Corso di Laurea in Scienza dei Materiali

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 25/02/2014
SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia A il punto di $\mathbb{R}^3$ di coordinate $(2, 1, 3)$ ed r la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 3t - 2, \\ z = t - 3. \end{cases}$$

(1) Si descriva in forma parametrica la retta r' che passa per A ed interseca perpendicolarmente r.
(2) Si calcoli la distanza del punto A dalla retta r.
(3) Sia B il punto di coordinate $(0, 1, 1)$. Le rette r ed AB sono sghembe?

Soluzione. (1) La direzione di r è parallela al vettore $v = {}^t(-2, 3, 1)$. La retta r' giace sul piano α, passante per A e perpendicolare alla retta r, che ha equazione

$$\alpha : \; -2x + 3y + z = 2$$

Esso interseca la retta r nel punto P_t corrispondente alla soluzione t dell'equazione

$$-2(1 - 2t) + 3(3t - 2) + t - 3 = 13t - 11 = 2 \Longleftrightarrow t = 1.$$

Quindi la retta r' è la retta per il punto A ed il punto P_1 di coordinate $(-1, 1, -2)$:

$$r' : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 1, \\ z = 5t - 2. \end{cases}$$

(2) La distanza d del punto A dalla retta r è la lunghezza del segmento AP_1 ed è quindi uguale a

$$d = \sqrt{3^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{34}.$$

(3) La retta AB si può rappresentare come $A + \mathbb{R} \cdot \vec{AB}$. La condizione per cui le rette AB ed r siano sghembe è che i vettori $\vec{AB}, v, AP_1$ siano linearmente indipendenti, cioè che

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3(-10 + 6) = -12 \neq 0.$$

□

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 5×5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dica se A è invertibile.
(2) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(3) Si trovi la sua forma di Jordan.

Soluzione. (1) La matrice A è triangolare superiore, quindi il suo determinante è il prodotto degli elementi della sua diagonale principale. Tale prodotto è 0 e quindi la matrice A non è invertibile.

(2) Poiché la matrice A è triangolare superiore, i suoi autovalori sono gli elementi della sua diagonale principale. Quindi A ha autovalore 0, con molteplicità algebrica 1, ed 1, con molteplicità algebrica 4. La molteplicità geometrica di 0 è 1. La molteplicità geometrica di 1 è cinque meno il rango della matrice

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $A - I$ ha due colonne nulle e quindi rango minore o uguale a tre. Ha rango tre perché il minore delle prime tre righe e della prima, quarta e quinta colonna

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante 1, diverso da zero. Quindi l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica 2. I vettori e_2 ed e_3 della base canonica sono autovettori relativi all'autovalore 1 ed e_1 è un autovettore relativo all'autovalore 0. Osserviamo che, posto $B = A - I$, abbiamo

$$B(e_5 + 2e_1) = e_2 + e_4,\ B^2(e_5 + 2e_1) = e_2 + e_3,\ B^3(e_5 + 2e_1) = 0.$$

Quindi il polinomio minimo di A contiene il fattore $(\lambda - 1)^3$ e dunque nella forma canonica di A ci sarà un blocco di Jordan di ordine 3 relativo all'autovalore 1. Una forma di Jordan di A è perciò

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Esercizio 3. Si classifichi, al variare del parametro reale k, la quadrica affine Q_k di $\mathbb{R}^3$ di equazione

$$Q_k : \ x^2 + y^2 + 2kxy + (2+k)z^2 + 2kx = k.$$

Proof. La matrice simmetrica associata a Q_k è

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & k \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+k & 0 \\ k & 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

I determinanti $D_3(k)$ della matrice incompleta

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+k \end{pmatrix}$$

e D_4 della matrice completa sono rispettivamente:

$$\begin{cases} D_3(k) = (k+2)(k^2-1), \\ D_4(k) = k(k+2)(k^2-k-1). \end{cases}$$

La quadrica è a centro quando $k \neq -2, \pm 1$ e non degenere se $k \neq 0, -2, \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Abbiamo quindi la casistica seguente:

intervallo	sgn A_k	B_k	tipo
$k < -2$	$+--$	$D_4 > 0$	iperboloide a una falda
$k = -2$	$+-0$	$\operatorname{rk} B_k = 3$	cilindro iperbolico
$-2 < k < -1$	$++-$	$D_4 < 0$	iperboloide a due falde
$k = -1$	$++0$	$D_4 = -1 < 0$	paraboloide ellittico
$-1 < k < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$+++$	$D_4 < 0$	elissoide
$k = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$+++$	$D_4 = 0$	un punto
$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < k < 0$	$+++$	$D_4 > 0$	$\emptyset$
$k = 0$	$+++$	$D_4 = 0$	un punto
$0 < k < 1$	$+++$	$D_4 < 0$	elissoide
$k = 1$	$++0$	$D_4 < 0$	paraboloide ellittico
$1 < k < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$++-$	$D_4 < 0$	iperboloide a una falda
$k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$++-$	$D_4 = 0$	cono
$k > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$++-$	$D_4 > 0$	iperboloide a due falde.

$\square$

Esercizio 4. Sia A il punto di $\mathbb{R}^3$ di coordinate $(2,1,3)$ ed r la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 3t - 2, \\ z = 1. \end{cases}$$

(1) Si descriva in forma parametrica la retta r' che passa per A ed interseca perpendicolarmente r.
(2) Si calcoli la distanza del punto A dalla retta r.
(3) Sia B il punto di coordinate $(0, 1, 1)$. Le rette r ed AB sono sghembe?

Soluzione. (1) La direzione di r è parallela al vettore $v = {}^t(-2, 3, 0)$. La retta r' giace sul piano α, passante per A e perpendicolare alla retta r, che ha equazione

$$\alpha: \ 2x - 3y = 1$$

Esso interseca la retta r nel punto P_t corrispondente alla soluzione t dell'equazione

$$2(1-2t) - 3(3t-2) = 1 \Longleftrightarrow t = \frac{7}{13}.$$

Quindi la retta r' è la retta per il punto A ed il punto P_1 di coordinate $(-\frac{1}{13}, -\frac{5}{13}, 1)$. È $\vec{P_1A} = {}^t(\frac{27}{13}, \frac{18}{13}, 2)$ e quindi

$$r': \begin{cases} x = \frac{27}{13}t + 2 \\ y = \frac{18}{13}t + 1, \\ z = 2t + 3. \end{cases}$$

(2) La distanza d del punto A dalla retta r è la lunghezza del segmento AP_1 ed è quindi uguale a

$$d = \sqrt{(2713)^2 + (1813)^2 + 4} = \sqrt{\frac{1729}{169}} \simeq 3,19857.....$$

(3) La retta AB si può rappresentare come $A + \mathbb{R} \cdot \vec{AB}$. La condizione per cui le rette AB ed r siano sghembe è che i vettori $\vec{AB}, v, \vec{PA}$, ove $P = (1, -2, 1)$, siano linearmente indipendenti, cioè che

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

□