GEOMETRIA
CORREZIONE DELLE PROVE D'ESAME

1. Prova del 27 settembre 2011 - A

Esercizio 1.1. Si trovino i valori del parametro reale k per cui il sistema lineare

$$\begin{cases} (k+1)x + (k-4)y + z = k \\ (k+2)x + (k-2)y - kz = 0 \\ x + 2y - (1+k)z = 2k-3 \end{cases}$$

ammette soluzione e si specifichi in quali di tali casi la soluzione sia o no unica.

Soluzione. Calcoliamo innanzi tutto il rango della matrice incompleta del sistema. È

$$\begin{vmatrix} k+1 & k-4 & 1 \\ k+2 & k-2 & -k \\ 1 & 2 & -1-k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+1 & k-4 & 1 \\ 1 & 2 & -1-k \\ 1 & 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0,$$

in quanto la seconda matrice è ottenuta dalla prima sottraendo dalla seconda la prima riga. La matrice incompleta ha quindi rango al più uguale a due ed ha rango due per ogni valore del parametro reale k perché

$$\begin{vmatrix} k+1 & 1 \\ 1 & -1-k \end{vmatrix} = -(k+1)^2 - 1 < 0.$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema non ammette mai soluzione unica, ed ammette infinite soluzioni, che dipendono da un parametro reale, per i valori di k per cui la matrice completa ha anch'essa rango due. Poiché la prima e la terza colonna della matrice incompleta sono linearmente indipendenti per ogni valore reale di k, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema lineare sia risolubile è che si annulli il determinante

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} k+1 & 1 & k \\ k+2 & -k & 0 \\ 1 & -1-k & 2k-3 \end{vmatrix} &= -3k^3 - 3k^2 + 6 \\ &= -3(k^3 + k^2 - 2) = -3(k-1)(k^2 + 2k + 2) \\ &= -3(k+1)^2[(k+1)^2 + 1]. \end{aligned}$$

L'unico valore reale di k per cui il sistema ammette soluzione è dunque $k = 1$, ed in questo caso le soluzioni sono infinite e dipendono in modo affine da un parametro reale. □

Esercizio 1.2. Si consideri la matrice reale
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Se ne trovino gli autovalori e , dopo averne calcolato la molteplicità geometrica ed algebrica, si determini la forma di Jordan di A.

Soluzione. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:
$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2.$$
La matrice A ammette quindi due autovalori, $-1, +1$, ciascuno con molteplicità algebrica due. Calcoliamo la molteplicità geometrica. Scriviamo $M_1 \sim M_2$ per indicare che due matrici hanno lo stesso rango. Per $\lambda = -1$ abbiamo
$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Quindi $A + I$ ha rango due e perciò l'autovalore -1 ha molteplicità geometrica due.

Analogamente abbiamo, per l'autovalore 1,
$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Quindi $A - I$ ha rango due e perciò anche la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è due. Poché molteplicità algebriche e geometriche coincidono, la matrice A è diagonalizzabile, e la sua forma di Jordan coincide con la forma diagonale
$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Esercizio 1.3. Al variare del parametro reale k, si determini il tipo della quadrica affine Q_k, d'equazione

$$x^2 + (1-k)y^2 + kz^2 - 2xy + 2z = 0.$$

Soluzione. La matrice associata alla quadrica è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & (1-k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo allora

$$\begin{cases} D_1 = 1, \\ D_2 = -k, \\ D_3 = -k^2, \\ D_4 = k. \end{cases}$$

La quadrica è dunque non degenere se $k \neq 0$. Per $k = 0$ otteniamo la quadrica degenere

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2z = 0, \quad \text{cioè} \quad (x-y)^2 + 2z = 0,$$

che è l'equazione di un cilindro con base parabolica.

Se $k \neq 0$, la quadrica è non degenere ed abbiamo

$$\begin{cases} D_1 > 0,\ (D_2/D_1) > 0,\ (D_3/D_2) < 0,\ (D_4/D_3) > 0 \text{ se } k < 0, \\ D_1 > 0,\ (D_2/D_1) < 0,\ (D_3/D_2) > 0,\ (D_4/D_3) < 0 \text{ se } k > 0. \end{cases}$$

Quindi la quadrica è un iperboloide a due falde per $k < 0$ ed un iperboloide ad una sola falda per $k > 0$. Infatti nel primo caso la quadrica proiettiva corrispondente è un elissoide che interseca l'iperpiano all'infinito in una conica non vuota, nel secondo la quadrica proiettiva corrispondente è la rigata. Abbiamo quindi

$$\begin{cases} k < 0 \Rightarrow Q_k \text{ è un iperboloide a due falde,} \\ k = 0 \Rightarrow Q_k \text{ è un cilindro a base parabolica,} \\ k > 0 \Rightarrow Q_k \text{ è un iperboloide ad una falda.} \end{cases}$$

$\square$

2. Prova del 27 Settembre 2011 - B

Esercizio 2.1. Si trovino i valori del parametro reale k per cui il sistema lineare

$$\begin{cases} x + (2k-3)y + z = 4 - 2k \\ (5-3k)x + y - 2z = 2k - 3 \\ (6-3k)x + (2k-2)y - z = 1 \end{cases}$$

ammette soluzione e si specifichi in quali di tali casi la soluzione sia o no unica.

Soluzione. Calcoliamo il rango della matrice incompleta. Il suo determinante è

$$\begin{vmatrix} 1 & 2k-3 & 1 \\ 5-3k & 1 & -2 \\ 6-3k & 2k-2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2k-3 & 1 \\ 5-3k & 1 & -2 \\ 1 & 2k-3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ove la seconda matrice si ottiene dalla prima sottraendone dalla terza la seconda riga. Poiché

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5-3k & -2 \end{vmatrix} = 3k-7, \quad \begin{vmatrix} 2k-3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5-4k,$$

ed i binomi $3k-7$ e $5-4k$ non hanno radici comuni, la matrice incompleta ha rango due per ogni scelta del parametro k. Il sistema non ammette quindi mai soluzione unica, ed ammette un'infinità di soluzioni dipendenti linearmente da un parametro reale quando il rango della matrice completa sia anch'esso uguale a due.

Basta considerare i due minori di rango tre che si ottengono dalla matrice completa cancellando la prima e la seconda colonna. Otteniamo:

$$\begin{vmatrix} 2k-3 & 1 & 4-2k \\ 1 & -2 & 2k-3 \\ 2k-2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4-2k \\ 5-3k & -2 & 2k-3 \\ 6-3k & -1 & 1 \end{vmatrix} = 14-6k$$

e quindi il sistema assegnato ammette soluzione se e soltanto se $k = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$. Per tale valore ci sono infinite soluzioni, che dipendono linearmente da un parametro reale. □

Esercizio 2.2. Si consideri la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se ne trovino gli autovalori e , dopo averne calcolato la molteplicità geometrica ed algebrica, si determini la forma di Jordan di A.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ -8 & -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

e quindi A ha autovalori $-1, +1$, entrambi con molteplicità algebrica due. Calcoliamo il rango della matrice $A+I$. Abbiamo

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indicando con il simbolo $\sim$ tra due matrici il fatto che esse abbiano lo stesso rango, otteniamo

$$A + I \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Poiché $\det B = -9 \neq 0$, la matrice $A+I$ ha rango tre. Di conseguenza l'autovalore -1 ha molteplicità geometrica 1. Abbiamo poi

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} = C$$

Poiché $\det C = 9 \neq 0$, la matrice $A-I$ ha rango tre e perciò l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica 1. A ciascuno dei due autovalori corrisponde pertanto un autospazio generalizzato di dimensione due e la forma di Jordan di A sarà quindi

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 2.3. Al variare del parametro reale k, si determini il tipo della quadrica affine Q_k, d'equazione

$$kx^2 + (1-k)y^2 + z^2 + 2xy + 4z = 1.$$

Soluzione. La matrice associata alla quadrica è

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & (1-k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{cases} D_1 = k, \\ D_2 = -k^2 + k - 1, \\ D_3 = -k^2 + k - 1, \\ D_4 = 5(k^2 - k + 1). \end{cases}$$

Poiché il polinomio $k^2 - k + 1 = (k - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ non ha radici reali, la quadrica è non degenere per ogni valore di k. Abbiamo poi

$$\begin{cases} D_1 < 0,\ D_2/D_1 > 0,\ D_3/D_2 = 1 > 0,\ D_4/D_3 = -5 < 0 & \text{se } k < 0, \\ D_1 > 0,\ D_2/D_1 < 0,\ D_3/D_2 = 1 > 0,\ D_4/D_3 = -5 < 0 & \text{se } k > 0, \end{cases}$$

e quindi per ogni $k \neq 0$ la quadrica proiettiva è una rigata e la quadrica affine corrispondente un iperboloide ad una falda. Per $k = 0$ otteniamo la quadrica

$$y^2 + z^2 + 2xy + 4z = 1, \quad \text{cioè} \quad y(2x + y) + (z + 2)^2 = 5.$$

Nelle nuove coordinate

$$\xi = x + y,\ \eta = z + 2,\ \zeta = x,$$

l'equazione diventa

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2 + 5,$$

che riconosciamo essere l'equazione di un iperboloide a una falda. In conclusione, per ogni valore del parametro reale k la quadrica Q_k è un iperboloide a una falda. □

3. Prova del 28 giugno 2011 - A

Esercizio 3.1. Si calcoli, al variare del parametro reale k, il rango della matrice

$$M = \begin{pmatrix} k & 1+k & 1 & 2 \\ 2 & k & 1+k & 1 \\ k & -1 & 1 & k-2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Il determinante della matrice formata dalla prima, dalla terza e dalla quarta colonna è

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 2 \\ 2 & 1+k & 1 \\ k & 1 & k-2 \end{vmatrix} = k^3 - 3k^2 - 6k + 8.$$

Esso ha le radici intere $-2, 1, 4$. Otteniamo in corrispondenza le matrici

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 54 \neq 0,$$

la matrice M ha rango 3 per tutti i $k \neq 1$. Per $k = 1$ la matrice M ha la prima colonna uguale alla terza, la seconda uguale alla quarta e prima e seconda non proporzionali. Quindi il sottospazio generato dalle colonne ha dimensione due ed M ha rango 2 per $k = 1$. □

Esercizio 3.2. Si consideri la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se ne trovino gli autovalori e , dopo averne calcolato la molteplicità geometrica ed algebrica, si determini la forma di Jordan di A.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1,$$

che ha le due radici reali $-1, 1$, che sono gli autovalori di A. Poiché $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$, ciascuno dei due autovalori ha molteplicità algebrica 2. Consideriamo ora le matrici

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

le matrici $A + I$ ed $A - I$ hanno entrambe rango 3. Ne segue che i due autovalori di A hanno entrambi molteplicità geometrica 1. La forma di Jordan di A è perciò

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 3.3. Al variare del parametro reale k, si determini il tipo della quadrica affine Q_k, d'equazione

$$x^2 + ky^2 + (2-k)z^2 + 2yz + x = 1.$$

Soluzione. Abbiamo

$$\begin{cases} D_1 = 1, \\ D_2 = k, \\ D_3 = -(k-1)^2, \\ D_4 = \frac{5(k-1)^2}{4} \end{cases}$$

La quadrica è non degenere per $k \neq 1$. Inoltre, se $k < 0$, la forma quadratica associata ha segnatura $+, -, +, -$, e dunque la quadrica è un iperboloide a una falda (rigata); se $k > 0$, la segnatura è $+, +, -, -$ ed abbiamo quindi ancora un iperboloide a una falda. Per $k = 0$ otteniamo la quadrica

$$x^2 + 2z^2 + 2yz + x = 1$$

Scambiando le variabili y e z la matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ancora con segnatura $+, +, -, -$ e quindi anche in questo caso la Q_0 è un iperboloide a una falda. Per $k = 1$ abbiamo la quadrica

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + x = 1, \quad \text{cioè} \quad (x + \tfrac{1}{2})^2 + (y+z)^2 = \tfrac{3}{4},$$

che è un cilindro circolare retto. □

4. Prova del 28 giugno 2011 - B

Esercizio 4.1. Si calcoli, al variare del parametro reale k, il rango della matrice

$$M = \begin{pmatrix} k & 1+k & 1 & 2 \\ 1 & 2k & k & 2 \\ k-1 & 2+k & 2 & k \end{pmatrix}.$$

soluzione. La matrice M ha lo stesso rango della matrice N che da essa si ottiene sostituendo alla seconda riga la sua differenza con la terza:

$$N = \begin{pmatrix} k & k & 1 & 2 \\ 1 & k & k & 2 \\ k-1 & k & 2 & k \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 2 \\ k & k & 2 \\ k & 2 & k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 2 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 2 & k-2 \end{vmatrix} = k(k-2)(k-1).$$

Quindi M ha rango 3 se $k \neq 0, 1, 2$. Per questi valori di k otteniamo le matrici

$$M(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

la matrice M ha rango 3 anche per $k = 0, 2$. Per $k = 1$ osserviamo che la prima e la seconda riga sono uguali e la prima e la terza riga linearmente indipendenti. Quindi M ha rango 2 per $k = 1$ e rango 3 per $k \neq 2$. $\square$

Esercizio 4.2. Si consideri la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se ne trovino gli autovalori e, dopo averne calcolato la molteplicità geometrica ed algebrica, si determini la forma di Jordan di A.

Soluzione. Abbiamo

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2.$$

La A ha quindi due autovalori reali, $-1, 1$, ciascuno con molteplicità algebrica 2. Abbiamo poi

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

gli autovalori $-1, 1$ hanno entrambi molteplicità geometrica 1. La forma di Jordan di A è quindi

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Esercizio 4.3. Al variare del parametro reale k, si determini il tipo della quadrica affine Q_k, d'equazione

$$x^2 + (k+1)y^2 - kz^2 + 2xy + 2yz + 4z = 2.$$

Soluzione. La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -k & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{cases} D_1 = 1, \\ D_2 = k, \\ D_3 = -k^2 - 1, \\ D_4 = 2(k^2 - 2k + 1) = 2(k-1)^2. \end{cases}$$

La quadrica Q_k è non degenere per $k \neq 1$. Per $k \neq 0, 1$ ha segnatura $+, +, -, -$ ed è perciò un iperboloide a una falda. Per $k = 0$ la Q_0 ha equazione

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2yz + 4z = (x+y)^2 + 2yz + 4z = 2$$

ed è perciò anche in questo caso un iperboloide a una falda. Per $k = 1$ otteniamo

$$x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy + 2yz + 4z = 2,$$

che è l'equazione di un cono con vertice nel punto $(1, -1, 1)$. Il vertice $(1, 0, -1)$ è infatti la soluzione delle equazioni per il centro

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0, \\ 4y + 2x + 2z = 0, \\ -2z + 2y + 4 = 0. \end{cases}$$

Nelle nuove variabili $\xi = x - 1$, $\eta = y + 1$, $\zeta = z - 1$, otteniamo l'equazione omogenea

$$(*) \qquad \xi^2 + 2\eta^2 - \zeta^2 + 2\xi\eta + 2\eta\zeta = 0,$$

che, essendo il primo membro di $(*)$ una forma quadratica di segnatura $+, +, -$, rappresenta un cono. $\square$