$$\begin{cases} k_0 = \min\{m \mid x_m \in A_0\} \\ k_{n+1} = \min\{m > k_n \mid x_m \in A_{n+1}\} \text{ se } n \geq 0. \end{cases}$$

Supponiamo che $\mathbf{X}$ sia metrizzabile e sia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una distanza che definisce la topologia di $\mathbf{X}$. In questo caso il limite L di una successione convergente $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a valori in X si caratterizza mediante la proprietà:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad d(x_n, L) < \epsilon \quad \forall n \geq \nu.$$

Una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a valori in uno spazio metrico (X, d) si dice *di Cauchy* se soddisfa la condizione:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \forall n, m \geq \nu.$$

Ogni successione convergente a valori in uno spazio metrico è di Cauchy.

Uno spazio metrico in cui tutte le successioni di Cauchy siano convergenti si dice *completo.*

Osservazione Un sottospazio chiuso di uno spazio metrico completo è completo.

Esempio 2.1 La completezza è una proprietà metrica e non topologica. Ad esempio, la metrica euclidea

$$d(x, y) = |x - y| \quad \text{per } x, y \in \mathbb{R}$$

e la metrica

$$d'(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right| \quad \text{per } x, y \in \mathbb{R}$$

definiscono entrambe la topologia euclidea su $\mathbb{R}$. La retta reale $\mathbb{R}$ è completa rispetto alla metrica euclidea, ma non lo è rispetto alla metrica d' in quanto la successione $\{n\}$ è di Cauchy rispetto a d', ma non è convergente.

Esempio 2.2 Sia $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$. Con la metrica euclidea di $\mathbb{C}$, il disco Δ non è uno spazio metrico metrico completo. Esso diviene uno spazio metrico completo con la metrica definita dalla distanza

$$d(z, w) = \operatorname{arcth}\left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = \frac{1}{2}\log\frac{|1-z\bar{w}|+|z-w|}{|1-z\bar{w}|-|z-w|}$$

(*distanza iperbolica del disco*).[10]

Uno spazio metrico (X, d) si dice *totalmente limitato* se per ogni $\epsilon > 0$ esso può essere ricoperto da un numero finito di palle aperte di raggio ϵ.

Uno spazio metrico totalmente limitato è limitato.

L'esempio 2.1 mostra che in generale non è vero il viceversa.

La compattezza negli spazi metrici si caratterizza per mezzo del seguente

Teorema 2.2 *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\mathbf{X}$ lo spazio topologico che si ottiene considerando su X la topologia definita dalla distanza d. Sono allora equivalenti:*

(1) $\mathbf{X}$ è *compatto.*
(2) (X, d) è *completo e totalmente limitato.*
(3) $\mathbf{X}$ è *compatto per successioni.*

Dim. (1)⇒(2). Fissiamo un qualsiasi numero reale positivo ϵ. Allora $\Gamma = \{B_d(x, \epsilon)\}$ è un ricoprimento aperto di X. Se $\mathbf{X}$ è compatto, Γ ammette un sottoricoprimento finito e dunque X è ricoperto da un numero finito di palle aperte di raggio ϵ.

Sia ora $\{x_n\}$ una successione di Cauchy a valori in X. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia F_n la chiusura dell'insieme $\{x_j \,|\, j \geq n\}$. La famiglia di chiusi $\{F_n\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita e quindi, poiché $\mathbf{X}$ è compatto,

$$F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Dico che, se $L \in F$, allora

$$L = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n.$$

Sia infatti $\epsilon > 0$ un qualsiasi numero reale positivo. Potremo allora trovare $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(x_n, x_m) < \epsilon/2 \quad \text{se } m, n \geq \nu.$$

Abbiamo $B_d(L, \epsilon/2) \cap F_\nu \neq \emptyset$ e quindi possiamo trovare un $m \geq \nu$ tale che

$$d(L, x_m) < \epsilon/2.$$

Abbiamo allora

$$d(L, x_n) \leq d(L, x_m) + d(x_m, x_n) < \epsilon \quad \forall n \geq \nu.$$

[10] È la distanza associata alla metrica di Poincaré $ds^2 = \dfrac{dz\, d\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}$.

Questo dimostra che $\{x_n\}$ converge a L.

(2)⇒(3) Supponiamo che (X, d) sia completo e totalmente limitato. Sia $\{x_n\}$ una successione a valori in X. Per ogni n sia Δ_n un ricoprimento finito di X con palle aperte di raggio 2^{-n}.

Dimostriamo per ricorrenza che è possibile trovare una successione $\{y_n\}$ a valori in X tale che

$$(*) \qquad \begin{cases} d(y_n, y_{n-1}) < 2^{1-n} \text{ se } n > 0 \\ x_m \in B_d(y_n, 2^{-n}) \quad \text{per infiniti indici} \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Infatti, poiché Δ_0 è finito, uno dei suoi elementi contiene x_m per infiniti indici $m \in \mathbb{N}$. Scegliamo quindi y_0 in modo che $B_d(y_0, 1) \in \Delta_0$ contenga x_m per infiniti indici m. Supponiamo di aver costruito $y_0, ..., y_n$ in modo che valgano le $(*)$. Allora $B_d(y_n, 2^{-n})$ è ricoperta da un numero finito di palle aperte di Δ_{n+1}. Una di queste, diciamo $B_d(y_{n+1}, 2^{-(n+1)})$, avrà intersezione non vuota con $B_d(y_n, 2^{-n})$ e conterrà x_m per infiniti indici $m \in \mathbb{N}$. Chiaramente

$$d(y_n, y_{n+1}) < 2^{-n} + 2^{-(n+1)} < 2^{1-n}$$

perché le due palle hanno intersezione non vuota.

Costruiamo la successione estratta $\{x_{k_n}\}$ per ricorrenza, ponendo

$$\begin{aligned} k_0 &= \min\{n \mid x_n \in B_d(y_0, 1)\} \\ k_{n+1} &= \min\{n \mid n > k_n, \quad x_n \in B_d(y_{n+1}, 2^{-(n+1)})\}. \end{aligned}$$

Se $n < m$ abbiamo

$$\begin{aligned} d(x_{k_n}, x_{k_m}) &\leq d(x_n, y_n) + \textstyle\sum_{j=n}^{m-1} d(y_j, y_{j+1}) + d(y_m, x_m) \\ &< 2^{-n} + \textstyle\sum_{j=n}^{m-1} 2^{j-1} + 2^{-m} < 12 \cdot 2^{-n} \end{aligned}$$

e quindi la $\{x_{k_n}\}$ è una successione di Cauchy. Poiché per ipotesi (X, d) è completo, essa è convergente. Questo dimostra che la (2) implica la compattezza per successioni.

(3)⇒(1) Dimostriamo innanzi tutto che **X** è totalmente limitato. Se non lo fosse, potremmo trovare $\epsilon > 0$ tale che non sia possibile ricoprire X con palle aperte di raggio ϵ. Fissato un punto $x_0 \in X$, potremmo allora costruire per ricorrenza una successione $\{x_n\}$ tale che

$$x_{n+1} \notin \bigcup_{j=0}^{n} B_d(x_j, \epsilon) \quad \text{se} \quad n \geq 0.$$

Avremmo allora $d(x_m, x_n) \geq \epsilon$ se $m \neq n \in \mathbb{N}$ e da questa successione non se ne potrebbe estrarre una convergente.

Se (X, d) è totalmente limitato, allora **X** è separabile: sia infatti Δ_n, per ogni $n \in \mathbb{N}$, un ricoprimento finito di X con palle aperte di raggio 2^{-n}. Per ogni n sia F_n l'insieme formato dai centri delle palle in Δ_n. Allora F_n è un insieme finito e

$$D = \cup_{n=0}^{\infty} F_n$$

è un sottoinsieme denso e numerabile di X. Poiché $\mathbf{X}$ è metrizzabile, questa proprietà equivale al secondo assioma di numerabilità. In particolare, se Γ è un ricoprimento aperto di X, esso ammette un sottoricoprimento numerabile. Sia dunque $\{A_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$ un ricoprimento numerabile di X. Se esso non ammettesse sottoricoprimenti finiti, potremmo trovare una successione $\{x_n\}$ a valori in X tale che

$$x_n \notin \bigcup_{j=0}^{n} A_n.$$

Ma dalla $\{x_n\}$ non si potrebbe estrarre allora nessuna sottosuccessione convergente.

§3 Alcuni esempi ed applicazioni

Teorema 3.1 *ℓ_2 è uno spazio metrico completo.*

Dim. Sia $\{a^{(n)}\}$ una successione di Cauchy in ℓ_2. Per ogni indice $0 \leq j < \infty$ la successione di numeri reali $\{a_j^{(n)}\}$ è di Cauchy e quindi converge a un numero reale L_j. Vogliamo dimostrare che

$$L = (L_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_2 \quad \text{e che} \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} a^{(n)} = L.$$

Fissato $\epsilon > 0$, sia ν un numero naturale tale che

$$d(a^{(m)}, a^{(n)}) < \epsilon/8 \quad \forall m, n \geq \nu.$$

Sia $\mu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{j=\mu}^{\infty} \left|a_j^{(\nu)}\right|^2 < \frac{\epsilon}{64}.$$

Allora, per ogni intero positivo h, e per ogni $n \geq \nu$,

$$\begin{aligned}\left(\textstyle\sum_{j=\mu}^{\mu+h} \left|a_j^{(n)}\right|^2\right)^{1/2} &\leq \left(\textstyle\sum_{j=\mu}^{\mu+h} \left|a_j^{(n)} - a_j^{(\nu)}\right|^2\right)^{1/2} + \left(\textstyle\sum_{j=\mu}^{\mu+h} \left|a_j^{(\nu)}\right|^2\right)^{1/2} \\ &< \epsilon/8 + \epsilon/8 = \epsilon/4.\end{aligned}$$

Passando al limite in questa espressione troviamo che

$$\sum_{j=\mu}^{\mu+h} L_j^2 \leq \epsilon^2/16 \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$\sum_{j=\mu}^{\infty} L_j^2 \leq \epsilon^2/16.$$

Da questo ricaviamo innanzi tutto che $L \in \ell_2$.

Abbiamo inoltre

$$\sum_{j=\mu}^{\infty} \left|a_j^{(n)}\right|^2 \leq \epsilon^2/16 \quad \text{per } n \geq \nu.$$

Possiamo poi trovare $\nu' \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{j=0}^{\mu-1} \left| L_j - a_j^{(n)} \right|^2 < \epsilon^2/16 \quad \text{se } n \geq \nu'.$$

Allora per $n \geq \max\{\nu, \nu'\}$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left| L_j - a_j^{(n)} \right|^2 \right)^{1/2} &\leq \left(\sum_{j=0}^{\mu-1} \left| L_j - a_j^{(n)} \right|^2 \right)^{1/2} \\ &+ \left(\sum_{j=\mu}^{\infty} L_j^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{j=\mu}^{\infty} \left| a_j^{(n)} \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \tfrac{3\epsilon}{4} < \epsilon. \end{aligned}$$

Questo dimostra che L è il limite della successione $\{a^{(n)}\}$.

Teorema 3.2 (Fréchet-Kolmogorov) *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sottoinsieme A di ℓ_2 sia relativamente compatto è che*

$$(*) \qquad \begin{cases} A \quad \text{sia limitato} \\ \forall \epsilon > 0 \; \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \sum_{n=\nu}^{\infty} |a_n|^2 < \epsilon^2 \quad \forall a = (a_n) \in A. \end{cases}$$

Dim. Se $\overline{A}$ è compatto, esso è limitato e totalmente limitato. Potremo dunque trovare elementi $a^1, ..., a^N$ di ℓ_2 tali che

$$\overline{A} \subset \cup_{j=1}^{N} B(a^j, \epsilon/2).$$

Possiamo fissare un intero positivo ν tale che

$$\sum_{j=\nu}^{\infty} |a_j^r|^2 < \epsilon^2/4 \quad \text{per } 1 \leq r \leq N.$$

Quindi, se $a \in \overline{A}$, abbiamo

$$\left(\sum_{j=\nu}^{\infty} |a_j|^2 \right)^{1/2} \leq \min_{1 \leq r \leq N} \|a - a^r\| + \max_{1 \leq r \leq N} \left(\sum_{j=\nu}^{\infty} |a_j^r|^2 \right)^{1/2} < \epsilon.$$

Le condizioni $(*)$ sono quindi necessarie.

Supponiamo ora che l'insieme A soddisfi le $(*)$. Dimostriamo in primo luogo che allora $\overline{A}$ è totalmente limitato. Fissato $\epsilon > 0$ possiamo trovare $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{j=\nu}^{\infty} |a_j|^2 < \epsilon^2/16 \quad \forall a \in A.$$

Da questa disuguaglianza segue che

$$\sum_{j=\nu}^{\infty} |a_j|^2 \leq \epsilon^2/16 \quad \forall a \in \overline{A}.$$

L'applicazione

$$\pi : \ell_2 \ni a \to (a_0, ..., a_{\nu-1}) \in \mathbb{R}^\nu$$

trasforma insiemi limitati in insiemi limitati. In particolare $\pi(\overline{A})$ è limitato e quindi relativamente compatto in $\mathbb{R}^\nu$. In particolare $\pi(\overline{A})$ è totalmente limitato in $\mathbb{R}^\nu$ e potremo dunque trovare $a^1, ..., a^N \in \overline{A}$ tali che

$$\pi(\overline{A}) \subset \cup_{j=1}^N \{x \in \mathbb{R}^\nu \mid |\pi(a^j) - x| < \epsilon/2\}.$$

Se $a \in \overline{A}$ avremo allora

$$\begin{aligned}\min_{1\le j\le N} \|a - a^j\| \le \min_{1\le j\le N} |\pi(a) - \pi(a^j)| + \left(\textstyle\sum_{h=\nu}^\infty |a_h|^2\right)^{1/2} \\ + \max_{1\le j\le N} \left(\textstyle\sum_{h=\nu}^\infty |a_h^j|^2\right)^{1/2} < \epsilon.\end{aligned}$$

Poiché ℓ_2 è completo, $\overline{A}$ è anch'esso completo ed essendo totalmente limitato è compatto.

Siano $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ e $\mathbf{Y} = (Y, \tau_Y)$ due spazi topologici. Indichiamo con $\mathcal{C}(X, Y)$ l'insieme di tutte le applicazioni continue $f : X \to Y$.

Lemma 3.3 *Sia* $\mathbf{X}$ *uno spazio compatto e* (Y, d) *uno spazio metrico. Allora*

$$\boldsymbol{d} : \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Y) \ni (f, g) \to \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)) \in \mathbb{R}$$

è una distanza su $\mathcal{C}(X, Y)$.

Dim. Osserviamo che se $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$, allora la funzione

$$X \ni x \to d(f(x), g(y)) \in \mathbb{R}$$

è continua e quindi ammette massimo per il teorema di Weierstrass. Perciò la funzione $\boldsymbol{d} : \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Y) \to \mathbb{R}$ è ben definita. Si verifica facilmente che essa definisce una distanza su $\mathcal{C}(X, Y)$.

Indichiamo con $\mathcal{C}_u(X, Y)$ l'insieme delle funzioni continue dallo spazio compatto X allo spazio metrico Y con la distanza definita nel lemma precedente.

Teorema 3.4 *Se* $\mathbf{X}$ *è uno spazio compatto ed* (Y, d) *uno spazio metrico completo, allora* $\mathcal{C}_u(X, Y)$ *è uno spazio metrico completo.*

Dim. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy a valori in $\mathcal{C}_u(X, Y)$. Per ogni $x \in X$ fissato, la successione $\{f_n(x)\}$ è una successione di Cauchy a valori in Y. Poiché (Y, d) è completo, essa ha limite in Y. Indichiamo con $f(x)$ il valore del limite:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in X.$$

Fissiamo $\epsilon > 0$ e sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\boldsymbol{d}(f_n, f_m) < \epsilon/2 \quad \forall n, m \ge \nu.$$

Per ogni $x \in X$ abbiamo allora

$$d(f(x), f_n(x)) = \lim_{m \to \infty} d(f_m(x), f_n(x)) \leq \epsilon/2 < \epsilon \quad \forall n \geq \nu.$$

Quindi: per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare un intero ν tale che

$$\sup_{x \in X} d(f(x), f_n(x)) < \epsilon \quad \forall n \geq \nu.$$

Per completare la dimostrazione, basterà allora dimostrare che $f \in \mathcal{C}_u(X, Y)$.

Fissiamo $x_0 \in X$ ed $\epsilon > 0$. Sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sup_{x \in X} d(f(x), f_n(x)) < \epsilon/3 \quad \forall n \geq \nu.$$

Poiché f_ν è continua, possiamo trovare un intorno aperto U di x_0 in $\mathbf{X}$ tale che

$$d(f_\nu(x_0), f_\nu(x)) < \epsilon/3 \quad \forall x \in U.$$

Abbiamo allora

$$d(f(x_0), f(x)) \leq d(f(x_0), f_\nu(x_0)) + d(f_\nu(x_0), f_\nu(x)) + d(f_\nu(x), f(x)) < \epsilon \quad \forall x \in U.$$

Quindi $f \in \mathcal{C}_u(X, Y)$. La dimostrazione è completa.

Un sottoinsieme $\mathcal{F}$ di $\mathcal{C}_u(X, Y)$ si dice *equicontinuo* se, per ogni $x_0 \in X$ ed ogni $\epsilon > 0$, possiamo trovare un intorno aperto U di x_0 in X tale che

$$d(f(x_0), f(x)) < \epsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in U.$$

Esso si dice *equilimitato* se per ogni $x \in X$ l'insieme $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ è totalmente limitato in Y.

Teorema 3.5 (Teorema di Ascoli-Arzelà) *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio compatto e (Y, d) uno spazio metrico completo. Condizione necessaria e sufficiente affinché un sottoinsieme $\mathcal{F}$ di $\mathcal{C}_u(X, Y)$ sia relativamente compatto è che esso sia equicontinuo ed equilimitato.*

Dim. Possiamo supporre nella dimostrazione che $\mathcal{F}$ sia un sottoinsieme chiuso di $\mathcal{C}_u(X, Y)$. Infatti la chiusura di un sottoinsieme equilimitato è equilimitata e la chiusura di un sottoinsieme equicontinuo è equicontinua.

Dimostriamo innanzi tutto che le condizioni del teorema sono necessarie. Supponiamo che $\mathcal{F}$ sia compatto. Esso è limitato perché i compatti degli spazi metrici sono limitati. Fissiamo ora $\epsilon > 0$. Poiché $\mathcal{F}$ è totalmente limitato, possiamo trovare $f_1, ..., f_N \in \mathcal{F}$ tali che

$$\mathcal{F} \subset \cup_{j=1}^N B_{\boldsymbol{d}}(f_j, \epsilon/3).$$

Se $x_0 \in X$, poniamo

$$U = \cap_{j=1}^N \{x \in X \mid d(f_j(x), f_j(x_0)) < \epsilon/3\}.$$

Poiché le funzioni f_j sono continue, U è un intorno aperto di x_0 in $\mathbf{X}$. Sia $f \in \mathcal{F}$. Fissiamo un indice j con $1 \le j \le N$ tale che $\boldsymbol{d}(f, f_j) < \epsilon/3$. Allora, per ogni $x \in U$, abbiamo:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\le d(f(x), f_j(x)) \\ &\quad + d(f_j(x), f_j(x_0)) + d(f_j(x_0), f(x_0)) \\ &\le 2\boldsymbol{d}(f, f_j) + d(f_j(x), f_j(x_0)) < \epsilon. \end{aligned}$$

Questo dimostra che la condizione è necessaria.

Per dimostrare la sufficienza, poiché un sottospazio chiuso di uno spazio metrico completo è completo, è sufficiente dimostrare che $\mathcal{F}$ è totalmente limitato. Fissiamo $\epsilon > 0$. Per ogni $x_0 \in X$ sia U_{x_0} un intorno aperto di x_0 in $\mathbf{X}$ tale che

$$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon/4 \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in U_{x_0}.$$

Poiché $\mathbf{X}$ è compatto, possiamo trovare un insieme finito di punti $x_1, ..., x_N \in X$ tali che $\{U_{x_j} \mid 1 \le j \le N\}$ sia un ricoprimento di $\mathcal{F}$.

Consideriamo l'applicazione

$$\phi : \mathcal{C}_u(X, Y) \ni f \to (f(x_1), ..., f(x_N)) \in Y^N.$$

Essa è continua. Inoltre $\phi(\mathcal{F})$ è totalmente limitato in Y^N.

Possiamo quindi trovare un numero finito di elementi $f_1, ..., f_M$ di $\mathcal{F}$ tali che

$$\mathcal{F} \subset \cup_{h=1}^{M} \{f \in \mathcal{C}_u(X, Y) \mid d(f(x_j), f_h(x_j)) < \epsilon/4 \text{ per } 1 \le j \le N\}.$$

Sia ora $f \in \mathcal{F}$ e $x \in X$. Fissiamo $1 \le h \le N$ tale che $d(f(x_j), f_h(x_j)) < \epsilon/4$ per $1 \le j \le N$. Sia $x \in X$. È $x \in U_{x_j}$ per qualche $1 \le j \le N$ e dunque

$$d(f(x), f_h(x)) \le d(f(x), f(x_j)) + d(f(x_j), f_h(x_j)) + d(f_h(x_j), f_h(x)) < (3/4)\epsilon.$$

Ne segue che $\boldsymbol{d}(f, f_h) \le (3/4)\epsilon < \epsilon$ e questo dimostra che $\mathcal{F}$ è totalmente limitato.

§4 Isometrie, contrazioni, completamento di uno spazio metrico

Siano (X, d) e (Y, δ) due spazi metrici. Un'applicazione $\phi : X \to Y$ si dice un'*isometria* se

$$\delta(\phi(x_1), \phi(x_2)) = d(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X,$$

una *contrazione* se

$$\delta(\phi(x_1), \phi(x_2)) \le d(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Un *completamento* di uno spazio metrico (X, d) è il dato di uno spazio metrico completo (Y, δ) e di un'isometria

$$\phi : X \to Y,$$

tale che $\phi(X)$ sia denso in Y per la topologia indotta dalla distanza.

Teorema 4.1 *Ogni spazio metrico (X, d) ammette un completamento.*

Sia (Y, δ) un completamento di (X, d) e $\phi : X \to Y$ l'isometria di X nel suo completamento. Per ogni spazio metrico completo (Z, η) ed ogni contrazione

$f : X \to Z$ vi è un'unica applicazione continua $\tilde{f} : Y \to Z$ che renda commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ f\ } & Z \\ {\scriptstyle\phi}\Big\downarrow & & \Big\| \\ Y & \xrightarrow{\ \tilde{f}\ } & Z \end{array}$$

La $\tilde{f} : Y \to Z$ è ancora una contrazione.

Se f è un'isometria, anche $\tilde{f}$ è un'isometria.

Dim. Sia (X, d) uno spazio metrico. Indichiamo con $\mathfrak{X}$ l'insieme di tutte le successioni di Cauchy di (X, d). Introduciamo su $\mathfrak{X}$ la relazione di equivalenza:

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad d(x_n, y_n) < \epsilon \quad \forall n \geq \nu.$$

Se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono due successioni di Cauchy a valori in X, poniamo

$$\tilde{\delta}(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n).$$

Tale limite esiste in quanto $\{d(x_n, y_n)\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$: infatti, fissato $\epsilon > 0$, possiamo trovare $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(x_m, x_n) < \epsilon/2 \quad \text{e} \quad d(y_m, y_n) < \epsilon/2 \quad \forall m, n \geq \nu.$$

Allora

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) < \epsilon \quad \forall m, n \geq \nu.$$

Osserviamo ora che $\tilde{\delta}(\{x_n\}, \{y_n\}) \geq 0$ e che $\tilde{\delta}(\{x_n\}, \{y_n\}) = 0$ se e soltanto se $\{x_n\} \sim \{y_m\}$ per la definizione della relazione di equivalenza. Inoltre, se $\{x'_n\} \sim \{x_n\}$ e $\{y'_n\} \sim \{y_n\}$, abbiamo

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) - d(y_n, y'_n) - d(x'_n, x_n) \leq d(x'_n, y'_n) \leq {} & d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) \\ & + d(y_n, y'_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

e quindi

$$\tilde{\delta}(\{x'_n\}, \{y'_n\}) = \tilde{\delta}(\{x_n\}, \{y_n\}).$$

Possiamo quindi definire una distanza δ sul quoziente $Y = \mathfrak{X}/_\sim$ ponendo

$$\delta([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = \tilde{\delta}(\{x_n\}, \{y_n\})$$

se $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sono due successioni di Cauchy a valori in X e $[\{x_n\}]$, $[\{y_n\}]$ le rispettive classi di equivalenza in Y.

Facendo corrispondere a $x \in X$ la classe di equivalenza della successione costante $x_n = x \quad \forall n \in \mathbb{N}$, otteniamo un'isometria $\phi : X \to Y$.

Dico che $\phi(X)$ è denso in Y. Se infatti $y \in Y$ è la classe di equivalenza della successione di Cauchy $\{x_n\} \subset X$, allora $\{\phi(x_n)\}$ è una successione a valori in $\phi(X)$

che converge a y: per dimostrare questo fatto, fissato un qualsiasi numero reale positivo ϵ, scegliamo $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(x_m, x_n) < \epsilon/2 \quad \forall m, n \geq \nu.$$

Allora

$$\delta(\phi(x_m), y) = \lim_{n \to \infty} d(x_m, x_n) \leq \epsilon/2 < \epsilon \quad \forall m \geq \nu.$$

Dimostriamo che (Y, δ) è completo. Sia $\{y_n\}$ una successione di Cauchy a valori in Y. Poiché $\phi(X)$ è denso in Y, per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo trovare $x_n \in X$ tale che

$$\delta(\phi(x_n), y_n) < 2^{-n}.$$

La successione $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy a valori in X. Infatti

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= \delta(\phi(x_m), \phi(x_n)) \\ &\leq \delta(\phi(x_m), y_m) + \delta(y_m, y_n) + \delta(y_n, \phi(x_n)) \\ &\leq \delta(y_m, y_n) + 2^{-m} + 2^{-n} \\ &\qquad \forall m, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Quindi, fissato $\epsilon > 0$, se $\nu \in \mathbb{N}$ è tale che

$$2^{-n} < \epsilon/3 \quad \forall n \geq \nu, \qquad \delta(y_m, y_n) < \epsilon/3 \quad \forall m, n \geq \nu,$$

abbiamo

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \quad \forall m, n \geq \nu.$$

Questo dimostra che $\{x_n\}$ è di Cauchy. Inoltre la successione $\{y_n\}$ converge alla classe di equivalenza $[\{x_n\}]$. Infatti abbiamo:

$$\begin{aligned} \delta(y_m, [\{x_n\}]) &\leq \delta(y_m, \phi(x_m)) + \delta(\phi(x_m), [\{x_n\}]) \\ &\leq 2^{-m} + \lim_{n \to \infty} d(x_m, x_n); \end{aligned}$$

quindi, fissato $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$2^{-n} < \epsilon/2 \quad \forall n \geq \nu, \qquad d(x_m, x_n) < \epsilon/2 \quad \forall m, n \geq \nu,$$

otteniamo

$$\delta(y_m, [\{x_n\}]) < \epsilon \quad \forall m \geq \nu.$$

Se $f : X \to Z$ è una contrazione, essa trasforma successioni di Cauchy a valori in X in successioni di Cauchy a valori in Z. Sia (Y, δ) uno spazio metrico completo e $\phi : X \to Y$ un completamento di X. Poiché $\phi(X)$ è denso in Y, per ogni $y \in Y$ possiamo trovare una successione $\{x_n\} \subset X$ tale che $y = \lim_{n \to \infty} \phi(x_n)$. Poiché ϕ è un'isometria, $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in (X, d) e quindi $\{f(x_n)\}$ è una successione di Cauchy in (Z, η). Essa ammette limite perché (Z, η) è completo. Osserviamo che, se $\{x'_n\} \subset X$ è un'altra successione tale che $y = \lim_{n \to \infty} \phi(x'_n)$, allora $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ e

$$\lim_{n \to \infty} f(x'_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n).$$

Possiamo perciò definire senza ambiguità

$$\tilde{f}(y) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n).$$

Si verifica immediatamente che la $\tilde{f}$ è l'applicazione cercata. Essa è univocamente determinata perché è continua ed è univocamente determinata sul sottoinsieme denso $\phi(X)$ di Y.

L'ultima affermazione del teorema si verifica in modo ovvio.

Osservazione Il completamento di uno spazio metrico è essenzialmente unico: se infatti $\phi : X \to Y$ e $\psi : X \to Z$ sono due completamenti dello spazio metrico (X, d) in spazi metrici (Y, δ) e (Z, η), risultano definite, per l'ultima parte del teorema precedente, due isometrie

$$\tilde{\psi} : Y \to Z \quad \text{e} \quad \tilde{\phi} : Z \to Y$$

che rendono commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\tilde{\psi}"] & Z \\
X \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, equal] \arrow[d, "\psi"'] & X \arrow[u, "\psi"'] \arrow[d, "\phi"] \\
Z \arrow[r, "\tilde{\phi}"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

In particolare le $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ sono una l'inversa dell'altra e quindi (Y, δ) e (Z, η) sono isometrici.

Esempio 4.1 Sia $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che si annullano fuori da un compatto di $\mathbb{R}$. Allora

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx$$

è una norma su $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Con la distanza d definita da questa norma, $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ non è completo. Consideriamo ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - x^2 \text{ se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ se } x \geq 1. \end{cases}$$

Allora $\{f^{1/(n+1)}\}$ è una successione di Cauchy per la distanza d, ma non ammette limite in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Il completamento di $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ rispetto alla distanza d si indica con $L^2(\mathbb{R})$ e si dice *lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile su* $\mathbb{R}$.

§5 Secondo teorema di immersione

Per il teorema di Tychonoff, se J è un insieme qualsiasi, l'insieme I^J di tutte le applicazioni di J in I, con la topologia prodotto, è uno spazio compatto. Chiameremo un tale spazio topologico un *cubo di Tychonoff.*

Lemma 5.1 *Sia* $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ *uno spazio topologico, sia* $\{\mathbf{Y}_j = (Y_j, \tau_j) \,|\, j \in J\}$ *una famiglia di spazi topologici e* $\mathbf{Y} = (Y, \tau_y)$ *il loro prodotto topologico. Sia*

$$f : X \to Y$$

un'applicazione continua e indichiamo con $f_j : X \to Y_j$ *l'applicazione continua:*

$$f_j : X \ni x \to \pi_j \circ f(x) \in Y_j.$$

Se per ogni chiuso $A \subset X$ *ed ogni* $x \in X \setminus A$ *esiste un indice* $j \in J$ *tale che* $f_j(x) \notin \overline{f_j(A)}$, *allora* $f|_X^{f(X)} : X \to f(X)$ *è aperta.*

In particolare, se f *soddisfa questa condizione ed è inoltre iniettiva, essa è un'immersione topologica.*

Dim. Sia U un aperto non vuoto di $\mathbf{X}$. Se $x \in U$, possiamo trovare $j \in J$ tale che $f_j(x) \notin \overline{f_j(X \setminus U)}$. Quindi

$$Y \setminus \pi_j^{-1}(\overline{f_j(X \setminus U)} \cap f(X) \subset f(U)$$

è un intorno aperto di $f(x)$ in $f(U)$. Quindi $f(U)$ è aperto in $f(X)$ perché è intorno di ogni suo punto.

Teorema 5.2 *Ogni spazio di Tychonoff ammette un'immersione topologica in un prodotto topologico* I^J.

Dim. Sia J l'insieme di tutte le applicazioni continue $f : X \to I$ dello spazio di Tychonoff $\mathbf{X}$ nell'intervallo $I = [0, 1]$. Per il lemma precedente, l'applicazione

$$f : X \to I^J$$

definita da $f_j(x) = j(x)$ per ogni $j \in J$ è un'immersione topologica.

§6 Compattificazione di Stone-Čech

Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio di Tychonoff, sia J l'insieme di tutte le applicazioni continue $\phi : X \to I$ e sia

$$f : X \to I^J$$

l'immersione topologica di X nel cubo di Tychonoff I^J descritta nel paragrafo precedente. Indichiamo con $\overline{\overline{X}}$ la chiusura di $f(X)$ in I^J. Con la topologia di sottospazio, $\overline{\overline{X}}$ è compatto e di Hausdorff. Chiamiamo l'immersione topologica:

$$\iota = f|_X^{\overline{\overline{X}}} : X \to \overline{\overline{X}}$$

compattificazione di Stone-Čech di $\mathbf{X}$.

TEOREMA 6.1 *Sia* $\mathbf{X}$ *uno spazio di Tychonoff e sia* $\overline{\overline{X}}$ *la sua compattificazione di Stone-Čech. Ogni applicazione continua di* X *in uno spazio di Hausdorff compatto* $\mathbf{Z} = (Z, \tau_Z)$ *si estende in modo unico a un'applicazione continua di* $\overline{\overline{X}}$ *in* Z.

DIM. Sia $\iota : X \to \overline{\overline{X}} \subset I^J$ la compattificazione di Stone-Čech di $\mathbf{X}$ e sia $f : X \to Z$ un'applicazione continua di X in uno spazio di Hausdorff compatto $\mathbf{Z}$. Vogliamo dimostrare che esiste un'unica applicazione continua $\tilde{f} : \overline{\overline{X}} \to Z$ tale che $\tilde{f}|_{\iota(X)} = f \circ \iota|_X^{\iota(X)}$.

Sia H l'insieme di tutte le applicazioni continue $h : Z \to I$. Poiché $\mathbf{Z}$ è uno spazio normale, e quindi di Tychonoff, abbiamo l'immersione topologica topologica

$$\phi : Z \ni z \to (h(z))_{h\in H} \in I^H$$

di Z nel cubo di Tychonoff I^H. Indichiamo con f^* l'applicazione:

$$f^* : H \ni h \to h \circ f \in J.$$

Risulta allora definita un'applicazione

$$F : I^J \to I^H$$

mediante

$$F((t_j)_{j\in J}) = (t_{f^*(h)})_{h\in H} \qquad \forall (t_j)_{j\in J} \in I^J.$$

Per verificare che la F è continua basta verificare che

$$I^J \ni (t_j)_{j\in J} \to t_{f^*(h)} \in I$$

è continua per ogni $h \in H$. Ma ciò è ovvio perché questa applicazione non è altro che la proiezione sulla $f^*(h)$-esima coordinata del prodotto topologico I^J.

Abbiamo quindi un diagramma commutativo di applicazioni continue

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & I^J \arrow[d, "F"] \\ Z \arrow[r, "\phi"'] & I^H \end{tikzcd}$$

in cui le frecce verticali sono immersioni topologiche. Poiché Z è compatto, $\phi(Z)$ è compatto e quindi chiuso in I^H e l'immagine di $F \circ \iota$ è contenuta in $\phi(Z)$. Quindi $F^{-1}(\phi(Z))$ è contenuto nella compattificazione di Stone-Čech $\overline{\overline{X}}$ di X e la

$$\tilde{f} = (\phi|_Z^{\phi(Z)})^{-1} \circ F|_{\overline{\overline{X}}}$$

è un'estensione continua della $f \circ \iota|^{\iota(X)}|_X$.

L'estensione è certamente unica, perché l'insieme dei punti di uno spazio topologico $\mathbf{Y}$ in cui due applicazioni continue a valori in uno spazio di Hausdorff $\mathbf{Z}$ assumono lo stesso valore è un chiuso.

TEOREMA 6.2 *Sia $\phi : X \to E$ un'immersione topologica di uno spazio topologico* **X** *in uno spazio compatto di Hausdorff*[11] **E**. *Se per ogni applicazione continua $f : X \to I$ possiamo trovare un'unica estensione continua $\tilde{f} : E \to I$ della $f \circ (\phi|_X^{\phi(X)})^{-1}$, allora vi è un unico omeomorfismo*

$$\psi : \overline{\overline{X}} \to E$$

che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ \overline{\overline{X}} \arrow[rr, "\psi"'] & & E. \end{tikzcd}$$

DIM. Per il teorema precedente la ϕ si estende in modo unico a una $\psi : \overline{\overline{X}} \to E$ continua. Per ogni applicazione continua $j : X \to I$ vi è un'unica applicazione continua $\tilde{j} : E \to I$ tale che $\tilde{j}|_{\phi(X)} = j \circ (\phi|_X^{\phi(X)})^{-1}$. Posto

$$g(y) = (\tilde{j}(y))_{j \in J}$$

otteniamo un'applicazione $g : E \to I^J$ a valori in $\overline{\overline{X}}$ che inverte la ψ. Quindi la ψ è continua e bigettiva dallo spazio di Hausdorff compatto $\overline{\overline{X}}$ sullo spazio topologico **E** ed è quindi un omeomorfismo.

§7 SPAZI LOCALMENTE COMPATTI

Uno spazio topologico si dice *localmente compatto* se ogni suo punto ha un intorno compatto.

OSSERVAZIONE Ogni spazio compatto è anche localmente compatto e ogni sottospazio chiuso di uno spazio localmente compatto è localmente compatto. Il prodotto topologico di una famiglia finita di spazi localmente compatti è localmente compatto.

TEOREMA 7.1 *In uno spazio di Hausdorff localmente compatto ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni compatti.*

Un sottospazio aperto di uno spazio di Hausdorff localmente compatto è localmente compatto.

DIM. Sia x un punto di uno spazio topologico **X** di Hausdorff e localmente compatto. Sia V un intorno compatto di x. Allora V è uno spazio normale perché di Hausdorff e compatto. Perciò x ammette in V un sistema fondamentale $\mathcal{U}$ di intorni chiusi e quindi compatti. Poiché V è un intorno di x in **X**, la famiglia $\mathcal{U}$ è un sistema fondamentale di intorni compatti di x in **X**.

La seconda affermazione segue immediatamente: se A è un aperto di **X**, ogni punto x di A ammette un intorno compatto contenuto in A perché gli intorni compatti dei punti di X formano un sistema fondamentale di intorni.

[11] Osserviamo che **X** è allora uno spazio di Tychonoff.

Teorema 7.2 *Ogni compatto di uno spazio di Hausdorff localmente compatto ammette un sistema fondamentale di intorni compatti.*

Dim. Sia A un compatto di uno spazio di Hausdorff localmente compatto $\mathbf{X}$ e sia U un aperto di $\mathbf{X}$ contenente A. Per ogni punto $x \in A$ possiamo allora trovare un intorno aperto U_x di x in $\mathbf{X}$ tale che $U_x \Subset U$. Poiché A è compatto, possiamo trovare $x_1, ..., x_n \in A$ tali che

$$A \subset \cup_{j=1}^{n} U_{x_j}.$$

Allora

$$V = \cup_{j=1}^{n} \overline{U}_{x_j}$$

è un intorno compatto di A contenuto in U.

Teorema 7.3 *Sia $\mathbf{X}$ uno spazio di Hausdorff localmente compatto e siano A un compatto e B un chiuso di $\mathbf{X}$. Possiamo allora trovare una funzione di Urysohn della coppia (A, B). In particolare: ogni spazio di Hausdorff localmente compatto è completamente regolare.*

Dim. Sia V un intorno compatto di A contenuto in $X \setminus B$. Allora A e la frontiera bV di V sono due chiusi disgiunti contenuti nello spazio normale V e possiamo allora trovare una funzione continua $\phi : V \to I$ tale che $\phi(x) = 0$ se $x \in A$ e $\phi(x) = 1$ se $x \in bV$. Poiché $\{V, X \setminus \mathring{V}\}$ è un ricoprimento chiuso finito e quindi fondamentale di X, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \phi(x) \text{ se } x \in V \\ 1 \text{ se } x \in X \setminus \mathring{V} \end{cases}$$

è una funzione di Urysohn della coppia (A, B).

Teorema 7.4 (Teorema di estensione di Tietze) *Sia $\mathbf{X}$ uno spazio di Hausdorff localmente compatto, A un compatto di $\mathbf{X}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Possiamo allora trovare una funzione continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tale che:*

(1) $\tilde{f}|_A = f$;
(2) *$\tilde{f}(X)$ sia contenuto nell'inviluppo convesso di $f(A)$.*

Dim. Per il teorema di Weierstrass, la funzione f ammette massimo e minimo in A. Siano $m = \min_A f$, $M = \max_A f$. Se $m = M$, la f è costante e possiamo estenderla ponendo $\tilde{f}(x) = m = M$ per ogni $x \in X$. Se $m < M$, scelto un intorno compatto U di A in $\mathbf{X}$, osserviamo che A e bU sono due chiusi disgiunti dello spazio normale U. La funzione

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x \in A \\ m \text{ se } x \in bU \end{cases}$$

è allora continua su $A \cup bU$ e per il teorema di estensione di Urysohn possiamo trovare una funzione continua $\tilde{g} : U \to [m, M]$ tale che $\tilde{g}|_{A \cup bU} = g$. Definiamo allora l'estensione continua $\tilde{f}$ di f a X ponendo:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \tilde{g}(x) \text{ se } x \in U \\ m \text{ se } x \in X \setminus \mathring{U}. \end{cases}$$

Osservazione Dalla dimostrazione del Teorema di Tietze risulta immediatamente che ogni funzione continua $f : A \to \mathbb{R}$, definita su un sottoinsieme compatto di uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto $\mathbf{X}$, si può estendere a una funzione continua con supporto compatto in $\mathbf{X}$.

§8 Compattificazione di Alexandroff

Chiamiamo *compattificazione* di uno spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ il dato di uno spazio topologico compatto $\mathbf{Y} = (Y, \tau_Y)$ e di un'immersione topologica $\phi : X \to Y$.

Esempio 8.1 Sono compattificazioni dell'intervallo aperto $]0,1[$ le

$$]0,1[\ni t \to t \in [0,1],$$

$$]0,1[\ni t \to e^{2\pi i\, t} \in S^1.$$

Esempio 8.2 Sono compattificazioni dello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ le

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \to \frac{(x,y)}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \in D^2 \;=\; \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\},$$

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \to \frac{(4x, 4y, x^2+y^2-4)}{\sqrt{4+x^2+y^2}} \in S^2 \;=\; \{(\xi,\eta,\tau) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \xi^2+\eta^2+\tau^2 = 1\}$$

(applicazione inversa della proiezione stereografica),

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \to [(x,y,1)] \in \mathbb{RP}^2$$

dove $\mathbb{R}^3 \ni (\xi,\eta,\tau) \to [(\xi,\eta,\tau)] \in \mathbb{RP}^2$ è la proiezione nel quoziente, (immersione dello spazio affine nello spazio proiettivo della stessa dimensione),

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \to \left(e^{\frac{2\pi i x}{\sqrt{1+x^2}}}, e^{\frac{2\pi i y}{\sqrt{1+y^2}}}\right) \in S^1 \times S^1.$$

Una compattificazione $\phi : X \to Y$ si dice *compattificazione di Alexandroff* o *compattificazione con l'aggiunta di un punto* dello spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ se

(i) $\phi(X)$ è aperto in $\mathbf{Y}$,
(ii) $Y \setminus \phi(X)$ contiene un solo punto,
(iii) Se K è un compatto chiuso di $\mathbf{X}$, allora $\phi(K)$ è chiuso in $\mathbf{Y}$.

Teorema 8.1 *Ogni spazio topologico* $\mathbf{X}$ *ammette una compattificazione di Alexandroff, unica a meno di omeomorfismi. Inoltre, la compattificazione di Alexandroff di* $\mathbf{X}$ *soddisfa l'assioma di separazione* T_1 *se e soltanto se* $\mathbf{X}$ *lo soddisfa.*

Dim. Indichiamo con ∞ un elemento che non appartenga all'insieme X e sia $Y = X \cup \{\infty\}$. Sia

$$\phi : X \ni x \to x \in Y$$

l'inclusione. Sia τ_Y la famiglia di sottoinsiemi di Y così definita:

$A \in \tau_Y$ se o $A \subset X$ e $A \in \tau_X$, oppure $\infty \in A$ e $Y \setminus A$ è chiuso e compatto in **X**. Verifichiamo che τ_Y è una topologia su Y. L'insieme vuoto è un aperto di **X** contenuto in X e quindi è in τ_Y. L'insieme Y contine ∞ e il suo complementare è l'insieme vuoto, che è un compatto chiuso di **X**. Quindi $Y \in \tau_Y$. Inoltre τ_Y contiene le intersezioni finite delle sue sottofamiglie: se Γ è una sottofamiglia finita di τ_Y, sia $\Gamma' = \{A \in \Gamma \,|\, A \subset X\}$ e $\Gamma'' = \{A \in \Gamma \,|\, \infty \in A\}$. Se $\Gamma'' = \emptyset$, allora $\cap\Gamma = \cap\Gamma' \in \tau_X \subset \tau_Y$. Se $\Gamma' = \emptyset$, allora

$$X \setminus (\cap\Gamma'') = \cup\{Y \setminus A \,|\, A \in \Gamma''\}$$

è chiuso perché unione finita di chiusi e compatto perché unione finita di compatti. Quindi $\cap\Gamma = \cap\Gamma'' \in \tau_Y$ anche in questo caso. Supponiamo ora che Γ' e Γ'' siano entrambi non vuoti. Osserviamo che, per ogni $A \in \Gamma''$, l'insieme $A \cap X$ è il complementare in X del chiuso $X \setminus A$ e quindi aperto in **X**. Allora

$$\cap\Gamma = (\cap\Gamma') \cap (\cap\{A \cap X \,|\, A \in \Gamma''\}) \in \tau_X \subset \tau_Y.$$

Si ragiona in modo analogo per dimostrare che l'unione di una qualsiasi sottofamiglia Γ di τ_Y è ancora un elemento di τ_Y. Se $\Gamma \subset \tau_X$, allora $\cup\Gamma \in \tau_X \subset \tau_Y$. Se $\infty \in A$ per ogni $A \in \Gamma$, allora

$$Y \setminus (\cup\Gamma) = \cap\{Y \setminus A \,|\, A \in \Gamma\}$$

è un compatto chiuso perché intersezione di compatti chiusi (e quindi chiuso dentro un qualsiasi compatto dell'intersezione). Infine, nel caso generale in cui le due sottofamiglie $\Gamma' = \Gamma \cap \tau_X$ e $\Gamma'' = \{A \in \Gamma \,|\, \infty \in A\}$ siano entrambe non vuote, osserviamo che

$$Y \setminus \cup\Gamma = (Y \setminus (\cup\Gamma'')) \cap (Y \setminus (\cup\Gamma'))$$

è un compatto chiuso perché intersezione del compatto chiuso $Y \setminus (\cup\Gamma'')$ con il chiuso $(Y \setminus \cup\Gamma')$.

Osserviamo che **Y** è compatto: se infatti Γ è un qualsiasi ricoprimento aperto di Y, vi sarà almeno un aperto $A \in \Gamma$ che contiene ∞. Il suo complementare $X \setminus A$ è un compatto chiuso di **X** e $\Delta = \{A \cap X \,|\, A \in \Gamma\}$ ne è un ricoprimento aperto in **X**. Possiamo quindi trovare una sottofamiglia finita $\Delta' \subset \Delta$ che ricopre $X \setminus A$. La sottofamiglia Γ' di Γ formata dall'insieme A e, per ogni $B \in \Delta$, da un aperto $\tilde{B} \in \Gamma$ tale che $\tilde{B} \setminus \{\infty\} = B$, è allora un ricoprimento finito di Y contenuto in Γ.

Poiché $X \in \tau_Y$, e $Y \setminus X = \{\infty\}$ contiene un solo punto, $\mathbf{Y} = (Y, \tau_Y)$ con l'applicazione $\phi : X \to Y$ è una compattificazione di Alexandroff di **X**.

Per dimostrare l'unicità a meno di omeomorfismi, basta osservare che la topologia su Y per cui $\phi : X \ni x \to x \in Y$ sia una compattificazione di Alexandroff di **X** è univocamente determinata. Sia infatti τ una topologia su Y per cui la ϕ sia una compattificazione di Alexandroff di **X**.

Poiché ϕ è un'immersione topologica e $\phi(X) = X$ è un aperto di **Y**, abbiamo $\phi_*(\tau_X) \subset \tau$. Inoltre, dal momento che (Y, τ) è uno spazio compatto, i complementari degli aperti di τ sono chiusi compatti di (Y, τ). Se A è un aperto di τ che contiene ∞, allora $Y \setminus A = X \setminus A$ è un compatto di **X**. Esso è anche chiuso in **X** perché chiuso in X per la topologia di sottospazio, che coincide con quella di **X** perché la ϕ è un'immersione topologica.

L'ultima affermazione è conseguenza del fatto che per definizione $\{\infty\}$ è un chiuso della compattificazione di Alexandroff di $\mathbf{X}$.

Teorema 8.2 *Sia $\mathbf{Y} = (Y, \tau_Y)$ uno spazio compatto e sia $\phi : X \to Y$ una compattificazione di Alexandroff di uno spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$. Allora*

(i) *$\phi(X)$ è denso in $\mathbf{Y}$ se e soltanto se $\mathbf{X}$ non è compatto.*

(ii) *$\mathbf{Y}$ è uno spazio di Hausdorff se e soltanto se $\mathbf{X}$ è uno spazio di Hausdorff localmente compatto.*

Dim. Se $\phi(X)$ fosse chiuso in $\mathbf{Y}$, allora sarebbe compatto in $\mathbf{Y}$. Quindi anche $\mathbf{X}$ sarebbe compatto perché ϕ è un'immersione topologica. Viceversa, se $\mathbf{X}$ fosse compatto, $\phi(X)$ sarebbe chiuso in $\mathbf{Y}$ e dunque non sarebbe un sottoinsieme denso di $\mathbf{Y}$.

Supponiamo ora che $\mathbf{Y}$ sia uno spazio di Hausdorff. Fissato un qualsiasi punto $x \in X$, potremmo trovare un aperto $U \ni x$ e un aperto $V \ni \infty$ tali che $U \cap V = \emptyset$. Allora U è un aperto di $\mathbf{X}$ contenente x e quindi il compatto $X \setminus V$ è un intorno di x in $\mathbf{X}$.

Viceversa, se $\mathbf{X}$ è di Hausdorff e localmente compatto e x, y sono due punti distinti di Y, distinguiamo i due casi:

Se $x = \phi(\xi), y = \phi(\eta)$ con $\xi, \eta \in X$, allora $\xi \neq \eta$ e poiché $\mathbf{X}$ è di Hausdorff vi sono intorni disgiunti U_ξ e U_η di ξ e η in $\mathbf{X}$. Allora $\phi(U_\xi)$ e $\phi(U_\eta)$ sono intorni aperti disgiunti di x e y in $\mathbf{Y}$.

Se $x = \phi(\xi)$ con $\xi \in X$ e $\eta \notin \phi(X)$, possiamo trovare un compatto U in $\mathbf{X}$ tale che $\xi \in \overset{\circ}{U} \subset U$. Osserviamo che U è chiuso perché $\mathbf{X}$ è di Hausdorff. Allora $x \in \phi(\overset{\circ}{U}) \subset \phi(U)$ e quindi $\phi(U)$ e $Y \setminus \phi(U)$ sono intorni disgiunti di x e ∞ rispettivamente.

Se viceversa supponiamo che $\mathbf{Y}$ sia uno spazio compatto di Hausdorff, in esso gli intorni compatti dei punti formano sistemi fondamentali di intorni e in particolare, per ogni punto $\xi \in X$, vi è in $\mathbf{Y}$ un intorno compatto U di $x = \phi(\xi)$ contenuto nell'aperto $\phi(X)$. Allora $\phi^{-1}(U)$ è un intorno compatto di ξ in $\mathbf{X}$.

§9 Applicazioni proprie

Siano $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ due spazi topologici. Un'applicazione continua $f : X \to Y$ si dice *propria* se è chiusa e $f^{-1}(K)$ è compatto in $\mathbf{X}$ per ogni K compatto in $\mathbf{Y}$.

Teorema 9.1 *Siano $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ due spazi topologici. Se $f : X \to Y$ è continua, chiusa e $f^{-1}(y)$ è compatto in $\mathbf{X}$ per ogni $y \in Y$, allora f è propria.*

Dim. Sia K un compatto di $\mathbf{Y}$ e sia Γ un ricoprimento aperto di $f^{-1}(K)$. Per ogni $y \in K$ vi è una sottofamiglia finita Γ_y di Γ tale che $f^{-1}(y) \subset \cup\Gamma_y$. Sia $U_y = \cup\Gamma_y$. Poiché f è chiusa, l'insieme $V_y = Y \setminus f(X \setminus U_y)$ è aperto. Osserviamo che $y \in V_y$ e $f^{-1}(V_y) \subset U_y$. Poiché K è compatto, possiamo trovare $y_1, \ldots, y_n$ tali che $K \subset \cup_{h=1}^n V_{y_h}$. Da questo segue che $\Gamma_{y_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{y_n} \subset \Gamma$ è un ricoprimento finito di $f^{-1}(K)$.

Corollario 9.2 *Siano $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ spazi topologici. Se $\mathbf{Y}$ è compatto, la proiezione $\pi_X : X \times Y \ni (x, y) \to x \in X$ è propria.*

Dim. Per ogni $x \in X$, l'immagine inversa $\pi_X^{-1}(x) = \{x\} \times Y$ è un sottospazio di $X \times Y$ omeomorfo ad Y, e quindi compatto. Resta quindi da dimostrare che $\pi_X : X \times Y \to X$ è un'applicazione chiusa. Sia F un qualsiasi chiuso di $X \times Y$ e sia x_0 un punto di $X \setminus \pi_X(F)$. Per ogni $y \in Y$, il punto (x_0, y) non appartiene ad F ed esistono quindi un intorno aperto U_y di x_0 in X e un intorno aperto V_y di y in Y tali che $F \cap (U_y \times V_y) = \emptyset$. Poiché Y è compatto, possiamo trovare $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tali che $Y = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$. Poniamo $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$. Allora:

$$\pi_X^{-1}(U) = U \times Y = \bigcup_{i=1}^{n} (U \times V_{y_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{y_i} \times V_{y_i}) \subset (X \times Y) \setminus F\,.$$

Ciò dimostra che U è un intorno aperto di x_0 in X che non interseca $\pi_X(F)$. Per l'arbitrarietà di x_0, questo dimostra che $\pi_X(F)$ è chiuso. Quindi $\pi_X : X \times Y \to X$ è chiusa e perciò è propria.

Teorema 9.3 *Siano* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ *spazi di Hausdorff localmente compatti e sia* $f : X \to Y$ *un'applicazione continua. Siano* $\tilde{X} = X \cup \infty_X$ *e* $\tilde{Y} = Y \cup \infty_Y$, *con le topologie delle compattificazioni di Alexandroff di* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *rispettivamente. Allora:* f *è propria se e soltanto se la* $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ *definita da:*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in X \\ \infty_Y & \text{se} \quad x = \infty_X \end{cases}$$

è continua.

Dim. Supponiamo che $f : X \to Y$ sia propria. Per dimostrare la continuità di $\tilde{f}$, è sufficiente dimostrare che $\tilde{f}$ è continua in ∞_X. Un intorno aperto di ∞_Y è della forma $\tilde{Y} \setminus K$ con K compatto in Y. Poiché f è propria, $f^{-1}(K)$ è un compatto di $\mathbf{X}$. Quindi $U = \tilde{X} \setminus f^{-1}(K)$ è un intorno aperto di ∞_X in $\tilde{X}$ e $\tilde{f}(U) \subset \tilde{Y} \setminus K$.

Viceversa, supponiamo la $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ sia continua. Sia K un compatto di Y. Allora K è un chiuso di $\tilde{Y}$ e $f^{-1}(K) = \tilde{f}^{-1}(K)$ è un chiuso di $\tilde{X}$ contenuto in X e quindi un compatto di $\mathbf{X}$.

Teorema 9.4 *Siano* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ *spazi di Hausdorff localmente compatti ed* $f : X \to Y$ *un'applicazione propria. Allora* f *è chiusa.*

Dim. Usiamo le notazioni del teorema precedente. Se F è un chiuso di $\mathbf{X}$, allora $F \cup \{\infty_X\}$ è un chiuso e quindi un compatto di $\tilde{X}$. Ne segue che $\tilde{f}(F \cup \{\infty_X\})$ è un compatto e quindi un chiuso di $\tilde{Y}$ e $f(F) = \tilde{f}(F \cup \{\infty_X\}) \cap Y$ è un chiuso di $\mathbf{Y}$.

CAPITOLO V

CONNESSIONE

§1 Connessione

Uno spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ si dice *sconnesso* se contiene due aperti A e B non vuoti tali che

$$A \cup B = X, \qquad A \cap B = \emptyset.$$

Osserviamo che in questo caso $A = X \setminus B$ e $B = X \setminus A$ sono anche chiusi, e quindi nella definizione precedente potevamo in modo equivalente richiedere che i due sottoinsiemi A e B fossero entrambi chiusi. Diciamo che due aperti (e chiusi) A, B con queste proprietà *sconnettono* $\mathbf{X}$.

Uno spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ si dice *connesso* se non è sconnesso. Ciò equivale ad affermare che gli unici sottoinsiemi di X che siano contemporaneamente aperti e chiusi sono $\emptyset$ e X.

Un sottoinsieme A di X si dice *connesso* se è connesso per la topologia di sottospazio.

Esempio 1.1 L'insieme vuoto e ogni sottoinsieme che contenga un solo punto sono connessi. Uno spazio topologico con la topologia indiscreta è connesso. Un sottoinsieme discreto di uno spazio topologico è connesso se e soltanto se contiene al più un punto.

Lemma 1.1 *Se A e B sono due aperti che sconnettono lo spazio topologico $\mathbf{X}$ allora ogni sottoinsieme connesso di $\mathbf{X}$ è contenuto o in A o in B.*

Dim. Sia C un connesso di $\mathbf{X}$. Se fosse $A \cap C \neq \emptyset$ e $B \cap C \neq \emptyset$, allora $A \cap C$ e $B \cap C$ sarebbero due aperti di C che lo sconnettono.

Teorema 1.2 *Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ è connesso se e soltanto se è convesso, cioè se per ogni coppia di numeri reali $a < b \in A$ l'intervallo $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \subset A$.*

Dim. Supponiamo che $A \subset \mathbb{R}$ sia connesso e siano $a < b \in A$. Se vi fosse $c \in \mathbb{R} \setminus A$ con $a < c < b$, allora

$$]-\infty, c[\cap A \quad \text{e} \quad]c, \infty[\cap A$$

sarebbero due aperti disgiunti di A, non vuoti, con unione uguale ad A ed A risulterebbe sconnesso. La condizione è quindi necessaria.

Dimostriamone la sufficienza. Sia A un sottoinsieme convesso di A e supponiamo per assurdo che esso sia sconnesso. Potremmo allora trovare due chiusi non vuoti e disgiunti U, V di A tali che $U \cup V = A$ e $U \cap V = \emptyset$. Poiché U e V sono non vuoti, possiamo fissare $a \in U$ e $b \in V$. Allora $K_1 = U \cap [a,b]$ e $K_2 = V \cap [a,b]$ sono compatti non vuoti e disgiunti e $K_1 \cup K_2 = [a,b]$. L'applicazione $K_1 \times K_2 \ni (x,y) \to |x-y| \in \mathbb{R}$ ammette per il teorema di Weierstrass un minimo positivo r: avremo cioè per due punti $x_0 \in K_1$ e $y_0 \in K_2$:

$$0 < r = |x_0 - y_0| \leq |x - y| \qquad \forall x \in K_1,\ \forall y \in K_2\,.$$

Ma ciò è impossibile perché il punto $z = (x_0 + y_0)/2$ appartiene all'intervallo $[a,b]$, ma non può appartenere né a K_1 né a K_2 in quanto $|z - x_0| = |z - y_0| = r/2 < r$. Abbiamo dimostrato quindi per contraddizione che A è connesso.

TEOREMA 1.3 *L'immagine di un connesso mediante un'applicazione continua è un connesso.*

DIM. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ e $\mathbf{Y} = (Y, \tau_Y)$ e sia A un connesso di $\mathbf{X}$. Sostituendo ad f l'abbreviazione $f|_A^{f(A)}$, ci riconduciamo al caso in cui $X = A$ sia connesso ed f sia surgettiva. Supponiamo dunque che valgano queste ulteriori ipotesi. Se per assurdo Y non fosse connesso, potremmo trovare due aperti U, V di $f(X)$ che lo sconnettono; ma in questo caso $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ sarebbero due aperti che sconnettono X.

OSSERVAZIONE *Il grafico di un'applicazione continua definita su un connesso è un connesso.*

L'osservazione è una conseguenza immediata del teorema precedente: ricordiamo infatti che il grafico di un'applicazione $f : X \to Y$ è l'immagine in $X \times Y$ dell'applicazione

$$F : X \ni x \to (x, f(x)) \in X \times Y.$$

Se $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ e $\mathbf{Y} = (Y, \tau_Y)$ sono spazi topologici e $f : X \to Y$ è continua, allora anche l'applicazione F è continua (perché ciascuna delle sue componenti è continua) e quindi la sua immagine è un connesso di $X \times Y$ se X è connesso.

TEOREMA 1.4 *Un prodotto di spazi topologici non vuoti è connesso se e soltanto se è connesso ogni fattore.*

DIM. La condizione è necessaria per il teorema precedente, in quanto le proiezioni del prodotto su ciascuno dei fattori sono applicazioni continue.

Sia ora $\{\mathbf{X}_i = (X_i, \tau_i) \,|\, i \in I\}$ una famiglia di spazi topologici connessi non vuoti e indichiamo con $\mathbf{X} = (X, \tau)$ il loro prodotto topologico. Sia F un sottoinsieme non vuoto di X che sia al tempo stesso aperto e chiuso in $\mathbf{X}$. Dico che F gode della seguente proprietà:

Se $x \in F$ e $y \in X$ è tale che $\{i \in I \,|\, y_i \neq x_i\}$ contiene al più un elemento, allora $y \in F$.

Consideriamo infatti, per un fissato $x \in F$ e $h \in I$, l'immersione topologica

$$\iota_h : X_h \to X$$

definita da $\pi_i(\iota_h(t)) = x_i$ se $i \neq h$, $\pi_h(\iota_h(t) = t$ per ogni $t \in X_h$. La sua immagine è un connesso di $\mathbf{X}$ e quindi la sua intersezione con F essendo aperta e chiusa per la topologia di sottospazio e non vuota coincide con $\iota_h(X_h)$.

Ne segue per ricorrenza che *Se* $x \in F$ *e* $y \in X$ *è tale che* $\{i \in I \,|\, y_i \neq x_i\}$ *contiene al più un numero finito di elementi, allora* $y \in F$.

Poiché F è aperto e non vuoto, esso contiene un aperto U della forma

$$U = \cap_{j \in J} \pi_j^{-1}(A_j)$$

con $J \subset I$ finito e A_j aperto non vuoto di $\mathbf{X}_j$.

Poiché ogni punto di X ha al più un numero finito di coordinate diverse da quelle di un punto di U, ne segue che $F = X$. Abbiamo dimostrato così che ogni sottoinsieme non vuoto di X che sia al tempo stesso aperto e chiuso coincide con X e quindi $\mathbf{X}$ è connesso.

§2 Componenti connesse

Teorema 2.1 *Sia* $\{A_i \,|\, i \in I\}$ *una famiglia di sottoinsiemi connessi di uno spazio topologico* $\mathbf{X}$. *Se*

$$A_i \cap A_j \neq \emptyset \quad \forall i, j \in I$$

allora

$$A = \cup_{i \in I} A_i$$

è connesso.

Dim. Sia F un sottoinsieme aperto e chiuso non vuoto di A. Allora $F \cap A_i \neq \emptyset$ per qualche indice $i \in I$. Allora $F \cap A_i$ è aperto e chiuso e non vuoto in A_i e quindi coincide con A_i. Allora $F \cap A_j \supset A_j \cap A_i \neq \emptyset$ per ogni $j \in i$ e ne segue che $F \supset A_j$ per ogni $j \in I$, onde $F = A$.

Osservazione Sia I un insieme *beneordinato* di indici: ciò significa che su I è definita una relazione di ordinamento totale "$\prec$" tale che ogni sottoinsieme non vuoto $J \subset I$ ammetta minimo. Supponiamo che $I \neq \emptyset$ e indichiamo con i_0 il minimo di I.

Sia $\mathbf{X}$ uno spazio topologico e $\{A_i \,|\, i \in I\}$ una famiglia di sottoinsiemi connessi di X che gode della proprietà: *per ogni* $i \in I \setminus \{i_0\}$,

$$A_i \bigcap \left(\bigcup_{j \prec i} A_j \right) \neq \emptyset \, .$$

Allora $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ è connesso.

Per dimostrare questa affermazione, possiamo ragionare nel modo seguente: se A non fosse connesso, potremmo trovare due aperti U e V di A che lo sconnettono. Poiché gli A_i sono connessi, la famiglia I si decompone in due sottoinsiemi non vuoti disgiunti:

$$I_1 = \{i \in I \,|\, A_i \subset U\} \qquad \text{e} \qquad I_2 = \{i \in I \,|\, A_i \subset V\} \, .$$

Possiamo supporre che $i_0 \in I_1$ e quindi il minimo j di I_2 è diverso da i_0. Abbiamo per ipotesi

$$\left(\bigcup_{i \prec j} A_i \right) \bigcap A_j \neq \emptyset \, ,$$

ma questo contraddice il fatto che $\bigcup_{i \prec j} A_i \subset U$, $A_j \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$. La tesi è quindi dimostrata.

Un sottoinsieme non vuoto A di uno spazio topologico $\mathbf{X}$ si dice una *componente connessa* di $\mathbf{X}$ se è connesso e non è propriamente contenuto in nessun connesso di $\mathbf{X}$.

Sia x un punto dello spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$. Per il teorema precedente, l'unione di tutti i connessi che contengono x, che è non vuota perché $\{x\}$ è un connesso che contiene x, è ancora un connesso. Esso è il più grande connesso, rispetto all'inclusione, che contenga x e si dice *la componente connessa* di x in $\mathbf{X}$.

Lemma 2.2 *La componente connessa di un punto x di uno spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ è una componente connessa di $\mathbf{X}$.*

Dim. Sia A la componente connessa di un punto $x \in X$. Se B è un connesso di $\mathbf{X}$ tale che $A \cap B \neq \emptyset$, allora $A \cup B$ è un connesso che contiene x e quindi è contenuto in A: ne segue che $B \subset A$ e dunque A non è propriamente contenuto in nessun connesso di $\mathbf{X}$ ed è una componente connessa di $\mathbf{X}$.

Teorema 2.3 *Le componenti connesse di uno spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ formano una partizione di X.*

Dim. Indichiamo con $\tilde{x}$ la componente connessa di $x \in X$. Chiaramente $\{\tilde{x} \mid x \in X\}$ è un ricoprimento di X. Inoltre, $\tilde{x} \subset \tilde{y}$ per ogni $y \in \tilde{x}$, perché $\tilde{x}$ è un connesso che contiene y. Ma allora anche $x \in \tilde{y}$ e quindi $\tilde{y} \subset \tilde{x}$ e i due insiemi coincidono.

Osservazione Ogni connesso di uno spazio topologico $\mathbf{X}$ è contenuto in una componente connessa di $\mathbf{X}$.

Teorema 2.4 *Se A è un sottoinsieme connesso di $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$, allora $\overline{A}$ è ancora connesso.*

In particolare, le componenti connesse di $\mathbf{X}$ sono chiuse.

Dim. Sia A un connesso dello spazio topologico $\mathbf{X}$. Se $A = \emptyset$ non vi è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi $A \neq \emptyset$. Se $\overline{A}$ non fosse connesso, potremmo trovare due sottoinsiemi aperti U e V di $\overline{A}$ che lo sconnettono. Osserviamo che U e V sono aperti e chiusi in $\overline{A}$ e in particolare sono chiusi in $\mathbf{X}$.

Possiamo supporre che $U \cap A \neq \emptyset$. Allora $A \subset U$ in quanto A è connesso e $A \cap U$ è aperto e chiuso e non vuoto in A. Ne segue che $U \setminus V$ è un chiuso di $\mathbf{X}$ che contiene A ed è propriamente contenuto in $\overline{A}$, ma questo ci dà una contraddizione e quindi $\overline{A}$ è connesso.

Esempio 2.1 Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ il grafico dell'applicazione continua

$$]0, 1[\ni t \to \sin(1/t) \in \mathbb{R}.$$

Poiché esso è connesso, anche la sua chiusura

$$\overline{A} = A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$$

è un connesso di $\mathbb{R}^2$.

Uno spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ si dice *totalmente sconnesso* se per ogni $x \in X$, la componente connessa di x è $\{x\}$.

Esempio 2.2 Uno spazio topologico con la topologia discreta è totalmente sconnesso; l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, con la topologia indotta da $\mathbb{R}$, è totalmente sconnesso.

§3 Archi

Chiamiamo *arco* o *cammino continuo* in uno spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ una qualsiasi applicazione continua

$$\alpha : \mathbf{I} = [0, 1] \ni t \to x_t \in X.$$

I punti $x_0 = \alpha(0)$ e $x_1 = \alpha(1)$ si dicono gli *estremi* dell'arco α.

L'insieme

$$|\alpha| = \{\alpha(t) \,|\, 0 \leq t \leq 1\}$$

si dice *supporto* dell'arco α.

Chiaramente *il supporto di un arco α è un sottoinsieme connesso di X.*

Se $\alpha, \beta : \mathbf{I} \to X$ sono due archi tali che $\alpha(1) = \beta(0)$, diciamo che essi sono *consecutivi* e definiamo il loro *prodotto* mediante:

$$\alpha \cdot \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{se} \quad 1/2 \leq t \leq 1\,. \end{cases}$$

Abbiamo $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cup |\beta|$. Definiamo inoltre l'*inverso* dell'arco $\alpha : \mathbf{I} \to X$ mediante:

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t) \qquad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

Due archi $\alpha, \beta : \mathbf{I} \to X$ si dicono *equivalenti*, o *ottenuti mediante riparametrizzazione*, se esiste un omeomorfismo $\phi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ tale che $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ e

$$\beta = \alpha \circ \phi\,.$$

Due archi equivalenti hanno lo stesso supporto, ma in generale non è vero il viceversa.

Lemma 3.1 *Siano $\alpha, \beta, \gamma : \mathbf{I} \to X$ tre archi consecutivi nello spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau)$. Allora i due cammini $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ e $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ sono equivalenti.*

Dim. Abbiamo:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1/4 \\ \beta(4t-1) & \text{se} \quad 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma(2t-1) & \text{se} \quad 1/2 \leq t \leq 1\,, \end{cases}$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(4t-2) & \text{se} \quad 1/2 \leq t \leq 3/4 \\ \gamma(4t-3) & \text{se} \quad 3/4 \leq t \leq 1\,. \end{cases}$$

Sia $\phi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ l'omeomorfismo definito da:

$$\phi(t) = \begin{cases} 2t & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1/4 \\ t + (1/4) & \text{se} \quad 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ \dfrac{t+1}{2} & \text{se} \quad 1/2 \leq t \leq 1\,. \end{cases}$$

Allora

$$(\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)) \circ \phi = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma\,.$$

Converremo nel seguito di definire il prodotto di un numero finito di archi consecutivi α_1, α_2, ..., α_n mediante la formula induttiva:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n = \alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n)\,.$$

È spesso conveniente considerare gli archi di uno spazio topologico modulo la relazione di equivalenza definita dalla riparametrizzazione. Chiamiamo la classe di equivalenza di un arco modulo riparametrizzazione *arco geometrico.* Per il lemma precedente il prodotto di archi geometrici consecutivi è ben definito e gode della *proprietà associativa.*

§4 Connessione per archi

Lo spazio topologico $\mathbf{X}$ si dice *connesso per archi* se, per ogni coppia di punti x_0, $x_1 \in X$ possiamo trovare un arco che li abbia come estremi.

Un sottoinsieme A di $\mathbf{X}$ si dice *connesso per archi* se è connesso per archi con la topologia di sottospazio di $\mathbf{X}$.

Esempio 4.1 L'insieme vuoto e i sottoinsiemi di uno spazio topologico formati da un solo punto sono connessi per archi. Tutti i sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$ sono connessi per archi. Un sottoinsieme convesso[12] di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi. Ogni aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi.

Teorema 4.1 *Uno spazio topologico connesso per archi è connesso.*

Dim. Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio topologico connesso per archi. Se $X = \emptyset$, non c'è nulla da dimostrare. Se $X \neq \emptyset$, fissato un punto x_0, lo spazio X risulta unione dei supporti dei suoi archi di punto iniziale x_0. Essi formano una famiglia di sottoinsiemi connessi che hanno due a due intersezione non vuota e quindi $\mathbf{X}$ è connesso.

Osservazione Non è vero il viceversa: uno spazio topologico può essere connesso senza essere connesso per archi.

Consideriamo ad esempio $X = \{(x, \sin(1/x)) \mid 0 < x < 1\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$, con la topologia di sottospazio di $\mathbb{R}^2$. Esso è connesso (cf. Esempio 2.1) ma non connesso per archi: supponiamo per assurdo che vi sia un arco

$$\alpha : I \ni t \to (x_t, y_t) \in X$$

[12] Un sottoinsieme A di uno spazio vettoriale reale V si dice convesso se, per ogni coppia di vettori $v, w \in A$, il segmento $\{v + t(w - v) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ è contenuto in A.

con $\alpha(0) = (0,0)$ e $\alpha(1) = (1/\pi, 0)$. Sia t_0 il massimo dell'insieme $\{t \in I \,|\, x_t = 0\}$. Poiché α è continua, potremmo trovare $\epsilon > 0$ tale che

$$0 < x_t \leq 1/2\pi, \quad |y_t - y_{t_0}| < 1/2 \quad \text{se} \quad t_0 < t < t_0 + \epsilon.$$

Ma questo ci dà una contraddizione, perché $\{x_t \,|\, t_0 < t < t_0 + \epsilon\}$, essendo connesso in $\mathbb{R}$, contiene l'intervallo $]0, x_{t_0+\epsilon}[$ e la funzione $\sin(1/x)$ assume in tale intervallo tutti i valori compresi tra -1 e 1.

Teorema 4.2 *Sia $\{A_i \,|\, i \in I\}$ una famiglia di sottospazi connessi per archi di uno spazio topologico* $\mathbf{X}$*. Se*

$$A_i \cap A_j \neq \emptyset \quad \forall i, j \in I,$$

allora $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ è connesso per archi.

Dim. Siano $x_0, x_1 \in A$. Allora $x_0 \in A_h$ e $x_1 \in A_k$ per due indici $h, k \in I$. Sia $z \in A_h \cap A_k$. Poiché A_h e A_k sono connessi per archi, possiamo trovare due archi

$$\alpha : I \to A_h, \quad \beta : I \to A_k$$

tali che

$$\alpha(0) = x_0,\ \alpha(1) = z,\ \beta(0) = z,\ \beta(1) = x_1.$$

Allora l'arco

$$\alpha \cdot \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{se} \quad 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è contenuto in A e ha estremi x_0 e x_1.

Esempio 4.2 Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice *stellato rispetto al suo punto* x_0 se, per ogni $x \in A$, il segmento

$$[x_0, x] = \{x_0 + t(x - x_0) \,|\, 0 \leq t \leq 1\}$$

è contenuto in A. Se A è stellato rispetto al punto x_0, allora

$$A = \bigcup_{x \in A} [x_0, x]$$

è connesso per archi.

Chiamiamo *componente connessa per archi* di uno spazio topologico $\mathbf{X}$ un sottoinsieme non vuoto A di $\mathbf{X}$ che sia connesso per archi e non sia propriamente contenuto in un altro sottoinsieme connesso per archi di $\mathbf{X}$.

Se x è un punto di uno spazio topologico $\mathbf{X}$, l'unione di tutti i sottoinsiemi di X connessi per archi che contengono il punto x è ancora connessa per archi. Vi è dunque un più grande, rispetto all'inclusione, sottoinsieme connesso per archi che contiene il punto x. Esso si dice *la componente connessa per archi* di x in $\mathbf{X}$.

Teorema 4.3 *Le componenti connesse per archi di uno spazio topologico* $\mathbf{X}$ *formano una partizione di* $\mathbf{X}$.

Dim. Indichiamo con $\tilde{x}$ la componente connessa per archi di $x \in X$. Chiaramente $\{\tilde{x} \,|\, x \in X\}$ è un ricoprimento di X. Inoltre, $\tilde{x} \subset \tilde{y}$ per ogni $y \in \tilde{x}$ perché $\tilde{x}$ è connesso per archi e contiene y. Ma allora anche $x \in \tilde{y}$ e quindi $\tilde{y} \subset \tilde{x}$ e i due insiemi coincidono.

Teorema 4.4 *Un'applicazione continua $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ trasforma sottoinsiemi connessi per archi in sottoinsiemi connessi per archi.*

Dim. Basta infatti osservare che, se $\alpha : \mathbf{I} \to \mathbf{X}$ è un arco di estremi x_0, $x_1 \in X$, allora $f \circ \alpha : \mathbf{I} \to \mathbf{Y}$ è un arco di estremi $f(x_0)$, $f(x_1)$ in Y.

Teorema 4.5 *Un prodotto topologico non vuoto è connesso per archi se e soltanto se ogni suo fattore è connesso per archi.*

Dim. Sia $\mathbf{X} = (X, \tau)$ il prodotto topologico della famiglia di spazi topologici non vuoti $\{\mathbf{X}_i = (X_i, \tau_i) \,|\, i \in I\}$.

Se $\mathbf{X}$ è connesso per archi, ogni fattore $\mathbf{X}_i$ è connesso per archi perché immagine di $\mathbf{X}$ mediante l'applicazione continua (proiezione) $\pi_i : \mathbf{X} \to \mathbf{X}_i$.

Supponiamo ora che tutti gli spazi topologici $\mathbf{X}_i$ siano connessi per archi. Siano x, $x' \in X$. Per ogni indice $i \in I$ sia $\alpha_i : \mathbf{I} \to \mathbf{X}_i$ un arco con estremi $x_i = \pi_i(x)$ e $x'_i = \pi_i(x')$. Allora l'applicazione $\alpha : \mathbf{I} \to X$ definita da $\pi_i \circ \alpha = \alpha_i$ per ogni $i \in I$ è un arco in $\mathbf{X}$ con estremi x e x'.

§5 Spazi localmente connessi

Uno spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ si dice *localmente connesso* se per ogni $x \in X$ gli intorni aperti connessi di x in $\mathbf{X}$ formano un sistema fondamentale di intorni.

Esso si dice *localmente connesso per archi* se per ogni $x \in X$ gli intorni aperti connessi per archi di x in $\mathbf{X}$ formano un sistema fondamentale di intorni.

Uno spazio topologico localmente connesso per archi è localmente connesso, ma in generale non è vero il viceversa.

Osserviamo inoltre che uno spazio topologico connesso (risp. connesso per archi) può non essere localmente connesso. Consideriamo ad esempio il sottoinsieme del toro $\mathbf{T}^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, definito da

$$X = \left\{ \left(e^{it}, e^{i\pi t}\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} .$$

Esso è connesso per archi perché immagine continua della retta reale $\mathbb{R}$, ma non è localmente connesso per la topologia di sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

Teorema 5.1 *Se $\mathbf{X}$ è uno spazio topologico localmente connesso allora le sue componenti connesse sono contemporaneamente aperte e chiuse.*

Dim. Sappiamo già che le componenti connesse di $\mathbf{X}$ sono chiuse. Supponiamo ora che $\mathbf{X}$ sia localmente connesso e sia A una componente connessa di $\mathbf{X}$. Se $x \in A$, allora x ha in $\mathbf{X}$ un intorno aperto connesso U. Poiché $x \in A \cap U \neq \emptyset$, il sottoinsieme $A \cup U$ è ancora connesso e quindi $U \subset A$ perché A è una componente connessa. Dunque A è aperto perché è intorno di ogni suo punto.

Teorema 5.2 *Se $\mathbf{X}$ è localmente connesso per archi, allora le sue componenti connesse per archi sono anche componenti connesse e dunque sono aperte e chiuse in $\mathbf{X}$.*

Dim. Sia A una componente connessa per archi di $\mathbf{X}$. Se $x \in \overline{A}$ e U è un intorno aperto di x connesso per archi, poiché $A \cap U \neq \emptyset$, l'insieme $A \cup U$ è ancora connesso per archi. Quindi $U \subset A$ e A è aperto e chiuso perché contiene un intorno di ogni suo punto aderente.

Osserviamo infine che un sottoinsieme connesso che sia aperto e chiuso in $\mathbf{X}$ è necessariamente una componente connessa e quindi il teorema è dimostrato.

Un sottoinsieme A di uno spazio topologico $\mathbf{X}$ si dice *localmente connesso* (risp. *localmente connesso per archi*) se è tale per la topologia di sottospazio.

Osservazione *I sottoinsiemi aperti di uno spazio topologico localmente connesso (risp. localmente connesso per archi) sono localmente connessi (risp. localmente connessi per archi).*

Da questa osservazione si ricava il

Teorema 5.3 *Condizione necessaria e sufficiente affinché uno spazio topologico* $\mathbf{X}$ *sia localmente connesso è che le componenti connesse dei suoi aperti siano aperte.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché uno spazio topologico $\mathbf{X}$ *sia localmente connesso per archi è che le componenti connesse per archi dei suoi aperti siano aperte.*

§6 Continui topologici

Si dice *continuo topologico* uno spazio topologico compatto e connesso.

Un sottospazio connesso e compatto Y di uno spazio topologico $\mathbf{X}$ si dice un continuo topologico di $\mathbf{X}$.

Osservazione *L'immagine di un continuo topologico mediante un'applicazione continua è un continuo topologico.*

Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio topologico e siano x, y due punti distinti di X. Diciamo che un sottoinsieme A di X *connette* x e y se non è possibile sconnettere A mediante due sottoinsiemi U e V, aperti nella topologia di sottospazio di A, tali che $x \in U$ e $y \in V$.

Osservazione *Supponiamo che il sottoinsieme A dello spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ connetta i due punti distinti a e b di X. Supponiamo che A sia sconnesso e siano U e V due aperti di A che lo sconnettono, con $a \in U$. Allora $b \in U$ e U connette a e b.*

Lemma 6.1 *Siano a, b due punti distinti di uno spazio di Hausdorff compatto $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$. Se $\{Y_i \,|\, i \in I\}$ è una famiglia di chiusi di X, totalmente ordinata mediante inclusione, tale che ciascuno degli Y_i connetta a e b, allora anche la loro intersezione $Y = \bigcap_{i \in I} Y_i$ connette a e b.*

Dim. Osserviamo che Y è un compatto non vuoto di $\mathbf{X}$. Supponiamo per assurdo che Y non connetta a e b. Possiamo allora trovare due aperti U e V di $\mathbf{X}$ tali che

$$Y \subset U \cup V, \quad Y \cap U \cap V = \emptyset, \quad a \in U,\ b \in V.$$

Possiamo supporre che $U \cap V = \emptyset$. Infatti $K' = Y \setminus V \subset U$ e $K'' = Y \setminus U \subset V$ sono compatti disgiunti dello spazio di Hausdorff compatto $\mathbf{X}$ ed ammettono quindi intorni aperti disgiunti $\tilde{U} \subset U$ e $\tilde{V} \subset V$ in $\mathbf{X}$. Poiché $K' \cup K'' = Y$, possiamo sostituire $\tilde{U}$ a U e $\tilde{V}$ a V e quindi supporre che U e V soddisfino l'ulteriore condizione

$$U \cap V = \emptyset.$$

Per ogni indice $i \in I$ definiamo

$$K_i = Y_i \setminus (U \cup V).$$

Gli insiemi K_i sono compatti e totalmente ordinati mediante inclusione. Inoltre non sono vuoti perché Y_i connette a e b per ogni indice i. Quindi $K = \cap_{i \in I} K_i$ è un compatto non vuoto di $\mathbf{X}$ contenuto in Y e disgiunto da $U \cup V$. Ciò è assurdo perché avevamo supposto che $Y \subset U \cup V$. Quindi Y connette a e b e il lemma è dimostrato.

Teorema 6.2 *Sia $\mathbf{X}$ uno spazio di Hausdorff compatto. Se X connette due suoi punti distinti a e b, allora contiene un continuo K che contiene a e b.*

Dim. Sia Γ la famiglia dei chiusi di $\mathbf{X}$ che connettono a e b. Poiché per ipotesi $X \in \Gamma$, la famiglia Γ è non vuota. Per il principio della catena massimale[13] possiamo allora trovare una catena massimale di insiemi $\{Y_i \mid i \in I\} \subset \Gamma$ totalmente ordinata mediante inclusione. Per il lemma precedente, $Y = \cap_{i \in I} Y_i \in \Gamma$.

Dico che Y è un continuo. Infatti Y è compatto. Se non fosse connesso, potremmo trovare due aperti U e V nella topologia di sottospazio di Y tali che $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $Y = U \cup V$, con $a \in U$. Poiché Y connette a e b, anche $b \in U$ e $U = Y \setminus V$ è un chiuso che connette a e b ed è propriamente contenuto in Y. Ciò contraddice il fatto che la catena $\{Y_i\}$ fosse massimale. Quindi Y è un continuo e il teorema è dimostrato.

§7 Caratterizzazione topologica del segmento e del cerchio

Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio topologico. Diciamo che un sottoinsieme $Y \subset X$ *sconnette* $\mathbf{X}$ se $X \setminus Y$ è sconnesso. Diciamo che $x \in X$ *sconnette* $\mathbf{X}$ se $X \setminus \{x\}$ è sconnesso.

Esempio 7.1 Sia A un aperto non denso di uno spazio topologico $\mathbf{X}$. Allora la frontiera bA di A sconnette $\mathbf{X}$: infatti $X \setminus bA$ è unione dei due aperti non vuoti e disgiunti A e $X \setminus \overline{A}$.

Lemma 7.1 *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ un continuo di Hausdorff e supponiamo vi sia un punto $a \in X$ che lo sconnetta. Siano U, V due aperti non vuoti e disgiunti tali che $X \setminus \{a\} = U \cup V$. Allora $\overline{U} = U \cup \{a\}$ e $\overline{V} = V \cup \{a\}$ sono continui.*

Dim. Osserviamo che, poiché $\mathbf{X}$ è di Hausdorff, $X \setminus \{a\}$ è aperto. Quindi U e V sono aperti in $\mathbf{X}$ e non possono essere contemporaneamente chiusi in $\mathbf{X}$ perché $\mathbf{X}$ è connesso e $U, V \neq \emptyset$, X.

[13] Il principio della catena massimale, equivalente all'assioma della scelta, si enuncia nel modo seguente: Se A è un insieme ordinato mediante una relazione d'ordine "$<$" e B un sottoinsieme di A su cui "$<$" definisce un ordinamento totale, allora vi è un sottoinsieme $\tilde{B}$ di A, contenente B, su cui "$<$" è una relazione di ordine totale, che non è contenuto propriamente in nessun sottoinsieme totalmente ordinato di A.

Poiché U e V sono chiusi in $X \setminus \{a\}$, la loro chiusura in $\mathbf{X}$ sarà necessariamente data da $\overline{U} = U \cup \{a\}$ e $\overline{V} = V \cup \{a\}$ rispettivamente.

Consideriamo la funzione $f : X \to U \cup \{a\}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in U \cup \{a\} \\ a & \text{se} \quad x \in V \cup \{a\}. \end{cases}$$

Essa è surgettiva e continua perché $\{\overline{U}, \overline{V}\}$ è un ricoprimento chiuso finito e dunque fondamentale di X. Quindi $U \cup \{a\}$ è connesso perché immagine di un connesso mediante un'applicazione continua e compatto perché sottoinsieme chiuso di un compatto. È dunque un continuo. In modo analogo si verifica che $V \cup \{a\}$ è anch'esso un continuo.

Teorema 7.2 *Un continuo di Hausdorff che contenga almeno due punti contiene almeno due punti che non lo sconnettono.*

Dim. Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ un continuo di Hausdorff. Sia $N \subset X$ l'insieme dei punti che non sconnettono $\mathbf{X}$ e supponiamo per assurdo che N abbia cardinalità minore o uguale di 1. Fissiamo un punto $x_0 \in X \setminus N$. Possiamo allora fissare una coppia di aperti non vuoti e disgiunti U, V di $\mathbf{X}$ tali che

$$U \cup V = X \setminus x_0, \quad N \subset V.$$

Per ogni punto $x \in U$, fissiamo una coppia U_x, V_x di aperti non vuoti e disgiunti tali che

$$U_x \cap V_x = \emptyset, \quad X \setminus \{x\} = U_x \cup V_x, \quad x_0 \in V_x.$$

Osserviamo che, se $x, y \in U$ e $y \in U_x$, allora

$$\overline{U_y} = U_y \cup \{y\} \subset U_x.$$

Infatti $V_x \cup \{x\}$ è un continuo che non contiene y. Esso sarà dunque tutto contenuto in uno dei due aperti disgiunti U_y, V_y. Poiché $x_0 \in V_x \cap V_y \neq \emptyset$, ne segue che

$$V_x \cup \{x\} \subset V_y$$

e questa, per passaggio ai complementari, ci dà:

$$U_y \cup \{y\} \subset U_x.$$

Sia $\Gamma = \{U_x \,|\, x \in U\}$. Per il principio della catena massimale, Γ contiene una catena massimale $\mathcal{C} = \{U_{x_j} \,|\, j \in J\}$ totalmente ordinata mediante inclusione. Osserviamo che, se $x_i \in U_{x_j}$, allora $U_{x_i} \cup \{x_i\} \subset U_{x_j}$ e $i < j$ nella relazione d'ordine indotta su J dall'inclusione propria. Per la massimalità della catena $\mathcal{C}$, per ogni $j \in J$ vi è un indice $i \in J$ con $i < j$ e $x_i \in U_j$. Se poniamo quindi

$$K_j = \bigcap_{\substack{x_i \in U_{x_j} \\ i \in J}} (U_{x_i} \cup \{x_i\})$$

otteniamo una famiglia di compatti non vuoti totalmente ordinati mediante inclusione. Quindi

$$\emptyset \neq K = \cap_{j \in J} K_j \subset \cap_{j \in J} U_{x_j}.$$

Ma, se $p \in K$, allora $U_p \subsetneq U_p \cup \{p\} \subset U_{x_j}$ per ogni $j \in J$ contraddice il fatto che la catena $\mathcal{C}$ sia massimale. Abbiamo quindi ottenuto una contraddizione. Ne segue che N contiene almeno due punti distinti.

LEMMA 7.3 *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ un continuo di Hausdorff e sia $x \in X$ un punto che lo sconnette. Siano U e V due aperti non vuoti e disgiunti di $\mathbf{X}$ tali che $U \cup V = X \setminus \{x\}$. Allora ciascuno dei due aperti U e V contiene un punto che non sconnette $\mathbf{X}$.*

DIM. Osserviamo che $U \cup \{x\}$ è un continuo di Hausdorff che contiene almeno due punti. Esso contiene quindi almeno un punto y distinto da x che non lo sconnette. Dico che y non sconnette $\mathbf{X}$. Infatti, se così non fosse, avremmo $X \setminus \{y\} = A \cup B$ con A aperti non vuoti e disgiunti di $\mathbf{X}$. I due aperti A e B hanno chiusura $A \cup \{y\}$ e $B \cup \{y\}$ rispettivamente. In particolare, poiché y appartiene sia alla chiusura di A che alla chiusura di B, l'intorno aperto U di y interseca sia A che B. Quindi il punto y sconnetterebbe $U \cup \{x\}$. Questo ci dà una contraddizione e dimostra che y non sconnette $\mathbf{X}$.

LEMMA 7.4 *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ un continuo di Hausdorff che contiene esattamente due punti a, b che non lo sconnettono. Allora per ogni $x \in X \setminus \{a, b\}$, l'insieme $X \setminus \{x\}$ è unione di due componenti connesse, l'una contenente a e l'altra contenente b.*

DIM. Sia $x \in X \setminus \{a, b\}$. Allora $X \setminus \{x\}$ è unione di due aperti non vuoti e disgiunti U e V e possiamo supporre che $a \in U$. Per il lemma precedente V contiene un punto che non sconnette $\mathbf{X}$. Poiché gli unici punti che non sconnettono $\mathbf{X}$ sono a e b e $a \notin V$, ne segue che $b \in V$.

Per completare la dimostrazione basta quindi verificare che U e V sono connessi. Sia $y \in U \setminus \{a\}$. Sia $X \setminus \{y\} = U_y \cup V_y$ con U_y e V_y aperti non vuoti e disgiunti e $a \in U_y$. Per le osservazioni precedenti $V_y \ni b$. Poiché $V \cup \{x\}$ è un continuo che contiene b e non contiene y, esso è tutto contenuto in uno dei due aperti U_y o V_y. Essendo $b \in V \cap V_y \neq \emptyset$, ne segue che

$$V \cup \{x\} \subset V_y$$

da cui, passando ai complementari,

$$U_y \cup \{y\} \subset U.$$

Quindi, se $y \in U$, l'aperto U contiene un continuo che contiene a e y. Ne segue che U è connesso. Analogamente si dimostra che V è connesso.

LEMMA 7.5 *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ un continuo di Hausdorff che contiene esattamente due punti a, b che non lo sconnettono. Per ogni $x \in X$ indichiamo con $[a, x[$ la componente connessa di $X \setminus \{x\}$ che contiene a e con $]x, b]$ la componente connessa di $X \setminus \{x\}$ che contiene b. Definiamo la relazione*

$$x \prec y \quad \text{se} \quad x, y \in X \quad \text{e} \quad x \in [a, y[\quad \text{oppure} \quad y = b.$$

Allora

(1) *"$\prec$" è un ordinamento totale su X.*
(2) *Gli insiemi $[a, x[$ e $]x, b]$ al variare di $x \in X \setminus \{a, b\}$ formano una prebase di aperti per la topologia di $\mathbf{X}$.*

Dim. Siano $x, y \in X$. Supponiamo che $x \neq y$ e che $x \notin [a, y[$. Sarà allora $x \in]y, b]$ e dunque la componente connessa $[a, x[$ di a in $X \setminus \{x\}$ contiene $[a, y[\cup \{y\}$ perché tale insieme è un continuo contenente a e contenuto in $X \setminus \{x\}$. Questo dimostra che $y \prec x$ se $x \neq y$ e $x \not\prec y$. Il fatto che la relazione "$\prec$" sia una relazione d'ordine segue immediatamente perché

$$x \prec y \Leftrightarrow [a, x[\cup \{x\} \subset [a, y[.$$

Sia τ la topologia su X che ha come prebase degli aperti la famiglia Γ degli insiemi della forma $[a, x[$ e $]x, b]$ con $a \prec x \prec b$. Siano $x, y \in X$ con $x \prec y$. Allora $[a, x[\cup \{x\}$ e $]y, b] \cup \{y\}$ sono due chiusi disgiunti di $\mathbf{X}$. Poiché $\mathbf{X}$ è connesso, vi è un punto $z \in X$ che non appartiene a nessuno dei due insiemi. Allora $x \prec z \prec y$ e $[a, z[$ e $]z, b]$ sono elementi di Γ disgiunti che contengono rispettivamente x e y. La topologia τ è quindi di Hausdorff. L'applicazione $\iota : X \ni x \to x \in X$ è continua da X con la topologia di Hausdorff τ_X per cui $\mathbf{X}$ è compatto su X con la topologia τ. Poiché ι è bigettiva, essa è un omeomorfismo. Questo dimostra anche la seconda affermazione del lemma.

Lemma 7.6 *Sia $\Delta = \{m \cdot 2^{-n} \,|\, m, n \in \mathbb{N},\ 0 < m < 2^n\}$. Se D è un insieme numerabile, totalmente ordinato mediante una relazione d'ordine "$\prec$", tale che*

$$\forall x \prec\!< y \in D \quad \exists z \in D \quad \textit{tale che} \quad x \prec z \prec y,$$

e tale che D non contenga nè un massimo nè un minimo. Allora possiamo trovare un'applicazione bigettiva crescente

$$\phi : \Delta \to D.$$

Dim. Poniamo $\Delta_n = \{m \cdot 2^{-n} \,|\, m \in \mathbb{N},\ 0 < m < 2^n\}$. Sia $D = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, con $x_n \neq x_m$ se $n \neq m$. Definiamo per ricorrenza $\phi_n : \Delta_n \ni r \to \phi_n(r)$ tale che

$$(*) \qquad \begin{cases} \phi_n(r_1) \prec \phi_n(r_2) & \text{se} \quad r_1 < r_2 \in \Delta_n \\ \phi_n|_{\Delta_{n-1}} = \phi_{n-1} & \text{se} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Per $n = 1$, l'insieme Δ_1 contiene soltanto $1/2$. Definiamo $\phi_1(1/2) = x_0$. Supponiamo di aver definito ϕ_h per $h \leq n \geq 1$ in modo tale che le $(*)$ siano soddisfatte. Definiamo allora

$$\phi_{n+1}(r) = \begin{cases} \phi_n(r) \quad \text{se} \quad r \in \Delta_n \\ x_\nu \quad \text{se} \quad r = (2m+1) \cdot 2^{-(n+1)} \quad \text{e} \\ \qquad \nu = \min\{m \in \mathbb{N} \,|\, \phi_n(m \cdot 2^{-n}) \prec x_m \prec \phi_n((m+1) \cdot 2^{-n})\}. \end{cases}$$

Si verifica immediatamente che $\phi_1, ..., \phi_{n+1}$ verificano ancora le $(*)$. Possiamo allora definire $\phi : \Delta \to D$ ponendo $\phi|_\Delta = \phi_n$ per ogni intero $n \geq 1$. Poiché l'ordinamento "$\prec$" è totale, la ϕ è surgettiva ed è inoltre strettamente crescente per costruzione.

TEOREMA 7.7 *Sia* $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ *un continuo di Hausdorff metrizzabile. Se* X *contiene soltanto due punti distinti* a, b *che non lo sconnettono, allora* $\mathbf{X}$ *è omeomorfo all'intervallo* I*.*

DIM. Uno spazio compatto di Hausdorff metrizzabile è separabile. Sia D un sottoinsieme denso e numerabile di X. Possiamo supporre che $a, b \notin D$. Sia $\prec$ la relazione d'ordine su X introdotta nel Lemma I.22.5. Sia $\phi : \Delta \to D$ bigettiva e crescente. Essa è continua per le topologie di Δ come sottospazio di I e di D come sottospazio di $\mathbf{X}$. Definiamo $f : X \to I$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{se} \quad x = b \\ \inf\{r \in \Delta \mid x \in [a, \phi(r)[\} \quad \text{se} \quad x \in X \setminus \{b\}. \end{cases}$$

La f dà l'omeomorfismo cercato. Infatti la f è bigettiva perché, se $x \prec y \in X$, allora possiamo trovare elementi $z_1, z_2 \in D$ tali che $x \prec z_1 \prec z_2 \prec y$ e quindi

$$f(x) \leq \phi^{-1}(z_1) < \phi^{-1}(z_2) \leq f(y).$$

la f^{-1} è continua perché gli aperti della forma $[0, r[$ e $]r, 1]$ con $r \in \Delta$ formano una prebase degli aperti di I e $f([0, r[) = [a, \phi(r)[$, $f(]r, b]) =]\phi(r), b]$ sono aperti di $\mathbf{X}$. Poiché $\mathbf{X}$ e I sono compatti di Hausdorff, la f è allora un omeomorfismo.

TEOREMA 7.8 *Sia* $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ *un continuo metrico che contiene almeno due punti, tale che, per ogni coppia di punti distinti* x, y *di* X*, il sottospazio* $X \setminus \{x, y\}$ *non sia connesso. Allora* $\mathbf{X}$ *è omeomorfo al cerchio* $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$*.*

DIM. Dividiamo la dimostrazione in diversi passi.

(α) *Nessun punto di* $\mathbf{X}$ *lo sconnette.*

Supponiamo per assurdo che vi sia un punto $a \in X$ tale che $X \setminus \{a\}$ sia sconnesso. Sia $X \setminus \{a\} = U \cup V$ con U e V aperti non vuoti e disgiunti. Allora $U \cup \{a\}$ e $V \cup \{a\}$ sono entrambi continui e quindi contengono due punti $a \neq x \in U$ e $a \neq y \in V$ che non li sconnettono. Allora

$$X \setminus \{x, y\} = ((U \cup \{a\}) \setminus \{x\}) \cup ((V \cup \{a\}) \setminus \{y\})$$

sarebbe connesso perché unione di due connessi contenenti il punto a. Questo dimostra l'asserzione (α).

(β) *Fissiamo due punti distinti* $a, b \in X$*. Siano* U *e* V *due aperti non vuoti e disgiunti tali che*

$$X \setminus \{a, b\} = U \cup V.$$

Allora $U \cup \{a, b\}$ *e* $V \cup \{a, b\}$ *sono entrambi connessi.*

Supponiamo per assurdo che $U \cup \{a, b\}$ non sia connesso. Sia

$$U \cup \{a, b\} = W_1 \cup W_2$$

con W_1 e W_2 aperti non vuoti e disgiunti del sottospazio $U \cup \{a, b\}$. Possiamo supporre che $a \in W_1$. Se W_1 contenesse anche il punto b, allora W_2 sarebbe aperto e chiuso in $\mathbf{X}$ e questo non è possibile perché $\mathbf{X}$ è connesso. Quindi $b \in W_2$. Allora $W_1 \setminus \{a\}$ e $W_2 \cup V$ sono due chiusi disgiunti di $X \setminus \{a\}$ la cui unione è $X \setminus \{a\}$ e questo contraddice il punto (α). Notiamo in particolare che $U \cup \{a, b\}$ e $V \cup \{a, b\}$ sono due continui.

(γ) *Uno dei due insiemi* $U \cup \{a, b\}$ *e* $V \cup \{a, b\}$ *è omeomorfo all'intervallo* $I \subset \mathbb{R}$.

Se così non fosse, ciascuno dei due insiemi conterrebbe un punto distinto da a e b che non li sconnette. Siano $x \in U$ e $y \in V$ punti che non sconnettono $U \cup \{a, b\}$ e $V \cup \{a, b\}$ rispettivamente. Allora

$$X \setminus \{x, y\} = ((U \cup \{a, b\}) \setminus \{x\}) \cup (V \cup \{a, b\}) \setminus \{y\})$$

sarebbe connesso perché unione di due connessi che hanno in comune i punti a e b.

(δ) Ciascuno dei due insiemi $U \cup \{a, b\}$ e $V \cup \{a, b\}$ è omeomorfo a I.

Per il punto (γ) uno dei due insiemi, diciamo $V \cup \{a, b\}$, è omeomorfo all'intervallo I. Se $U \cup \{a, b\}$ non fosse anch'esso omeomorfo a I, allora conterrebbe un punto x distinto da a e da b che non lo sconnette. Scegliamo un qualsiasi punto $y \in V$. Allora, se A e B sono le componenti connesse di a e b rispettivamente in $(V \cup \{a, b\}) \setminus \{y\}$, avremmo

$$X \setminus \{x, y\} = ((U \cup \{a, b\}) \setminus \{x\}) \cup A \cup B$$

connesso perché unione di connessi due a due non disgiunti. Quindi $U \cup \{a, b\}$ e $V \cup \{a, b\}$ sono entrambi omeomorfi a I.

(ϵ) Sia $\phi_1 : I \to U \cup \{a, b\}$ un omoemorfismo con $\phi(0) = a$, $\phi_1(1) = b$ e sia $\psi_2 : I \to V \cup \{a, b\}$ un omeomorfismo con $\psi_2(0) = b$, $\psi_2(1) = a$. Definiamo $f : I \to X$ mediante

$$f(t) = \begin{cases} \psi_1(2t) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ \psi_2(2t-1) & \text{se} \quad 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Otteniamo un'applicazione continua e chiusa che per passaggio al quoziente iniettivo, tenuto conto dell'omeomorfismo $I/(\{0, 1\}) \simeq S^1$, dà l'omeomorfismo desiderato.

§8 Spazi di Peano

Uno *spazio di Peano* è un continuo topologico metrizzabile e localmente connesso.

In questo paragrafo dimostreremo il seguente

Teorema 8.1 *Uno spazio metrizzabile connesso, compatto e localmente connesso è connesso per archi.*

Premettiamo alla dimostrazione di questo teorema alcune nozioni e risultati.

Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio topologico e siano x, y due punti di X. Una *catena semplice di aperti che congiunge* x *a* y è una famiglia finita di aperti $\{A_1, ..., A_n\}$ con le proprietà:

$$\begin{array}{ll} (i) & x \in A_1, \quad y \in A_n \\ (ii) & A_i \cap A_j \neq \emptyset \Leftrightarrow |i - j| = 1. \end{array}$$

Teorema 8.2 *Sia* $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ *uno spazio topologico connesso e sia* Γ *un ricoprimento aperto di* X*. Dati due punti* x, y *di* X*, è possibile trovare una catena semplice di elementi di* Γ *che congiunge* x *a* y*.*

Dim. Sia x un punto di X e sia Y l'insieme di tutti i punti y di X che possono essere congiunti a x mediante una catena semplice di aperti di Γ. Se $\{A_1, ..., A_n\}$ è una catena semplice di aperti di Γ che congiunge x a y, allora essa congiunge x a tutti i punti di A_n e quindi $A_n \subset Y$. Perciò Y è un sottoinsieme aperto di $\mathbf{X}$. Per dimostrare che Y è anche chiuso, fissiamo un punto $z \in \overline{Y}$. Esso è contenuto in un aperto $B \in \Gamma$. L'aperto B contiene un elemento $y \in Y$. Sia $\{A_1, ..., A_n\}$ una catena semplice che congiunge x a y. Certamente $A_n \cap B \neq \emptyset$ e vi sarà quindi un minimo intero h con $1 \leq h \leq n$ tale che $B \cap A_h \neq \emptyset$. Allora $\{A_1, ..., A_h, B\}$ è una catena semplice di aperti di Γ che congiunge x a y. Quindi Y è aperto e chiuso in $\mathbf{X}$ e non vuoto perché contiene x. Dunque coincide con X perché $\mathbf{X}$ è connesso.

Siano $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$ e $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_m\}$ due catene semplici che congiungono i punti x e y di uno spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$. Diciamo che la catena $\mathcal{A}$ *raffina* la catena $\mathcal{B}$ se è possibile trovare un'applicazione non decrescente

$$\tau : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., m\}$$

tale che $A_j \subset B_{\tau(j)}$ per ogni $1 \leq j \leq n$.

Lemma 8.3 *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio di Hausdorff connesso e localmente connesso. Sia $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_m\}$ una catena semplice di aperti connessi di $\mathbf{X}$ che congiunge $x \neq y \in X$. Sia Γ una famiglia di aperti di $\mathbf{X}$ tale che ogni aperto B_j sia unione di elementi di Γ. Vi è allora una catena semplice $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$ di aperti di Γ che congiunge x a y ed è un raffinamento della catena $\mathcal{B}$.*

Dim. Ragioniamo per induzione sul numero m di aperti della catena semplice $\mathcal{B}$. Se $m = 1$, poiché B_1 è connesso, la tesi segue dal teorema precedente. Supponiamo ora $m > 1$ e la tesi vera per catene semplici di aperti connessi contenenti meno di m elementi. Fissiamo un punto $z \in B_{m-1} \cap B_m$. Allora $\mathcal{B}' = \{B_1, ..., B_{m-1}\}$ è una catena semplice di aperti connessi che congiungono x a z e possiamo quindi trovare una catena semplice $\{A_1, ..., A_\ell\}$ di aperti di Γ che congiunge x a z e raffina $\mathcal{B}'$. Poiché B_m è un aperto connesso che contiene z e y, possiamo, per il teorema precedente, trovare una catena semplice di aperti $\mathcal{C} = \{C_1, ..., C_h\}$ di Γ, tutti contenuti in B_m che congiunge z a y. Sia $r \leq \ell$ il più piccolo intero positivo per cui $A_r \cap (\cup_{i=1}^h C_i) \neq \emptyset$. Sia poi s il più grande intero positivo con $1 \leq s \leq h$ tale che $A_r \cap C_s \neq \emptyset$. Allora $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_r, C_s, C_{s+1}, ..., C_h\}$ è la catena di aperti di Γ cercata.

Dimostrazione del Teorema .8.1.

Siano x e y due punti distinti di uno spazio di Peano $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$. Fissiamo una distanza d su X che definisca la topologia di $\mathbf{X}$. Indichaimo con Γ_n la famiglia degli aperti connessi di $\mathbf{X}$ che hanno rispetto alla distanza d diametro minore di 2^{-n}. Osserviamo che per ogni n la famiglia Γ_n è una base degli aperti di $\mathbf{X}$. Costruiamo per ricorrenza per ogni $h \in \mathbb{N}$ catene semplici $\mathcal{A}_h = \{A_{h1}, ..., A_{hn_h}\}$ di aperti di Γ_h che congiungono x a y tali che $\mathcal{A}_{h+1}$ sia un raffinamento di $\mathcal{A}_h$ per ogni $h \geq 1$ e

$$\cup_{i=1}^{n_{h+1}} \overline{A}_{(h+1)i} \subset \cup_{i=1}^{n_h} A_{hi} \quad \forall h \geq 1.$$

Per il Teorema .8.2, vi è una catena semplice $\mathcal{A}_1 = \{A_{11}, ..., A_{1n_1}\}$ di elementi di Γ_1 che congiunge x a y. Supponiamo di aver costruito $\mathcal{A}_1$, ..., $\mathcal{A}_{h-1}$ con le proprietà richieste, per qualche $h \geq 2$. Osserviamo che la famiglia Γ'_h formata dagli aperti U di Γ_h tali che $\overline{U}$ sia contenuto in uno degli aperti della catena $\mathcal{A}_{h-1}$ soddisfa le ipotesi del Lemma .8.1 e quindi possiamo trovare una catena semplice $\mathcal{A}_h$ di aperti di Γ'_h che congiunge x a y e raffina $\mathcal{A}_h$.

Osserviamo ora che, posto $A_h = \cup_{i=1}^{n_h} A_{hi}$, abbiamo

$$\cap_{h=1}^{\infty} A_h = \cap_{h=1}^{\infty} \overline{A}_h = K$$

e quindi K è un continuo che contiene x e y. Sia $z \in K \setminus \{x, y\}$. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ siano j_h e k_h rispettivamente il più piccolo e il più grande intero positivo i con $1 \leq i \leq n_h$ tali che $z \in A_{hi}$ e poniamo

$$U_h = \cup_{i<j_h} A_{ji} \quad \text{e} \quad V_h = \cup_{i>k_h} A_{ji}.$$

Allora

$$U = \cup_h U_h \quad \text{e} \quad V = \cup_h V_h$$

sono due aperti disgiunti di $\mathbf{X}$ che ricoprono $K \setminus \{z\}$ e contengono il primo x e il secondo y. Ne segue che il continuo K contiene soltanto i due punti x e y che non lo sconnettono e pertanto è omeomorfo all'intervallo I.

Osservazione Uno spazio di Peano è localmente connesso per archi.

Con una dimostrazione simile a quella del teorema precedente, si può anche dimostrare:

Teorema 8.4 *Uno spazio metrico completo connesso e localmente connesso è connesso per archi.*

Dim. Si costruiscono le catene semplici di aperti $\mathcal{A}_h$ come nella dimostrazione del teorema precedente. Osserviamo poi che l'iniseme K ottenuto intersecando gli insiemi $A_h = \cup \mathcal{A}_h$ è un continuo. Esso è infatti compatto perché è chiuso di $\mathbf{X}$ (in quanto intersezione di chiusi) e quindi è uno spazio metrico completo ed è inoltre totalmente limitato (la catena $\mathcal{A}_h$ è un ricoprimento finito di K con aperti di diametro minore di 2^{-h}). Esso è connesso. Se infatti vi fossero due sottoinsiemi non vuoti F_1 e F_2 di K contemporaneamente aperti e chiusi in K con $F_1 \cup F_2 = K$, sarebbe $d(F_1, F_2) = \delta > 0$. Sia h un intero positivo tale che $2^{1-h} < \delta$. Allora vi è almeno un elemento A_{hi_h} della catena $\mathcal{A}_h$ che non interseca nè F_1 nè F_2 e quindi non interseca K. Per la costruzione delle catene $\mathcal{A}_h$ possiamo supporre che per ogni h con $2^h > 2/\delta$ risulti

$$\overline{A}_{(h+1)i_{(h+1)}} \subset A_{hi_h}$$

e otteniamo quindi una contraddizione perché, per la completezza di (X, d),

$$\emptyset \neq \cap_{2^h > 2/\delta} A_{hi_h} \not\subset K.$$

Si dimostra poi che l'insieme K è omeomorfo all'intervallo $I = [0, 1]$ con lo stesso argomento usato nella dimostrazione del Teorema .8.1.

CAPITOLO VI

PARACOMPATTEZZA

§1 Paracompattezza e partizione dell'unità

Uno spazio topologico si dice *paracompatto* se è di Hausdorff e se in ogni suo ricoprimento aperto se ne può inscrivere uno localmente finito.

Esempio 1.1 Ogni spazio di Hausdorff compatto è paracompatto.

Osservazione *Un sottospazio chiuso di uno spazio paracompatto è paracompatto.*

Lemma 1.1 *Ogni spazio paracompatto è regolare.*

Dim. Sia x un punto di uno spazio paracompatto $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ ed U un suo intorno aperto in $\mathbf{X}$. Poiché $\mathbf{X}$ è di Hausdorff, ogni punto $y \notin U$ ha un intorno aperto $V_y \ni y$ in $\mathbf{X}$ con $x \notin \overline{V}_y$. La famiglia

$$\Gamma = \{U\} \cup \{V_y \,|\, y \in X \setminus U\}$$

è un ricoprimento aperto di X. Poiché $\mathbf{X}$ è paracompatto, la famiglia Γ ammette un raffinamento Δ localmente finito. Sia

$$\Delta' = \{A \in \Delta \,|\, A \subset V_y \text{ per qualche } y \in X \setminus U\}.$$

Allora $W = \bigcup \Delta'$ è un intorno aperto di $X \setminus U$. Poiché Δ è localmente finito, la chiusura dell'unione degli elementi di Δ è l'unione delle chiusure dei suoi elementi :

$$\overline{W} = \bigcup \{\, \overline{A} \,|\, A \in \Delta' \}\,.$$

Abbiamo perciò

$$x \in \underbrace{X \setminus \overline{W}}_{\text{aperto}} \subset \underbrace{X \setminus W}_{\text{chiuso}} \subset U$$

e dunque $X \setminus W$ è un intorno chiuso di x contenuto in U.

Abbiamo quindi dimostrato che ogni punto di X ammette un sistema fondamentale di intorni chiusi e quindi $\mathbf{X}$ è regolare.

Lemma 1.2 *Sia* $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ *uno spazio paracompatto e sia*

$$\Gamma = \{A_j \,|\, j \in J\}$$

un ricoprimento aperto di X. Possiamo allora trovare un raffinamento aperto localmente finito di Γ della forma:

$$\Delta = \{B_j \,|\, j \in J\}$$

tale che

$$\overline{B}_j \subset A_j \quad \forall j \in J.$$

Dim. Per ogni $x \in X$ scegliamo un indice $\hat{\jmath}(x) \in J$ tale che $x \in A_{\hat{\jmath}(x)}$. Poiché $\mathbf{X}$ è uno spazio regolare, possiamo trovare per ogni $x \in X$ un intorno aperto U_x di x tale che

$$\overline{U}_x \subset A_{\hat{\jmath}(x)} \quad \forall x \in X.$$

Il ricoprimento aperto $\{U_x \,|\, x \in X\}$ ammette, poiché $\mathbf{X}$ è paracompatto, un raffinamento aperto Δ' localmente finito. Sia

$$\Delta' \ni W \to x(W) \in X$$

una funzione di raffinamento, cioè una applicazione tale che

$$W \subset U_{x(W)} \quad \forall W \in \Delta'.$$

Poniamo allora, per ogni $j \in J$:

$$B_j = \bigcup \{W \in \Delta' \,|\, \hat{\jmath}(x(W)) = j\}$$

e definiamo

$$\Delta = \{B_j \,|\, j \in J\}.$$

Allora Δ è un ricoprimento localmente finito di X che gode della proprietà richiesta: infatti

$$\overline{B}_j = \bigcup \{\overline{W} \,|\, W \in \Delta',\ \hat{\jmath}(x(W)) = j\}$$

perché Δ' è localmente finito e quindi $\overline{B}_j \subset A_j$ in quanto $\overline{U}_x \subset A_j$ se $\hat{\jmath}(x) = j$.

Teorema 1.3 *Ogni spazio paracompatto è normale.*

Dim. Sia $\mathbf{X}$ uno spazio paracompatto. Per dimostrare che è normale, mostriamo che ogni chiuso di $\mathbf{X}$ ha un sistema fondamentale di intorni chiusi. Sia A un chiuso di $\mathbf{X}$ e sia U un intorno aperto di A in $\mathbf{X}$. Allora $\{U, X \setminus A\}$ è un ricoprimento aperto di X e per il lemma precedente possiamo trovare un ricoprimento aperto $\{V, W\}$ di X tale che $\overline{V} \subset U$ e $\overline{W} \subset X \setminus A$. Poiché W è contenuto in $X \setminus A$, l'aperto V contiene A. In particolare $\overline{V}$ è un intorno chiuso di A contenuto in U.

Ricordiamo che una partizione continua dell'unità subordinata a un ricoprimento aperto Γ di uno spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ è il dato di una famiglia di funzioni continue

$$\{\phi_A : X \to [0, 1] \,|\, A \in \Gamma\}$$

tali che

(i) $\mathrm{supp}\phi_A = \overline{\{x \in X \,|\, \phi_A(x) \neq 0\}} \subset A$;
(ii) $\{\mathrm{supp}\phi_A \,|\, A \in \Gamma\}$ è una famiglia di chiusi localmente finita;
(iii) $\sum_{A \in \Gamma} \phi_A(x) = 1 \quad \forall x \in X$.

TEOREMA 1.4 *Uno spazio topologico* $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ *è paracompatto se e soltanto se è di Hausdorff e ad ogni suo ricoprimento aperto si può subordinare una partizione continua dell'unità su* X.

DIM. Supponiamo che $\mathbf{X}$ sia paracompatto. Sia $\Gamma = \{A_j \mid j \in J\}$ un qualsiasi ricoprimento aperto di X. Per il Lemma 1.2 possiamo allora trovare un raffinamento localmente finito di Γ della forma $\Delta = \{B_j \mid j \in J\}$ tale che $\overline{B}_j \subset A_j$ per ogni $j \in J$. Poiché $\mathbf{X}$ è uno spazio normale e Δ è localmente finito, per il Teorema III.4.2 possiamo trovare una partizione dell'unità $\{\phi_j \mid j \in J\}$ subordinata a Δ. Essa è allora subordinata a Γ.

Dimostriamo ora il viceversa. Sia Γ un qualsiasi ricoprimento aperto di X. Se $\{\phi_A \mid A \in \Gamma\}$ è una partizione continua dell'unità subordinata a Γ, allora

$$\Delta = \{\{x \in X \mid \phi_A(x) \neq 0\} \mid A \in \Gamma\}$$

è un raffinamento aperto localmente finito di Γ.

§2 PARACOMPATTEZZA E CONNESSIONE

TEOREMA 2.1 *Sia* $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ *uno spazio di Hausdorff localmente compatto. Se* X *è unione numerabile di compatti di* $\mathbf{X}$, *allora* $\mathbf{X}$ *è paracompatto. Viceversa, se* $\mathbf{X}$ *è connesso e paracompatto, allora è unione numerabile di compatti.*

DIM. Supponiamo che $\mathbf{X}$ sia uno spazio di Hausdorff localmente compatto e che vi sia una successione $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di compatti tali che

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n.$$

In $\mathbf{X}$ ogni compatto ammette un sistema fondamentale di intorni compatti. In particolare possiamo trovare un compatto $A_0 \Subset X$ tale che

$$K_0 \subset \mathring{A}_0 \neq \emptyset.$$

Per ricorrenza, possiamo costruire una successione $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di compatti di $\mathbf{X}$ tale che, con A_0 definito come sopra, risulti:

$$\left(\bigcup_{j=0}^{n} A_j\right) \cup K_{n+1} \subset \mathring{A}_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sia ora Γ un qualsiasi ricoprimento aperto di X. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo trovare una sottofamiglia finita Γ_n di Γ tale che

$$A_n \subset \bigcup \Gamma_n.$$

Posto $A_{-1} = \emptyset$, definiamo:

$$\Delta_n = \{B \cap (\mathring{A}_{n+1} \setminus A_{n-1}) \mid B \in \Gamma_n\}.$$

Sia

$$\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n.$$

Osserviamo allora che

(a) Δ è un ricoprimento aperto di X. Infatti $\bigcup \Delta_n \supset A_n \setminus A_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi

$$\bigcup \Delta \supset \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = X.$$

(b) Δ è inscritto in Γ.

(c) Δ è localmente finito. Sia infatti $x \in X$. Sia n il più piccolo intero positivo tale che $x \in A_n$. Allora $\overset{\circ}{A}_{n+1}$ è un intorno aperto di x in $\mathbf{X}$ che interseca al più gli elementi di Δ che sono in $\bigcup_{j=0}^{n+2} \Delta_j$, e questi sono in numero finito.

Supponiamo ora che $\mathbf{X}$ sia di Hausdorff, localmente compatto, paracompatto e connesso. Poiché $\mathbf{X}$ è uno spazio di Hausdorff localmente compatto, ammette un ricoprimento aperto $\tilde{\Gamma}$ tale che, se $A \in \tilde{\Gamma}$, allora $\overline{A}$ sia compatto in $\mathbf{X}$. Poiché $\mathbf{X}$ è paracompatto, possiamo trovare un raffinamento Γ di $\tilde{\Gamma}$ localmente finito. Chiaramente $\overline{A}$ è ancora compatto in $\mathbf{X}$ per ogni $A \in \Gamma$. Fissiamo un sottoinsieme finito Δ_0 di aperti non vuoti di Γ e poniamo

$$K_0 = \bigcup \{\overline{A} \,|\, A \in \Delta_0\}.$$

Questo insieme è compatto perché unione finita di compatti e non vuoto. Definiamo per ricorrenza

$$\begin{cases} \Delta_{n+1} = \left\{ A \in \Delta \setminus \bigcup_{j=0}^{n} \Delta_j \,|\, A \cap K_n \neq \emptyset \right\}, & n \geq 0 \\ \\ K_{n+1} = \overline{\bigcup \Delta_{n+1}} & n \geq 0. \end{cases}$$

Poiché gli insiemi di una famiglia localmente finita che hanno intersezione non vuota con un compatto assegnato sono in numero finito, otteniamo per ricorrenza:

$$\Delta_n \quad \text{è finito,} \quad K_n \quad \text{è compatto} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poniamo $A_n = \bigcup_{j=0}^{n} K_j$. Allora

$$K_n \subset A_n \subset \overset{\circ}{A}_{n+1}.$$

Poiché i Δ_n sono due a due disgiunti, $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$ è una sottofamiglia di una famiglia localmente finita e dunque è localmente finita. Ne segue che la famiglia $\overline{\Delta} = \{\overline{A} \,|\, A \in \Delta\}$ è anch'essa localmente finita e dunque la famiglia $\{K_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ è localmente finita in quanto i suoi elementi sono unioni finite di elementi di $\overline{\Delta}$. Ne segue che

$$Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$$

è chiuso in $\mathbf{X}$. D'altra parte

$$\mathring{Y} \supset \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathring{A}_n \supset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = Y$$

e quindi Y è anche aperto in $\mathbf{X}$. Essendo un sottoinsieme contemporaneamente aperto e chiuso e non vuoto di uno spazio connesso, è $X = Y$.

§3 Paracompattezza degli spazi metrizzabili

Teorema 3.1 (Teorema di Stone) *Ogni spazio metrizzabile è paracompatto.*
Premettiamo alla dimostrazione di questo teorema due lemmi.

Lemma 3.2 *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio topologico di Hausdorff in cui ogni ricoprimento aperto ammetta un raffinamento chiuso localmente finito. Allora $\mathbf{X}$ è paracompatto.*

Dim. Sia Γ un ricoprimento aperto di X e sia Γ' un suo raffinamento chiuso localmente finito. Indichiamo con

$$\alpha : \Gamma' \to \Gamma$$

la funzione di raffinamento:

$$F \subset \alpha(F) \quad \forall F \in \Gamma'.$$

Poiché Γ' è localmente finito, possiamo trovare un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X tale che ogni aperto U di $\mathcal{U}$ intersechi solo un numero finito di chiusi di Γ'.

Per ipotesi, $\mathcal{U}$ ammette un raffinamento chiuso Δ localmente finito. Indichiamo con

$$\beta : \Delta \to \mathcal{U}$$

la funzione di raffinamento ($F \subset \beta(F) \quad \forall F \in \Delta$). Per ogni $B \in \Gamma'$ l'insieme

$$V_B = \bigcup \{F \in \Delta \,|\, F \cap B = \emptyset\}$$

è chiuso perché unione di una famiglia localmente finita di chiusi. Quindi, per ogni $B \in \Gamma'$,

$$L_B = X \setminus V_B$$

è un aperto di $\mathbf{X}$. Poniamo, per ogni $B \in \Gamma'$:

$$G_B = \alpha(B) \cap L_B.$$

Abbiamo allora:

$$B \subset G_B \subset \alpha(B) \quad \forall B \in \Gamma'.$$

Quindi

$$\tilde{\Gamma} = \{G_B \,|\, B \in \Gamma'\}$$

è un ricoprimento aperto di X inscritto in modo naturale in Γ. Dico che $\tilde{\Gamma}$ è localmente finito. Infatti, se $x \in X$, possiamo trovare un intorno aperto U di x in $\mathbf{X}$ tale che

$$\Phi = \{F \in \Delta \,|\, F \cap U \neq \emptyset\}$$

sia finito. Allora anche l'insieme

$$\Psi = \left\{B \in \Delta \,|\, B \cap \left(\bigcup \Phi\right) \neq \emptyset\right\}$$

è finito. Ma, se $U \cap G_B \neq \emptyset$, allora $U \cap L_B \neq \emptyset$, cioè U deve intersecare qualche F con $F \cap B \neq \emptyset$. Dunque, se $U \cap G_B \neq \emptyset$, allora $B \in \Psi$ e U interseca solo un numero finito di aperti di $\tilde{\Gamma}$.

Lemma 3.3 *Uno spazio regolare in cui ogni ricoprimento aperto ammetta un raffinamento localmente finito è paracompatto.*

Dim. Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio regolare in cui ogni ricoprimento aperto ammetta un raffinamento localmente finito. Sia Γ un ricoprimento aperto di X. Poiché $\mathbf{X}$ è regolare, possiamo trovare un raffinamento aperto Δ di Γ tale che, detta

$$\alpha : \Delta \to \Gamma$$

la funzione di raffinamento, sia

$$\overline{A} \subset \alpha(A) \quad \forall A \in \Delta.$$

Se Δ' è un raffinamento localmente finito di Δ, con funzione di raffinamento $\beta : \Delta' \to \Delta$, allora

$$\tilde{\Gamma} = \{\overline{B} \,|\, B \in \Delta'\}$$

è un raffinamento chiuso localmente finito di Γ, con

$$\overline{B} \subset \alpha(\beta(B)) \quad \forall B \in \Delta'.$$

Per il lemma precedente, $\mathbf{X}$ è paracompatto.

Dimostrazione del Teorema di Stone.

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia Γ un qualsiasi ricoprimento aperto di X. Per ogni $A \in \Gamma$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$A_n = \{x \in A \,|\, d(x, X \setminus A) \geq 2^{-n}\}.$$

Gli insiemi A_n sono chiusi e

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = A.$$

Sia "$\prec$" un buon ordinamento dell'insieme Γ. Definiamo allora

$$B_{A,n} = A_n \setminus \bigcup_{D \in \Gamma,\, D \prec A} D_{n+1},$$

$$G_{A,n} = \left\{ x \in X \,|\, d(x, B_{A,n}) < 2^{-(n+3)} \right\}.$$

Gli insiemi $G_{A,n}$ sono aperti e

$$G_{A,n} \subset A \quad \forall A \in \Gamma, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Infatti, se $x \in G_{A,n}$, allora possiamo trovare $y \in B_{A,n}$ tale che $d(x,y) < 2^{-(n+3)}$. In particolare $y \in A_n$ e quindi $d(y, X \setminus A) \geq 2^{-n}$. Perciò

$$d(x, X \setminus A) \geq d(y, X \setminus A) \,-\, d(x,y) > 2^{-n} \,-\, 2^{-(n+3)} > 0.$$

Inoltre

$$\{G_{A,n} \,|\, A \in \Gamma,\, n \in \mathbb{N}\}$$

è un ricoprimento aperto di X. Infatti, se $x \in X$ e A_0 è il minimo, rispetto a "$\prec$" degli aperti di Γ che contengono x, allora possiamo trovare un $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \in A_{0n}$ e $x \in B_{A,n}$ perché $x \notin A$ se $A \in \Gamma$ e $A \prec A_0$.

Dico che, per ogni intero non negativo n fissato, la famiglia

$$\{G_{A,n} \,|\, A \in \Gamma\}$$

è localmente finita. Infatti, se $x \in G_{A,n}$ e $y \in G_{D,n}$ con $A \prec D \in \Gamma$, allora $y \notin G_{A,(n+1)}$, cioè $d(y, X \setminus A) < 2^{-(n+1)}$. Quindi abbiamo

$$d(x,y) \geq d(x, X \setminus A) \,-\, d(y, X \setminus A) > 2^{-n} \,-\, 2^{-(n+1)} = 2^{-(n+1)}.$$

Ne segue che ogni palla aperta di raggio minore di $2^{-(n+2)}$ interseca al più uno solo dei $G_{A,n}$. Poniamo

$$\begin{cases} G_n \,=\, \bigcup\{G_{A,n} \,|\, A \in \Gamma\} \\ W_n \,=\, \bigcup_{m \leq n} G_m \\ W_{-1} \,=\, \emptyset \\ L_n \,=\, W_n \setminus W_{n-1} \quad \text{se} \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Allora

$$\tilde{\Gamma} \,=\, \{L_n \cap G_{A,n} \,|\, A \in \Gamma,\, n \in \mathbb{N}\}$$

è un ricoprimento aperto localmente finito di X inscritto in Γ.

Infatti, se $x \in X$, posto $\bar{n} \,=\, \min\{n \in \ | x \in G_n\}$, e scelto un intorno V di x che intersechi solo un numero finito di aperti $G_{A,m}$ con $A \in \Gamma$ e $m \leq \bar{n}$, l'aperto

$$V \cap G_{\bar{n}}$$

è un intorno aperto di x che interseca solo un numero finito di insiemi di $\tilde{\Gamma}$. Poiché **X**, essendo metrizzabile è regolare, la tesi segue dal lemma precedente.

CAPITOLO VII

SPAZI DI BAIRE

§1 Definizione ed esempi di spazi di Baire

Un sottoinsieme A di uno spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ si dice *raro* o *da nessuna parte denso* se la sua chiusura $\bar{A}$ non contiene punti interni, cioè se $\mathring{\bar{A}} = \emptyset$.

Un sottoinsieme A di X si dice *di prima categoria* se è unione numerabile di insiemi rari.

Un sottoinsieme di X che non sia di prima categoria si dice di *seconda categoria.*

Osservazione Un'unione numerabile di insiemi di prima categoria è di prima categoria.

Defininizione Uno spazio topologico $\mathbf{X}$ si dice *di Baire* se l'intersezione di una sua qualsiasi famiglia numerabile di aperti densi è ancora un sottoinsieme denso.

Lemma 1.1 *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio topologico. Sono equivalenti:*

(1) $\mathbf{X}$ *è uno spazio di Baire.*
(2) *Se $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia numerabile di chiusi e $F = \bigcup_{n=0}^\infty F_n$ è tale che $\mathring{F} \neq \emptyset$, allora esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\mathring{F}_\nu \neq \emptyset$.*
(3) *Ogni aperto non vuoto di $\mathbf{X}$ è di seconda categoria.*
(4) *Il complementare in ogni aperto non vuoto di $\mathbf{X}$ di un sottoinsieme di prima categoria di $\mathbf{X}$ è di seconda categoria.*

Dim. (1) $\Rightarrow$ (2). Supponiamo che $\mathbf{X}$ sia uno spazio di Baire e sia $\{F_n\}$ una qualsiasi successione di chiusi ciascuno con parte interna vuota. Allora $A_n = X \setminus F_n$ è per ogni n un aperto denso di $\mathbf{X}$. Quindi

$$D = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$$

è denso in $\mathbf{X}$. Se U fosse un aperto non vuoto contenuto in $\bigcup_{n=0}^\infty F_n$, sarebbe $D \cap U = \emptyset$, ma questo non è possibile perché D è denso in $\mathbf{X}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Supponiamo valga la (2) e sia A un qualsiasi aperto non vuoto di $\mathbf{X}$. Se A fosse di prima categoria, allora sarebbe unione numerabile di una successione $\{R_n\}$ di insiemi rari. Allora $\{F_n = \overline{R}_n\}$ sarebbe una famiglia di chiusi con parte interna vuota la cui unione conterrebbe l'aperto A, contraddicendo la (2).

(3) $\Rightarrow$ (4). È ovvia, perché l'unione di due insiemi di prima categoria è di prima categoria.

(4) $\Rightarrow$ (1). Supponiamo valga (4). Sia $\{A_n\}$ una successione di aperti densi di $\mathbf{X}$. Per dimostrare che $D = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ è denso in $\mathbf{X}$, fissiamo un qualsiasi aperto U di $\mathbf{X}$ e consideriamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $F_n = X \setminus A_n$. Questo insieme è un chiuso con parte interna vuota di $\mathbf{X}$. Allora $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ è un sottoinsieme di prima categoria in $\mathbf{X}$ e quindi $U \setminus F$ è di seconda categoria e in particolare non vuoto. Poiché $U \setminus F = U \cap D$, otteniamo la tesi.

Da 3) segue subito che:

Osservazione *Ogni sottospazio aperto di uno spazio di Baire è uno spazio di Baire.*

Teorema 1.2 *Ogni spazio di Hausdorff localmente compatto è di Baire.*

Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio di Hausdorff localmente compatto. Sia $\{A_n\}$ una famiglia numerabile di aperti densi di $\mathbf{X}$ e sia $D = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$. Vogliamo dimostrare che per ogni aperto non vuoto U di $\mathbf{X}$ interseca D. A questo scopo costruiamo induttivamente una successione $\{B_n\}$ di aperti non vuoti tali che

$$(*) \qquad \begin{cases} \overline{B}_n \quad \text{è compatto} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \overline{B}_n \subset U \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \overline{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Poiché $\mathbf{X}$ è localmente compatto, $U \cap A_0$ contiene un aperto non vuoto B_0 con chiusura compatta contenuta in $U \cap A_0$. Supponiamo di aver costruito B_0, ..., B_n in modo che le $(*)$ siano soddisfatte. Basterà allora scegliere un aperto non vuoto B_{n+1} con chiusura compatta contenuta in $B_n \cap A_{n+1}$.

La famiglia $\{\overline{B}_n\}$ è una famiglia di sottoinsiemi chiusi del compatto $\overline{B}_0$ che gode della proprietà dell'intersezione finita. Quindi $\emptyset \neq \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{B}_n \subset D \cap U$ e la tesi è dimostrata.

Teorema 1.3 *Ogni spazio metrico completo è uno spazio di Baire.*

Dim. Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $\{A_n\}$ una successione di aperti densi di X. Fissiamo un aperto npon vuoto U di X. Costruiamo per ricorrenza una successione $\{B_n\}$ di palle aperte di X tali che

$$(*) \qquad \begin{cases} \overline{B}_n \subset U \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ B_n = B(x_n, r_n) \quad \text{con} \quad x_n \in X \quad \text{e} \quad 0 < r_n < 2^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \overline{B}_{n+1} \subset B_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

A questo scopo osserviamo che $A_0 \cap U$ è un aperto non vuoto e quindi, fissati

$$x_0 \in A_0 \cap U \quad \text{e} \quad 0 < r_0 < \min\{1, d(x_0, X \setminus (A_0 \cap U))\}$$

e posto $B_0 = B(x_0, r_0)$ abbiamo $\overline{B}_0 \subset A_0 \cap U$. Supponiamo di aver costruito, per $n \geq 0$, le palle B_0,..., B_n in modo che valgano le $(*)$. Fissato un punto x_{n+1} di $B_n \cap A_{n+2} \subset U$, possiamo trovare $0 < r_{n+1} < 2^{-(n+1)}$ tale che, posto $B_{n+1} = B(x_{n+1}, r_{n+1})$ risulti $\overline{B}_{n+1} \subset A_{n+2} \cap B_n$. La successione $\{x_n\}$ dei centri delle palle B_n è chiaramente una successione di Cauchy. Il suo limite x_∞ appartiene a $\overline{B}_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi ad $A_n \cap U$ per ogni n. Dunque $x_\infty \in D \cap U \neq \emptyset$.

§2 Alcuni teoremi sulle funzioni reali continue e semicontinue

Teorema 2.1 (Baire) *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio topologico e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue a valori reali definite su X. Supponiamo che per ogni $x \in X$ esista il limite della successione $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{R}$. Allora l'insieme dei punti $x \in X$ in cui la funzione*

$$f : X \ni x \longrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$$

non è continua è di prima categoria in $\mathbf{X}$.

Dim. Per ogni intero positivo n ed ogni numero reale $\epsilon > 0$ poniamo

$$P_n(\epsilon) = \{x \in X \,|\, |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon\}.$$

Poniamo

$$G(\epsilon) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \overset{\circ}{P}_n(\epsilon).$$

Dimostriamo che

$$Y = \bigcap_{n=0}^{\infty} G(2^{-n})$$

è il sottoinsieme dei punti di X in cui f è continua. Supponiamo infatti che f sia continua in $x_0 \in X$. Fissato $\epsilon > 0$, possiamo trovare un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \epsilon/3 \quad \forall n \geq \nu.$$

Poiché sia f che f_ν sono continue in x_0, esiste un intorno aperto U di x_0 in $\mathbf{X}$ tale che

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon/3 \quad \text{e} \quad |f_\nu(x) - f_\nu(x_0)| < \epsilon/3 \quad \forall x \in U.$$

Allora

$$|f_\nu(x) - f(x)| \leq |f_\nu(x) - f_\nu(x_0)| + |f_\nu(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in U.$$

Ciò dimostra che $A \subset P_\nu(\epsilon)$ e quindi $x_0 \in \overset{\circ}{P}_n(\epsilon) \subset G(\epsilon)$. Poiché $\epsilon > 0$ è arbitrario, ne segue che $x_0 \in Y$.

Sia viceversa $x_0 \in Y$. Fissiamo $\epsilon > 0$. Poiché $x_0 \in G(\epsilon/3)$, avremo $x_0 \in \overset{\circ}{P}_n(\epsilon/3)$ per qualche indice $n \in \mathbb{N}$. Sia dunque U un intorno aperto di x_0 in cui

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon/3.$$

Poiché f_n è continua in x_0, possiamo trovare un intorno aperto U' di x_0 contenuto in U in cui risulti

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon/3.$$

Avremo allora:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall x \in U'$$

e ciò dimostra la continuità di f in x_0.

Poniamo ora, per ogni intero non negativo n e ogni numero reale $\epsilon > 0$:

$$F_n(\epsilon) = \{x \in X \,|\, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \quad \forall m \geq n\}.$$

Per la continuità delle f_n, questi insiemi sono chiusi. Inoltre, per la convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$, abbiamo

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n(\epsilon).$$

Inoltre risulta

$$F_n(\epsilon) \subset P_n(\epsilon),$$

quindi

$$\mathring{F}_n(\epsilon) \subset \mathring{P}_n(\epsilon),$$

e dunque

$$L(\epsilon) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathring{F}_n(\epsilon) \subset G(\epsilon).$$

Ma per il complementare di $L(\epsilon)$ abbiamo allora

$$X \setminus L(\epsilon) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (F_n(\epsilon) \setminus \mathring{F}_n(\epsilon))$$

unione numerabile di chiusi con parte interna vuota. Quindi $X \setminus L(\epsilon)$ è di prima categoria e lo è quindi a maggior ragione $X \setminus G(\epsilon)$. Quindi l'insieme dei punti in cui f è discontinua:

$$X \setminus Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} (X \setminus G(2^{-n}))$$

è di prima categoria.

TEOREMA 2.2 *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio di Baire e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione semicontinua inferiormente. Allora ogni aperto non vuoto U di $\mathbf{X}$ contiene un aperto non vuoto V su cui f è limitata superiormente.*

DIM. Ogni aperto U di $\mathbf{X}$ è uno spazio di Baire. Poniamo, per ogni intero non negativo n:

$$F_n = \{x \in U \,|\, f_n(x) \leq n\}.$$

Tali insiemi sono chiusi in U perché f è semicontinua inferiormente e

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n = U$$

perché la f è a valori reali. Possiamo quindi trovare $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $V = \mathring{F}_n \neq \emptyset$.

Lemma 2.3 *Sia* (X,d) *uno spazio metrico compatto e sia* $f : X \to \mathbb{R}$ *una funzione semicontinua inferiormente. Possiamo allora trovare una successione non decrescente* $\{f_n\}$ *di funzioni continue su* X *a valori reali tale che*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \quad \forall x \in X.$$

Dim. Sia $a = \min_X f(x) \in \mathbb{R}$. Per ogni intero non negativo n siano $x_{n1}, ..., x_{n\ell_n}$ punti di X tali che

$$X = \bigcup_{j=1}^{\ell_n} B(x_{nj}, 2^{-(n+1)}).$$

Per ogni $j = 1, ..., \ell_n$ poniamo

$$\mu_{nj} = \min\{f(x) \mid d(x, x_{nj}) \leq 2^{-n}\}.$$

Per il lemma di Urysohn possiamo trovare funzioni continue $w_{nj} : X \to \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} a \leq w_{nj}(x) \leq \mu_{nj} \quad \forall x \in X \\ w_{jn}(x) = \mu_{jn} \quad \forall x \in \overline{B}(x_{nj}, 2^{-(n+1)}) \\ w_{jn}(x) = a \quad \forall x \notin B(x_{nj}, 2^{-n}). \end{cases}$$

Poniamo

$$g_n(x) = \max\{w_{n1}(x), ..., w_{n\ell_n}(x)\} \quad \forall x \in X.$$

Allora

$$g_n : X \ni x \to g_n(x) \in \mathbb{R}$$

è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$g_n \leq f \quad \text{su} \quad X.$$

Poniamo

$$f_n(x) = \max\{g_0(x), g_1(x), ..., g_n(x)\} \quad \forall x \in X.$$

Allora

$$f_n : X \ni x \to f_n(x) \in \mathbb{R}$$

sono continue per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$f_n \leq f \quad \text{su} \quad X.$$

La successione $\{f_n\}$ è una successione non decrescente di funzioni continue. Dico che

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \quad \forall x \in X.$$

Infatti, per ogni $x \in X$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$ sia x_{nj_n} tale che $x \in B(x_{nj_n}, 2^{-(n+1)})$. Possiamo allora trovare x_n con $d(x_n, x_{nj_n}) \leq 2^{-(n+1)}$ tale che $\mu_{nj_n} = f(x_n) = w_{nj_n}(x_n)$. Allora $f_n(x_n) = f(x_n)$ e $f_n(x) \geq f(x_n)$ perché $f(x) \geq w_{nj_n}(x) = \mu_{nj_n}$.

La successione $\{x_n\}$ converge a x e dunque abbiamo, poiché f è semicontinua inferiormente,

$$\sup_n f_n(x) \geq lim_n f(x_n) \geq f(x).$$

Poiché d'altra parte $\sup_n f_n(x) \leq f(x)$, vale l'uguaglianza e il lemma è dimostrato.

Teorema 2.4 *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio metrizzabile localmente compatto. Se $f : X \to \mathbb{R}$ è semicontinua inferiormente, allora l'insieme dei punti in cui la f non è continua è di prima categoria.*

Dim. La tesi segue dal lemma e dal teorema precedenti.

Teorema 2.5 *Esiste una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che non è derivabile in nessun punto di $\mathbb{R}$.*

Dim. Sia $\mathcal{C}_0(I)$ l'insieme di tutte le funzioni continue $\phi : I \to \mathbb{R}$, che si annullano in 0 e 1, con la topologia indotta dalla distanza

$$d(\phi, \psi) = \sup_I |\phi(x) - \psi(x)| \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{C}_0(X).$$

Con questa distanza, $\mathcal{C}_0(X)$ è uno spazio metrico completo e quindi di Baire.

Per ogni intero positivo n sia

$$F_n = \left\{ g \in \mathcal{C}_0(I) \,\middle|\, \exists x \in I \text{ tale che } \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} \leq n \quad \forall y \in I \setminus \{x\} \right\} .$$

Dico che F_n è un chiuso. Sia infatti $g \in \mathcal{C}_0(I)$ una funzione continua a valori reali definita su I tale che esista una successione $\{g_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ in F_n tale che $d(g_\nu, g) \to 0$ per $\nu \to \infty$. Per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ indichiamo con $x_\nu \in I$ un punto per cui valga

$$\frac{|g_\nu(y) - g_\nu(x_\nu)|}{|y - x_\nu|} \leq n \quad \forall y \in I \setminus \{x_\nu\}.$$

Poiché I è compatto, passando a una sottosuccessione possiamo supporre che $x_\nu \to x_\infty \in I$ per $\nu \to \infty$. Se $y \in I \setminus \{x_\infty\}$, allora $x_\nu \neq y$ per ν sufficientemente grande e otteniamo quindi

$$\frac{|g(y) - g(x_\infty)|}{|y - x_\infty|} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{|g_\nu(y) - g_\nu(x_\nu)|}{|y - x_\nu|} \leq n.$$

Dimostriamo ora che per ogni intero positivo n il chiuso F_n è raro.

Se così non fosse, potremmo trovare, per un intero positivo n, una $g \in F_n$ tale che per qualche $\epsilon > 0$ ogni $h \in \mathcal{C}(I)$ con $d(h, g) < \epsilon$ appartenga ad F_n.

Mostriamo in primo luogo che $\overset{\circ}{F}_n$ contiene una funzione lineare a tratti. Infatti

$$I \times I \ni (x, y) \to g(x) - g(y) \in \mathbb{R}$$

è una funzione continua e quindi esiste un intorno aperto U di $\{(x, x) \,|\, x \in I\}$ in $I \times I$ tale che $|g(x) - g(y)| < \epsilon$ per ogni $(x, y) \in U$. La topologia prodotto in

$I \times I$ è definita dalla distanza euclidea di $\mathbb{R}^2$ e quindi, se $2\delta > 0$ è la distanza da $\{(x,x) \,|\, x \in I\}$ al complementare di U, avremo $|g(x) - g(y)| < \epsilon$ se $|x - y| < \delta$.

Consideriamo una partizione

$$0 = x_0 < x_1 < .... < x_N = 1$$

dell'intervallo I tale che

$$x_j - x_{j-1} < \delta \quad \text{per} \quad j = 1, ..., N.$$

Definiamo allora la funzione lineare a tratti:

$$\psi(x) = g(x_j) + (g(x_{j+1}) - g(x_j)) \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \quad \text{se} \quad x_j \le x \le x_{j+1},\ j = 0, ..., N-1.$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} &|g(x) - \psi(x)| \le \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} |g(x) - g(x_j)| + \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} |g(x) - g(x_{j+1})| < \epsilon \\ &\text{per} \quad x_j \le x \le x_{j+1},\ j = 0, ..., N-1, \end{aligned}$$

e quindi $\psi \in \overset{\circ}{F}_n$.

Mostriamo ora che, se supponiamo che $\overset{\circ}{F}_n$ contenga una funzione lineare a tratti ψ, otteniamo una contraddizione. Sia $r > 0$ tale che $\overset{\circ}{F}_n \supset B(\psi, r)$ e sia $L > 0$ tale che

$$\frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|} \le L \quad \forall x \ne y \in I.$$

Consideriamo, per un intero positivo $M > 0$ fissato la funzione lineare a tratti

$$\phi_M(x) = \begin{cases} rM(x - j/M) \Leftrightarrow j/M \le x \le (2j+1)/(2M) \\ rM((j+1)/M - x) \Leftrightarrow (2j+1)/(2M) \le x \le j + 1/M \\ \qquad j = 0, 1, ..., M-1. \end{cases}$$

Abbiamo

$$|\phi_M(x)| \le r/2 \quad \forall x \in I$$

e inoltre per ogni $x \in I$ abbiamo

$$\sup_{\substack{y \in I \\ y \ne x}} \frac{|\phi_M(y) - \phi_M(x)|}{|y - x|} = rM$$

Chiaramente $h_M = \psi + \phi_M \in B(\psi, r)$, ma $h_M \notin F_n$ se $rM - L > n$. Questo dimostra che gli F_n sono rari. Quindi

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F$$

è di prima categoria e dunque $F \ne \mathcal{C}_0(I)$ perché questo è uno spazio di Baire. Una qualsiasi funzione $k \in \mathcal{C}_0(I) \setminus F$ non è derivabile in alcun punto di I. Si ottiene una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non derivabile in nessun punto di $\mathbb{R}$ estendendo la k per periodicità:

$$f(x) = k(x-q) \Leftrightarrow q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \leq x \leq q+1.$$

§3 Alcune applicazioni agli spazi normati

Sia V uno spazio vettoriale reale. Una *norma* su V è un'applicazione

$$V \ni v \to \|v\| \in \mathbb{R}$$

che gode delle proprietà:

(*i*) $\|0\| = 0$ e $\|v\| > 0 \iff 0 \neq v \in V$;

(*ii*) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$;

(*iii*) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$.

Consideriamo sullo spazio normato V la struttura di spazio metrico definita dalla distanza:

$$V \times V \ni (v, w) \to d(v, w) = \|v - w\| \in \mathbb{R}\,.$$

Uno spazio normato che sia completo rispetto alla distanza definita dalla norma si dice uno *spazio di Banach*.

Due norme $\|\cdot\|$ e $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ sullo stesso spazio vettoriale V si dicono *equivalenti* se vi è una costante positiva c tale che

$$c^{-1}\|v\| \leq |\!|\!|v|\!|\!| \leq c\|v\| \quad \forall v \in V.$$

Norme equivalenti definiscono distanze che inducono la stessa topologia sullo spazio vettoriale V. Abbiamo

Teorema 3.1 *Sia V uno spazio vettoriale reale. Due norme su V rispetto alle quali V sia uno spazio di Banach sono equivalenti fra loro.*

Dim. Siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme sullo spazio vettoriale V rispetto alle quali V sia uno spazio di Banach. Definiamo una nuova norma $\|\cdot\|$ su V ponendo

$$\|v\| = \|v\|_1 + \|v\|_2 \qquad \forall v \in V\,.$$

Osserviamo che V è uno spazio di Banach con la norma $\|\cdot\|$.

Indichiamo con X lo spazio metrico completo che si ottiene considerando su V la distanza relativa alla norma $\|\cdot\|_1$. Poniamo, per ogni numero reale positivo r:

$$F_r = \{v \in V \mid \|v\| \leq r\}.$$

Poiché

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = V,$$

per il teorema di Baire possiamo trovare un intero positivo ν tale che $\overline{F}_\nu$ contenga punti interni di X (la chiusura si intende rispetto alla topologia associata alla norma

$\| \cdot \|_1$. Poiché le omotetie e le traslazioni sono omeomorfismi di $\mathbf{V}$, ne segue che $\overline{F}_1$ contiene un intorno aperto dell'origine in X:

$$\overline{F}_1 \supset \{v \in V \mid \|v\|_1 < \epsilon\}$$

per qualche $\epsilon > 0$.

Avremo allora

$$\overline{F}_r \supset \{v \in V \mid \|v\|_1 < \epsilon r\} \quad \forall r > 0.$$

Fissiamo un qualsiasi vettore $v \in V$ con $\|v\|_1 < 1$.

Costruiamo per ricorrenza una successione $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

$$\begin{cases} \|v_n\| \leq \dfrac{2^{-n}}{\epsilon} \quad \forall n \geq 0 \\ \\ \|v - \sum_{j=0}^{n} v_j\|_1 < 2^{-(n+1)} \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Poiché $\overline{F}_{1/\epsilon} \supset \{w \in V \mid \|w\|_1 < 1\}$, possiamo trovare $v_0 \in F_{1/\epsilon}$ tale che

$$\|v - v_0\|_1 < 1/2\,.$$

Supponiamo di aver costruito $v_0, v_1, ..., v_n$. Poiché

$$\|v - \sum_{j=0}^{n} v_j\| < 2^{-(n+1)} \qquad \text{e} \qquad \overline{F}_{2^{-(n+1)}/\epsilon} \supset \{w \in V \mid \|w\|_1 < 2^{-(n+1)}\}\,,$$

possiamo trovare $v_{n+1} \in F_{2^{-(n+1)}/\epsilon}$ tale che

$$\|v - \sum_{j=0}^{n+1} v_j\|_1 < 2^{-(n+2)}.$$

Abbiamo allora

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \quad \text{in} \quad X$$

e

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|v_j\| \leq (1/\epsilon) \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = 2/\epsilon.$$

Da questa relazione ricaviamo che la serie $\sum_{j=0}^{\infty} v_j$ converge a un elemento $\tilde{v}$ di V nella metrica definita dalla norma $\| \cdot \|$. Abbiamo inoltre

$$\|\tilde{v}\| \leq \frac{2}{\epsilon}\,.$$

Poiché

$$\|\tilde{v} - \sum_{j=1}^{n} v_j\|_1 \leq \|\tilde{v} - \sum_{j=1}^{n} v_j\|\,,$$

segue per l'unicità del limite in X che $v = \tilde{v}$. Otteniamo quindi

$$\|v\|_1 < 1 \Longrightarrow \|v\| \leq \frac{2}{\epsilon}\,.$$

Per l'omogeneità della norma abbiamo allora:

$$\|v\| \leq \frac{2}{\epsilon}\,\|v\|_1 \qquad \forall v \in V\,,$$

da cui si ricava:

$$\|v\|_2 \leq \frac{2}{\epsilon}\,\|v\|_1 \qquad \forall v \in V\,.$$

In modo analogo si dimostra che esiste una costante positiva c tale che

$$\|v\|_1 \leq c\,\|v\|_2 \qquad \forall v \in V$$

e quindi le due norme sono equivalenti.

Teorema 3.2 *Tutte le norme su uno spazio vettoriale reale di dimensione finita sono equivalenti.*

Dim. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita. Possiamo supporre sia $V = \mathbb{R}^n$. Indichiamo con $|v| = (\sum_{j=1}^n v_j^2)^{1/2}$ la norma euclidea. Sarà sufficiente mostrare che una qualsiasi norma $\|\cdot\|$ su $\mathbb{R}^n$ è equivalente alla norma euclidea.

Se $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, abbiamo

$$\|v\| \leq |v_1|\,\|e_1\| + ... + |v_n|\,\|e_n\| \leq \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2}\right) \cdot |v|.$$

Da questa disuguaglianza segue che

$$\mathbb{R}^n \ni v \longrightarrow \|v\| \in \mathbb{R}$$

è un'applicazione continua per le topologie euclidee usuali. Poiché

$$S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| = 1\}$$

è un compatto di $\mathbb{R}^n$, la funzione

$$S^{n-1} \ni v \longrightarrow \|v\| \in \mathbb{R}$$

ammette su S^{n-1} un minimo positivo μ. Quindi, se $v \in \mathbb{R}^n$ e $v \neq 0$, abbiamo

$$\|(v/|v|)\| \geq \mu.$$

Da questa si ricava

$$|v| \leq (1/\mu)\|v\| \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

La dimostrazione è completa.

Corollario *Sia V uno spazio vettoriale reale normato e sia $f : \mathbb{R}^n \to V$ un'applicazione lineare iniettiva. Allora f è una immersione topologica. Ogni sottospazio vettoriale di dimensione finita di uno spazio vettoriale reale normato è chiuso.*

Dim. Per dimostrare che un'applicazione lineare iniettiva $f : \mathbb{R}^n \to V$ è una immersione topologica, basta osservare che, indicando con $|\cdot|$ la norma euclidea di $\mathbb{R}^n$ e con $\|\cdot\|$ la norma su V, le norme

$$x \to \|f(x)\| \quad \text{e} \quad x \to |x|$$

sono equivalenti su $\mathbb{R}^n$.

In particolare, se W è un sottospazio di dimensione finita di V, esso è uno spazio metrico completo per la restrizione a W della distanza indotta dalla norma di V. Chiaramente un sottospazio completo di uno spazio metrico è chiuso.

Teorema 3.3 *Sia V uno spazio vettoriale reale normato, su cui consideriamo la topologia definita dalla distanza indotta dalla norma. Condizione necessaria e sufficiente affinché V sia localmente compatto è che V abbia dimensione finita.*

Dim. Sia V uno spazio vettoriale reale con una norma $\|\cdot\|$. Se V ha dimensione finita, allora è localmente compatto per il teorema precedente.

Supponiamo ora che V sia localmente compatto e dimostriamo che ha dimensione finita. Osserviamo innanzi tutto che tutte le palle chiuse $\{v \in V \mid \|v\| \leq r$, per r reale positivo, sono compatte. In particolare, possiamo trovare vettori $e_1, ..., e_n$ con $\|e_j\| \leq 1$ per $j = 1, ..., n$ tali che

$$\{v \in V \mid \|v\| \leq 1\} \subset \bigcup_{j=1}^{n} \{v \in V \mid \|v - e_j\| < 1/2\}.$$

Sia W il sottospazio vettoriale di V generato da $e_1, ..., e_n$.

Se $W = V$, allora V ha dimensione finita e la tesi è dimostrata. Supponiamo sia $W \neq V$. Per il corollario del teorema precedente, W è un sottospazio completo di V e quindi è chiuso. Fissiamo un punto $w \in V \setminus W$. Allora $d(w, W) = \delta > 0$. Possiamo quindi trovare un vettore $v \in W$ tale che

$$\delta \leq \|v - w\| \leq (3/2)\delta.$$

Allora $\|2(v - w)/(3\delta)\| \leq 1$ e possiamo trovare e_j tale che

$$\|2(v - w)/(3\delta) \; - \; e_j\| < 1/2,$$

ma questa ci dà una contraddizione perché

$$z = v - (3\delta/2)\, e_j \in W$$

e

$$\|w - z\| < (3/4)\delta < \delta.$$

CAPITOLO VIII

SPAZI DI FUNZIONI CONTINUE

§1 Il teorema di approssimazione di Stone-Weierstrass

Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio di Hausdorff compatto e sia $\mathcal{C}(X)$ l'insieme di tutte le funzioni continue $f : X \to \mathbb{R}$. Lo spazio $\mathcal{C}(X)$ è uno spazio vettoriale reale per l'operazione di combinazione lineare di funzioni, un'algebra rispetto al prodotto di funzioni, e un reticolo rispetto alle operazioni

$$\mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) \ni (f, g) \to f \vee g \in \mathcal{C}(X),$$

$$\mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) \ni (f, g) \to f \wedge g \in \mathcal{C}(X);$$

ove

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \forall x \in X,$$

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \forall x \in X.$$

Siano $f, g \in \mathcal{C}(X)$. Diciamo che $f \leq g$ se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X$. Indichiamo con $|f|$ la funzione

$$|f|(x) = |f(x)| \quad \forall x \in X.$$

Rispetto alla norma

$$\mathcal{C}(X) \ni f \to \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{C}(X)$ è uno spazio di Banach. Valgono le diseguaglianze:

$$(*) \qquad \|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad \forall f, g \in \mathcal{C}(X),$$

$$(**) \qquad |f(x)| \leq |g(x)| \quad \forall x \in X \Longrightarrow \|f\| \leq \|g\|.$$

Se $c \in \mathbb{R}$, indicheremo ancora con c la funzione continua su X che vale c in ogni punto di X.

Teorema 1.1 (Teorema di Stone-Weierstrass) *Sia $\mathfrak{A}$ una sottoalgebra di $\mathcal{C}(X)$ che contenga le costanti e separi i punti*[14] *di X. Allora $\mathfrak{A}$ è densa in $\mathcal{C}(X)$.*

Dim. **a.** Se $\mathfrak{A}$ è una sottoalgebra di $\mathcal{C}(X)$, anche la sua chiusura $\overline{\mathfrak{A}}$ è una sottoalgebra di $\mathcal{C}(X)$. Questa è una conseguenza immediata di $(*)$. Vogliamo quindi dimostrare che, se $\mathfrak{A}$ soddisfa le ipotesi del teorema, allora $\overline{\mathfrak{A}} = \mathcal{C}(X)$.

[14] Se cioè $x \neq y \in X$, possiamo trovare $f \in \mathfrak{A}$ tale che $f(x) \neq f(y)$.

b. Se $f \in \overline{\mathfrak{A}}$, allora anche

$$\exp(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!} \in \overline{\mathfrak{A}}.$$

Infatti il secondo membro è una serie di funzioni di $\overline{\mathfrak{A}}$ che converge uniformemente su X.

In modo analogo si ottiene: se $f \in \overline{\mathfrak{A}}$ e $f(x) > 0$ per ogni $x \in X$, allora

$$\frac{1}{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\|f\| + 1 - f)^n}{(\|f\| + 1)^{n+1}} \in \overline{\mathfrak{A}},$$

e se $f \in \overline{\mathfrak{A}}$ e $f(x) \geq 1$ per ogni $x \in X$

$$\log(f) = -\log(1/f) = -\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)((f-1)/f)^n \in \overline{\mathfrak{A}}.$$

c. Se $f \in \overline{\mathfrak{A}}$, allora $|f| \in \overline{\mathfrak{A}}$.

Infatti

$$|f(x)| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \log\left(e^{nf(x)} + e^{-nf(x)}\right)$$

e poiché

$$0 < (1/n)\log\left(e^{nf} + e^{-nf}\right) - |f| = (1/n)\log\left(e^{n(f-|f|)} + e^{-n(f+|f|)}\right) \leq (1/n)\log 2$$

il limite è uniforme su X.

d. Se $f, g \in \overline{\mathfrak{A}}$, allora

$$f \vee g = (1/2)(f + g + |f - g|) \quad \text{e} \quad f \wedge g = (1/2)(f + g - |f - g|) \in \overline{\mathfrak{A}}.$$

e. Se x_0, x_1 sono punti distinti di X e t_0, t_1 numeri reali assegnati, allora possiamo trovare $f \in \mathfrak{A}$ tale che

$$f(x_0) = t_0, \quad f(x_1) = t_1.$$

Fissata infatti $g \in \mathfrak{A}$ che assuma in x_0 e x_1 valori distinti, poniamo:

$$f(x) = \frac{t_0(g(x_1) - g(x)) + t_1(g(x) - g(x_0))}{g(x_1) - g(x_0)} \quad \text{per} \quad x \in X.$$

f. Siano A e B chiusi disgiunti di $\mathbf{X}$. Possiamo allora trovare una funzione di Urysohn f della coppia (A, B) che appartenga ad $\overline{\mathfrak{A}}$.

Per ogni coppia di punti $(x, y) \in A \times B$ sia $f_{x,y} \in \mathfrak{A}$ una funzione che valga -1 in x e 2 in y. Per ogni $y \in B$ fissato, gli aperti

$$U_y(x) = \{z \in X \mid f_{x,y}(z) < 0\}$$

formano, al variare di x in A, un ricoprimento aperto di A. Poiché A è compatto, possiamo trovare $x_1, ..., x_n$ tali che

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_y(x_j).$$

Poniamo allora

$$\phi_y = f_{x_1,y} \wedge .... \wedge f_{x_N,y}.$$

Otteniamo in questo modo una famiglia $\{\phi_y \,|\, y \in B\}$ di funzioni continue in $\overline{\mathfrak{A}}$ con le proprietà:

$$\phi_y(x) < 0 \quad \forall x \in A,\ \phi_y(y) = 2 \quad \forall y \in B.$$

Poniamo

$$V_y = \{z \in X \,|\, \phi_y(z) > 1\}.$$

Al variare di y in B, questi insiemi formano un ricoprimento aperto di B. Possiamo allora trovare $y_1, ..., y_M \in B$ tali che

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{M} V_{y_j}.$$

La funzione

$$\psi = (\phi_{y_1} \vee 0) \vee ... \vee (\phi_{y_M} \vee 0)$$

appartiene ancora a $\overline{\mathfrak{A}}$ ed è uguale a 0 su A e > 1 su B. Allora

$$f = \psi \wedge 1 \in \overline{\mathfrak{A}}$$

assume valori in $[0, 1]$ e vale 0 su A e 1 su B.

g. Possiamo concludere la dimostrazione ripetendo l'argomento del teorema di estensione di Urysohn.

Sia $f \in \mathcal{C}(X)$. Se f è costante su X, allora $f \in \mathfrak{A}$ e non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti avremo

$$m = \min_{x \in X} f(x) < \max_{x \in X} f(x) = M.$$

Consideriamo la funzione

$$g(x) = \frac{2}{M - m}\left(f(x) - \frac{M + m}{2}\right).$$

Essa assume valori nell'intervallo $[-1, 1]$ e chiaramente $g \in \overline{\mathfrak{A}}$ se e soltanto se $f \in \overline{\mathfrak{A}}$.

Poniamo

$$A = \{x \in X \,|\, g(x) \leq -(1/3)\},\ B = \{x \in X \,|\, g(x) \geq 1/3\}.$$

Per il punto (f) possiamo trovare una funzione $g_1 \in \overline{\mathfrak{A}}$ a valori in $[-(1/3), 1/3]$ che valga $-(1/3)$ su A e $1/3$ su B. Allora:

$$\begin{cases} \|g_1\| \leq 1/3 \\ \|g - g_1\| \leq 2/3. \end{cases}$$

Possiamo costruire per ricorrenza una successione $\{g_n\}_{n\geq 1}$ di funzioni di $\overline{\mathfrak{A}}$ tali che

$$\begin{cases} \|g_n\| \leq 2^{n-1}/3^n \\ \|g - g_1 - \ldots - g_n\| \leq (2/3)^n. \end{cases}$$

Infatti, supponiamo di aver costruito $g_1, \ldots, g_n$ per qualche $n \geq 1$. Possiamo allora trovare $g_{n+1} \in \overline{\mathfrak{A}}$ che assuma valori nell'intervallo $[-(2^n/3^{n+1}), 2^n/3^{n+1}]$ e che valga $-(2^n/3^{n+1})$ su $A_n = \{x \in X \,|\, g(x) - g_1(x) - \ldots - g_n(x) \leq -(2^n/3^{n+1})\}$ e $2^n/3^{n+1}$ su $B_n = \{x \in X \,|\, g(x) - g_1(x) - \ldots - g_n(x) \geq 2^n/3^{n+1}\}$. Abbiamo quindi

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} f_j$$

con convergenza uniforme su X e il teorema è dimostrato, in quanto le somme parziali della serie a secondo membro sono funzioni di $\overline{\mathfrak{A}}$.

Ricordiamo che un sottoinsieme $\mathfrak{I}$ di un'algebra commutativa $\mathfrak{A}$ su un campo $\mathbb{K}$ si dice un *ideale* se è un sottospazio $\mathbb{K}$-lineare di $\mathfrak{A}$ e se

$$fg \in \mathfrak{I} \quad \forall f \in \mathfrak{A}, \forall g \in \mathfrak{I}.$$

Osserviamo che ogni ideale di $\mathfrak{A}$ è anche una sottoalgebra di $\mathfrak{A}$.

TEOREMA 1.2 *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio topologico compatto di Hausdorff e sia $\mathfrak{I}$ un ideale chiuso di $\mathcal{C}(X)$ che non coincida con $\mathcal{C}(X)$. Allora esiste un punto $x_0 \in X$ tale che $g(x_0) = 0$ per ogni $g \in \mathfrak{I}$.*

DIM. Sia $\mathfrak{I}$ un ideale di $\mathcal{C}(X)$. Dimostriamo che, se, per ogni punto $x \in X$ vi è una $g \in \mathfrak{I}$ con $g(x) \neq 0$, allora $\mathfrak{I} = \mathcal{C}(X)$.

(i) *$\mathfrak{I}$ separa i punti di X.*

Infatti, fissati $x \neq y$ in X, possiamo trovare una funzione continua $f \in \mathcal{C}(X)$ tale che $f(x) = 1$ e $f(y) = 0$. Se $g \in \mathfrak{I}$ è una funzione con $g(x) \neq 0$, allora $fg \in \mathfrak{I}$ e $f(x)g(x) \neq 0 = f(y)g(y)$.

(ii) *$\mathfrak{I}$ contiene le costanti.*

Per ogni $x \in X$ sia ϕ_x una funzione di $\mathfrak{I}$ tale che $\phi_x(x) \neq 0$. Al variare di x in X, gli aperti

$$U_x = \{y \in X \,|\, \phi_x(y) \neq 0\}$$

formano un ricoprimento aperto di X. Poiché $\mathbf{X}$ è compatto, possiamo trovare $x_1, \ldots, x_N \in X$ tali che

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} U_{x_j}.$$

Allora

$$g = \phi_{x_1}^2 + \ldots + \phi_{x_N}^2 \in \mathfrak{I}$$

ed è positiva in tutti i punti di X. Per il punto (b) della dimostrazione del teorema precedente abbiamo $1/g \in \mathfrak{I}$ e quindi $1 = g \cdot (1/g) \in \mathfrak{I}$ dimostra che $\mathfrak{I}$ contiene le costanti. Per il teorema di Stone-Weierstrass è allora $\mathfrak{I} = \mathcal{C}(X)$. La dimostrazione è completa.

Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio di Hausdorff compatto e indichiamo con $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ l'insieme di tutte le funzioni continue $f : X \to \mathbb{C}$. Osserviamo che $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ è uno spazio vettoriale complesso, che è uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$\mathcal{C}(X, \mathbb{C}) \ni f \to \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| \in \mathbb{R}.$$

Esso è un'algebra su $\mathbb{C}$ per il prodotto di funzioni e possiede una involuzione indotta dal coniugio sui numeri complessi:

$$\mathcal{C}(X, \mathbb{C}) \ni f \to \bar{f} \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$$

ove

$$\bar{f}(x) = \overline{f(x)} \quad \forall x \in X.$$

Dal teorema di Stone-Weierstrass per le funzioni continue a valori reali si ricava immediatamente:

TEOREMA 1.3 *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio di Hausdorff compatto. Una sotto-$\mathbb{C}$-algebra $\mathfrak{A}$ di $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ che contenga le costanti, separi i punti di X e sia chiusa rispetto al coniugio è densa in $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.*

Abbiamo in particolare i teoremi:

TEOREMA 1.4 (WEIERSTRASS) *Sia K un compatto di $\mathbb{R}^n$. Allora ogni funzione continua f su K a valori reali su K è limite, nella topologia della convergenza uniforme su K, di una successione $\{p_n\}$ di polinomi di $\mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$.*

Ogni funzione continua f su K a valori complessi è limite uniforme su K di una successione $\{p_n\}$ di polinomi di $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$.

TEOREMA 1.5 (WEIERSTRASS) *Sia $\mathcal{C}_\#(\mathbb{R}^n)$ l'insieme di tutte le funzioni continue su $\mathbb{R}^n$ periodiche di periodo 2π rispetto a tutte le variabili:*

$$\mathcal{C}_\#(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{C}(X) \,|\, f(x + 2\pi q) = f(x) \quad \forall q \in \mathbb{Z}^n.\}$$

Allora l'algebra $\mathcal{P}$ dei polinomi trigonometrici:

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} (a_\alpha \cos(\langle x, \alpha \rangle) + b_\alpha \sin(\langle x, \alpha \rangle)) \,\Big|\, m \in \mathbb{N},\, a_\alpha,\, b_\alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

è densa in $\mathcal{C}_\#(\mathbb{R}^n)$ per la topologia della convergenza uniforme su $\mathbb{R}^n$.

L'algebra complessa $\mathcal{P}_\mathbb{C}$ dei polinomi trigonometrici a coefficienti complessi è densa, rispetto alla topologia della convergenza uniforme su $\mathbb{R}^n$, nell'algebra $\mathcal{C}_\#(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ delle funzioni continue su $\mathbb{R}^n$, a valori complessi, periodiche di periodo 2π rispetto a ciascuna delle variabili.

DIM. Basta applicare il teorema di Stone-Weierstrass nel caso in cui $X = T^n = \mathbb{R}^n/_{\mathbb{Z}^n}$ è il toro di dimensione n.

§2 La topologia compatta–aperta

Siano $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ e $\mathbf{Y} = (Y, \tau_Y)$ due spazi topologici. Indichiamo con $\mathcal{C}(X, Y)$ l'insieme di tutte le applicazioni continue $f : X \to Y$. Se $(A_1, ..., A_n)$ è una n-upla di sottoinsiemi di X e $(Y_1, ..., Y_n)$ una n-upla di sottoinsiemi di Y, poniamo

$$\mathcal{C}(X, A_1, ..., A_n; Y, B_1, ..., B_n) \,=\, \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \,|\, f(A_j) \subset B_j \quad \forall j = 1, ..., n.\}$$

Sia Φ una famiglia assegnata di sottoinsiemi di X. Indichiamo con $\mathcal{C}_\Phi(X, Y)$ l'insieme $\mathcal{C}(X, Y)$ con la topologia che ha come prebase degli aperti gli insiemi

$$\mathcal{C}(X, A; Y, B) \quad \text{al variare di} \quad A \quad \text{in} \quad \Phi \quad \text{e di} \quad B \quad \text{in} \quad \tau_Y.$$

Se Φ è la famiglia $\mathcal{K}$ di tutti i compatti di $\mathbf{X}$, la topologia di $\mathcal{C}_\mathcal{K}(X, Y)$ si dice la *topologia compatta–aperta* di $\mathcal{C}(X, Y)$. Poiché questa è la topologia usata più di frequente sullo spazio delle funzioni continue, scriveremo d'ora in poi semplicemente $\mathcal{C}(X, Y)$ per indicare lo spazio topologico $\mathcal{C}_\mathcal{K}(X, Y)$.

Teorema 2.1 *Se* $\mathbf{Y}$ *è uno spazio di Hausdorff, allora* $\mathcal{C}(X, Y)$ *è di Hausdorff.*

Dim. Se $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ e $f \neq g$, allora possiamo trovare un punto $x \in X$ tale che $f(x) \neq g(x)$. Se U e V sono intorni aperti disgiunti di x e y rispettivamente in Y, allora $\mathcal{C}(X, \{x\}; Y, U)$ e $\mathcal{C}(X, \{x\}; Y, V\}$ sono intorni aperti disgiunti di f e g rispettivamente in $\mathcal{C}(X, Y)$.

Teorema 2.2 *Se* $\mathbf{X}$ *è compatto e* $\mathbf{Y}$ *metrizzabile, allora* $\mathcal{C}(X, Y)$ *è metrizzabile. Se* d *è una distanza che induce la topologia di* $\mathbf{Y}$*, allora*

$$\boldsymbol{d}(f, g) \,=\, \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \quad \textit{per} \quad f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$$

è una distanza su $\mathcal{C}(X, Y)$ *che induce la topologia di* $\mathcal{C}(X, Y)$.

Dim. Sia K un compatto di $\mathbf{X}$ e B un aperto di $\mathbf{Y}$. Sia $f \in \mathcal{C}(X, K; Y, B)$. L'insieme $f(K)$ è un compatto di $\mathbf{Y}$ contenuto in B. Fissata una distanza d su Y che induce la topologia di $\mathbf{Y}$, abbiamo

$$\epsilon \,=\, d(f(K), Y \setminus B) > 0.$$

Allora la palla aperta

$$B(f, \epsilon) \,=\, \{g \in \mathcal{C}(X, Y) \,|\, \boldsymbol{d}(f, g) < \epsilon\}$$

è contenuta in $\mathcal{C}(X, K; Y, B)$. Questo dimostra che la topologia indotta su $\mathcal{C}(X, Y)$ dalla metrica $\boldsymbol{d}$ è più fine della topologia di $\mathcal{C}(X, Y)$.

Viceversa, fissata $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ ed $r > 0$, osserviamo che $f(X)$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbf{Y}$. Possiamo allora ricoprirlo con un numero finito di palle aperte B_j, $j = 1, ..., N$ di raggio minore di $r/2$. Per ogni indice j sia C_j una palla aperta di raggio minore di $r/2$ contenente la chiusura di B_j. Allora

$$\mathcal{C}(X, f^{-1}(\overline{B_1}), ..., f^{-1}(\overline{B_N}); Y, C_1, ..., C_N)$$

è un intorno aperto di f in $\mathcal{C}(X,Y)$ contenuto in $B_{\boldsymbol{d}}(f,r) = \{g \in \mathcal{C}(X,Y) \mid \boldsymbol{d}(f,g) < r\}$. Quindi la topologia di $\mathcal{C}(X,Y)$ è più fine della topologia indotta dalla distanza $\boldsymbol{d}$ e quindi le due topologie coincidono.

Teorema 2.3 *Siano $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio topologico e $\{\mathbf{Y}_j = (Y_j, \tau_j)\}$ una famiglia di spazi topologici non vuoti. Allora l'applicazione naturale*

$$\mathcal{C}(X, \prod_{j\in J} Y_j) \to \prod_{j\in J} \mathcal{C}(X, Y_j)$$

è un omeomorfismo.

Teorema 2.4 *Siano $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ tre spazi topologici. Data una applicazione continua*

$$\phi : X \to Z$$

l'applicazione

$$\phi^* : \mathcal{C}(Z,Y) \ni f \to f \circ \phi \in \mathcal{C}(X,Y)$$

è continua per le topologie compatte-aperte.

Se $\mathbf{X}$ è uno spazio di Hausdorff compatto, $\mathbf{Z}$ di Hausdorff, e ϕ surgettiva, allora ϕ^* è una immersione topologica.

Dim. La ϕ^* è continua perché $\phi(K)$ è compatto in $\mathbf{Z}$ per ogni compatto K di $\mathbf{X}$.

Supponiamo ora che $\mathbf{X}$ sia uno spazio di Hausdorff compatto, che $\mathbf{Z}$ sia uno spazio di Hausdorff e che ϕ sia surgettiva. Dimostriamo che $\phi^*|_{\mathcal{C}(Z,X)}^{\phi^*(\mathcal{C}(Z,X))}$ è aperta. Sia K un compatto di $\mathbf{Z}$ e U un aperto di Y. Allora

$$\begin{aligned}\phi^*\left(\mathcal{C}(Z,K;Y,U)\right) &= \{f \circ \phi \mid f \in \mathcal{C}(Z,Y),\ f(K) \subset U\} \\ &= \phi^*(\mathcal{C}(Z,Y)) \cap \{g \in \mathcal{C}(X,Y) \mid g(\phi^{-1}(K)) \subset U\}.\end{aligned}$$

Questo è un aperto di $\phi^*\left(\mathcal{C}(Z,Y)\right)$ perché $\phi^{-1}(K)$ è un compatto di $\mathbf{X}$.

Teorema 2.5 *a.* *Siano $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ tre spazi topologici. Se*

$$\phi : X \times Y \to Z$$

è continua per la topologia prodotto su $X \times Y$, allora la

$$X \ni x \to \check{\phi}(x) \in \mathcal{C}(Y,Z)$$

definita da

$$\check{\phi}(x)(y) = \phi(x,y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

è continua per la topologia compatta-aperta su $\mathcal{C}(Y,Z)$.

b. *Supponiamo inoltre che $\mathbf{Y}$ sia localmente compatto e di Hausdorff. Se*

$$\psi : X \to \mathcal{C}(Y,Z)$$

è una applicazione continua per la topologia compatta-aperta di $\mathcal{C}(X,Y)$, allora la

$$\hat{\psi} : X \times Y \to Z$$

definita da

$$\hat{\psi}(x,y) = \psi(x)(y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

è continua.

DIM. a. Siano K un compatto di $\mathbf{Y}$ e U un aperto di $\mathbf{Z}$. Allora

$$A = \check{\phi}^{-1}\left(\mathcal{C}(Y,K;Z,U)\right) = \{x \in X \mid \phi(x,y) \in U \quad \forall y \in K\}.$$

Sia $x_0 \in A$. Per ogni $y \in K$ possiamo trovare un intorno aperto W_y di x_0 e un intorno aperto V_y di y tali che

$$\phi(W_y \times V_y) \subset U.$$

Poiché K è compatto, possiamo trovare $y_1, ..., y_n \in K$ tali che

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{y_j}.$$

Se $W = \bigcap_{j=1}^{n} W_{y_j}$, allora $x_0 \in W \subset A$ e quindi A contiene un intorno aperto di ogni suo punto e quindi è aperto. Ciò dimostra che $\check{\phi}$ è continua.

b. Sia $(x_0,y_0) \in X \times Y$ e sia U un intorno aperto di $(\hat{\psi}(x_0,y_0)$ in $\mathbf{Z}$. Scegliamo un intorno compatto V di y_0 in $\mathbf{Y}$ tale che $V \subset \psi(x_0)^{-1}(U)$. Allora

$$W = \psi^{-1}(\mathcal{C}(Y,V;Z,U))$$

è aperto in $\mathbf{X}$ e $\hat{\psi}(W \times \overset{\circ}{V}) \subset U$.

TEOREMA 2.6 *Siano $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ tre spazi topologici. Con le notazioni del teorema precedente:*

$$\alpha : \mathcal{C}(X \times Y, Z) \ni \phi \to \check{\phi} \in \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y,Z))$$

è continua. Se $\mathbf{Y}$ è localmente compatto di Hausdorff, allora α è un omeomorfismo.

DIM. Siano K un compatto di $\mathbf{X}$, F un compatto di $\mathbf{Y}$ e U un aperto di $\mathbf{Z}$. Per il punto (a) del teorema precedente:

$$\alpha^{-1}(\mathcal{C}(X,K;\mathcal{C}(Y,Z),\mathcal{C}(Y,F;Z,U)) = \mathcal{C}(X \times Y, K \times F; Z, U).$$

Questa uguaglianza dimostra che α è continua. Dimostriamo ora che anche α^{-1} è continua, sotto le ulteriori ipotesi che $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ siano di Hausdorff e $\mathbf{Y}$ sia localmente compatto.

Sia Q un compatto di $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ e sia U un aperto di $\mathbf{Z}$. Sia $f : X \times Y \to Z$ una applicazione continua tale che $f(Q) \subset U$. Per ogni punto $(x,y) \in Q$ possiamo trovare un intorno compatto $A_{x,y}$ di x in $\pi_X(Q)$ e un intorno compatto $B_{x,y}$ di y in $\pi_Y(Q)$ tali che

$$f(A_{x,y} \times B_{x,y}) \subset U.$$

Poiché Q è compatto, possiamo trovare $(x_1,y_1), ..., (x_n,y_n) \in Q$ tali che

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{n} (A_{x_j,y_j} \times B_{x_j,y_j}).$$

Allora

$$\bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{C}(X \times Y, A_{x_j,y_j} \times B_{x_j,y_j}; Z, U)$$

è un intorno aperto di f in $\mathcal{C}(X \times Y, Z)$ contenuto in $\mathcal{C}(X \times Y, Q; Z, U)$ e quindi

$$\bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{C}(X, A_{x_j,y_j}; \mathcal{C}(Y,Z), \mathcal{C}(Y, B_{y_j,x_j})) \subset \alpha(\mathcal{C}(X \times Y, Q; Z, U))$$

è un intorno aperto di $\alpha(f)$ in $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y,Z))$. Questo dimostra che α è aperta e quindi è un omeomorfismo.

§3 Il teorema di approssimazione nel caso non compatto

Osserviamo che la topologia di $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ è la topologia della convergenza uniforme sui compatti di $\mathbf{X}$. L'insieme $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ è un'algebra reale e un reticolo con le operazioni definite nel paragrafo precedente.

Abbiamo

Teorema 3.1 *Sia $\mathbf{X}$ uno spazio paracompatto, localmente compatto e connesso. Allora ogni sottoalgebra di $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ che contenga le costanti e separi i punti di $\mathbf{X}$ è densa in $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.*

Ogni sottoalgebra complessa di $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ che contenga le costanti, separi i punti di X e sia chiusa rispetto alla coniugazione, è densa in $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

Dim. Infatti X è unione numerabile di una successione di compatti $\{K_n\}$ con $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che $\mathfrak{A}$ sia una sottoalgebra di $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ che contenga le costanti e separi i punti di X. Allora $\mathfrak{A}|_{K_n} = \{g|_{K_n} \mid g \in \mathfrak{A}\}$ è una sottoalgebra di $\mathcal{C}(K_n,\mathbb{R})$ che contiene le costanti e separa i punti di K_n. Per il Teorema di Stone-Weierstrass, se $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, per ogni n possiamo trovare una funzione $f_n \in \mathfrak{A}$ tale che

$$\sup_{x \in K_n} |f(x) - f_n(x)| < 2^{-n}.$$

Allora $\{f_n\}$ è una successione di funzioni di $\mathfrak{A}$ che converge a f in $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

Si ragiona in modo analogo nel caso di sottoalgebre complesse di $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

CAPITOLO IX

GRUPPI TOPOLOGICI

§1 Definizioni principali

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo. Fissato un elemento $a \in \mathbf{G}$, indichiamo con L_a, R_a, $\mathrm{ad}(a)$ le applicazioni bigettive di $\mathbf{G}$ in sè:

$$(1.1)\qquad \begin{array}{rll} L_a\colon \mathbf{G} \ni g \to ag \in \mathbf{G} & & \text{traslazione a sinistra;} \\ R_a\colon \mathbf{G} \ni g \to ga \in \mathbf{G} & & \text{traslazione a destra;} \\ \mathrm{ad}(a)\colon \mathbf{G} \ni g \to aga^{-1} \in \mathbf{G} & & \text{aggiunta}\,. \end{array}$$

Osserviamo che

$$(1.2)\qquad \mathrm{ad}(a) = L_a \circ R_{a^{-1}} = R_{a^{-1}} \circ L_a\,.$$

Per ogni coppia di elementi $a, b \in \mathbf{G}$ valgono le relazioni:

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} L_a \circ L_b &= L_{ab} \\ R_a \circ R_b &= R_{ba} \\ L_a \circ R_b &= R_b \circ L_a \\ \mathrm{ad}(a) \circ \mathrm{ad}(b) &= \mathrm{ad}(ab) \end{aligned}$$

Lemma 1.1 *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo. Le applicazioni* $L : \mathbf{G} \ni a \to L_a \in \mathfrak{S}(\mathbf{G})$ *ed* $R^{-} : \mathbf{G} \ni a \to R_{a^{-1}} \in \mathfrak{S}(\mathbf{G})$ *sono rappresentazioni fedeli di* $\mathbf{G}$ *nel gruppo* $\mathfrak{S}(\mathbf{G})$ *delle permutazioni degli elementi di* $\mathbf{G}$.

L'applicazione $\mathrm{ad} : \mathbf{G} \ni a \to \mathrm{ad}(a) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{G})$ *è una rappresentazione di* $\mathbf{G}$ *nel gruppo dei suoi automorfismi.*

La rappresentazione $\mathrm{ad} : \mathbf{G} \to \mathrm{Aut}(\mathbf{G})$ si dice la *rappresentazione aggiunta* di $\mathbf{G}$. Il suo nucleo è il centro di $\mathbf{G}$:

$$\ker \mathrm{ad} = \mathfrak{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) = \{a \in \mathbf{G} \mid ag = ga \ \forall g \in \mathbf{G}\}\,.$$

Esso è un sottogruppo abeliano normale di $\mathbf{G}$.

Se A, B sono sottoinsiemi di un gruppo $\mathbf{G}$, useremo nel seguito le notazioni:

$$A^{-1} = \{g^{-1} \mid g \in A\} \qquad \text{e} \qquad AB = \{g_1 g_2 \mid g_1 \in A\,,\ g_2 \in B\}\,.$$

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo. Una topologia τ su $\mathbf{G}$ si dice *compatibile* con la struttura di gruppo se l'applicazione

$$(1.4)\qquad \mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g, h) \to g^{-1}h \in \mathbf{G}$$

è continua (per la topologia prodotto su $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$).

Ciò equivale al fatto che siano continue le due applicazioni:

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g,h) \to gh \in \mathbf{G} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{G} \ni g \to g^{-1} \in \mathbf{G}\,.$$

Un gruppo $\mathbf{G}$ su cui si sia fissata una topologia τ compatibile con la struttura di gruppo si dice un *gruppo topologico.*

LEMMA 1.2 *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo topologico. Allora per ogni* $a \in \mathbf{G}$ *le applicazioni* L_a, R_a *ed* $\mathrm{ad}(a)$ *sono omeomorfismi di* $\mathbf{G}$ *in sè. Il centro* $\mathfrak{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})$ *è un sottospazio chiuso di* $\mathbf{G}$*. Ogni sottogruppo* $\mathbf{H}$ *di* $\mathbf{G}$ *è un gruppo topologico con la topologia di sottospazio di* $\mathbf{G}$*.*

OSSERVAZIONE La topologia discreta e la topologia indiscreta su un gruppo $\mathbf{G}$ sono entrambe compatibili con la struttura di gruppo. Quindi ogni gruppo si può considerare (in modo banale) come un gruppo topologico.

§2 PROPRIETÀ GENERALI

TEOREMA 2.1 *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo topologico. La componente connessa dell'identità* $\mathbf{G}_e$ *è un sottogruppo chiuso normale di* $\mathbf{G}$*. La componente connessa per archi dell'identità è anch'essa un sottogruppo normale di* $\mathbf{G}$*.*

DIM. L'immagine in $\mathbf{G}$ di $\mathbf{G}_e \times \mathbf{G}_e$ mediante l'applicazione $(g,h) \to g^{-1}h$ è un connesso di $\mathbf{G}$ che contiene e ed è quindi contenuta in $\mathbf{G}_e$. Quindi $\mathbf{G}_e$ è un sottogruppo di $\mathbf{G}$. Inoltre per ogni $a \in \mathbf{G}$, $\mathrm{ad}(a)(\mathbf{G}_e)$ è un connesso che contiene e ed è quindi contenuto in $\mathbf{G}_e$. Dunque $\mathbf{G}_e$ è un sottogruppo normale di $\mathbf{G}$.

Si ragiona in modo analogo per la componente connessa per archi di e in $\mathbf{G}$.

TEOREMA 2.2 *Sia* $\mathbf{H}$ *un sottogruppo del gruppo topologico* $\mathbf{G}$*. Se* $\mathbf{H}$ *è aperto, allora è anche chiuso in* $\mathbf{G}$*.*

DIM. Infatti, se $\mathbf{H}$ è aperto, anche il suo complementare $\mathbf{G} \setminus \mathbf{H} = \bigcup_{g \notin \mathbf{H}} g\mathbf{H}$ è aperto in $\mathbf{G}$.

Dato un sottogruppo $\mathbf{H}$ di un gruppo $\mathbf{G}$, indichiamo con $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ l'insieme delle *classi laterali sinistre* di $\mathbf{H}$ in $\mathbf{G}$: $\mathbf{G}/\mathbf{H} = \{g\mathbf{H} \,|\, g \in \mathbf{G}\}$. Se $\mathbf{G}$ è un gruppo topologico, considereremo su $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ la topologia quoziente.

TEOREMA 2.3 *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo topologico e sia* $\mathbf{H}$ *un suo sottogruppo. La proiezione nel quoziente*

$$\pi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{H} \tag{2.1}$$

è un'applicazione aperta.

DIM. Se A è un aperto di $\mathbf{G}$, allora il saturato $\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{h \in \mathbf{H}} Ah$ è aperto perché unione di aperti.

TEOREMA 2.4 *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo topologico e* $\mathbf{H}$ *un suo sottogruppo. Allora la chiusura* $\overline{\mathbf{H}}$ *è ancora un sottogruppo di* $\mathbf{G}$*. Se* $\mathbf{H}$ *è normale, anche* $\overline{\mathbf{H}}$ *è normale.*

Dim. L'applicazione $r : \mathbf{G} \ni g \to g^{-1} \in \mathbf{G}$ è un omeomorfismo. Quindi, se $\mathbf{H}$ è un sottogruppo di $\mathbf{G}$, risulta $r\left(\overline{\mathbf{H}}\right) = \overline{r(\mathbf{H})} = \overline{H}$. Analogamente avremo $L_g(\overline{\mathbf{H}}) = R_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{\mathbf{H}}$ per ogni $g \in \mathbf{H}$. Queste relazioni ci danno ancora $L_g(\mathbf{H}) \cup R_g(\mathbf{H}) \subset \overline{\mathbf{H}}$ per ogni $g \in \overline{\mathbf{H}}$ e quindi $L_g(\overline{\mathbf{H}}) \cup R_g(\overline{\mathbf{H}}) \subset \overline{\mathbf{H}}$ per ogni $g \in \overline{\mathbf{H}}$. Ciò dimostra che $\overline{\mathbf{H}}$ è un sottogruppo di $\mathbf{G}$.

Poiché $\mathrm{ad}(a)$ è per ogni $a \in \mathbf{G}$ un omeomorfismo di $\mathbf{G}$, abbiamo $\mathrm{ad}(a)(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{\mathrm{ad}(a)(\mathbf{H})}$ per ogni $a \in \mathbf{G}$, e quindi $\overline{\mathbf{H}}$ è normale se lo è $\mathbf{H}$.

Teorema 2.5 *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo topologico e* $\mathbf{H}$ *un suo sottogruppo. Il quoziente* $\mathbf{G}/_{\mathbf{H}}$ *è uno spazio regolare se e solo se* $\mathbf{H}$ *è chiuso. In particolare* $\mathbf{G}$ *è uno spazio regolare se e solo se* $\{e\}$ *è un chiuso, cioè se e solo se è uno spazio* T_1.

Dim. La condizione è chiaramente necessaria.

Supponiamo ora che $\mathbf{H}$ sia un chiuso. Allora sono chiuse tutte le sue classi laterali sinistre e quindi $\mathbf{G}/_{\mathbf{H}}$ è uno spazio T_1.

Sia F un chiuso di $\mathbf{G}/_{\mathbf{H}}$ e g un elemento di $\mathbf{G}$ tale che $\pi(g) \notin F$, cioè $g\mathbf{H} \cap \pi^{-1}(F) = \emptyset$.

Vogliamo dimostrare che $\pi(g)$ ed F ammettono in $\mathbf{G}/_{\mathbf{H}}$ intorni disgiunti. Ciò equivale al fatto che g e $\pi^{-1}(F)$ abbiano in $\mathbf{G}$ intorni saturi disgiunti.

Indichiamo con λ l'applicazione continua $(g, h) \to g^{-1}h$. Poiché $\pi^{-1}(F)$ è un chiuso che non contiene $\lambda(e, g)$, possiamo trovare intorni aperti U_e di e e U_g di g tali che $U_e^{-1}U_g \cap \pi^{-1}(F) = \emptyset$. Poniamo:

$$\tilde{U}_g = \pi^{-1}(\pi(U_g)) \qquad \text{e} \qquad \tilde{V} = \bigcup_{a \in \pi^{-1}(F)} U_e\, a = \bigcup_{a \in U_e} a\, \pi^{-1}(F)\,.$$

Poiché la proiezione π è un'applicazione aperta, $\tilde{U}_g$ è un aperto saturo che contiene g, $\tilde{V}$ un'aperto saturo che contiene $\pi^{-1}(F)$. Per completare la dimostrazione basterà allora verificare che $\tilde{U}_g \cap \tilde{V} = \emptyset$. Se così non fosse, potremmo trovare $g_1 \in U_g$, $g_2 \in \mathbf{H}$, $g_3 \in U_e$, $g_4 \in \pi^{-1}(F)$ tali che $g_1 g_2 = g_3 g_4$. Da questa relazione ricaviamo $g_3^{-1} g_1 = g_4 g_2^{-1} \in \pi^{-1}(F)$, contraddicendo la scelta di U_g ed U_e. Ciò dimostra che $\mathbf{G}/_{\mathbf{H}}$ soddisfa anche l'assioma T_3 e quindi è regolare.

Un gruppo topologico $\mathbf{G}$ in cui $\{e\}$ sia chiuso si dice *separato*; per il teorema precedente un gruppo topologico separato è uno spazio regolare.

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico. Poiché $\overline{\{e\}}$ è un sottogruppo normale, il quoziente $\mathbf{G}\Big/\overline{\{e\}}$ è un gruppo topologico separato, che si indica con $\mathbf{G}_{\mathrm{sep}}$ e si dice il *separato* di $\mathbf{G}$.

Teorema 2.6 *Siano* $\mathbf{G}_1$ *e* $\mathbf{G}_2$ *due gruppi topologici e sia* $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ *un omomorfismo di gruppi. Condizione necessaria e sufficiente affinché* ϕ *sia continua è che sia continua nell'origine.*

Dim. La condizione è ovviamente necessaria. Dimostriamo la sufficienza. Sia $g \in \mathbf{G}_1$ e sia V un intorno aperto di $\phi(g)$. Allora $\phi(g^{-1}) \cdot V$ è un intorno aperto di $e_{\mathbf{G}_2}$. Sia U un intorno aperto di $e_{\mathbf{G}_1}$ in $\mathbf{G}_1$ tale che $\phi(U) \subset \phi(g^{-1}) \cdot V$. Allora gU è un intorno aperto di g in $\mathbf{G}_1$ e $\phi(gU) = \phi(g)\phi(U) \subset \phi(g)\phi(g^{-1})V = V$. Quindi ϕ è continua in ogni punto g di $\mathbf{G}$ e quindi è continua in $\mathbf{G}$.

Siano $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ due gruppi topologici. Chiamiamo *omomorfismo di gruppi topologici* un omomorfismo di gruppi $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ che sia al tempo stesso un'applicazione continua. Se $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ è un omeomorfismo e un isomorfismo di gruppi, diremo che è un *isomorfismo topologico.*

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico. Indichiamo con $\mathrm{Aut}_c(\mathbf{G})$ l'insieme degli isomorfismi topologici del gruppo topologico $\mathbf{G}$ in sé. Esso è un gruppo per l'operazione di composizione di applicazioni.

TEOREMA 2.7 *Siano $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ due gruppi topologici e sia $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ un epimorfismo topologico. Allora ϕ è un'applicazione aperta se e soltanto se il suo quoziente iniettivo $\hat{\phi} : \mathbf{G}_1 \big/_{\ker \phi} \to \mathbf{G}_2$ è un isomorfismo topologico.*

DIM. Ciò è conseguenza del fatto che la proiezione $\mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_1 \big/_{\ker \phi}$ è un'applicazione aperta.

TEOREMA 2.8 *Se $\mathbf{G}_1$ è un gruppo topologico compatto e $\mathbf{G}_2$ un gruppo topologico di Hausdorff, allora ogni epimorfismo topologico $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ è un'applicazione aperta.*

DIM. Sia $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ un epimorfismo topologico. Poiché $\mathbf{G}_2$ è separato, $\ker \phi$ è un sottogruppo normale chiuso di $\mathbf{G}_1$. Passando al quoziente iniettivo otteniamo un'applicazione $\hat{\phi} : \mathbf{G}_1 \big/_{\ker \phi} \to \mathbf{G}_2$ continua e bigettiva tra spazi di Hausdorff compatti e quindi un omeomorfismo. La tesi segue allora dal teorema precedente.

ESEMPIO Sia $\mathbb{H}$ il corpo non commutativo dei quaternioni, che identifichiamo alla sottoalgebra delle matrici complesse 2×2 della forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

(con $a, b \in \mathbb{C}$). Le matrici di $\mathbb{H}$ con determinante uguale a uno formano un gruppo topologico per la topologia definita dall'identificazione standard con la sfera $\mathbf{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$. Esso è un gruppo di Hausdorff compatto e si indica con $\mathbf{SU}^*(2)$. Il suo sottoinsieme $\{I, -I\}$ è un sottogruppo chiuso normale. Il quoziente

$$\mathbf{SU}^*(2) \big/_{\{I, -I\}}$$

è un gruppo topologico di Hausdorff e compatto omeomorfo a $\mathbb{RP}^3$.

TEOREMA 2.9 *Se $\mathbf{G}$ è un gruppo topologico connesso, allora ogni intorno aperto U dell'identità è un insieme di generatori del gruppo.*

DIM. Sia $U^{-1} = \{g^{-1} \mid g \in U\}$. Allora $V = U^{-1} \cap U$ è anch'esso un intorno aperto dell'identità di $\mathbf{G}$. Poniamo $V^1 = V$ e definiamo per ricorrenza $V^{n+1} = \{gh \mid g \in V,\, h \in V^n\}$. Ogni V^n è aperto e $V^n \subset V^{n+1}$ per ogni n. Quindi $\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ è un sottogruppo aperto di $\mathbf{G}$. Esso è perciò anche chiuso per il Teorema 2.2, e quindi coincide con $\mathbf{G}$ perché $\mathbf{G}$ è connesso. Quindi V, e a maggior ragione U, genera $\mathbf{G}$.

§3 SPAZI DI MATRICI

Sia $\mathbb{K}$ un campo. Indichiamo con $\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ il $\mathbb{K}$-spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$.

Data una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{C}),$$

indichiamo con $A^* \in \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ la sua aggiunta:

$$A^* = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{m1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{C}).$$

Definiamo su $\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ un prodotto scalare Hermitiano ponendo

$$(A|B) = \operatorname{tr}(B^*A) = \operatorname{tr} A\, B^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{b}_{ij},$$

per $A, B \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Sia $\|A\| = \sqrt{(A|A)}$ la norma associata e $d(A,B) = \|A - B\|$ la relativa distanza. Considereremo su $\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ la struttura di spazio metrico definita da questa distanza.

Teorema 3.1 *Siano m, n interi positivi. Le applicazioni $\mathfrak{M}_{m,n} \ni A \to {}^tA \in \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ e $\mathfrak{M}_{m,n} \ni A \to A^* \in \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ sono isometrie; la prima è $\mathbb{C}$-lineare, la seconda anti-$\mathbb{C}$-lineare.*

Sia k un altro intero positivo. La moltiplicazione righe per colonne: $\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \times \mathfrak{M}_{n,k}(\mathbb{C}) \ni (A,B) \to AB \in \mathfrak{M}_{m,k}(\mathbb{C})$ è un'applicazione bilineare continua, per cui vale:

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \qquad \forall A \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ \forall B \in \mathfrak{M}_{n,k}.$$

Dim. La verifica delle prime due affermazioni è immediata. Per verificare l'ultima, consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} {}^tA_1 \\ \vdots \\ {}^tA_m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = (B^1, \ldots, B^k) \quad \text{con} \quad A_1, \ldots, A_m, B^1, \ldots, B^k \in \mathbb{C}^n.$$

Allora $AB = (c_i^j)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq k}}$ con $c_i^j = (A_i|\bar{B}^j)$. Quindi:

$$\|AB\|^2 = \sum_{i,j} |(A_i|\bar{B}^j)|^2 \leq \sum_{i,j} \left(\|A_i\|^2 \|B_j\|^2\right) = \|A\|^2 \cdot \|B\|^2.$$

Indichiamo con $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili con coefficienti in $\mathbb{K}$.

Teorema 3.2 *Per ogni intero positivo n i gruppi $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ e $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ sono gruppi topologici.*

Dim. Poiché la topologia di ciascuno dei gruppi $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ e $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ è la topologia di sottospazio di $\mathbb{C}^{n^2}$, è sufficiente osservare che i coefficienti della matrice prodotto sono polinomi nei coefficienti dei fattori e che i coefficienti $\left(a^{-1}\right)_{ij}$ della matrice inversa a^{-1} sono funzioni razionali dei coefficienti a_{ij} della matrice a.

§4 L'esponenziale di matrici

Teorema 4.1 *Per ogni matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, la serie*

$$\exp(A) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} A^h \tag{4.1}$$

è convergente e definisce un elemento del gruppo lineare $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. L'applicazione

$$\exp : \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C}) \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \tag{4.2}$$

è continua e surgettiva.

Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ gli autovalori di A, ripetuti con la loro molteplicità. Allora $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ sono gli autovalori di $\exp(A)$ (ripetuti con la loro molteplicità). In particolare vale la formula:

$$\det(\exp(A)) = e^{\operatorname{tr}(A)}\,. \tag{4.3}$$

Dim. La serie a termini positivi $\displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \|A^h\|$ è maggiorata termine a termine dalla serie convergente, a termini di segno positivo, $\displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \|A\|^h$ e quindi la serie $\displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} A^h$ converge in $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, uniformemente sui sottoinsiemi compatti. Quindi, tenuto conto del fatto che $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ è localmente compatto, $\exp : \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C}) \to \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ è continua perché limite uniforme sui compatti di una successione di funzioni continue (polinomi).

Per completare la dimostrazione, è utile premettere il seguente:

Lemma 4.2 *Siano $A, B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Se $AB = BA$, allora*

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)\,.$$

Dim. Abbiamo infatti:

$$\begin{aligned}
\exp(A+B) &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(A+B)^h}{h!} \\
&= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\sum_{p+q=h} \frac{h!}{p!q!} A^p B^q}{h!} \\
&= \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{A^p B^q}{p!q!} \\
&= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!}\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{B^q}{q!}\right) \\
&= \exp(A)\exp(B)
\end{aligned}$$

Proseguiamo ora la dimostrazione del Teorema.

Osserviamo ora che, se $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ e $a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, abbiamo $\left(a\,A\,a^{-1}\right)^h = a\,A^h\,a^{-1}$ per ogni intero $h \geq 0$ e quindi

$$\exp\left(aAa^{-1}\right) = a\,(\exp(A))\,a^{-1} \qquad \forall A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C}),\ \forall a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})\,.$$

Questa formula ci permette di calcolare l'esponenziale di una matrice usando la formula di Jordan: per ogni $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ possiamo trovare una matrice diagonale S, una matrice nilpotente N, e una matrice invertibile $a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ tali che:

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \epsilon_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con $\epsilon_i \in \{0,1\}$ e $A = a\,(S+N)\,a^{-1}$, $SN = NS$.

Poiché $SN = NS$, abbiamo, per il Lemma, $\exp(S+N) = \exp(N)\exp(S) = \exp(S)\exp(N)$. Si ottiene facilmente:

$$\exp(S) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \exp(N) = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{N^h}{h!}\,.$$

Chiaramente $\exp(S)$ è invertibile ed ha determinante $e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)} = e^{\mathrm{tr}(A)}$. La matrice $\exp(N)$ è somma dell'identità e una matrice nilpotente e quindi ha determinante 1. Quindi

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(S+N)) = \det(\exp(S))\det(N) = \det(\exp(S)) = e^{\mathrm{tr}(A)}\,.$$

Ciò dimostra che $\exp(A) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$.

Per dimostrare che $\exp : \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C}) \to \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ è surgettiva, è sufficiente mostrare che ogni matrice di Jordan invertibile appartiene ad $\exp(\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C}))$. Chiaramente basterà dimostrare che ciò è vero per matrici $m \times m$ della forma:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Abbiamo $A = S(I+N) = (I+N)S$ con

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $\lambda = re^{i\phi} = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, con $r, \phi \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Poniamo: $S' = (\log r + i\phi)I$ e $N' = -\sum_{h=1}^{m-1} \dfrac{(-N)^h}{h}$. Allora $S = \exp(S')$, $(I+N) = \exp(N')$ e quindi, poiché $S'N' = N'S'$, abbiamo: $A = \exp(S' + N')$.

In particolare otteniamo:

Teorema 4.3 *Per ogni intero $n \geq 1$ il gruppo topologico $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ è connesso per archi.*

Osservazione Osserviamo che l'esponenziale di una matrice a coefficienti reali è un elemento del gruppo lineare reale. Ma l'applicazione $\exp : \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ non è surgettiva.

Dimostriamo ora alcune proprietà di differenziabilità dell'esponenziale di matrici.

Lemma 4.4 *Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti complessi. Allora l'applicazione $\mathbb{R} \ni t \to \exp(tA) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ è differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ e risulta:*

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k \exp(tA) = A^k \exp(tA) = \exp(tA)\, A^k\,. \tag{4.4}$$

Dim. Siano $s, t \in \mathbb{R}$. Abbiamo allora

$$\exp\left((s+t)A\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\exp(tA)A^h}{h!} s^h\,,$$

con convergenza uniforme sui compatti di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Da questa osservazione segue la tesi.

Lemma 4.5 *Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti complessi. Se $\exp(tA) \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, allora $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.*

Dim. Utilizzando il lemma precedente, troviamo che $Av \in \mathbb{R}^n$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, e questo implica che $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

§5 Matrici Hermitiane

Una matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ si dice *Hermitiana* se $A^* = A$. Le matrici Hermitiane formano un sottospazio reale di dimensione n^2 di $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Indicheremo tale spazio vettoriale con $\mathfrak{p}_n$.

Una matrice $u \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ si dice *unitaria* se $u^*u = I$. Le matrici unitarie sono le matrici dei cambiamenti di base ortonormali per il prodotto scalare Hermitiano standard di $\mathbb{C}^n$. Esse formano un sottogruppo di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, che indichiamo con $\mathbf{U}(n)$.

Lemma 5.1 *Ogni matrice Hermitiana è diagonalizzabile ed ha autovalori reali. Se $A \in \mathfrak{p}_n$ possiamo trovare $u \in \mathbf{U}(n)$ tale che uAu^{-1} sia diagonale e reale.*

Dim. Se λ è un autovalore di $A \in \mathfrak{p}_n$, con autovettore $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, abbiamo:

$$\lambda |v|^2 = (A(v)|v) = (v|A^*(v)) = (v|A(v)) = (v|\lambda v) = \bar{\lambda}|v|^2 ,$$

onde $\bar{\lambda} = \lambda$ e λ è reale. Se w è un vettore ortogonale a v, abbiamo

$$(A(w)|v) = (w|A^*(v)) = (w|A(v)) = (w|\lambda v) = 0 .$$

Quindi $A(v^\perp) \subset v^\perp$. Da questo deduciamo che esiste una base ortonormale di autovettori di A, da cui segue il lemma.

Indichiamo con $\mathfrak{P}_n$ l'insieme delle matrici Hermitiane definite positive, cioè delle matrici Hermitiane che hanno tutti gli autovalori positivi. Su tale insieme consideriamo la topologia di sottospazio di $\mathbb{C}^{n^2}$.

Teorema 5.2 *L'applicazione esponenziale definisce un omeomorfismo:*

$$\mathfrak{p}_n \ni A \to \exp(A) \in \mathfrak{P}_n . \tag{5.1}$$

Dim. Si verifica facilmente che $(\exp(A))^* = \exp(A^*)$ e quindi $\exp(\mathfrak{p}_n) \subset \mathfrak{p}_n$. Inoltre, se $A \in \mathfrak{p}_n$ ha autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, la matrice $\exp(A)$ ha autovalori $\exp(\lambda_1), ..., \exp(\lambda_n)$, che sono numeri reali positivi.

Dimostriamo ora che (5.1) è surgettiva. Sia $p \in \mathfrak{P}_n$. Per il Lemma 5.1 esiste $u \in \mathbf{U}(n)$ tale che $upu^{-1} = \operatorname{diag}(k_1, \dots, k_n)$ con $0 < k_1 \le \dots \le k_n$. Posto $Q = \operatorname{diag}(\log k_1, \dots, \log k_n)$, con $\log k_j \in \mathbb{R}$ per $1 \le j \le n$, otteniamo $P = u \exp(Q) u^{-1} = \exp(uQu^{-1})$.

Dimostriamo ora che (5.1) è iniettiva. Siano $A, B \in \mathfrak{p}_n$ tali che $\exp(A) = \exp(B)$. Fissiamo una base ortonormale $e_1, ..., e_n$ di autovettori di A: abbiamo $A(e_j) = \lambda_j e_j$ con $\lambda_j \in \mathbb{R}$ per $j = 1, ..., n$. Sia $\mu \in \mathbb{R}$ un autovalore di B con autovettore $v = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$. Allora:

$$e^\mu v = \sum_{j=1}^n (a_j e^\mu)\, e_j = \exp(B)(v) = \exp(A)(v) = \sum_{j=1}^n \left(a_j e^{\lambda_j}\right) e_j .$$

Da questa relazione ricaviamo che $a_j e^\mu = a_j e^{\lambda_j}$ per ogni $j = 1, ..., n$. Poiché l'esponenziale è iniettivo su $\mathbb{R}$, otteniamo che $\mu = \lambda_j$ se $a_j \neq 0$, e in questo caso e_j è autovettore di B rispetto all'autovalore $\mu = \lambda_j$. Da questo segue che $B = A$.

Dimostriamo infine che (5.1) è un omeomorfismo. A questo scopo basta osservare che, fissati due numeri reali a, b con $a < b$, gli insiemi

$$\mathfrak{p}_n(a,b) = \left\{ P \in \mathfrak{p}_n \;\middle|\; a|v|^2 \le (P(v)|v) \le b|v|^2 \right\}$$

e

$$\mathfrak{P}_n(a,b) = \left\{ p \in \mathfrak{P}_n \;\middle|\; e^a|v|^2 \le (p(v)|v) \le e^b|v|^2 \right\}$$

sono compatti di Hausdorff e l'applicazione esponenziale definisce tra essi una trasformazione continua e bigettiva e quindi un omeomorfismo. Poiché tali insiemi, al variare delle coppie di numeri reali a, b con $a < b$ costituiscono un ricoprimento fondamentale di $\mathfrak{p}_n$ e di $\mathfrak{P}_n$ rispettivamente, ne segue che (5.1) è un omeomorfismo.

Data $p \in \mathfrak{P}_n$, indichiamo con $\log(p)$ l'unico elemento $P \in \mathfrak{p}_n$ tale che $\exp(P) = p$.

Denotiamo con $\mathfrak{p}_n(\mathbb{R})$ (risp. $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$) il sottospazio delle matrici reali di $\mathfrak{p}_n$ (risp. di$\mathfrak{P}_n$). Osserviamo che $\mathfrak{p}_n(\mathbb{R})$ è lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$ simmetriche. Abbiamo:

Teorema 5.3 *Per ogni intero $n \geq 1$ l'applicazione $\mathfrak{p}_n(\mathbb{R}) \ni P \to \exp(P) \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$ è un omeomorfismo.*

Dim. Infatti ogni matrice simmetrica reale $n \times n$ ammette una base ortonormale in $\mathbb{R}^n$. Quindi $\exp(\mathfrak{p}_n(\mathbb{R})) = \mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$ e la tesi segue dal teorema precedente.

§6 Decomposizione di matrici di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$

Teorema 6.1 *Sia n un intero positivo. Ogni matrice $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ si decompone in modo unico nel prodotto up di una matrice unitaria $u \in \mathbf{U}(n)$ e di una matrice Hermitiana definita positiva $p\mathfrak{P}_n$.*

Dim. Data $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, la matrice a^*a è Hermitiana e definita positiva. Esiste allora un'unica matrice Hermitiana $Q \in \mathfrak{p}_n$ tale che $a^*a = \exp(Q)$. Posto $p = \exp(Q/2)$, sia $u = ap^{-1}$. Allora:

$$uu^* = ap^{-1}p^{-1}a^* = ap^{-2}a^* = a(a^*a)^{-1}a^* = aa^{-1}a^{*-1}a^* = I$$

e $u \in \mathbf{U}(n)$.

Dimostriamo ora che la decomposizione è unica. Da $a = up$ otteniamo $a^*a = pu^*up = p^2$ e quindi l'unicità è conseguensa del seguente:

Lemma 6.2 *Sia n un intero positivo. L'applicazione $\mathfrak{P}_n \ni p \to p^2 \in \mathfrak{P}_n$ è un omeomorfismo.*

Dim. Abbiamo infatti il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{p}_n \arrow[r, "P\to 2P"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{p}_n \arrow[d, "\exp"] \\ \mathfrak{P}_n \arrow[r, "p\to p^2"'] & \mathfrak{P}_n \end{tikzcd}$$

in cui le frecce verticali e l'orizzontale in alto sono omeomorfismi. Quindi anche la freccia orizzontale in basso è un omeomorfismo.

Data $p \in \mathfrak{P}_n$, indichiamo con $\sqrt{p}$ l'unico elemento q di $\mathfrak{P}_n$ tale che $q^2 = p$. L'applicazione $\mathfrak{P}_n \ni p \to \sqrt{p} \in \mathfrak{P}_n$ è, per il lemma precedente, un omeomorfismo.

Teorema 6.3 *Sia n un intero positivo. L'applicazione:*

$$\mathbf{U}(n) \times \mathfrak{p}_n \ni (u, P) \to u \exp(P) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \tag{6.1}$$

è un omeomorfismo.

Dim. L'applicazione è infatti continua e la sua inversa è continua, essendo definita da $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \ni a \to \left(a\left(\sqrt{a^*a}\right)^{-1}, \log\left(\sqrt{a^*a}\right)\right) \in \mathbf{U}(n) \times \mathfrak{p}_n$.

§7 Algebre di Lie

Sia $\mathbb{K}$ un campo. Un'algebra $\mathfrak{g}$ su $\mathbb{K}$ si dice *algebra di Lie* se il prodotto

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \to [X, Y] \in \mathfrak{g} \tag{7.1}$$

è un'applicazione $\mathbb{K}$-lineare antisimmetrica che soddisfa l'*identità di Jacobi*:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \qquad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}\,. \tag{7.2}$$

Esempio 7.1 Se V è un qualsiasi spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, il prodotto $[v_1, v_2] = 0$ per ogni $v_1, v_2 \in V$ definisce su V una struttura di algebra di Lie, che si dice *abeliana*.

Esempio 7.2 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Indichiamo con $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ lo spazio degli endomorfismi $\mathbb{K}$-lineari di V, con il prodotto definito da

$$[A, B] \,=\, A \circ B \,-\, B \circ A\,. \tag{7.3}$$

Con questa operazione $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ è un'algebra di Lie su $\mathbb{K}$.

In particolare lo spazio vettoriale $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ è un'algebra di Lie per il commutatore di matrici: $[A, B] = AB - BA$. Quest'algebra di Lie sarà denotata con $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Esempio 7.3 Sia $\mathfrak{A}$ un'algebra associativa sul campo $\mathbb{K}$, con prodotto $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (a, b) \to a \cdot b \in \mathfrak{A}$. Il prodotto $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$ deinisce sullo spazio vettoriale $\mathfrak{A}$ una struttura di algebra di Lie. Indicheremo con $\mathfrak{A}_{\text{Lie}}$ l'algebra di Lie ottenuta in questo modo da un'algebra associativa $\mathfrak{A}$.

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita N su $\mathbb{K}$ e sia $X_1, ..., X_N$ una base di $\mathfrak{g}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Risultano allora univocamente determinati $c^k_{i,j} \in \mathbb{K}$ per $1 \leq i, j, k \leq N$ tali che

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{N} c^k_{i,j} X_k \qquad \forall 1 \leq i, j \leq N\,. \tag{7.4}$$

I coefficienti $c^k_{i,j}$ si dicono le *costanti di struttura* di $\mathfrak{g}$ e verificano le relazioni:

$$\begin{cases} c^k_{j,i} = -c^k_{i,j} & \text{(antisimmetria)},\\ \sum_{i=1}^{N} \left(c^i_{j,k} c^r_{i,h} + c^i_{k,h} c^r_{i,j} + c^i_{h,j} c^r_{i,k} \right) = 0 & \text{(identità di Jacobi)}. \end{cases} \tag{7.5}$$

Viceversa, costanti di struttura che verifichino le (7.5) definiscono su uno spazio vettoriale V di dimensione N una struttura di algebra di Lie.

Esempio 7.4 Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il *prodotto vettore*:

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (v, w) \to v \times w \in \mathbb{R}^3\,, \tag{7.6}$$

definito dall'identità:

$$\det(v, w, z) = (v \times w | z) \qquad \forall v, w, z \in \mathbb{R}^3\,. \tag{7.7}$$

Esso si può definire nella base ortonormale canonica e_1, e_2, e_3 di $\mathbb{R}^3$ mediante le costanti di struttura $c^i_{j,k} = \epsilon(i,j,k)$, dove $\epsilon(i,j,k)$ è uguale a zero se due degli indici i,j,k sono uguali ed altrimenti è la segnatura della permutazione (i,j,k) di $(1,2,3)$. Per verificare che $\mathbb{R}^3$, col prodotto esterno, è un'algebgra di Lie, è sufficiente verificare la relazione $e_1 \times (e_2 \times e_3) + e_2 \times (e_3 \times e_1) + e_3 \times (e_1 \times e_2) = 0$, e questa è verificata perché tutti gli addendi sono nulli.

Se $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sono due sottospazi vettoriali di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, indichiamo con $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ il sottospazio vettoriale di $\mathfrak{g}$ generato dai commutatori $[X, Y]$ al variare di X in $\mathfrak{a}$ e di Y in $\mathfrak{b}$. Un sottospazio vettoriale $\mathfrak{a}$ di $\mathfrak{g}$ si dice una *sottoalgebra di Lie* di $\mathfrak{g}$ se $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$ e un *ideale* se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$.

Si verifica facilmente il segente:

LEMMA 7.1 *Siano $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ due algebre di Lie e $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un omomorfismo di algebre di Lie. Allora $\ker \phi = \{X \in \mathfrak{g} \mid \phi(X) = 0\}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$.*

Se $\mathfrak{a}$ è un ideale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, allora vi è un'unica struttura di algebra di Lie sul quoziente $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ che renda la proiezione naturale $\mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ un omomorfismo di algebre di Lie.

Data un'algebra $\mathfrak{A}$ su un campo $\mathbb{K}$, si dice *derivazione* di $\mathfrak{A}$ un'applicazione $\mathbb{K}$-lineare $D : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ che soddisfi l'*identità di Leibnitz*:

$$D(a \cdot b) = (Da) \cdot b + a \cdot (Db) \quad \forall a, b \in \mathfrak{A}\,. \tag{7.8}$$

LEMMA 7.2 *Sia $\mathfrak{A}$ un'algebra su $\mathbb{K}$. L'insieme $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{A})$ delle derivazioni di $\mathfrak{A}$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{A})$.*

DIM. Il fatto che $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{A})$ sia un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale segue dalla bilinearità del prodotto $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (a, b) \to a \cdot b \in \mathfrak{A}$.

Siano ora $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{A})$ e dimostriamo che anche $[D_1, D_2] \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{A})$. Per ogni $a, b \in \mathfrak{A}$ risulta:

$$\begin{aligned}[D_1, D_2](a \cdot b) &= D_1\,(D_2 a \cdot b + a \cdot D_2 b) - D_2\,(D_1 a \cdot b + a \cdot D_1 b)\\ &= D_1 \circ D_2 a \cdot b + D_2 a \cdot D_1 b + D_1 a \cdot D_2 b + a \cdot D_1 \circ D_2 b\\ &\quad - (D_2 \circ D_1 a \cdot b + D_1 a \cdot D_2 b + D_2 a \cdot D_1 b + a \cdot D_2 \circ D_1 b)\\ &= (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1) a \cdot b + a \cdot (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1) b\\ &= [D_1, D_2] a \cdot b + a \cdot [D_1, D_2] b\,.\end{aligned}$$

La dimostrazione è completa.

LEMMA 7.3 *Sia $\mathfrak{A}$ un'algebra associativa su $\mathbb{K}$. Allora l'applicazione $\mathfrak{A} \ni a \to D_a \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{A})$, definita da $D_a(x) = a \cdot x - x \cdot a$ per ogni $x \in \mathfrak{A}$, è una derivazione di $\mathfrak{A}$. L'applicazione: $\mathfrak{A}_{\mathrm{Lie}} \ni a \to D_a \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{A})$ è un omomorfismo di algebre di Lie.*

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su $\mathbb{K}$ e sia $X \in \mathfrak{g}$. Definiamo

$$\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \ni Y \to [X, Y] \in \mathfrak{g}\,. \tag{7.9}$$

Si verifica che vale:

Teorema 7.4 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie sul campo $\mathbb{K}$ e sia $X \in \mathfrak{g}$. Allora* $\mathrm{ad}(X)$ *è una derivazione di $\mathfrak{g}$ e l'applicazione*

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \mathrm{ad}(X) \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}) \tag{7.10}$$

è un omomorfismo di $\mathfrak{g}$ nell'algebra di Lie delle derivazioni di $\mathfrak{g}$.

La (7.10) si dice la *rappresentazione aggiunta di* $\mathfrak{g}$.

Osservazione I.D.Ado (Uspiehi Math. Nauk, 1947) nel caso di algebre di Lie su campi di caratteristica 0 e K. Iwasawa (Japan J. Math., 1948) nel caso generale hanno dimostrato che ogni algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di dimensione finita su $\mathbb{K}$ ammette una rappresentazione fedele $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ per qualche intero positivo n.

Non sarà quindi restrittivo, nel seguito, considerare soltanto sottoalgebre di Lie dell'algebra di Lie degli endomorfismi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita su $\mathbb{K}$.

§8 Gruppi di Lie di trasformazioni lineari e loro algebre di Lie

In questo paragrafo studieremo le relazioni tra gruppi di Lie di trasformazioni lineari e algebre di Lie.

Lemma 8.1 *Sia n un intero positivo e siano X, Y due elementi di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ e sia k un intero positivo. Valgono allora le formule seguenti:*

$$\begin{aligned} &(i) && \mathrm{ad}(X)(XY) = X\mathrm{ad}(X)(Y)\,, \\ &(ii) && X^kY = YX^k + \sum_{h=1}^{k} \binom{k}{h} \left(\mathrm{ad}^h(Y)\right) X^{k-h}\,, \\ &(iii) && YX^k = x^kY + \sum_{h=1}^{k} (-1)^h \binom{k}{h} X^{k-h}\mathrm{ad}(X)^hY\,. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Dim. Dimostriamo la (i). Abbiamo:

$$\mathrm{ad}(X)(XY) = X(XY) - (XY)X = X(XY - YX) = X\mathrm{ad}(X)Y\,.$$

La dimostrazione di (ii) e di (iii) sono simili. Mostriamo ad esempio che vale la (iii). A questo scopo osserviamo che per $k = 1$ la formula si riduce alla definizione di $\mathrm{ad}(X)$ e quindi è verificata. Supponiamo $m \geq 1$ e la formula valida per $k \leq m$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} YX^{m+1} = YX^mX &= \left(X^mY + \sum_{h=1}^{m} (-1)^h \binom{m}{h} X^{m-h}\mathrm{ad}(X)^hY \right) X \\ &= X^{m+1}Y - X^m\mathrm{ad}(X)Y + \sum_{h=1}^{m} (-1)^h \binom{m}{h} X^{m-h+1}\mathrm{ad}(X)^hY \\ &\quad - \sum_{h=1}^{m} (-1)^h \binom{m}{h} X^{m-h}\mathrm{ad}(X)^{h+1}Y \\ &= X^{m+1}Y - X^m\mathrm{ad}(X)Y + (-1)^{m+1}\mathrm{ad}(X)^{m+1}Y \\ &\quad + \sum_{h=1}^{m} (-1)^h \left\{ \binom{m}{h} + \binom{m}{h-1} \right\} X^{m-h+1}\mathrm{ad}(X)^hY \\ &\quad - \tbinom{m}{1} X^m\mathrm{ad}(X)Y \end{aligned}$$

perché i due endomorfismi $\mathrm{ad}(X)(\cdot)$ e $X \circ (\cdot)$ commutano per la (i). Poiché $\binom{m}{h} + \binom{m}{h-1} = \binom{m+1}{h}$, otteniamo la (iii).

Teorema 8.2 (Formula dello Jacobiano) *Sia n un intero positivo. L'applicazione esponenziale* $\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \to \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ *è differenziabile in ogni punto e il suo differenziale in $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ è dato da:*

$$d\exp(A)(X) = \frac{I - \exp\left(-\mathrm{ad}(A)\right)}{\mathrm{ad}(A)} \exp(A) X \qquad \forall X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\,, \tag{8.2}$$

ove $$\frac{I - \exp\left(-\mathrm{ad}(A)\right)}{\mathrm{ad}(A)} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(h+1)!} \mathrm{ad}(A)^h \;.$$

Dim. Fissiamo $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Per ogni $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ abbiamo:

$$(A+X)^h = A^h + \sum_{r=0}^{h-1} A^r X A^{h-r-1} \; + o(X)\,.$$

La formula di commutazione (iii) del Lemma precedente ci dà:

$$A^r X A^s = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} A^{h-j-1} \mathrm{ad}(A)^j X\,.$$

Sostituendo troviamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{r+s=h-1} A^r X A^s &= \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} A^{h-j-1} \mathrm{ad}(A)^j X \\
&= \sum_{s=0}^{h-1} (-1)^j \left(\sum_{k=0}^{h-j-1} \binom{j+k}{j} \right) A^{h-j-1} \mathrm{ad}(A)^j X \\
&= \sum_{s=0}^{h-1} (-1)^j \binom{h}{j+1} A^{h-j-1} \mathrm{ad}(A)^j X\,.
\end{aligned}$$

Otteniamo perciò:

$$\begin{aligned}
\exp(A+X) &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(A+X)^h}{h!} \\
&= \sum \frac{1}{h!} \sum_{r+s=h-1} A^r X A^s \; + o(X) \\
&= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{h-1} \frac{A^{h-j-1}}{(h-j-1)!} \, \frac{(-1)^j \mathrm{ad}(A)^j}{(j+1)!} X \; + o(X) \\
&= \exp(A) \, \frac{I - \exp(-\mathrm{ad}(A))}{\mathrm{ad}(A)} X \\
&= \frac{I - \exp(-\mathrm{ad}(A))}{\mathrm{ad}(A)} \exp(A)\, X\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo perciò ottenuto:

$$\exp(A+X) = \exp(A) + \frac{I - \exp(-\mathrm{ad}(A))}{\mathrm{ad}(A)} \exp(A)X + o(X)$$

che ci dà la formula desiderata per il differenziale.

Enunciamo ora il teorema della funzione inversa per applicazioni differenziabili tra aperti di $\mathbb{R}^n$:

Teorema 8.3 (Teorema dell'applicazione inversa) *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $1 \leq k \leq \infty$. Sia $x_0 \in \Omega$ un punto in cui $df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia un isomorfismo lineare. Allora esiste un intorno aperto U di x_0 in Ω tale che $f(U)$ sia aperto e $f|_U^{f(U)} : U \to f(U) \subset \mathbb{R}^n$ sia un omeomorfismo la cui inversa sia ancora un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$.*

Siano U, V due aperti di $\mathbb{R}^n$ ed $f : U \to V$ un omeomorfismo. Se sia f che f^{-1} sono applicazioni differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$, diciamo che f è un *diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$*.

Dal teorema dell'applicazione inversa ricaviamo:

Teorema 8.4 *Sia n un intero positivo. Allora l' applicazione:* $\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \to \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ *è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^\infty$ di un intorno aperto di 0 in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ su un intorno aperto dell'identità in $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$.*

Analogamente, $\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ *è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^\infty$ di un intorno aperto di 0 in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ su un intorno aperto dell'identità in $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$.*

Dim. L'enunciato è conseguenza del Teorema dell'applicazione inversa, perché il differenziale dell'applicazione esponenziale in 0 è l'identità su $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

Teorema 8.5 (Coordinate di seconda specie) *Sia n un intero positivo, indichiamo con $\mathbb{K}$ il campo dei numeri reali o dei numeri complessi, e siano V, W due sottospazi vettoriali reali di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ tali che $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) = V \oplus W$. Per ogni $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ siano $X_V \in V$ e $X_W \in W$ le componenti di X in V, W, tali che $X_V + X_W$. Allora l'applicazione $\phi : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) \ni X \to \exp(X_V)\exp(X_W) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^\infty$ di un intorno di 0 in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ su un intorno dell'identità in $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$.*

Dim. Per la formula dello Jacobiano abbiamo:

$$\begin{aligned}\phi(X) &= \exp(X_V)\exp(X_W) = (I + X_V + o(X_V))(I + X_W + o(X_W)) \\ &= I + X_V + X_W + o(X) = I + X + o(X)\,,\end{aligned}$$

e quindi $d\phi(0)$ è l'identità su $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$. La tesi è quindi conseguenza del teorema dell'applicazione inversa.

Osservazione La serie

$$\log(x) = \log(e + (x-e)) = -\sum_{h=1}^{\infty} \frac{(e-x)^h}{h}$$

converge uniformemente su $\{x \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \mid \|x - I\| \leq r\}$ se $0 \leq r < 1$ e definisce un elemento $\log(x) \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ tale che $\exp(\log(x)) = x$.

Lemma 8.6 *Sia n un intero positivo. Se $X, Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ e $t \in \mathbb{R}$, abbiamo:*

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp\left(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)\right). \tag{8.3}$$

Dim. Basta dimostrare che le due applicazioni

$$F_1 : \mathbb{R} \ni t \to \exp(tX)\exp(tY) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \qquad \text{e}$$
$$F_2 : \mathbb{R} \ni t \to \exp\left(t(X+Y) + \tfrac{t^2}{2}[X,Y]\right) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$$

e le loro derivate fino al second'ordine assumono lo stesso valore in 0. Da:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \left(I + tX + \tfrac{1}{2}t^2X^2 + O(t^3)\right)\left(I + tY + \tfrac{1}{2}t^2Y^2 + O(t^3)\right) \\ &= I + t(X+Y) + \tfrac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + O(t^3) \end{aligned}$$

otteniamo: $F_1(0) = I$, $F_1'(0) = X + Y$, $F_1''(0) = X^2 + 2XY + Y^2$.

D'altra parte:

$$\begin{aligned} F_2(t) &= I + \left(tX + tY + \tfrac{t^2}{2}[X,Y]\right) + \tfrac{1}{2}\left(tX + tY + \tfrac{t^2}{2}(XY - YX)\right)^2 + O(t^3) \\ &= I + t(X+Y) + \tfrac{t^2}{2}\left([X,Y] + X^2 + XY + YX + Y^2\right) + O(t^3) \\ &= I + t(X+Y) + \tfrac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + O(t^3) \end{aligned}$$

da cui otteniamo: $F_2(0) = I$, $F_2'(0) = X + Y$, $F_2''(0) = X^2 + 2XY + Y^2$. La dimostrazione è completa.

Questo lemma ci permette di esplicitare la relazione tra sottogruppi chiusi di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ e sottoalgebre di Lie reali di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

Teorema 8.7 *Sia n un intero positivo e sia $\mathbf{G}$ un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. Sia $\mathfrak{g}$ il sottoinsieme di tutte le matrici $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ tali che $\exp(tX) \in \mathbf{G}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie reale e l'applicazione $\mathfrak{g} \ni X \to \exp(X) \in \mathbf{G}$ definisce un omeomorfismo di un intorno di 0 in $\mathfrak{g}$ su un intorno dell'identità in $\mathbf{G}$.*

Dim. Segue immediatamente dalla definizione che, se $X \in \mathfrak{g}$, anche $tX \in \mathfrak{g}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Siano ora $X, Y \in \mathfrak{g}$. Allora $(\exp(tX/m)\exp(tY/m))^m \in \mathbf{G}$ per ogni numero reale t ed ogni intero positivo m. Utilizzando il lemma precedente, abbiamo: $(\exp(tX/m)\exp(tY/m))^m = \exp\left(t(X+Y) + O(t^2/m)\right)$. Facendo tendere $m} all'infinito, poiché abbiamo supposto che $\mathbf{G}$ fosse chiuso in $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, otteniamo che $\exp(t(X+Y)) \in \mathbf{G}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi anche $(X+Y) \in \mathfrak{g}$. Questo dimostra che $\mathfrak{g}$ è uno spazio vettoriale. Utilizzando ancora il Lemma 8.6, abbiamo per ogni intero positivo m:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \ni &\exp(tX/m)\exp(Y/m)\exp\left(-\tfrac{t(X+Y)}{m}\right) \\ &= \exp\left(\tfrac{t(X+Y)}{m} + \tfrac{t^2}{2m^2}[X,Y] + O\left(\tfrac{t^3}{m^3}\right)\right)\exp\left(-\tfrac{t(X+Y)}{m}\right) \\ &= \exp\left(\tfrac{t^2}{2m^2}[X,Y] + O\left(\tfrac{t^3}{m^3}\right)\right). \end{aligned}$$

Elevando alla m^2, otteniamo che $\mathbf{G} \ni \exp\left(\frac{t^2}{2}[X,Y] + O\left(\frac{t^3}{m}\right)\right)$ per ogni intero positivo m ed ogni numero reale t. Passando al limite per $m \to +\infty$ otteniamo allora che $\exp(t[X,Y]) \in \mathbf{G}$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$ ed ogni $t \geq 0$. Scambiando tra loro X e Y, otteniamo l'inclusione anche per $t < 0$ e quindi concludiamo che $[X,Y] \in \mathfrak{g}$. Quindi $\mathfrak{g}$ è una sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

Sia ora $\mathbf{G}'$ il sottogruppo di $\mathbf{G}$ generato da $\exp(\mathfrak{g}) = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$. Dico che $\mathbf{G}'$ è un intorno dell'identità in $\mathbf{G}$. Se così non fosse, potremmo trovare una successione $\{g_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{G} \setminus \mathbf{G}'$ tale che $g_\nu \to I$ per $\nu \to +\infty$. Scegliamo un sottospazio vettoriale reale V di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ tale che $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{g} \oplus V$. Per il teorema sulle coordinate di seconda specie, esistono intorni aperti U di 0 in $\mathfrak{g}$ e U' di 0 in V tali che $U \times U' \ni (X,Y) \to \exp(X)\exp(Y) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ sia un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^\infty$ di $U \times U'$ su un intorno W dell'identità in $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. A meno di passare a una successione estratta, possiamo allora supporre che $g_\nu = \exp(X_\nu)\exp(Y_\nu)$ con $X_\nu \in U$, $Y_\nu \in U'$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$. Inoltre X_ν, $Y_\nu \to 0$ per $\nu \to +\infty$. Poiché per ipotesi $Y_\nu \neq 0$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$, risulta definita una successione di interi non negativi m_ν tali che $m_\nu \leq \|Y_\nu\|^{-1} < \mu_\nu + 1$. A meno di passare a una sottosuccessione possiamo allora supporre che $\lim_{\nu\to\infty} m_\nu Y_\nu = Y \in V \setminus \{0\}$. Per ogni coppia di interi p, q con $q > 0$ poniamo: $pm_\nu = qs_\nu + r_\nu$, con $0 \leq r_\nu < q$. Poiché $r_\nu Y_\nu \to 0$ per $\nu \to +\infty$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \exp\left(\tfrac{p}{q}Y\right) &= \lim_{\nu\to\infty} \exp\left(\tfrac{pm_\nu}{q}Y_\nu\right) \\ &= \lim_{\nu\to\infty} \left(\exp(Y_\nu)\right)^{s_\nu} \in \mathbf{G}\,. \end{aligned}$$

Quindi $\mathbf{G}$ contiene gli elementi $\exp(tY)$ per ogni t razionale. Poiché $\mathbf{G}$ è chiuso ne segue che $\mathbf{G}$ contiene $\exp(tX)$ per ogni t reale, e questo ci dà una contraddizione perché $Y \notin \mathfrak{g}$. Ne segue perciò che $\mathbf{G}'$ è un intorno aperto di I in $\mathbf{G}$ e quindi coincide con la componente connessa dell'identità in $\mathbf{G}$. Inoltre, la dimostrazione ci mostra che l'esponenziale definisce un omeomorfismo di un intorno aperto di 0 in $\mathfrak{g}$ su un intorno aperto di I in $\mathbf{G}$.

Un sottogruppo chiuso $\mathbf{G}$ di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ si dice un *gruppo di Lie di trasformazioni* di $\mathbb{C}^n$. L'algebra di Lie reale:

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in \mathbf{G} \quad \forall t \in \mathbb{R}\} \tag{8.4}$$

si dice l'*algebra di Lie* del gruppo $\mathbf{G}$.

Teorema 8.8 (Rappresentazione aggiunta) *Sia $\mathbf{G}$ un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ e sia $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Allora, per ogni $g \in \mathbf{G}$ ed $X \in \mathfrak{g}$, risulta $\mathrm{Ad}(g)(X) = gXg^{-1} \in \mathfrak{g}$. L'applicazione*

$$\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \ni X \to \mathrm{Ad}(g)(X) = gXg^{-1} \in \mathfrak{g} \tag{8.5}$$

è un isomorfismo dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

L'applicazione

$$\mathrm{Ad} : \mathbf{G} \ni g \to \mathrm{Ad}(g) \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \tag{8.6}$$

è un omomorfismo di gruppi.

Dim. Se $X \in \mathfrak{g}$ e $g \in \mathbf{G}$, allora $\exp(tgXg^{-1}) = g\exp(tX)g^{-1} \in \mathbf{G}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi $\mathrm{Ad}(g)(X) \in \mathfrak{g}$.

Sia $g \in \mathbf{G}$. Per dimostrare che $\mathrm{Ad}(g)$ è un isomorfismo dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, basta osservare che $[X,Y] = \frac{d^2}{dt^2}|_{t=0}(\exp(tX)\exp(tY))$ e che $\mathrm{Ad}(g)\left(\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right) = \frac{d^2}{dt^2}(\mathrm{Ad}(g)(f(t)))$ per ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ di classe $\mathcal{C}^2$. Poiché $\mathrm{Ad}(g^{-1})$ è l'inverso di $\mathrm{Ad}(g)$, quest'ultimo è un isomorfismo di algebre di Lie. Infine, osserviamo che $\mathrm{Ad}(g)\mathrm{Ad}(h) = \mathrm{Ad}(gh)$ per ogni coppia di elementi $g, h \in \mathbf{G}$ e quindi $\mathrm{Ad} : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ è un omomorfismo di gruppi.

§9 Proprietà topologiche di $\mathbf{U}(n)$

Sia n un intero positivo. Ricordiamo che $\mathbf{U}(n)$ è il gruppo delle matrici $u \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ tali che $uu^* = u^*u = I$.

Lemma 9.1 *Ogni matrice di $\mathbf{U}(n)$ è diagonalizzabile e ammette una base ortonormale di autovettori. I suoi autovalori hanno tutti modulo* 1.

Dim. Sia λ un autovalore di una $u \in \mathbf{U}(n)$, con relativo autovettore $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Allora $\|v\|^2 = \|u(v)\|^2 = (u(v)|u(v)) = (\lambda v|\lambda v) = |\lambda|^2\|v\|^2$ e quindi $|\lambda| = 1$. Se $w \in v^\perp$, abbiamo $\lambda(v|u(w)) = (u(v)|u(w)) = (v|u^*u(w)) = (v|w) = 0$, onde $u\left(v^\perp\right) \subset v^\perp$. Ne segue che u ammette una base ortonormale di autovettori.

Teorema 9.2 *Sia n un intero positivo. Il gruppo $\mathbf{U}(n)$ è un sottogruppo chiuso compatto di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. La sua algebra di Lie è*

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\} \tag{9.1}$$

e l'applicazione esponenziale

$$\mathfrak{u}(n) \ni X \to \exp(X) \in \mathbf{U}(n) \tag{9.2}$$

è surgettiva.

Dim. L'applicazione $\phi : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \ni a \to aa^* \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ è continua e quindi $\mathbf{U}(n) = \phi^{-1}(I)$ è un chiuso. Inoltre $\|a\| = 1$ se $a \in \mathbf{U}(n)$. Quindi $\mathbf{U}(n)$ è anche limitato e quindi compatto per il teorema di Weierstrass.

Sia $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Poiché $(\exp(X))^* = \exp(X^*)$, se $X^* = -X$ abbiamo $\exp(tX)\exp(tX^*) = I$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi $\{X \mid X + X^* = 0\}$ è contenuto nell'algebra di Lie di $\mathbf{U}(n)$. Viceversa, derivando in $t = 0$ i due membri dell'identità $\exp(tX)\exp(tX^*) = I$, otteniamo $X + X^* = 0$. Vale quindi l'inclusione opposta e ciò dimostra che $\mathfrak{u}(n)$ è l'algebra di Lie di $\mathbf{U}(n)$.

Infine, un elemento $u \in \mathbf{U}(n)$ si scrive, per il lemma precedente, nella forma

$$u = a\begin{pmatrix} e^{i\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{i\lambda_n} \end{pmatrix} a^{-1} \qquad \text{con } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ e } a \in \mathbf{U}(n)\,.$$

Allora

$$X = a\begin{pmatrix} i\lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & i\lambda_n \end{pmatrix} a^{-1} \in \mathfrak{u}(n)$$

ed $\exp(X) = u$.

Osserviamo, in particolare, che $\mathbf{U}(n)$ è connesso per archi, in quanto immagine di uno spazio vettoriale reale mediante un'applicazione continua.

§10 I GRUPPI $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ E $\mathbf{SU}(n)$

Sia n un intero positivo. Definiamo il *gruppo speciale unitario* $\mathbf{SU}(n)$ mediante:

$$\mathbf{SU}(n) \;=\; \{u \in \mathbf{U}(n) \,|\, \det(u) = 1\}\ . \tag{10.1}$$

TEOREMA 10.1 *Il gruppo $\mathbf{SU}(n)$ è un sottogruppo chiuso normale di $\mathbf{U}(n)$. La sua algebra di Lie è*

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \,|\, \operatorname{tr}(X) = 0\} \tag{10.2}$$

e l'applicazione esponenziale

$$\mathfrak{su}(n) \ni X \to \exp(X) \in \mathbf{SU}(n) \tag{10.3}$$

è surgettiva.

DIM. Se $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, abbiamo:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det(\exp(tX)) = \operatorname{tr}(X)\,. \tag{10.4}$$

Quindi se $\exp(tX) \in \mathbf{SU}(n)$ per ogni numero reale t, otteniamo subito che $X+X^* = 0$ e $\operatorname{tr}(X) = 0$. Il viceversa è ovvio. Infine, osserviamo che ogni elemento $u \in \mathbf{SU}(n)$ si può scrivere nella forma

$$u \;=\; a \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{i\theta_{n-1}} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{-i(\theta_1+\dots+\theta_{n-1})} \end{pmatrix} a^{-1}$$

con $a \in \mathfrak{u}(n)$. Allora

$$X \;=\; a \begin{pmatrix} i\theta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{i\theta_{n-1}} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -i(\theta_1+\dots+\theta_{n-1}) \end{pmatrix} a^{-1} \in \mathfrak{su}(n)$$

ed $\exp(X) = u$.

Definiamo il *gruppo speciale lineare complesso* $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ come il sottogruppo di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ formato dalle matrici $n \times n$ a determinante 1.

TEOREMA 10.2 *Sia n un intero positivo. Il gruppo $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ è un sottogruppo chiuso normale di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. La sua algebra di Lie è*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \;=\; \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \,|\, \operatorname{tr}(X) = 0\}\,. \tag{10.5}$$

L'applicazione esponenziale:

$$\exp : \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \ni X \to \exp(X) \in \mathbf{SL}(n,\mathbb{C}) \tag{10.6}$$

è surgettiva.

Inoltre l'applicazione:

$$\mathbf{SU}(n) \times \mathfrak{p}_0(n) \ni (u,X) \to u\exp(X) \in \mathbf{SL}(n,\mathbb{C})\,, \tag{10.7}$$

ove $\mathfrak{p}_0(n) = \{X \in \mathfrak{p}_n \,|\, \mathrm{tr}(X) = 0\}$*, è un omeomorfismo. In particolare* $\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$ *è omeomorfo al prodotto topologico* $\mathbf{SU}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$*.*

Dim. Sia $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ a traccia nulla. Se $X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, abbiamo $\exp(tX) \in \mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e viceversa, derivando per $t = 0$ i due membri dell'equazione $\exp(tX) = I$, otteniamo $\mathrm{tr}(X) = 0$. Quindi $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ è l'algebra di Lie di $\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$. Sia ora $a \in \mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$. Abbiamo già osservato che a si può scrivere nella forma $a = s\exp(N)$ con s semisemplice e N nilpotente, con $[s,N] = 0$. Possiamo allora trovare una $g \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ tale che $\delta = gsg^{-1}$ sia diagonale. Poiché $\det(s) = \det(\delta) = 1$, avremo

$$\delta = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_{n-1})} \end{pmatrix} \qquad \text{con } \lambda_1,\dots,\lambda_{n-1} \in \mathbb{C}.$$

Posto

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -(\lambda_1+\dots+\lambda_{n-1}) \end{pmatrix},$$

otteniamo $s = \exp(g^{-1}Dg)$, con $g^{-1}Dg \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Quindi $a = \exp(g^{-1}Dg + N)$ con $g^{-1}Dg + N \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ e ciò dimostra che l'esponenziale è surgettivo.

Sia ora $a \in \mathbf{SL}(n,\mathbb{C}) \subset \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. Possiamo scrivere in modo unico $a = u\exp(P)$ con $u \in \mathbf{U}(n)$ e $P \in \mathfrak{p}_n$. Otteniamo $1 = \det(aa^*) = \det(\exp(2P))$, da cui $\mathrm{tr}(P) = 0$ perché P è diagonalizzabile con autovalori reali. Allora $1 = \det(a) = \det(u)$ ci dice che $u \in \mathbf{SU}(n)$. Quindi (10.7) è un omeomorfismo e dunque $\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$ è omeomorfo al prodotto topologico $\mathbf{SU}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$, in quanto le matrici Hermitiane a traccia nulla formano uno spazio vettoriale reale di dimensione $n^2 - 1$.

§11 I gruppi $\mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{SO}(n)$

Il gruppo $\mathbf{O}(n)$ è il gruppo delle isometrie lineari e il gruppo $\mathbf{SO}(n)$ è il gruppo delle rotazioni dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}(n) &= \{a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) \,|\, a\,{}^t a = {}^t a\, a = I\} \\ \mathbf{SO}(n) &= \{a \in \mathbf{O}(n) \,|\, \det(a) = 1\} \end{aligned} \tag{11.1}$$

Teorema 11.1 *Sia n un intero positivo. I due gruppi $\mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{SO}(n)$ sono sottogruppi compatti di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ e hanno la stessa algebra di Lie:*

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \,|\, X + {}^t X = 0\}\,. \tag{11.2}$$

$\mathbf{SO}(n)$ *è la componente connessa dell'identità di* $\mathbf{O}(n)$ *e l'applicazione esponenziale:*

$$\exp : \mathfrak{o}(n) \to \mathbf{SO}(n) \tag{11.3}$$

è surgettiva. In particolare $\mathbf{SO}(n)$ *è connesso per archi. Il gruppo* $\mathbf{O}(n)$ *è unione di due componenti connesse, ciascuna omeomorfa a* $\mathbf{SO}(n)$.

Dim. Ricordiamo che $\det(a) = \pm 1$ se $a \in \mathbf{O}(n)$. Poiché det è un'applicazione continua, $\det(\exp(X)) = 1$ per ogni X che appartenga all'algebra di Lie di $\mathbf{O}(n)$. Questo mostra che $\mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{SO}(n)$ hanno la stessa algebra di Lie.

Se X appartiene all'algebra di Lie di $\mathbf{O}(n)$, derivando la relazione

$$I = \exp(tX)({}^t\exp(tX)) = \exp(tX)\exp(t\,({}^tX))\,,$$

otteniamo che ${}^tX + X = 0$. Viceversa, se vale questa relazione, abbiamo $\exp(tX)({}^t\exp(tX)) = I$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Questo dimostra che $\mathfrak{o}(n)$ è l'algebra di Lie di $\mathbf{O}(n)$ e di $\mathbf{SO}(n)$.

Sia ora $a \in \mathbf{SO}(n)$. Possiamo decomporre $\mathbb{R}^n$ nella somma diretta di sottospazi V_i di dimensione ≤ 2, due a due ortogonali, tali che $a|_{V_i}$ sia l'identità se V_i ha dimensione uno, sia una rotazione piana se V_i ha dimensione due.

Basterà quindi osservare che, se $\theta \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{11.4}$$

Questa formula dimostra che $\exp : \mathfrak{o}(2) \to \mathbf{SO}(2)$ è surgettiva, e da questa segue la surgettività nel caso generale.

Osserviamo infine che la moltiplicazione per la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ è un omeomorfismo di $\mathbf{SO}(n)$ sull'insieme delle matrici di $\mathbf{O}(n)$ con determinante uguale a -1 e $\mathbf{O}(n) = \mathbf{SO}(n) \cup \{a \in \mathbf{O}(n) \mid \det(a) = -1\}$.

Osservazione $\mathbf{SO}(n)$ è omeomorfo a $\mathbf{S}^1$ mediante l'omemorfismo $\mathbf{SO}(n) \ni a \to a(e_1) \in \mathbf{S}^1$ ove $e_1 = {}^t(1,0)$ è il primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^2$.

§12 L'omomorfismo canonico $\mathbf{SU}(2) \to \mathbf{SO}(3)$

Le algebre di Lie $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{o}(3)$ hanno entrambe dimensione reale tre. Esse sono isomorfe tra loro e ad $\mathbb{R}^3$ con la struttura di algebra di Lie definita dal prodotto vettore.

Sia infatti $w = {}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. L'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \ni v \to v \times w \in \mathbb{R}^3$ è definita dalla matrice:

$$R_w = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}(3)\,.$$

Si verifica facilmente che $[R_w, R_v] = R_{w\times v}$ e quindi la corrispondenza $w \to R_w$ è un isomorfimso di algebre di Lie. Definiamo ora

$$\lambda : \mathbb{R}^3 \ni {}^t(x,y,z) \to \frac{1}{2}\begin{pmatrix} iz & y+ix \\ -y+ix & -iz \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2)\,. \tag{12.1}$$

Si verifica che λ è un isomorfismo di $(\mathbb{R}^3, \times)$ con $\mathfrak{su}(2)$. Possiamo allora far operare $\mathbf{SU}(2)$ su $\mathbb{R}^3$ mediante la rappresentazione aggiunta: otteniamo un omomorfismo $\rho : \mathbf{SU}(2) \ni u \to \lambda^{-1} \circ \mathrm{Ad}(u) \circ \lambda \in \mathbf{GL}(3,\mathbb{R})$.

Lemma 12.1 *Per ogni $u \in \mathbf{SU}(2)$, $\rho(u) \in \mathbf{SO}(3)$.*

Dim. Abbiamo $|v|^2 = 2\det(\lambda(v))$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Quindi

$$|\rho(u)(v)|^2 = 2\det(u\lambda(v)u^{-1}) = 2\det(\lambda(v)) = |v|^2$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^3$ e $\rho(u) \in \mathbf{O}(3)$. Poiché $\mathbf{SU}(2)$ è connesso, e $\rho(0) = I$, abbiamo $\rho(u) \in \mathbf{SO}(3)$.

Teorema 12.2 *L'applicazione $\rho : \mathbf{SU}(2) \to \mathbf{SO}(3)$ è un omomorfismo surgettivo di gruppi. Il suo nucleo è il sottogruppo normale $\{I, -I\} \subset \mathbf{SU}(2)$.*

Dim. La verifica che ρ è un omomorfismo è immediata: infatti $\rho(a) = \lambda^{-1}\mathrm{Ad}(a)\lambda$ e quindi

$$\rho(a)\rho(b) = \lambda^{-1}\mathrm{Ad}(a)\lambda\lambda^{-1}\mathrm{Ad}(b)\lambda = \lambda^{-1}\mathrm{Ad}(ab)\lambda = \rho(ab)\,.$$

La surgettività è conseguenza del diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{su}(2) \arrow[r, "\exp"] & \mathbf{SU}(2) \arrow[d, "\rho"] \\ \mathfrak{o}(3) \arrow[u, "\lambda^{-1}R^{-1}"] \arrow[r, "\exp"'] & \mathbf{SO}(3) \end{tikzcd}$$

in cui le frecce orizzontali sono surgettive e la freccia verticale bigettiva.

Infine, il nucleo di ρ è uguale al nucleo della rappresentazione aggiunta di $\mathbf{SU}(2)$ su $\mathfrak{su}(2)$. Poiché

$$\mathbf{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha,\beta \in \mathbb{C}\,,\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \tag{12.2}$$

da

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} iz & y+ix \\ -y+ix & -iz \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar\alpha & -\beta \\ \bar\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz & y+ix \\ -y+ix & -iz \end{pmatrix}$$

per ogni $x,y,z \in \mathbb{R}$, segue che $\alpha = \pm 1$, $\beta = 0$.

Corollario 12.3 *Il gruppo topologico $\mathbf{SU}(2)$ è omeomorfo a $\mathbf{S}^3$ e il gruppo topologico $\mathbf{SO}(3)$ allo spazio proiettivo reale $\mathbb{RP}^3$.*

Dim. L'applicazione $\mathbf{SU}(2) \ni a \to a(e_1) \in \mathbf{S}^3$, ove e_1 è il primo vettore della base canonica di $\mathbb{C}^2$, definisce un omeomorfismo di $\mathbf{SU}(2)$ su $\mathbf{S}^3$. Il quoziente $\mathbf{SU}(2)\big/\{I,-I\}$ è allora omeomorfo al quoziente di $\mathbf{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica i punti antipodali di $\mathbb{S}^3$: $v \sim w \iff v = \pm w$.

CAPITOLO X

I GRUPPI CLASSICI

§1 La lista di Cartan

Diamo qui di seguito la lista di Cartan dei gruppi classici di matrici reali e complesse. Essi sono sottogruppi chiusi del gruppo lineare e sono quindi determinati dalle rispettive algebre di Lie. Accanto a ciascun gruppo descriviamo la rispettiva algebra di Lie e la sua dimensione come spazio vettoriale.

Introduciamo le seguenti matrici:

$$I_n = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{è la matrice identità } n \times n;$$

$$J_n = J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{è la matrice simplettica } 2n \times 2n;$$

$$I_{pq} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \qquad \text{è la matrice simmetrica canonica di segnatura } (p,q).$$

A. Gruppi di matrici a coefficienti complessi.

1) **Gruppo lineare complesso**:

$$GL(n,\mathbb{C}) = \{g \in Hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) | det(g) \neq 0\}.$$

Algebra di Lie del gruppo lineare complesso: $\mathfrak{g}l(n,\mathbb{C}) = Hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.
$dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}l(n,\mathbb{C}) = n^2$.

2) **Gruppo lineare speciale complesso.**

$$SL(n,\mathbb{C}) = \{g \in GL(n,\mathbb{C}) \ \mid \ det(g) = 1\}.$$

Algebra di Lie del gruppo lineare speciale complesso:

$$\mathfrak{s}l(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{g}l(n,\mathbb{C}) \ \mid \ tr(A) = 0\}.$$

$dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{s}l(n,\mathbb{C}) = n^2 - 1$.

3) **Gruppo unitario**:

$$U(n) = \{g \in GL(n,\mathbb{C}) \ \mid \ g^* g = I\}.$$

Algebra di Lie delle matrici antihermitiane:

$$\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{g}l(n, \mathbb{C}) \mid A^* + A = 0\}.$$

$dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{u}(n) = n^2$.

4) **Gruppo speciale unitario**:

$$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}).$$

Algebra di Lie delle matrici antihermitiane a traccia nulla:

$$\mathfrak{s}u(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{s}l(n, \mathbb{C}).$$

$dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{s}u(n) = n^2 - 1$.

5) **Gruppo unitario di segnatura** p, q.

$$U(p, q) = \{g \in GL(n, \mathbb{C}) \mid g^* I_{pq} g = I_{pq}\}.$$

Algebra di Lie delle matrici anti-(p, q)-hermitiane:

$$\mathfrak{u}(p, q) = \{A \in \mathfrak{g}l(n, \mathbb{C}) \mid A^* I_{pq} + I_{pq} A = 0\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix} \mid A_{11} \in \mathfrak{u}(p), \quad A_{22} \in \mathfrak{u}(q) \right\}.$$

$dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{u}(p, q) = (p + q)^2 = n^2$.

6) **Gruppo speciale unitario di segnatura** p, q:

$$SU(p, q) = U(p, q) \cap SL(n, \mathbb{C}).$$

Algebra di Lie delle matrici anti-(p, q)-hermitiane a traccia nulla:

$$\mathfrak{s}u(p, q) = \mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{s}l(n, \mathbb{C}).$$

$dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{s}u(p, q) = (p + q)^2 - 1 = n^2 - 1$.

7) **Gruppo speciale simplettico**:

$$SU^*(2n) = \{g \in SL(2n, \mathbb{C}) \mid gJ\bar{g}^{-1} = J\}.$$

Algebra di Lie speciale simplettica:

$$\mathfrak{s}u^*(2n) = \{A \in \mathfrak{s}l(2n, \mathbb{C}) \mid AJ - J\bar{A} = 0\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -\bar{A}_{12} & \bar{A}_{11} \end{pmatrix} \mid A_{11}, A_{12} \in \mathfrak{g}l(n, \mathbb{C}), \quad tr(Re \quad A_{11}) = 0 \right\}.$$

$dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{s}u^*(2n) = 4n^2 - 1$.

8) **Gruppo ortogonale complesso**:

$$SO(n, \mathbb{C}) = \{g \in SL(n, \mathbb{C}) \mid {}^t g g = I\}.$$

Algebra di Lie complessa antisimmetrica:

$$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \ \mid \ {}^tA + A = 0\}.$$

$dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) = n(n-1)$.

9) **Gruppo ortogonale simplettico**:

$$SO^*(2n,\mathbb{C}) = \{g \in SO(2n,\mathbb{C}) \ \mid \ g^*Jg = J\}.$$

Algebra di Lie antisimmetrica simplettica:

$$\mathfrak{so}^*(2n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}) \ \mid \ A^*J + JA = 0\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -\bar{A}_{12} & \bar{A}_{11} \end{pmatrix} \ \mid \ A_{12} = A_{12}^*, \quad A_{11} \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) \right\}.$$

$dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{so}^*(2n,\mathbb{C}) = n(2n-1)$.

10) **Gruppo simplettico complesso**:

$$Sp(n,\mathbb{C}) = \{g \in GL(n,\mathbb{C}) \ \mid \ {}^tgJg = J\}.$$

Algebra di Lie simplettica complessa:

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \ \mid \ {}^tAJ + JA = 0\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -{}^tA_{11} \end{pmatrix} \ \mid \ A_{12} = {}^tA_{12}, \quad A_{21} = {}^tA_{21} \right\}.$$

$dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = 2n^2 + n$.

11) **Gruppo** (p,q)**-simplettico**:

$$Sp(p,q;\mathbb{C}) = \left\{ g \in Sp(n,\mathbb{C}) \ \mid \ g^* \begin{pmatrix} I_{pq} & 0 \\ 0 & I_{pq} \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} I_{pq} & 0 \\ 0 & I_{pq} \end{pmatrix} \right\}.$$

Il gruppo di Lie associato è

$$\mathfrak{sp}(p,q;\mathbb{C}) = \left\{ A \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) \ \mid \ A^* \begin{pmatrix} I_{pq} & 0 \\ 0 & I_{pq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{pq} & 0 \\ 0 & I_{pq} \end{pmatrix} A = 0 \right\}.$$

Le matrici in $\mathfrak{sp}(p,q;\mathbb{C})$ sono della forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12}^* & A_{22} & {}^tA_{14} & A_{24} \\ -\bar{A}_{13} & \bar{A}_{14} & \bar{A}_{11} & -\bar{A}_{12} \\ A_{14}^* & -\bar{A}_{24} & -{}^tA_{12} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}$$

con

$$A_{11}, \quad A_{13} \quad di \quad ordine \quad p,$$

$$A_{12}, \quad A_{14} \quad matrici \quad p \times q,$$

$$A_{22},\quad A_{24}\quad di\quad ordine\quad q,$$
$$A_{11}\in\mathfrak{u}(p),\quad A_{22}\in\mathfrak{u}(q),$$
$${}^tA_{13}=A_{13},\quad {}^tA_{24}=A_{24}.$$

$dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{s}p(p,q;\mathbb{C})=2n^2+n,\quad con\quad p+q=n.$

12) **Gruppo unitario simplettico**:

$$Sp(n)=Sp(n,\mathbb{C})\cap U(2n).$$

La sua algebra di Lie è:

$$\mathfrak{s}p(n)=\mathfrak{s}p(n,\mathbb{C})\cap\mathfrak{u}(2n)$$
$$=\left\{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\\ -A_{12}^* & -{}^tA_{11}\end{pmatrix}\ \mid\ A_{11}\in\mathfrak{u}(n),\quad {}^tA_{12}=A_{12}\right\}.$$

$dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{s}p(n)=2n^2+n.$

B. Gruppi di matrici a coefficienti reali.

1) **Gruppo lineare reale**:

$$GL(n,\mathbb{R})=\{g\in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\ \mid\ det(g)\neq 0\}.$$

La sua algebra di Lie è

$$\mathfrak{g}l(n,\mathbb{R})=Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n).$$

$dim_{\mathbf{R}}\mathfrak{g}l(n,\mathbf{R})=n^2.$

2) **Gruppo lineare speciale reale**:

$$SL(n,\mathbb{R})=\{g\in GL(n,\mathbb{R})\ \mid\ det(g)=1\}.$$

La sua algebra di Lie è:

$$\mathfrak{s}l(n,\mathbb{R})=\{A\in\mathfrak{g}l(n,\mathbb{R})\ \mid\ tr(A)=0\}.$$

$dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{s}l(n,\mathbb{R})=n^2-1.$

3) **Gruppo ortogonale**:

$$O(n)=\{g\in GL(n,\mathbb{R})\ \mid\ {}^tgg=I\}.$$

La sua algebra di Lie è

$$\mathfrak{o}(n)=\{A\in\mathfrak{g}l(n,\mathbb{R})\ \mid\ {}^tA+A=0\}.$$

$dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{o}(n)=n(n-1)/2.$

4) **Gruppo ortogonale speciale, o gruppo delle rotazioni**:

$$SO(n)=O(n)\cap SL(n,\mathbb{R}).$$

La sua algebra di Lie è la stessa del gruppo ortogonale.

5) **Gruppo ortogonale di segnatura** p, q:

$$O(p,q) = U(p,q) \cap GL(n,\mathbb{R}).$$

La sua algebra di Lie è:

$$\mathfrak{o}(p,q) = \mathfrak{u}(p,q) \cap \mathfrak{g}l(n,\mathbb{R})$$

è composta dalle matrici della forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ {}^tA_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

con

$$A_{11} \in \mathfrak{o}(p), \quad A_{22} \in \mathfrak{o}(q), \quad A_{12} \ \ matrice \ \ p \times q \ \ reale.$$

$dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{o}(p,q) = n(n-1)/2 \ \ con \ \ p+q = n.$

6) **Gruppo simplettico**:

$$Sp(n,\mathbb{R}) = Sp(n,\mathbb{C}) \cap GL(2n,\mathbb{R}).$$

La sua algebra di Lie è

$$\mathfrak{s}p(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{s}p(n,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{g}l(2n,\mathbb{R}).$$

$dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{s}p(n,\mathbb{R}) = n^2 + n.$

CAPITOLO XI

PROPRIETÀ TOPOLOGICHE DEI GRUPPI CLASSICI

§1 Decomposizione di Cartan dei gruppi di matrici

Un sottogruppo $\mathbf{G}$ di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ si dice *pseudoalgebrico* se può essere definito mediante equazioni

$$f_1(g,g^*)=0,\ \dots\ ,\ f_N(g,g^*)=0 \tag{1.1}$$

dove $f_1,\dots,f_N$ sono polinomi a coefficienti reali nelle parti reali e immaginarie dei coefficienti di $g\in\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. I sottogruppi pseudoalgebrici sono ovviamente chiusi. Vale il seguente

Teorema 1.1 *Sia $\mathbf{G}$ un sottogruppo pseudoalgebrico di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. Se vale la proprietà:*

$$g\in\mathbf{G}\Longrightarrow g^*\in\mathbf{G} \tag{1.2}$$

allora l'applicazione:

$$(\mathbf{G}\cap\mathbf{U}(n))\times(\mathfrak{g}\cap\mathfrak{p}_n)\ni(u,X)\to u\exp(X)\in\mathbf{G}\,, \tag{1.3}$$

ove $\mathfrak{g}$ è l'algebra di Lie di $\mathbf{G}$, è un omeomorfismo.

Dim. Ogni elemento $g\in\mathbf{G}\subset\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ si decompone in modo unico nel prodotto di una matrice unitaria $u\in\mathbf{U}(n)$ e di una matrice Hermitiana definita positiva $p\in\mathfrak{P}_n$: $g=u\circ p$. Per dimostrare il teorema, basterà verificare che $u,\,p\in\mathbf{G}$.

Poiché abbiamo supposto che $g^*=p\circ u^*=p\circ u^{-1}\in\mathbf{G}$, anche $p^2=g^*g$ appartiene al gruppo $\mathbf{G}$. Sia B l'unico elemento di $\mathfrak{p}_n$ tale che $p=\exp(B)$ e sia $a\in\mathbf{U}(n)$ tale che $u\circ B\circ u^{-1}$ sia in forma diagonale:

$$u\circ B\circ u^{-1}=\begin{pmatrix}\theta_1&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&\theta_n\end{pmatrix}$$

con $\theta_i\in\mathbb{R}$ per $i=1,\dots,n$. Osserviamo che $\mathrm{ad}(a)(\mathbf{G})$ è ancora un sottogruppo pseudoalgebrico di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$; quindi le matrici diagonali reali di $\mathrm{ad}(a)(\mathbf{G})$ formano ancora un sottogruppo pseudoalgebrico $\mathbf{Q}$ di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. Esistono quindi polinomi $g_1,\dots,g_M\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ tali che la matrice diagonale reale $\begin{pmatrix}\xi_1&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&\xi_n\end{pmatrix}$ appartiene a $\mathbf{Q}$ se e soltanto se $g_1(\xi_1,\dots,\xi_n)=0$, …, $g_M(\xi_1,\dots,\xi_n)=0$. Otteniamo allora

$$g_j\left(e^{2k\theta_1},\dots,e^{2k\theta_n}\right)=0\qquad\text{per}\quad j=1,\dots,M\,,\ \forall k\in\mathbb{Z}\,.$$

Per concludere la dimostrazione utilizziamo il seguente:

Lemma 1.2 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un esponenziale-polinomio della forma:*

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j d^{b_j t} \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

con $c_j, b_j \in \mathbb{R}$ e $b_i \neq b_j$ se $i \neq j$. Se f si annulla per ogni $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, allora f si annulla per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Dim. Poniamo $\xi_j = e^{b_j}$, per $1 \leq j \leq \ell$. Consideriamo la matrice:

$$M(\xi_1, \dots, \xi_\ell) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_\ell \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \dots & \xi_\ell^2 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 & \xi_3^3 & \dots & \xi_\ell^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^\ell & \xi_2^\ell & \xi_3^\ell & \dots & \xi_\ell^\ell \end{pmatrix}.$$

Il suo determinante è:

$$\det(M(\xi_1, \dots, \xi_\ell) = \xi_1 \cdots \xi_\ell \xi_1 \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} (\xi_j - \xi_i)\,.$$

Infatti $\det(M(\xi_1, \dots, \xi_\ell) = \xi_1 \cdots \xi_\ell \cdot \det(V(\xi_1, \dots, \xi_\ell))$, dove $V(\xi_1, \dots, \xi_\ell))$ è la matrice di Vandermonde:

$$V(\xi_1, \dots, \xi_\ell)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_\ell \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \dots & \xi_\ell^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^\ell & \xi_2^\ell & \xi_3^\ell & \dots & \xi_\ell^\ell \end{pmatrix}.$$

In particolare, $M(\xi_1, \dots, \xi_\ell)$ è una matrice invertibile e la relazione $(c_1, \dots, c_\ell) M(\xi_1, \dots, \xi_\ell) = 0$ implica che $c_1 = 0$, …, $c_\ell = 0$.

Concludiamo la dimostrazione del teorema. Per il lemma appena dimostrato, otteniamo le relazioni $g_j\left(e^{t\theta_1}, \dots, e^{t\theta_n}\right) = 0$ implicano che $\exp(t(aBa^*)) \in \mathbf{Q}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi $B \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{g}$; abbiamo allora $p \in \mathbf{G}$ e dunque anche $u \in \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$. L'applicazione $(\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathbf{G} \cap \mathfrak{P}_n) \ni (u, p) \to u \circ p \in \mathbf{G}$ è continua e surgettiva e ha inversa continua $\mathbf{G} \ni g \to (g \circ (g^* g)^{-1/2}, (g^* g)^{1/2}) \in (\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathbf{G} \cap \mathfrak{P}_n)$ e quindi è un omeomorfismo.

Nello studio della struttura topologica di un gruppo classico $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ seguiremo quindi il seguente procedimento:

(1) Verificheremo che $g \in \mathbf{G} \Longrightarrow g^* \in \mathbf{G}$;
(2) Calcoleremo $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}_n$;
(3) Studieremo la struttura del sottogruppo compatto $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$.

Osserviamo ancora che l'algebra di Lie del sottogruppo chiuso $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ è $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n)$ e che l'applicazione esponenziale

$$\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n) \ni X \to \exp(X) \in \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$$

ha come immagine la componente connessa dell'identità di $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$. Infatti vale il:

Teorema 1.3 (Cartan-Weyl-Hopf) *Se* $\mathbf{G}$ *è un sottogruppo connesso e compatto di* $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, *allora l'applicazione* $\exp : \mathfrak{g} \to \mathbf{G}$ *è surgettiva.*
Non diamo la dimostrazione di questo teorema. Ricaveremo il risultato di volta in volta nei singoli casi in esame.

§2 I gruppi $U(p, q)$ e $SU(p, q)$

Lemma 1. *Se* $g \in U(p, q)$, *allora* $g^* \in U(p, q)$.

Dim.. Per la definizione del gruppo $U(p, q)$, abbiamo

$$g * I_{p,q} = I_{p,q} g^{-1}.$$

Da questa otteniamo, passando alle inverse:

$$(g^*)^* I_{p,q} = g I_{p,q} = I_{p,q} (g^*)^{-1}$$

e quindi $g^* \in U(p, q)$.

Lemma 2. $U(p, q) \cap U(n) \cong U(p) \bowtie U(q)$.

Dim.. Scriviamo un elemento $g \in U(p, q) \cap U(n)$ nella forma

$$g = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$$

con matrici a di tipo $p \times p$, b di tipo $q \times q$, c di tipo $p \times q$, d di tipo $q \times p$. Poiché $g \in U(p, q)$, abbiamo

$$a^* a - d^* d = I_p, \quad a^* c = d^* b, \quad b^* b - c^* c = I_q.$$

Essendo $g \in U(n)$, abbiamo anche:

$$a^* a + d^* d = I_p, \quad a^* c + d^* b = 0, \quad b^* b + c^* c = I_q.$$

Da queste uguaglianze ricaviamo

$$c = 0, \quad d = 0$$

da cui segue la tesi.

Corollario. *$SU(p,q) \cap U(n)$ è omeomorfo al prodotto topologico $SU(p) \times SU(q) \times S^1$.*

Dim.. Se $\sigma \in \mathbb{C}$, indichiamo con $\delta_1(\sigma)$ la matrice diagonale

$$\delta_1(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione

$$SU(p) \times SU(q) \times S^1 \ni (a, b, \sigma) \longrightarrow \begin{pmatrix} \delta_1(\sigma)a & 0 \\ 0 & \delta_1(\sigma)^{-1}b \end{pmatrix} \in SU(p,q) \cap U(n)$$

è continua e bigettiva e dunque un omeomorfismo perché i due spazi sono compatti di Hausdorff.

Teorema 2.1 *$SU(p,q)$ è omeomorfo al prodotto topologico*

$$SU(p) \times SU(q) \times S^1 \times \mathbb{C}^{pq}.$$

$U(p,q)$ è omeomorfo al prodotto topologico $SU(p,q) \times S^1$. I due gruppi sono pertanto connessi per archi ma non compatti se $pq \neq 0$.

Dim.. Data $g \in SU(p,q)$, possiamo decomporla in modo unico in un prodotto

$$g = ab \quad con \quad a \in U(n) \quad e \quad b \in P(n) \tag{1}$$

dove ricordiamo che $P(n)$ è l'insieme delle matrici hermitiane definite positive.

Per il Lemma 1, è $g^* \in SU(p,q)$ e dunque

$$g^*g = b^*a^*ab = b^*b = b^2 \in SU(p,q).$$

Scriviamo

$$b = Exp(B)$$

con

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & B22 \end{pmatrix},$$

B_{11} hermitiana $p \times p$, B_{12} matrice complessa $p \times q$, B_{22} hermitiana $q \times q$. Abbiamo allora

$$Exp(2B)I_{p,q} = I_{p,q}Exp(-2B).$$

Poiché l'esponenziale è un'applicazione bigettiva dallo spazio vettoriale reale delle matrici hermitiane all'insieme delle matrici hermitiane definite positive, dall'uguaglianza:

$$I_{p,q}Exp(2B)I_{p,q} = Exp(-2B)$$

ricaviamo che

$$I_{p,q}BI_{p,q} = -B.$$

Questa equazione ci dà:

$$B_{11} = 0, \quad B_{22} = 0.$$

Viceversa, se

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{12}^* & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

allora $b = Exp(B) \in SU(p,q)$. Le matrici della forma (2) formano uno spazio vettoriale reale L di dimensione $2pq$. Osserviamo infine che, nella decomposizione (1), essendo $b \in SU(p,q)$, è $a \in SU(p,q) \cap U(n)$.

Abbiamo ottenuto in questo modo un omeomorfismo

$$(SU(p,q) \cap U(n)) \times L \ni (a, B) \longrightarrow aExp(B) \in SU(p,q)$$

che, in virtù del lemma precedente, definisce un omeomorfismo di $SU(p) \times SU(q) \times S^1 \times \mathbb{C}^{pq}$ su $SU(p,q)$. Infine, l'applicazione

$$SU(p,q) \times S^1 \ni (g, \sigma) \longrightarrow \delta_1(\sigma) g \in U(p,q)$$

è un omeomorfismo. La dimostrazione è completa.

§3 Il gruppo $Sp(n) = Sp(n, \mathbb{C}) \cap U(2n)$

Ricordiamo che il corpo (non commutativo) $\mathbb{H}$ dei quaternioni di Hamilton si può identificare all'anello associativo delle matrici 2×2 a coefficienti complessi:

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

con $z, w \in \mathbb{C}$. Identifichiamo un numero complesso z con la matrice

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$$

e indichiamo con j la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice (1) si può allora associare all'espressione

$$z + wj = z + j\bar{w}.$$

Nel seguito scriveremo di preferenza un quaternione nella forma $z + jw$ con $z, w \in \mathbb{C}$. Il prodotto di due quaternioni si può allora esprimere mediante:

$$(z_1 + jw_1) \cdot (z_2 + jw_2) = (z_1 z_2 - \bar{w}_1 w_2) + j(w_1 z_2 + \bar{z}_1 w_2) \quad \forall z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}.$$

Questa formula si ricava immediatamente da:

$$jz = \bar{z} j \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

e
$$j^2 = -1.$$
Il coniugato di un quaternione (corrispondente all'aggiunta della matrice con cui è definito) è dato da:
$$\overline{z + jw} = \bar{z} - jw.$$
Indichiamo con σ l'isomorfismo:
$$\mathbb{C}^{2n} \ni (z^h, w^h)_{1 \le h \le n} \longrightarrow (z^h + jw^h)_{1 \le h \le n} \in \mathbb{H}^n.$$
Allora
$$\sigma^{-1} j \sigma = J$$
dove J è la matrice $2n \times 2n$:
$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$
e abbiamo indicato con I l'identità su $\mathbb{C}^n$.

Consideriamo una matrice $B = C + jD = (C_{hk} + jD_{hk})_{1 \le h,k \le n}$ con coefficienti $C_{hk} + jD_{hk} \in \mathbb{H}$, $C_{hk}, D_{hk} \in \mathbb{C}$. Se $u = v + jw \in \mathbb{H}^n$, con $v, w \in \mathbb{C}^n$, abbiamo
$$Bu = (Cv - \bar{D}w) + j(Dv + \bar{C}v).$$
Ad essa risulta dunque associata una $\tilde{B} \in Hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}, \mathbb{C}^{2n})$ rappresentata dalla matrice:
$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} C & D \\ -\bar{D} & \bar{C} \end{pmatrix}.$$
Le matrici di questa forma sono tutte e sole le matrici $2n \times 2n$ complesse A che soddisfano la:
$$AJ = J\bar{A}.$$
Ricordiamo ora che, se $g \in Sp(n, \mathbb{C})$, abbiamo:
$${}^t g J g = J.$$
Se inoltre $g \in U(2n)$, è $g^* = g^{-1}$, da cui
$${}^t g = \bar{g}^{-1}.$$
Otteniamo perciò la condizione:
$$gJ = J\bar{g}.$$
Abbiamo dunque un'inclusione naturale
$$Sp(n) \hookrightarrow GL(n, \mathbb{H}).$$
Possiamo allora caratterizzare $Sp(n)$ come il gruppo delle trasformazioni $\mathbb{H}$-lineari su $\mathbb{H}^n$, che lasciano invariato il prodotto scalare sui quaternioni:
$$(u_1 | u_2)_{\mathbb{H}} = \sum_{h=1}^{n} u_1^h \bar{u}_2^h.$$

Se scriviamo le componenti u_l^h nella forma $v_l^h + jw_l^h$ con $v_l^h, w_l^h \in \mathbb{C}$ per $l = 1, 2$, troviamo per il prodotto scalare sui quaternioni l'espressione:

$$(u_1|u_2)_{\mathbb{H}} = \sum_{h=1}^{n} v_1^h \bar{v}_2^h + \bar{w}_1^h w_2^h + j \sum_{h=1}^{n} w_1^h \bar{v}_2^h - \bar{v}_1^h w_2^h.$$

Una $g \in U(2n)$ lascia invariato il primo addendo, una $g \in Sp(n, \mathbb{C})$ lascia invariato il secondo. Infatti il primo addendo si può scrivere:

$$\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \bar{w}_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} v_2 \\ \bar{w}_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}}$$

e il secondo, moltiplicato a sinistra per j, mediante

$${}^t\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ w_1 \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \bar{v}_2 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathbb{K}$ uno dei corpi $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ e indichiamo con $e_1, \cdots, e_n$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Possiamo allora identificare $O(n-1), SO(n-1), U(n-1), SU(n-1), Sp(n-1)$ ai sottogruppi rispettivamente di $O(n), SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)$ che lasciano fisso il vettore e_1. Abbiamo allora i seguenti omeomorfismi:

Teorema 3.1

$$U(1) \cong S^1.$$

$$Sp(1) \cong S^3.$$

$$O(n)/O(n-1) \cong SO(n)/SO(n-1) \cong S^{n-1} \quad se \quad n > 1.$$

$$U(n)/U(n-1) \cong SU(n)/SU(n-1) \cong S^{2n-1} \quad se \quad n > 1.$$

$$Sp(n)/Sp(n-1) \cong S^{4n-1} \quad se \quad n > 1\,.$$

Dim. In ciascuno dei casi l'omeomorfismo si ottiene per passaggio al quoziente dall'applicazione

$$g \longrightarrow ge_1.$$

Poiché i guppi considerati sono compatti, si deduce immediatamente che i quozienti iniettivi sono omeomorfismi.

Teorema 3.2 *Per ogni intero $n \geq 1$ i gruppi $Sp(n)$ sono compatti e connessi.*

Dim.. Osserviamo che $Sp(n)$ è compatto in quanto sottospazio topologico chiuso di $U(2n)$, che è compatto. Dimostriamo che è connesso per induzione su n. Per $n = 1$ $Sp(1)$ è omeomorfo a S^3 e quindi connesso. Sia ora $m > 1$ e supponiamo il teorema vero per $n = m-1$. Le classi di equivalenza di $Sp(m)/Sp(m-1)$ sono allora insiemi connessi. Ne segue che un insieme contemporaneamente aperto e chiuso in $Sp(m)$ è saturo e dunque $Sp(m)$ è connesso in quanto il quoziente è connesso.

Osserviamo che $Sp(n)$ è localmente connesso per archi, in quanto l'applicazione

$$Exp : sp(n) \longrightarrow Sp(n)$$

definisce un omeomorfismo di un intorno di 0 in $sp(n)$ su un intorno di e in $Sp(n)$: $Sp(n)$ è dunque localmente connesso per archi e perciò connesso per archi in quanto connesso.

TEOREMA 3.3 *$U(n)$ è omeomorfo a $SU(n) \times S^1$. In particolare $U(2) \cong S^3 \times S^1$.*

DIM.. Definiamo l'applicazione

$$U(n) \ni g \longrightarrow (\delta_1(det(g))^{-1}g, det(g)) \in SU(n) \times S^1.$$

Essa è continua e bigettiva tra spazi compatti di Hausdorff e dunque un omeomorfismo.

§4 I gruppi $Sp(n, \mathbb{C})$ e $SU^*(2n)$

LEMMA. *Se $g \in Sp(n, \mathbb{C})$, allora $g^* \in Sp(n, \mathbb{C})$.*

DIM.. Abbiamo

$${}^t g J g = J$$

e dunque

$$J g = {}^t g^{-1} J$$

da cui, passando alle inverse:

$$g^{-1} J = J \; {}^t g.$$

Passando ai coniugati, otteniamo:

$$\bar{g}^{-1} J = J g^*$$

da cui

$${}^t g^* J g^* = J$$

e dunque $g^* \in Sp(n, \mathbb{C})$.

TEOREMA 4.1 *$Sp(n, \mathbb{C})$ è omeomorfo a $Sp(n) \times \mathbb{R}^{n(2n+1)}$.*

DIM.. Sia $g \in Sp(n, \mathbb{C})$. Possiamo decomporre g in modo unico nella forma:

$$g = ab \;\; con \;\; a \in U(2n) \;\; e \;\; b \in P(2n).$$

Poiché $g^* \in Sp(n, \mathbb{C})$, otteniamo

$$b^* a^* a b = b^* b = b^2 \in Sp(n, \mathbb{C}).$$

La b si può rappresentare in modo unico come esponenziale di una matrice hermitiana B:

$$b = Exp(B) \;\; B = B^*.$$

Abbiamo allora

$$-JExp(2B)J = Exp(J^{-1}2BJ) = Exp(-2\ {}^tB)$$

ed essendo questa un'uguaglianza tra esponenziali di matrici hermitiane otteniamo che

$$-JBJ = -\ {}^tB.$$

Scriviamo B nella forma

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & B_{22} \end{pmatrix}$$

con B_{hk} matrici complesse $n \times n$, B_{11} *e* B_{22} hermitiane. Otteniamo allora le uguaglianze:

$$B_{11} = -\ {}^tB_{22}$$

$$B_{12} = \ {}^tB_{12}.$$

La matrice B è dunque della forma

$$(1) \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & -\bar{B}_{11} \end{pmatrix}$$

con B_{11} hermitiana e B_{12} simmetrica. Viceversa, l'esponenziale di una matrice B di questa forma è un elemento di $Sp(n, \mathbb{C})$. Le matrici della forma (1) formano uno spazio vettoriale reale L di dimensione $n^2 + n(n+1) = n(2n+1)$ e dunque la tesi segue dall'omeomorfismo:

$$Sp(n) \times L \ni (a, B) \longrightarrow aExp(B) \in Sp(n, \mathbb{C}).$$

Teorema 4.2 *Il gruppo $SU^*(2n)$ è omeomorfo a $Sp(n) \times \mathbb{R}^{2n^2-n-1}$.*

Dim.. Ricordiamo che $g \in SU^*(2n)$ se $g \in SL(2n, \mathbb{C})$ e

$$Jg = \bar{g}J.$$

Ne segue che, se $g \in SU^*(2n) \cap U(2n)$ abbiamo

$${}^tgJg = J$$

e dunque $g \in Sp(n)$.

Si verifica immediatamente che $g^* \in SU^*(2n)$ se $g \in SU^*(2n)$ e dunque possiamo ripetere il ragionamento fatto nella dimostrazione del teorema precedente: dopo aver decomposto g mediante

$$g = ab \quad con \quad a \in U(2n) \quad e \quad b \in P(2n)$$

osserviamo che

$$b^*b = b^2 \in SU^*(2n).$$

Dopo aver scritto b come l'esponenziale di una matrice hermitiana B, troviamo che le B devono appartenere allo spazio vettoriale reale L di dimensione $2n^2 - n - 1)$ delle matrici della forma:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & \bar{B}_{11} \end{pmatrix}$$

con B_{11} matrice $n \times n$ hermitiana con traccia nulla e B_{12} matrice $n \times n$ complessa antisimmetrica: ${}^tB_{12} = -B_{12}$. L'omeomorfismo

$$Sp(n) \times L \ni (a, B) \longrightarrow aExp(B) \in SU^*(2n)$$

dimostra allora la tesi.

§5 I gruppi $SO(n,\mathbb{C})$ e $SO^*(n,\mathbb{C})$

Teorema 5.1 *$SO(n,\mathbb{C})$ è omeomorfo a $SO(n) \times \mathbb{R}^{(n^2-n)/2}$.*

Dim.. Osserviamo in primo luogo che l'aggiunta g^* di un elemento g di $SO(n,\mathbb{C}$ è ancora un elemento del gruppo. Infatti le equazioni che definiscono il gruppo sono:

$$det(g) = 1, \quad {}^tgg = I.$$

Un elemento g di $SO(n,\mathbb{C}) \cap U(n)$ soddisfa

$${}^tg = g^{-1} = g^*$$

e dunque è una matrice a coefficienti reali. Otteniamo perciò:

$$SO(n,\mathbb{C}) \cap U(n) = SO(n).$$

Decomponiamo $g \in SO(n,\mathbb{C})$ in modo unico mediante

$$g = ab \ \text{ con } \ a \in U(n) \ e \ b \in P(n).$$

Ricaviamo che

$$a \in SO(n,\mathbb{C}) \cap U(n) \ e \ b \in SO(n,\mathbb{C}) \cap P(n)$$

e che gli elementi di $SO(n,\mathbb{C}) \cap P(n)$ sono tutti e soli gli esponenziali delle matrici dello spazio vettoriale reale L di dimensione $(n^2 - n)/2$:

$$L = \{B | B \ \text{ hermitiana e } \ {}^tB = -B\}$$

cioè delle matrici a coefficienti puramente immaginari antisimmetriche. La tesi segue come nelle dimostrazioni dei teoremi precedenti.

Teorema 5.2 *$SO^*(2n,\mathbb{C})$ è omeomorfo a $U(n) \times \mathbb{R}^{n^2-n}$.*

Dim.. Dimostriamo in primo luogo che il gruppo $SO^*(2n,\mathbb{C}) \cap U(2n)$ è isomorfo, come gruppo topologico, a $U(n)$. Infatti, per un elemento g di tale gruppo, valgono le equazioni:

$${}^tgg = I, \quad g^*Jg = J, \quad g^*g = I, \quad det(g) = 1.$$

La prima e la terza di queste equazioni ci dicono che g è una matrice reale di $SO(2n)$. La seconda ci dice allora che g commuta con J e dunque è $\mathbb{C}$-lineare per la struttura complessa su $\mathbb{R}^{2n}$ definita da J. Si verifica facilmente che, se definiamo l'isomorfismo $\mathbb{R}$-lineare $\sigma : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ mediante

$$\sigma(e_k) = e_k \quad per \quad 1 \le k \le n \quad e \quad \sigma(Je_k) = \sigma(e_{k+n}) = ie_k$$

l'applicazione

$$SO^*(2n, \mathbb{C}) \cap U(2n) \ni g \longrightarrow \sigma \circ g \circ \sigma^{-1} \in U(n)$$

è un isomorfismo di gruppi topologici. Per concludere la dimostrazione, osserviamo che il gruppo $SO^*(2n, \mathbb{C})$ è chiuso rispetto all'aggiunzione e dunque, dalla decomposizione

$$g = ab \quad con \quad a \in U(2n) \quad e \quad b \in P(2n)$$

deduciamo che $b^2 \in SO^*(2n, \mathbb{C})$. Troviamo allora che $b = Exp(B)$ dove B è univocamente determinata come un elemento dello spazio vettoriale reale L di dimensione $n^2 - n$ delle matrici:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & -B_{11} \end{pmatrix} \quad con \quad B_{11}, B_{12} \quad hermitiane \quad puramente \quad immaginarie\}.$$

L'omeomorfismo cercato segue nel modo standard.

§6 I gruppi $Sp(p, q; \mathbb{C})$

Teorema 6.1 *Abbiamo l'omeomorfismo*

$$Sp(p, q) \cong Sp(p) \times Sp(q) \times \mathbb{R}^{4pq}.$$

Dim.. Ricordiamo che il gruppo $Sp(p, q; \mathbb{C})$ è caratterizzato dalle equazioni:

$$^t gJg = I,$$

$$g^* \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix}.$$

Come abbiamo visto in precedenza, possiamo considerare un elemento $g \in Sp(p, q; \mathbb{C}) \cap U(2n) \subset Sp(n)$ come un elemento di $GL(n, \mathbb{H})$. Scriviamo $\tilde{g}$ per la matrice a coefficienti quaternioni corrispondente a g. Troviamo allora: se $g \in Sp(p, q; \mathbb{C})$, allora

$$\tilde{g}^* \tilde{g} = I$$

$$\tilde{g}^* I_{p,q} g = I_{p,q}.$$

Si ottiene quindi

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \quad con \quad g_1 \in Sp(p), \quad g_2 \in Sp(q).$$

D'altra parte abbiamo al solito l'invarianza di $Sp(p,q;\mathbb{C})$ rispetto all'aggiunzione. Dalla decomposizione standard di $g \in GL(n,\mathbb{C})$ nel prodotto di una matrice unitaria e di una hermitiana definita positiva, troviamo un omeomorfismo

$$Sp(p) \times Sp(q) \times L \ni (g_1, g_2, B) \longrightarrow \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} Exp(B) \in Sp(p,q;\mathbb{C})$$

ove in questo caso L è uno spazio vettoriale reale di dimensione $4pq$ di matrici hermitiane. Le matrici di L hanno la forma:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & 0 & B_{14} \\ B_{12}^* & 0 & {}^tB_{14} & 0 \\ 0 & \bar{B}_{14} & 0 & -\bar{B}_{12} \\ B_{14}^* & 0 & -{}^tB_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

con B_{12} e B_{14} matrici complesse di tipo $p \times q$.

§7 I gruppi $SO(p,q)$

Teorema 7.1 *Siano p, q due interi positivi con $p + q = n$. Allora il gruppo $SO(p,q)$ è omeomorfo a $\{-1,1\} \times SO(p) \times SO(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.*

Dim.. Ragioniamo come nella dimostrazione dei teoremi precedenti. Ricaviamo in primo luogo che $SO(p,q) \cap U(n)$ è formato dalle matrici:

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$$

con $g_1 \in O(p)$, $g_2 \in O(q)$ e $det(g_1)det(g_2) = 1$.

Quindi abbiamo l'omeomorfismo:

$$SO(p,q) \cap U(n) \cong \{-1,1\} \times SO(p) \times SO(q).$$

D'altra parte $SO(p,q) \cap P(n)$ è l'immagine iniettiva mediante l'applicazione esponenziale delle matrici

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ {}^tB_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

ove B_{12} è una matrice reale $p \times q$. Usando la decomposizione degli elementi di $GL(n)$ in prodotto di unitarie e hermitiane positive, si ottiene la tesi.

CAPITOLO XII

OMOTOPIA

§1. **Omotopia libera di applicazioni continue.**

Siano $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ applicazioni continue tra due spazi topologici X, Y. Diciamo che f_0 e f_1 sono *omotope* se è possibile trovare un'applicazione continua:

$$F : X \times I \longrightarrow Y$$

$(I = [0, 1])$, tale che

$$F(x, 0) = f_0(x) \quad e \quad F(x, 1) = f_1(x) \quad \forall x \in X.$$

La F si dice un'*omotopia tra* f_0 e f_1. Osserviamo che un'omotopia F definisce un'applicazione continua

$$I \ni t \longrightarrow F_t = F(\cdot, t) \in \mathcal{C}(X, Y)$$

dall'intervallo I allo spazio $\mathcal{C}(X, Y)$ delle funzioni continue da X in Y su cui si consideri la topologia compatta-aperta. Viceversa, se X è uno spazio di Hausdorff localmente compatto un'applicazione continua

$$I \ni t \longrightarrow F_t \in \mathcal{C}(X, Y)$$

definisce un'omotopia tra F_0 e F_1. In questo caso, data una funzione continua $f : X \longrightarrow Y$, l'insieme delle funzioni $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ omotope a f è la componente connessa per archi di f in $\mathcal{C}(X, Y)$.

PROPOSIZIONE 1.1. *L'omotopia è una relazione di equivalenza in* $\mathcal{C}(X, Y)$.

DIM. Scriviamo $f \sim g$ per indicare che due funzioni $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ sono omotope. Verifichiamo che questa è una relazione di equivalenza. Intanto è $f \sim f$ mediante l'omotopia costante

$$X \times I \ni (x, t) \longrightarrow f(x) \in Y.$$

Se

$$F : X \times I \longrightarrow Y$$

è un'omotopia tra f e g, allora

$$X \times I \ni (x, t) \longrightarrow F(x, 1 - t) \in Y$$

è un'omotopia tra g ed f. Quindi

$$f \sim g \Longleftrightarrow g \sim f.$$

Se inoltre

$$G : X \times I \longrightarrow Y$$

è un'omotopia tra g ed h, allora la

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{se } t \in [0,1/2] \\ F(x,2t-1) & \text{se } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

definisce un'omotopia tra f e h. Dunque

$$f \sim g \quad e \quad g \sim h \Longrightarrow f \sim h.$$

Indichiamo con $\pi(X,Y)$ il quoziente di $\mathcal{C}(X,Y)$ rispetto all'equivalenza omotopica. Questo insieme si dice l'*omotopia libera* delle applicazioni continue di X in Y.

PROPOSIZIONE 1.2. *Siano X, Y, V, W spazi topologici e $\varphi : V \longrightarrow X$, $\psi : Y \longrightarrow W$ due applicazioni continue. L'applicazione:*

$$\psi_* \varphi^* : \mathcal{C}(X,Y) \ni f \longrightarrow \psi \circ f \circ \varphi \in \mathcal{C}(V,W)$$

definisce per passaggio al quoziente un'applicazione

$$\pi(\varphi,\psi) : \pi(X,Y) \longrightarrow \pi(V,W).$$

§2. **Equivalenza omotopica di spazi topologici.**

Due applicazioni continue

$$f : X \longrightarrow Y$$

e

$$g : Y \longrightarrow X$$

si dicono omotopicamente inversa l'una dell'altra se

$$g \circ f \sim id_X \quad \text{in} \quad \pi(X,X)$$

e

$$f \circ g \sim id_Y \quad \text{in} \quad \pi(Y,Y).$$

Diciamo allora che f e g sono *equivalenze omotopiche*. Due spazi topologici X e Y tra i quali si possa stabilire una equivalenza omotopica si dicono *omotopicamente equivalenti* o *dello stesso tipo di omotopia*.

L'equivalenza omotopica è una relazione di equivalenza nella categoria degli spazi topologici. Si dimostra facilmente la seguente:

PROPOSIZIONE 2.1. *Siano X, Y, Z spazi topologici e $\varphi : X \longrightarrow Y$, $\psi : Y \longrightarrow Z$ due applicazioni continue. Se due delle applicazioni continue φ, ψ, $\psi \circ \varphi$ sono equivalenze omotopiche, anche la terza lo è.*

Se X, Y, V, W sono spazi topologici e $\varphi : V \longrightarrow X$, $\psi : Y \longrightarrow W$ sono due equivalenze omotopiche, allora

$$\pi(\varphi,\psi) : \pi(X,Y) \longrightarrow \pi(V,W)$$

è un'applicazione bigettiva.

§3. **Spazi topologici contrattili.**

Uno spazio topologico X si dice contrattile se id_X è omotopicamente equivalente a un'applicazione costante in $\pi(X,X)$.

Proposizione 3.1. *Uno spazio topologico è contrattile se e soltanto se ha lo stesso tipo di omotopia dello spazio formato da un solo punto.*

Dim. Indichiamo con D^0 (disco 0-dimensionale) lo spazio formato da un solo punto. Siano

$$f : D^0 \longrightarrow X$$

$$g : X \longrightarrow D^0$$

omotopicamente inverse l'una dell'altra. Allora

$$f \circ g : X \longrightarrow X$$

è costante e omotopicamente equivalente a id_X. Viceversa, se

$$\varphi : X \longrightarrow X$$

è un'applicazione costante omotopicamente equivalente a id_X, definiamo

$$f : D^0 \longrightarrow X$$

mediante

$$f(D^0) = \varphi(X)$$

e consideriamo l'unica applicazione

$$g : X \longrightarrow D^0.$$

Poiché $f \circ g = \varphi$, la f e la g sono equivalenze omotopiche.

Osservazione. *Uno spazio topologico contrattile è connesso per archi.*

Dim. Sia

$$F : X \times I \longrightarrow X$$

un'omotopia tra l'identità su X e un'applicazione costante. Allora, per ogni coppia di punti $x, y \in X$,

$$\alpha(t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ F(y, 2 - 2t) & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

definisce un cammino continuo che congiunge x a y.

Proposizione 3.2. *Sia X uno spazio topologico contrattile. Allora, per ogni spazio topologico Y, $\pi(Y, X)$ contiene un solo elemento.*

Dim. Se $f : D^0 \longrightarrow X$ è un'equivalenza omotopica, allora

$$\pi(id_Y, f) : \pi(Y, X) \longrightarrow \pi(Y, D^0)$$

è bigettiva. Il secondo insieme contiene un solo elemento e dunque la tesi è dimostrata.

In particolare, due qualsiasi applicazioni costanti di uno spazio contrattile in sè sono omotopicamente equivalenti.

Osservazione. *Se X è uno spazio topologico contrattile e Y un qualsiasi spazio topologico,allora $\pi(X,Y)$ è in corrispondenza biunivoca con le componenti connesse per archi di Y. Infatti, per ogni $f : X \longrightarrow Y$ continua, $f(X)$ è contenuta in una componente connessa per archi di Y, univocamente determinata dalla classe di omotopia dell'applicazione f.*

§4. Omotopia legata. Retratti di deformazione.

Sia (X, A) una coppia topologica (X è uno spazio topologico e A un suo sottospazio). Dato uno spazio topologico Y, un'omotopia

$$F : X \times I \longrightarrow Y$$

si dice *legata* su A, o A-omotopia, se

$$F(x,t) = F(x,0) \qquad \forall x \in A, \ \ \forall t \in I.$$

La relazione di A-omotopia è una relazione di equivalenza su $\mathcal{C}(X,Y)$ e il relativo quoziente si indica con $\pi_l(X,A;Y)$. Fissata un'applicazione continua $\varphi : A \longrightarrow Y$, indichiamo con $\pi(X,Y;\varphi)$ l'immagine in $\pi_l(X,A;Y)$ dell'insieme $\left\{f \in \mathcal{C}(X,Y) \ \middle| \ f\big|_A = \varphi\right\}$.

Un sottospazio A di uno spazio topologico X si dice un suo *retratto di deformazione* se possiamo trovare una retrazione

$$\varrho : X \longrightarrow A$$

(cioè un'applicazione continua a valori in A con $\varrho|A = id_A$) tale che l'applicazione composta:

$$X \xrightarrow{\varrho} A \xrightarrow{\iota} X$$

sia omotopa all'identità su X.

Diciamo che A è *un retratto di deformazione stretto* di X se l'applicazione composta

$$X \xrightarrow{\varrho} A \xrightarrow{\iota} X$$

è A-omotopa a id_X, se cioè possiamo trovare un'omotopia

$$F : X \times I \longrightarrow X$$

tra $\varrho \circ \iota$ e id_X con:

$$F(x,t) = x \ \ \forall x \in A, \ \ \forall t \in I.$$

§5. Omotopia relativa.

Le nozioni precedenti si possono generalizzare alla situazione seguente: dati due spazi topologici X, Y e sottospazi $A_1, \cdots A_n$ di X e $B_1, \cdots, B_n$ di Y, indichiamo con

$$\mathcal{C}(X, A_1, \cdots, A_n; Y, B_1, \cdots, B_n)$$

lo spazio delle funzioni continue $f : X \longrightarrow Y$ tali che

$$f(A_i) \subset B_i \ \ \forall i = 1, \cdots, n.$$

Chiamiamo *omotopia relativa* alle $(n+1)$-uple $(X, A_1, \cdots A_n)$ e $(Y, B_1, \cdots, B_n)$ un'omotopia

$$F : X \times I \longrightarrow Y$$

tale che

$$F(A_i \times I) \subset B_i \ \forall i = 1, \cdots, n.$$

L'omotopia relativa definisce una relazione di equivalenza su
$\mathcal{C}(X, A_1, \cdots, A_n; Y, B_1, \cdots, B_n)$. Denotiamo il relativo quoziente con

$$\pi(X, A_1, \cdots, A_n; Y, B_1, \cdots, B_n)$$

.

§6. **k-connessione.**

Useremo in $\mathbb{R}^n$ coordinate $x^0, \cdots, x^{n-1}$ e indicheremo con $e_0, \cdots, e_{n-1}$ i vettori della base canonica. Definiamo:

$$D^0 = \{0\}$$

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ \mid \ |x| \leq 1\} \ \ se \ \ n > 0,$$

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ \mid \ |x| = 1\} \ \ se \ \ n \geq 0.$$

Abbiamo $S^{n-1} \subset D^n$. Considereremo S^n come un sottospazio di S^{n+1} mediante l'inclusione canonica

$$S^n \ni x \longrightarrow (x, 0) \in S^{n+1}.$$

Indichiamo con σ_+ e σ_- le immersioni canoniche:

$$\sigma_+ : D^n \ni x \longrightarrow (x^0, \cdots, x^{n-1}, \sqrt{1 - |x|^2}) \in S^n$$

$$\sigma_- : D^n \ni x \longrightarrow (x^0, \cdots, x^{n-1}, -\sqrt{1 - |x|^2}) \in S^n.$$

Ricordiamo ancora che l'applicazione

$$S^n \times I \ni (x, t) \longrightarrow tx \in D^{n+1}$$

(*coordinate polari*) definisce un omeomorfismo canonico

$$\frac{S^n \times I}{S^n \times \{0\}} \longrightarrow D^{n+1}.$$

Abbiamo allora:

Lemma 6.1. *Sia X uno spazio topologico e*

$$f : S^n \longrightarrow X$$

un'applicazione continua. Le seguenti condizioni sono equivalenti:
a) f è omotopa a un'applicazione costante.
b) f si può prolungare a un'applicazione continua

$$\tilde{f} : D^{n+1} \longrightarrow X.$$

c) $f \circ \sigma_+$ e $f \circ \sigma_-$ sono S^{n-1}-omotope.
d) f è $\{e_0\}$-omotopa all' applicazione costante.

Dim. a) $\Rightarrow$ b).
Sia
$$F : S^n \times I \longrightarrow X$$
un'omotopia di f con un'applicazione costante.
L'applicazione
$$S^n \times I \ni (x,t) \longrightarrow g(x,t) = (1-t)x \in D^{n+1}$$
è decomponibile. Poiché F è costante su $t = 1$, passa al quoziente definendo un'applicazione continua
$$\tilde{f} : D^{n+1} \longrightarrow X$$
che rende commutativo il diagramma:
$$\begin{tikzcd} S^n \times I \arrow[r, "F"] \arrow[d, "g"'] & X \\ D^{n+1} \arrow[r, "id_{D^{n+1}}"'] & D^{n+1} \arrow[u, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd}.$$
Chiaramente $\tilde{f}|S^n = F|\{t=0\} = f$.
b) $\Rightarrow$ c), d).
Sia
$$\tilde{f} : D^{n+1} \longrightarrow X$$
un prolungamento continuo di f. Allora
$$F(x,t) = \tilde{f}(x, (1-2t)\sqrt{1-|x|^2})$$
definisce una S^{n-1}-omotopia tra $f \circ \sigma_+$ e $f \circ \sigma_-$ e la
$$G(x,t) = \tilde{f}(t + (1-t)x^0, (1-t)x^1, \cdots, (1-t)x^{n-1})$$
definisce una $\{e_0\}$-omotopia
$$G : S^n \times I \longrightarrow X$$
di f con l'applicazione costante.
c) $\Rightarrow$ b). Sia
$$F : D^n \times I \longrightarrow X$$
una S^{n-1}-omotopia tra $f \circ \sigma_+$ e $f \circ \sigma_-$. Definiamo
$$h : D^n \times I \ni (x,t) \longrightarrow h(x,t) = \Big(x, (1-2t)\sqrt{1-|x|^2}\Big) \in D^{n+1}.$$

Allora h è un'applicazione decomponibile e la F per passaggio al quoziente definisce un prolungamento $\tilde{f}$ di f che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} D^n \times I \arrow[r, "F"] \arrow[d, "h"'] & X \\ D^{n+1} \arrow[r, "id_{D^{n+1}}"'] & D^{n+1} \arrow[u, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd} .$$

L'implicazione d) $\Rightarrow$ a) è banale e dunque la dimostrazione è completa.

Uno spazio topologico non vuoto X si dice *k-connesso* , con $0 \leq k \leq \infty$, se per ogni intero non negativo $n \leq k$ ogni applicazione continua $S^n \longrightarrow X$ è omotopa a un'applicazione costante, ovvero se

$$\pi(S^n, X) \ \ \textit{contiene un solo elemento} \ \ \forall 0 \leq n \leq k.$$

Uno spazio topologico omotopicamente equivalente ad uno spazio k-connesso è esso stesso k-connesso.

Gli spazi contrattili sono ∞-connessi.

Gli spazi 0-connessi sono gli spazi connessi per archi.

Uno spazio 1-connesso si dice *semplicemente connesso.*

§7. **k-connessione relativa.**

Una coppia topologica (X,A) si dice k-connessa se, per ogni intero $0 \leq n \leq k$ ogni applicazione continua $f : D^n \longrightarrow X$ tale che

$$f(S^{n-1}) \subset A$$

è S^{n-1}-omotopa a un'applicazione continua $g : D^n \longrightarrow X$ tale che

$$g(D^n) \subset A.$$

Il lemma seguente permette di dare una condizione equivalente di k-connessione, in termini di omotopia relativa.

Lemma 7.1. *Sia $f \in \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; X, A)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia omotopa a un'applicazione costante in $\pi(D^n, S^{n-1}; X, A)$ è che f sia S^{n-1}-omotopa a un'applicazione g con $g(D^n) \subset A$.*

Dim. Necessità. Sia

$$F : D^n \times I \longrightarrow X$$

un'omotopia con

$$F(\cdot, 0) = f$$

$$F(S^{n-1}, t) \subset A \ \ \forall t \in I$$

$$F(x, 1) = \textit{costante} \ \ \forall x \in X.$$

Definiamo allora

$$G(x,t) = \begin{cases} F(x/|x|, 2(1-|x|)) & se \ \ |x| \geq 1 - t/2 \\ F(x/(1-t/2), t) & se \ \ |x| \leq 1 - t/2 \end{cases}$$

La G definisce allora una S^{n-1}-omotopia tra f e una funzione continua

$$g(x) = \begin{cases} F(x/|x|, 2(1-|x|) & se \ \ |x| \geq 1/2 \\ F(2x, 1) & se \ \ |x| \leq 1/2 \end{cases}$$

Sufficienza. Sia

$$G : D^n \times I \longrightarrow X$$

una S^{n-1}-omotopia tra f e un'applicazione g con $g(D^n) \subset A$. Definiamo allora l'omotopia:

$$F(x,t) = \begin{cases} G(x, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(2(1-t)x, 1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Essa è un'omotopia di f con un'applicazione costante in $\pi(D^n, S^{n-1}; X, A)$.

Osserviamo che, se A è un retratto di deformazione stretto di X, allora la coppia (X, A) è ∞-connessa.

Per $n = 0$ poniamo $S^{-1} = \emptyset$. Allora l'enunciato del Lemma precedente è ancora valido: *Una coppia topologica* (X, A) *è* 0*-connessa se ogni punto di* X *può essere congiunto a un punto di* A *da un cammino continuo.*

Citiamo senza dimostrazione il seguente risultato:

Se l'inclusione $A \hookrightarrow X$ *è un'equivalenza omotopica, allora la coppia* (X, A) *è* ∞*-connessa.*

§8. **Il lemma di Sard.**

Per proseguire lo studio dell'omotopia, utilizzeremo nel seguito alcune proprietà delle applicazioni differenziabili.

Lemma 8.1. *Siano* m, n, *due interi positivi con* $m < n$. *Sia* A *un aperto di* $\mathbb{R}^m$ *e* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *un'applicazione differenziabile. Allora* $f(A)$ *è di prima categoria.*

Dim. Per ogni intero positivo N ed ogni $\alpha \in \mathbf{Z}^n$ indichiamo con $Q(\alpha, N)$ il cubo m-dimensionale:

$$Q(\alpha, N) = \{x \in \mathbb{R}^m \ \ | \ \ |Nx^i - \alpha^i| \leq 1/2 \ \ per \ \ i = 1, \cdots, m\}.$$

La famiglia

$$\{Q(\alpha, N) | \alpha \in \mathbf{Z}^n, \ N \in \mathbf{N} - \{0\}\}$$

è numerabile e le sue sottofamiglie formate dai cubi di lato $1/N$ sono ricoprimenti chiusi localmente finiti (quadrettature) di $\mathbb{R}^m$. Possiamo scrivere A come unione numerabile di tutti i cubi $Q(\alpha, N)$ in esso contenuti:

$$A \ = \ \cup Q_\nu$$

con $Q_\nu = Q(\alpha_\nu, N_\nu)$, $\nu \in \mathbf{N}$.

Abbiamo allora

$$f(A) = \cup f(Q_\nu)$$

unione numerabile di insiemi compatti. Basterà dunque dimostrare che ciascuno di questi insiemi $f(Q_\nu)$ ha parte interna vuota.

Supponiamo per assurdo che ciò non sia vero. A meno di sostituire ad f la funzione di classe C^1

$$x \longrightarrow k\,(f(hx + \alpha/N) - f(\alpha/N))$$

(per opportuni numeri reali positivi k, h e $\alpha \in \mathbf{Z}^m$) possiamo supporre che:

(i) $$A \supset Q(m) = \{x \in \mathbb{R}^m \ \ | \ \ |x^i| \leq 1/2 \ \ per \ \ i = 1, \cdots, m\}.$$

(ii) $$f(Q(m)) \supset Q(n) \ = \ \{y \in \mathbb{R}^n \ \ | \ \ |y^i| \leq 1/2 \ \ per \ \ i = 1, \cdots, n\}.$$

Le derivate parziali prime di f sono uniformemente limitate su $Q(m)$. Per il teorema della media, abbiamo allora, per una costante L,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \ \ \forall x_1, x_2 \in Q(m).$$

La f trasforma perciò un sottoinsieme di $Q(m)$ contenuto in una palla di raggio δ in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ contenuto in una palla di raggio $L\delta$.

Fissato un intero positivo N, suddividiamo $Q(m)$ in N^m cubi di lato $1/N$. L'immagine mediante f di ciascuno di questi cubi è contenuta in un cubo di $\mathbb{R}^n$ di lato $2L\sqrt{m}/N$. Il volume di $Q(n)$ dovrebbe essere allora inferiore alla somma dei volumi di tali cubi:

$$1 = vol\,(Q(n)) \leq (2L\sqrt{m})^n \cdot N^{m-n}$$

ci dà una contraddizione perché il secondo membro di questa diseguaglianza tende a 0 per $N \to \infty$. La dimostrazione è completa.

Osservazione. *Segue dalla dimostrazione che, se*

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

è un'applicazione differenziabile definita su un aperto A di $\mathbb{R}^m$, e $m < n$, allora $f(A)$ è contenuta in un insieme di misura di Lebesgue nulla di $\mathbb{R}^n$.

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^m$ e sia

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

un'applicazione differenziabile. Per ogni punto x di A indichiamo con

$$df(x) = \begin{pmatrix} \partial f^1/\partial x^1 & \dots & \partial f^1/\partial x^m \\ . & \dots & . \\ . & \dots & . \\ \partial f^n/\partial x^1 & \dots & \partial f^n/\partial x^m \end{pmatrix}$$

la matrice jacobiana di f in x. Il punto x si dice *critico* per f se $df(x)$ ha rango $< n$. Il corrispondente punto $f(x) \in \mathbb{R}^n$ si dice *valore critico* di f. Indichiamo con $C(f)$ e $CV(f)$ rispettivamente l'insieme dei punti critici e dei valori critici di f. I punti di $f(A) - CV(f)$ si dicono *valori regolari* di f.

Osservazione. *(Teorema delle funzioni implicite). Sia A un aperto di $\mathbb{R}^m$ e sia*

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

un'applicazione di classe C^k con $1 \leq k \leq \infty$. Se $x_0 \in A$ non è un punto critico di f possiamo trovare un intorno aperto V di $f(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$, un intorno aperto W di 0 in $\mathbb{R}^{m-n}$, un intorno U di x_0 in A e un omeomorfismo

$$g : V \times W \longrightarrow U$$

di classe C^k tale che g non abbia punti critici in $V \times W$ e

$$f(g(y,z)) = y \quad \forall (y,z) \in V \times W.$$

In particolare, se $m = n$, la g è un omeomorfismo di V su un aperto $g(V)$ di A. In questo caso diciamo che la f definisce un sistema di coordinate di classe C^k in $g(V)$.

Dal teorema delle funzioni implicite deduciamo immediatamente il seguente

Lemma 8.2. *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$,*

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

un'applicazione differenziabile di classe C^1. Se y è un valore regolare di f, allora $f^{-1}(y)$ è un sottospazio discreto di A.

Dim. Dal teorema delle funzioni implicite segue che ogni punto x di $f^{-1}(y)$ ha un intorno aperto U tale che

$$f^{-1}(y) \cap U = \{x\}.$$

Teorema 8.1. *(Lemma di Sard).*
Sia A un aperto di $\mathbb{R}^m$ e sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe C^∞. Allora $CV(f)$ è di prima categoria.

Dim. Osserviamo che $C(f)$ è un sottoinsieme chiuso di A. Essendo A unione numerabile di compatti, la tesi è equivalente al fatto che, per ogni compatto $K \subset A$, l'insieme compatto $f(K \cap C(f))$ sia privo di punti interni. Il teorema è banale quando $n = 0$, perché in questo caso l'insieme dei punti critici di f è vuoto. Possiamo quindi supporre $n > 0$ e il teorema vero per applicazioni di classe C^∞ a valori in $\mathbb{R}^{n-1}$. Ancora, il teorema è banale se $m = 0$; potremo quindi supporre $m \geq 1$ e il teorema vero per applicazioni differenziabili di classe C^∞ definite su aperti di $\mathbb{R}^k$ con $k < m$.

Poniamo $C = C(f)$ e per ogni intero positivo k indichiamo con C_k il sottoinsieme di C in cui si annullano le derivate parziali di f fino all'ordine k:

$$C_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid D^\alpha f(x) = 0 \ \ se \ \ 0 < |\alpha| \leq k\}.$$

Poniamo

$$C_\infty = \cap C_k.$$

Gli insiemi C_k, per $0 < k \leq \infty$, sono sottoinsiemi chiusi di C. Dimostreremo separatamente che l'immagine di $C - C_1$, di $C_k - C_{k+1}$ e di C_∞ sono di prima categoria in $\mathbb{R}^n$.

Sia x_0 un punto di $C - C_1$. Dimostriamo che esso ammette un intorno compatto B in A tale che $f(B \cap C)$ non abbia punti interni. Possiamo supporre per semplicità che $x_0 = 0$, $f(0) = 0$ e $\partial f^1/\partial x^1 \neq 0$ in 0. Possiamo trovare allora un intorno W di 0 in A in cui, dopo un opportuno cambiamento di coordinate di classe C^∞ in un intorno di 0 in $\mathbb{R}^n$, la f si può scrivere nella forma:

$$f(x) = f(x^1, x^2, ..., x^n) = (x^1, f^2(x), ..., f^n(x)).$$

(Ciò si ottiene applicando il teorema delle funzioni impicite alla

$A \ni x \longrightarrow (f^1(x), x^2, ..., x^m) \in \mathbb{R}^m$.) Sia B un intorno compatto di 0 in W della forma:

$$B = [-r, r] \times G$$

con $r > 0$, G intorno compatto di 0 in $\mathbb{R}^{m-1}$. Supponiamo che $f(C \cap B)$ contenga punti interni e sia y_0 un punto interno di $f(C \cap B)$. La proiezione

$$\mathbb{R}^n \ni (y^1, y^2, ..., y^n) \longrightarrow (y^2, ..., y^n) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

è aperta. Consideriamo l'applicazione differenziabile di classe C^∞

$$W \ni x \longrightarrow g(x) = (f^2(x), ..., f^n(x)) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Per l'ipotesi induttiva, l'insieme

$$g(C(g)) \cap B$$

non ha punti interni.

Poiché $B \cap C \subset C(g)$, se ne deduce che l'intersezione di $f(C \cap B)$ con l'iperpiano $\{y^1 = y_0^1\}$ non contiene un intorno di y_0 per la topologia di sottospazio dell'iperpiano. Ciò contraddice l'ipotesi che y_0 fosse punto interno di $f(C \cap B)$ ed abbiamo quindi dimostrato che $f(C \cap B)$ è un compatto privo di punti interni. Possiamo quindi ricoprire $C - C_1$ con una famiglia numerabile di compatti $\{B_l\}$ tali che $f(C \cap B_l)$ sia privo di punti interni e dunque

$$f(C - C_1) = \cup f(C \cap B_l)$$

è di prima categoria.

Sia ora $k \geq 1$ e $x_0 \in C_k - C_{k+1}$, che possiamo supporre essere l'origine. Indichiamo con φ una derivata parziale di f di ordine k, per cui sia $d\varphi(0) \neq 0$. Possiamo supporre che $f(0) = 0$ e che $\varphi(x) = x^1$, a meno di restringerci a un intorno aperto W di 0.

Allora $C_k \cap W$ è contenuto in $\{x^1 = 0\}$ e quindi $f(C_k \cap W)$ è contenuto nell'insieme dei valori critici dell'applicazione

$$g(x^2, ..., x^m) = f(0, x^2, ..., x^m),$$

definita e di classe C^∞ in un intorno A' di 0 in $\mathbb{R}^{m-1}$. L'insieme $f(C_k \cap W)$ è allora di prima categoria per l'ipotesi induttiva su m.

Sia ora K un compatto contenuto in C_∞. Poiché tutte le derivate parziali di f si annullano identicamente su K, per ogni intero positivo l possiamo trovare un intorno aperto U di K in A tale che

$$|f(x)| < dist(x, K)^l \quad \forall x \in U.$$

Supponiamo per assurdo che $f(K)$ contenga dei punti interni. Non è restrittivo allora supporre che $f(K)$ contenga il cubo

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^n \quad | \quad |y^i| \leq 1/2\}$$

e che K sia contenuto nel cubo

$$Q' = \{x \in \mathbb{R}^m \quad | \quad |x^j| \leq 1/2\}.$$

Sia N un intero positivo, con $N dist(K, \mathbb{R}^m - U) > 1$ e suddividiamo Q' in N^m cubi di lato $1/N$. Se P è uno di questi cubetti che interseca K, esso è tutto contenuto in U e la sua immagine mediante f sarà contenuta in un cubo di lato minore di $2(\sqrt{m}/N)^l$. Avremo dunque:

$$1 = vol(Q) \leq 2^n N^m (\sqrt{m}/N)^{ln}.$$

Scegliendo $ln > m$, otteniamo una contraddizione.

Ne segue che l'immagine $f(K \cap C)$, essendo un compatto di prima categoria in $\mathbb{R}^n$, ha parte interna vuota. La dimostrazione è completa.

Dalla dimostrazione si può osservare come l'ipotesi del teorema che la f sia di classe C^∞ si possa indebolire a f di classe C^k con $kn > m$.

§9. **Varietà differenziabili.**

Si dice *varietà topologica* di dimensione n uno spazio topologico X di Hausdorff, numerabile all'infinito, in cui ogni punto ha un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Un *atlante* su X è una famiglia $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ in cui $\{U_i\}$ è un ricoprimento aperto di X e per ogni indice i

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi(U_i) = V_i \subset \mathbb{R}^n$$

è un omeomorfismo su un aperto V di $\mathbb{R}^n$. Le funzioni

$$g_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

sono omeomorfismi tra aperti di $\mathbb{R}^n$ e si dicono le *funzioni di transizione* dell'atlante $\mathcal{A}$.

Un atlante di una varietà topologica X si dice di classe C^k $(0 \leq k \leq \infty)$ se le sue funzioni di transizione sono di classe C^k. Due atlanti di classe C^k sulla stessa varietà topologica X si dicono k-equivalenti se la loro unione è ancora un atlante di classe C^k.

Si dice *varietà differenziabile* di classe C^k una varietà topologica munita di una classe di equivalenza di atlanti di classe C^k.

Un atlante $\mathcal{A}$ di classe C^k su una varietà topologica M di dimensione n determina su M un'unica struttura di varietà differenziabile di classe C^k. Un omeomorfismo

$$\varphi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

di un intorno aperto U di un punto p di M su un aperto V di $\mathbb{R}^n$ si dice un *sistema di coordinate* (o *carta locale*) di classe C^k in p se $\{(U, \varphi)\} \cup \mathcal{A}$ è k-equivalente ad $\mathcal{A}$.

OSSERVAZIONE. *Siano M, N, varietà differenziabili di classe C^k e sia $f : M \longrightarrow N$ un'applicazione continua. Dato un punto $p \in M$ sono equivalenti:*

i) Possiamo trovare una carta locale (U, φ) in p e una carta locale (V, ψ) in $f(p)$ tali che

$$\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \ni x \longrightarrow \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) \in \psi(V)$$

sia un'applicazione di classe C^k in un intorno di $\varphi(p)$.

ii) Per ogni carta locale (U, φ) in p e per ogni carta locale (V, ψ) in $f(p)$

$$\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \ni x \longrightarrow \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) \in \psi(V)$$

è un'applicazione di classe C^k in un intorno di $\varphi(p)$.

In questo caso diciamo che f è un'applicazione di classe C^k in p. un'applicazione f si dice di classe C^k in M se è tale in ogni punto di M.

Esempi.

1. Un aperto A di $\mathbb{R}^n$ è una varietà differenziabile di classe C^∞ con l'atlante (A, id_A).

2. Il toro $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbf{Z}^n$ è una varietà differenziabile di classe C^∞ con l'atlante formato dalle immagini, mediante la proiezione canonica, degli aperti

$$U(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x^i - x_0^i| < 1/2\}$$

al variare di x_0 in $\mathbb{R}^n$ e dagli omeomorfismi inversi delle restrizioni a $U(x_0)$ della proiezione nel quoziente.

3. La sfera S^n è una varietà differenziabile di classe C^∞ e di dimensione n con l'atlante $\{(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$ ove

$$U_+ = \{x \in S^n \mid x^0 > -1\}$$

$$U_- = \{x \in S^n \mid x^0 < 1\}$$

$$\varphi_+(x^0, x^1, ..., x^n) = (x^1/(1 + x^0), ..., x^n/(1 + x^0)) \in \mathbb{R}^n$$

$$\varphi_-(x^0, x^1, ..., x^n) = (x^1/(1 - x^0), ..., x^n/(1 - x^0)) \in \mathbb{R}^n.$$

(proiezioni stereografiche di centri rispettivamente e_0 e $-e_0$.)

4. Lo spazio proiettivo $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ è una varietà differenziabile di classe C^∞ e di dimensione n con l'atlante

$$\{(U_i, \varphi_i) | i = 0, ..., n\}$$

ove in coordinate omogenee abbiamo:

$$U_i = \{x^i \neq 0\}$$

$$\varphi_i(x^0, ..., x^{i-1}, x^i, x^{i+1}, ..., x^n) = (x^0/x^i, ..., x^{i-1}/x^i, x^{i+1}/x^i, ..., x^n/x^i) \in \mathbb{R}^n.$$

5. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^m$, $m > n$ e

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

un'applicazione di classe C^k con $k \geq 1$. Se $y \in f(A)$ è un valore regolare di f, allora $f^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile di classe C^k e di dimensione $m-n$ (sottovarietà differenziabile di classe C^k di A) con l'atlante definito dai sistemi di carte locali:

$$f^{-1}(y) \supset U_{\xi,x_0} \ni x \longrightarrow \xi(x) = \big(\xi^1(x), ..., \xi^{m-n}(x)\big) \in \xi(U_{\xi,x_0}) \subset \mathbb{R}^{m-n}$$

al variare di x_0 in $f^{-1}(y)$ e di $\xi \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m-n})$ tra le applicazioni lineari tali che $g(x) = (x, \xi(x))$ sia regolare in x_0. Per il teorema delle funzioni implicite, la g definisce allora un omeomorfismo di un intorno V di x_0 su un aperto V' di $\mathbb{R}^n$. Poniamo $U_{\xi,x_0} = V \cap f^{-1}(y)$.

Siano M,N varietà differenziabili di classe C^k con $k \geq 1$. Data un'applicazione differenziabile di classe C^k

$$f : M \longrightarrow N$$

un punto p che sia critico per la rappresentazione di f in un sistema di coordinate locali in p e in $f(p)$, lo è anche per la sua rappresentazione rispetto a qualsiasi altro sistema di coordinate locali.

Possiamo quindi definire senza ambiguità l'insieme $C(f)$ dei punti critici di f in M e l'insieme $CV(f)$ dei valori critici di f in N.

Usando atlanti formati da un insieme al più numerabile di elementi otteniamo immediatamente:

Teorema 9.1. *(Lemma di Sard) Siano M ed N varietà differenziabili di classe C^∞. Allora, per ogni applicazione*

$$f : M \longrightarrow N$$

di classe C^∞, $CV(f)$ è un insieme di prima categoria in N.

§10. **Proprietà di omotopia delle sfere.**

Mostriamo in questo paragrafo che la sfera S^n è $(n-1)$-connessa, ma non n-connessa.

Teorema 10.1. *S^n è $(n-1)$-connessa.*

Dim. Sia m un intero non negativo $< n$ e sia

$$f : S^m \longrightarrow S^n$$

un'applicazione continua. Per il teorema di Stone-Weierstrass possiamo trovare un'applicazione a componenti polinomiali

$$P : \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

tale che

$$|P(x) - f(x)| < 1/2 \quad \forall x \in S^m.$$

Abbiamo quindi

$$|f(x) + t(P(x) - f(x))| > 1/2 \quad \forall (x,t) \in S^m \times I.$$

L'applicazione:

$$S^m \times I \ni (x,t) \longrightarrow \frac{f(x) + t(P(x) - f(x))}{|f(x) + t(P(x) - f(x))|} \in S^n$$

è un'omotopia tra f e la restrizione g di $P/|P|$ a S^m. Dico che la g non è surgettiva. Infatti, g è di classe C^∞ su S^m e quindi, per il teorema 9.1, $g(S^m)$ è di prima categoria in S^n. Poiché S^n meno un punto è omeomorfa a $\mathbb{R}^n$, che ha lo stesso tipo di omotopia del punto, g è omotopa a un'applicazione costante.

LEMMA 10.1. *Sia n un intero ≥ 1. Definiamo una applicazione (sospensione)*

$$\sigma : \mathcal{C}(S^n, S^n) \longrightarrow \mathcal{C}(S^{n+1}, S^{n+1})$$

mediante:

$$\sigma f(x^0, ..., x^n, x^{n+1}) = \left(\sqrt{1-(x^{n+1})^2} \cdot f\left(\frac{(x^0, ..., x^n)}{\sqrt{1-(x^{n+1})^2}} \right), x^{n+1} \right).$$

Essa induce un'applicazione bigettiva

$$\sigma_* : \pi(S^n, S^n) \longrightarrow \pi(S^{n+1}, S^{n+1}).$$

DIM. Poiché un'omotopia di applicazioni continue di S^n in sè si trasforma mediante σ in un'omotopia di applicazioni continue si S^{n+1} in sè, la σ_* è ben definita. $\boxed{\textit{Iniettività}}$ Siano $f, g : S^n \longrightarrow S^n$ due applicazioni continue. Se σf è omotopa a σg, possiamo trovare un'omotopia

$$F : S^{n+1} \times I \longrightarrow S^{n+1}$$

tale che

$$\begin{array}{ll} F(x, 0) = \sigma f(x) & \forall x \in S^{n+1} \\ F(x, 1) = \sigma g(x) & \forall x \in S^{n+1}. \end{array}$$

Osserviamo allora che

$$\Psi(x, t) = t(|F^{n+1}(x, t)| - |x^{n+1}|) \cdot e_0 + F(x, t) \neq 0$$

$$\forall (x, t) \in S^{n+1} \times I \quad con \quad |F^{n+1}(x, t)| \geq |x^{n+1}|.$$

Infatti, se $|F^{n+1}(x, t)| > 0$, i due termini nella somma sono linearmente indipendenti. Se $|F^{n+1}(x, t)| = 0$, allora $\Psi(x, t) = F(x, t) \neq 0$.

Possiamo allora definire un'omotopia

$$G(x, t) = \begin{cases} F(x, t) & \text{se } |F^{n+1}(x, t)| \leq |x^{n+1}| \\ \Psi(x, t)/|\Psi(x, t)| & \text{se } |F^{n+1}(x, t)| \geq |x^{n+1}|. \end{cases}$$

Osserviamo che

$$G(x, 0) = F(x, 0) = \sigma f(x)$$

in quanto

$$(\sigma f)^{n+1}(x) = x^{n+1}$$

e che analogamente

$$G(x, 1) = F(x, 1) = \sigma g(x) \ \forall x \in S^{n+1}.$$

Abbiamo

$$|G^{n+1}(x, t)| < 1 \quad \forall (x, t) \in S^n \times I$$

in quanto ciò è vero se $t = 0, 1$ e per $t \neq 0, x \in S^n$ il vettore

$$\Psi(x,t) = t|F^{n+1}(x,t)|e_0 + F(x,t)$$

non è proporzionale a e_{n+1}. Otteniamo quindi un'omotopia

$$H : S^n \times I \longrightarrow S^n$$

di f con g definendo

$$\varrho : S^{n+1} \cap \{|x^{n+1}| < 1\} \ni x \longrightarrow \frac{x'}{|x'|} \in S^n$$

(ove $x' = (x^0, ..., x^n)$), e ponendo

$$H(x', t) = \varrho \circ G(x', 0; t).$$

$\boxed{\textit{Surgettività}}$ Sia

$$f : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$$

un'applicazione continua.

a) Supponiamo che, posto

$$S^{n+1}_+ = \{x \in S^{n+1} \mid x^{n+1} \geq 0\}$$

e

$$S^{n+1}_- = \{x \in S^{n+1} \mid x^{n+1} \leq 0\}$$

sia

$$f(S^{n+1}_+) \subset S^{n+1}_+ \quad e \quad f(S^{n+1}_-) \subset S^{n+1}_-.$$

Possiamo allora costruire un'omotopia tra f e σg, dove g è l'applicazione:

$$S^n \ni (x^0, ..., x^n) \xrightarrow{g} f(x^0, ..., x^n, 0) \in S^n$$

nel modo seguente. Indichiamo con $h : D^{n+1} \to D^{n+1}$ la funzione continua:

$$h(y) = \begin{cases} |y|g(y/|y|) & \forall y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Siano σ_+ e σ_- le applicazioni introdotte nel §6. Sia

$$p : S^{n+1} \ni (x^0, ..., x^n, x^{n+1}) \to (x^0, ..., x^n) \in D^{n+1}$$

la proiezione naturale. Allora

$$\sigma g(x) = \begin{cases} \sigma_+(h(p(x)) & \forall x \in S^{n+1}_+ \\ \sigma_-(h(p(x)) & \forall x \in S^{n+1}_-. \end{cases}$$

Indichiamo con $f_+, f_- : D^{n+1} \to D^{n+1}$ le funzioni continue:

$$f_+(y) = p \circ f(\sigma_+(y)) \text{ per } y \in D^{n+1}$$

$$f_-(y) = p \circ f(\sigma_-(y)) \text{ per } y \in D^{n+1}$$

La proprietà della funzione f di trasformare in sè i due emisferi S_+^{n+1} e S_-^{n+1} si può esprimere mediante:

$$f(x) = \begin{cases} \sigma_+ \circ f_+(p(x)) & \text{se } x \in S_+^{n+1} \\ \sigma_- \circ f_-(p(x)) & \text{se } x \in S_-^{n+1}. \end{cases}$$

Allora un'omotopia $F : S^{n+1} \times I \to S^{n+1}$ tra f e σg si può ottenere rialzando l'omotopia lineare tra f_+ ,f_- e h:

$$F(x,t) = \begin{cases} \sigma_+(f_+(p(x)) + t(h(p(x)) - f_+(p(x))) & \text{se } x \in S_+^{n+1} \\ \sigma_-(f_-(p(x)) + t(h(p(x)) - f_-(p(x))) & \text{se } x \in S_-^{n+1}. \end{cases}$$

b) Consideriamo ora il caso generale. Sia

$$f : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$$

una qualsiasi applicazione continua. Se f non è surgettiva, allora è omotopa a un'applicazione costante e questa è omotopa alla σh ove $h(x) = e_0 \;\; \forall x \in S^n$.

Supponiamo quindi f surgettiva. Ripetendo il ragionamento svolto nella dimostrazione del teorema 10.1, possiamo supporre che f sia di classe C^∞. L'insieme dei suoi valori critici è allora un compatto di S^{n+1} privo di punti interni e potremo trovare una coppia di punti diametralmente opposti che siano entrambi valori regolari (non critici) di f. A meno di una rotazione, che possiamo ottenere mediante un'omotopia dell'identità, in quanto $SO(n+2)$ è connesso per archi, possiamo supporre che e_{n+1} e $-e_{n+1}$ siano valori regolari di f. Poniamo per semplicità $N = e_{n+1}$ e $S = -e_{n+1}$. Per il teorema delle funzioni implicite, ogni punto di $N^* = f^{-1}(N)$ ed ogni punto di $S^* = f^{-1}(S)$ ha un intorno aperto che non contiene altri punti di $N^* \cup S^*$. I due insiemi sono dunque sottoinsiemi discreti di S^{n+1} e perciò finiti. Possiamo trovare una forma lineare ξ in $(\mathbb{R}^{n+2})^*$ che assume valori distinti sui punti distinti di $N^* \cup S^*$. Infatti, per ogni coppia di punti distinti di $\mathbb{R}^{n+2}$ l'insieme delle forme lineari che hanno nei due punti valori distinti è un aperto denso in $(\mathbb{R}^{n+2})^*$ e una intersezione finita di aperti densi di $(\mathbb{R}^{n+2})^*$ è ancora un aperto denso in $(\mathbb{R}^{n+2})^*$. Scegliamo ξ in modo che $|\xi| = 1$ e $|\xi(x)| < 1$ su $N^* \cup S^*$. A meno di una rotazione, per cui valgono le considerazioni svolte sopra, possiamo supporre sia $\xi(x) = (x|N)$. Suddividiamo ora $[-1, 1]$ in un numero finito di intervalli, mediante punti $-1 < c_1 < ... < c_l < 1$, in modo che

$$(x|N) \neq c_i \;\; per \;\; i = 1, ..., l \;\; se \;\; x \in N^* \cup S^*$$

$$card(\{(x|N) | x \in N^* \cup S^*\} \cap [c_i, c_{i+1}]) = 1 \;\; per \;\; i = 1, ..., l-1$$

$$c_1 < (x|N) < c_l \;\; \forall x \in N^* \cup S^*.$$

Costruiamo ora un'omotopia

$$H : S^{n+1} \times I \longrightarrow S^{n+1}$$

tra l'identità e un omeomorfismo di S^{n+1} la cui inversa trasformi i punti
$x = (x^0, ..., x^{n+1}) \in N^*$ in $\bar{x} = (\sqrt{1 - (x^{n+1})^2}, 0, ..., 0, x^{n+1})$ e i punti

$x = (x^0, ..., x^{n+1}) \in S^*$ in $\bar{x} = (-\sqrt{1-(x^{n+1})^2}, 0, ..., 0, x^{n+1})$. Sia infatti, per ogni indice i, $g_i(t)$ un arco continuo in $SO(n+2)$ formato da applicazioni che lasciano fisso il punto N (l'insieme delle applicazioni in $SO(n+2)$ che lasciano fisso N è isomorfo, come gruppo topologico, a $SO(n+1)$ ed è quindi connesso per archi) e tali che $g_i(1)\bar{x} = x$ se $x \in N^* \cup S^*$ e $c_i < (N|x) < c_{i+1}$. Poniamo quindi, indicando con x_i l'elemento di $N^* \cup S^*$ tale che $c_i < (x_i|N) < c_{i+1}$ e con $\eta_i(x)$ la funzione definita per $c_i < (x|N) < c_{i+1}$ mediante:

$$\eta_i(x) = \exp\left(\frac{-|(x - x_i|N)|^2}{[(x|N) - c_i][c_{i+1} - (x|N)]}\right)$$

e uguale a 0 nei punti non appartenenti a tale striscia. Essa è una funzione di classe C^∞. Consideriamo quindi l'omotopia:

$$H(x,t) = \begin{cases} x & \text{se } (x|N) \notin [c_1, c_l] \\ g_i(t\eta_i(x))x & \text{se } c_i < (x|N) < c_{i+1},\ i = 1, ..., l-1 \\ x & \text{se } (x|N) = c_i,\quad i = 1, ..., l. \end{cases}$$

L'omotopia $f(H(x,t))$ trasforma f in un'applicazione $g(x) = f(H(x,1))$ per cui $g^{-1}(N)$ è un insieme finito di punti con

$$(x|e_0) \geq 0$$

e $g^{-1}(S)$ è un insieme finito di punti con

$$(x|e_0) \leq 0.$$

Questa applicazione è omotopa a quella ottenuta componendola con una rotazione di $SO(n+2)$ che trasforma e_0 in N. Ci siamo quindi ricondotti alla situazione seguente: abbiamo una applicazione continua

$$g : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$$

omotopa ad f tale che

$$g^{-1}(N) \subset S^{n+1}_+$$

$$g^{-1}(S) \subset S^{n+1}_-.$$

Per la continuità di g, possiamo trovare $0 < \epsilon < 1/2$ tale che

$$g(S^{n+1}_+) \subset \{x \in S^{n+1} | x^{n+1} > 2\epsilon - 1\},$$

$$g(S^{n+1}_-) \subset \{x \in S^{n+1} | x^{n+1} < 1 - 2\epsilon\}.$$

Poniamo

$$\Psi_+(x,t) = \left(x', (1/\epsilon - 1)(\epsilon(1+t) - t(1 - x^{n+1})\right),$$

$$\Psi_-(x,t) = \left(x', (1/\epsilon - 1)(t(1 + x^{n+1}) - \epsilon(1+t)\right).$$

Definiamo l'omotopia:

$$L(x,t) = \begin{cases} x & \text{se } |x^{n+1}| \geq 1-\epsilon \\ \Psi_+(x,t)/|\Psi_+(x,t)| & \text{se } 1-\epsilon(1+1/t) \leq x^{n+1} \leq 1-\epsilon \\ x/|x| & \text{se } |x^{n+1}| \leq 1-\epsilon(1+1/t) \\ \Psi_-(x,t)/|\Psi_-(x,t)| & \text{se } -1+\epsilon(1+1/t) \leq x^{n+1} \leq \epsilon - 1. \end{cases}$$

tra l'identità e un'applicazione $\lambda : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$ tale che

$$\lambda(\{|x^{n+1}| \leq 1-2\epsilon\}) \subset S^n.$$

Allora la $L(g(x),t)$ è un'omotopia di g con un'applicazione continua $L(g(x),1) = h(x)$ tale che

$$h(S^{n+1}_+) \subset S^{n+1}_+,$$

$$h(S^{n+1}_-) \subset S^{n+1}_-.$$

Ad essa si applica quindi l'argomento del punto a). La dimostrazione è completa.

Teorema 10.2. *Consideriamo l' insieme di applicazioni continue Φ formato dalle*

$$\varphi_k : S^1 \ni e^{i\theta} \longrightarrow \varphi_k(e^{i\theta}) = e^{ki\theta} \in S^1.$$

per $k \in \mathbf{Z}$. L'applicazione naturale:

$$\Phi \longrightarrow \pi(S^1, S^1)$$

è una bigezione.

Dim. Ogni applicazione continua $f : S^1 \longrightarrow S^1$ è omotopa a un'applicazione continua $g : S^1 \longrightarrow S^1$ tale che $g(1) = 1$. Quindi, per il lemma 6.1,

$$\pi(S^1, \{1\}; S^1, \{1\}) \simeq \pi(S^1, S^1).$$

Osserviamo che l'applicazione

(*) $$\mathbb{R} \ni \theta \longrightarrow e^{i\theta} \in S^1$$

è un omeomorfismo locale. Per ogni applicazione continua

$$f : S^1 \longrightarrow S^1$$

con

$$f(1) = 1$$

possiamo allora trovare un'unica applicazione continua

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$\tilde{f}(0) = 0$$

e il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "e^{i\cdot}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "e^{i\cdot}"] \\ S^1 \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

sia commutativo. Abbiamo allora

$$\tilde{f}(2\pi) = 2k\pi \quad per \quad qualche \quad k \in \mathbf{Z}.$$

L'applicazione che fa corrispondere l'intero k alla funzione f è un'applicazione continua

$$\mathcal{C}(S^1, \{1\}; S^1, \{1\}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

che assume solo valori interi.

Essa è dunque costante sulle componenti connesse di $\mathcal{C}(S^1, \{1\}; S^1, \{1\})$. Ciò dimostra che (*) è iniettiva. Siano ora $f, g \in \mathcal{C}(S^1, \{1\}; S^1, \{1\})$ tali che $\tilde{f}(2\pi) = \tilde{g}(2\pi)$. Allora l'omotopia lineare:

$$(\theta, t) \longrightarrow \tilde{f}(\theta) + t[\tilde{g}(\theta) - \tilde{f}(\theta)]$$

induce un'omotopia tra f e g. Ne segue che la (*) è anche iniettiva. La dimostrazione è completa.

Teorema 10.3. *Sia $n \geq 2$. L'applicazione*

$$\mathcal{C}(S^1, S^1) \ni f \longrightarrow \sigma f \in \mathcal{C}(S^n, S^n)$$

ove, posto $x = (x^0, x^1, x'')$,

$$\sigma f(x^0, x^1, x'') = (\sqrt{1 - |x''|^2} f(x^0, x^1), x''),$$

induce un'applicazione bigettiva

$$\pi(S^1, S^1) \longrightarrow \pi(S^n, S^n).$$

In particolare, l'applicazione

$$\mathbf{Z} \ni k \longleftrightarrow \varphi_k \in \Phi$$

induce per ogni $n \geq 1$ una bigezione:

$$\mathbf{Z} \longleftrightarrow \pi(S^n, S^n).$$

Dim. La prima affermazione segue per iterazione dal lemma 10.1 e la seconda dal teorema 10.2.

L'intero associato ad un'applicazione continua $f : S^n \to S^n$ si dice il *grado* di f e si indica con $deg(f)$.

§11 **Il teorema del punto fisso di Brouwer.**

Un'importante applicazione dei risultati del paragrafo precedente è il seguente

Teorema 11.1. *(Teorema di Brouwer)*
Ogni applicazione continua

$$f : D^n \longrightarrow D^n$$

ha almeno un punto fisso.

Dim.. Il teorema è banale se $n = 0$. Sia $n > 0$ e supponiamo per assurdo che vi sia una funzione continua $f : D^n \longrightarrow D^n$ tale che

$$f(x) \neq x \ \forall x \in D^n.$$

Allora l'applicazione $\psi : D^n \longrightarrow S^{n-1}$ che associa ad ogni punto x di D^n l'intersezione di S^{n-1} con la semiretta

$$t \longrightarrow x + t\,(x - f(x))\,, \ per\ t \geq 0$$

è continua ed è una retrazione di D^n su S^{n-1} : essa infatti è descritta analiticamente mediante:

$$\psi(x) = x + \frac{\sqrt{(x|x - f(x))^2 + (1 - |x|^2)|x - f(x)|^2} - |(x|x - f(x))|}{|x - f(x)|^2}(x - f(x)).$$

L'applicazione

$$D^n \times I \ni (x, t) \longrightarrow (1 - t)x + t\psi(x) \in D^n$$

è una S^{n-1} omotopia dell'identità con una retrazione di D^n su S^{n-1}. Ciò è assurdo perchè S^{n-1} non può essere un retratto di deformazione stretto di D^n. Infatti D^n e S^{n-1} non sono omotopicamente equivalenti in quanto D^n è contrattile, mentre per il teorema 10.3 S^{n-1} non è $(n-1)$-connesso.

Osservazione. Il teorema di Brouwer si applica ovviamente a tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^n$ che sono omeomorfi a D^n; in particolare a tutti i sottoinsiemi convessi e compatti di uno spazio euclideo.

CAPITOLO XIII

GRUPPI DI OMOTOPIA

§1 Gruppi di omotopia di uno spazio puntato

Uno *spazio puntato* è uno spazio topologico non vuoto X su cui si sia fissato un *punto base* x_0. Chiamiamo *n-esimimo gruppo di omotopia dello spazio puntato* (X, x_0), e indichiamo con $\pi_n(X, x_0)$, l'insieme $\pi(\mathbf{S}^n, e_0; X, x_0)$ delle classi di e_0-omotopia delle applicazioni continue $f : \mathbf{S}^n \to X$ tali che $f(e_0) = x_0$.

Il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ si dice anche *gruppo fondamentale* di X con punto base x_0.

Per descrivere la struttura di gruppo di $\pi_n(X, x_0)$ (quando $n \geq 1$) è conveniente utilizzare l'isomorfismo tra $\pi_n(X, x_0)$ e $\pi(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; X, x_0)$ descritto dal seguente:

Lemma 1.1 *Sia $n \geq 1$. Possiamo definire un'applicazione continua $\phi : \mathbf{I}^n \to \mathbf{S}^n$ con le proprietà:*

$$\begin{cases} (i)\ \phi \text{ definisce un omeomorfismo di } \mathbf{I}^n \setminus b\mathbf{I}^n \text{ su } \mathbf{S}^n \setminus \{e_0\}; \\ (ii)\ \phi^{-1}(e_0) = b\mathbf{I}^n; \\ (iii) \text{ il quoziente iniettivo di } \phi \text{ è un omeomorfismo di } \mathbf{I}^n \big/ _{b\mathbf{I}^n} \text{ su } \mathbf{S}^n. \end{cases}$$

Per ogni spazio topologico X, con punto di base x_0, l'applicazione

$$\phi^* : \pi(\mathbf{S}^n, e_0; X, x_0) \to \pi(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; X, x_0) \tag{1.1}$$

è bigettiva.

Dim. Definiamo:

$$\psi(x) = \begin{cases} \left(2|x| - 1, 2x\sqrt{\frac{1}{|x|} - 1}\right) & \text{se } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

La $\psi : \mathbf{D}^n \to \mathbf{S}^n$ è continua e definisce, per passaggio al quoziente iniettivo, un omeomorfismo di $\mathbf{D}^n \big/ _{\mathbf{S}^{n-1}}$ su $\mathbf{S}^n$, che trasforma $\mathbf{S}^{n-1}$ in e_0.

Per ottenere la ϕ cercata sarà quindi sufficiente comporre la ψ con un omeomorfismo τ di $\mathbf{I}^n$ su $\mathbf{D}^n$ che trasformi $b\mathbf{I}^n$ in $\mathbf{S}^{n-1}$. Poniamo $\|v\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |v_i|$ per $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ e sia $e = (1, \ldots, 1) = e_1 + \cdots + e_n$. Possiamo allora definire $\tau : \mathbf{I}^n \to \mathbf{D}^n$ mediante:

$$\tau(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - e}{|2x - e|} \|2x - e\|_\infty & \text{se } 2x \neq e \\ \\ 0 & \text{se } 2x = e. \end{cases}$$

Allora $\phi = \psi \circ \tau : \mathbf{I}^n \to \mathbf{S}^n$ è l'applicazione continua cercata.

Per concludere, basta osservare che l'applicazione

$$\mathcal{C}(\mathbf{S}^n, e_0; X, x_0) \ni f \to f \circ \phi \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; X, x_0)$$

è un omeomorfismo per la topologia compatta-aperta.

Dati $f, g \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; X, x_0)$, con $n \geq 1$, definiamo

$$f \cdot g(s_1, \ldots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \ldots, s_n) & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1\,. \end{cases} \tag{1.2}$$

Indicheremo il prodotto $f \cdot g$ anche con

f	g

Teorema 1.2 *Sia X uno spazio topologico con punto di base $x_0 \in X$. Per ogni intero $n \geq 1$ l'applicazione*

$$\mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; X, x_0) \times \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; X, x_0) \ni (f, g) \to f \cdot g \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; X, x_0) \tag{1.3}$$

definisce per passaggio al quoziente un'operazione interna:

$$\pi_n(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \ni (\alpha, \beta) \to \alpha \cdot \beta \in \pi_n(X, x_0) \tag{1.4}$$

rispetto alla quale $\pi_n(X, x_0)$ è un gruppo, il cui elemento neutro corrisponde all'applicazione costante $\hat{x}_0 : \mathbf{I}^n \ni s \to x_0 \in X$. Se $n \geq 2$, allora $\pi_n(X, x_0)$ è abeliano.

Dim. Se $F, G : \mathbf{I}^n \times \mathbf{I} \to X$ sono due $b\mathbf{I}^n$-omotopie con $F(b\mathbf{I}^n, t) = G(b\mathbf{I}^n, t) = \{x_0\}$ per ogni $0 \leq t \leq 1$, allora anche

$$F \cdot G(s; t) = \begin{cases} F(2s_1, s_2, \ldots, s_n; t) & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ G(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n; t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

è una $b\mathbf{I}^n$-omotopia con $F \cdot G(b\mathbf{I}^n, t) = \{x_0\}$ per ogni $0 \leq t \leq 1$. L'operazione su $\pi_n(X, x_0)$ è perciò ben definita.

Dimostriamo ora che $\pi_n(X, x_0)$ è un gruppo per $n \geq 1$.

a. $[\hat{x}_0]$ *è l'elemento neutro del prodotto*

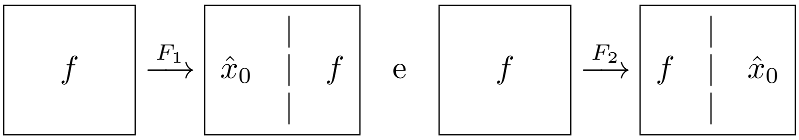
Sia $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; X, x_0)$. Definiamo

$$F_1(s; t) = \begin{cases} x_0 & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{t}{2} \\ f\left(\frac{2s_1 - t}{2 - t}, s_2, \ldots, s_n\right) & \text{se } \frac{t}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

e

$$F_2(s; t) = \begin{cases} f\left(\frac{2s_1}{2 - t}, s_2, \ldots, s_n\right) & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{2-t}{2} \\ x_0 & \text{se } \frac{2-t}{2} \leq s_1 \leq 1. \end{cases}$$

La prima è una $b\mathbf{I}^n$-omotopia tra f e $\hat{x}_0 \cdot f$, la seconda tra f e $f \cdot \hat{x}_0$:



b. *Esistenza dell'inversa.*

Data $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; X, x_0)$ definiamo

$$\check{f}(s) = f(1-s_1, s_2, \ldots, s_n) \qquad \forall s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbf{I}^n\,.$$

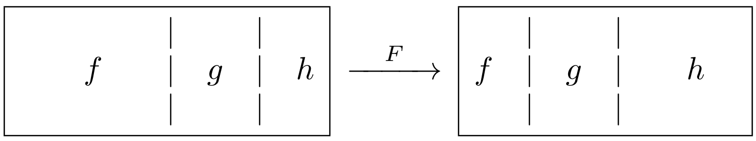
Dico che $f \cdot \check{f} \sim \check{f} \cdot f \sim \hat{x}_0$ in $\mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; X, x_0)$. Osserviamo a questo scopo che

$$F(s;t) = \begin{cases} f(2ts_1, s_2, \ldots, s_n) & \text{se } 0 \le s_1 \le \frac{1}{2} \\ f(2t(1-s_1), s_2, \ldots, s_n) & \text{se } \frac{1}{2} \le s_1 \le 1 \end{cases}$$

è un'omotopia tra $\hat{x}_0$ e $f \cdot \check{f}$. Chiaramente la $F(1-s_1, s_2, \ldots, s_n; t)$ è allora un'omotopia tra $\hat{x}_0$ e $\check{f} \cdot f$ perché $\check{\check{f}} = f$.

c. *Il prodotto è associativo*

L'associatività segue da schema:

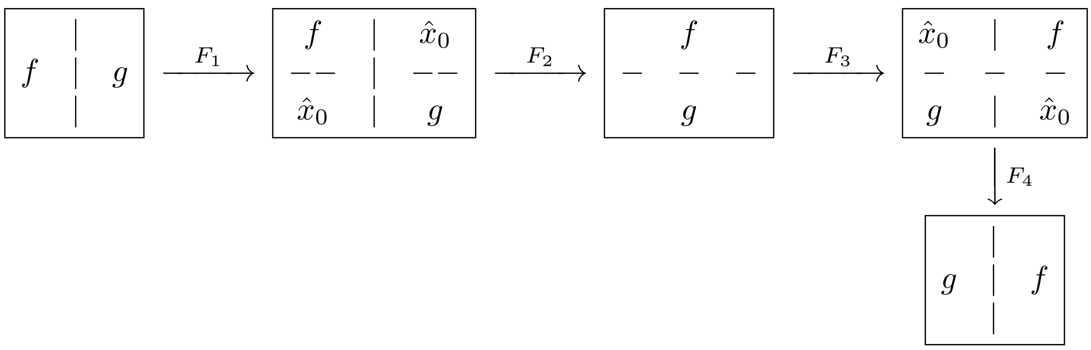


con

$$F(s;t) = \begin{cases} f(2(1+t)s_1, s_2, \ldots, s_n) & \text{se } 0 \le s_1 \le \frac{1}{2(1+t)} \\ g\left(2s_1 - \frac{1}{2(1+t)}, s_2, \ldots, s_n\right) & \text{se } \frac{1}{2(1+t)} \le s_1 \le \frac{3+2t}{4(1+t)} \\ h\left(\frac{4(1+t)s_1 - (3+2t)}{1+2t}, s_2, \ldots, s_n\right) & \text{se } \frac{3+2t}{4(1+t)} \le s_1 \le 1. \end{cases}$$

d. *Il prodotto è commutativo per $n \ge 2$.*

La dimostrazione della commutatività del prodotto per $n \ge 2$ segue dallo schema:



Le omotopie sono date da:

$$F_1(s;t) = \begin{cases} x_0 & \text{se} \quad 0 \le s_1 \le 1/2, \quad 0 \le s_2 \le t/2 \\ f(2s_1, \frac{2s_2 - t}{2-t}, s_3, \ldots, s_n) & \text{se} \quad 0 \le s_1 \le 1/2, \quad t/2 \le s_2 \le 1 \\ g(2s_1 - 1, (1+t)s_2, s_3, \ldots, s_n) & \text{se} \quad 1/2 \le s_1 \le 1, \quad 0 \le s_2 \le \frac{1}{1+t} \\ x_0 & \text{se} \quad 1/2 \le s_1 \le 1, \quad \frac{1}{1+t} \le s_2 \le 1; \end{cases}$$

$$F_2(s,t)=\begin{cases} x_0 & \text{se} \quad 0\le s_1\le \frac{1-t}{2}, \quad 0\le s_2\le \frac12\\ g(\frac{2s_1+t-1}{1+t},2s_2,s_3,\dots,s_n) & \text{se} \quad \frac{1-t}{2}\le s_1\le 1, \quad 0\le s_2\le\frac12\\ f((2-t)s_1,2s_2-1,s_3,\dots,s_n) & \text{se} \quad 0\le s_1\le\frac{1}{2-t}, \quad 1/2\le s_2\le 1\\ x_0 & \text{se} \quad \frac{1}{2-t}\le s_1\le 1, \quad 1/2\le s_2\le 1;\end{cases}$$

$$F_3(s)=\begin{cases} g((1+t)s_1,2s_2,s_3,\dots,s_n) & \text{se} \quad 0\le s_1\le\frac{1}{1+t}, \quad 0\le s_2\le\frac12\\ x_0 & \text{se} \quad \frac{1}{1+t}\le s_1\le 1, \quad 0\le s_2\le 12\\ x_0 & \text{se} \quad 0\le s_1\le\frac{t}{2}, \quad \frac12\le s_2\le 1\\ f(\frac{2s_1-t}{2-t},2s_2-1,s_3,\dots,s_n) & \text{se} \quad \frac{t}{2}\le s_1\le 1, \quad \frac12\le s_2\le 1\,;\end{cases}$$

$$F_4(s)=\begin{cases} g(2s_1,(2-t)s_2,s_3,\dots,s_n) & \text{se} \quad 0\le s_1\le\frac12, \quad 0\le s_2\le\frac{1}{2-t}\\ x_0 & \text{se} \quad 0\le s_1\le\frac12, \quad \frac{1}{2-t}\le s_2\le 1\\ x_0 & \text{se} \quad \frac12\le s_1\le 1, \quad 0\le s_2\le\frac{1-t}{2}\\ f(2s_1-1,\frac{2s_2+t-1}{1+t},s_3,\dots,s_n) & \text{se} \quad \frac12\le s_1\le 1, \quad \frac{1-t}{2}\le s_2\le 1\,.\end{cases}$$

Teorema 1.3 *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo topologico con identità* e. *Allora* $\pi_1(\mathbf{G},e)$ *è un gruppo abeliano.*

Dim. Siano $\alpha,\beta\in\mathcal{C}(\mathbf{I},\{0,1\};\mathbf{G},e)$. Definiamo l'applicazione

$$\phi:\mathbf{I}\times\mathbf{I}\ni(s,t)\to\alpha(s)\beta(t)\in\mathbf{G}\,.$$

Osserviamo che, posto

$$\gamma_1(t)=\begin{cases}(2t,0) & \text{se} \quad 0\le t\le\frac12\\ (1,2t-1) & \text{se} \quad \frac12\le t\le 1\end{cases} \qquad \gamma_2(t)=\begin{cases}(0,2t) & \text{se} \quad 0\le t\le\frac12\\ (2t-1,0) & \text{se} \quad \frac12\le t\le 1\end{cases}$$

abbiamo:

$$\alpha\cdot\beta(s)=\phi\circ\gamma_1(s), \qquad \beta\cdot\alpha(s)=\phi\circ\gamma_2(s)\,.$$

Quindi

$$\mathbf{I}\times\mathbf{I}\ni(s,t)\to F(s;t)=\phi(t\gamma_2(s)+(1-t)\gamma_1(s))\in\mathbf{G}$$

è un'omotopia tra $\alpha\cdot\beta$ e $\beta\cdot\alpha$.

Osserviamo che, se X è uno spazio topologico, $x_0\in X$ ed Y è la componente connessa per archi di X contenente x_0, abbiamo $\pi_n(Y,x_0)=\pi_n(X,x_0)$ per ogni $n\ge 1$, mentre l'insieme $\pi_0(X,x_0)$ è in corrispondenza biunivoca con le componenti connesse per archi di X.

§2 Cambiamento del punto di base e azione del gruppo fondamentale

Sia X uno spazio topologico connesso per archi, e sia $\alpha:\mathbf{I}\to X$ un cammino continuo. Posto $x_t=\alpha(t)$, $0\le t\le 1$, possiamo definire per ogni $n\ge 1$ un'applicazione $\alpha_*:\pi_n(X,x_0)\to\pi_n(X,x_1)$ nel modo seguente:

data $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; X, x_0)$ definiamo

$$(2.1)\quad \alpha \diamond f(s) = \begin{cases} f(3s_1 - 1, \ldots, 3s_n - 1) & \text{se } \ \tfrac{1}{3} \leq s_i \leq \tfrac{2}{3} \quad \forall 1 \leq i \leq n \\ \alpha\left(\max_{1\leq i\leq n}\left\{3\left|s_i - \tfrac{1}{2}\right| - \tfrac{1}{2}\right\}\right) & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Teorema 2.1 *L'applicazione*

$$(2.2)\qquad \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; X, x_0) \ni f \to \alpha \diamond f \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; X, x_1)$$

definisce un isomorfismo di $\pi_n(X, x_0)$ su $\pi_n(X, x_1)$.

Dim. Si verifica infatti che $\alpha^{-1}\diamond$ è l'applicazione inversa di $\alpha\diamond$.

Osserviamo che, in particolare, se $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(\mathbf{I}, \{0, 1\}; X, x_0)$,

$$\alpha \diamond \beta(s) = \begin{cases} \alpha(1 - 3s) & \text{se} \quad 0 \leq s \leq \tfrac{1}{3} \\ \beta(3s - 1) & \text{se} \quad \tfrac{1}{3} \leq s \leq \tfrac{2}{3} \\ \alpha(3s - 2) & \text{se} \quad \tfrac{2}{3} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad \sim \alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha\,.$$

Otteniamo quindi il seguente:

Teorema 2.2 *Sia X uno spazio topologico e sia $x_0 \in X$. Per ogni intero $n \geq 1$ l'applicazione*

$$(2.3)\quad \mathcal{C}(\mathbf{I}, \{0, 1\}; X, x_0) \times \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; X, x_0) \ni (\alpha, f) \to \alpha \diamond f \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; X, x_0)$$

definisce per passaggio al quoziente un'azione a destra:

$$(2.4)\qquad \pi_1(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \ni (\eta, \xi) \to \xi \cdot \eta \in \pi_n(X, x_0)$$

del gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ sull'n-esimo gruppo di omotopia $\pi_n(X, x_0)$ con punti base x_0.

Per $n = 1$ tale azione coincide con l'inversa della rappresentazione aggiunta.

§3 Insiemi convessi in $\mathbb{R}^n$

Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se per ogni coppia di punti $x_0, x_1 \in K$ il segmento $[x_0, x_1] = \{x_0 + t(x_1 - x_0) \,|\, 0 \leq t \leq 1\}$ è tutto contenuto in K.

Un'applicazione $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice *affine* se $f(x_0 + t(x_1 - x_0)) = f(x_0) + t(f(x_1) - f(x_0))$ per ogni $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^m$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Proposizione 3.1 *Immagini dirette e inverse di convessi mediante applicazioni affini sono convesse.*

Sia K un intorno convesso di 0 in $\mathbb{R}^n$. La *funzione di Minkowski* di K è la funzione

$$(3.1)\qquad q_K(x) = \inf\{t > 0 \,|\, t^{-1}x \in K\}\,.$$

Proposizione 3.2 *Se K è un intorno convesso dell'origine di $\mathbb{R}^n$, la funzione di Minkowski $q_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua, positiva su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e gode delle proprietà:*

$$\begin{cases} q_K(tx) = t\, q_K(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t > 0 & \text{(positiva omogeneità)} \\ q_K(x+y) \le q_K(x) + q_K(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n & \text{(subattività)}\,. \end{cases}$$

Dim. La positiva omogeneità segue immediatamente dalla definizione. Dimostriamo la subattività: siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ e siano $s > 0$, $t > 0$ tali che $s^{-1}x$, $t^{-1}y \in K$. Poiché K è convesso, posto $\lambda = \frac{s^{-1}}{s^{-1}+t^{-1}}$, abbiamo $s^{-1}x + \lambda(t^{-1}y - s^{-1}x) = \frac{1}{(s+t)^{-1}}(x+y) \in K$, onde $q_K(x+y) \le s+t$, e la subadditività si ottiene passando all'estremo inferiore a secondo membro.

Poiché 0 è un punto interno di K, avremo $\overline{B(0,r)} \subset K$ per qualche $r > 0$. Questa relazione ci dà

$$q_K(x) \le \frac{1}{r}|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Infatti abbiamo $\frac{r}{|x|}x \in K$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Per la subadditività otteniamo allora

$$|q_K(x) - q_K(y)| \le \frac{1}{r}|x-y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

e quindi la q_K è continua.

Teorema 3.3 *Due qualsiasi insiemi convessi e compatti con parte interna non vuota di $\mathbb{R}^n$ sono omeomorfi tra loro. Ogni omeomorfismo tra le loro frontiere si estende a un omeomorfismo tra i due convessi.*

Dim. Siano K e K' due convessi compatti con parte interna non vuota. A meno di una traslazione possiamo supporre che 0 sia un punto interno di $K \cap K'$. La funzione

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \to \frac{q_k(x)}{q_{K'}(x)} \in \mathbb{R}$$

è continua e positivamente omogenea di grado 0. Ammette pertanto massimo e minimo in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Ne segue che la

$$g(x) = \begin{cases} \frac{q_k(x)}{q_{K'}(x)} \cdot x & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

è un omeomorfismo di K su K'.

Osserviamo infine che se K è un convesso compatto con $0 \in \overset{\circ}{K}$, allora il quoziente iniettivo dell'applicazione continua $bK \times \mathbf{I} \ni (x,t) \to tx \in K$ definisce un omeomorfismo di $(bK \times \mathbf{I}) \big/ (bK \times \{0\})$ su K. Se $\phi : bK \to bK'$ è un omeomorfismo tra le frontiere di due convessi compatti che contengono 0 come punto interno, l'omeomorfismo $bK \times \mathbf{I} \xrightarrow{\phi \times \mathrm{id}_{\mathbf{I}}} bK' \times \mathbf{I}$ induce per passaggio al quoziente un omeomorfismo $K \to K'$ che estende $\phi : bK \to bK'$.

In particolare ogni convesso compatto con parte interna non vuota di $\mathbb{R}^n$ è omeomorfo a $\mathbf{D}^n$ e ha frontiera omeomorfa a $\mathbf{S}^{n-1}$.

§4 Fibrati di Serre

Un *fibrato topologico* $E \xrightarrow{p} B$ è il dato di due spazi topologici E, B e di un'applicazione continua $p : E \to B$.

Chiamiamo E lo *spazio totale*, B la *base* e p la proiezione sulla base del fibrato $E \xrightarrow{p} B$.

Una *sezione continua* del fibrato $E \xrightarrow{p} B$ su un aperto U di B è un'applicazione continua $s : U \to E$ tale che $p \circ s(b) = b$ per ogni $b \in U$. Indichiamo con $\Gamma(U, E)$ l'insieme delle sezioni continue di E su U.

Sia $E \xrightarrow{p} B$ un fibrato; sia Y uno spazio topologico e sia $\phi : Y \to B$ un'applicazione continua. Diciamo che $f : Y \to E$ è un *rilevamento* di ϕ se è continua e $p \circ f = \phi$.

Un fibrato topologico $E \xrightarrow{p} B$ è un *fibrato di Serre* se per ogni intero $n \geq 0$ ed ogni coppia di applicazioni continue

$$f : \mathbf{I}^n \to E \text{ ed } F : \mathbf{I}^n \times \mathbf{I} \to B \text{ tali che } F(y, 0) = p(f(y)) \text{ per ogni } y \in \mathbf{I}^n$$

esiste un'applicazione continua

$$\tilde{F} : \mathbf{I}^n \times \mathbf{I} \to E \text{ tale che } \begin{cases} \tilde{F}(y, 0) = f(y) & \text{per ogni } y \in \mathbf{I}^n \\ p(F(y, t)) = F(y, t) & \text{per ogni } y \in \mathbf{I}^n \text{ e } t \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

Lemma 4.1 *Supponiamo che $E \xrightarrow{p} B$ sia un fibrato di Serre. Fissiamo un punto $\xi_0 \in E$ e sia $b_0 = p(\xi_0) \in B$. Sia n un intero non negativo. Per ogni $\phi \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, 0; B, b_0)$ esiste una $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, 0; E, \xi_0)$ tale che $\phi = p \circ f$.*

Dim. Ragioniamo per ricorrenza su n. Per $n = 0$ la tesi segue dalla definizione di fibrazione di Serre. Supponiamo ora che m sia un intero positivo e che la tesi sia vera per $n = m - 1$. In particolare c'è un'applicazione $g \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^{m-1}, 0; E, \xi_0)$ tale che $p(g(s_1, ..., s_{m-1})) = \phi(s_1, ..., s_{m-1}, 0)$, $g(0, \dots, 0) = \xi_0$. Per definizione di fribrato di Serre esisterà allora una $f : \mathbf{I}^{m-1} \times \mathbf{I} = \mathbf{I}^m \to E$ con $f(s_1, \dots, s_{m-1}, 0) = g(s_1, \dots, s_{m-1})$ e $p \circ f = \phi$. Tale f soddisfa la tesi del lemma.

Lemma 4.2 *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un fibrato di Serre e siano $\xi_0 \in E$, $b_0 = p(\xi_0)$. Se $f, g \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, 0; E, \xi_0)$ e $p \circ f = p \circ g = \phi \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, 0; B, b_0)$, allora f e g sono $\{0\}$-omotope in un'omotopia $F : \mathbf{I}^n \times \mathbf{I} \to E$ tale che $p \circ F(s; t) = \phi(s)$ per ogni $(s, t) \in \mathbf{I}^n \times \mathbf{I}$.*

Dim. Il caso $n = 0$ è banale. Possiamo quindi ragionare per ricorrenza, supponendo che $n > 0$ e la tesi sia vera per applicazioni di $\mathcal{C}(\mathbf{I}^{n-1}, 0; E, \xi_0)$. In particolare possiamo supporre che esista $G : \mathbf{I}^{n-1} \times \mathbf{I} \to E$ continua tale che $G(0; t) = \xi_0$ per ogni $t \in \mathbf{I}$ e $G(s_1, \dots, s_{n-1}; 0) = f(s_1, \dots, s_{n-1}, 0)$, $G(s_1, \dots, s_{n-1}; 1) = g(s_1, \dots, s_{n-1}, 0)$, $p \circ G(s_1, \dots, s_{n-1}; t) = \phi(s_1, \dots, s_{n-1}; 0)$.

Definiamo un'applicazione continua $h : \overline{b\mathbf{I}^{n+1} \setminus \{s_n = 1\}} \to E$ mediante:

$$h(s_1, \dots, s_n; t) = \begin{cases} f(s_1, \dots, s_n) & \text{se} \quad t = 0 \\ g(s_1, \dots, s_n) & \text{se} \quad t = 1 \\ G(s_1, \dots, s_{n-1}; t) & \text{se} \quad s_n = 0\,. \end{cases}$$

Definiamo $\tilde{\phi}(s;t) = \phi(s)$ per ogni $(s,t) \in \mathbf{I}^n \times \mathbf{I}$. Sia $\psi : \mathbf{I}^{n+1} \to \mathbf{I}^{n+1}$ un omeomorfismo di $\mathbf{I}^{n+1}$ in sè che trasformi $\overline{b\mathbf{I}^{n+1} \setminus \{s_n = 1\}}$ in $b\mathbf{I}^{n+1} \cap \{t = 0\}$. Per la definizione di fibrato di Serre possiamo estendere $h \circ \psi^{-1}$ a un'applicazione continua $\tilde{h} \circ \psi^{-1} : \mathbf{I}^{n+1} \to E$ tale che $p \circ \tilde{h} \circ \psi^{-1}(s;t) = \tilde{\phi} \circ \psi^{-1}(s;t)$ per ogni $(s,t) \in \mathbf{I}^n \times \mathbf{I}$. La $\tilde{h}$ definisce allora l'omotopia cercata.

Teorema 4.3 *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un fibrato di Serre. Fissiamo un intero $n \geq 0$ e siano $\phi \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^{n+1}, B)$, $f_0, f_1 \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^{n+1}, E)$ tali che*

$$\begin{cases} p \circ f_0 = p \circ f_1 = \phi \\ f_0(s', 0) = f_1(s', 0) \quad \forall s' \in \mathbf{I}^n . \end{cases}$$

Allora esiste un'applicazione continua $F : \mathbf{I}^{n+1} \times \mathbf{I} \to E$ tale che $p \circ F(s,t) = \phi(s)$ per ogni $(s,t) \in \mathbf{I}^{n+1} \times \mathbf{I}$ e $F(s', 0, t) = f_0(s', 0) = f_1(s', 0)$ per ogni $s' \in \mathbf{I}^n$.

Dim. La F cercata è il rialzamento di $\mathbf{I}^{n+2} \ni (s,t) \to \phi(s) \in B$ tale che

$$\begin{cases} F(s', 0, t) = f_0(s', 0) = f_1(s', 0) & \forall s' \in \mathbf{I}^n, \quad \forall t \in \mathbf{I} \\ F(s, 0) = f_0(s) & \forall s \in \mathbf{I}^{n+1} \\ F(s, 1) = f_1(s) & \forall s \in \mathbf{I}^{n+1}. \end{cases}$$

§5 Fibrati localmente banali

Siano E, B spazi topologici e sia $p : E \to B$ un'applicazione continua. Sia F uno spazio topologico. Diciamo $E \xrightarrow{p} B$ è un *fibrato localmente banale* con fibra F se per ogni punto $x \in B$ esiste un intorno aperto U di x in B e un omeomorfismo $\phi : U \times F \to E\big|_U$ che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} U \times F \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_U"'] & E\big|_U \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, equal] & U . \end{tikzcd}$$

Vale il seguente:

Teorema 5.1 *Ogni fibrato localmente banale è un fibrato di Serre.*

La dimostrazione si basa sul seguente criterio:

Lemma 5.2 *Siano E, B spazi topologici e sia $p : E \to B$ continua. Condizione necessaria e sufficiente affinché $E \xrightarrow{p} B$ sia un fibrato di Serre è che per ogni $x \in B$ vi sia un intorno U di x in B tale che $p^{-1}(U) \xrightarrow{p|_{p^{-1}(U)}} U$ sia un fibrato di Serre.*

Dim. La condizione è chiaramente necessaria. Dimostriamo la sufficienza. Siano $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, E)$ e $F \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^{n+1}, B)$ tali che $p \circ f(s) = F(s, 0)$ per $s \in \mathbf{I}^n$. Poiché $F(\mathbf{I}^{n+1})$ è un compatto di B, possiamo ricoprirlo con un numero finito di aperti $U_1, \ldots, U_\ell$ di B tali che $p^{-1}(U_j) \xrightarrow{p|_{p^{-1}(U_j)}} U_j$ sia un fibrato di Serre per ogni $j = 1, \ldots, \ell$. A questo punto suddividiamo il cubo $\mathbf{I}^{n+1}$ in cubi $Q_1, \ldots, Q_k$, di lato $1/N$, con $k = N^{n+1}$, in modo tale che $Q_r \subset U_{j_r}$ con $1 \leq j_r \leq \ell$ per $1 \leq r \leq k$. Ordiniamo i cubi Q_r in modo che i loro centri siano in ordine lessicografico. (Cioè: $Q_1 = \{0 \le s_i \le 1/N \text{ per } 1 \le i \le n+1\}$, $Q_2 = \{1/N \le s_1 \le 2/N, \text{ e } 0 \le s_i \le 1/N \text{ per } 2 \le i \le n+1\}$, $\ldots$) Possiamo allora procedere alla costruzione di $\tilde{F}$ per ricorrenza su $\bigcup_{r\le h} Q_r$, definendo la $\tilde{F}$ su Q_h in modo che $p\circ\tilde{F} = F$ su Q_h e coincida con l'applicazione già definita su $\bigcup_{r<h} Q_r$ sull'intersezione $\left(\bigcup_{r<h} Q_r\right)\cap Q_h$, utilizzando l'omeomorfismo tra le coppie topologiche $(\mathbf{I}^{n+1},\mathbf{I}^n)$ e $(Q_h, \left(\bigcup_{r<h} Q_r\right)\cap Q_h)$.

Dimostrazione del teorema

Basta dimostrare che un fibrato banale $B\times F \xrightarrow{p} B$, ove $p(b,\tau) = b$ per ogni $(b,\tau)\in B\times F$ è di Serre. Date $f : \mathbf{I}^n \ni s \to (\phi(s),\psi(s)) \in B\times F$ e $\Phi : \mathbf{I}^n\times\mathbf{I} \ni (s,t)\to \Phi(s,t)\in B$ con $\Phi(s;0) = \phi(s)$, rialziamo Φ ponendo $\tilde{\Phi}(s;t) = (\Phi(s,t),\psi(s))$ per ogni $(s,t)\in\mathbf{I}^n\times\mathbf{I}$. Chiaramente $\tilde{\Phi}$ è continua e $p\circ\tilde{\Phi} = \Phi$.

§6 Successione esatta di omotopia di un fibrato di Serre

a. Successioni esatte

Sia $\{A_k\}_{k=0,1,\ldots}$ una successione di insiemi non vuoti, su ciascuno dei quali sia fissato un *punto base* $a_0^k \in A_k$. Una sequenza di applicazioni:

$$(6.1)\qquad \begin{array}{l} \cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-2} \longrightarrow \cdots \\ \qquad\qquad \cdots \longrightarrow A_2 \xrightarrow{f_2} A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \end{array}$$

si dice un *complesso di insiemi puntati* se

$$(6.2)\qquad f_n(A_n)\subset f_{n_1}^{-1}(a_0^{n-1}) \qquad \forall n\ge 1\,.$$

La (6.1) è una *successione esatta di insiemi puntati* se

$$(6.3)\qquad f_n(A_n) = f_{n_1}^{-1}(a_0^{n-1}) \qquad \forall n\ge 1\,.$$

Se gli A_k hanno ciascuno una struttura di gruppo, con identità a_0^k, e se le f_n $(n\ge 1)$ sono omomorfismi di gruppi, diremo che (6.1) è un *complesso* o una *successione esatta di gruppi.*

b. Definizione dell'applicazione Δ

Sia $\phi\in\mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; B, b_0)$. Possiamo allora trovare una $f\in\mathcal{C}(\mathbf{I}^n, E)$ tale che $f(s) = \xi_0$ su $\{s\in b\mathbf{I}^n \mid 0 < s_n \le 1\}\cup\{(s',0)\mid s'\in b\mathbf{I}^{n-1}\}$. Poiché $\phi(b\mathbf{I}^n) = \{b_0\}$, $f(s',0)\in F$ per ogni $s'\in\mathbf{I}^{n-1}$. Perciò la restrizione di f a $\mathbf{I}^{n-1}\simeq\{s\in\mathbf{I}^n\mid s_n = 0\}$ definisce un elemento di $\mathcal{C}(\mathbf{I}^{n-1}, b\mathbf{I}^{n-1}; F, \xi_0)$ e quindi una classe di omotopia $[f|_{\mathbf{I}^{n-1}}]$ in $\pi_{n-1}(F,\xi_0)$.

c.

Teorema 6.1 *Sia $E\xrightarrow{p} B$ un fibrato di Serre. Allora la successione:*

$$(6.4)\qquad \begin{array}{lllllll} \cdots \longrightarrow & \pi_{n+1}(F,\xi_0) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_{n+1}(E,\xi_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi_{n+1}(B,b_0) \\ \xrightarrow{\Delta} & \pi_n(F,\xi_0) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_n(E,\xi_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(B,b_0) \\ \cdots \longrightarrow & \cdots & & \cdots & \longrightarrow & \pi_2(B,b_0) \\ \xrightarrow{\Delta} & \pi_1(F,\xi_0) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_1(E,\xi_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi_1(B,b_0) \\ \xrightarrow{\Delta} & \pi_0(F,\xi_0) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_0(E,\xi_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi_0(B,b_0) \end{array}$$

è una successione esatta di insiemi puntati. Per $n \geq 1$ le applicazioni $\pi_n(F, \xi_0) \xrightarrow{\iota_*} \pi_n(E, \xi_0)$, $\pi_n(E, \xi_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0)$ e $\pi_{n+1}(B, b_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_n(F, \xi_0)$ sono omomorfismi di gruppi.

Dim. Il fatto che (6.4) sia un complesso di insiemi puntati e che p_*, ι_*, Δ siano omomorfismi di gruppi quando i due insiemi tra cui agiscono hanno una struttura di gruppo, sono facili conseguenze delle definizioni. Dimostriamo l'esattezza.

Esattezza in $\pi_n(F, \xi_0)$.

Sia $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; F, \xi_0)$, e supponiamo che $\iota_*([f]) = 0$. Ciò significa che esiste un'applicazione continua $F : \mathbf{I}^n \times \mathbf{I} \to E$ tale che

$$\begin{cases} F(s,0) = f(s) & \forall s \in \mathbf{I}^n \\ F(s,t) = \xi_0 & \forall (s,t) \in (b\mathbf{I}^n) \times \mathbf{I} \\ F(s,1) = \xi_0 & \forall s \in \mathbf{I}^n \,. \end{cases}$$

Sia $\phi = p \circ F$. Allora $\phi \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; B, b_0)$ e segue dalla definizione che $[f] = \Delta([\phi])$.

Esattezza in $\pi_n(E, \xi_0)$

Sia $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; E, \xi_0)$. Supponiamo che $p_*([f]) = 0$. Ciò significa che esiste una $F : \mathbf{I}^n \times \mathbf{I}^n \to B$ continua tale che

$$\begin{cases} F(s,0) = p \circ f(s) & \forall s \in \mathbf{I}^n \\ F(s,t) = b_0 & \forall (s,t) \in (b\mathbf{I}^n) \times \mathbf{I} \\ F(s,1) = b_0 & \forall s \in \mathbf{I}^n \,. \end{cases}$$

Possiamo allora rialzare F a una $\tilde{F} : \mathbf{I}^n \times \mathbf{I} \to E$ continua con le proprietà:

$$\begin{cases} \tilde{F}(s,0) = f(s) & \forall s \in \mathbf{I}^n \\ \tilde{F}(s,t) = xi_0 & \forall (s,t) \in (b\mathbf{I}^n) \times \mathbf{I} \\ p \circ \tilde{F}(s,t) = F(s,t) & \forall (s,t) \in \mathbf{I}^n \times \mathbf{I} \,. \end{cases}$$

Allora la $g : \mathbf{I}^n \ni s \to \tilde{F}(s,1) \in F$ appartiene a $\mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; F, \xi_0)$ e $\iota_*([g]) = [f]$.

Esattezza in $\pi_n(B, b_0)$

Sia $\phi \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; B, b_0)$ e sia $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; E, \xi_0)$ tale che

$$\begin{cases} f(s', s_n) = \xi_0 & \forall s = (s', s_n) \in (b\mathbf{I}^{n-1}) \times \mathbf{I} \\ f(s', 1) = \xi_0 & \forall s' \in \mathbf{I}^{n-1} \\ p \circ f(s) = \phi(s) & \forall s \in \mathbf{I}^n \,. \end{cases}$$

Supponiamo $\Delta([\phi]) = 0$. Allora esiste un'applicazione continua $\Phi : \mathbf{I}^{n-1} \times \mathbf{I} \to F$ con le proprietà:

$$\begin{cases} \Phi(s', 1) = f(s', 0) & \forall s' \in \mathbf{I}^{n-1} \\ \Phi(s', t) = \xi_0 & \forall s' \in b\mathbf{I}^{n-1} \\ \Phi(s', 0) = \xi_0 & \forall s' \in \mathbf{I}^{n-1} \,. \end{cases}$$

Definiamo $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I}^n, b\mathbf{I}^n; E, \xi_0)$ ponendo:

$$f(s) = \begin{cases} \Phi(s', 2s_n) & \text{se} \quad 0 \leq s_n \leq \frac{1}{2} \\ f(s', 2s_n - 1) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leq s_n \leq 1 \,. \end{cases}$$

Osserviamo che

$$p \circ f(s) = \begin{cases} b_0 & \text{se} \quad 0 \leq s_n \leq \frac{1}{2} \\ \phi(s', 2s_n - 1) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leq s_n \leq 1\,. \end{cases}$$

Quindi $p_*([f]) = [p \circ f] = [\hat{b}_0 \cdot \phi] = [\hat{b}_0] \cdot [\phi] = [\phi]$. La dimostrazione è completa.

Un fibrato topologico localmente banale con fibra discreta si dice un *rivestimento*.

COROLLARIO 6.2 *Se $E \xrightarrow{p} B$ è un rivestimento, $\xi_0 \in E$ e $b_0 = p(\xi_0)$, allora $\pi_n(E, \xi_0) \simeq \pi_n(B, b_0)$ per ogni $n \geq 2$, e per $n = 1$ abbiamo la successione esatta di insiemi puntati:*

$$0 \longrightarrow \pi(E, \xi_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \longrightarrow \pi_0(F, \xi_0) \longrightarrow 0\,. \tag{6.5}$$

Abbiamo indicato con 0 l'insieme (o il gruppo) che contengono un solo elemento.

§7 Esempi

Gruppi di omotopia delle sfere

Sappiamo dai risultati dei parabrafi precedenti che:

$$\pi_n(\mathbf{S}^m, e_0) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n \leq m - 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se} \quad n = m\,. \end{cases} \tag{7.1}$$

In generale i gruppi $\pi_m(\mathbf{S}^m, e_0)$ non sono banali se $n > m$.

Il problema di calcolare *tutti* i gruppi di omotopia di ordine $> m$ della sfera $\mathbf{S}^m$, per un m arbitrario, non è ancora completamente risolto. Sono stati calcolati tutti i gruppi $\pi_n(\mathbf{S}^m, e_0)$ per $n \leq n + 23$. Qui ci limitiamo a fornire una lista di risultati sui gruppi di omotopia delle sfere di dimensione ≤ 4. Abbiamo:

$$\pi_n(\mathbf{S}^1, e_0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se} \quad n = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{7.2}$$

$$\pi_n(\mathbf{S}^2, e_0) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n \leq 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se} \quad n = 2 \\ \mathbb{Z} & \text{se} \quad n = 3 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se} \quad n = 4 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se} \quad n = 5 \\ \mathbb{Z}_{12} & \text{se} \quad n = 6 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se} \quad n = 7 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se} \quad n = 8 \\ \mathbb{Z}_3 & \text{se} \quad n = 9 \\ \dots & \dots \end{cases} \tag{7.3}$$

$$\pi_n(\mathbf{S}^3, e_0) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n \leq 2 \\ \pi_n(\mathbf{S}^2, e_0) & \text{se} \quad n \geq 3\,. \end{cases} \tag{7.4}$$

L'uguaglianza segue qui dalla *fibrazione di Hopf*: infatti $\mathbf{S}^2$ è omeomorfo alla retta proiettiva complessa $\mathbb{CP}^1$. Allora l'applicazione naturale

$$\mathbf{S}^3 \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \ni z \to [z] \in \mathbb{CP}^1$$

definisce un fibrato localmente banale $\mathbf{S}^3 \xrightarrow{p} \mathbf{S}^2$ con fibra $\mathbf{S}^1$. Dalla successione esatta del fibrato:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(\mathbf{S}^1, e_0) \\ \longrightarrow & \pi_n(\mathbf{S}^2, e_0) & \longrightarrow & \pi_n(\mathbf{S}^3, e_0) & \longrightarrow & & \pi_n(\mathbf{S}^1, e_0) \\ \longrightarrow & \cdots & & & & & \end{array}$$

otteniamo che $\pi_n(\mathbf{S}^3, e_0) \simeq \pi_n(\mathbf{S}^2, e_0)$ per ogni $n \geq 2$.

Ancora, abbiamo:

$$\pi(\mathbf{S}^4, e_0) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n \leq 3 \\ \mathbb{Z} & \text{se} \quad n = 4 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se} \quad n = 5 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se} \quad n = 6 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12} & \text{se} \quad n = 7 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{se} \quad n = 8 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{se} \quad n = 9 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{24} & \text{se} \quad n = 10 \\ \mathbb{Z}_{15} & \text{se} \quad n = 11 \\ \cdots & \cdots \end{cases} \tag{7.5}$$

Gruppi di omotopia degli spazi proiettivi reali

Abbiamo per lo spazio proiettivo reale di dimensione 1:

$$\pi_n(\mathbb{RP}^1, b) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se} \quad n = 1 \\ 0 & \text{se} \quad n \neq 1 \end{cases} \tag{7.6}$$

e per lo spazio proiettivo reale di dimensione $n > 1$:

$$\pi_n(\mathbb{RP}^m, b) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{se} \quad n = 1 \\ 0 & \text{se} \quad 1 < n < m \\ \mathbb{Z} & \text{se} \quad n = m \\ \pi_n(\mathbf{S}^m, e_0) & \text{se} \quad n \geq 2\,. \end{cases} \tag{7.7}$$

Gruppi di omotopia degli spazi proiettivi complessi

L'applicazione $p : \mathbf{S}^{2m+1} \ni z \to [z] \in \mathbb{CP}^m$ è, per ogni $m \geq 1$, un fibrato topologico localmente banale con fibra $\mathbf{S}^1$. Dalla successione esatta di un fibrato ricaviamo allora:

$$\pi_n(\mathbb{CP}^m, b) \simeq \pi_n(\mathbf{S}^{2m+1}, e_0) \quad \forall n \geq 3\,. \tag{7.8}$$

Abbiamo poi la successione esatta:

$$
\begin{array}{lccccc}
(7.9) & & 0 \simeq \pi_2(\mathbf{S}^{2m+1}, e_0) \longrightarrow & \pi_2(\mathbb{CP}^m, b) \longrightarrow & \mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbf{S}^1, e_0) \\
& \longrightarrow & 0 \simeq \pi_1(\mathbf{S}^{2m+1}, e_0) \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{CP}^m, b) \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

e quindi:

$$
(7.10) \qquad \begin{cases} \pi_1(\mathbb{CP}^m, b) = 0 \\ \pi_2(\mathbb{CP}^m, b) \simeq \mathbb{Z}\,. \end{cases}
$$

Gruppi di omotopia dei gruppi classici

I gruppi classici connessi sono prodotti topologici di fattori compatti, omeomorfi ai gruppi compatti $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$, e di fattori non compatti, omeomorfi a spazi Euclidei. Sarà sufficiente quindi considerare i gruppi di omotopia dei gruppi compatti.

Il gruppo $\mathbf{SO}(n)$.

Abbiamo già osservato che valgono gli omeomorfismi:

$$
\begin{cases} \mathbf{SO}(2) \simeq \mathbf{S}^1 \\ \mathbf{SO}(3) \simeq \mathbb{RP}^3 \\ \mathbf{SO}(4) \simeq \mathbf{S}^3 \times \mathbb{RP}^3\,. \end{cases}
$$

Abbiamo quindi:

$$
\pi_n(\mathbf{SO}(2), e) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se} \quad n = 1 \\ 0 & \text{se} \quad n \neq 1\,. \end{cases}
$$

$$
\pi_n(\mathbf{SO}(3), e) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{se} \quad n = 1 \\ 0 & \text{se} \quad n = 2 \\ \mathbb{Z} & \text{se} \quad n = 3 \\ \pi_n(\mathbf{S}^3, e_0) & \text{se} \quad n > 3 \end{cases}
$$

$$
\pi_n(\mathbf{SO}(4), e) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{se} \quad n = 1 \\ 0 & \text{se} \quad n = 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se} \quad n = 3 \\ \pi_n(\mathbf{S}^3, e_0) \oplus \pi_n(\mathbf{S}^3, e_0) & \text{se} \quad n > 3\,. \end{cases}
$$

Se $n \geq 5$ l'applicazione:

$$
\mathbf{SO}(n) \ni g \to g(e_0) \in \mathbf{S}^{n-1}
$$

definisce un fibrato localmente banale con fibra omeomorfa a $\mathbf{SO}(n-1)$. Abbiamo quindi la successione esatta:

$$
\begin{array}{lccccc}
& & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{m+1}(\mathbf{S}^{n-1}, e_0) \\
(7.11) & \longrightarrow & \pi_m(\mathbf{SO}(n-1), e) & \longrightarrow \pi_m(\mathbf{SO}(n), e) & \longrightarrow & \pi_m(\mathbf{S}^{n-1}, e_0) \\
& \longrightarrow & \cdots & & &
\end{array}
$$

In particolare, poiché $\pi_m(\mathbf{S}^{n-1}, e_0) = 0$ se $m < n-1$ e $\pi_m(\mathbf{S}^{n-1}, e_0) \simeq \mathbb{Z}$ se $m = n-1$, otteniamo:

$$\pi_m(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_m(\mathbf{SO}(n-1), e) \quad \text{se} \quad m < n-2 \tag{7.12}$$

e un omomorfismo surgettivo:

$$\pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n-1)) \to \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n)) \to 0 \qquad \text{per} \quad n \geq 5\,. \tag{7.13}$$

In particolare

$$\pi_1(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_1(\mathbf{SO}(3), e) \simeq \mathbb{Z}_2 \quad \forall n \geq 3\,, \tag{7.14}$$

$$\pi_2(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_2(\mathbf{SO}(4), e) \simeq 0 \quad \forall n \geq 2\,. \tag{7.15}$$

Consideriamo il caso $n = 5$, $m = 3$. Abbiamo allora:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \simeq \pi_4(\mathbf{S}^4, e_0) \\ \longrightarrow \pi_3(\mathbf{SO}(4), e) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_3(\mathbf{SO}(5), e) \longrightarrow 0 \simeq \pi_3(\mathbf{S}^4, e_0) \\ \longrightarrow \quad \cdots \end{array}$$

e quindi $\pi_3(\mathbf{SO}(n), e)$ è, per ogni $n \geq 5$, un quoziente di $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ rispetto a un sottogruppo abeliano libero.

Gruppi di omotopia di $\mathbf{SU}(m)$

Il gruppo $\mathbf{SU}(2)$ è omeomorfo a $\mathbf{S}^3$. Per $m \geq 3$, l'applicazione

$$\mathbf{SU}(m) \ni g \to g(e_0) \in \mathbf{S}^{2m-1} \tag{7.16}$$

definisce un fibrato localmente banale con fibra omeomorfa s $\mathbf{SU}(m-1)$. Otteniamo quindi la successione esatta:

(7.17)

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(\mathbf{S}^{2m-1}, e_0) \\ \longrightarrow \pi_n(\mathbf{SU}(m-1), e) \longrightarrow \pi_n(\mathbf{SU}(m), e) \longrightarrow \pi_n(\mathbf{S}^{2m-1}, e_0) \\ \longrightarrow \quad \cdots \end{array}$$

da cui ricaviamo che:

$$\pi_n(\mathbf{SU}(m), e) \simeq \pi_n(\mathbf{SU}(m-1), e) \quad \text{se} \quad n < 2m-1 \tag{7.18}$$

e l'omomorfismo $\pi_n(\mathbf{SU}(m-1), e) \to \pi_n(\mathbf{SU}(m), e)$ è surgettivo per $n = 2m-1$. Abbiamo quindi per $m \geq 2$:

$$\begin{cases} \pi_1(\mathbf{SU}(m), e) = 0 \\ \pi_2(\mathbf{SU}(m), e) = 0 \\ \pi_3(\mathbf{SU}(m), e) = \mathbb{Z} \\ \pi_4(\mathbf{SU}(m), e) = \mathbb{Z}_2 \end{cases} \tag{7.19}$$

Gruppi di omotopia di $\mathbf{Sp}(m)$

Abbiamo $\mathbf{Sp}(1) \simeq \mathbf{S}^3$. L'applicazione:

$$\mathbf{Sp}(m) \ni g \to g(e_0) \in \mathbf{S}^{4m-1} \tag{7.20}$$

definisce un fibrato localmente banale con fibra $\mathbf{Sp}(m-1)$. Otteniamo perciò una successione esatta:

$$\begin{array}{lccccccc} & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(\mathbf{S}^{4m-1}, e_0) \\ (7.21) & \longrightarrow & \pi_n(\mathbf{Sp}(m-1), e) & \longrightarrow & \pi_n(\mathbf{Sp}(m), e) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(\mathbf{S}^{4m-1}, e_0) \\ & \longrightarrow & \cdots & & & & \end{array}$$

Quindi:

$$\pi_n(\mathbf{Sp}(m), e) \simeq \pi_n(\mathbf{Sp}(m-1), e) \quad \text{se} \quad n \leq 4m-3. \tag{7.22}$$

In particolare

$$\pi_n(\mathbf{Sp}(m), e) \simeq \pi_n(\mathbf{S}^3, e_0) \quad \text{se} \quad n \leq 5\,. \tag{7.23}$$

§8 Rivestimenti

In questo paragrafo tutti gli spazi topologici che considereremo saranno di Hausdorff, connessi e localmente connessi per archi.

Chiamiamo *rivestimento in senso stretto* un fibrato topologico localmente banale $E \xrightarrow{p} B$ in cui E e B sono spazi di Hausdorff connessi e localmente connessi per archi, con fibre discrete.

Nel seguito useremo la parola *rivestimento* al posto della locuzione *rivestimento in senso stretto.*

Osserviamo che la cardinalità delle fibre $E_b = p^{-1}(b)$ di un rivestimento è localmente costante e quindi costante: essa si dice il *numero di fogli del rivestimento.*

Esempio 1

L'applicazione $\mathbf{S}^1 \ni z \to z^n \in \mathbf{S}^1$ è un rivestimento a n fogli.

L'applicazione $\mathbb{R} \ni t \to e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t) \in \mathbf{S}^1$ è un rivestimento a un'infinità numerabile di fogli.

Esempio 2

L'applicazione $\mathbf{S}^n \ni x \to [x] \in \mathbb{RP}^n$ è un rivestimento a due fogli.

Esempio 3

Consideriamo la relazione di equivalenza $\sim$ su $\mathbb{R}^2$ generata dalle $(x, y) \sim (x, y+1)$ e $(x, y) \sim (x+1, -y)$. La proiezione nel quoziente $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$ è un rivestimento a infiniti fogli. (Il quoziente $\mathbb{R}^2/\sim$ è la *bottiglia di Klein.*)

Esempio 4

Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio a coefficienti complessi di grado $m \geq 1$ e sia K l'insieme dei valori critici di $\mathbb{C} \ni z \to p(z) \in \mathbb{C}$. Allora $\mathbb{C} \setminus p^{-1}(K) \to \mathbb{C} \setminus K$ è un rivestimento a m fogli.

Teorema 8.1 (Rialzamento dei cammini) *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento e sia $s : \mathbf{I} \to B$ un arco. Sia $\xi_0 \in E$ con $p(\xi_0) = s(0)$. Esiste un'unico arco $\tilde{s} : \mathbf{I} \to E$ tale che*

$$p \circ \tilde{s}(t) = t \quad \forall t \in \mathbf{I} \qquad e \qquad \tilde{s}(0) = \xi_0 \,.$$

Dim. Sia $\{U_i \,|\, i \in I\}$ un ricoprimento aperto di B mediante aperti di trivializzazione connessi, con omeomorfismi di trivializzazione $\phi_i : U_i \times F \to p^{-1}(U_i)$. Poniamo $\phi_i^{-1}(\xi) = (p(\xi), f_i(\xi))$ con $f_i(\xi) \in F$. Possiamo trovare una partizione $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = 1$ tale che $s([t_{j-1}, t_j]) \subset U_{i_j}$ per $j = 1, ..., k$. Definiamo allora per ricorrenza:

$$\tilde{s}(t) = \begin{cases} \phi_{i_1}(s(t), \xi_0) & \text{per} \quad 0 \le t \le t_1 \\ \phi_{i_j}(s(t), f_{i_j}(\tilde{s}(t_{j-1}))) & \text{se} \quad 2 \le j \le k \quad \text{e} \quad t_{j-1} \le t \le t_j \,. \end{cases}$$

Allora la $\tilde{s} : \mathbf{I} \to E$ cosí definita è un arco che rialza s (cioè $p \circ \tilde{s} = s$) e $\tilde{s}(0) = \xi_0$. Per dimostrare l'unicità, osserviamo che per ogni $j = 1, ..., k$ l'immagine della $[t_{j-1}, t_j] \ni t \to \tilde{s}(t) \in E$ è contenuta nella componente connessa $\phi_{i_j}\big(U_{i_j} \times fi_j(\tilde{s}(t_{j-1}))\big)$ di $p^{-1}(U_{i_j})$, su cui p definisce un omeomorfismo con U_{i_j} e quindi $\tilde{s}$ è univocamente determinata su $[t_{j-1}, t_j]$.

Teorema 8.2 (Rialzamento dell'omotopia) *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento. Sia X uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi e siano $f : X \to E$ e $\Phi : X \times \mathbf{I} \to B$ due applicazioni continue tali che $p \circ f(x) = \Phi(x, 0)$ per ogni $x \in X$. Allora esiste un'unica applicazione continua $F : X \times \mathbf{I} \to E$ tale che $F(x, 0) = f(x)$ e $p \circ F = \Phi$.*

Dim. Per ogni $x \in X$ sia $\mathbf{I} \ni t \to F(x, t) \in E$ il cammino continuo di punto iniziale $f(x)$ che rialza $\mathbf{I} \ni t \to \Phi(x, t) \in B$. In questo modo risulta univocamente determinata un'applicazione $X \times \mathbf{I} \ni (x, t) \to F(x, t) \in E$ tale che $F(x, 0) = f(x)$, $p \circ F = \Phi$ e continua rispetto alla variabile $t \in \mathbf{I}$ per ogni x fissato. Per dimostrare che F è continua, fissato $(x_0, t_0) \in X \times \mathbf{I}$, siano $b_0 = \Phi(x_0, t_0)$ e $\xi_0 = F(x_0, t_0)$. Sia U un intorno di b_0 di trivializzazione per $E \xrightarrow{p} B$; sia $F = E_{b_0} = p^{-1}(b_0)$ e sia $\psi : U \times F \to p^{-1}(U)$ un omeomorfismo di trivializzazione. Fissiamo un intorno aperto connesso A di x_0 in X e un interallo aperto J di $\mathbf{I}$ contenente t_0 tali che $\Phi(A \times J) \subset U$. Poiché ogni punto di $A \times J$ può essere congiunto a (x_0, t_0) da un arco in $A \times J$, per l'unicità del rialzamento di cammini $F(A \times J)$ è tutto contenuto in $\psi(U \times F(x_0, t_0))$ e quindi $F(x, t) = \psi(\Phi(x, t), F(x_0, t_0))$ è continua su $A \times J$. Ciò dimostra che F è continua. La dimostrazione è completa.

Teorema 8.3 *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento, con E, B spazi di Hausdorff connessi e localmente connessi per archi. Siano $\xi_0 \in E$ e $b_0 = p(\xi_0) \in B$. L'applicazione $p_* : \pi_1(E, \xi_0) \to \pi_1(B, b_0)$ è iniettiva.*

Dim. Sia $\alpha \in \mathcal{C}(\mathbf{I}, \{0, 1\}; E, \xi_0)$. Se $F : \mathbf{I} \times \mathbf{I}$ è una $\{0, 1\}$-omotopia tra $p \circ \alpha$ e il laccetto costante, il rialzamento $\tilde{F}$ di F tale che $\tilde{F}(s, 0) = \alpha(s)$ per $s \in \mathbf{I}$ è, per il teorema precedente, una $\{0, 1\}$-omotopia tra α e il laccetto costante.

Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento, con E e B spazi di Hausdorff connessi e localmente connessi per archi. Fissati $\xi_0 \in E$ e $b_0 \in B$ con $p(\xi_0) = b_0$, sia $F = E_{b_0} = p^{-1}(b_0)$.

Definiamo un'applicazione $\lambda : \mathcal{C}(\mathbf{I}, \{0,1\}; B, b_0) \to F$ facendo corrispondere ad ogni $\alpha \in \mathcal{C}(\mathbf{I}, \{0,1\}; B, b_0)$ l'estremo $\tilde{\alpha}(1)$ del suo rialzamento $\tilde{\alpha}$ con punto iniziale ξ_0. Abbiamo:

Teorema 8.4 *L'applicazione $\lambda : \mathcal{C}(\mathbf{I}, \{0,1\}; B, b_0) \to F$ definisce per passaggio al quoziente un'applicazione $\lambda_* : \pi_1(B, b_0) \to F$ surgettiva. L'immagine inversa di ξ_0 mediante λ_* è il sottogruppo $p_*\pi_1(E, \xi_0)$.*

La λ_* identifica quindi F allo spazio delle classi laterali sinistre di $p_*\pi_1(E, \xi_0)$ in $\pi_1(B, b_0)$.

§9 Gruppi propriamente discontinui

Sia X uno spazio topologico e $\mathfrak{S}_c(X)$ il gruppo degli omeomorfismi di X in sè. Sia $\mathbf{G}$ un gruppo. Un'*azione continua* di $\mathbf{G}$ su X è un omomorfismo

$$\phi : \mathbf{G} \ni g \to \{X \ni x \to gx \in X\} \in \mathfrak{S}_c(X)\,. \tag{9.1}$$

Diciamo che $\mathbf{G}$ opera su X *in modo discreto* se

(i) Per ogni $x \in X$ l'orbita $\mathbf{G}x = \{gx \mid g \in \mathbf{G}\}$ è un sottospazio discreto di X;

(ii) Ogni $x \in X$ ha un intorno aperto U tale che $U \cap Gy$ contiene al più un punto per ogni $y \in X$.

Diciamo che $\mathbf{G}$ opera *in modo propriamente discontinuo* se opera in modo discreto ed inoltre

(iii) Se $g \in \mathbf{G}$ e $g \neq e$, allora g non ha punti fissi in X, cioè $gx \neq x$ per ogni $x \in X$.

Lemma 9.1 *Supponiamo che il gruppo $\mathbf{G}$ agisca in modo propriamente discontinuo su uno spazio di Hausdorff connesso X. Allora ogni $g \in \mathbf{G}$ che abbia un punto fisso in X lascia fissi tutti i punti di X. L'insieme delle $g \in \mathbf{G}$ che lasciano fisso un punto (e quindi tutti i punti di X) formano un sottogruppo normale $\mathbf{H}$ di $\mathbf{G}$.*

Per passaggio al quoziente il gruppo $\mathbf{G}/_{\mathbf{H}}$ opera su X in modo propriamente discontinuo.

Sia $g \in \mathbf{G}$ e supponiamo che $Y = \{x \in X \mid gx = x\}$ sia non vuoto. Poiché X è di Hausdorff, Y è chiuso. Sia ora $x_0 \in Y$. Fissiamo un intorno U di x_0 che incontri ogni orbita di $\mathbf{G}$ in X in al più un punto. Poiché g è continua, esiste un intorno aperto V di x_0 in U tale che $gV \subset U$. Chiaramente $gy = y$ per ogni $y \in V$. Ciò dimostra che Y è anche aperto e quindi $Y = X$ perché X è connesso.

Le rimanenti affermazioni del teorema seguono immediatamente.

Teorema 9.2 *Sia E uno spazio di Hausdorff connesso e $\mathbf{G}$ un gruppo che agisce su E in modo continuo. Sia $B = E/_{\mathbf{G}}$ e $E \xrightarrow{p} B$ la proiezione nel quoziente. Condizione necessaria e sufficiente affinché $E \xrightarrow{p} B$ sia un rivestimento è che $\mathbf{G}$ operi su E in modo discreto.*

Dim. La condizione è chiaramente necessaria. Per dimostrare la sufficienza, possiamo supporre che $\mathbf{G}$ operi in modo propriamente discontinuo. Fissato $\xi_0 \in E$, fissiamo un intorno aperto U di ξ_0 in E che intersechi ogni orbita di $\mathbf{G}$ al più in un punto. Allora $p(U)$ è un aperto di B e la $p(U) \times \mathbf{G} \ni (p(\xi), g) \to g\xi \in p^{-1}(p(U))$ è una trivializzazione locale. In questo modo definiamo su $E \xrightarrow{p} B$ la struttura di fibrato localmente banale con fibra discreta.

Teorema 9.3 *Sia E uno spazio topologico di Hausdorff connesso e localmente connesso per archi, su cui il gruppo $\mathbf{G}$ opera in modo propriamente discontinuo. Fissiamo ξ_0 in E e b_0 in $B = E/_{\mathbf{G}}$, con $b_0 = p(\xi_0)$. Allora $p_*\pi_1(E, \xi_0)$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(B, b_0)$ e $\pi_1(B, b_0) \big/_{p_*\pi_1(E,\xi_0)} \simeq \mathbf{G}$.*

Dim. Sia $[\alpha] \in \pi_1(B, b_0)$ con $\alpha \in \mathcal{C}(\mathbf{I}, \{0,1\}; B, b_0)$, sia $\tilde{\alpha}$ il suo rialzamento con punto iniziale ξ_0 e sia $g \in \mathbf{G}$ l'unico elemento tale che $g\xi_0 = \tilde{\alpha}(1)$. Poiché $\tilde{\alpha}(1)$ è univocamente determinato dalla classe di omotopia di α, otteniamo un'applicazione $\psi : \pi_1(B, b_0) \to \mathbf{G}$. Essa è surgettiva perché E è connesso per archi. È un omomorfismo di gruppi perchè, se α e $\tilde{\alpha}$ sono definiti come sopra, il rialzato di α con punto iniziale $g\xi_0$ è $g\tilde{\alpha}$. Infine, il nucleo di ψ è $p_*\pi_1(E, \xi_0)$.

§10 Automorfismi di un rivestimento

Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento. Un automorfismo di $E \xrightarrow{p} B$ è un omeomorfismo $f : E \to E$ tale che $p \circ f = p$.

Gli automorfismi di un rivestimento formano un gruppo $\operatorname{Aut}(E \xrightarrow{p} B)$ rispetto al prodotto di composizione.

Fissiamo per il seguito un rivestimento $E \xrightarrow{p} B$ e siano $\xi_0 \in E$, $b_0 = p(\xi_0) \in B$, $F = E_{b_0} = p^{-1}(b_0)$. Supponiamo inoltre che E e B *siano di Hausdorff, connessi e localmente connessi per archi.*

Lemma 10.1 *Se $f, g \in \operatorname{Aut}(E \xrightarrow{p} B)$ e $f(\xi_0) = g(\xi_0)$, allora $f = g$. L'applicazione $\operatorname{Aut}(E \xrightarrow{p} B) \ni f \to f(\xi_0) \in F$ è iniettiva e la $\operatorname{Aut}(E \xrightarrow{p} B) \ni f \to f\big|_F^F \in \mathfrak{S}(F)$ un monomorfismo di gruppi.*

Dim. La prima affermazione segue dal fatto che, se $f, g \in \operatorname{Aut}(E \xrightarrow{p} B)$, allora l'insieme $A = \{\xi \in E \mid f(\xi) = g(\xi)\}$ è aperto e chiuso in E. Le rimanenti affermazioni sono conseguenze della prima.

Dal lemma segue il:

Teorema 10.2 *Il gruppo $\operatorname{Aut}(E \xrightarrow{p} B)$ opera su E in modo propriamente discontinuo.*

Posto $\mathbf{G} = \operatorname{Aut}(E \xrightarrow{p} B)$, abbiamo il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varrho"] \arrow[dr, "p"'] & E/_{\mathbf{G}} \arrow[d, "\omega"] \\ & B \end{tikzcd}$$

in cui tutte le applicazioni sono di rivestimento. Sappiamo che $\varrho_*(\pi_1(E, \xi_0))$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(E/\mathbf{G}, \varrho(\xi_0))$ e che $\pi_1(E/\mathbf{G}, \varrho(\xi_0)) \big/_{\varrho_*(\pi_1(E,\xi_0))} \simeq \mathbf{G}$. Abbiamo:

Proposizione 10.3 *$\omega_*(\pi_1(E/\mathbf{G}, \varrho(\xi_0)))$ è il normalizzatore di $p_*(\pi_1(E, \xi_0))$ in $\pi_1(B, b_0)$.*

Dim. Sappiamo che

$$\varrho_*(\pi_1(E,\xi_0)) \lhd \pi_1(E/\mathbf{G},\varrho(\xi_0))$$

e quindi

$$p_*(\pi_1(E,\xi_0)) = \omega_* \circ \varrho_*(\pi_1(E,\xi_0)) \lhd \omega_*(\pi_1(E/\mathbf{G},\varrho(\xi_0))).$$

Dunque $\omega_*(\pi_1(E/\mathbf{G},\varrho(\xi_0))) \subset \mathbf{N}(p_*(\pi_1(E,\xi_0)))$ e ci resta solo da dimostrare l'inclusione opposta.

A questo scopo mostriamo come ad ogni elemento $[\alpha]$ di $\mathbf{N}(p_*(\pi_1(E,\xi_0)))$ si possa associare un automorfismo $f_{[\alpha]}$ del rivestimento. Sia $\alpha \in \mathcal{C}(\mathbf{I},\{0,1\};B,b_0)$ un rappresentante di $[\alpha]$. Dato $\xi \in E$, sia $\gamma \in \mathcal{C}(\mathbf{I},0,1;\xi_0,\xi)$ e consideriamo il rialzamento $\widetilde{\alpha^{-1}\cdot p\circ\gamma}$ di $\alpha^{-1}\cdot p\circ\gamma$ con punto iniziale ξ_0. Dico che $\widetilde{\alpha^{-1}\cdot p\circ\gamma}(1)$ dipende solo dal punto ξ e non dall'arco γ scelto. Se infatti $\gamma' \in \mathcal{C}(\mathbf{I},0,1;\xi_0,\xi)$ è un altro arco con punto iniziale ξ_0 e stesso punto finale ξ, abbiamo $\gamma'\cdot\gamma^{-1} \in \mathcal{C}(\mathbf{I},\{0,1\};E,\xi_0)$ e per ipotesi il rialzamento del laccetto $\alpha^{-1}\cdot p\circ\widetilde{\gamma'\cdot\circ\gamma}\cdot\alpha$ con punto iniziale ξ_0 è ancora un laccetto in ξ_0. Ma questo implica che $\widetilde{\alpha^{-1}\cdot p\circ\gamma}(1) = \widetilde{\alpha^{-1}\cdot p\circ\gamma'}(1)$.

§11 Il Teorema di Van Kampen

Teorema 11.1 *Sia X uno spazio topologico e siano A, B sottospazi di X tali che $X = A\cup B$ ed A, B e $A\cap B$ siano tutti connessi per archi. Siano $\iota_A : A \hookrightarrow X$, $\iota_B : B \hookrightarrow X$, $\theta_A : A\cap B \hookrightarrow A$, $\theta_B : A\cap B \hookrightarrow B$ le applicazioni di inclusione. Fissato $x_0 \in A\cap B$, sia $\mathbf{N}(A,B,x_0)$ il sottogruppo normale del prodotto libero di gruppi $\pi_1(A,x_0)*\pi_1(B,x_0)$, generato dall'insieme: $\{\theta_{A*}(\xi)*\theta_{B*}(\xi^{-1}) \mid \xi \in \pi_1(A\cap B,x_0)\}$. Allora:*

$$\pi_1(X,x_0) \simeq \frac{\pi_1(A,x_0)*\pi_1(B,x_0)}{\mathbf{N}(A,B,x_0)}\,. \tag{11.1}$$

CAPITOLO XIV

GEOMETRIA DIFFERENZIALE DELLE CURVE

§1 Curve parametriche in $\mathbb{R}^n$.

Una *curva parametrica* di classe C^k in $\mathbb{R}^n$ è una applicazione differenziabile di classe C^k:

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

definita su un intervallo J di $\mathbb{R}$. Chiamiamo l'immagine $\alpha(J)$ di α il suo *supporto.*

Per semplicità supporremo sempre nel seguito che $J = [a, b]$ sia un intervallo *compatto.*

Diciamo che α è una curva *regolare* se $k > 0$ e

$$\dot{\alpha}(t) = D\alpha(t) \neq 0 \ \ \forall t \in J.$$

Diciamo che α è una curva *chiusa* (o un *laccetto*) di classe C^k se $J = [t_0, t_1]$ è un intervallo compatto e $D^i\alpha(t_0) = D^i\alpha(t_1)$ per ogni $i = 0, ..., k$, *aperta* altimenti. La curva α si dice *semplice* se è aperta e l'applicazione α è iniettiva oppure se è chiusa e la sua restrizione a ogni sottointervallo proprio di J è iniettiva. Se $[t_0, t_1] \subset J$ chiamiamo la restrizione

$$\alpha|[t_0, t_1] : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$$

arco di α da t_0 a t_1.

Sia $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrica differenziabile di classe C^k e sia

$$\sigma : J' \to J$$

un diffeomorfismo di classe C^k. Allora la

$$\alpha \circ \sigma : J' \to \mathbb{R}^n$$

è ancora una curva parametrica di classe C^k, che si dice ottenuta da α per *riparametrizzazione.* La riparametrizzazione definisce una relazione di equivalenza tra le curve parametriche di classe C^k. Le corrispondenti classi di equivalenza si dicono *curve geometriche* o semplicemente *curve.* Si ricava immediatamente dal teorema delle funzioni implicite:

Proposizione 1.1 *Il supporto di una curva semplice regolare di classe C^k è una sottovarietà differenziabile di classe C^k di dimensione* 1 *di $\mathbb{R}^n$.*

Due curve semplici, regolari, aperte, di classe C^k sono equivalenti se e soltanto se hanno lo stesso supporto.

Due curve chiuse, semplici, regolari, di classe C^k sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso supporto e lo stesso punto iniziale.

Ricordiamo che un sottoinsieme L di $\mathbb{R}^n$ si dice un *sottospazio affine* se per ogni coppia di punti $x, y \in L$ la retta

$$xy = \{tx + (1-t)y | t \in \mathbb{R}\}$$

è contenuta in L. In questo caso, fissato $y \in L$,

$$L_0 = \{x - y | x \in L\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, che non dipende dalla scelta del punto $y \in L$ usato per definirlo. La dimensione di L_0 come sottospazio vettoriale si dice dimensione del sottospazio affine L. Un sottospazio affine di dimensione m si può descrivere in forma parametrica mediante

$$L = \{x_0 + s^1 v_1 + ... + s^m v_m | s^1, ..., s^m \in \mathbb{R}\} \tag{1}$$

ove x_0 è un qualsiasi punto di L e $v_1, ..., v_m$ una qualsiasi base di L_0, oppure in forma implicita mediante

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n | \xi^i(x) = c^i \;\; i = 1, ..., n-m\} \tag{2}$$

ove $\xi^1, ..., \xi^{n-m}$ è una base dell'annullatore di L_0 in $(\mathbb{R}^n)'$ e $\xi^i(x_0) = c^i$ $(i = 1, ..., n-m)$ per un qualsiasi punto $x_0 \in L$.

Supponiamo che una curva $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$ di classe C^k abbia il supporto contenuto in un sottospazio affine L di dimensione $m < k$. Se L è descritto in forma parametrica da (1), avremo su J

$$\alpha(t) = x_0 + s^1(t)v_1 + ... + s^m(t)v_m$$

con funzioni $s^1, ..., s^m : J \to \mathbb{R}$ di classe C^k. In particolare la matrice

$$(D\alpha(t), ..., D^k\alpha(t)) \tag{3}$$

ha rango minore o uguale a m in tutti i punti di J. Indicheremo nel seguito con $A_m^\alpha(t)$ o semplicemente con $A_m(t)$ quando non vi sia ambiguità, la matrice $(D\alpha(t), ..., D^m\alpha(t))$ per $m \leq k$.

Abbiamo, con le notazioni introdotte sopra:

PROPOSIZIONE 1.2 *Sia m un intero non negativo ed*

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^n$$

una curva di classe C^{m+1} tale che

$$rkA_m(t) = rkA_{m+1}(t) = m$$

per ogni $t \in J$. Allora il supporto di α è contenuto in un sottospazio affine di dimensione m e nessun arco di α è contenuto in un sottospazio affine di dimensione $m-1$.

Dim. Se $m = 0$, la curva α è costante e dunque la tesi è verificata. Supponiamo $m > 0$. Segue dall'ipotesi che $D^{m+1}\alpha(t)$ è in ogni punto di J combinazione lineare di $D\alpha, ..., D^m\alpha$ e sono univocamente determinate applicazioni continue $\lambda_1, ..., \lambda_m : J \to \mathbb{R}$ tali che

$$D^{m+1}\alpha(t) = \lambda_1(t)D\alpha(t) + ... + \lambda_m(t)D^m\alpha(t)$$

per ogni $t \in J$. Fissiamo un punto $t_0 \in J$ e sia $\xi^1, ..., \xi^{n-m}$ una base dell'annullatore del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ generato da $D\alpha(t_0), ..., D^m\alpha(t_0)$. Definiamo le funzioni di classe C^1 su J:

$$w_{i,j}(t) = \xi^j(D^i\alpha(t))$$

per $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n - m$. Esse sono soluzione del problema di Cauchy omogeneo:

$$\begin{cases} \dot{w}_{i,j} = w_{i+1,j} & i = 1, ..., m-1 \\ \dot{w}_{m,j} = \lambda_1(t)w_{1,j} + ... + \lambda_m(t)w_{m,j} & i = m \\ w_{i,j}(t_0) = 0 & i = 1, ..., m \end{cases}$$

e quindi sono identicamente nulle su J. In particolare ne segue che $\xi^j(\alpha)$ è costante su J e dunque il supporto di α è contenuto nel sottospazio affine L definito da (2), con $x_0 = \alpha(t_0)$. L'ultima affermazione dell'enunciato è una conseguenza della discussione precedente: se un arco di α fosse contenuto in un sottospazio affine di dimensione minore di m, allora $A_m(t)$ avrebbe rango inferiore a m in qualche punto di J.

Ricordando che una funzione analitica reale su un intervallo J che si annulli su un sottoinsieme aperto di J si annulla identicamente su J, otteniamo:

Proposizione 1.3 *Sia $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$ una curva analitica reale. Sia*

$$m = max\{rkA_n(t) | t \in J\}.$$

Allora il supporto di α è contenuto in un sottospazio affine di dimensione m di $\mathbb{R}^n$ e nessun arco di α è contenuto in un sottospazio affine di dimensione $m - 1$ di $\mathbb{R}^n$.

Dim. Osserviamo che $rkA_m(t) = m$ su un arco di α. Applichiamo su questo arco il ragionamento svolto nel teorema precedente: le funzioni analitiche $\xi^j(\alpha)$ essendo costanti su tale arco sono costanti su tutto J e otteniamo quindi la tesi.

Sia

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^n$$

una curva differenziabile di classe C^k con $k \geq n$. Diciamo che essa è *sghemba* se

$$A(t) = A_n(t) = (D\alpha(t), ..., D^n\alpha(t))$$

ha rango n in tutti i punti di J. Per la Proposizione 1.2 nessun arco di una curva sghemba è contenuto in un sottospazio affine proprio di $\mathbb{R}^n$. Fissato un punto $t_0 \in J$, associamo a tale punto i sottospazi affini:

$$L^0(t_0) = \{\alpha(t_0)\},$$

$$L^1(t_0) = \{\alpha(t_0) + sD\alpha(t_0) | s \in \mathbb{R}\}$$

(retta *tangente*),

$$L^j(t_0) = \{\alpha(t_0) + s^1 D\alpha(t_0) + ... + s^j D^j \alpha(t_0) | s^1, ..., s^j \in \mathbb{R}\}$$

(spazio *osculatore* di dimensione j) per $j = 2, ..., n$.

Essi sono caratterizzati dalla proprietà:

Sia $d(x, y) = |x - y|$ la distanza su $\mathbb{R}^n$ associata a un qualsiasi prodotto scalare. Allora

$$d(\alpha(t), L^j(t_0)) = o(|t - t_0|^j).$$

Infatti, posto $x_0 = \alpha(t_0)$, $v_j = (j!)^{-1} D^j \alpha(t_0)$, abbiamo per la formula di Taylor:

$$\alpha(t) = x_0 + v_1(t - t_0) + ... + v_n(t - t_0)^n + o(|t - t_0|^n)$$

e dunque

$$d(\alpha(t), L^j(t_0)) \leq |v_{j+1}(t - t_0)^{j+1} + ... + v_n(t - t_0)^n + o(|t - t_0|^n).$$

Ricordiamo la formula della derivazione di una funzione composta (formula di Faà di Bruno): se

$$J \xrightarrow{f} J' \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

sono funzioni di classe C^k $(k \geq 1)$ su intervalli $J, J' \subset \mathbb{R}$, allora

$$D^k(g \circ f)(t) = \sum_{\substack{1 \leq m \leq k \\ a_1 + 2a_2 + ... + ka_k = k \\ a_1 + ... + a_k = m}} \sigma(k; a_1, ..., a_k)(Dg(t))^{a_1} ... (D^k g(t))^{a_k})(D^m f)(g(t))$$

ove i coefficienti multinomiali $\sigma(k; a_1, ..., a_k)$ sono definiti da:

$$\sigma(k; a_1, ..., a_k) = k!/((1!)^{a_1} a_1! ... (k!)^{a_k} a_k!).$$

Se dunque $\sigma : J' \to J$ è un'applicazione di classe C^k e $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^k, per la curva di classe C^k $\beta = \alpha \circ \sigma$ avremo:

$$A_k^\beta(t) = A_k^\alpha(\sigma(t)) T_k^\sigma(t)$$

dove $T_k^\sigma(t)$ è una matrice $k \times k$ triangolare superiore della forma

$$T_k^\sigma(t) = \begin{pmatrix} \dot{\sigma}(t) & * & \dots & * \\ 0 & \dot{\sigma}^2(t) & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dot{\sigma}^k(t) \end{pmatrix}.$$

§2. **Decomposizioni di Gauss e di Gram.**

Dato un sottogruppo G del gruppo $GL(n)$ degli automorfismi lineari di $\mathbb{R}^n$, consideriamo su $\mathbb{R}^n$ le trasformazioni affini della forma

$$x \to gx + v$$

al variare di g in G e di v in $\mathbb{R}^n$. Esse formano un gruppo, che si denota con G_1 e si dice il *gruppo affine* associato a G o la *prima estensione* del gruppo G. Esso è isomorfo al sottogruppo di $GL(n+1)$ delle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & g \end{pmatrix}$$

per $(g, v) \in G \times \mathbb{R}^n$. Si verifica facilmente che G è un sottogruppo chiuso di $GL(n)$ se e soltanto se G_1 è un sottogruppo chiuso di $GL(n+1)$. Se $\mathfrak{g}$ è l'algebra di Lie di G, allora l'algebra di Lie $\mathfrak{g}_1$ di G_1 è data da:

$$\mathfrak{g}_1 = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & X \end{pmatrix} | v \in \mathbb{R}^n, \ \ X \in \mathfrak{g}\}.$$

Osserviamo che in ogni caso G_1 opera transitivamente su $\mathbb{R}^n$: lo spazio $\mathbb{R}^n$ si identifica quindi allo *spazio omogeneo*

$$\mathbb{R}^n \simeq G_1/G.$$

Date due curve di classe C^k:

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^n,$$

$$\beta : J' \to \mathbb{R}^n,$$

diciamo che esse sono G_1 *-congruenti* se possiamo trovare un diffeomorfismo σ : $J \to J'$ di classe C^k e un elemento $g \in G_1$ tali che il diagramma

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "g"] \\ J' \arrow[r, "\beta"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

sia commutativo. Per lo studio della G_1-congruenza di curve, è utile premettere alcuni risultati generali sulla decomposizione di matrici.

Introduciamo i seguenti sottogruppi di $GL(n)$:

$$Z_+(n) = \{(z_{ij}) | z_{ii} = 1, \ z_{ij} = 0 \text{ se } i > j\},$$

$$Z_-(n) = \{(z_{ij}) | z_{ii} = 1, \ z_{ij} = 0 \text{ se } i < j\},$$

$$D(n) = \{(z_{ij}) | z_{ii} \neq 0, \ z_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j\},$$

$$T_+(n) = \{(z_{ij}) | z_{ii} \neq 0 \ z_{ij} = 0 \text{ se } i > j\},$$

$$T_-(n) = \{(z_{ij}) | z_{ii} \neq 0, \ z_{ij} = 0 \text{ se } i < j\}.$$

Gli ultimi due si dicono rispettivamente i gruppi delle matrici triangolari superiori e triangolari inferiori invertibili, $D(n)$ il gruppo delle matrici diagonali.

Data una matrice $n \times n$

$$M = (m_{ij})$$

indichiamo con

$$M^{i_1 \dots i_h}_{j_1 \dots j_h}$$

il determinante della matrice $h \times h$ $(m_{i_p, j_q})_{1 \leq p,q \leq h}$. Poniamo per semplicità

$$D_h(M) = M^{1 \dots h}_{1 \dots h}$$

e conveniamo che

$$D_0(M) = 1$$

per ogni matrice M.

Una matrice M si dice *regolare* se

$$D_h(M) \neq 0 \ \text{ per } \ h = 1, ..., n.$$

TEOREMA 1.4 (DECOMPOSIZIONE DI GAUSS) *Data una matrice regolare M, risultano univocamente determinate tre matrici $\zeta \in Z_-(n)$, $\delta \in D(n)$, $z \in Z_+(n)$ tali che*

$$M = \zeta \delta z.$$

I coefficienti delle matrici ζ, δ, z sono funzioni razionali dei coefficienti di M.

La dimostrazione sarà suddivisa in una serie di lemmi.

LEMMA 1.5 *Se $M \in gl(n)$ e $z \in Z_+(n)$, allora per ogni $1 \leq h \leq n$ e $1 \leq j_1 < ... < j_h \leq n$ abbiamo:*

$$M^{j_1 \dots j_h}_{1 \dots h} = (Mz)^{j_1 \dots j_h}_{1 \dots h}.$$

DIM. Scriviamo

$$M = (M_1, ..., M_n)$$

$$Mz = (M'_1, ..., M'_n).$$

Allora

$$M'_j = M_1 z_{1j} + ... + M_{j-1,j} z_{j-1,j} + M_j$$

e dunque

$$M'_1 \wedge ... \wedge M'_h = M_1 \wedge ... \wedge M_h$$

per ogni $h = 1, ..., n$, da cui segue l'asserzione sui determinanti dei minori.

LEMMA 1.6 *Sia $t = (t_{ij}) \in T_-(n)$. Allora:*

(i) $$D_h(t) = t_{11} ... t_{hh}$$

(ii) $$t^{1 \dots (h-1) r}_{1 \dots h} = t_{rh} D_{h-1}(t).$$

Dim. La (i) è un caso particolare di (ii). Quest'ultima si ricava osservando che $t_{1\dots h}^{1\dots(h-1)r}$ è uguale a 0 se $r < h$ e per $r \geq h$ è il determinante della matrice triangolare inferiore:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{h-1,1} & t_{h-1,2} & t_{h-1,3} & \dots & t_{h-1,h-1} & 0 \\ t_{h1} & t_{h2} & t_{h3} & \dots & t_{h,h-1} & t_{hr} \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.7 *Ogni matrice regolare M si decompone in modo unico nella forma*

$$M = tz$$

con $t \in T_-(n)$ e $z \in Z_+(n)$.

Dim. Poniamo $M = (m_{ij})$ e determiniamo i coefficienti x_{ij} per $i > j$ risolvendo il sistema lineare

$$(*) \qquad m_{\ell 1}x_{1j} + \dots + m_{\ell(j-1)}x_{(j-1)j} = -m_{\ell j} \quad \ell = 1, \dots, j-1.$$

Questo ha una e una sola soluzione, perché il determinante della matrice dei suoi coefficienti è $D_{k-1}(M)$. Essa si calcola con la regola di Kramer, e dunque è funzione razionale dei coefficienti di M. Posto $x_{ii} = 1$ e $x_{ij} = 0$ per $i < j$, abbiamo allora

$$M(x_{ij}) = t \in T_-(n)$$

e dunque, con $z = (x_{ij})^{-1} \in Z_+(n)$ otteniamo la decomposizione cercata. Viceversa, la condizione che $Mz^{-1} \in T_-(n)$ è equivalente al fatto che i coefficienti di $(x_{ij}) = z^{-1}$ soddisfino (*) e dunque la decomposizione è unica.

Utilizziamo i lemmi precedenti per calcolare i coefficienti t_{ij} della matrice $t \in T_-(n)$ ottenuti in questa decomposizione: per il Lemma 2.1, essendo $M = tz$ abbiamo:

$$M_{1\dots h}^{j_1\dots j_h} = t_{1\dots h}^{j_1\dots j_h}$$

e dunque, per il Lemma 2.2:

$$M_{1\dots h}^{1\dots(h-1)r} = t_{1\dots h}^{1\dots(h-1)r} = t_{rh}D_{h-1}(t) = t_{rh}D_{h-1}(M).$$

È quindi

$$t_{rh} = M_{1\dots h}^{1\dots(h-1)r}/D_{h-1}(M).$$

La decomposizione di Gauss segue ora dall'osservazione che ogni matrice $t \in T_-(n)$ si scrive in modo unico mediante:

$$t = \zeta\delta$$

con $\zeta \in Z_-(n)$ ove $\delta \in D(n)$ ha la stessa diagonale principale della matrice t.

Indichiamo con $K_+(n)$ il sottogruppo di $T_+(n)$ delle matrici triangolari superiori ad elementi della diagonale principale positivi.

Teorema 1.8 (Decomposizione di Gram) *Ogni matrice $a \in GL(n)$ si decompone in modo unico mediante*
$$a = uk$$
con $u \in O(n)$ e $k \in K_+(n)$. Abbiamo $u \in SO(n)$ se e soltanto se $Det(A) > 0$.

L'applicazione
$$O(n) \times K_+(n) \ni (u,k) \to uk \in GL(n)$$
è un diffeomorfismo analitico.

Dim. La decomposizione si può ottenere mediante il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Qui la deduciamo dalla decomposizione di Gauss: questo procedimento ci consente di esplicitare meglio il carattere delle operazioni e di ottenere formule per il calcolo dei coefficienti delle matrici della decomposizione.

Osserviamo che la matrice ${}^t aa$ è definita positiva e quindi regolare. Possiamo quindi decomporla in un unico modo mediante:
$${}^t aa = \zeta \delta z$$
con $\zeta \in Z_-(n)$, $\delta \in D(n)$, $z \in Z_+(n)$. Inoltre $\delta = diag(\delta_1, ..., \delta_n)$ con
$$\delta_h = D_h({}^t aa)/D_{h-1}({}^t aa) > 0 \text{ per } h = 1, ..., n.$$
Poiché ${}^t aa$ è simmetrica, dall'unicità della decomposizione di Gauss ricaviamo ancora che
$$\zeta = {}^t z.$$
Sia
$$\sqrt{\delta} = diag(\sqrt{\delta_1}, ..., \sqrt{\delta_n})$$
dove si è scelta la determinazione reale positiva della radice quadrata. Allora
$$k = \sqrt{\delta} z \in K_+(n)$$
e abbiamo
$${}^t aa = {}^t kk.$$
Da questa uguaglianza segue immediatamente che
$$u = ak^{-1} \in O(n).$$
Infatti:
$${}^t u\, u = {}^t k^{-1}\, {}^t a\, a\, k^{-1} = {}^t k^{-1}\, {}^t k\, k\, k^{-1} = I\,.$$
Abbiamo così ottenuto la decomposizione di Gram $a = uk$. Essa è unica perché, se
$$a = uk$$
con $u \in O(n)$ e $k \in K_+(n)$, allora
$${}^t aa = {}^t kk$$

e k è unica per l'unicità della decomposizione di Gauss.

I coefficienti della diagonale principale della matrice k nella decomposizione di Gram sono dati da:

$$\boxed{k_{hh} = \sqrt{\frac{D_h({}^t aa)}{D_{h-1}({}^t aa)}}}.$$

Decomposizione di Gram nello spazio di Minkowski

La decomposizione di Gram si può generalizzare ad altri gruppi diversi dal gruppo ortogonale euclideo. Ad esempio, consideriamo il gruppo $O(1,n)$ delle trasformazioni ortogonali rispetto al prodotto di Minkowski $[\cdot|\cdot]$ su $\mathbb{R}^{n+1}$. Ricordiamo che, posto

$$I_{1,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

$O(1,n)$ è il sottogruppo di $GL(n+1)$ delle matrici a per cui

$${}^t a I_{1,n} a = I_{1,n}$$

e la sua algebra di Lie $o(1,n)$ è formata dalle $X \in gl(n+1)$ tali che

$${}^t X I_{1,n} + I_{1,n} X = 0$$

cioè dalle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^t v \\ v & Y \end{pmatrix}$$

con $v \in \mathbb{R}^n$ e $Y \in o(n)$. In questo caso otteniamo:

Teorema 1.9 *Sia $a \in GL(n+1)$ e supponiamo che*

$$[ae_0|ae_0] > 0.$$

Allora possiamo decomporre a in modo unico nella forma:

$$a = uk$$

con $u \in O(1,n)$ e $k \in K_+(n+1)$. L'applicazione

$$O(1,n) \times K_+(n+1) \ni (u,k) \to uk \in GL(n+1)$$

è iniettiva e analitica reale.

Dim. La dimostrazione è analoga a quella svolta per la decomposizione di Gram. Osserviamo che ${}^t a I_{1,n} a$ è regolare, in quanto la forma di Minkowski è non degenere su ogni sottospazio che contenga un vettore di tipo tempo. Quindi ${}^t a I_{1,n} a$ ammette un'unica decomposizione di Gauss

$$ {}^t a I_{1,n} a = \zeta \delta z $$

con $\zeta \in Z_-(n)$, $\delta \in D(n)$, $z \in Z_+(n)$. Dall'unicità della decomposizione segue che $\zeta =^t z$. Inoltre

$$ \delta = diag(k_0^2, -k_1^2, ..., -k_n^2) $$

con numeri reali positivi $k_0, ..., k_n$. Posto

$$ \Delta = diag(k_0, k_1, ..., k_n), $$

otteniamo

$$ \delta = \Delta I_{1,n} \Delta. $$

Poniamo a questo punto

$$ k = \Delta z \in K_+(n+1). $$

Otteniamo

$$ {}^t a I_{1,n} a =^t k I_{1,n} k. $$

Se poniamo

$$ u = ak^{-1} $$

risulta allora $u \in O(1,n)$ e questo ci dà la decomposizione cercata. L'unicità segue da considerazioni analoghe a quelle svolte per la decomposizione di Gram.

Curve in un gruppo di Lie di matrici

Concludiamo questo paragrafo dimostrando un teorema sui sottogruppi chiusi di $GL(n)$.

Teorema 1.10 *(i) Sia G un sottogruppo chiuso di $GL(n)$ e sia $\mathfrak{g} \subset gl(n)$ la sua algebra di Lie. Se*

$$ \alpha : J \to G \subset GL(n) $$

è una curva di classe C^1, allora

$$ \alpha^{-1}(t)\dot{\alpha}(t) \in \mathfrak{g} \ \ \forall t \in J. $$

(ii) Viceversa, se

$$ A : J \to \mathfrak{g} $$

è una curva differenziabile di classe C^k, con $k \geq 0$, $t_0 \in J$, allora la soluzione del problema di Cauchy lineare:

$$ \text{(C)} \qquad \begin{cases} \dot{\alpha}(t) = \alpha(t)A(t) & t \in J \\ \alpha(t_0) = g_0 \in G \end{cases} $$

è una curva $\alpha : J \to G$ a valori in G di classe C^{k+1}.

Dim. (i) Fissiamo un intorno U_0 di 0 in $\mathfrak{g}$ tale che

$$ U_0 \ni X \to exp(X) \in U_e = exp(U_0) $$

sia un diffeomorfismo analitico di U_0 su un intorno U_e dell'identità di G. Sia $\bar{t} \in J$, $\bar{g} = \alpha(\bar{t})$. Allora possiamo trovare un intorno aperto connesso J_0 di $\bar{t}$ in J tale che $\alpha(J_0) \subset \bar{g}U_e$. Risulta allora univocamente determinata una curva di classe C^1 in U_0:

$$J_0 \ni t \to X(t) \in U_0 \subset \mathfrak{g}$$

tale che

$$\alpha(t) = \bar{g}exp(X(t)) \ \ \forall t \in \bar{J}$$

e

$$X(\bar{t}) = 0.$$

Avremo allora, con

$$Y_0 = \dot{X}(\bar{t}) \in \mathfrak{g},$$

$$\dot{\alpha}(\bar{t}) = \bar{g}Y_0,$$

cioè $\alpha(\bar{t})^{-1}\dot{\alpha}(\bar{t}) = Y_0 \in \mathfrak{g}$.

(ii) Osserviamo che, per il punto (i), per ogni funzione reale di classe C^1

$$J \ni t \to \mathfrak{g}$$

abbiamo

$$exp(-X(t))\frac{d}{dt}exp(X(t)) \in \mathfrak{g}$$

per ogni $t \in J$. Più precisamente ricordando la formula di differenziazione dell'esponenziale:

$$exp(-X(t))\frac{d}{dt}exp(X(t)) = H(X(t))\dot{X}(t)$$

ove

$$H(X) = exp(-X)\frac{I - e^{-Ad(X)}}{Ad(X)}exp(X)$$

è un'applicazione analitica

$$\mathfrak{g} \ni X \to H(X) \in gl(\mathfrak{g})$$

con

$$H(0) = Id_{\mathfrak{g}}.$$

Quindi il problema di Cauchy non lineare:

$$\begin{cases} exp(-X(t))\frac{d}{dt}exp(X(t)) = H(X(t))\dot{X}(t) = A(t) \\ X(t_0) = 0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione, che è una funzione di classe C^{k+1} definita su un intorno connesso J' di t_0 in J, a valori in $\mathfrak{g}$. Allora

$$g_0exp(X(t))$$

è una curva di classe C^{k+1} definita su J' a valori in G e coincide con la soluzione α del problema di Cauchy (C) per l'unicità. Questo argomento, ripetuto a partire da un qualsiasi punto $\bar{t} \in J$ per cui $\alpha(\bar{t}) \in G$, ci dice che l'insieme dei punti $t \in J$ per cui $\alpha(t) \in G$ è aperto J. Esso è anche chiuso perché abbiamo supposto G chiuso in $GL(n)$, quindi coincide con J perché è non vuoto contenendo t_0.

§2 Curve nello spazio Euclideo

Studiamo in questo paragrafo la congruenza di curve nello spazio Euclideo, cioè rispetto al gruppo $O_1(n)$ delle isometrie di $\mathbb{R}^n$. Indichiamo con $(\cdot|\cdot)$ il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$ e con $|\cdot|$ la norma associata. Data una curva

$$\alpha : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$$

definita e di classe C^1 su un intervallo compatto $[t_0, t_1]$, definiamo la sua lunghezza mediante

$$\ell(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\alpha}(t)| dt.$$

Le formule di cambiamento di variabili dell'integrale ci dicono che la lunghezza di una curva non dipende dalla sua parametrizzazione. Nel caso di una curva semplice il cui supporto sia un segmento, la lunghezza coincide con la lunghezza del segmento definita nella geometria elementare. Inoltre, se consideriamo l'immagine della curva α mediante una isometria:

$$\beta(t) = u\alpha(t) + v$$

con $u \in O(n)$ e $v \in \mathbb{R}^n$ fissati, abbiamo

$$\dot{\beta}(t) = u\dot{\alpha}(t)$$

e dunque

$$|\dot{\beta}(t)| = |\dot{\alpha}(t)|$$

su $[t_0, t_1]$. La lunghezza di una curva è dunque invariante per isometrie di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo ora che due curve

$$\alpha_i : J_i \to \mathbb{R}^n$$

$(i = 1, 2)$ di classe C^k, con $k \geq 1$ siano $O_1(n)$ congruenti e sia

$$\begin{array}{ccc} J_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & \mathbb{R}^n \\ \sigma \big\downarrow & & \big\downarrow g \\ J_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

un diagramma commutativo che descrive la congruenza, con $\sigma : J_1 \to J_2$ un diffeomorfismo di classe C^k e $g \in O_1(n)$. Per restrizione esso definisce una $O_1(n)$ congruenza di qualsiasi arco di α_1 sull'arco corrispondente di α_2 e dunque avremo, fissato $t_0 \in J_1$:

$$\int_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}_1(\xi)| d\xi = \int_{\sigma(t_0)}^{\sigma(t)} |\dot{\alpha}_2(\xi)| d\xi$$

per ogni $t \in J_1$.

Sia ora

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^n$$

una curva regolare di classe C^k $(k \geq 1)$. Allora, fissato $t_0 \in J$, la funzione

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}(\xi)| d\xi$$

è un diffeomorfismo di classe C^k, strettamente crescente, di J su un intervallo J' di $\mathbb{R}$. La curva

$$\beta = \alpha \circ s^{-1} : J' \to \mathbb{R}^n$$

si dice ottenuta riparametrizzando α *per lunghezza d'arco.* Essa gode della proprietà che

$$|\dot{\beta}(s)| = 1 \ \ \forall s \in J'.$$

Una curva di classe C^k con $k \geq 1$ che goda di questa proprietà si dice *parametrizzata per lunghezza d'arco.* Useremo di solito la lettera s per il parametro lungo una curva parametrizzata per lunghezza d'arco e la lettera t per indicare che non si pongono speciali condizioni sulla parametrizzazione. Due diverse parametrizzazioni per lunghezza d'arco si ottengono l'una dall'altra per trasformazioni di $\mathbb{R}$ della forma:

$$s \to \pm s + s_0$$

(isometrie di $\mathbb{R}$).

Da questa discussione segue il:

Lemma 2.1 *Siano $\alpha_i : J_i \to \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2)$ due curve parametrizzate per lunghezza d'arco. Se esse sono $O_1(n)$ congruenti, è possibile determinare $g \in O_1(n)$, $\epsilon = \pm 1$, $s_0 \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\alpha_2(s) = g\alpha_1(\epsilon s + s_0).$$

Ricaviamo ora dalla decomposizione di Gram gli invarianti euclidei di una curva sghemba. Sia

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^n$$

una curva sghemba. Indichiamo con $A(t)$ la matrice di $GL(n)$:

$$A(t) = (D\alpha(t), ..., D^n\alpha(t)).$$

Applichiamo ad $A(t)$ la decomposizione di Gram: abbiamo

$$A(t) = E(t)K(t)$$

con

$$E(t) = (e_1(t), ..., e_n(t)) \in O(n)$$

e

$$K(t) \in K_+(n).$$

Osserviamo che, se α è di classe C^k con $k \geq n$, allora i coefficienti di $E(t)$ sono funzioni di classe C^{k-n+1} e quelli di $K(t)$ sono funzioni di classe C^{k-n}.

La matrice $E(t)$ si dice il *riferimento di Frenet* lungo la curva α. Le sue colonne $e_1(t), ..., e_n(t)$ sono dette:

$$\begin{array}{cc} e_1(t) & \text{versore tangente} \\ e_2(t) & \text{versore normale} \\ e_3(t) & \text{versore binormale} \\ \dots & \dots \\ e_n(t) & \text{versore } (n-1)\text{-normale} \end{array} .$$

Se dovremo considerare contemporaneamente il riferimento di Frenet di più curve, indicheremo la curva considerata a esponente. Scriveremo cioè E^α, e_i^α invece di E ed e_i. Il riferimento di Frenet lungo una curva dipende soltanto dall'orientazione della curva: abbiamo osservato che un cambiamento σ della parametrizzazione cambia $A(t)$ in una matrice

$$A(\sigma(t))T_n^\sigma(t)$$

ove $T_n^\sigma(t)$ è una matrice diagonale superiore con diagonale principale

$$(\dot\sigma(t), \dot\sigma(t)^2, ..., \dot\sigma^n(t))$$

e dunque avremo

$$E^{\alpha\sigma}(t) = E^\alpha(\sigma(t))$$

se $\dot\sigma > 0$ (la riparametrizzazione conserva il verso della curva)

$$E^{\alpha\sigma}(t) = E^\alpha(\sigma(t)) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^n \end{pmatrix}$$

se $\dot\sigma < 0$ (la riparametrizzazione cambia il verso della curva). In quest'ultimo caso sarà $e_i^\alpha(\sigma(t)) = (-1)^i e_i^{\alpha\sigma}(t)$ per $i = 1, ..., n$.

Se la curva α è parametrizzata per lunghezza d'arco, allora i coefficienti sulla diagonale principale della matrice triangolare superiore $K(t)$ nella decomposizione di Gram di $A(t)$ sono degli invarianti della curva. Osserviamo che $k_{11} = 1$ e dunque gli elementi dalla diagonale di $K(t)$ definiscono lungo la curva $n-1$ funzioni invarianti rispetto all'azione di $O_1(n)$. Definiamo a partire da essi le *curvature* di α mediante:

$$k_i(s) = \frac{k_{i+1,i+1}(s)}{k_{ii}(s)}.$$

Se non supponiamo la curva parametrizzata per lunghezza d'arco avremo

$$\boxed{k_i(t) = \frac{k_{i+1,i+1}(t)}{k_{ii}(t)|\dot\alpha(t)|}}.$$

L'espressione trovata nel paragrafo precedente per i coefficienti k_{ii} ci permette di esprimere le curvature mediante la matrice $A(t)$:

$$\boxed{k_i(t) = \sqrt{\frac{D_{i+1}({}^tA(t)A(t)) \cdot D_{i-1}({}^tA(t)A(t))}{D_i^2({}^tA(t)A(t)) \cdot |\dot\alpha(t)|^2}}}.$$

Il Teorema 2.4. nel caso del gruppo ortogonale dà:

LEMMA 2.2 *(i) Se*

$$J \ni t \to O(n)$$

è una curva differenziabile di classe C^1, allora

$$E^{-1}(t)\dot{E}(t) =^t E(t)\dot{E}(t) \in o(n) \;\; \forall t \in J.$$

(ii) Assegnato un intervallo J in $\mathbb{R}$, un punto $t_0 \in J$, un elemento $u_0 \in O(n)$ e una curva

$$X : J \to o(n)$$

di classe C^k con $k \geq 0$, la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{E}(t) = E(t)X(t) & t \in J \\ E(t_0) = u_0 \end{cases}$$

è una curva di classe C^{k+1} a valori in $O(n)$.

DIM. Diamo una dimostrazione indipendente dal Teorema 2.4. (i) Differenziando l'identità

$${}^tE(t)E(t) = Id$$

troviamo

$$(*) \qquad {}^tE'(t)E(t) +^t E(t)E'(t) = 0,$$

cioè, ponendo $X(t) =^t E(t)E'(t) = E(t)^{-1}E'(t)$,

$${}^tX(t) + X(t) = 0$$

che ci dice che $X(t) \in o(n)$.

(ii) Poniamo $M(t) =^t E(t)E(t)$, ove E è la soluzione del problema di Cauchy in (ii). Differenziando M abbiamo allora

$$M'(t) = M(t)X(t) - X(t)M(t).$$

Poiché $M(t_0) = Id$ ne segue che $M(t) = Id$ per ogni $t \in J$ e quindi $E(t) \in O(n)$.

TEOREMA 2.3 *Sia*

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^n$$

una curva sghemba e sia

$$E : J \to O(n)$$

il suo riferimento di Frenet. Allora la matrice antisimmetrica

$$\Omega(t) = E^{-1}(t)E'(t)$$

è della forma:

$$\Omega(t) = |\dot{\alpha}(t)| \begin{pmatrix} 0 & -k_1(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_1(t) & 0 & -k_2(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_2(t) & 0 & -k_3(t) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_{n-1}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Dim. I coefficienti della matrice $\Omega(t) = (\omega_{ij})$ sono dati da

$$\omega_{ij} = (e_i(t)|\dot{e}_j(t)).$$

Poiché $e_j(t)$ è combinazione lineare di $D\alpha(t), ..., D^j\alpha(t)$, $\dot{e}_j(t)$ è combinazione lineare di $D\alpha(t), ..., D^j\alpha(t), D^{j+1}\alpha(t)$ e dunque ortogonale a e_i se $i > j+1$. Essendo $\Omega(t)$ antisimmetrica, si conclude che $\omega_{ij}(t) = 0$ se $|i-j| \neq 1$.

Per calcolare i coefficienti di $\Omega(t)$, supponiamo dapprima che α sia di classe C^{n+1}. Allora la $A(t)$ e quindi anche la $K(t)$ nella decomposizione di Gram di $A(t)$ è di classe C^1. Posto

$$A'(t) = A(t)M(t)$$

otteniamo:

$$(*) \qquad \Omega(t) = K(t)M(t)K^{-1}(t) - K'(t)K^{-1}(t).$$

La matrice $M(t)$ è della forma

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1(t) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_2(t) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_3(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_n(t) \end{pmatrix}$$

e quindi possiamo facilmente calcolare $\omega_{i+1,i}$ usando (*). Il secondo addendo a secondo membro è triangolare superiore e quindi non dà contributo. Otteniamo perciò

$$\omega_{i+1,i}(t) = \frac{k_{i+1,i+1}(t)}{k_{ii}(t)}$$

da cui segue la tesi. Se α è solo di classe C^n, possiamo approssimarla uniformemente con le derivate fino all'ordine n sui sottoinsiemi compatti di J (per il teorema di Stone-Weierstrass) con una successione α_n di curve sghembe di classe C^∞. Per ciascuna di esse vale la conclusione del teorema e dunque l'enunciato segue per passaggio al limite, in quanto sia i coefficienti delle matrici $\Omega_n(t)$ che quelli delle matrici $K_n(t)$ associate alle α_n convergono a quelli di $\Omega(t)$ e di $K(t)$ per ogni punto $t \in J$.

Il sistema di equazioni

$$E'(t) = E(t)\Omega(t)$$

soddisfatto dal riferimento di Frenet della curva α si dice sistema di *equazioni di Frenet* della curva. Esso è descritto completamente dalle funzioni di curvatura, che abbiamo visto essere invarianti euclidei della curva. Esplicitiamo tale sistema di equazioni:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot e_1(t) = v(t)k_1(t)e_2(t) \\ \dot e_2(t) = v(t)[-k_1(t)e_1(t) + k_2(t)e_3(t)] \\ \dot e_3(t) = v(t)[-k_2(t)e_2(t) + k_3(t)e_4(t)] \\ \dots \\ \dot e_{n-1}(t) = v(t)[-k_{n-2}(t)e_{n-2}(t) + k_{n-1}(t)e_n(t)] \\ \dot e_n(t) = -v(t)k_{n-1}(t)e_{n-1}(t) \end{array}}$$

ove abbiamo posto

$$v(t) = |\dot\alpha(t)|.$$

Otteniamo quindi:

TEOREMA 2.4 *(i) Siano $\alpha_i : J_i \to \mathbb{R}^n$ due curve sghembe. Condizione necessaria e sufficiente affinché siano $O_1(n)$ congruenti è che, avendole parametrizzate per lunghezza d'arco, dette $k_j^i(s)$ le curvature delle due curve ($i = 1, 2$, $j = 1, ..., n-1$) risulti con $\epsilon = \pm 1$ e un $s_0 \in \mathbb{R}$):*

$$s \to \epsilon s + s_0$$

è bigettiva da J_2 su J_1 e

$$k_j^1(s) = k_j^2(\epsilon s + s_0) \ \ \forall s.$$

(ii) Assegnate $n-1$ funzioni continue a valori positivi:

$$k_j : J \to \mathbb{R}$$

di classe C^k ,con $k \geq 0$, un punto $t_0 \in J$, un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e un elemento $u \in O(n)$, possiamo trovare una e una sola curva $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$, parametrizzata per lunghezza d'arco, con $\alpha(t_0) = x_0$, avente in t_0 riferimento di Frenet u, e avente le $k_j(t)$ come funzioni di curvatura.

DIM. (i) La condizione è ovviamente necessaria. Per dimostrare la sufficienza, possiamo supporre che le due curve α_i siano definite sullo stesso intervallo J e non è restrittivo supporre che $0 \in J$ e che le curvature delle due curve siano uguali per uguali valori del parametro:

$$k_j^{\alpha_1}(s) = k_j^{\alpha_2}(s) = k_j(s) \ \ \forall s \in J \ \ \forall j = 1, ..., n-1.$$

Risulterà allora associata alle due curve la stessa matrice

$$\Omega^{\alpha_1}(s) = \Omega^{\alpha_2}(s) = \Omega(s)$$

data da

$$\Omega(s) = (k_j(s)[\delta_{i,j+1} - \delta_{j,i+1}])_{i,j=1,\dots,n}.$$

Allora i riferimenti di Frenet $E^{\alpha_i}(s)$ delle due curve soddisfano lo stesso sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$(*) \qquad E'(s) = E(s)\Omega(s) \ \text{ su } \ J.$$

Sia $u = E^{\alpha_1}(0) \in O(n)$, $w = E^{\alpha_2}(0) \in O(n)$. Allora per l'esistenza e unicità della soluzione di (*) per una condizione iniziale $E(0) = g \in O(n)$ assegnata, troviamo che deve essere

$$E^{\alpha_2}(s) = wu^{-1}E^{\alpha_1}(s) \ \ \forall s \in J.$$

Quindi, posto $g = wu^{-1}$, avremo in particolare

$$\dot{\alpha}_2(s) = g\dot{\alpha}_1(s) \ \ \forall s \in J$$

da cui

$$\alpha_2(s) = g\alpha_1(s) + x_0 \ \ \forall s \in J$$

per un opportuno $x_0 \in \mathbb{R}^n$. (ii) La curva cercata è l'unica soluzione delle equazioni di Frenet e del sistema

$$\dot{\alpha}(t) = e_1(t)$$

con le condizioni iniziali assegnate.

Questo teorema ci dice che la lunghezza d'arco e le curvature costituiscono un sistema completo di invarianti indipendenti per le curve sghembe dello spazio euclideo. Dalla discussione della $O_1(n)$ congruenza si deduce immediatamente quella della $SO_1(n)$ congruenza. In questo caso dobbiamo prendere in considerazione un altro invariante delle curve parametriche sghembe: il segno del determinante della matrice $A(t) = (D\alpha, ..., D^n\alpha)$. Se questo è positivo, diciamo che la curva parametrica α ha *torsione positiva*, se è negativo diciamo che la curva ha *torsione negativa*. Si dice *torsione* della curva la $n-1$-esima curvatura con il segno $+$ se la torsione è positiva e con il segno $-$ se la torsione è negativa. Osserviamo che il segno della torsione è il determinante del riferimento di Frenet. Un cambiamento dell'orientazione di una curva parametrica in $\mathbb{R}^n$ ne cambia il segno della torsione se il numero $n(n+1)/2$ è dispari, mantiene inalterato il senso della torsione se esso è pari. Abbiamo dunque:

Teorema 2.5 *Se $n(n+1)/2$ è dispari, due curve sghembe sono $SO_1(n)$ congruenti se e soltanto se sono $O_1(n)$ congruenti. Se $n(n+1)/2$ è pari, due curve sghembe sono $SO_1(n)$ congruenti se e soltanto se hanno torsione dello stesso segno e sono $O_1(n)$ congruenti.*

In uno spazio euclideo di dimensione n con $n(n+1)/2$ pari si usano definire *levogire* le curve con torsione positiva e *destrogire* le curve con torsione negativa. Il significato geometrico del segno della torsione è diverso a seconda che la dimensione n dello spazio sia pari o dispari. Nel caso della dimensione dispari è il seguente: i vettori $e_1, ..., e_{n-1}$ del riferimento di Frenet in un punto $\alpha(t)$ di una curva sghemba $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$ determinano univocamente un iperpiano e su di esso un'orientazione. Risulta cioè univocamente indviduato un vettore $\mathbf{n}$ tale che $(e_1, ..., e_{n-1}, \mathbf{n}) \in SO(n)$. Diremo che i punti

$$x = \alpha(t) + \xi^1 e_1 + ... + \xi^{n-1}e_{n-1} + \xi^n \mathbf{n}$$

con $\xi^n = 0$ appartengono all'iperpiano osculatore, quelli con $\xi^n > 0$ appartengono al semipiano superiore, quelli con $\xi^n < 0$ al semipiano inferiore. Se la torsione di α è positiva, allora potremo trovare un $\epsilon > 0$ tale che $\alpha(t')$ appartenga al semipiano superiore se $t < t' < t + \epsilon$, al semipiano inferiore se $t - \epsilon < t' < t$. La situazione si scambia nel caso la torsione sia negativa. Se la dimensione n è pari, allora un arco della curva contenente $\alpha(t)$ sarà tutto contenuto nel semispazio superiore se la torsione è positiva, nel semipiano inferiore se la torsione è negativa.

Riscriviamo in particolare le equazioni di Frenet per curve piane e curve nello spazio ordinario.

In $\mathbb{R}^2$, le equazioni di Frenet di una curva parametrizzata per lunghezza d'arco sono date da:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{e}_1 = k(s)e_2 \\ \dot{e}_2 = -k(s)e_1 \end{cases}}$$

In $\mathbb{R}^3$ le equazioni di Frenet di una curva parametrizzata per lunghezza d'arco sono date da:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{e}_1 = -k_1(s)e_2 \\ \dot{e}_2 = -k_1 e_1 + k_2(s)e_3 \\ \dot{e}_3 = -k_2(s)e_2 \end{cases}}$$

Esempi

1. In $\mathbb{R}^2$ le curve con curvatura costante sono archi di circonferenza: infatti per $\mathbb{R} \ni k > 0$,il sistema

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = ke_2 \\ \dot{e}_2 = -ke_2 \end{cases}$$

con $(e_1(s), e_2(s)) \in O(2)$ ha soluzione generale

$$e_1(s) = \begin{pmatrix} \cos(ks + s_0) \\ \sin(ks + s_0) \end{pmatrix}$$

$$e_2(s) = \begin{pmatrix} -\sin(ks + s_0) \\ \cos(ks + s_0) \end{pmatrix}$$

e dunque le curve con curvatura costante k sono descritte da:

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} k^{-1}\sin(ks + s_0) + a \\ -k^{-1}\cos(ks + s_0) + b \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Osserviamo che una curva che descrive una circonferenza risulterà avere torsione positiva o negativa a seconda che ne descriva la frontiera (per valori crescenti del parametro) in senso antiorario o orario.

2. Consideriamo ora curve in $\mathbb{R}^3$ con curvature $k_1, k_2 > 0$ costanti. Fissiamo un angolo $\theta \in (0, \pi/2)$ tale che

$$\tan\theta = k_1/k_2.$$

Se $(e_1(s), e_2(s), e_3(s))$ è il riferimento di Frenet lungo una curva con curvature $k_1, k_2 > 0$ costanti, consideriamo il vettore

$$w(s) = e_1(s)\cos\theta + e_3(s)\sin\theta.$$

Abbiamo allora per le equazioni di Frenet:

$$(*) \qquad \dot{w}(s) = k_1 e_2(s)\cos\theta - k_2 e_2(s)\sin\theta = 0$$

e dunque $w(s) = w$ è un vettore costante. Ricaviamo quindi:

$$(e_1(s)|w) = \cos\theta = \text{costante}.$$

Da questa otteniamo, se per esempio fissiamo $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$e_1(s) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\cos(hs+s_0) \\ \sin\theta\sin(hs+s_0) \end{pmatrix}$$

con

$$h = \frac{k_1}{\sin\theta}$$

e da questa ricaviamo che la curva cercata è isometrica a una curva della forma

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} (\cos\theta)s \\ -h^{-1}(\sin\theta)\sin(hs) \\ h^{-1}(\cos\theta)\cos(hs) \end{pmatrix}$$

a meno di traslazioni del parametro s e dell'azione del gruppo $O_1(n)$.

Infatti la curva α si proietta in una curva piana β, con riferimento di Frenet (ϵ_1, ϵ_2) i cui vettori sono le proiezioni di e_1, e_2 sul piano (x_2, x_3), divise per $\sin\theta$. Le equazioni di Frenet della curva β si ricavano da quelle della curva α e sono date da:

$$\begin{cases} \dot\epsilon_1 = \frac{k_1}{\sin\theta}\epsilon_2 \\ \dot\epsilon_2 = -\frac{k_1}{\sin\theta}\epsilon_1 \,. \end{cases}$$

La conclusione segue quindi dalla discussione delle curve piane a curvatura costante dell'esempio 1.

Curve di questo tipo si dicono *eliche circolari*.

In generale la condizione che il rapporto tra le due curvature sia costante implica che la tangente alla curva α in ogni punto forma un angolo costante con una direzione assegnata w: infatti la (*) vale quando $k_1/k_2 = \text{costante} = \tan\theta$. Curve con questa proprietà si dicono *eliche*.

Consideriamo un'elica generale. Definiamo la curva:

$$\beta(t) = \alpha(t) - tw\cos\theta.$$

Abbiamo

$$\frac{d}{dt}(w|\beta) = (e_1|w) - \cos\theta = 0$$

e dunque la curva β è una curva piana su un piano affine

$$(w|x) = \text{costante}.$$

Indichiamo con

$$(\epsilon_1, \epsilon_2)$$

il riferimento di Frenet della curva piana β. Allora abbiamo:

$$\epsilon_1 = \frac{e_1 - w\cos\theta}{sin\theta}$$

e dunque la curva β verifica le equazioni:

$$(**) \qquad \begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = \frac{k_1(s)}{\sin\theta}\epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 = -\frac{k_1(s)}{\sin\theta}\epsilon_1 \end{cases}$$

dove s è ancora il parametro di lunghezza d'arco lungo la curva α.

Troviamo quindi l'equazione generale di un'elica nella forma:

$$\alpha(s) = \beta(s) + sw\cos\theta$$

per una curva piana β in un piano ortogonale a w, la cui forma si ricava dall'equazione (**).

§3 Complementi sulle curve nello spazio Euclideo

.

Se $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$ è una curva di classe $\mathcal{C}^n$ con

$$A_{n-1} = (D\alpha(t), ..., D^{n-1}\alpha(t))$$

di rango $n-1$ per tutti i $t \in J$, per mezzo del procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt risulta associata ad essa una curva

$$E : J \to SO(n)$$

tale che

$$A(t) = (D\alpha(t), ..., D^{n-1}\alpha(t), D^n\alpha(t)) = E(t)K(t)$$

dove $K(t)$ è una matrice triangolare superiore

$$K(t) = (k_{ij}(t))$$

con $k_{ii}(t) > 0$ per $i < n$, mentre $k_{nn}(t)$ può assumere qualsiasi valore reale. Come abbiamo osservato nel §2, il numero

$$\tau(t) = |\dot{\alpha}(t)|^{-1}k_{n-1,n-1}^{-1}(t)k_{nn}(t)$$

è la *torsione* della curva α in t.

Curve piane

Nel caso di una curva piana, la torsione si dice *curvatura della curva orientata* e i punti in cui essa cambia di segno si dicono *flessi* della curva piana.

Nel caso di una curva piana, poiché $SO(2)$ si può identificare a S^1 mediante l'isomorfismo di gruppi abeliani moltiplicativi:

$$S^1 \ni e^{i\theta} \to \rho(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2)$$

il riferimento di Frenet in $SO(2)$ si può identificare a una curva

$$J \to S^1$$

che si rialza al rivestimento universale $\mathbb{R}$ di S^1 come una applicazione differenziabile:

$$\theta : J \to \mathbb{R}$$

univocamente determinata quando se ne fissi il valore in un punto $t_0 \in J$.

Le equazioni di Frenet hanno allora la forma:

$$\frac{d}{dt}\rho(\theta(t)) = \rho(\theta(t))\Omega(t)$$

e, poiché

$$\frac{d}{d\theta}\rho(\theta) = \rho\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \rho(\theta)\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

otteniamo

$$\dot{\theta}(t)\rho\left(\theta(t)\right)\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = \rho(\theta)\Omega(t).$$

Ora, possiamo scrivere

$$\Omega(t) = k(t)|\dot{\alpha}(t)|\rho(\frac{\pi}{2})$$

dove $k(t)$ è la curvatura della curva orientata α in t, e dunque le equazioni di Frenet si riducono all'unica equazione scalare:

$$\dot{\theta}(t) = |\dot{\alpha}(t)|k(t).$$

Se α è parametrizzata per lunghezza d'arco, otteniamo la formula per la curvatura orientata:

$$\boxed{k = \frac{d\theta}{ds}}$$

Possiamo quindi determinare una curva piana, nota la sua curvatura orientata in funzione della lunghezza d'arco, mediante due quadrature: avremo infatti

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^{s} k(\xi)d\xi$$

e le componenti $x(s)$ e $y(s)$ di α rispetto alle coordinate cartesiane di $\mathbb{R}^2$ si ottengono da:

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^{s} cos(\theta(\xi))d\xi$$

$$y(s) = y_0 + \int_{s_0}^{s} sin(\theta(\xi))d\xi.$$

Esempio. Determiniamo una curva piana α con la proprietà che la sua tangente in ogni punto $\alpha(t)$ formi un angolo costante $\phi \in [0, \pi/2]$ con la retta uscente dall'origine e passante per il punto $\alpha(t)$.

È conveniente introdurre coordinate polari, cioè cercare la curva nella forma

$$\begin{cases} x = r(t)\cos(\theta(t)) \\ y = r(t)\sin(\theta(t)). \end{cases}$$

La tangente alla curva in t è data da:

$$\dot{r}(t)\begin{pmatrix}\cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t))\end{pmatrix} + r\dot{\theta}\begin{pmatrix}-\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t))\end{pmatrix}.$$

Dalla condizione:

$$|\dot{\alpha}|^{-1}|\alpha|^{-1}(\dot{\alpha}|\alpha) = \cos\phi$$

ricaviamo:

$$\dot{r}(t) = \cos\phi\sqrt{\dot{r}^2(t) + r^2\dot{\theta}^2(t)}.$$

Calcolando i quadrati delle due espressioni otteniamo:

$$\frac{\dot{r}(t)}{r(t)}\sin\phi = \pm\dot{\theta}(t)\cos\phi$$

e dunque integrando otteniamo, a seconda della scelta del segno, le due curve:

$$\log r(t)\sin\phi = \text{costante} + \theta(t)\cos\phi$$

$$\log r(t)\sin\phi = \text{costante} - \theta(t)\cos\phi.$$

I due casi estremi sono rappresentati da $\phi = 0, \pi/2$: nel primo θ è costante e la curva è una semiretta uscente dall'origine. Nel secondo r è costante e la curva è una circonferenza con centro nell'origine. Se $0 < \phi < \pi/2$, possiamo usare θ come parametro sulla curva, ottenendo:

$$r(\theta) = r_0 e^{a\theta}$$

con $a = \pm\cot\phi$. In coordinate cartesiane, avremo cioè

$$\begin{cases} x = r_0\cos\theta e^{a\theta} \\ y = r_0\sin\theta e^{a\theta} \end{cases}$$

Una curva di questo tipo si dice una *spirale logaritmica.* La sua curvatura in ogni punto è data da

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\theta}/|\frac{d\alpha}{d\theta}|.$$

Abbiamo quindi:

$$|k(\theta)| = r_0^{-1}\sin\phi e^{-a\theta}.$$

Curve nello spazio ordinario

$SU(2)$ è un rivestimento a due fogli di $SO(3)$. Se rappresentiamo un elemento di $SU(2)$ come un quaternione di modulo 1, la corrispondenza

$$SU(2) \simeq S^3 \ni u \to r_u \in SO(3)$$

associa al quaternione u, che scriveremo come $u = \cos\theta\mathbf{1} + \sin\theta u'$ con u' puramente immaginario, la rotazione di angolo 2θ intorno all'asse u'.

Sia ora $E : J \to SO(3)$ un arco di classe $\mathcal{C}^1$. Fissato $t_0 \in J$ e un elemento $g_0 \in SU(2)$ tale che $r_{g_0} = E(t_0)$, possiamo rialzare in modo unico E a una curva di classe $\mathcal{C}^1$ $g : J \to SU(2)$ in modo che il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{E} & SO(3) \\ \Big\| & & \uparrow \\ J & \xrightarrow[g]{} & SU(2) \end{array}$$

sia commutativo.

Differenziando la relazione $\bar{g} \cdot g = 1$, otteniamo

$$\bar{g} \cdot g' + \bar{g}' \cdot g = 0, \quad \text{cioè} \quad \overline{\bar{g} \cdot g'} = -\bar{g} \cdot g'\,,$$

e dunque $g^{-1}g' = \bar{g} \cdot g'$ è puramente immaginario. Poniamo $\tilde{\Omega}(t) = g^{-1}(t)g'(t) = \bar{g}(t)g'(t)$.

Differenziando la relazione:

$$E(t)(v) = g(t) \cdot v \cdot \bar{g}(t)$$

(ove il vettore $v \in \mathbb{R}^3$ si identifica a un quaternione puramente immaginario) otteniamo

$$E(t)\Omega(t)(v) = g(t) \cdot (\Omega(t)(v)) \cdot \bar{g}(t) = g'(t) \cdot v \cdot \bar{g}(t) - g(t) \cdot v \cdot \bar{g}(t) \cdot g'(t) \cdot \bar{g}(t)$$

da cui

$$\Omega(t)(v) = \tilde{\Omega}(t) \cdot v - v \cdot \tilde{\Omega}(t) = 2\,\tilde{\Omega}(t) \times v$$

ove "$\times$" indica il prodotto esterno in $\mathbb{R}^3$. Il vettore $\tilde{\Omega}$ ha allora coordinate Euclidee $\left(\frac{\tau}{2}, 0, \frac{k}{2}\right)$, ovvero è il quaternione $\frac{\tau}{2}\mathbf{i} + \frac{k}{2}\mathbf{k}$. Le equazioni di Frenet si scrivono quindi nella forma:

$$g'(t) = g(t) \cdot \tilde{\Omega}(t) = \frac{1}{2} g(t) \cdot \left(\frac{\tau}{2}\mathbf{i} + \frac{k}{2}\mathbf{k}\right).$$