

**Lezioni sulle rappresentazioni di gruppi**  
**2009-2010**  
**(II Semestre)**

Mauro Nacinovich



## Indice

Capitolo I. Gruppi topologici	7
1.1. Definizioni principali	7
1.2. Il gruppo degli omeomorfismi di uno spazio topologico	8
1.3. Proprietà generali dei gruppi topologici	9
1.4. Omomorfismi di gruppi topologici	14
1.5. Caratteri	16
Capitolo II. Esponenziale di matrici	17
2.1. Spazi di matrici	17
2.2. L'applicazione esponenziale	20
2.3. Matrici Hermitiane	26
2.4. Decomposizione di Cartan delle matrici di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$	29
2.5. Le decomposizioni di Gauss e di Iwasawa	30
Capitolo III. Gruppi lineari e loro algebre di Lie	35
3.1. Algebre di Lie	35
3.2. Jacobiano dell'applicazione esponenziale	39
3.3. Algebra di Lie di un gruppo lineare	44
3.4. Algebre di Lie dei gruppi lineari e dei gruppi lineari speciali	46
3.5. Sottogruppi di Lie del gruppo lineare	47
Capitolo IV. Gruppi lineari compatti	53
4.1. Proprietà topologiche di $\mathbf{U}(n)$	53
4.2. Il gruppo speciale unitario	55
4.3. I gruppi $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$	56
4.4. L'omomorfismo canonico $\mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$	58
4.5. Il gruppo unitario simplettico $\mathbf{Sp}(n)$	61
4.6. Sfere e gruppi compatti	63
4.7. Rivestimenti e gruppo degli spinori	65
Capitolo V. La lista di Cartan dei gruppi classici	67
5.1. Decomposizione di Cartan dei gruppi classici	67
5.2. Alcuni gruppi di matrici e le loro algebre di Lie	70
5.3. I gruppi $\mathbf{U}(p, q)$ e $\mathbf{SU}(p, q)$	72
5.4. I gruppi $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ e $\mathbf{SU}^*(2n)$	73
5.5. I gruppi $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ e $\mathbf{SO}^*(2n)$	74
5.6. I gruppi $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$	76

5.7. I gruppi $\mathbf{SO}(p, q)$	76
Capitolo VI. Spinori	79
6.1. Rivestimenti	79
6.2. Il gruppo degli spinori	81
6.3. Algebre di Clifford	81
6.4. Spazi di Spinori	82
6.5. Immersione dell'algebra di Lie ortogonale nell'algebra di Clifford	87
6.6. I gruppi $\mathbf{O}_k(V, \beta)$ , $\mathbf{Pin}_k(V, \beta)$ , $\mathbf{Spin}_k(V, \beta)$	87
Capitolo VII. Algebre di Lie	91
7.1. Nozioni fondamentali	91
7.2. Algebre di Lie lineari, derivazioni, rappresentazione aggiunta	92
7.3. Rappresentazioni lineari	95
7.4. Forme invarianti	97
7.5. Automorfismi	98
7.6. Algebre di Lie risolubili	99
7.7. Algebre di Lie semisemplici	100
7.8. Algebre di Lie nilpotenti	100
7.9. Il teorema di Engel	101
7.10. Il Teorema di Lie	103
7.11. Il più grande ideale di nilpotenza di una rappresentazione	105
7.12. Il radicale nilpotente e il nilradicale	106
7.13. Automorfismi speciali	109
Capitolo VIII. Criteri di Cartan ed algebre di Lie semisemplici	111
8.1. La decomposizione di Wedderburn	111
8.2. Il criterio di risolubilità di Cartan	113
8.3. La forma di Killing	115
8.4. Alcune proprietà delle algebre di Lie semisemplici	117
8.5. L'elemento di Casimir di una rappresentazione	118
8.6. Il teorema di Weyl	120
8.7. Algebre di Lie spezzabili	121
Capitolo IX. Coomologia delle algebre di Lie e teorema di Levi-Malcev	125
9.1. Coomologia delle algebre di Lie	125
9.2. Una successione esatta lunga	132
9.3. Coomologia delle algebre di Lie semisemplici. I	134
9.4. Il teorema di Weyl	136
9.5. Coomologia delle algebre di Lie semisemplici. II	136
9.6. Il teorema di Levi-Malcev	137
Capitolo X. Algebra involupante universale e Teorema di Ado	141
10.1. Algebra involupante universale	141
10.2. Ideali cofiniti e rappresentazioni ideali	142
10.3. Rappresentazioni di dimensione finita ed ideali cofiniti	143
10.4. Estensione di rappresentazioni ideali	145

10.5. Il teorema di Ado	146
Capitolo XI. Gruppi di Lie astratti	149
11.1. Gruppi e algebre di Lie astratte	149
11.2. Struttura dei gruppi di Lie astratti	153
11.3. Il commutatore	155
11.4. Gruppi di Lie nilpotenti e risolubili	157
11.5. Rappresentazioni lineari di gruppi di Lie	161
Capitolo XII. Misura di Haar e rappresentazioni lineari	165
12.1. Richiami di teoria della misura	165
12.2. La misura di Haar	166
12.3. Gruppi unimodulari	171
12.4. Misure relativamente invarianti sugli spazi omogenei	172
12.5. Misura di Haar nei gruppi di Lie	176
12.6. Rappresentazioni dei gruppi topologici	178
12.7. Rappresentazioni dei gruppi lineari	180
12.8. Operatori di Radon	182
12.9. Prodotto di convoluzione	183
12.10. Operatori associati a una rappresentazione	185
Capitolo XIII. Rappresentazioni dei gruppi compatti	187
13.1. Relazioni di ortogonalità di Schur	187
13.2. Il teorema di Peter-Weyl	190
13.3. Applicazioni del Teorema di Peter-Weyl	195
13.4. Gruppi di Lie compatti	197
Capitolo XIV. Sistemi di radici delle algebre di Lie semisemplici	199
14.1. Potenze tensoriali, simmetriche e alternate di una rappresentazione	199
14.2. Rappresentazioni lineari di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$	200
14.3. Sottoalgebre torali	202
14.4. Alcune proprietà del sistema delle radici	205
14.5. Proprietà di razionalità del sistema delle radici	207
Capitolo XV. Sistemi astratti di radici	209
15.1. Definizioni principali	209
15.2. Relazioni tra coppie di radici	211
15.3. Basi e camere di Weyl di un sistema di radici	213
15.4. Gruppo di Weyl e camere di Weyl	216
15.5. Sistemi di radici irriducibili	219
15.6. Proprietà dei sistemi di radici irriducibili	220
Capitolo XVI. Classificazione dei sistemi di radici	223
16.1. Grafi	223
16.2. Matrici di Cartan	225
16.3. Diagrammi di Dynkin	225
16.4. Costruzione dei sistemi di radici ridotti irriducibili	230

16.5. Sistemi di radici non ridotti	240
Capitolo XVII. Costruzione delle algebre di Lie semisemplici	243
17.1. Algebra involuante universale	243
17.2. Algebre di Lie libere	246
17.3. Una costruzione preliminare	248
17.4. Costruzione dell'algebra di Lie semisemplice	251
Capitolo XVIII. Sottoalgebre di Cartan e di Borel	257
18.1. Elementi regolari e algebre di Cartan	257
18.2. Coniugazione delle sottoalgebre di Cartan di un'algebra di Lie risolubile	260
18.3. Automorfismi elementari	264
18.4. Sottoalgebre di Borel e coniugazione delle algebre di Cartan	265
Capitolo XIX. Forme reali	271
19.1. Sistemi di Chevalley	271
19.2. Forma compatta e forma split	274
19.3. La decomposizione di Cartan	275
19.4. Le algebre semisemplici classiche	278
Capitolo XX. Spazi simmetrici	285
20.1. Spazi affini localmente simmetrici	285
20.2. Alcuni risultati sui gruppi di trasformazioni	288
20.3. Automorfismi affini e isometrie	293
20.4. Spazi Riemanniani globalmente simmetrici	299
20.5. Coppie simmetriche e simmetriche Riemanniane	302
20.6. Automorfismi affini e isometrie	305
Capitolo XXI. Complementi su connessioni e spazi omogenei	311
21.1. $\mathbf{G}$ -connessioni principali	311
21.2. Equazioni di gauge	313
21.3. Forme tensoriali e pseudotensoriali	315
21.4. Forma di curvatura ed equazioni di struttura	317
21.5. Connessioni principali e derivazione covariante	318
21.6. Forme di Christoffel	320
21.7. Connessioni lineari	321

## CAPITOLO I

### Gruppi topologici

#### 1.1. Definizioni principali

Dato un gruppo  $\mathbf{G}$  e un elemento  $a$  di  $\mathbf{G}$ , indichiamo con  $R_a$ ,  $L_a$  e  $\text{ad}(a)$ , rispettivamente, le applicazioni bigettive di  $\mathbf{G}$  in sè:

$$(1.1.1) \quad R_a : \mathbf{G} \ni g \longrightarrow ga \in \mathbf{G} \quad (\text{traslazione a destra})$$

$$(1.1.2) \quad L_a : \mathbf{G} \ni g \longrightarrow ag \in \mathbf{G} \quad (\text{traslazione a sinistra})$$

$$(1.1.3) \quad \text{ad}_a : \mathbf{G} \ni g \longrightarrow aga^{-1} \in \mathbf{G} \quad (\text{aggiunta})$$

Se  $a \in \mathbf{G}$  e  $A$  è un sottoinsieme di  $\mathbf{G}$ , scriveremo a volte  $aA$  invece di  $L_a(A)$  e  $Aa$  invece di  $R_a(A)$ .

Si verifica facilmente che, per ogni  $a, b \in \mathbf{G}$ , valgono le relazioni:

$$(1.1.4) \quad R_a \circ R_b = R_{ba},$$

$$(1.1.5) \quad L_a \circ L_b = L_{ab},$$

$$(1.1.6) \quad L_a \circ R_b = R_b \circ L_a,$$

$$(1.1.7) \quad \text{ad}_a = R_{a^{-1}} \circ L_a = L_a \circ R_{a^{-1}}.$$

**Lemma 1.1.1.** *Le applicazioni*

$$L : \mathbf{G} \ni a \longrightarrow L_a \in \mathfrak{S}(\mathbf{G})$$

$$R : \mathbf{G} \ni a \longrightarrow R_{a^{-1}} \in \mathfrak{S}(\mathbf{G})$$

sono rappresentazioni fedeli del gruppo  $\mathbf{G}$  nel gruppo  $\mathfrak{S}(\mathbf{G})$  delle applicazioni bigettive di  $\mathbf{G}$  in sè.

*L'applicazione*

$$\text{ad} : \mathbf{G} \ni a \longrightarrow \text{ad}(a) \in \text{Aut}(\mathbf{G})$$

è una rappresentazione di  $\mathbf{G}$  nel gruppo dei suoi automorfismi<sup>1</sup>. Abbiamo:

$$\ker \text{ad} = \{a \in \mathbf{G} \mid ag = ga \ \forall g \in \mathbf{G}\}.$$

La rappresentazione  $\text{ad} : \mathbf{G} \longrightarrow \text{Aut}(\mathbf{G})$  si dice la *rappresentazione aggiunta di  $\mathbf{G}$* . Il suo nucleo è il *centro*  $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ : esso è un sottogruppo abeliano normale di  $\mathbf{G}$ .

Se  $V$  è uno spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{k}$ , l'insieme di tutte le applicazioni lineari invertibili  $a : V \longrightarrow V$ , con l'operazione di composizione, è un gruppo. Esso si dice il *gruppo lineare di  $V$*  e si indica con  $\mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V)$ .

<sup>1</sup>Un automorfismo di  $\mathbf{G}$  è un'applicazione bigettiva  $\phi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$  tale che  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$  per ogni  $a, b \in \mathbf{G}$ .

Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo astratto, un omomorfismo  $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V)$  di  $\mathbf{G}$  nel gruppo lineare di uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{k}$ , si dice una *rappresentazione  $\mathbb{k}$ -lineare di  $\mathbf{G}$* .

Una topologia  $\tau$  su un gruppo  $\mathbf{G}$  si dice *compatibile con la struttura di gruppo* se l'applicazione

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g_1, g_2) \longrightarrow g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{G}$$

è continua (per la topologia prodotto su  $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ ).

Ciò equivale al fatto che siano continue le due applicazioni

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g_1, g_2) \longrightarrow g_1g_2 \in \mathbf{G} \quad \text{e} \quad \mathbf{G} \ni g \longrightarrow g^{-1} \in \mathbf{G}.$$

**Definizione 1.1.2.** Un *gruppo topologico* è un gruppo  $\mathbf{G}$  su cui si sia fissata una topologia  $\tau$  compatibile con la sua struttura di gruppo.

**Lemma 1.1.3.** *Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo topologico, allora per ogni  $a \in \mathbf{G}$  le applicazioni  $R_a, L_a, ad_a$  sono omeomorfismi di  $\mathbf{G}$  in sé. Se  $\{e\}$  è chiuso, allora il centro  $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$  è chiuso in  $\mathbf{G}$ . Se  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo di  $\mathbf{G}$ , esso è un gruppo topologico con la topologia di sottospazio indotta da  $\mathbf{G}$ .*

**Osservazione 1.1.4.** La topologia discreta e la topologia indiscreta sono entrambe compatibili con la struttura di gruppo di un qualsiasi gruppo  $\mathbf{G}$ . Quindi ogni gruppo può essere considerato come gruppo topologico.

## 1.2. Il gruppo degli omeomorfismi di uno spazio topologico

Sia  $X$  uno spazio topologico con topologia  $\tau$ . L'insieme  $\mathfrak{S}_\tau(X)$  di tutti gli omeomorfismi di in sé è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni. Consideriamo su  $\mathfrak{S}_\tau(X)$  la topologia  $\tilde{\tau}_X$  che ha come prebase  $\mathcal{U}$  degli aperti gli insiemi

$$\begin{aligned} U(K, A) &= \{\phi \in \mathfrak{S}_\tau(X) \mid \phi(K) \subset A\}, \\ U^{-1}(K, A) &= \{\phi \in \mathfrak{S}_\tau(X) \mid \phi^{-1}(K) \subset A\}, \end{aligned}$$

al variare di  $K$  tra i compatti e di  $A$  tra gli aperti di  $X$ .

Si ottiene una prebase della stessa topologia di  $\mathfrak{S}_\tau(X)$  se si fa variare  $A$  in una prebase degli aperti di  $X$ .

**Teorema 1.2.1.** *Se  $X$  è uno spazio di Hausdorff localmente compatto, allora  $\mathfrak{S}_\tau(X)$ , con la topologia  $\tilde{\tau}_X$ , è un gruppo topologico.*

**DIMOSTRAZIONE.** Chiaramente la  $\mathfrak{S}_\tau(X) \ni \phi \longrightarrow \phi^{-1} \in \mathfrak{S}_\tau(X)$  è continua perché scambia tra loro gli aperti  $U(K, A)$  e  $U^{-1}(K, A)$  della prebase  $\mathcal{U}$ .

Dimostriamo che anche la

$$\lambda : \mathfrak{S}_\tau(X) \times \mathfrak{S}_\tau(X) \ni (\phi, \psi) \longrightarrow \phi \circ \psi \in \mathfrak{S}_\tau(X)$$

è continua. Siano  $K$  un compatto e  $A$  un aperto di  $X$  e siano  $\phi_0, \psi_0$  due omeomorfismi in  $\mathfrak{S}_\tau(X)$  tali che  $\phi_0(\psi_0(K)) \subset A$ .

Poiché  $\psi_0(K)$  è un compatto di  $X$  contenuto in  $A$ , possiamo trovare un intorno aperto relativamente compatto  $V$  di  $\psi_0(K)$  tale che  $\bar{V} \Subset A$ .

Allora, se  $\psi \in U(K, V)$  e  $\phi \in U(\bar{V}, A)$ , abbiamo  $\phi \circ \psi(K) \subset A$ .

Quindi  $\lambda^{-1}(U(K, A)) \supset U(\bar{V}, A) \times U(K, V) \ni (\phi_0, \psi_0)$  è un intorno aperto di ogni suo punto e quindi un aperto.

In modo analogo, se  $(\phi_0 \circ \psi_0)^{-1}(K) \subset A$ , scegliamo un intorno aperto  $V$  del compatto  $\phi_0^{-1}(K)$  con  $\bar{V} \Subset A$ .

Allora  $\lambda^{-1}(U^{-1}(K, A)) \supset U^{-1}(K, V) \times U^{-1}(\bar{V}, A) \ni (\phi_0, \psi_0)$  dimostra che  $\lambda^{-1}(U^{-1}(K, A))$  è intorno di ogni suo punto e quindi aperto.

Pertanto  $\lambda$  è continua.  $\square$

**Teorema 1.2.2.** *Se  $X = (X, \tau_X)$  è uno spazio di Hausdorff localmente compatto e localmente connesso, allora la topologia  $\tilde{\tau}_X$  su  $\mathfrak{S}_\tau(X)$  coincide con la topologia compatta-aperta.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sarà sufficiente dimostrare che, se  $K$  è un compatto ed  $A$  un aperto di  $X$ , l'insieme  $U^{-1}(K, A)$  è aperto nella topologia compatta-aperta di  $\mathfrak{S}_\tau(X)$ . Poiché per ipotesi gli aperti relativamente compatti di  $X$  formano una base di  $\tau_X$ , possiamo limitarci a considerare il caso in cui  $A$  sia relativamente compatto in  $X$ . Possiamo inoltre supporre che  $K$  abbia parte interna non vuota e connessa. Infatti, fissato  $\phi_0$  in  $U^{-1}(K, A)$ , possiamo trovare un ricoprimento finito  $\{U_1, \dots, U_n\}$  di  $K$  mediante aperti connessi e relativamente compatti con  $\phi_0^{-1}(\bar{U}_j) \subset A$  per ogni  $j = 1, \dots, n$ . Allora

$$\phi_0 \in \bigcap_{j=1}^n U^{-1}(\bar{U}_j, A) \subset U^{-1}(K, A)$$

e sarà allora sufficiente verificare che ciascuno degli insiemi  $U^{-1}(\bar{U}_j, A)$  sia aperto in  $\mathfrak{S}_\tau(X)$  per la topologia compatta-aperta.

Supponiamo quindi che  $A$  sia un aperto relativamente compatto di  $X$  e che  $K$  sia un compatto di  $X$  con parte interna connessa.

Sia  $\phi_0$  un elemento di  $U^{-1}(K, A)$ ; fissiamo un punto  $x_0 \in A$  la cui immagine  $\phi_0(x_0)$  mediante  $\phi_0$  sia un punto interno di  $K$ , e consideriamo l'aperto

$$W = U(\{x_0\}, K) \cap U(\bar{A} \setminus A, X \setminus K)$$

della topologia compatta-aperta di  $\mathfrak{S}_\tau(X)$ . L'immagine della frontiera  $bA = \bar{A} \setminus A$  dell'aperto  $A$  mediante un omeomorfismo  $\phi$  di  $W$  non interseca il compatto  $K$ ; quindi  $\phi^{-1}(K) \subset A \cup (X \setminus \bar{A})$ .

Osserviamo che  $K$  è connesso perché ha parte interna connessa. Quindi  $\phi^{-1}(K)$  è connesso e quindi contenuto o in  $A$  o nel complementare  $X \setminus \bar{A}$  della sua chiusura. Poiché  $\phi \in U(\{x_0\}, K)$ , otteniamo  $\phi^{-1}(x_0) \in \phi^{-1}(K) \cap A$  e dunque  $\phi^{-1}(K) \subset A$ . Ciò dimostra che  $W \subset U^{-1}(K, A)$ . Abbiamo dimostrato in questo modo che  $U^{-1}(K, A)$  è intorno di ogni suo punto e quindi aperto nella topologia compatta-aperta di  $\mathfrak{S}_\tau(X)$ .  $\square$

### 1.3. Proprietà generali dei gruppi topologici

**Teorema 1.3.1.** *La componente connessa  $G_e$  dell'identità in un gruppo topologico  $G$  è un sottogruppo chiuso normale di  $G$ . Analogamente, la componente connessa per archi dell'identità è un sottogruppo normale di  $G$ .*

DIMOSTRAZIONE. L'immagine di  $\mathbf{G}_e \times \mathbf{G}_e$  mediante l'applicazione

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g, h) \longrightarrow gh^{-1} \in \mathbf{G}$$

è un connesso di  $\mathbf{G}$  che contiene  $e$  e dunque è contenuta in  $\mathbf{G}_e$ . Ciò dimostra che  $\mathbf{G}_e$  è un sottogruppo di  $\mathbf{G}$ . Se  $a \in \mathbf{G}$ , allora l'immagine di  $\mathbf{G}_e$  mediante  $\text{ad}(a)$  è un connesso di  $\mathbf{G}$  che contiene  $e$  ed è dunque contenuta in  $\mathbf{G}_e$ . Ciò dimostra che  $\mathbf{G}_e$  è un sottogruppo normale.

La seconda affermazione del teorema si dimostra in modo analogo, in quanto immagini continue di sottoinsiemi connessi per archi sono ancora connesse per archi.  $\square$

**Teorema 1.3.2.** *Un sottogruppo aperto  $\mathbf{H}$  di  $\mathbf{G}$  è anche chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Se  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo aperto di  $\mathbf{G}$ , allora il suo complementare  $\mathbf{G} \setminus \mathbf{H}$  è aperto in  $\mathbf{G}$  perché unione di aperti:

$$\mathbf{G} \setminus \mathbf{H} = \bigcup \{R_g(\mathbf{H}) \mid g \notin \mathbf{H}\}.$$

$\square$

Dato un sottogruppo  $\mathbf{H}$  di un gruppo  $\mathbf{G}$ , indichiamo con  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  l'insieme delle sue classi laterali sinistre <sup>2</sup>:

$$\mathbf{G}/\mathbf{H} = \{g\mathbf{H} \mid g \in \mathbf{G}\}.$$

Esso è il quoziente di  $\mathbf{G}$  rispetto alla relazione di equivalenza

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{H}.$$

Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo topologico, consideriamo su  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  la topologia quoziente.

**Teorema 1.3.3.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico e sia  $\mathbf{H}$  un suo sottogruppo. Allora la proiezione nel quoziente*

$$\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}/\mathbf{H}$$

*è un'applicazione aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Se  $A$  è un aperto di  $\mathbf{G}$ , allora

$$\pi^{-1}\pi(A) = \bigcup \{R_h(A) \mid h \in \mathbf{H}\}$$

è aperto perché unione di aperti.  $\square$

<sup>2</sup>Si possono in modo analogo considerare le classi laterali destre

$${}_{\mathbf{H}}\backslash\mathbf{G} = \{\mathbf{H}g \mid g \in \mathbf{G}\}.$$

Se  $r : \mathbf{G} \ni x \rightarrow x^{-1} \in \mathbf{G}$  è l'inversione, abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \xrightarrow{r} & \mathbf{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_{\mathbf{H}}\backslash\mathbf{G} & \xrightarrow{\hat{r}} & \mathbf{G}/\mathbf{H} \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono le proiezioni nel quoziente. La  $\hat{r}$  è bigettiva e, nel caso in cui  $\mathbf{G}$  sia un gruppo topologico, un omeomorfismo. Potremo quindi nella discussione seguente limitarci a considerare soltanto classi laterali sinistre, poiché i risultati ottenuti si applicheranno automaticamente anche alle classi laterali destre.

**Teorema 1.3.4.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico e sia  $\mathbf{H}$  un suo sottogruppo. Allora anche la sua chiusura  $\overline{\mathbf{H}}$  è un sottogruppo di  $\mathbf{G}$ . Se  $\mathbf{H}$  è normale, anche la sua chiusura  $\overline{\mathbf{H}}$  è un sottogruppo normale di  $\mathbf{G}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $r$  l'applicazione  $r : \mathbf{G} \ni g \rightarrow g^{-1} \in \mathbf{G}$  che ad ogni elemento di  $\mathbf{G}$  fa corrispondere il suo inverso. La  $r$  è un omeomorfismo e quindi  $r(\overline{A}) = \overline{r(A)}$  per ogni sottoinsieme  $A$  di  $\mathbf{G}$ . Se  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo di  $\mathbf{G}$ ,  $r(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$  ed otteniamo:

$$r(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{r(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}}.$$

Analogamente, poiché per ogni  $g \in \mathbf{G}$  le applicazioni  $L_g$  e  $R_g$  sono omeomorfismi, abbiamo  $L_g(\overline{A}) = \overline{L_g(A)}$  e  $R_g(\overline{A}) = \overline{R_g(A)}$  per ogni sottoinsieme  $A$  di  $\mathbf{G}$ . Se  $g \in \mathbf{H}$ , poiché  $L_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$  e  $R_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ , avremo:

$$L_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{L_g(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}}, \quad R_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{R_g(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}} \quad \forall g \in \mathbf{H}.$$

Queste relazioni implicano che

$$R_g(\mathbf{H}) \subset \overline{\mathbf{H}}, \quad L_g(\mathbf{H}) \subset \overline{\mathbf{H}} \quad \forall g \in \overline{\mathbf{H}},$$

e pertanto, passando alle chiusure,

$$L_g(\overline{\mathbf{H}}) = R_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{\mathbf{H}} \quad \forall g \in \overline{\mathbf{H}}.$$

Quindi  $\overline{\mathbf{H}}$  è un sottogruppo di  $\mathbf{G}$ . Poiché  $\text{ad}_g$  è, per ogni  $g \in \mathbf{G}$  un omeomorfismo di  $\mathbf{G}$  in sè, abbiamo  $\text{ad}_g(\overline{A}) = \overline{\text{ad}_g(A)}$  per ogni sottoinsieme  $A$  di  $\mathbf{G}$ . Dire che  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo normale di  $\mathbf{G}$  equivale al fatto che  $\text{ad}_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$  per ogni  $g \in \mathbf{G}$ . Se quindi  $\mathbf{H}$  è normale, risulta:

$$\text{ad}_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{\text{ad}_g(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}} \quad \forall g \in \mathbf{G}$$

e questa uguaglianza dimostra che anche  $\overline{\mathbf{H}}$  è normale.  $\square$

**Teorema 1.3.5.** *Se  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico  $\mathbf{G}$ , allora  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  è uno spazio regolare. In particolare,  $\mathbf{G}$  è uno spazio regolare se e soltanto se è uno spazio<sup>3</sup>  $T_1$  e ciò equivale al fatto che  $\{e\}$  sia un chiuso di  $\mathbf{G}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico  $\mathbf{G}$ , allora tutte le sue classi laterali sinistre sono chiusi di  $\mathbf{G}$  e quindi  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  è uno spazio topologico  $T_1$ .

Sia  $F$  un chiuso di  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  e sia  $g$  un elemento di  $\mathbf{G}$  tale che  $\pi(g) \notin F$ . Consideriamo l'applicazione continua

$$\lambda : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (a, b) \rightarrow a^{-1}b \in \mathbf{G}.$$

Poiché  $\pi^{-1}(F)$  è un chiuso che non contiene  $\lambda(e, g)$ , possiamo trovare un intorno aperto  $U_e$  di  $e$  e un intorno aperto  $U_g$  di  $g$  in  $\mathbf{G}$  tali che

$$g_1^{-1}g_2 \notin \pi^{-1}(F) \quad \text{per ogni} \quad g_1 \in U_e, g_2 \in U_g.$$

<sup>3</sup>Uno spazio topologico  $X$  soddisfa l'assioma di separazione  $T_1$  se tutti i suoi sottoinsiemi finiti sono chiusi; soddisfa l'assioma di separazione  $T_3$  se dati un punto  $a$  di  $X$  e un chiuso  $A$  di  $X$  che non contiene  $a$ , esistono aperti disgiunti  $U$  e  $V$  con  $a \in U$  e  $A \subset V$ ; è regolare se soddisfa entrambi gli assiomi  $T_1$  e  $T_3$ .

Consideriamo gli insiemi:

$$\tilde{U}_g = \pi^{-1}(\pi(U_g)) \text{ e } \tilde{V} = \bigcup \{R_a(U_e) \mid a \in \pi^{-1}(F)\} = \bigcup \{L_a(\pi^{-1}(F)) \mid a \in U_e\}.$$

Poiché la proiezione  $\pi$  è un'applicazione aperta, il primo è un aperto saturo che contiene  $g$  e il secondo un aperto saturo che contiene  $\pi^{-1}(F)$ . Dimostriamo che  $\tilde{U}_g \cap \tilde{V} = \emptyset$ . Se così non fosse, potremmo trovare  $g_1 \in U_g$ ,  $g_2 \in \mathbf{H}$ ,  $g_3 \in U_e$ ,  $g_4 \in \pi^{-1}(F)$  tali che  $g_1 g_2 = g_3 g_4$ .

Da questa relazione troviamo  $g_3^{-1} g_1 = g_4 g_2^{-1} \in \pi^{-1}(F)$ , che contraddice la scelta di  $U_e$  e  $U_g$ .

Ciò dimostra che  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  soddisfa l'assioma  $T_3$  e quindi è regolare.  $\square$

Un gruppo topologico  $\mathbf{G}$  in cui  $\{e\}$  sia un sottoinsieme chiuso si dice *separato*. Per il teorema precedente, questa condizione equivale al fatto che  $\mathbf{G}$  sia uno spazio regolare. Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo topologico, per il teorema I.3.4,  $\overline{\{e\}}$  è un sottogruppo chiuso normale di  $\mathbf{G}$  e quindi  $\mathbf{G}/\overline{\{e\}}$  è, con la topologia quoziente, un gruppo topologico separato. Esso si dice il *separato* di  $\mathbf{G}$  e si indica con  $\mathbf{G}_{\text{sep}}$ .

**Teorema 1.3.6.** *Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo topologico separato, allora la chiusura di un sottogruppo abeliano di  $\mathbf{G}$  è ancora un sottogruppo abeliano di  $\mathbf{G}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbf{A}$  un sottogruppo abeliano di  $\mathbf{G}$ . Fissato un elemento  $a$  di  $\mathbf{G}$  l'applicazione  $f_a : \mathbf{G} \ni x \rightarrow \text{ad}_a(x) x^{-1} = a x a^{-1} x^{-1} \in \mathbf{G}$  è continua. Inoltre, se  $a \in \mathbf{A}$ , abbiamo  $f_a(\mathbf{A}) = \{e\}$ , perché  $\mathbf{A}$  è abeliano. Poiché  $\mathbf{G}$  è separato,  $\{e\}$  è chiuso e quindi  $f_a^{-1}(e)$  è un chiuso che contiene  $\mathbf{A}$ . Questo dimostra che  $a x = x a$  per ogni  $x \in \overline{\mathbf{A}}$  ed ogni  $a \in \mathbf{A}$ , ma questo equivale al fatto che  $f_a(x) = e$  per ogni  $a \in \overline{\mathbf{A}}$  ed ogni  $x \in \mathbf{A}$ .

Quindi, poiché  $\{e\}$  è un chiuso di  $\mathbf{G}$ , per ogni  $a \in \overline{\mathbf{A}}$ , l'insieme  $f_a^{-1}(e)$  è un chiuso che contiene  $\mathbf{A}$ : perciò  $f_a^{-1}(e) \supset \overline{\mathbf{A}}$  per ogni  $a \in \overline{\mathbf{A}}$ , cioè  $\overline{\mathbf{A}}$  è abeliano.  $\square$

Più in generale, abbiamo:

**Proposizione 1.3.7.** *Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo separato ed  $E$  un sottoinsieme di  $\mathbf{G}$ , il centralizzatore di  $E$  in  $\mathbf{G}$ :*

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(E) = \{g \in \mathbf{G} \mid \text{ad}_g(x) = x \ \forall x \in E\}$$

*è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{G}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti, con la notazione del teorema precedente:

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(E) = \bigcap_{x \in E} f_x^{-1}(e)$$

è chiuso perché intersezione di chiusi.  $\square$

**Proposizione 1.3.8.** *Se  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico  $\mathbf{G}$ , allora il normalizzatore di  $\mathbf{H}$  in  $\mathbf{G}$*

$$\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}) = \{g \in \mathbf{G} \mid \text{ad}_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}\}$$

*è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{G}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni  $g \in \mathbf{G}$  l'applicazione  $\lambda_g : \mathbf{G} \ni x \rightarrow x g x^{-1} \in \mathbf{G}$  è continua. Quindi  $\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}) = \bigcap_{h \in \mathbf{H}} \lambda_h^{-1}(\mathbf{H})$  è chiuso perché intersezione di chiusi.  $\square$

**Proposizione 1.3.9.** *Sia  $\mathbf{H}$  un sottogruppo di un gruppo topologico  $\mathbf{G}$ . Allora:*

- (1)  $\mathbf{H}$  è chiuso se e soltanto se è localmente chiuso in un punto;
- (2)  $\mathbf{H}$  è aperto se e soltanto se contiene un punto interno;
- (3)  $\mathbf{H}$  è discreto se e soltanto se ha un punto isolato.

*Un sottogruppo discreto di un gruppo separato è chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che  $\mathbf{H}$  è localmente chiuso in un suo punto  $h$  se esiste un intorno aperto  $U$  di  $h$  in  $\mathbf{G}$  tale che  $\mathbf{H} \cap U$  sia chiuso in  $U$ , cioè  $\overline{\mathbf{H} \cap U} = \mathbf{H} \cap U$ . Poiché le traslazioni a destra e a sinistra sono omeomorfismi, se  $\mathbf{H}$  è localmente chiuso in  $h$  è anche localmente chiuso in  $e = R_{h^{-1}}(h)$ . Possiamo quindi trovare un intorno aperto  $U$  di  $e$  tale che  $\mathbf{H} \cap U$  sia chiuso in  $U$ . Poiché anche  $\mathbf{H} \cap U \cap U^{-1}$  è chiuso in  $U \cap U^{-1}$ , non è restrittivo supporre che  $U = U^{-1}$ . Sia ora  $x \in \overline{\mathbf{H}}$ . Allora  $x U \cap \mathbf{H}$  non è vuoto: possiamo quindi fissare un elemento  $y \in \mathbf{H}$  e un  $g \in U$  tali che  $xg = y$ . Osserviamo che

$$y^{-1}x = L_{y^{-1}}(x) \in L_{y^{-1}}(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{L_{y^{-1}}(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}}$$

e quindi  $y^{-1}x = g^{-1} \in \overline{\mathbf{H}} \cap U = \mathbf{H} \cap U$  implica che  $x = y g^{-1} \in \mathbf{H}$ . Abbiamo così dimostrato che  $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$  è chiuso.

Poiché ogni chiuso è localmente chiuso, la (1) è completamente dimostrata. La (2) e la (3) sono immediate e l'osservazione finale segue dalla (1).  $\square$

**Teorema 1.3.10.** *Ogni intorno aperto dell'identità di un gruppo connesso è un insieme di generatori del gruppo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $U$  un intorno aperto dell'identità del gruppo topologico connesso  $\mathbf{G}$ . Poniamo  $U^{-1} = \{g^{-1} \mid g \in U\}$ . Allora anche  $V = U \cap U^{-1}$  è un intorno aperto dell'identità di  $\mathbf{G}$ . Poniamo

$$V^n = \{g_1 \dots g_n \mid g_1, \dots, g_n \in V\}.$$

Allora

$$\mathbf{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$$

è un sottogruppo aperto di  $\mathbf{G}$ . Esso è anche chiuso per il Teorema I.1.3.2 e quindi coincide con  $\mathbf{G}$  perché  $\mathbf{G}$  è connesso.  $\square$

**Teorema 1.3.11.** *Un gruppo topologico separato e localmente compatto è paracompatto, e quindi, in particolare, uno spazio topologico normale<sup>4</sup>.*

<sup>4</sup>Ricordiamo che uno spazio topologico  $X$  è paracompatto se è di Hausdorff ed ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento chiuso localmente finito. Uno spazio di Hausdorff localmente compatto è paracompatto se e soltanto se è unione disgiunta di sottospazi che sono ciascuno un'unione numerabile di compatti. Lo spazio topologico  $X$  dice normale se è di Hausdorff e chiusi disgiunti hanno interni aperti disgiunti. Ogni spazio topologico paracompatto è normale.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico separato localmente compatto. Fissiamo un intorno aperto  $V$  di  $e$  con  $V = V^{-1} = \{g^{-1} \mid g \in V\}$  e  $\bar{V}$  compatto. Per ogni  $n$ , sia  $\bar{V}^n = \{g_1 \cdots g_n \mid g_1, \dots, g_n \in \bar{V}\}$ . Esso è compatto perché immagine del compatto  $\underbrace{\bar{V} \times \cdots \times \bar{V}}_{n \text{ copie}}$  mediante l'applicazione continua  $(g_1, \dots, g_n) \rightarrow g_1 \cdots g_n$ .

Poniamo  $V^n = \{g_1 \cdots g_n \mid g_1, \dots, g_n \in V\}$ . Osserviamo poi che  $\bar{V} \subset V^2$ : infatti per ogni  $g \in \bar{V}$  è  $gV \cap V \neq \emptyset$ ; otteniamo perciò  $gg_1 = g_2$  con  $g_1, g_2 \in V$  e quindi  $g = g_1^{-1}g_2 \in V^2$  perché  $V^{-1} = V$ .

Da questa relazione otteniamo che

$$\mathbf{G}_0 = \bigcup_n \bar{V}^n = \bigcup_n V^n.$$

Quindi  $\mathbf{G}_0$  è un sottogruppo aperto, e quindi anche chiuso, di  $\mathbf{G}$ , ed è paracompatto perché localmente compatto e unione numerabile di compatti. Ne segue che  $\mathbf{G}$ , unione disgiunta delle classi laterali  $g\mathbf{G}_0$  ( $g \in \mathbf{G}$ ) di  $\mathbf{G}_0$ , è paracompatto.  $\square$

**Corollario 1.3.12.** *Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo topologico separato e localmente compatto ed  $\mathbf{H}$  un suo sottogruppo chiuso, allora lo spazio omogeneo  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  è separato, localmente compatto, paracompatto, ed è quindi uno spazio topologico normale.*

**DIMOSTRAZIONE.** Lo spazio omogeneo  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  è regolare perché  $\mathbf{H}$  è compatto; inoltre è localmente compatto perché immagine di uno spazio localmente compatto mediante un'applicazione aperta. Infine, con la notazione introdotta nella dimostrazione del teorema precedente, osserviamo che le orbite  $\mathbf{G}_0 \cdot p$  ( $p \in \mathbf{G}/\mathbf{H}$ ) di  $\mathbf{G}_0$  in  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  sono aperte e paracompatte (i sottoinsiemi  $\bar{V}^n \cdot p$  formano una successione di compatti la cui unione è l'orbita  $\mathbf{G}_0 \cdot p$ ) e quindi  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  è paracompatto perché unione disgiunta di spazi paracompatte.  $\square$

#### 1.4. Omomorfismi di gruppi topologici

**Teorema 1.4.1.** *Sia  $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$  un omomorfismo di gruppi tra due gruppi topologici  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\phi$  sia un'applicazione continua è che essa sia continua nell'identità di  $\mathbf{G}_1$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** La condizione è ovviamente necessaria. Dimostriamo la sufficienza. Sia  $g \in \mathbf{G}_1$  e sia  $V$  un intorno aperto di  $\phi(g)$  in  $\mathbf{G}_2$ . Allora  $(\phi(g))^{-1}V$  è un intorno aperto dell'identità  $e_2$  di  $\mathbf{G}_2$  e possiamo quindi trovare un intorno aperto  $U$  dell'identità  $e_1$  di  $\mathbf{G}_1$  tale che  $\phi(U) \subset V$ .

Allora  $gU$  è un intorno aperto di  $g$  in  $\mathbf{G}_1$  e risulta

$$\phi(gh) = \phi(g)\phi(h) \in \phi(g) \left( (\phi(g))^{-1}V \right) = V \quad \forall h \in U,$$

onde  $\phi(gU) \subset V$ .  $\square$

Un omomorfismo di gruppi topologici è un'applicazione continua  $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$  che sia anche un omomorfismo di gruppi. Se la  $\phi$  è inoltre un omeomorfismo di spazi topologici essa è anche un isomorfismo di gruppi e si dice un *isomorfismo topologico*. Un omomorfismo di gruppi topologici iniettivo (risp. surgettivo) si dice un *monomorfismo topologico* (risp. *epimorfismo topologico*).

Indichiamo con  $\text{Aut}_c(\mathbf{G})$  l'insieme degli isomorfismi topologici di un gruppo topologico  $\mathbf{G}$  in sè. Si verifica facilmente che  $\text{Aut}_c(\mathbf{G})$  è un gruppo per l'operazione di composizione di applicazioni. Se  $\mathbf{G}$  è localmente compatto,  $\text{Aut}_c(\mathbf{G})$  è un gruppo topologico con la topologia  $\tilde{\tau}_{\mathbf{G}}$  definita nel §2; questa coincide con la topologia compatta-aperta se  $\mathbf{G}$  è anche localmente compatto.

**Teorema 1.4.2.** *Un epimorfismo topologico  $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$  è un'applicazione aperta se e soltanto se il suo quoziente iniettivo*

$$\hat{\phi} : \mathbf{G}_1 / \ker \phi \rightarrow \mathbf{G}_2$$

*è un isomorfismo topologico.*

**DIMOSTRAZIONE.** Ciò è conseguenza del fatto che la proiezione nel quoziente  $\mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_1 / \ker \phi$  è un'applicazione aperta.  $\square$

**Teorema 1.4.3.** *Se  $\mathbf{G}_1$  è un gruppo topologico compatto e  $\mathbf{G}_2$  un gruppo topologico separato, ogni epimorfismo topologico  $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$  è un'applicazione aperta.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$  un epimorfismo topologico. Poiché  $\mathbf{G}_2$  è separato,  $\ker \phi$  è un sottogruppo normale chiuso di  $\mathbf{G}_1$ . Ne segue, passando al quoziente iniettivo, che l'applicazione

$$\hat{\phi} : \mathbf{G}_1 / \ker \phi \rightarrow \mathbf{G}_2$$

è continua e bigettiva tra spazi compatti di Hausdorff e dunque un omeomorfismo. La tesi segue allora dal teorema precedente.  $\square$

**Esempio 1.4.4.** Sia  $\mathbb{H}$  il corpo dei quaternioni, che possiamo identificare alla sottoalgebra dell'algebra delle matrici  $2 \times 2$  a coefficienti complessi formata dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{C}.$$

Le matrici di  $\mathbb{H}$  con determinante 1 formano un gruppo moltiplicativo, che è un gruppo topologico per la topologia definita dall'identificazione standard con la sfera  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ . Esso è un gruppo topologico separato e compatto, che si indica con  $\text{SU}^*(2)$ . Il suo sottogruppo  $\{I, -I\}$  è un sottogruppo chiuso normale e il gruppo quoziente  $\text{SU}^*(2)/\{I, -I\}$  è omeomorfo a  $\mathbb{RP}^3$ .

**Teorema 1.4.5.** *Se  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo normale di un gruppo topologico  $\mathbf{G}$ , il gruppo  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  è un gruppo topologico per la topologia quoziente e l'omomorfismo  $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}$  è un omomorfismo di gruppi topologici. Inoltre:*

- (1)  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  è separato se e soltanto se  $\mathbf{H}$  è chiuso in  $\mathbf{G}$ ;
- (2)  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  è discreto se e soltanto se  $\mathbf{H}$  è aperto in  $\mathbf{G}$ .
- (3) Se  $\mathbf{H}$  è discreto, allora la proiezione nel quoziente  $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}$  è un omeomorfismo locale.

### 1.5. Caratteri

Un *carattere* di un gruppo topologico  $\mathbf{G}$  è un omomorfismo continuo  $\chi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{S}^1$  di  $\mathbf{G}$  nel gruppo moltiplicativo  $\mathbf{S}^1$  dei numeri complessi di modulo 1. Indichiamo con  $\mathbf{G}'$  l'insieme dei caratteri di  $\mathbf{G}$ . Esso è un gruppo abeliano rispetto all'operazione di moltiplicazione di funzioni: la funzione  $\chi_{\mathbf{G}}$ , costantemente uguale a 1 su  $\mathbf{G}$ , è l'identità di  $\mathbf{G}'$ .

Si verifica facilmente che vale il:

**Teorema 1.5.1.** *Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo topologico, anche il gruppo  $\mathbf{G}'$  dei suoi caratteri è un gruppo topologico per la topologia compatta-aperta. Se  $\mathbf{G}$  è separato, anche  $\mathbf{G}'$  è separato.*

**Teorema 1.5.2.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico localmente compatto e separato. Allora anche  $\mathbf{G}'$  è localmente compatto e separato. Inoltre, se  $\mathbf{G}$  è anche a base numerabile, anche  $\mathbf{G}'$  è a base numerabile. Se  $\mathbf{G}$  è compatto e separato, allora  $\mathbf{G}'$  è discreto. Se  $\mathbf{G}$  è discreto, allora  $\mathbf{G}'$  è compatto.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\mathbf{G}$  è compatto, il carattere costante  $\chi_{\mathbf{G}}$  è l'unico elemento di  $U(\mathbf{G}, \mathbf{S}_\epsilon) = \{\chi \in \mathbf{G}' \mid \text{Arg}(\chi(g)) \in ]-\epsilon, \epsilon[ \mid \text{se } \epsilon < \pi/2\}$ . Quindi  $\{\chi_{\mathbf{G}}\}$  è aperto e  $\mathbf{G}'$  ha la topologia discreta.

Se  $\mathbf{G}$  è discreto, allora l'applicazione  $\mathbf{G}' \ni \chi \rightarrow (\chi(g))_{g \in \mathbf{G}} \in [\mathbf{S}^1]^{\mathbf{G}}$  è un'immersione di  $\mathbf{G}'$  in un sottospazio chiuso di  $[\mathbf{S}^1]^{\mathbf{G}}$ , e quindi  $\mathbf{G}'$  è compatto in quanto sottospazio chiuso di uno spazio compatto.  $\square$

## CAPITOLO II

### Esponenziale di matrici

#### 2.1. Spazi di matrici

Sia  $\mathbb{k}$  un campo. Indichiamo con  $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{k})$  lo spazio vettoriale di dimensione  $mn$  su  $\mathbb{k}$  delle matrici a  $m$  righe ed  $n$  colonne a coefficienti in  $\mathbb{k}$ . Data

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$$

indichiamo con  $A^*$  la coniugata della sua trasposta:

$$A^* = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \dots & \bar{a}_{m1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \dots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(n \times m, \mathbb{C}).$$

La matrice  $A^*$  si dice l'*aggiunta* della  $A$ . Date due matrici  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$  in  $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$  poniamo

$$(A|B) = \text{trac}(B^*A) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij} a_{ij}.$$

L'applicazione

$$\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}) \times \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}) \ni (A, B) \longrightarrow (A|B) \in \mathbb{C}$$

definisce su  $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$  un prodotto scalare Hermitiano. Indichiamo con

$$|A| = \sqrt{(A|A)} \quad \text{per } A \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$$

la norma associata e consideriamo su  $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$  la relativa distanza:

$$d(A, B) = |A - B| \quad \text{se } A, B \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}).$$

**Teorema 2.1.1.** *L'applicazione  $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}) \ni A \longrightarrow A^* \in \mathfrak{M}(n \times m, \mathbb{C})$  è un'isometria anti- $\mathbb{C}$ -lineare.*

*L'applicazione*

$$\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}) \ni A \longrightarrow {}^t A \in \mathfrak{M}(n \times m, \mathbb{C})$$

*è un'isometria  $\mathbb{C}$ -lineare.*

*La moltiplicazione righe per colonne definisce un'applicazione continua*

$$\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}) \times \mathfrak{M}(n \times k, \mathbb{C}) \ni (A, B) \longrightarrow AB \in \mathfrak{M}(m \times k, \mathbb{C})$$

e si ha inoltre

$$|AB| \leq |A| \cdot |B| \quad \forall A \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}), B \in \mathfrak{M}(n \times k, \mathbb{C}).$$

DIMOSTRAZIONE. La verifica delle prime due affermazioni è immediata. Per verificare l'ultima, scriviamo

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = (B^1, \dots, B^k) \quad \text{con} \quad A_1, \dots, A_m, B^1, \dots, B^k \in \mathbb{C}^n.$$

Allora

$$|AB|^2 = \sum_{i,j} |(A_i|B^j)_{\mathbb{C}^n}|^2 \leq \sum_i |A_i|^2 \sum_j |B^j|^2 = |A|^2 \cdot |B|^2,$$

ove abbiamo indicato con  $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{C}^n}$  e con  $|\cdot|$  rispettivamente il prodotto scalare Hermitiano standard di  $\mathbb{C}^n$  e la norma ad esso associata. Da questa disuguaglianza segue la tesi.  $\square$

**Lemma 2.1.2.** *Siano  $m, n$  interi positivi. Data una matrice  $A \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$  poniamo*

$$\|A\| = \sup\{|Av| ; v \in \mathbb{C}^n, |v| = 1\}.$$

Allora

$$\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}) \ni A \longrightarrow \|A\| \in \mathbb{R}$$

è una norma equivalente a  $|\cdot|$ .

Inoltre, se  $k$  è un altro intero positivo e  $A \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}), B \in \mathfrak{M}(n \times k, \mathbb{C})$  vale la disuguaglianza:

$$(*) \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché tutte le norme definite su uno spazio vettoriale di dimensione finita sono equivalenti, basta dimostrare che  $\|\cdot\|$  è una norma su  $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$ . A questo scopo osserviamo innanzi tutto che, per il teorema di Weierstrass, poiché l'applicazione  $S^{2n-1} \ni v \longrightarrow |Av| \in \mathbb{R}$  è continua e  $S^{2n-1} = \{v \in \mathbb{C}^n \mid |v| = 1\}$  è compatto, per ogni  $A \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$  possiamo trovare un vettore  $v_A \in S^{2n-1}$  tale che

$$|Av_A| = \|A\|.$$

Da questo si deduce che  $\|\cdot\|$  è ben definita e si ricava immediatamente che

$$\|A\| > 0 \Leftrightarrow 0 \neq A \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}), \quad \text{e} \quad \|0\| = 0.$$

È ovvio che

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall A \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}).$$

Per concludere, dimostriamo la subadditività. Fissate  $A, B \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$  abbiamo, per un vettore  $v_{A+B} \in S^{2n-1}$ :

$$\|A + B\| = |(A + B)v_{A+B}| \leq |Av_{A+B}| + |Bv_{A+B}| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Siano  $A \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$ ,  $B \in \mathfrak{M}(n \times k, \mathbb{C})$ . Se  $B = 0$ , la (\*) è banalmente vera. Se  $B \neq 0$ , allora possiamo trovare un vettore  $w_{AB} \in \mathbb{C}^k$  tale che  $|w_{AB}| = 1$ ,  $Bw_{AB} \neq 0$  e  $\|AB\| = |(AB)w_{AB}|$ . Risulta allora:

$$\|AB\| = |(AB)w_{AB}| = \left| A \begin{pmatrix} B(w_{AB}) \\ |B(w_{AB})| \end{pmatrix} \right| \cdot |B(w_{AB})| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

□

Fissato un campo  $\mathbb{k}$ , nel seguito useremo le notazioni:

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) = \mathfrak{M}(n \times n, \mathbb{k})$$

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k}) = \{A \in \mathfrak{M}(n \times n, \mathbb{k}) \mid \text{trac}(A) = 0\}$$

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{k}) = \{a \in \mathfrak{M}(n \times n, \mathbb{k}) \mid \det a \neq 0\} \quad (\text{gruppo lineare su } \mathbb{k})$$

$$\mathbf{SL}(n, \mathbb{k}) = \{a \in \mathfrak{M}(n \times n, \mathbb{k}) \mid \det a = 1\} \quad (\text{gruppo speciale lineare su } \mathbb{k})$$

Se  $\mathbb{k}$  è uno dei campi  $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{R}$ , su ciascuno di questi insiemi consideriamo la topologia di sottospazio di  $\mathfrak{M}(n \times n, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$ .

**Teorema 2.1.3.** *Con le operazioni di prodotto righe per colonne di matrici,  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  e  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  sono gruppi topologici.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 2.1.2, il prodotto

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \times \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \ni (a, b) \longrightarrow ab \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

è un'applicazione continua.

La topologia di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  coincide con la topologia Euclidea di  $\mathbb{C}^{n^2}$ . In particolare

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \ni A \longrightarrow \det A \in \mathbb{C}$$

è un'applicazione continua.

Indichiamo con  $M_j^i(A)$  il determinante della matrice  $(n-1) \times (n-1)$  ottenuta sopprimendo dalla matrice  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  la  $j$ -esima riga e la  $i$ -esima colonna. Le applicazioni

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \ni A \longrightarrow M_j^i(A) \in \mathbb{C}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

sono continue. È allora continua l'applicazione

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \ni a \longrightarrow (-1)^{i+j} (\det a)^{-1} M_j^i(a) \in \mathbb{C}$$

che associa a una matrice invertibile  $a$  il coefficiente sulla riga  $i$ -esima e la colonna  $j$ -esima della sua inversa  $a^{-1}$  e quindi l'applicazione

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \ni a \longrightarrow a^{-1} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Questo dimostra che  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  è un gruppo topologico.

I gruppi  $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ ,  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ ,  $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$  sono gruppi topologici perché sottogruppi di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ . □

## 2.2. L'applicazione esponenziale

Nella proposizione che segue descriviamo la *decomposizione di Wedderburn* di un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo di caratteristica zero.

**Teorema 2.2.1** (Decomposizione di Wedderburn). *Sia  $\mathbb{k}$  un campo di caratteristica zero. Per ogni  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$  sono univocamente determinate una  $S \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$  semisemplice<sup>1</sup> e una  $N \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$  nilpotente tali che*

$$A = S + N \quad e \quad [S, N] = SN - NS = 0.$$

Abbiamo  $S, N \in \mathbb{k}[A]$ .

Se  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{k})$ , sono univocamente determinate una matrice semisemplice  $s \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{k})$  e una matrice unipotente<sup>2</sup>  $v \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{k})$  tali che

$$a = s + v \quad e \quad sv = vs.$$

Risulta  $s, v \in \mathbb{k}[a]$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $\mathfrak{n}$  l'ideale di  $\mathbb{k}[A]$  generato dai suoi elementi nilpotenti. Se  $\mu_A(\lambda) = p_1^{k_1}(\lambda) \cdots p_m^{k_m}(\lambda)$  è la decomposizione del polinomio minimo  $\mu_A(\lambda)$  di  $A$  in prodotto di potenze di primi distinti, indichiamo con  $f(\lambda) = p_1(\lambda) \cdots p_m(\lambda)$  il prodotto dei primi distinti contenuti in  $\mu_A(\lambda)$ . Allora  $\mathfrak{n}$  è l'ideale principale generato da  $f(A) = p_1(A) \cdots p_m(A)$ .

Dimostriamo per ricorrenza che per ogni intero positivo  $k$  è possibile determinare un  $A_k \in \mathbb{k}[A]$  tale che

$$(*) \quad A_k = A - N_k \quad \text{con} \quad N_k \in \mathfrak{n}, \quad f(A_k) \in \mathfrak{n}^k$$

Per  $k = 1$  possiamo scegliere  $A_1 = A$ . Supponiamo di aver ottenuto  $A_1, \dots, A_k$  che soddisfino (\*), e cerchiamo  $A_{k+1}$  nella forma  $A_{k+1} = A_k + T$ , con  $T \in \mathfrak{n}^k$ . Utilizzando la formula di Taylor otteniamo:

$$\begin{aligned} f(A_{k+1}) &= f(A_k + T) \\ &= f(A_k) + f'(A_k)T + T_1 \end{aligned}$$

con  $T_1 \in \mathfrak{n}^{2k} \subset \mathfrak{n}^{k+1}$  in quanto  $f(A_{k+1}) - f(A_k) - f'(A_k)T = T^2B$  per qualche matrice  $B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ . Osserviamo ora che poiché  $A_k$  differisce da  $A$  per una matrice nilpotente di  $\mathbb{k}[A]$ , il suo polinomio minimo  $\mu_{A_k}(\lambda)$  ha gli stessi fattori primi di  $\mu_A(\lambda)$ . Poiché  $f(\lambda)$  contiene solo fattori primi semplici,  $f(\lambda)$  ed  $f'(\lambda)$ , e quindi anche  $\mu_{A_k}(\lambda)$  ed  $f'(\lambda)$ , sono primi tra loro. Quindi  $f'(A_k)$  è invertibile. Otteniamo perciò la (\*) per  $A_{k+1}$  scegliendo

$$T = -(f'(A_k))^{-1} f(A_k) \in \mathfrak{n}^k.$$

<sup>1</sup>Un endomorfismo  $S$  si dice semisemplice, o completamente decomponibile, se ogni sottospazio  $S$ -invariante ammette un complementare  $S$ -invariante. Un endomorfismo  $S$  è semisemplice se e soltanto se il suo polinomio minimo  $\mu_S$  è prodotto di fattori primi semplici.

<sup>2</sup>Una matrice  $v$  si dice unipotente se la matrice  $v - e$  è nilpotente.

Poiché  $n^n = 0$ , otteniamo la decomposizione cercata con  $S = A_n$ ,  $N = N_n$ . Infatti  $f(A_n) \in n^n = \{0\}$  ci dice che il polinomio minimo  $\mu_{A_n}$  di  $A_n$  è proprio  $f(\lambda)$  e quindi  $A_n$  è semplice perché il suo polinomio minimo contiene solo fattori primi semplici.

Dimostriamo ora l'unicità. Se  $S', N'$  sono due endomorfismi, il primo semisemplice e il secondo nilpotente, con  $A = S' + N'$  e  $S'N' = N'S'$ , osserviamo innanzi tutto che ciascuno di essi commuta con  $A$  e quindi anche con gli endomorfismi  $S, N \in \mathbb{k}[A]$  trovati in precedenza. Poiché  $S$  ed  $S'$  sono due endomorfismi semisemplici che commutano tra loro anche  $S - S'$  è semisemplice, e poiché  $N$  ed  $N'$  sono due endomorfismi nilpotenti che commutano tra loro anche  $N - N'$  è nilpotente. Quindi  $S - S' = N' - N$  è al tempo stesso semisemplice e nilpotente e quindi è nullo. Ciò dimostra l'unicità della decomposizione di Wedderburn. Sia ora  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{k})$ . Se scriviamo  $v = e + N'$ , con  $N'$  nilpotente, la decomposizione cercata è  $a = s(e + N') = s + sN'$  e si ottiene quindi dalla  $a = S + N$  ottenuta in precedenza osservando che in questo caso la parte semisemplice  $S = s$  è invertibile e quindi si può definire  $N' = s^{-1}N$ .  $\square$

Se  $A = S + N$  è una decomposizione di Wedderburn di  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ , l'endomorfismo semisemplice  $S$  si dice *parte semisemplice* di  $A$  e l'endomorfismo nilpotente  $N$  *parte nilpotente* di  $A$ . Se  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{k})$ , ed  $a = sv = S + N$  con  $s, S \in \mathbb{k}[a]$  semisemplici,  $N \in \mathbb{k}[a]$  nilpotente e  $v \in \mathbb{k}[a]$  unipotente, chiamiamo  $s = S$  la sua *parte semisemplice*,  $N$  la sua *parte nilpotente*,  $v = I_n + S^{-1}N$  la sua *parte unipotente*.

Nel caso complesso, la decomposizione di Wedderburn si può ricavare dalla decomposizione di Jordan: in una matrice di Jordan la diagonale è la sua parte semisemplice nella decomposizione di Wedderburn. Mediante il coniugio possiamo quindi ricondurre la decomposizione di Wedderburn a quella di Jordan. Definiamo innanzi tutto l'applicazione esponenziale per endomorfismi nilpotenti. Sia  $\mathbb{k}$  un campo di caratteristica zero e sia  $N \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$  un endomorfismo nilpotente. Poiché  $N^m = 0$  se  $m \geq n$ , la serie:

$$\exp(N) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{N^h}{h!}$$

si riduce alla somma finita  $\sum_{h=0}^{n-1} \frac{N^h}{h!}$ . Indichiamo con  $\mathcal{N}(n, \mathbb{k})$  l'insieme delle matrici nilpotenti di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$  e con  $\mathcal{U}(n, \mathbb{k})$  l'insieme delle matrici unipotenti di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{k})$ . Abbiamo:

**Teorema 2.2.2.** *L'applicazione  $N \rightarrow \exp(N)$  è una trasformazione bigettiva di  $\mathcal{N}(n, \mathbb{k})$  su  $\mathcal{U}(n, \mathbb{k})$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** L'esponenziale di una matrice nilpotente  $N$  è l'endomorfismo  $e + N'$  dove  $N' = \sum_{h=1}^{n-1} \frac{N^h}{h!}$  è nilpotente perché somma di endomorfismi nilpotenti che commutano tra loro. Quindi  $\exp(N) \in \mathcal{U}(n, \mathbb{k})$  se  $N \in \mathcal{N}(n, \mathbb{k})$ .

Indichiamo con  $p_n(\lambda)$  il polinomio  $p_n(\lambda) = \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h / h! \in \mathbb{k}[\lambda]$  e con  $q_n(\lambda)$  il polinomio  $q_n(\lambda) = \sum_{h=0}^{n-2} (-1)^h \lambda^{h+1} / (h+1) \in \mathbb{k}[\lambda]$ . Se  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ , essi sono i polinomi di Taylor di grado  $(n-1)$  di  $e^\lambda$  e di  $\log(1 + \lambda)$  rispettivamente. Poiché  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{k}$ , otteniamo perciò che

$$p_n(q_n(\lambda)) = 1 + \lambda + \lambda^n f(\lambda)$$

per un opportuno polinomio  $f(\lambda) \in \mathbb{k}[\lambda]$ . Ne segue che, data  $v \in \mathcal{U}(n, \mathbb{k})$ , la  $N = q_n(v - e)$  è una matrice nilpotente per cui  $p_n(N) = \exp(N) = v$ . Ciò dimostra la surgettività dell'applicazione esponenziale. Dimostriamo ora l'unicità. Innanzi tutto osserviamo che, se  $N_1, N_2 \in \mathcal{N}(n, \mathbb{k})$  ed  $\exp(N_1) = \exp(N_2)$ , allora  $\ker N_1 = \ker N_2$ . Supponiamo infatti per assurdo che ciò non sia vero e che, ad esempio, si possa trovare un vettore  $v \in \ker N_1 \setminus \ker N_2$ . Poiché  $\exp(N_2)(v) = \exp(N_1)(v) = v$ , otteniamo che  $\sum_{h=1}^{n-1} N_2^h(v)/h! = 0$ . Avendo supposto che  $w = N_2(v)$  non sia nullo, avremo  $f(N_2)(w) = 0$  con  $f(\lambda) = 1 + \sum_{h=1}^{n-2} \lambda^h/(h+1)! \in \mathbb{k}[\lambda]$ . Ma allora il polinomio minimo  $\mu_{N_2}(\lambda)$  di  $N_2$  dovrebbe contenere un fattore primo di  $f(\lambda)$ , e quindi un fattore primo che non si annulla per  $\lambda = 0$ , contro l'ipotesi che  $N_2$  fosse nilpotente.

Posto  $W = \ker N_1 = \ker N_2$ , possiamo considerare gli endomorfismi nilpotenti  $\widehat{N}_1$  e  $\widehat{N}_2$  definiti da  $N_1$  ed  $N_2$  su  $\mathbb{k}^n/W$  per passaggio al quoziente. Da  $\exp(\widehat{N}_1) = \exp(\widehat{N}_2)$  ricaviamo, ripetendo il ragionamento precedente, che  $\ker \widehat{N}_1 = \ker \widehat{N}_2$ , cioè  $\ker N_1^2 = \ker N_2^2$ .

Per ricorrenza otterremo allora che  $\ker N_1^m = \ker N_2^m$  per ogni intero positivo  $m$ . Questo ci dice che per una scelta opportuna della base di  $\mathbb{k}^n$ , i due endomorfismi nilpotenti  $N_1$  ed  $N_2$  si possono mettere entrambi in forma triangolare superiore. Indichiamo con  $\mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k})$  l'insieme di tutte le matrici triangolari superiori nilpotenti. Esse formano un anello nilpotente e, posto

$$\mathfrak{n}_+^k(n, \mathbb{k}) = \{N_1 \cdots N_k \mid N_1, \dots, N_k \in \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k})\},$$

risulta  $\mathfrak{n}_+^n(n, \mathbb{k}) = \{0\}$ .

Se  $N_1, N_2 \in \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k})$  ed  $N_1 - N_2 \in \mathfrak{n}_+^k(n, \mathbb{k})$ , allora  $N_1^m - N_2^m \in \mathfrak{n}_+^{k+m-1}(n, \mathbb{k})$ . Infatti questo è vero se  $m = 1$  e segue per ricorrenza dall'uguaglianza:  $N_1^m - N_2^m = (N_1 - N_2)N_1^{m-1} + N_2(N_1^{m-1} - N_2^{m-1})$  per  $m \geq 2$ .

Se  $\exp(N_1) = \exp(N_2)$  con  $N_1, N_2 \in \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k})$ , abbiamo

$$(\dagger) \quad N_1 - N_2 = \sum_{h=2}^{n-1} (N_2^h - N_1^h)/h!.$$

Se fosse  $N_1 \neq N_2$ , dovrebbe essere  $N_1 - N_2 \in \mathfrak{n}_+^k(n, \mathbb{k}) \setminus \mathfrak{n}_+^{k+1}(n, \mathbb{k})$  per qualche  $k < n$ , ma questo contraddice la  $(\dagger)$  perché allora il secondo membro apparterebbe a  $\mathfrak{n}_+^{k+1}(n, \mathbb{k})$ .  $\square$

**Osservazione 2.2.3.** Dalla dimostrazione del teorema segue che, se  $f$  è un polinomio di  $\mathbb{k}[\lambda]$  con  $f'(0) \neq 0$ , l'applicazione  $\mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k}) \ni N \rightarrow f(N) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$  è iniettiva.

**Teorema 2.2.4.** Per ogni  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , la serie

$$\exp A = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} A^h$$

converge in  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  e definisce un elemento di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ . L'applicazione

$$\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \ni A \rightarrow \exp A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

è continua e surgettiva.

Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  sono gli autovalori di  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , ripetuti con la loro molteplicità, allora gli autovalori di  $\exp A$  sono  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ . In particolare vale la formula

$$\det \exp A = e^{\text{trac}(A)}.$$

Se  $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  commutano tra loro, allora  $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$ .

Se  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  e  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , allora  $a \circ \exp(A) \circ a^{-1} = \exp(a \circ A \circ a^{-1})$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che la serie a termini positivi

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \|A^h\|$$

è maggiorata termine a termine dalla serie convergente, a termini di segno positivo,

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \|A\|^h$$

e quindi la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} A^h$$

è convergente in  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , uniformemente sui sottoinsiemi compatti di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . Poiché per ogni polinomio  $p \in \mathbb{C}[z]$  l'applicazione  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \ni A \rightarrow p(A) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  è continua, la funzione  $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  è continua perché limite uniforme, su ogni compatto di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , di una successione di applicazioni continue.

Se  $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  e  $AB = BA$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} (A + B)^h &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \sum_{h_1+h_2=h} \frac{h!}{h_1!h_2!} A^{h_1} B^{h_2} \\ &= \sum_{h_1=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!} A^{h_1} \sum_{h_2=0}^{\infty} \frac{1}{h_2!} B^{h_2} \\ &= \exp(A) \exp(B). \end{aligned}$$

Se  $A = S + N$  è la decomposizione di Wedderburn della matrice  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , la

$$\exp(A) = \exp(S + N) = \exp(S) \exp(N)$$

dà la decomposizione dell'esponenziale di  $A$  nel prodotto della sua parte semi-semplice e di una matrice unipotente che con essa commuta. Osserviamo che, se  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  e  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ , allora

$$(aAa^{-1})^h = aA^h a^{-1} \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo quindi

$$\exp(aAa^{-1}) = a(\exp A)a^{-1} \quad \forall A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), \quad \forall a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Questa formula ci dà la possibilità di calcolare l'esponenziale di una matrice semi-semplice  $S$  utilizzando la sua diagonalizzazione: se  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  e

$$a \circ S \circ a^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avremo

$$\exp(S) = \exp \left( a^{-1} \circ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \circ a \right) = a^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \circ a.$$

Chiaramente la matrice  $\exp S$  è invertibile, ed ha determinante

$$\det \exp S = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} = e^{\text{trac}(A)}.$$

La matrice  $\exp N$  è unipotente ed ha dunque determinante 1. Quindi

$$\det \exp A = \det(\exp(S + N)) = \det(\exp S \cdot \exp N) = \det \exp S = e^{\text{trac}(A)} \neq 0$$

ed  $\exp A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ . Dimostriamo ora che  $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  è surgettiva.

Fissiamo un isomorfismo lineare  $a$  in  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ , e siano  $s, \nu \in \mathbb{C}[a]$  la sua parte semisemplice e la sua parte unipotente. Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  gli autovalori distinti di  $s$  e sia  $b \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  tale che

$$b \circ s \circ b^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix}$$

con  $n_1 + \dots + n_k = n$ . Poiché i  $\lambda_i$  sono diversi da zero, possiamo trovare numeri complessi  $\mu_1, \dots, \mu_k$  tali che  $e^{\mu_i} = \lambda_i$ . Allora la matrice

$$S = b^{-1} \circ \begin{pmatrix} e^{\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\mu_k} \end{pmatrix} \circ b,$$

poiché la sua restrizione ad ogni autospazio di  $s$  è un multiplo dell'identità, appartiene a  $\mathbb{C}[s]$ , e quindi a  $\mathbb{C}[a]$ , ed  $\exp(S) = s$ . Sia  $N$  la matrice nilpotente tale che  $\exp(N) = \nu$ . Poiché  $S, N \in \mathbb{C}[a]$ , le due matrici commutano tra loro e quindi

$$\exp(S + N) = \exp(S)\exp(N) = s\nu = a.$$

La dimostrazione è completa.  $\square$

**Osservazione 2.2.5.** Se  $A \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , allora  $\exp(A) \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ , ma, se  $n \geq 2$ , l'applicazione  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{\exp} \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$  non è surgettiva. Consideriamo ad esempio il caso  $n = 2$ . Allora

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\}.$$

Per una matrice triangolare superiore in  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  abbiamo:

$$\exp \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\alpha & \beta \phi(\alpha) \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \phi(\alpha) = \begin{cases} \frac{\sinh \alpha}{\alpha} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0. \end{cases}$$

Consideriamo ora la matrice  $a = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ . Supponiamo per assurdo vi sia  $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  con  $\exp(A) = a$ . La  $A$  è coniugata di una triangolare superiore  $B$ , e  $b = \exp(B)$  è allora una triangolare superiore coniugata ad  $a$ : poiché  $b$  è della forma  $b = \begin{pmatrix} -1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  con  $k \neq 0$ , e  $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$ , questo non è possibile: dovrebbe essere infatti  $\alpha = (2h + 1)\pi i$  con  $h \in \mathbb{Z}$ , e quindi  $\phi(\alpha) = 0$  ed  $\exp(B)$  sarebbe diagonale.

**Osservazione 2.2.6.** Il determinante dell'esponenziale di una matrice reale è l'esponenziale della sua traccia e quindi è un numero reale positivo. Quindi l'esponenziale definisce un'applicazione di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  nel sottogruppo normale  $\mathbf{GL}_+(n, \mathbb{R})$  delle matrici reali invertibili con determinante positivo.

Come nell'osservazione precedente, si può verificare che la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) \subset \mathbf{GL}_+(2, \mathbb{R})$$

non è l'esponenziale di una matrice reale, e che quindi

$$\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{GL}_+(n, \mathbb{R})$$

non è surgettivo.

**Osservazione 2.2.7.** Se  $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  sono due matrici che non commutano tra loro:  $[A, B] = A \circ B - B \circ A \neq 0$ , in generale non vale la formula di addizione: è cioè in generale  $\exp(A + B) \neq \exp A \circ \exp B$ .

**Lemma 2.2.8.** Per ogni  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  l'applicazione

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow \exp(tA) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

è differenziabile di classe  $\mathcal{C}^\infty$  e

$$\left( \frac{d}{dt} \right)^k \exp(tA) = A^k \exp(tA) = \exp(tA) A^k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $t, s \in \mathbb{R}$  ed  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , abbiamo:

$$\exp((t + s)A) = \exp(tA) \exp(sA) = \exp(sA) \exp(tA).$$

Quindi vale la

$$\begin{aligned} \exp((t + s)A) &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{s^h}{h!} A^h \exp(tA) \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{s^h}{h!} \exp(tA) A^h \end{aligned} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

e la serie converge uniformemente in norma su ogni compatto di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . La tesi segue allora dalla formula di Taylor.  $\square$

**Lemma 2.2.9.** *Sia  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  tale che  $\exp(tA) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Allora  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti, da  $\exp(tA) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  ricaviamo, derivando rispetto a  $t$  in  $t = 0$ , che

$$A = \left. \frac{d \exp(tA)}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\exp(tA) - I}{t} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

perché  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  è chiuso in  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ .  $\square$

### 2.3. Matrici Hermitiane

Una matrice  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  si dice:

*Hermitiana* se  $A^* = A$ ,

*antihermitiana* se  $A^* = -A$ .

Gli insiemi  $\mathfrak{p}(n)$  delle matrici Hermitiane e  $\mathfrak{u}(n)$  delle matrici antihermitiane formano sottospazi vettoriali reali di dimensione  $n^2$  di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  (pensato come spazio vettoriale reale di dimensione  $2n^2$ ).

Infatti

$$* : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$

è un'involuzione  $\mathbb{R}$ -lineare, e quindi, poiché  $\mathfrak{p}(n)$  e  $\mathfrak{u}(n)$  sono gli autospazi corrispondenti agli autovalori 1 e  $-1$ , abbiamo la decomposizione spettrale:  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{p}(n) \oplus \mathfrak{u}(n)$ ; inoltre la moltiplicazione per l'unità immaginaria  $i$  è un isomorfismo lineare che scambia  $\mathfrak{p}(n)$  con  $\mathfrak{u}(n)$ , onde  $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p}(n) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}(n)$ .

Una matrice  $u \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  si dice *unitaria* se  $uu^* = e$ , dove  $e$  indica la matrice identità.

Le matrici unitarie sono le matrici di cambiamenti di basi ortonormali per il prodotto scalare Hermitiano standard di  $\mathbb{C}^n$ . Esse formano un sottogruppo di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ , che denotiamo con  $\mathbf{U}(n)$  e chiamiamo *gruppo unitario di ordine  $n$* .

**Lemma 2.3.1.** *Ogni matrice Hermitiana ha autovalori reali ed è diagonalizzabile in una base ortonormale: se cioè  $A \in \mathfrak{p}(n)$ , esiste  $a \in \mathbf{U}(n)$  tale che  $a \circ A \circ a^{-1}$  sia una matrice diagonale reale.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $A \in \mathfrak{p}(n)$ ,  $\lambda$  un suo autovalore e  $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  un autovettore relativo a  $\lambda$ . Abbiamo:

$$\lambda |v|^2 = (Av|v)_{\mathbb{C}^n} = (v|A^*v)_{\mathbb{C}^n} = (v|Av)_{\mathbb{C}^n} = (v|\lambda v)_{\mathbb{C}^n} = \bar{\lambda} |v|^2,$$

da cui  $\lambda = \bar{\lambda}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Se  $w \in \mathbb{C}^n$  è un vettore ortogonale a  $v$ , allora

$$(v|Aw)_{\mathbb{C}^n} = (Av|w)_{\mathbb{C}^n} = \lambda (v|w) = 0.$$

Quindi il sottospazio dei vettori di  $\mathbb{C}^n$  perpendicolari a  $v$  è  $A$ -invariante: da questo fatto si ricava immediatamente che  $\mathbb{C}^n$  ammette una base ortonormale di autovettori di  $A$ .  $\square$

Indichiamo con  $\mathbf{P}_+(n)$  l'insieme delle matrici Hermitiane definite positive, cioè delle matrici Hermitiane che hanno tutti gli autovalori positivi. Consideriamo su tale insieme la topologia di sottospazio di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ .

**Teorema 2.3.2.** *Se  $A \in \mathfrak{p}(n)$ , allora  $\exp(A) \in \mathbf{P}_+(n)$ . L'applicazione esponenziale definisce un omeomorfismo*

$$\mathfrak{p}(n) \ni A \longrightarrow \exp(A) \in \mathbf{P}_+(n).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Si verifica immediatamente che  $(\exp(A))^* = \exp(A^*)$ . Quindi l'esponenziale di una matrice Hermitiana è ancora una matrice Hermitiana ed è definita positiva perché i suoi autovalori sono esponenziali di numeri reali.

Se  $a \in \mathbf{P}_+(n)$ , possiamo trovare una matrice unitaria  $u$  tale che

$$a = u \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix} u^{-1} \quad \text{con } k_1, \dots, k_n \text{ numeri reali positivi.}$$

Allora  $A = u \begin{pmatrix} \log k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \log k_n \end{pmatrix} u^{-1} \in \mathfrak{p}(n)$  ed  $\exp(A) = a$ . Questo dimostra che l'esponenziale definisce un'applicazione surgettiva di  $\mathfrak{p}(n)$  su  $\mathbf{P}_+(n)$ .

Dimostriamo ora che  $\exp : \mathfrak{p}(n) \rightarrow \mathbf{P}_+(n)$  è iniettiva. Siano  $A, B \in \mathfrak{p}(n)$  tali che  $\exp(A) = \exp(B)$ . Fissiamo una base ortonormale  $e_1, \dots, e_n$  di autovettori di  $A$ . Abbiamo

$$A e_j = \lambda_j e_j \quad \text{con } \lambda_j \in \mathbb{R} \quad \text{per } j = 1, \dots, n.$$

Allora

$$\exp(B) e_j = \exp(A) e_j = e^{\lambda_j} e_j \quad \text{per } j = 1, \dots, n.$$

Sia ora  $v \neq 0$  un autovettore di  $B$  relativo a un autovalore  $\mu \in \mathbb{R}$ . Se  $v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n$ , otteniamo

$$e^\mu v = \sum_{j=1}^n e^\mu v^j e_j = \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j} v^j e_j.$$

Quindi, se  $v^j \neq 0$ ,

$$e^\mu = e^{\lambda_j} \implies \mu = \lambda_j.$$

In particolare

$$\mu v^j = \lambda_j v^j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

e dunque

$$B v = \mu v = \sum_{j=1}^n \mu v^j e_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j v^j e_j = A v.$$

Questa relazione vale per tutti gli autovettori di  $B$  e quindi, poiché  $\mathbb{C}^n$  ammette una base ortonormale di autovettori di  $B$ , se ne deduce che  $A = B$ .

Abbiamo così dimostrato che  $\exp : \mathfrak{p}(n) \rightarrow \mathbf{P}_+(n)$  è invertibile. Resta da dimostrare che l'inversa è continua.

A questo scopo osserviamo che per una matrice Hermitiana  $A$  il quadrato della norma è la somma dei quadrati dei suoi autovalori, ripetuti con la loro molteplicità:  $\|A\|^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2$ .

Da questo possiamo dedurre che l'esponenziale definisce un'applicazione chiusa di  $\mathfrak{p}(n)$  su  $\mathbf{P}_+(n)$ .

Sia infatti  $F$  un sottoinsieme chiuso di  $\mathfrak{p}(n)$  e sia  $\{a_\nu\}$  una successione a valori in  $\exp(F)$  che converge a una matrice  $a \in \mathbf{P}_+(n)$ . Gli autovalori di  $a$  e delle  $a_\nu$  sono reali e positivi. Indichiamo con  $\mu$  il più piccolo e con  $M$  il più grande degli autovalori di  $a$  e con  $\mu_\nu$  e  $M_\nu$  il più piccolo e il più grande degli autovalori di  $a_\nu$ . Dico che è possibile trovare un intero positivo  $\nu_0$  tale che

$$\mu/2 < \mu_\nu \leq M_\nu < 2M \quad \forall \nu \geq \nu_0.$$

Infatti, se fosse  $\mu_\nu \leq \mu/2$  per infiniti indici  $\nu \in \mathbb{N}$ , potremmo trovare una sottosuccessione  $\{a_{k_\nu}\}$  di  $\{a_\nu\}$  tale che  $\mu_{k_\nu} \leq \mu/2$  per ogni  $\nu$ . Sia  $v_{k_\nu}$  un vettore di  $\mathbb{C}^n$  con

$$|v_{k_\nu}| = 1 \quad \text{e} \quad a_{k_\nu}(v_{k_\nu}) = \mu_{k_\nu} v_{k_\nu}.$$

Poiché la sfera  $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$  è compatta, possiamo supporre, a meno di passare a una sottosuccessione estratta, che

$$v_{k_\nu} \longrightarrow v \in S^{2n-1}.$$

Avremmo allora

$$|a(v)| = \lim_{\nu \rightarrow \infty} |a_{k_\nu}(v_{k_\nu})| \leq \mu/2$$

e questo dà una contraddizione perché

$$|a(v)| \geq \mu \quad \text{essendo} \quad |v| = 1.$$

In modo analogo si dimostra<sup>3</sup> che  $M_\nu < 2M$  definitivamente.

Siano ora  $\{A_\nu\} \subset F$  tali che  $\exp A_\nu = a_\nu$ . Allora per ogni  $\nu \geq \nu_0$  le matrici  $A_\nu$  appartengono al compatto

$$K = \{A \in \mathfrak{p}(n) \mid \|A\| \leq \max\{|\log(\mu/2)|, |\log(2M)|\}\}.$$

Poiché  $F$  è un chiuso,  $K \cap F$  è compatto e possiamo quindi estrarre una sottosuccessione  $\{A_{k_\nu}\}$  convergente a un elemento  $A \in K \cap F$ . Poiché l'esponenziale è un'applicazione continua, otteniamo che  $\exp A = a$  e quindi  $\exp(F)$  è chiuso in  $\mathbf{P}_+(n)$ . Quindi  $\exp : \mathfrak{p}(n) \longrightarrow \mathbf{P}_+(n)$ , essendo continua, chiusa e bigettiva è un omeomorfismo.  $\square$

Denotiamo con

$$\log : \mathbf{P}_+(n) \longrightarrow \mathfrak{p}(n)$$

l'applicazione inversa dell'esponenziale  $\exp : \mathfrak{p}(n) \longrightarrow \mathbf{P}_+(n)$ . Indichiamo con  $\mathfrak{p}(n, \mathbb{R})$  il sottospazio vettoriale reale delle matrici simmetriche a coefficienti reali e con  $\mathbf{P}_+(n, \mathbb{R})$  il sottoinsieme di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  delle matrici reali simmetriche definite positive. Abbiamo allora

**Teorema 2.3.3.** *L'applicazione esponenziale definisce un omeomorfismo*

$$\exp : \mathfrak{p}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{P}_+(n, \mathbb{R}).$$

<sup>3</sup>In generale si può dimostrare che gli autovalori di una matrice sono funzioni continue dei coefficienti.

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti ogni matrice simmetrica reale  $n \times n$  ammette una base ortonormale in  $\mathbb{R}^n$ . Ripetendo la dimostrazione svolta per il caso delle matrici complesse Hermitiane, si ottiene che  $\exp : \mathfrak{p}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{P}_+(n, \mathbb{R})$  è continua, chiusa e bigettiva e quindi un omeomorfismo.  $\square$

#### 2.4. Decomposizione di Cartan delle matrici di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$

**Teorema 2.4.1.** *Ogni matrice  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  si può scrivere in modo unico come il prodotto*

$$a = u \circ p$$

*di una matrice unitaria  $u \in \mathbf{U}(n)$  e di una matrice Hermitiana definita positiva  $p \in \mathbf{P}(n)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Data  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ , la matrice  $a^*a$  è Hermitiana e definita positiva. Sia  $Q = \log(a^*a)$  e  $p = \exp(Q/2)$ . Poniamo

$$u = a \circ p^{-1}.$$

Allora

$$\begin{aligned} u \circ u^* &= a \circ p^{-1} \circ p^{-1} \circ a^* \\ &= a \circ (a^* \circ a)^{-1} \circ a \\ &= a \circ a^{-1} \circ (a^*)^{-1} a^* \\ &= e. \end{aligned}$$

Quindi  $u^* = u^{-1}$  e  $u \in \mathbf{U}(n)$ .

Dimostriamo ora che la decomposizione è unica.

Se  $a = u \circ p$  con  $u \in \mathbf{U}(n)$  e  $p \in \mathbf{P}(n)$ , allora

$$a^* \circ a = p \circ u^* \circ u \circ p = p^2.$$

Per dimostrare l'unicità è allora sufficiente verificare che due matrici Hermitiane definite positive  $p, q \in \mathbf{P}(n)$  che hanno quadrati uguali sono uguali. Siano  $P, Q \in \mathfrak{p}(n)$  le matrici Hermitiane tali che  $\exp P = p$ ,  $\exp Q = q$ . Da  $\exp(2P) = \exp(2Q)$  otteniamo  $2P = 2Q$  e quindi  $P = Q$  e  $p = q$ .  $\square$

Se  $p \in \mathbf{P}(n)$  indichiamo con  $\sqrt{p}$  la sua radice quadrata in  $\mathbf{P}(n)$ , cioè l'unica matrice Hermitiana definita positiva  $q \in \mathbf{P}(n)$  tale che  $q^2 = p$ .

**Lemma 2.4.2.** *L'applicazione  $\mathbf{P}(n) \ni a \rightarrow \sqrt{a} \in \mathbf{P}(n)$  è un omeomorfismo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Abbiamo infatti il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(n) & \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} & \mathbf{P}(n) \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{p}(n) & \xrightarrow{(1/2)} & \mathfrak{p}(n) \end{array}$$

in cui le frecce verticali e la  $\mathfrak{p}(n) \ni P \rightarrow P/2 \in \mathfrak{p}(n)$  sono degli omeomorfismi.  $\square$

**Teorema 2.4.3.** *L'applicazione*

$$\mathbf{U}(n) \times \mathbf{P}(n) \ni (u, p) \longrightarrow u \circ p \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

è un omeomorfismo. In particolare  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  è omeomorfo al prodotto topologico  $\mathbf{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$ .

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione è continua e bigettiva per il teorema precedente. La sua inversa è data da

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \ni a \longrightarrow (a(\sqrt{a^* \circ a})^{-1}, \sqrt{a^* \circ a}) \in \mathbf{U}(n) \times \mathbf{P}(n)$$

ed è quindi continua.

Per concludere basta ricordare (Teorema II.3.3) che l'esponenziale definisce un omeomorfismo di  $\mathfrak{p}(n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$  su  $\mathbf{P}(n)$ .  $\square$

Indichiamo con  $\mathfrak{p}_0(n)$  il sottospazio delle matrici Hermitiane a traccia nulla.

**Lemma 2.4.4.** *L'applicazione esponenziale definisce un diffeomorfismo:*

$$\mathfrak{p}_0(n) \ni A \longrightarrow \exp(A) \in \mathbf{P}_+(n) \cap \mathbf{SL}(n, \mathbb{C}).$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché tutti gli autovalori di  $A \in \mathfrak{p}(n)$  sono reali, la sua traccia è reale e quindi il determinante dell'esponenziale di  $A \in \mathfrak{p}(n)$  è uguale a uno se e soltanto se la traccia è nulla.  $\square$

**Corollario 2.4.5.** *L'applicazione:*

$$\mathbf{SU}(n) \times \mathfrak{p}_0 \ni (u, A) \longrightarrow u \circ \exp(A) \in \mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$$

è un omeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che, se  $(u, A) \in \mathbf{U}(n) \times \mathfrak{p}(n)$ , allora condizione necessaria e sufficiente affinché  $u \circ \exp(A)$  sia in  $\mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$  è che  $u \in \mathbf{SU}(n)$  e  $A \in \mathfrak{p}_0(n)$ .  $\square$

## 2.5. Le decomposizioni di Gauss e di Iwasawa

Sia  $e_1, \dots, e_n$  la base canonica di  $\mathbb{k}^n$ . Un elemento  $a = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  del gruppo lineare  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{k})$  si dice *regolare* se per ogni intero  $k = 1, \dots, n$  i vettori

$$a(e_1), \dots, a(e_k), e_{k+1}, \dots, e_n$$

sono linearmente indipendenti, cioè se e soltanto se i determinanti dei suoi minori principali sono tutti diversi da zero:

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{per } k = 1, \dots, n.$$

Indichiamo con

- $\mathbf{T}_+(n, \mathbb{k})$  il gruppo delle matrici  $n \times n$  triangolari superiori invertibili;
- $\mathbf{T}_-(n, \mathbb{k})$  il gruppo delle matrici  $n \times n$  triangolari inferiori invertibili;
- $\mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{k})$  il gruppo delle matrici  $n \times n$  unipotenti triangolari superiori;
- $\mathbf{T}_{0,-}(n, \mathbb{k})$  il gruppo delle matrici  $n \times n$  unipotenti triangolari inferiori;
- $\mathbf{\Delta}(n, \mathbb{k})$  il gruppo delle matrici  $n \times n$  diagonali invertibili.

**Teorema 2.5.1** (Decomposizione di Gauss). *Se  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{k})$  è una matrice regolare, allora sono univocamente determinate tre matrici*

*$t_+ \in \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{k})$ ,  $t_- \in \mathbf{T}_{0,-}(n, \mathbb{k})$ ,  $\delta \in \mathbf{\Delta}(n, \mathbb{k})$ , tali che*

$$a = t_- \delta \circ t_+.$$

*I coefficienti di  $t_+$ ,  $t_-$ ,  $\delta$  sono funzioni razionali dei coefficienti di  $a$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo per ricorrenza sulla dimensione  $n$  che ogni  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{k})$  regolare è prodotto di una triangolare inferiore e di una triangolare superiore unipotente:

$$(\ominus) \quad a = \tau_- \circ \tau_+ \quad \text{con} \quad \tau_- \in \mathbf{T}_-(n, \mathbb{k}), \quad \tau_+ \in \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{k}).$$

Se  $n = 1$  questa affermazione è banale, in quanto  $\mathbf{T}_-(1, \mathbb{k}) = \mathbb{k} \setminus \{0\} = \mathbf{GL}(1, \mathbb{k})$  e  $\mathbf{T}_{0,+}(1, \mathbb{k}) = \{1\}$ . Supponiamo quindi che ogni matrice regolare  $(n-1) \times (n-1)$  ammetta una decomposizione  $(\ominus)$ .

Fissiamo una  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{k})$  regolare. Scriviamo  $a$  nella forma:

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & {}^t u \\ v & a' \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad u, v \in \mathbb{k}^{n-1}, \quad a' \in \mathfrak{gl}(n-1, \mathbb{k}).$$

Poiché  $D_1(a) = a_{11} \neq 0$ , possiamo definire la matrice

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & {}^t u/a_{11} \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{k}), \quad \text{con} \quad \tau_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -{}^t u/a_{11} \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Allora

$$a^{(1)} = a \circ \tau_1^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ v' & a'' \end{pmatrix}$$

con  $v' \in \mathbb{k}^{n-1}$  e con  $a'' \in \mathbf{GL}(n-1, \mathbb{k})$  regolare, perché  $D_k(a'') = D_{k+1}(a)/a_{11}$ .

Per l'ipotesi di ricorrenza, possiamo trovare una matrice  $\tau'_+ \in \mathbf{T}_{0,+}(n-1, \mathbb{k})$  tale che  $a' \circ [\tau'_+]^{-1} \in \mathbf{T}_-(n-1, \mathbb{k})$ . Se quindi poniamo:

$$\tilde{\tau}'_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau'_+ \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tau_+ = \tilde{\tau}'_+ \circ \tau_1,$$

otteniamo che  $\tau_- = a \circ \tau_+^{-1} \in \mathbf{T}_-(n, \mathbb{k})$  e quindi  $a$  ammette la decomposizione  $(\ominus)$ .

Una matrice triangolare inferiore  $\tau_- = (t_{ij}) \in \mathbf{T}_-(n, \mathbb{k})$  si decompone nel prodotto della matrice  $(t_{ij}/t_{ii}) \in \mathbf{T}_{0,-}(n, \mathbb{k})$  e della matrice diagonale  $(t_{ii}\delta_{ij}) \in \mathbf{\Delta}(n, \mathbb{k})$ :

$$\tau_- = \begin{pmatrix} t_{11} & & & \\ t_{21} & t_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{t_{21}}{t_{11}} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{t_{n1}}{t_{11}} & \frac{t_{n2}}{t_{22}} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & & & \\ & t_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Questo completa la dimostrazione dell'esistenza della decomposizione di Gauss. Resta da verificare l'unicità: se  $a = t_- \circ \delta \circ t_+ = t'_- \circ \delta' \circ t'_+$ , abbiamo:

$$[t'_-]^{-1} \circ t_- \circ \delta = \delta' \circ t'_+ \circ [t_+]^{-1}.$$

Il primo membro è triangolare inferiore, il secondo triangolare superiore e dunque entrambi sono matrici diagonali. Esse coincidono allora con  $\delta$  e  $\delta'$  rispettivamente ed otteniamo perciò  $t'_+ = t_+$ ,  $t'_- = t_-$ ,  $\delta = \delta'$ .

Abbiamo ottenuto così l'unicità. Per costruzione i coefficienti delle matrici  $t_+$ ,  $t_-$  e  $\delta$  sono funzioni razionali di quelli di  $a$ . Osserviamo in particolare che i coefficienti della matrice diagonale  $\delta$  sono dati da

$$(h) \quad \delta_{ii} = \frac{D_i(a)}{D_{i-1}(a)} \quad i = 1, \dots, n$$

ove si è posto  $D_0(a) = 1$ . □

Indichiamo con

$\Delta_+(n, \mathbb{R})$  il gruppo delle matrici  $n \times n$  diagonali reali invertibili con coefficienti non negativi.

Abbiamo:

**Teorema 2.5.2** (Decomposizione di Iwasawa). *Ogni  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  si decompone in modo unico in un prodotto:*

$$(\ddagger) \quad a = u \circ \delta \circ t$$

con  $u \in \mathbf{U}(n)$ ,  $\delta \in \Delta_+(n, \mathbb{R})$ ,  $t \in \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{C})$ .

**Osservazione 2.5.3.** Abbiamo in particolare:

(1) Se  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ , allora

$$u \in \mathbf{O}(n) = \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}), \delta \in \Delta_+(n, \mathbb{R}), t \in \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{R}).$$

(2) Se  $a \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ , allora

$$u \in \mathbf{SU}(n) = \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{SL}(n, \mathbb{C}), \delta \in \Delta_+(n, \mathbb{R}), \text{ con } \det \delta = 1, t \in \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{C}).$$

(3) Se  $a \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ , allora

$$u \in \mathbf{SO}(n) = \mathbf{O}(n) \cap \mathbf{SL}(n, \mathbb{R}), \delta \in \Delta_+(n, \mathbb{R}), \text{ con } \det \delta = 1, t \in \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{R}).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ . La  $a^* \circ a$  è una matrice Hermitiana definita positiva e quindi è regolare. Consideriamo la sua decomposizione di Gauss:

$$a^* \circ a = t_- \circ \theta \circ t_+ \quad \text{con} \quad t_{\pm} \in \mathbf{T}_{0,\pm}(n, \mathbb{C}), \theta \in \Delta(n, \mathbb{C}).$$

Poiché  $a^* \circ a$  è definita positiva, per (h) la  $\theta$  è il quadrato di un elemento  $\delta$  di  $\Delta_+(n, \mathbb{R})$ . Da  $a^* \circ a = [a^* \circ a]^* = t_+^* \circ \delta^2 \circ t_-^*$  ricaviamo, per l'unicità della decomposizione di Gauss, che  $t_- = t_+^*$  e quindi, posto  $t = t_+$ , avremo:

$$[a \circ (\delta \circ t)^{-1}]^* \circ [a \circ (\delta \circ t)^{-1}] = e$$

onde  $u = a \circ (\delta \circ t)^{-1} \in \mathbf{U}(n)$  ed otteniamo la decomposizione cercata.

L'unicità segue da quella della decomposizione di Gauss: infatti, se  $a = u \circ \delta \circ t$  è una decomposizione di Iwasawa di  $a$ , allora  $a^* \circ a = t^* \circ \delta^2 \circ t$  è una decomposizione di Gauss di  $a^* \circ a$ , onde  $t \in \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{C})$  e  $\delta^2 \in \Delta_+(n, \mathbb{R}) \subset \mathbf{P}_+(n)$  sono univocamente determinati. Ma allora anche la radice quadrata  $\delta \in \Delta_+(n, \mathbb{R}) \subset \mathbf{P}_+(n)$  è univocamente determinata. La dimostrazione è completa. □

**Osservazione 2.5.4.** In modo analogo si mostra che per ogni  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  sono univocamente determinate  $t \in \mathbf{T}_{0,-}(n, \mathbb{C})$ ,  $\delta \in \mathbf{\Delta}_+(n, \mathbb{R})$  e  $u \in \mathbf{U}(n)$  tali che

$$a = t \circ \delta \circ u.$$

Siano:

$\mathfrak{d}(n, \mathbb{k})$  lo spazio vettoriale delle matrici diagonali  $n \times n$  con coefficienti nel campo  $\mathbb{k}$ ;

$\mathfrak{d}_0(n, \mathbb{k})$  lo spazio vettoriale delle matrici diagonali di  $\mathfrak{d}(n, \mathbb{k})$  che hanno traccia nulla;

$\mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k})$  lo spazio vettoriale delle matrici  $n \times n$  nilpotenti triangolari superiori di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ ;

$\mathfrak{n}_-(n, \mathbb{k})$  lo spazio vettoriale delle matrici  $n \times n$  nilpotenti triangolari inferiori di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ .

L'applicazione esponenziale definisce omeomorfismi:

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}(n, \mathbb{R}) &\ni H \longrightarrow \exp(H) \in \mathbf{\Delta}_+(n, \mathbb{R}) \\ \mathfrak{d}_0(n, \mathbb{R}) &\ni H \longrightarrow \exp(H) \in \mathbf{\Delta}_+(n, \mathbb{R}) \cap \mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) \\ \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{C}) &\ni T \longrightarrow \exp(T) \in \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{C}) \\ \mathfrak{n}_-(n, \mathbb{C}) &\ni T \longrightarrow \exp(T) \in \mathbf{T}_{0,-}(n, \mathbb{C}) \\ \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{R}) &\ni T \longrightarrow \exp(T) \in \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{R}) \\ \mathfrak{n}_-(n, \mathbb{R}) &\ni T \longrightarrow \exp(T) \in \mathbf{T}_{0,-}(n, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Otteniamo quindi:

**Teorema 2.5.5.** *Le applicazioni:*

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{0,-}(n, \mathbb{C}) \times \mathfrak{d}(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{U}(n) &\ni (T, H, u) \longrightarrow \exp(T) \circ \exp(H) \circ u \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \\ \mathbf{U}(n) \times \mathfrak{d}(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{C}) &\ni (u, H, T) \longrightarrow u \circ \exp(H) \circ \exp(T) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \\ \mathbf{T}_{0,-}(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{d}(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{O}(n) &\ni (T, H, u) \longrightarrow \exp(T) \circ \exp(H) \circ u \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \\ \mathbf{O}(n) \times \mathfrak{d}(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{R}) &\ni (u, H, T) \longrightarrow u \circ \exp(H) \circ \exp(T) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \\ \mathbf{T}_{0,-}(n, \mathbb{C}) \times \mathfrak{d}_0(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{SU}(n) &\ni (T, H, u) \longrightarrow \exp(T) \circ \exp(H) \circ u \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{C}) \\ \mathbf{SU}(n) \times \mathfrak{d}_0(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{C}) &\ni (u, H, T) \longrightarrow u \circ \exp(H) \circ \exp(T) \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{C}) \\ \mathbf{T}_{0,-}(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{d}_0(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{SO}(n) &\ni (T, H, u) \longrightarrow \exp(T) \circ \exp(H) \circ u \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) \\ \mathbf{SO}(n) \times \mathfrak{d}_0(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{R}) &\ni (u, H, T) \longrightarrow u \circ \exp(H) \circ \exp(T) \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

sono omeomorfismi.



## CAPITOLO III

### Gruppi lineari e loro algebre di Lie

Un *gruppo lineare* è un sottogruppo chiuso  $\mathbf{G}$  di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  (per qualche intero positivo  $n$ ). In questo capitolo iniziamo lo studio della struttura dei gruppi lineari.

#### 3.1. Algebre di Lie

**Definizione 3.1.1.** Si dice *algebra di Lie* su un campo  $\mathbb{k}$  un'algebra  $\mathfrak{g}$  su  $\mathbb{k}$  il cui prodotto<sup>1</sup>, che indichiamo con

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \longrightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g},$$

sia antisimmetrico e soddisfi l'*identità di Jacobi*:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

**Osservazione 3.1.2.** Se il prodotto in  $\mathfrak{g}$  è antisimmetrico, il primo membro dell'identità di Jacobi è un'applicazione trilineare alternata. Per verificare che  $\mathfrak{g}$  sia un'algebra di Lie sarà quindi sufficiente verificare

- (1) che  $[X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$
- (2) che l'identità di Jacobi valga per ogni terna di vettori distinti di una base di  $\mathfrak{g}$  come spazio vettoriale.

**Esempio 3.1.3.** Sia  $V$  un qualsiasi spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{k}$ . Allora  $V$  è un'algebra di Lie con il prodotto

$$V \times V \ni (v_1, v_2) \longrightarrow 0 \in V.$$

Un'algebra di Lie in cui il prodotto di due qualsiasi elementi sia 0 si dice *abeliana*.

**Esempio 3.1.4.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{k}$  e sia  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  lo spazio vettoriale su  $\mathbb{k}$  di tutti gli endomorfismi lineari di  $V$ . Allora  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  è un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  rispetto all'operazione di commutazione di endomorfismi  $\mathbb{k}$ -lineari:

$$\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V) \times \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V) \ni (X, Y) \longrightarrow [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V).$$

Abbiamo infatti, se  $X, Y, Z \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ :

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]] &= X \circ (Y \circ Z - Z \circ Y) - (Y \circ Z - Z \circ Y) \circ X \\ &= X \circ Y \circ Z - X \circ Z \circ Y - Y \circ Z \circ X + Z \circ Y \circ X \end{aligned}$$

e analogamente

$$[Y, [Z, X]] = Y \circ Z \circ X - Y \circ X \circ Z - Z \circ X \circ Y + X \circ Z \circ Y,$$

---

<sup>1</sup>Ricordiamo che un'algebra su un campo  $\mathbb{k}$  è il dato di uno spazio vettoriale  $A$  su  $\mathbb{k}$  e di un'applicazione bilineare  $A \times A \ni (a, b) \longrightarrow a \cdot b \in A$ .

$$[Z, [X, Y]] = Z \circ X \circ YZ \circ Y \circ XX \circ Y \circ Z + Y \circ X \circ Z.$$

Sommando membro a membro, da queste tre uguaglianze otteniamo l'identità di Jacobi.

In particolare,  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$  è un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  rispetto all'operazione di commutazione di matrici:

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \times \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \ni (X, Y) \longrightarrow [X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}).$$

Se il campo  $\mathbb{k}$  è una estensione del campo  $\mathbb{F}$ , considereremo a volte  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$  come un'algebra di Lie su  $\mathbb{F}$  per *restrizione del campo degli scalari*. Un'applicazione lineare  $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$  tra due algebre di Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  sullo stesso campo  $\mathbb{k}$  si dice un *omomorfismo di algebre di Lie* se

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  e  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{k}$ , si dice *rappresentazione lineare* di  $\mathfrak{g}$  in  $V$  un omomorfismo di algebre di Lie

$$\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V).$$

Se  $\ker \phi = \{0\}$ , la rappresentazione  $\phi$  si dice *fedele*.

Una rappresentazione fedele permette di identificare  $\mathfrak{g}$  ad una sottoalgebra dell'algebra di Lie degli endomorfismi di uno spazio vettoriale.

**Esempio 3.1.5.** Sia  $A$  sia un'algebra associativa sul campo  $\mathbb{k}$ , con prodotto  $A \times A \ni (a, b) \longrightarrow a \cdot b \in A$ . Otteniamo un'algebra di Lie  $A_{\mathcal{L}}$  considerando su  $A$  il prodotto:

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a \quad \forall a, b \in A.$$

Supponiamo che  $\mathfrak{g}$  sia un'algebra di Lie di dimensione finita  $N$  su un campo  $\mathbb{k}$ . Fissata una base  $E_1, \dots, E_N$  di  $\mathfrak{g}$ , si definiscono *costanti di struttura* dell'algebra  $\mathfrak{g}$  in tale base gli scalari  $(c_{j,k}^i)_{1 \leq i, j, k \leq N}$  definiti da

$$[E_j, E_k] = \sum_{i=1}^N c_{j,k}^i E_i \quad \forall 1 \leq j, k \leq N.$$

Le costanti di struttura verificano le relazioni:

$$c_{j,k}^i = -c_{k,j}^i \quad (\text{antisimmetria})$$

$$\sum_{i=1}^N c_{j,k}^i c_{i,h}^r + c_{k,h}^i c_{i,j}^r + c_{h,j}^i c_{i,k}^r = 0 \quad (\text{identità di Jacobi}).$$

Viceversa, dato uno spazio vettoriale  $\mathfrak{g}$  su  $\mathbb{k}$ , una sua base  $E_1, \dots, E_N$  e coefficienti  $(c_{j,k}^i)_{1 \leq i, j, k \leq N}$  che verificano queste relazioni, vi è un'unica struttura di algebra di Lie su  $\mathfrak{g}$  per cui tali coefficienti siano le costanti di struttura nella base  $E_1, \dots, E_N$ .

**Esempio 3.1.6.** Sia  $\mathbb{R}^3$  lo spazio Euclideo di dimensione 3. Il *prodotto vettore*

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (v, w) \longrightarrow v \times w \in \mathbb{R}^3$$

è definito dall'identità:

$$\det(v, w, z) = (v \times w|z) \quad \forall v, w, z \in \mathbb{R}^3,$$

dove abbiamo indicato con  $(v, w, z)$  la matrice  $3 \times 3$  che ha come colonne i vettori  $v, w, z$ . Le regole di calcolo del prodotto vettore si esprimono nei vettori  $e_1, e_2, e_3$  della base canonica mediante:

$$e_i \times e_i = 0, \quad e_i \times e_j = \epsilon(i, j, k)e_k$$

per ogni  $i = 1, 2, 3$  ed ogni permutazione  $(i, j, k)$  di  $\{1, 2, 3\}$ . Lo spazio Euclideo  $\mathbb{R}^3$  con il prodotto vettore è un'algebra di Lie reale. Infatti il prodotto vettore è antisimmetrico perché, scambiando le prime due colonne di una matrice, il determinante cambia segno. Infine, per verificare l'identità di Jacobi basta verificare che

$$e_1 \times (e_2 \times e_3) + e_2 \times (e_3 \times e_1) + e_3 \times (e_1 \times e_2) = 0$$

Questa relazione è banale perché ciascuno degli addendi a primo membro è uguale a zero.

In modo equivalente, possiamo identificare  $\mathbb{R}^3$  allo spazio vettoriale reale formato dai quaternioni puramente immaginari. In questa identificazione, la parte reale e la parte immaginaria del prodotto di due quaternioni puramente immaginari sono rispettivamente il prodotto scalare e il prodotto vettore dei vettori corrispondenti.

Se  $a$  e  $b$  sono sottospazi vettoriali di un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  sul campo  $\mathbb{k}$ , indichiamo con  $[a, b]$  il sottospazio vettoriale generato dagli elementi  $[X, Y]$  al variare di  $X$  in  $a$  e di  $Y$  in  $b$ . Poiché il prodotto è antisimmetrico,  $[a, b] = [b, a]$ . Un sottospazio vettoriale  $a$  di  $\mathfrak{g}$  si dice una *sottoalgebra di Lie* di  $\mathfrak{g}$  se

$$[a, a] \subset a.$$

Un sottospazio vettoriale  $\mathfrak{h}$  di  $\mathfrak{g}$  si dice un *ideale dell'algebra di Lie*  $\mathfrak{g}$  se

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}.$$

Si verifica facilmente:

**Lemma 3.1.7.** *Se  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  è un omomorfismo di algebre di Lie, allora  $\ker \phi$  è un ideale di  $\mathfrak{g}$ .*

*Se  $\mathfrak{h}$  è un ideale dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , allora vi è un'unica struttura di algebra di Lie su  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  che renda la proiezione nel quoziente*

$$\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

*un omomorfismo di algebre di Lie.*

Sia  $A$  un'algebra su un campo  $\mathbb{k}$ . Un endomorfismo  $\mathbb{k}$ -lineare

$$D : A \rightarrow A$$

si dice una *derivazione* di  $A$  se verifica l'identità di Leibnitz:

$$D(a \cdot b) = (Da) \cdot b + a \cdot (Db).$$

**Lemma 3.1.8.** *L'insieme  $\text{Der}(A)$  di tutte le derivazioni di un'algebra  $A$  su  $\mathbb{k}$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(A)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo innanzi tutto che  $\text{Der}(A)$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(A)$  perché il prodotto  $A \times A \ni (a, b) \rightarrow a \cdot b \in A$  è  $\mathbb{k}$ -bilineare.

Se  $D_1, D_2 \in \text{Der}(A)$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} [D_1, D_2](a \cdot b) &= D_1(D_2a \cdot b + a \cdot D_2b)D_2(D_1a \cdot b + a \cdot D_1b) \\ &= D_1D_2a \cdot b + D_2a \cdot D_1b + D_1a \cdot D_2b + a \cdot D_1D_2b \\ &\quad - D_2D_1a \cdot b - D_1a \cdot D_2b - D_2a \cdot D_1b - a \cdot D_2D_1b \\ &= (D_1D_2 - D_2D_1)a \cdot b + a \cdot (D_1D_2 - D_2D_1)b \\ &= [D_1, D_2]a \cdot b + a \cdot [D_1, D_2]b \end{aligned}$$

e quindi  $\text{Der}(A)$  è un'algebra di Lie.  $\square$

Se  $A$  è un'algebra associativa, allora per ogni  $a \in A$  l'applicazione

$$D_a : A \ni b \rightarrow a \cdot b - b \cdot a \in A$$

è una derivazione di  $A$ .

Si verifica facilmente che vale il seguente:

**Lemma 3.1.9.** *Sia  $A$  un'algebra associativa su  $\mathbb{k}$ . Allora l'applicazione*

$$A \ni a \rightarrow D_a \in \text{Der}(A)$$

*è un omomorfismo dell'algebra di Lie  $A_{\text{Lie}}$  nell'algebra di Lie  $\text{Der}(A)$  delle derivazioni di  $A$ .*

Data un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  sul campo  $\mathbb{k}$ , ed un elemento  $X \in \mathfrak{g}$ , indichiamo con  $\text{ad}(X)$  l'endomorfismo lineare

$$\text{ad}(X) : \mathfrak{g} \ni Y \rightarrow \text{ad}(X)Y = [X, Y] \in \mathfrak{g}.$$

**Teorema 3.1.10.** *L'applicazione*

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \ni X \rightarrow \text{ad}(X) \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$$

*è una rappresentazione di  $\mathfrak{g}$  nell'algebra  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  delle derivazioni di  $\mathfrak{g}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** L'applicazione  $\text{ad}$  è lineare perché il prodotto  $[\cdot, \cdot]$  è bilineare. Dall'identità di Jacobi ricaviamo:

$$\begin{aligned} \text{ad}(X)[Y, Z] &= [X, [Y, Z]] \\ &= -[Y, [Z, X]] - [Z, [X, Y]] \\ &= [Y, \text{ad}(X)Z] + [\text{ad}(X)Y, Z] \end{aligned}$$

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

e quindi  $\text{ad}(X)$  è, per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ , una derivazione dell'algebra  $\mathfrak{g}$ . Abbiamo inoltre

$$\begin{aligned} [\text{ad}(X), \text{ad}(Y)]Z &= \text{ad}(X)[Y, Z] - \text{ad}(Y)[X, Z] \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\ &= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -[Z, [X, Y]] \\
&= \text{ad}([X, Y])Z, \\
&\quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g},
\end{aligned}$$

e quindi  $\text{ad}$  è un omomorfismo di algebre di Lie.  $\square$

L'applicazione

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \text{ad}(X) \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$$

si dice la *rappresentazione aggiunta* di  $\mathfrak{g}$ . Gli elementi dell'immagine  $\text{Int}(\mathfrak{g}) = \text{ad}(\mathfrak{g})$  si dicono *derivazioni interne* di  $\mathfrak{g}$ . Ogni algebra di Lie di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  si può identificare a una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$  per qualche intero positivo  $n$ : infatti è stato dimostrato da I.D. Ado (Uspehi Mat.Nauk, 1947) nel caso di campi di caratteristica zero e K. Iwasawa (Japan J.Math., 1948) nel caso generale che vale il seguente:

**Teorema 3.1.11.** *Ogni algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  ammette una rappresentazione lineare fedele.*

Nel seguito potremo quindi limitarci a considerare algebre di Lie  $\mathfrak{g}$  che sono sottoalgebre di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ .

### 3.2. Jacobiano dell'applicazione esponenziale

In questo paragrafo studieremo la relazione tra sottoalgebre di Lie di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  e sottogruppi di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ . Dimostriamo innanzi tutto il seguente:

**Lemma 3.2.1.** *Per ogni  $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  valgono le seguenti formule di commutazione:*

- (1) (i)  $\text{ad}(X)(XY) = X\text{ad}(X)Y.$
- (2) (ii)  $X^k Y = YX^k + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \text{ad}^j(X) Y X^{k-j} \quad \forall k \geq 1.$
- (3) (iii)  $YX^k = X^k Y + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (-1)^j X^{k-j} \text{ad}^j(X) Y \quad \forall k \geq 1.$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo la (i). Abbiamo:

$$\text{ad}(X)(XY) = [X, XY] = X^2 Y X Y X = X \text{ad}(X) Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}).$$

La dimostrazione delle (ii) e (iii) sono simili. Mostriamo ad esempio che vale la (iii).

Ragioniamo per induzione sull'intero  $k \geq 1$ . Se  $k = 1$ , la

$$YX = XY \text{ad}(X) Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$

segue dalla definizione di  $\text{ad}$ . Fissiamo quindi un intero  $m \geq 2$  e supponiamo che la formula (iii) valga per  $k = m - 1$ . Allora

$$\begin{aligned}
YX^m &= YX^{m-1}X \\
&= X^{m-1}YX + \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-1)^j X^{m-1-j} \text{ad}^j(X) Y X \\
&= X^m Y X^{m-1} \text{ad}(X) Y + \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-1)^j X^{m-j} \text{ad}^j(X) Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-1)^j X^{m-j-1} \operatorname{ad}^{j+1}(X)Y \\
&= X^m Y X^{m-1} \operatorname{ad}(X)Y + (-1)^m \operatorname{ad}^m(X)Y \\
&+ \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \left\{ \binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j-1} \right\} X^{m-j} \operatorname{ad}^j(X)Y \\
&\quad - \binom{m-1}{1} X^{m-1} \operatorname{ad}(X)Y
\end{aligned}$$

perché i due endomorfismi  $\operatorname{ad}(X)$  e  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \ni Y \rightarrow XY \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  commutano per la (i), da cui, tenuto conto della formula di somma dei binomiali:

$$\binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j-1} = \binom{m}{j},$$

otteniamo la (iii). □

**Teorema 3.2.2** (Formula dello Jacobiano). *L'applicazione esponenziale  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{\exp} \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  è differenziabile in ogni punto e il suo differenziale in  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  è dato da:*

$$d \exp(A) : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \ni X \rightarrow \frac{I - \exp(-\operatorname{ad}(A))}{\operatorname{ad}(A)} \exp(A)X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}),$$

ove

$$\frac{I - \exp(-\operatorname{ad}(A))}{\operatorname{ad}(A)} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(h+1)!} \operatorname{ad}^h(A).$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . Per ogni  $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  abbiamo:

$$\exp(A+X) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(A+X)^h}{h!}.$$

Ora, risulta:

$$(A+X)^h = A^h + \sum_{r=0}^{h-1} A^r X A^{h-r-1} + o(X).$$

Per la formula di commutazione (iii) abbiamo:

$$A^r X A^s = \sum_{j=0}^s (-1)^j \binom{s}{j} A^{h-j-1} \operatorname{ad}^j(A)X.$$

Sostituendo troviamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{r+s=h-1} A^r X A^s &= \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{j=0}^s (-1)^j \binom{s}{j} A^{h-j-1} \operatorname{ad}^j(A)X \\
&= \sum_{j=0}^{h-1} (-1)^j \left( \sum_{k=0}^{h-j-1} \binom{j+k}{j} \right) A^{h-j-1} \operatorname{ad}^j(A)X
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{h-1} (-1)^j \binom{h}{j+1} A^{h-j-1} \operatorname{ad}^j(A) X.$$

Otteniamo perciò:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} \sum_{r+s=h-1} A^r X A^s &= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{h-1} \frac{A^{h-j-1}}{(h-j-1)!} \frac{(-1)^j \operatorname{ad}^j(A)}{(j+1)!} X \\ &= \exp(A) \frac{I - \exp(-\operatorname{ad}(A))}{\operatorname{ad}(A)} X = \frac{I - \exp(-\operatorname{ad}(A))}{\operatorname{ad}(A)} \exp(A) X, \end{aligned}$$

e quindi:

$$\exp(A + X) = \exp(A) + \frac{I - \exp(-\operatorname{ad}(A))}{\operatorname{ad}(A)} \exp(A) X + O(|X|^2),$$

che dà la formula desiderata per il differenziale.  $\square$

Ricordiamo il

**Teorema 3.2.3** (Teorema delle funzioni implicite). *Sia  $\Omega$  un aperto di uno spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un'applicazione differenziabile di classe  $\mathcal{C}ont^k$  (con  $1 \leq k \leq \infty$ ). Sia  $x_0 \in \Omega$  un punto in cui*

$$df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*sia un isomorfismo lineare. Allora esiste un intorno aperto  $U$  di  $x_0$  in  $\Omega$  tale che  $f(U)$  sia aperto in  $\mathbb{R}^n$  e*

$$f|_U^{f(U)} : U \rightarrow f(U)$$

*sia un omeomorfismo, con inversa  $[f|_U^{f(U)}]^{-1}$  differenziabile di classe  $\mathcal{C}ont^k$ .*

Un omeomorfismo tra due aperti di  $\mathbb{R}^n$  che sia differenziabile di classe  $\mathcal{C}ont^k$  (con  $1 \leq k \leq \infty$ ) ed abbia inversa differenziabile di classe  $\mathcal{C}ont^k$  si dice un *diffeomorfismo di classe  $\mathcal{C}ont^k$* . Dal teorema delle funzioni implicite ricaviamo:

**Teorema 3.2.4.** *L'applicazione  $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  definisce un diffeomorfismo di classe  $\mathcal{C}ont^\infty$  di un intorno aperto di 0 in  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  su un intorno aperto di e in  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti il differenziale di  $\exp$  in 0 è l'applicazione identica:

$$d \exp(0) : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \ni X \rightarrow X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}).$$

$\square$

**Teorema 3.2.5** (Coordinate di seconda specie). *Siano  $V, W$  due sottospazi vettoriali reali di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , considerato come spazio vettoriale reale di dimensione  $2n^2$ , tali che*

$$V \oplus W = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}).$$

*Allora possiamo trovare un intorno aperto  $U_1$  di 0 in  $V$  e un intorno aperto  $U_2$  di 0 in  $W$  tali che*

$$U_1 \times U_2 \ni (X, Y) \rightarrow \exp(X) \exp(Y) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

sia un diffeomorfismo di classe  $\mathbb{C}ont^\infty$  su un intorno aperto di  $e$  in  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $X = X_1 + X_2 \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  con  $X_1 \in V$  e  $X_2 \in W$ . Allora, per la formula dello Jacobiano,

$$\begin{aligned}\exp(X_1)\exp(X_2) &= (e + X_1 + O(\|X_1\|^2))(e + X_2 + O(\|X_2\|^2)) \\ &= e + X + O(\|X\|^2)\end{aligned}$$

e quindi l'applicazione

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \ni X \longrightarrow \exp(X_1)\exp(X_2) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

ha in 0 differenziale uguale all'identità. La tesi segue quindi dal teorema delle funzioni implicite.  $\square$

**Osservazione 3.2.6.** Se  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  e  $\|a - e\| < 1$ , la serie

$$\log(a) = \log(e + (a - e)) = - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(e - a)^h}{h}$$

converge uniformemente su ogni aperto  $\{\|a - e\| < r\}$  per  $0 < r < 1$  e definisce un endomorfismo  $\log(a) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  tale che

$$\exp(\log(a)) = a.$$

**Lemma 3.2.7.** Se  $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  allora

$$\exp(tA)\exp(tB) = \exp(t(A+B) + (t^2/2)[A, B]) + O(t^3) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Basta dimostrare che le due applicazioni

$$F_1 : \mathbb{R} \ni t \longrightarrow \exp(tA)\exp(tB) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

e

$$F_2 : \mathbb{R} \ni t \longrightarrow \exp(t(A+B) + (t^2/2)[A, B]) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

assumono per  $t = 0$  gli stessi valori ed hanno uguali per  $t = 0$  le loro derivate prime e seconde.

Abbiamo  $F_1(0) = e = F_2(0)$ . Inoltre:

$$\begin{aligned}F_1(t) &= (e + tA + (t^2/2)A^2 + O(t^3))(e + tB + (t^2/2)B^2 + O(t^3)) \\ &= e + t(A+B) + t^2(A^2/2 + AB + B^2/2) + O(t^3)\end{aligned}$$

ci dà

$$F_1'(0) = A + B, \quad F_1''(0) = A^2 + 2AB + B^2.$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned}F_2(t) &= e + t(A+B) + (t^2/2)[A, B] + (1/2)(t(A+B) + (t^2/2)[A, B])^2 + O(t^3) \\ &= e + t(A+B) + (t^2/2)([A, B] + A^2 + AB + BA + B^2) + O(t^3) \\ &= e + t(A+B) + (t^2/2)(A^2 + 2AB + B^2) + O(t^3)\end{aligned}$$

e quindi anche

$$F_2'(0) = A + B, \quad F_2''(0) = A^2 + 2AB + B^2.$$

$\square$

**Lemma 3.2.8.** *Se  $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  allora*

$$\exp(tA) \exp(tB) = \exp(t(A+B) + (t^2/2)[A, B]) + O(t^3) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che le due applicazioni

$$F_1 : \mathbb{R} \ni t \longrightarrow \exp(tA) \exp(tB) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

e

$$F_2 : \mathbb{R} \ni t \longrightarrow \exp(t(A+B) + (t^2/2)[A, B]) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

assumono per  $t = 0$  gli stessi valori ed hanno uguali per  $t = 0$  le loro derivate prime e seconde.

Abbiamo  $F_1(0) = e = F_2(0)$ . Inoltre:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= (e + tA + (t^2/2)A^2 + O(t^3))(e + tB + (t^2/2)B^2 + O(t^3)) \\ &= e + t(A+B) + t^2(A^2/2 + AB + B^2/2) + O(t^3) \end{aligned}$$

ci dà

$$F_1'(0) = A + B, \quad F_1''(0) = A^2 + 2AB + B^2.$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned} F_2(t) &= e + t(A+B) + (t^2/2)[A, B] + (1/2)(t(A+B) + (t^2/2)[A, B])^2 + O(t^3) \\ &= e + t(A+B) + (t^2/2)([A, B] + A^2 + AB + BA + B^2) + O(t^3) \\ &= e + t(A+B) + (t^2/2)(A^2 + 2AB + B^2) + O(t^3) \end{aligned}$$

e quindi anche

$$F_2'(0) = A + B, \quad F_2''(0) = A^2 + 2AB + B^2.$$

□

**Lemma 3.2.9.** *Se  $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  allora*

$$\exp(tA) \exp(tB) = \exp(t(A+B) + (t^2/2)[A, B]) + O(t^3) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che le due applicazioni

$$F_1 : \mathbb{R} \ni t \longrightarrow \exp(tA) \exp(tB) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

e

$$F_2 : \mathbb{R} \ni t \longrightarrow \exp(t(A+B) + (t^2/2)[A, B]) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

assumono per  $t = 0$  gli stessi valori ed hanno uguali per  $t = 0$  le loro derivate prime e seconde.

Abbiamo  $F_1(0) = e = F_2(0)$ . Inoltre:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= (e + tA + (t^2/2)A^2 + O(t^3))(e + tB + (t^2/2)B^2 + O(t^3)) \\ &= e + t(A+B) + t^2(A^2/2 + AB + B^2/2) + O(t^3) \end{aligned}$$

ci dà

$$F_1'(0) = A + B, \quad F_1''(0) = A^2 + 2AB + B^2.$$

D'altra parte:

$$F_2(t) = e + t(A+B) + (t^2/2)[A, B] + (1/2)(t(A+B) + (t^2/2)[A, B])^2 + O(t^3)$$

$$\begin{aligned}
&= e + t(A + B) + (t^2/2)([A, B] + A^2 + AB + BA + B^2) + O(t^3) \\
&= e + t(A + B) + (t^2/2)(A^2 + 2AB + B^2) + O(t^3)
\end{aligned}$$

e quindi anche

$$F_2'(0) = A + B, \quad F_2''(0) = A^2 + 2AB + B^2.$$

□

### 3.3. Algebra di Lie di un gruppo lineare

Il Lemma 3.2.9 ci permette di esplicitare la relazione tra sottogruppi chiusi di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  e sottoalgebre di Lie reali di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ :

**Teorema 3.3.1.** *Sia  $\mathbf{G}$  un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ . Poniamo*

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in \mathbf{G} \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

*Allora  $\mathfrak{g}$  è una sottoalgebra di Lie reale di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . Inoltre*

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{G}$$

*definisce un omeomorfismo di un intorno aperto di 0 in  $\mathfrak{g}$  su un intorno aperto di  $e$  in  $\mathbf{G}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** È chiaro che, se  $X \in \mathfrak{g}$ , allora  $tX \in \mathfrak{g}$  per ogni numero reale  $t$ . Dimostriamo ora che, se  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , anche  $X + Y \in \mathfrak{g}$ . Abbiamo:

$$(\exp(tX/n) \exp(tY/n))^n \in \mathbf{G} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per il lemma

$$\exp(tX/n) \exp(tY/n) = \exp(t(X + Y)/n + O(t^2/n^2))$$

e quindi

$$(\exp(tX/n) \exp(tY/n))^n = \exp(t(X + Y) + O(t^2/n)).$$

Passando al limite per  $n \rightarrow \infty$ , poiché  $\mathbf{G}$  è chiuso, troviamo  $\exp(t(X + Y)) \in \mathbf{G}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Quindi  $X + Y \in \mathfrak{g}$ .

Poiché  $\mathbf{G}$  è un gruppo, avremo allora anche

$$\exp(tX/n) \exp(tY/n) \exp(-t(X + Y)/n) \in \mathbf{G} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Usiamo ancora il lemma

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\frac{tX}{n}\right) \exp\left(\frac{tY}{n}\right) \exp\left(\frac{-t(X + Y)}{n}\right) \\
&= \exp\left(\frac{t(X + Y)}{n} + \frac{t^2}{2n^2}[X, Y] + O\left(\frac{t^3}{n^3}\right)\right) \exp\left(\frac{-t(X + Y)}{n}\right) \\
&= \exp\left(\frac{t^2}{2n^2}[X, Y] + O\left(\frac{t^3}{n^3}\right)\right).
\end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$(\exp(tX/n) \exp(tY/n) \exp(-t(X + Y)/n))^n = \exp\left(\frac{t^2}{2}[X, Y] + O(t^3/n)\right)$$

e, passando al limite per  $n \rightarrow \infty$  abbiamo

$$\exp\left(\frac{t^2}{2}[X, Y]\right) \in \mathbf{G}$$

perché  $\mathbf{G}$  è chiuso. Poiché  $\mathbf{G}$  è un gruppo, e quindi contiene l'inverso di ogni suo elemento, ricaviamo che anche  $\exp(-(t^2/2)[X, Y]) \in \mathbf{G}$  e quindi  $\exp(t[X, Y]) \in \mathbf{G}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e per ogni  $X, Y \in \mathfrak{g}$  e quindi  $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ . Sia  $\mathbf{G}'$  il sottogruppo di  $\mathbf{G}$  generato da

$$\exp(\mathfrak{g}) = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

Dico che  $\mathbf{G}'$  è un intorno di  $e$  in  $\mathbf{G}$ . Se così non fosse, potremmo trovare una successione  $\{g_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{G} \setminus \mathbf{G}'$  tale che  $g_\nu \rightarrow e$  per  $\nu \rightarrow \infty$ . Scegliamo un sottospazio vettoriale reale  $V$  di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  complementare di  $\mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . Possiamo allora trovare intorni aperti  $U$  di 0 in  $\mathfrak{g}$  e  $U'$  di 0 in  $V$  tali che

$$U \times U' \ni (X, Y) \rightarrow \exp(X)\exp(Y) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

sia un diffeomorfismo di classe  $\mathcal{C}ont^\infty$  su un intorno  $W$  di  $e$  in  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ . In particolare, possiamo supporre, a meno di passare a una sottosuccessione estratta, che

$$g_\nu = \exp(X_\nu)\exp(Y_\nu) \quad \text{con} \quad X_\nu \in U, Y_\nu \in U', \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo:

$$X_\nu \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad Y_\nu \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad \nu \rightarrow \infty.$$

Inoltre,  $Y_\nu \neq 0$  ed  $\exp(Y_\nu) \in \mathbf{G}$  per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ . Sia  $m_\nu$  un intero tale che

$$m_\nu \leq \|Y_\nu\|^{-1} < m_\nu + 1.$$

A meno di passare a una sottosuccessione, possiamo allora supporre che

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} m_\nu Y_\nu = Y \in V \setminus \{0\}.$$

Per ogni coppia di interi  $p, q$  con  $q > 0$  poniamo

$$pm_\nu = qs_\nu + r_\nu \quad \text{con} \quad 0 \leq r_\nu < q.$$

Poiché

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} r_\nu Y_\nu = 0$$

otteniamo

$$\exp\left(\frac{p}{q}Y\right) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{pm_\nu}{q}Y_\nu\right) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\exp(Y_\nu))^{s_\nu} \in \mathbf{G}.$$

Quindi  $\mathbf{G}$  contiene gli elementi  $\exp(tY)$  per ogni razionale positivo  $t$ . Poiché  $\mathbf{G}$  è chiuso,  $\exp(tY) \in \mathbf{G}$  per ogni  $t$  reale non negativo, e poiché  $\mathbf{G}$  è un gruppo ciò vale anche per i  $t$  reali negativi. Abbiamo allora  $Y \in \mathfrak{g}$ , che contraddice la scelta di  $V$ . Ne segue che  $\mathbf{G}'$  è un intorno aperto di  $e$  in  $\mathbf{G}$  e quindi coincide con la componente connessa  $G_e$  dell'identità in  $\mathbf{G}$ . Inoltre, la dimostrazione mostra che l'esponenziale definisce un omeomorfismo dell'intorno aperto  $U$  di 0 in  $\mathfrak{g}$  sull'intorno aperto  $W \cap \mathbf{G}$  dell'identità in  $\mathbf{G}$ .  $\square$

Se  $\mathbf{G}$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ , chiamiamo

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in \mathbf{G} \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$$

l'algebra di Lie del gruppo  $\mathbf{G}$ .

La dimensione di  $\mathfrak{g}$  come spazio vettoriale reale si dice *dimensione* del gruppo  $\mathbf{G}$ .

**Teorema 3.3.2** (Rappresentazione aggiunta). *Sia  $\mathbf{G}$  un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  e sia  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  la sua algebra di Lie. Allora*

$$\text{ad}(g)X = gXg^{-1} \in \mathfrak{g} \quad \forall g \in \mathbf{G}, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Per ogni  $g \in \mathbf{G}$  l'applicazione

$$\text{ad}(g) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

è un isomorfismo di algebre di Lie.

L'applicazione

$$\text{ad} : \mathbf{G} \ni g \longrightarrow \text{ad}(g) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$$

è un omomorfismo di gruppi.

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $X \in \mathfrak{g}$  e  $g \in \mathbf{G}$ , abbiamo

$$\exp(tgXg^{-1}) = g \exp(tX)g^{-1} \in \mathbf{G} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e quindi  $\text{ad}(g)X \in \mathfrak{g}$ . L'applicazione  $\text{ad}(g) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  è lineare.

Siano ora  $g \in \mathbf{G}$  e  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Abbiamo:

$$\begin{aligned} [\text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y] &= (\text{Ad}(g)X)(\text{Ad}(g)Y) - (\text{Ad}(g)Y)(\text{Ad}(g)X) \\ &= (gXg^{-1})(gYg^{-1}) - (gYg^{-1})(gXg^{-1}) \\ &= g(XY - YX)g^{-1} = \text{Ad}(g)[X, Y] \end{aligned}$$

e quindi  $\text{Ad}(g) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  è un automorfismo dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ .

Infine, abbiamo:

$$\text{Ad}(g_1) \circ \text{Ad}(g_2)X = g_1 (g_2 X g_2^{-1}) g_1^{-1} = (g_1 g_2) X (g_1 g_2)^{-1} = \text{Ad}(g_1 g_2)X$$

per ogni  $X \in \mathfrak{g}$  ed ogni  $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$ ; questo dimostra che  $\mathbf{G} \ni g \longrightarrow \text{Ad}(g) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$  è un omomorfismo di gruppi.  $\square$

L'applicazione

$$\text{Ad} : \mathbf{G} \ni g \longrightarrow \text{Ad}(g) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$$

si dice *rappresentazione lineare aggiunta* di  $\mathbf{G}$ .

### 3.4. Algebre di Lie dei gruppi lineari e dei gruppi lineari speciali

Poiché l'applicazione esponenziale è definita per tutte le matrici di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , questa è per la nostra definizione l'algebra di Lie del gruppo lineare  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ . Abbiamo anche osservato che in questo caso l'applicazione

$$\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

è surgettiva.

Abbiamo poi:

**Teorema 3.4.1.** *L'algebra di Lie del gruppo speciale lineare complesso  $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$  è*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \text{trac}(A) = 0\}.$$

*L'algebra di Lie del gruppo lineare reale  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  è  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ .*

*L'algebra di Lie del gruppo lineare speciale reale  $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$  è*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \text{trac}(A) = 0\}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $A$  una matrice di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  tale che  $\det \exp(tA) = 1$  per ogni numero reale  $t$ . Allora  $t \cdot \text{trac} A \in (2\pi)\mathbb{Z}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , e questo equivale al fatto che  $\text{trac} A = 0$ .

Se  $A$  è una matrice di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  tale che  $\exp(tA)$  sia reale per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , allora anche  $(d/dt) \exp(tA)|_{t=0} = A$  è una matrice reale.

Da queste osservazioni segue la tesi.  $\square$

### 3.5. Sottogruppi di Lie del gruppo lineare

I gruppi lineari hanno una struttura naturale di *varietà differenziabili* e la dimensione della loro algebra di Lie è uguale alla loro dimensione come sottovarietà differenziabili.

In questo paragrafo consideriamo sottogruppi non necessariamente chiusi del gruppo lineare.

Premettiamo alcune considerazioni di carattere generale.

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$ . Indichiamo con  $\mathcal{E}(M)$  l'anello delle funzioni reali di classe  $\mathcal{C}^\infty$  definite su  $M$  e con  $\mathfrak{X}(M) = \mathcal{C}^\infty(M, TM)$  l' $\mathcal{E}(M)$ -modulo dei campi di vettori di classe  $\mathcal{C}^\infty$  su  $M$ .

Una *distribuzione vettoriale* su  $M$  è un sotto- $\mathcal{E}(M)$ -modulo  $\mathcal{D}$  di  $\mathfrak{X}(M)$ . Per ogni punto  $x \in M$  indichiamo con  $\mathcal{D}_x$  il sottospazio vettoriale di  $T_x M$  formato dai valori in  $x$  dei campi di vettori di  $\mathcal{D}$ :

$$\mathcal{D}_x = \{X_x \mid X \in \mathcal{D}\}.$$

La sua dimensione si dice il *rango* di  $\mathcal{D}$  in  $x$ .

Una sottovarietà differenziabile connessa  $N$  di  $M$  si dice una *sottovarietà integrale* di  $\mathcal{D}$  se  $T_x N \subset \mathcal{D}_x$  per ogni  $x \in N$ . Chiaramente una tale  $N$  non può avere in alcun suo punto  $x$  dimensione maggiore del rango della distribuzione  $\mathcal{D}$  in  $x$ . Se  $T_x N = \mathcal{D}_x$  per ogni punto  $x \in N$  diciamo che  $N$  è una *sottovarietà integrale completa* di  $\mathcal{D}$ .

Vale il

**Teorema 3.5.1** (Frobenius). *Sia  $\mathcal{D}$  una distribuzione vettoriale su  $X$  di rango costante. Sono condizioni equivalenti:*

- (1) (i) *per ogni punto  $x$  di  $M$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $x$  in  $M$  e una sottovarietà differenziabile chiusa  $N$  di  $U$  che contiene  $x$  ed è una sottovarietà integrale completa di  $\mathcal{D}$ ;*

(2) (ii) la distribuzione  $\mathcal{D}$  è formalmente integrabile: cioè<sup>2</sup>

$$[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}.$$

DIMOSTRAZIONE. (i)  $\rightarrow$  (ii) Siano  $X, Y \in \mathcal{D}$ , sia  $x \in M$  e sia  $N$  una sottovarietà integrale completa di  $\mathcal{D}$  passante per il punto  $x$ . Poiché le restrizioni di  $X$  e  $Y$  a  $N$  sono per ipotesi campi di vettori tangenti a  $N$ , anche il loro commutatore  $[X, Y]$  è un campo di vettori tangente a  $N$ . Questo dimostra che  $[X, Y]_x \in \mathcal{D}_x$ .

Poiché questa proprietà è verificata per ogni  $x \in M$ , otteniamo che  $[X, Y] \in \mathcal{D}$ . (ii)  $\rightarrow$  (i) Dimostriamo, per induzione sul rango  $m$  della distribuzione  $\mathcal{D}$ , che per ogni punto  $p$  di  $M$  possiamo trovare un intorno aperto  $U$  di  $p$  e coordinate locali  $y^1, \dots, y^n$  in  $U$  tali che  $\mathcal{D}|_U$  sia generata dalle derivate parziali rispetto alle prime  $m$  coordinate:

$$\mathcal{D}|_U = \mathcal{E}(U) \frac{\partial}{\partial y^1} + \dots + \mathcal{E}(U) \frac{\partial}{\partial y^m}.$$

Fissato un punto  $x_0$  di  $M$ , possiamo fissare un sistema di coordinate locali con centro in  $x_0$  tali che, se  $m$  è il rango di  $\mathcal{D}$ , l' $\mathcal{E}(M)$ -modulo  $\mathcal{D}$  sia generato, nell'intorno coordinato  $U$  di  $x_0$ , da campi di vettori:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=m+1}^n a_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{per } i = 1, \dots, m.$$

Ciò è vero per  $m = 1$ . Fissiamo infatti coordinate locali  $x^1, \dots, x^n$  in un intorno  $U$  di  $p$  tali che  $\mathcal{D}$  sia generato in  $U$  dal campo di vettori:

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{j=2}^n a^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Consideriamo allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \phi^1(t) = 1 \\ \phi^j(t) = a^j(\phi(t)) & \text{se } j = 2, \dots, n \\ \phi^1(0) = 0 \\ \phi^j(0) = x^j & \text{se } j = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Esso ha una soluzione unica  $\phi^i(t; x^2, \dots, x^n)$  per  $|(x^2, \dots, x^n)|$  piccolo e la posizione:

$$x^i = \phi^i(y^1; y^2, \dots, y^n) \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n$$

definisce per il teorema delle funzioni implicite un nuovo sistema di coordinate in cui  $X = \partial/\partial y^1$ . Supponiamo ora  $m > 1$  e la nostra asserzione vera per distribuzioni formalmente integrabili di rango minore di  $m$ . Possiamo fissare una carta coordinata con centro nel punto  $p \in M$  assegnato, in modo che nelle coordinate locali  $x^1, \dots, x^n$  la distribuzione  $\mathcal{D}$  sia generata in  $U$  da campi di vettori della forma:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{k=m+1}^n a_i^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{per } i = 1, \dots, m.$$

<sup>2</sup>Ciò significa che  $[X, Y] = XY - YX \in \mathcal{D}$  se  $X, Y \in \mathcal{D}$ .

Per la prima parte della dimostrazione possiamo ancora supporre che  $a_1^k = 0$  in  $U$  per  $k = m + 1, \dots, n$ , cioè  $X_1 = \partial/\partial x^1$ . L'integrabilità formale di  $\mathcal{D}$  ci dà allora  $[X_i, X_j] = 0$  in  $U$  per ogni  $i, j = 1, \dots, m$ , e questa ci dice in particolare che

$$\partial a_i^k / \partial x^1 = 0 \quad \text{per } i = 2, \dots, m \quad k = m + 1, \dots, n.$$

Perciò  $X_2, \dots, X_n$  generano in  $U' = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |x^j| < R\}$  una distribuzione formalmente integrabile di rango  $(m - 1)$ . Per l'ipotesi induttiva possiamo trovare nuove coordinate  $y^2, \dots, y^n$  tali che  $X_j = \partial/\partial y^j$  per  $j = 2, \dots, m$ . Ponendo  $y^1 = x^1$  abbiamo dimostrato la nostra asserzione. Poiché nelle nuove coordinate abbiamo

$$X_i = \frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{per } i = 1, \dots, m,$$

otteniamo la sottovarietà integrale completa di  $\mathcal{D}$  passante per  $p$  nella forma

$$N \cap U = \{y^{k+1} = 0, \dots, y^n = 0\}.$$

□

Ad ogni matrice  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  possiamo associare un campo di vettori sullo spazio Euclideo  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , identificando  $A = (a_{ij})$  al campo costante

$$\vec{A} = \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}.$$

Associeremo quindi ad ogni  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  un campo di vettori  $\tilde{A}$  su  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  ponendo

$$\tilde{A}_x = \vec{x}\tilde{A} = \sum_{i,j} \sum_k x_{ik} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \quad \text{per ogni } x = (x_{ij}) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}).$$

Si verifica allora che  $[\tilde{A}, \tilde{B}] = \widetilde{[A, B]}$ , dove le parentesi a primo membro rappresentano la commutazione dei campi di vettori e quelle a secondo membro il commutatore di due endomorfismi lineari.

Otteniamo in questo modo un omomorfismo iniettivo di algebre di Lie:

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \ni A \longrightarrow \tilde{A} \in \mathfrak{X}(\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})).$$

I campi di vettori  $\tilde{A}$  sono *invarianti a sinistra* su  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ : abbiamo cioè  $L_{g*}(\tilde{A}) = \tilde{A}$  per ogni  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ . Associamo a una sottoalgebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  la distribuzione vettoriale  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  su  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  generata dai campi di vettori  $\tilde{A}$  al variare di  $A$  in  $\mathfrak{g}$ . La  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  è allora formalmente integrabile e per il teorema di Frobenius esisterà una sottovarietà integrale completa massimale  $\mathbf{G}$  di  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  che contiene l'identità  $I_n$ . Abbiamo:

**Teorema 3.5.2.** *Se  $\mathfrak{g}$  è una sottoalgebra di Lie reale di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , allora la sottovarietà integrale massimale completa  $\mathbf{G}$  di  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  che contiene l'identità  $I_n$  è un sottogruppo del gruppo lineare  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ . Esso è il sottogruppo  $\mathbf{G}$  di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  generato dagli elementi  $\exp(A)$  al variare di  $A$  in  $\mathfrak{g}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che  $\mathbf{G}$  contiene  $\exp(X)$  per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ , in quanto la curva  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tX)$  è tangente a  $\overrightarrow{\exp(tX)X} \in \mathcal{D}_{\exp(tX)}(\mathfrak{g})$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Se fissiamo poi una coppia di elementi  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , allora  $\mathbf{G}$  contiene anche  $\exp(X)\exp(Y)$  in quanto la curva  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(X)\exp(tY)$  è per ogni  $t \in \mathbb{R}$  tangente a  $\overrightarrow{\exp(X)\exp(tY)Y} \in \mathcal{D}_{\exp(X)\exp(tY)}(\mathfrak{g})$ , e contiene il punto  $\exp(X)$  di  $\mathbf{G}$ . In modo analogo dimostriamo che  $\mathbf{G}$  contiene ogni prodotto finito  $\exp(X_1) \cdots \exp(X_m)$  con  $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g}$  e quindi il sottogruppo  $\mathbf{G}'$  di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  generato da  $\{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$ .

Fissiamo ora un intorno aperto  $U$  di 0 in  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  tale che l'esponenziale definisca un omeomorfismo di  $U$  su  $\exp(U)$ . Sia  $V = \exp(U \cap \mathfrak{g})$ . Allora  $\mathbf{G}'$  è il sottogruppo di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  generato da  $V$ .

Per dimostrare che  $\mathbf{G} = \mathbf{G}'$ , consideriamo su  $\mathbf{G}$  la topologia di sottovarietà differenziabile di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ , quella cioè per cui per ogni  $g \in \mathbf{G}$  l'applicazione

$$U \cap \mathfrak{g} \ni X \rightarrow g \exp(X) \in gV$$

è un diffeomorfismo. È facile verificare allora che  $\mathbf{G}'$  è aperto e chiuso in  $\mathbf{G}$  e che quindi le due sottovarietà coincidono.  $\square$

Occorre osservare che in generale la topologia di sottovarietà su  $\mathbf{G}$  che si considera nella dimostrazione del teorema è più fine della topologia di sottospazio topologico: le due topologie coincidono quando  $\mathbf{G}$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ . Il gruppo  $\mathbf{G}$  ottenuto nel teorema precedente, con la topologia di sottovarietà differenziabile di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ , si dice il *sottogruppo (di Lie) analitico associato alla sottoalgebra di Lie*  $\mathfrak{g}$ .

Un sottogruppo  $\mathbf{G}$  del gruppo lineare  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  che abbia al più un numero finito di componenti connesse e la cui componente connessa dell'identità  $\mathbf{G}_e$  sia un sottogruppo analitico di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  si dirà un *sottogruppo di Lie del gruppo lineare*  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ . Ad esempio, il sottogruppo analitico  $\mathbf{G}$  di  $\mathbf{GL}(4, \mathbb{R})$  corrispondente all'algebra di Lie  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}A$  con

$$A = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & \pi & -\pi \\ & & & \end{pmatrix}$$

è la curva:

$$\mathbf{G} = \left\{ \left( \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & & \\ \sin t & \cos t & & \\ & & \cos(\pi t) & -\sin(\pi t) \\ & & \sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{pmatrix} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

che è densa nel sottogruppo chiuso:

$$\overline{\mathbf{G}} = \left\{ \left( \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & & \\ \sin t & \cos t & & \\ & & \cos s & -\sin s \\ & & \sin s & \cos s \end{pmatrix} \right) \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Osserviamo che possiamo sempre considerare  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  come un sottogruppo chiuso del gruppo lineare reale  $\mathbf{GL}(2n, \mathbb{R})$ . La discussione che abbiamo sopra sviluppato per semplicità nel caso di sottoalgebre di Lie reali dell'algebra di Lie  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , si può facilmente ripetere nel caso di sottogruppi di Lie reali di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . Abbiamo:

**Proposizione 3.5.3.** *Siano  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$  sottogruppi di Lie analitici del gruppo lineare  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ , con algebre di Lie  $\mathfrak{g}_1$  e  $\mathfrak{g}_2$  rispettivamente. Allora:  $\mathbf{G}_1 \subset \mathbf{G}_2$  se e soltanto se  $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2$ .*

Osserviamo che un sottogruppo di Lie  $\mathbf{G}$  di un gruppo lineare  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  è un gruppo topologico con la topologia  $\tau$  di sottospazio. La sua topologia  $\tau_{\text{Lie}}$  di *sottogruppo di Lie* è comunque completamente determinata: essa è la meno fine tra le topologie localmente connesse che sono più fini di quella di sottospazio: sono aperti nella topologia  $\tau_{\text{Lie}}$  tutte le componenti connesse degli aperti della topologia  $\tau$ . Questi aperti connessi formano una base di  $\tau_{\text{Lie}}$ . L'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di un sottogruppo di Lie  $\mathbf{G}$  del gruppo lineare  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  è caratterizzata, come nel caso dei sottogruppi chiusi, da:

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in \mathbf{G} \forall t \in \mathbb{R}\}.$$



## CAPITOLO IV

### Gruppi lineari compatti

Esamineremo in questo capitolo la struttura dei principali gruppi lineari compatti. Ricordiamo la loro definizione:

$$\mathbf{U}(n) = \{a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \mid a^* a = I_n\} \quad (\text{gruppo unitario})$$

$$\mathbf{SU}(n) = \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{SL}(n, \mathbb{C}) \quad (\text{gruppo speciale unitario})$$

$$\mathbf{O}(n) = \{a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \mid {}^t a a = I_n\} \quad (\text{gruppo ortogonale})$$

$$\mathbf{SO}(n) = \mathbf{O}(n) \cap \mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) \quad (\text{gruppo speciale ortogonale})$$

$$\mathbf{Sp}(n) = \{a \in \mathbf{U}(2n) \mid {}^t a J a = J\} \quad (\text{gruppo simplettico compatto})$$

ove si è posto:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo lineare compatto e  $\mathfrak{g}$  la sua algebra di Lie, l'applicazione esponenziale  $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{G}$  ha come immagine la componente connessa  $\mathbf{G}_e$  dell'identità di  $\mathbf{G}$ .

In questo capitolo non daremo la dimostrazione generale di questo teorema, ma ne illustreremo la validità per ciascuno dei gruppi lineari compatti che considereremo.

#### 4.1. Proprietà topologiche di $\mathbf{U}(n)$

**Lemma 4.1.1.** *Ogni matrice di  $\mathbf{U}(n)$  è diagonalizzabile in una base ortonormale di  $\mathbb{C}^n$ . I suoi autovalori hanno tutti modulo uguale a 1.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $u \in \mathbf{U}(n)$ . Poiché il campo  $\mathbb{C}$  è algebricamente chiuso,  $u$  ha almeno un autovalore  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ , con autovettore  $\epsilon_1$  che possiamo prendere di norma unitaria:  $|\epsilon_1| = 1$ . Se  $v \in \epsilon_1^\perp$ , allora

$$(u(v)|\epsilon_1) = \lambda^{-1}(u(v)|u(\epsilon_1)) = \lambda^{-1}(v|\epsilon_1) = 0.$$

Quindi  $u(\epsilon_1^\perp) = \epsilon_1^\perp$  e la restrizione di  $u$  all'iperpiano  $\epsilon_1^\perp$  è ancora un'applicazione unitaria su uno spazio vettoriale complesso di dimensione  $n - 1$ . Per ricorrenza otteniamo che  $u$  è diagonalizzabile in una base ortonormale.

Infine, se  $\lambda$  è un autovalore di  $u \in \mathbf{U}(n)$  e  $v \neq 0$  un autovettore di  $u$  relativo all'autovalore  $\lambda$ , allora

$$|v|^2 = (v|v) = (u(v)|u(v)) = (\lambda v|\lambda v) = |\lambda|^2 |v|^2$$

implica che  $|\lambda| = 1$ . □

**Teorema 4.1.2.** *Il gruppo  $\mathbf{U}(n)$  è un sottogruppo chiuso, compatto e connesso per archi di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ . La sua algebra di Lie  $\mathfrak{u}(n)$  è*

$$(4.1.1) \quad \mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\}$$

*ed ha dimensione reale  $n^2$ . L'applicazione esponenziale*

$$(4.1.2) \quad \mathfrak{u}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{U}(n)$$

*è surgettiva.*

**DIMOSTRAZIONE.** L'applicazione  $\phi : \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \ni a \rightarrow a^*a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  è continua e quindi  $U(n) = \phi^{-1}(e)$  è un chiuso, contenuto nel compatto  $\{a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \mid \|a\| = 1\}$  e perciò compatto.

Abbiamo già osservato che  $[\exp(A)]^* = \exp(A^*)$  per ogni  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . Fissata  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , l'applicazione:

$$\alpha_A : \mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tA^*) \exp(tA) = [\exp(tA)]^* \exp(tA) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

è differenziabile e

$$\alpha'_A(t) = \exp(tA^*) (A^* + A) \exp(tA) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quindi: se  $A \in \mathfrak{u}(n)$ , allora  $\alpha_A(t) = I_n$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ; in particolare  $A^* + A = \alpha'_A(0) = 0$ . Viceversa, se  $A^* + A = 0$ , allora  $\alpha'_A(t) = 0$ ; quindi  $\alpha_A(t)$  è costante ed uguale ad  $I_n$  e perciò  $A$  appartiene all'algebra di Lie  $\mathfrak{u}(n)$  di  $\mathbf{U}(n)$ . Dimostriamo ora che l'applicazione  $\exp : \mathfrak{u}(n) \rightarrow \mathbf{U}(n)$  è surgettiva. Fissiamo  $u \in \mathbf{U}(n)$ . Per il Lemma 4.1.1, possiamo trovare una base ortonormale di  $\mathbb{C}^n$ , e quindi una matrice  $a \in \mathbf{U}(n)$ , tale che

$$a u a^{-1} = a u a^* = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\theta_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

Allora, posto

$$A = \begin{pmatrix} i\theta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i\theta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\theta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & i\theta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & i\theta_n \end{pmatrix}$$

abbiamo  $A \in \mathfrak{u}(n)$  e quindi  $u A u^* \in \mathfrak{u}(n)$  e

$$\exp(u A u^*) = u \exp(A) u^* = a.$$

Essendo immagine dello spazio vettoriale  $\mathfrak{u}(n)$  mediante l'applicazione continua  $\exp$ , il gruppo  $\mathbf{U}(n)$  è connesso per archi.  $\square$

## 4.2. Il gruppo speciale unitario

L'applicazione

$$\mathbf{U}(n) \ni u \rightarrow \det u \in \mathbf{S}^1 \subset \mathbb{C}$$

è un omomorfismo continuo del gruppo unitario nel gruppo moltiplicativo  $\mathbf{S}^1$  dei numeri complessi di modulo 1. Il suo nucleo

$$\mathbf{SU}(n) = \{u \in \mathbf{U}(n) \mid \det u = 1\}$$

è un sottogruppo chiuso normale di  $\mathbf{U}(n)$ , che si dice *gruppo unitario speciale* di ordine  $n$ .

**Teorema 4.2.1.** *L'algebra di Lie di  $\mathbf{SU}(n)$  è la sottoalgebra di Lie  $\mathfrak{su}(n)$  di  $\mathfrak{u}(n)$ , formata dalle matrici di  $\mathfrak{u}(n)$  che hanno traccia nulla:*

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \text{trac}(X) = 0\}.$$

L'applicazione

$$\mathfrak{su}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{SU}(n)$$

è surgettiva. Il gruppo  $\mathbf{SU}(n)$  ha dimensione reale  $n^2 - 1$ . Esso è compatto e connesso per archi.

**DIMOSTRAZIONE.** La prima affermazione segue dalla formula:  $\det(\exp(X)) = e^{\text{trac}(X)}$ . Infatti, se  $X \in \mathfrak{su}(n)$ , da  $\exp(tX) \in \mathbf{SU}(n)$  per ogni numero reale  $t$ , segue che:

$$\begin{cases} X + X^* = 0 \\ \text{trac}(tX) = t \cdot \text{trac}(X) = 2k\pi i \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{con } k = k(t) \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La seconda relazione implica che  $\text{trac}(X) = 0$ .

Sia ora  $u \in \mathbf{SU}(n)$ . Allora possiamo trovare  $a \in \mathbf{U}(n)$  tale che

$$a u a^{-1} = a u a^* = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\theta_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

La condizione  $\det u = 1$  dà allora

$$\exp(i(\theta_1 + \dots + \theta_n)) = 1$$

e quindi

$$e^{i\theta_n} = \exp(-i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1})).$$

Posto

$$U = \begin{pmatrix} i\theta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i\theta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\theta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & i\theta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1}) \end{pmatrix}$$

abbiamo  $U \in \mathfrak{su}(n)$  e quindi  $aUa^* = aUa^{-1} \in \mathfrak{su}(n)$  per l'invarianza della traccia rispetto al coniugio in  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  e

$$\exp(aUa^*) = a \exp(U)a^* = u.$$

L'applicazione  $\mathfrak{u}(n) \ni X \rightarrow \text{itrac}(X) \in \mathbb{R}$  è un funzionale lineare non identicamente nullo su  $\mathfrak{u}(n)$  e quindi  $\mathfrak{su}(n)$  ha dimensione  $n^2 - 1$ . Il gruppo  $\mathbf{SU}(n)$  è compatto perché è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{U}(n)$  e connesso per archi perché immagine continua, mediante l'applicazione esponenziale, della propria algebra di Lie  $\mathfrak{su}(n)$ .  $\square$

### 4.3. I gruppi $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$

Il gruppo  $\mathbf{O}(n)$  (*gruppo ortogonale di ordine  $n$* ) è il gruppo delle isometrie lineari e  $\mathbf{SO}(n)$  (*gruppo speciale ortogonale o gruppo delle rotazioni di ordine  $n$* ) quello delle isometrie lineari di determinante 1 dello spazio Euclideo  $\mathbb{R}^n$ .

Osserviamo che  $\mathbf{SO}(n)$  è un sottogruppo normale di indice 2 di  $\mathbf{O}(n)$ . Poiché  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ , anche  $\mathbf{O}(n)$  e  $\mathbf{SO}(n)$  sono sottogruppi chiusi di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ .

I gruppi  $\mathbf{O}(n)$  e  $\mathbf{SO}(n)$  sono compatti, in quanto valgono le:

$$\mathbf{O}(n) = \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \mathbf{SO}(n) = \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$$

e quindi  $\mathbf{O}(n)$  e  $\mathbf{SO}(n)$  sono sottogruppi chiusi del gruppo compatto  $\mathbf{U}(n)$ .

**Teorema 4.3.1.** *I due gruppi  $\mathbf{O}(n)$  e  $\mathbf{SO}(n)$  hanno la stessa algebra di Lie*

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + {}^tX = 0\}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $X$  un elemento dell'algebra di Lie  $\mathfrak{o}(n)$  di  $\mathbf{O}(n)$ . Poiché  $\exp(tX) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \cap \mathbf{U}(n)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , il determinante di  $\exp(tX)$  sarà reale e di modulo 1. Poiché il determinante di una matrice reale è positivo, avremo allora:

$$\det(\exp(tX)) = e^{t \cdot \text{trac}(X)} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e quindi

$$\exp(tX) \in \mathbf{SO}(n) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

dimostra che  $\mathbf{O}(n)$  e  $\mathbf{SO}(n)$  hanno la stessa algebra di Lie. Abbiamo poi

$$I_n = {}^t(\exp(tX)) \exp(tX) = \exp(t \cdot {}^tX) \exp(tX) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Poiché

$$\frac{d}{dt} \left[ {}^t(\exp(tX)) \exp(tX) \right] = \exp(t \cdot {}^tX) ({}^tX + X) \exp(tX) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

la condizione  ${}^tX + X = 0$  è necessaria e sufficiente affinché  $X \in \mathfrak{o}(n)$ .  $\square$

**Teorema 4.3.2.** *L'applicazione*

$$\mathfrak{o}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{SO}(n)$$

*è surgettiva.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per ogni rotazione  $a \in \mathbf{SO}(n)$ , possiamo trovare una decomposizione di  $\mathbb{R}^n$  in somma diretta di sottospazi  $a$ -invarianti e due a due ortogonali

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$$

tale che ogni sottospazio  $V_j$  abbia dimensione minore o uguale a 2 e la restrizione di  $a$  ai sottospazi  $V_j$  della decomposizione che hanno dimensione 1 sia l'identità.

Su ciascuno dei sottospazi  $V_j$  di dimensione 2 la  $a$  definisce una rotazione dello spazio Euclideo  $\mathbb{R}^2$ . Sarà quindi sufficiente dimostrare che

$$\mathfrak{o}(2) \ni X \rightarrow \mathbf{SO}(2)$$

è surgettiva. Un elemento di  $\mathfrak{o}(2)$  è una matrice della forma

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$A(\theta)^{2h} = \begin{pmatrix} (-1)^h \theta^{2h} & 0 \\ 0 & (-1)^h \theta^{2h} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A(\theta)^{2h+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^h \theta^{2h+1} \\ -(-1)^h \theta^{2h+1} & 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$\exp(A(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Ciò dimostra che  $\exp : \mathfrak{o}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(2)$  è surgettiva. La dimostrazione è completa.  $\square$

**Teorema 4.3.3.**  $\mathbf{SO}(n)$  è un gruppo compatto e connesso per archi di dimensione  $n(n-1)/2$ . Il gruppo  $\mathbf{O}(n)$  è unione di due componenti connesse, omeomorfe a  $\mathbf{SO}(n)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Abbiamo già osservato che i gruppi  $\mathbf{SO}(n)$  e  $\mathbf{O}(n)$  sono compatti, in quanto sottogruppi chiusi di  $\mathbf{U}(n)$ . Inoltre  $\mathbf{SO}(n)$  è connesso per archi perché immagine mediante l'esponenziale dello spazio vettoriale  $\mathfrak{o}(n)$ . Questo ha dimensione  $n(n-1)/2$ , in quanto le matrici di  $\mathfrak{o}(n)$  sono le matrici antisimmetriche e queste si parametrizzano con i coefficienti che sono al di sopra della diagonale principale.

In quanto immagine dell'algebra di Lie di  $\mathbf{O}(n)$  mediante l'applicazione esponenziale,  $\mathbf{SO}(n)$  è la componente connessa dell'identità in  $\mathbf{O}(n)$ . La moltiplicazione a sinistra per la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}(n)$$

è un omeomorfismo di  $\mathbf{SO}(n)$  su  $\mathbf{O}(n) \setminus \mathbf{SO}(n)$  e quindi  $\mathbf{O}(n)$  ha esattamente due componenti connesse, omeomorfe a  $\mathbf{SO}(n)$ .  $\square$

Osserviamo che  $\mathbf{SO}(1)$  è un punto, mentre l'applicazione

$$\mathbf{SO}(2) \ni a \rightarrow a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S^1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

definisce un omeomorfismo di  $\mathbf{SO}(2)$  su  $S^1$ .

#### 4.4. L'omomorfismo canonico $\mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$

Le algebre di Lie  $\mathfrak{o}(3)$  e  $\mathfrak{su}(2)$  sono algebre di Lie di dimensione reale 3. Abbiamo

$$\mathfrak{o}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & -z \\ -y & z & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Poniamo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$B_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad B_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora  $A_1, A_2, A_3$  formano una base di  $\mathfrak{o}(3)$  e  $B_1, B_2, B_3$  una base di  $\mathfrak{su}(2)$  e il prodotto di Lie delle due algebre è descritto nelle due basi dalle tabelle:

$$[A_j, A_h] = A_k, \quad [B_j, B_h] = B_k$$

$$\iff (j, h, k) \text{ è una permutazione positiva di } \{1, 2, 3\}.$$

Le due algebre sono quindi isomorfe e isomorfe all'algebra di Lie definita su  $\mathbb{R}^3$  dal prodotto vettore.

Indichiamo con

$$\mathbf{s} : \mathfrak{o}(3) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$$

l'isomorfismo di algebre di Lie che fa corrispondere ad  $A_j \in \mathfrak{o}(3)$  l'elemento  $B_j \in \mathfrak{su}(2)$ .

Per descrivere una rappresentazione di  $\mathbf{SU}(2)$  nel gruppo delle rotazioni di  $\mathbb{R}^3$ , introduciamo l'isomorfismo  $\mathbb{R}$ -lineare:

$$\lambda : \mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2).$$

Abbiamo

$$\mathbf{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid (\alpha, \beta) \in S^3 \right\} \simeq S^3 \subset \mathbb{C}^2.$$

Facciamo operare  $\mathbf{SU}(2)$  su  $\mathfrak{su}(2)$  mediante la rappresentazione aggiunta:

$$\mathbf{SU}(2) \times \mathfrak{su}(2) \ni (u, X) \rightarrow \text{Ad}(u)X = uXu^{-1} \in \mathfrak{su}(2).$$

L'isomorfismo  $\lambda$  ci permette di definire una rappresentazione lineare

$$\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{GL}(3, \mathbb{R})$$

mediante

$$\rho(u)v = \lambda^{-1}(\text{ad}(u)\lambda(v)) \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

**Lemma 4.4.1.** Per ogni  $u \in \mathbf{SU}(2)$ , è  $\rho(u) \in \mathbf{SO}(3)$ .

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che

$$|v|^2 = \det \lambda(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

Abbiamo perciò

$$|\rho(u)v|^2 = \det(u\lambda(v)u^{-1}) = \det \lambda(v) = |v|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

□

**Teorema 4.4.2.** L'applicazione

$$\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$$

è un omomorfismo di gruppi surgettivo. Il suo nucleo è il sottogruppo normale

$$\{\pm I_2\} \subset \mathbf{SU}(2).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano  $a, b \in \mathbf{SU}(2)$ . Allora

$$\begin{aligned} \rho(a) \circ \rho(b)v &= \rho(a)(\lambda^{-1} \text{Ad}(b)\lambda(v)) \\ &= \lambda^{-1} \circ \text{Ad}(a) \circ \lambda \circ \lambda^{-1} \text{Ad}(b)\lambda(v) \\ &= \lambda^{-1} \circ \text{Ad}(a) \circ \text{Ad}(b)\lambda(v) \\ &= \lambda^{-1} \circ \text{Ad}(ab)\lambda(v) \\ &= \rho(ab)v \quad \forall v \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Ciò dimostra che  $\rho$  è un omomorfismo. Calcoliamone il nucleo. Esso è formato dalle trasformazioni  $u \in \mathbf{SU}(2)$  tali che

$$\text{Ad}(u)X = X \quad \forall X \in \mathfrak{su}(2),$$

cioè

$$[u, X] = uX - Xu = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{su}(2).$$

Scrivendo queste identità con  $X = B_j$ , ( $j = 1, 2, 3$ ), si ottiene, per  $u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ :

$$\beta = 0, \quad \alpha = \pm 1.$$

Per completare la dimostrazione, basta osservare che la trasformazione  $\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$  può essere definita dal diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{su}(2) & \xrightarrow{\text{exp}} & \mathbf{SU}(2) \\ s \uparrow & & \downarrow \rho \\ \mathfrak{o}(3) & \xrightarrow{\text{exp}} & \mathbf{SO}(3). \end{array}$$

Da questo diagramma otteniamo immediatamente che  $\rho$  è surgettiva in quanto

$$\rho \circ \text{exp}|_{\mathfrak{su}(2)} \circ \mathbf{s}^{-1} = \text{exp}|_{\mathfrak{o}(3)}$$

è surgettiva.

□

**Teorema 4.4.3.** *Il gruppo topologico  $\mathbf{SO}(3)$  è omeomorfo allo spazio proiettivo  $\mathbb{RP}^3$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Il quoziente iniettivo della rappresentazione  $\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$  dà un omeomorfismo

$$\mathbf{SU}(2)/\{\pm I_2\} \rightarrow \mathbf{SO}(3).$$

Il quoziente  $\mathbf{SU}(2)/\{\pm I_2\}$  è omeomorfo al quoziente di  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$  rispetto alla mappa antipodale

$$S^3 \ni \xi \rightarrow -\xi \in S^3$$

e quindi allo spazio proiettivo  $\mathbb{RP}^3$ .  $\square$

**Osservazione 4.4.4.** L'omomorfismo canonico  $\mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$  ha un importante significato fisico: il fattore  $1/2$  che compare nell'isomorfismo  $\mathfrak{so}(3)$  tra l'algebra di Lie delle matrici  $3 \times 3$  antisimmetriche e l'algebra di Lie  $\mathfrak{su}(2)$  delle matrici antihermitiane  $2 \times 2$  a traccia nulla si può interpretare come uno *spin*.

**4.4.1. Angoli di Eulero.** Per ricavare la surgettività dell'applicazione  $\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$  possiamo utilizzare la rappresentazione di  $\mathbf{SO}(3)$  mediante gli *angoli di Eulero*. Consideriamo gli omomorfismi

$$\tau, \sigma : S^1 \rightarrow \mathbf{SO}(3)$$

definiti da

$$\tau(e^{i\phi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \sigma(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(rotazioni intorno all'asse  $x$  e rotazioni intorno all'asse  $y$ ).

**Lemma 4.4.5.** *L'applicazione*

$$\alpha : S^1 \times S^1 \times S^1 \ni (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) \rightarrow \tau(e^{i\theta_1}) \circ \sigma(e^{i\theta_2}) \circ \tau(e^{i\theta_3}) \in \mathbf{SO}(3)$$

è surgettiva.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $e_1, e_2, e_3$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ . Un'applicazione  $a \in \mathbf{SO}(3)$  è completamente determinata dall'immagine dei vettori  $e_1, e_2$ . Poniamo  $\epsilon_j = a(e_j)$  per  $j = 1, 2$ . Poiché  $|\epsilon_1| = 1$ , abbiamo per opportuni  $\phi, \psi \in \mathbb{R}$ :

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \phi \sin \psi \\ \cos \phi \sin \psi \end{pmatrix}$$

(coordinate polari in  $\mathbb{R}^3$ ). Una base ortogonale di  $\epsilon_1^\perp$  è data dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \sin \phi \cos \psi \\ \cos \phi \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Quindi  $\epsilon_2 = v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta$  per un opportuno  $\theta \in \mathbb{R}$ . Chiaramente

$$a = \alpha(e^{-i\phi}, e^{i\psi}, e^{i\theta}).$$

□

**Osservazione 4.4.6.** In generale gli angoli di Eulero si riferiscono a una scelta di  $\phi, \psi, \theta$  con  $0 \leq \psi < \pi$  e  $0 \leq \phi, \theta < 2\pi$ .

Definiamo ora

$$\hat{\tau}, \hat{\sigma} : S^1 \rightarrow \mathbf{SU}(2)$$

mediante

$$\hat{\tau}(e^{i\phi}) = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Sia

$$\hat{\alpha} : S^1 \times S^1 \times S^1 \ni (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) \rightarrow \hat{\tau}(e^{i\theta_1}) \circ \hat{\sigma}(e^{i\theta_2}) \circ \hat{\tau}(e^{i\theta_3}) \in \mathbf{SU}(2).$$

Otteniamo allora il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 \times S^1 & \xrightarrow{=} & S^1 \times S^1 \times S^1 \\ \hat{\alpha} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \mathbf{SU}(2) & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{SO}(3). \end{array}$$

#### 4.5. Il gruppo unitario simplettico $\mathbf{Sp}(n)$

Abbiamo definito il gruppo  $\mathbf{Sp}(n)$  come il gruppo di tutte le matrici complesse unitarie  $a$  di ordine  $2n$  che soddisfano  ${}^t a J a = J$ , ove  $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$ .

Il gruppo  $\mathbf{Sp}(n)$  si può identificare al gruppo delle matrici  $n \times n$  a coefficienti quaternioni che preservano il prodotto scalare canonico di  $\mathbb{H}^n$ . Ricordiamo che il corpo (non commutativo)  $\mathbb{H}$  dei quaternioni di Hamilton si può identificare all'anello associativo delle matrici  $2 \times 2$  a coefficienti complessi della forma  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$  con  $z, w \in \mathbb{C}$ . Un numero complesso  $z$  si rappresenta con la matrice  $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$ . Indichiamo con  $j$  la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Possiamo allora scrivere il quaternion  $\mathbf{q}$  mediante:

$$\mathbf{q} = z + wj = z + j\bar{w}.$$

Il prodotto di due quaternioni si può esprimere mediante:

$$(z_1 + w_1 j) \cdot (z_2 + w_2 j) = (z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2) + (z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2) j \quad \forall z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}.$$

Questa formula si ricava immediatamente da:

$$jz = \bar{z}j \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad j^2 = -1.$$

Il coniugato di un quaternion (corrispondente all'aggiunta della matrice con cui è definito) è dato da:

$$\overline{z + wj} = \bar{z} - wj.$$

Indichiamo con  $\sigma$  l'isomorfismo:

$$\sigma : \mathbb{C}^{2n} \ni (z^h, w^h)_{1 \leq h \leq n} \longrightarrow (z^h + j w^h)_{1 \leq h \leq n} \in \mathbb{H}^n$$

e con

$$\varsigma : \mathbb{C}^{2n} \ni (z^h, w^h) \rightarrow (\bar{z}^h, \bar{w}^h) \in \mathbb{C}^{2n}$$

il coniugio. Allora, indicando con  $(\cdot j)$  la moltiplicazione a destra di un vettore di  $\mathbb{H}^n$  per il quaternione  $j$ , abbiamo:

$$\sigma^{-1} \circ (\cdot j) \circ \sigma = -J \circ \varsigma = \begin{pmatrix} & -I_n \\ I_n & \end{pmatrix} \circ \varsigma.$$

Consideriamo una matrice  $B = C + jD = (C_{hk} + jD_{hk})_{1 \leq h, k \leq n}$  con coefficienti  $C_{hk} + jD_{hk} \in \mathbb{H}$ ,  $C_{hk}, D_{hk} \in \mathbb{C}$ . Se  $u = v + jw \in \mathbb{H}^n$ , con  $v, w \in \mathbb{C}^n$ , abbiamo

$$Bu = (Cv - \bar{D}w) + j(Dv + \bar{C}w).$$

Ad essa risulta dunque associata una  $\tilde{B} \in \mathfrak{M}(2n, 2n; \mathbb{C})$  rappresentata dalla matrice:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} C & D \\ -\bar{D} & \bar{C} \end{pmatrix}.$$

Le matrici di questa forma sono tutte e sole le matrici  $2n \times 2n$  complesse  $A$  che soddisfano la:

$$(*) \quad AJ = J\bar{A}.$$

Esse formano una sottoalgebra di Lie reale di  $\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C})$ , che si indica con  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$ . Gli elementi invertibili di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$  formano il *gruppo lineare di ordine  $n$  sui quaternioni*, che indichiamo con  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{H})$ . Consideriamo ora un elemento  $g \in \mathbf{Sp}(n)$ .

Esso è rappresentato da una matrice complessa unitaria  $(2n) \times (2n)$ , che verifica  ${}^t g J g = J$ . Poiché  ${}^t g = \bar{g}^{-1}$ , sostituendo otteniamo (\*).

Abbiamo perciò un'inclusione naturale:  $\mathbf{Sp}(n) \hookrightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{H})$ .

Possiamo quindi caratterizzare  $\mathbf{Sp}(n)$  come il gruppo delle trasformazioni  $\mathbb{H}$ -lineari su  $\mathbb{H}^n$ , che lasciano invariato il prodotto scalare sui quaternioni:

$$(**) \quad (u_1 | u_2)_{\mathbb{H}} = \sum_{h=1}^n u_1^h \bar{u}_2^h.$$

Se scriviamo le componenti  $u_l^h$  nella forma  $v_l^h + jw_l^h$  con  $v_l^h, w_l^h \in \mathbb{C}$  per  $l = 1, 2$ , troviamo per il prodotto scalare sui quaternioni l'espressione:

$$\begin{aligned} (u_1 | u_2)_{\mathbb{H}} &= \sum_{h=1}^n v_1^h \bar{v}_2^h + \bar{w}_1^h w_2^h + j \sum_{h=1}^n w_1^h \bar{v}_2^h - \bar{v}_1^h w_2^h \\ &= \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ w_1 \end{pmatrix}^* I_{2n} \begin{pmatrix} \bar{v}_2 \\ w_2 \end{pmatrix} + \left[ {}^t \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ w_1 \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \bar{v}_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \right] j, \end{aligned}$$

da cui segue che  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$  consiste esattamente delle matrici di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{H})$  che preservano il prodotto (\*\*).

**Teorema 4.5.1.** *Per ogni intero  $n \geq 1$  il gruppo  $\mathbf{Sp}(n)$  è compatto e connesso per archi. La sua algebra di Lie è*

$$\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}) \mid {}^t X J + J X = 0, X^* + X = 0\}.$$

L'esponenziale definisce un'applicazione surgettiva

$$\exp : \mathfrak{sp}(n) \rightarrow \mathbf{Sp}(n).$$

DIMOSTRAZIONE.  $\mathbf{Sp}(n)$  è compatto perché è un sottospazio chiuso di  $\mathbf{U}(2n)$ , che è compatto.

La caratterizzazione della sua algebra di Lie  $\mathfrak{sp}(n)$  si ottiene con argomenti simili a quelli utilizzati in precedenza: si osserva che  $\mathfrak{sp}(n) \subset \mathfrak{u}(2n)$  e che, posto  $\gamma(t) = \exp(t^t X) J \exp(tX)$ , risulta:

$$\gamma'(t) = \exp(t^t X) (J^t X + X J) \exp(tX).$$

Da questa si ottiene facilmente che la condizione  $J^t X + X J = 0$  è necessaria e sufficiente affinché una  $X \in \mathfrak{u}(2n)$  appartenga a  $\mathfrak{sp}(n)$ . Moltiplicando a sinistra per  $J$  e calcolando la traccia troviamo che  $\text{trac } X = 0$  (e quindi  $X \in \mathfrak{su}(2n)$ ) e moltiplicando a destra e a sinistra per  $J$  troviamo la condizione equivalente  ${}^t X J + J X = 0$ .

Osserviamo infine che per ogni  $g \in \mathbf{Sp}(n)$  possiamo trovare  $a \in \mathbf{Sp}(n)$  tale che

$$(*) \quad a g a^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{i\theta_n} & & & \\ & & & e^{-i\theta_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{-i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

Sia infatti  $\lambda_1$  un autovalore di  $g$  e sia  $v_1$  un suo autovettore con  $|v_1| = 1$ . Abbiamo allora:

$$a(J\bar{v}_1) = J\bar{a}v_1 = J(\bar{\lambda}_1 v_1) = \bar{\lambda}_1(J\bar{v}_1).$$

Ragionando per ricorrenza, troviamo una base ortonormale di  $\mathbb{C}^{2n}$  della forma:

$$v_1, \dots, v_n, J(v_1), \dots, J(v_n).$$

I suoi vettori formano le colonne della matrice  $a \in \mathbf{Sp}(n)$  per cui  $a^{-1}ga$  ha la forma diagonale (\*).

La matrice

$$X = a^{-1} \begin{pmatrix} i\theta_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & i\theta_n & & & \\ & & & -i\theta_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -i\theta_n \end{pmatrix} a$$

appartiene a  $\mathfrak{sp}(n)$  ed  $\exp(X) = g$ .

Ciò dimostra la surgettività dell'esponenziale e quindi il fatto che  $\mathbf{Sp}(n)$  è connesso per archi.  $\square$

#### 4.6. Sfere e gruppi compatti

Sia  $\mathbb{k}$  uno dei corpi  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  e indichiamo con  $e_1, e_2, \dots, e_n$  la base canonica di  $\mathbb{k}^n$ . Possiamo allora identificare  $\mathbf{O}(n-1)$  (risp.  $\mathbf{SO}(n-1)$ ,  $\mathbf{U}(n-1)$ ,  $\mathbf{SU}(n-1)$ ,  $\mathbf{Sp}(n-1)$ ) al sottogruppo di  $\mathbf{O}(n)$  (risp.  $\mathbf{SO}(n)$ ,  $\mathbf{U}(n)$ ,  $\mathbf{SU}(n)$ ,  $\mathbf{Sp}(n)$ ) delle trasformazioni che lasciano fisso il vettore  $e_n$ . Abbiamo allora i seguenti omeomorfismi:

**Teorema 4.6.1.**

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}(1) &\simeq \mathbf{SO}(2) \simeq S^1 \\
\mathbf{SU}(2) &\simeq \mathbf{Sp}(1) \simeq S^3 \\
\mathbf{O}(n)/\mathbf{O}(n-1) &\simeq \mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-1) \simeq S^{n-1} \quad (n > 1) \\
\mathbf{U}(n)/\mathbf{U}(n-1) &\simeq \mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-1) \simeq S^{2n-1} \quad (n > 1) \\
\mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-1) &\simeq S^{4n-1} \quad (n > 1)
\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Dim In ciascuno dei casi l'omeomorfismo cercato è il quoziente iniettivo dell'applicazione  $g \rightarrow g(e_n)$ .  $\square$

**Teorema 4.6.2.** Per ogni  $n \geq 2$  il gruppo  $\mathbf{U}(n)$  è omeomorfo al prodotto topologico  $\mathbf{SU}(n) \times S^1$ .

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con  $D_n(\lambda)$  la matrice  $n \times n$ :

$$D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiamo allora l'omeomorfismo cercato mediante:

$$\mathbf{SU}(n) \times S^1 \ni (g, \lambda) \rightarrow D_n(\lambda) g \in \mathbf{U}(n);$$

il suo inverso è dato da:

$$\mathbf{U}(n) \ni g \rightarrow (D_n(1/\det g) g, \det g) \in \mathbf{SU}(n) \times S^1.$$

$\square$

Abbiamo le successioni esatte di omotopia dei fibrati:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \cdots & \rightarrow & \pi_2(S^n) & \longrightarrow & & \\
& \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^n) \longrightarrow \mathbf{1} \\
& & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_2(S^{2n+1}) \longrightarrow \\
& \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SU}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SU}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^{2n+1}) \longrightarrow \mathbf{1} \\
& & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_2(S^{3n+1}) \longrightarrow \\
& \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{Sp}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{Sp}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^{3n+1}) \longrightarrow \mathbf{1}
\end{array}$$

da cui si deduce:

**Teorema 4.6.3.** I gruppi  $\mathbf{SU}(n)$  e  $\mathbf{Sp}(n)$  sono semplicemente connessi per ogni  $n \geq 1$ . Per ogni  $n \geq 2$  il gruppo  $\mathbf{SO}(n)$  non è semplicemente connesso e  $\pi_1(\mathbf{SO}(2)) \simeq \mathbb{Z}$ ,  $\pi_1(\mathbf{SO}(n)) \simeq \mathbb{Z}_2$  per ogni  $n \geq 3$ .

### 4.7. Rivestimenti e gruppo degli spinori

**Teorema 4.7.1.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico connesso e localmente connesso per archi. Il gruppo fondamentale  $\pi_1(\mathbf{G})$  è commutativo.*

*Sia  $\hat{\mathbf{G}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}$  un rivestimento connesso di  $\mathbf{G}$ . Fissato un punto  $\hat{e} \in \pi^{-1}(e)$ , vi è un'unica struttura di gruppo topologico su  $\hat{\mathbf{G}}$  per cui  $\hat{e}$  sia l'identità di  $\hat{\mathbf{G}}$  e  $\pi$  sia un omomorfismo di gruppi topologici.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbf{G}$  sono cammini continui con  $\alpha(0) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(1) = e$ , consideriamo l'applicazione continua:

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \ni (t, s) \rightarrow \alpha(t) \cdot \beta(s) \in \mathbf{G}.$$

Allora

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \begin{cases} F(2t, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(1, 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e

$$(\beta \cdot \alpha)(t) = \begin{cases} F(0, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(2t - 1, 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e possiamo definire un'omotetia tra  $\alpha \cdot \beta$  e  $\beta \cdot \alpha$  mediante:

$$G(s, t) = \begin{cases} F((1-s)2t, 2st) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F((1-s) + s(2t-1), s + (1-s)(2t-1)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ciò dimostra che  $\pi_1(\mathbf{G})$  è un gruppo abeliano. Sia ora  $\pi : \hat{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$  un rivestimento connesso di  $\mathbf{G}$ . Osserviamo che  $\hat{\mathbf{G}}$  è connesso per archi.

Per ogni  $\hat{g} \in \hat{\mathbf{G}}$  indichiamo con  $\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{g})$  il gruppo fondamentale di  $\hat{\mathbf{G}}$  con punto base  $\hat{g}$ . Dimostriamo innanzitutto il seguente:

**Lemma 4.7.2.** *Sia  $g \in \mathbf{G}$  e sia  $\hat{g} \in \pi^{-1}(g)$ . Allora per ogni  $\xi \in \pi_*(\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{e}))$  risulta  $L_{g*}(\xi) \in \pi_*(\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{g}))$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\hat{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$  un laccetto con  $\hat{\alpha}(0) = \hat{\alpha}(1) = \hat{e}$  e poniamo  $\alpha = \pi \circ \hat{\alpha}$ . Dobbiamo dimostrare che il laccetto  $L_g \circ \alpha : [0, 1] \ni t \rightarrow L_g(\alpha(t)) \in \mathbf{G}$ , si rialza a un laccetto di punto iniziale  $\hat{g}$ .

Sia  $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$  un cammino continuo con estremi  $\hat{e}$  e  $\hat{g}$  e sia  $\gamma = \pi \circ \hat{\gamma}$ . Consideriamo l'applicazione continua:

$$[0, 1] \times [0, 1] \ni (t, s) \rightarrow G(t, s) = \gamma(s) \cdot \alpha(t) \in \mathbf{G}.$$

Essa si rialza ad un'applicazione continua  $\hat{G}(t, s)$  e  $t \rightarrow \hat{G}(t, 1)$  rialza  $L_g \circ \alpha$ . Per dimostrare che questo è un laccetto, consideriamo l'insieme  $A$  degli  $s \in [0, 1]$  tali che  $\hat{G}(0, s) = \hat{G}(1, s)$ . Esso contiene 0, è chiuso perché  $\hat{\mathbf{G}}$  è uno spazio di Hausdorff, ed è aperto perché  $\pi \circ \hat{G}(0, s) = \gamma(s) = \pi \circ \hat{G}(1, s)$  e  $\hat{\mathbf{G}} \ni \pi \gg \mathbf{G}$  è un rivestimento. Coincide quindi con  $[0, 1]$ : in particolare  $\hat{G}(0, 1) = \hat{G}(1, 1)$  e  $t \rightarrow \hat{G}(t, 1)$  è un laccetto.  $\square$

## CONCLUSIONE DELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 7.1

Siano  $\hat{g}_1$  e  $\hat{g}_2$  due elementi di  $\hat{\mathbf{G}}$  e siano  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$  cammini continui con  $\hat{\alpha}_i(0) = \hat{\beta}_i(0) = \hat{e}$ ,  $\hat{\alpha}_i(1) = \hat{\beta}_i(1) = \hat{g}_i$ , per  $i = 1, 2$ . Poniamo  $\alpha_i = \pi \circ \hat{\alpha}_i$ ,  $\beta_i = \pi \circ \hat{\beta}_i$  ( $i = 1, 2$ ). Consideriamo i cammini continui  $\alpha : [0, 1] \ni t \rightarrow \alpha_1(t)\alpha_2(t) \in \mathbf{G}$  e  $\beta : [0, 1] \ni t \rightarrow \beta_1(t)\beta_2(t) \in \mathbf{G}$  e siano  $\hat{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$  e  $\hat{\beta} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$  i loro rialzamenti con punto iniziale  $\hat{e}$ . Dimostriamo che  $\hat{\alpha}(1) = \hat{\beta}(1)$ . A questo scopo osserviamo che

$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha_1(t + st) \cdot \alpha_2(t - st) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_1(s + t - st) \cdot \alpha_2(t + st - s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è un'omotetia tra  $\alpha$  e

$$\alpha' = \alpha_1 \cdot (L_{g_1} \circ \alpha_2) = \begin{cases} \alpha_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1 \cdot \alpha_2(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Se indichiamo con  $\hat{\alpha}'$  il rilevamento di  $\alpha'$  con punto iniziale  $\hat{e}$ , avremo quindi  $\hat{\alpha}'(1) = \hat{\alpha}(1)$ . Analogamente, posto

$$\beta' = \beta_1 \cdot (L_{g_1} \circ \beta_2) = \begin{cases} \beta_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1 \cdot \beta_2(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

i rilevamenti  $\hat{\beta}$  e  $\hat{\beta}'$  di  $\beta$  e  $\beta'$  con punto iniziale  $\hat{e}$  hanno lo stesso punto finale in  $\hat{\mathbf{G}}$ .

Osserviamo ora che i punti finali di  $\hat{\alpha}$  e di  $\hat{\beta}$  sono i punti finali dei rialzamenti dei cammini  $L_{g_1} \circ \alpha_2$  e  $L_{g_1} \circ \beta_2$  con punto iniziale  $\hat{g}_1$ . Questi coincidono perché  $(L_{g_1} \circ \alpha_2) \cdot (L_{g_1} \circ \beta_2)^{-1} = L_{g_1} \circ (\alpha_2 \cdot \beta_2^{-1})$  è l'immagine mediante la traslazione a sinistra per  $g_1$  del laccetto  $\alpha_2 \cdot \beta_2^{-1}$ , che per ipotesi è immagine mediante  $\pi$  di un laccetto in  $\hat{\mathbf{G}}$  di punto iniziale  $\hat{e}$ . Per il Lemma 4.7.2, esso è allora l'immagine di un laccetto di punto iniziale  $\hat{g}_1$  in  $\hat{\mathbf{G}}$ .

Possiamo quindi definire:

$$\hat{g}_1 \hat{g}_2 = \hat{\alpha}(1)$$

in quanto la definizione non dipende dalla scelta dei cammini  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  che congiungono  $\hat{e}$  ai punti  $\hat{g}_1, \hat{g}_2$  rispettivamente.

Si verifica poi senza difficoltà che con questa definizione di prodotto  $\hat{\mathbf{G}}$  è un gruppo topologico con unità  $\hat{e}$  e che  $\pi : \hat{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$  è un omomorfismo di gruppi.  $\square$

Il rivestimento universale di  $\mathbf{SO}(n)$ , per  $n \geq 3$ , è un gruppo topologico che si indica con  $\mathbf{Spin}(n)$  e si dice il *gruppo degli spinori di ordine  $n$* . Il rivestimento  $\mathbf{Spin}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SO}(n)$  è a due fogli ed è un omomorfismo di gruppi. Osserviamo che  $\mathbf{Spin}(3) \simeq \mathbf{SU}(2)$ .

## La lista di Cartan dei gruppi classici

Un *gruppo di Lie* è un gruppo topologico separato localmente isomorfo<sup>1</sup> ad un sottogruppo di Lie del gruppo lineare reale.

La sua *algebra di Lie*  $\mathfrak{g}$  si identifica all'algebra di Lie del corrispondente sottogruppo di Lie del gruppo lineare.

Ogni gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  con un numero finito di componenti connesse è diffeomorfo ad una varietà prodotto  $\mathbf{K} \times \mathbb{R}^k$ , ove  $\mathbf{K}$  è un sottogruppo di Lie compatto massimale di  $\mathbf{G}$ . In questo capitolo introduciamo i gruppi lineari classici della lista di Cartan e per ciascuno di essi descriviamo questa decomposizione.

Per una presentazione opportuna di  $\mathbf{G}$  come gruppo lineare, cioè come sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ , il sottogruppo compatto massimale  $\mathbf{K}$  sarà l'intersezione  $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$  di  $\mathbf{G}$  con il gruppo delle matrici unitarie.

### 5.1. Decomposizione di Cartan dei gruppi classici

**Definizione 5.1.1.** Un sottogruppo  $\mathbf{G}$  del gruppo lineare  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  si dice *pseudoalgebrico* se può essere definito mediante un sistema di equazioni:

$$(*) \quad f_1(g, g^*) = 0, \dots, f_N(g, g^*) = 0$$

dove  $f_1, \dots, f_N$  sono polinomi a coefficienti reali delle parti reali e immaginarie dei coefficienti di  $g \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ .

I sottogruppi pseudoalgebrici sono ovviamente chiusi.

I gruppi classici della lista di Cartan che introdurremo nel paragrafo seguente sono tutti pseudoalgebrici.

Il seguente teorema ci mostra che possiamo rappresentarli come prodotto del topologico del sottogruppo compatto  $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$  e di uno spazio euclideo.

**Teorema 5.1.2.** Sia  $\mathbf{G}$  un sottogruppo pseudoalgebrico connesso, di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ , con algebra di Lie  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . Se

$$(5.1.1) \quad g^* \in \mathbf{G}, \quad \forall g \in \mathbf{G},$$

allora l'applicazione

$$(5.1.2) \quad (\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)) \ni (u, B) \longrightarrow u \exp(B) \in \mathbf{G},$$

ove  $\mathfrak{p}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X^* = -X\}$  è lo spazio vettoriale delle matrici Hermitiane, è un omeomorfismo.

<sup>1</sup> $\mathbf{G}$  è un gruppo di Lie se esiste un sottogruppo di Lie  $\mathbf{G}'$  di un gruppo lineare  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  e un omeomorfismo  $\phi : U \rightarrow U'$  di un intorno dell'identità di  $\mathbf{G}$  su un intorno dell'identità  $U'$  di  $\mathbf{G}'$  tale che, se  $g_1, g_2, g_1 g_2 \in U$ , allora  $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1) \phi(g_2)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per il Teorema 2.4.1 del Capitolo II, ogni elemento  $g \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  si scrive in modo unico come

$$g = u \circ p \quad \text{con} \quad u \in \mathbf{U}(n), \quad p \in \mathfrak{p}(n).$$

Sia  $g \in \mathbf{G}$ . Poiché per ipotesi anche

$$g^* = p \circ u^* = p \circ u^{-1} \in \mathbf{G},$$

il gruppo  $\mathbf{G}$  contiene l'elemento  $g^*g = p^2$ .

Per il Teorema 2.3.2 del Capitolo II, vi è un unico elemento  $B \in \mathfrak{p}(n)$  tale che  $p = \exp(B)$ .

Sia  $a \in \mathbf{U}(n)$  tale che  $a \circ B \circ a^*$  sia in forma diagonale:

$$a \circ B \circ a^* = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \theta_n \end{pmatrix},$$

con  $\theta_j \in \mathbb{R}$  per  $j = 1, \dots, n$ . Il gruppo  $\text{ad}(a)(\mathbf{G})$  è ancora un sottogruppo pseudoalgebrico di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  e quindi le matrici diagonali reali di  $\text{ad}(a)(\mathbf{G})$  formano un sottogruppo pseudoalgebrico  $\mathbf{Q}$  di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ . Possiamo perciò trovare un insieme finito di polinomi  $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  tali che la matrice diagonale reale

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$$

appartenga a  $\mathbf{Q}$  se e soltanto se

$$f_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = 0 \quad \text{per} \quad j = 1, \dots, N.$$

Abbiamo allora

$$(5.1.3) \quad f_j(e^{2k\theta_1}, e^{2k\theta_2}, \dots, e^{2k\theta_n}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Per concludere la dimostrazione, utilizziamo il seguente

**Lemma 5.1.3.** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione esponenziale-polinomiale della forma:*

$$(5.1.4) \quad f(t) = \sum_{j=1}^N c_j e^{b_j t} \quad t \in \mathbb{R}$$

con  $c_j, b_j \in \mathbb{R}$  e  $b_i \neq b_j$  se  $i \neq j$ . Se  $f$  si annulla per ogni  $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , allora  $f$  si annulla per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Poniamo  $\exp(b_j) = \xi_j$ . Se  $f(t) = 0$  per i valori interi  $t = 0, 1, \dots, N-1$ , otteniamo in particolare che

$$(5.1.5) \quad (c_1, \dots, c_N)V(\xi_1, \dots, \xi_{N-1}) = 0,$$

ove  $V(\xi_1, \dots, \xi_N)$  è la matrice di Vandermonde

$$V(\xi_1, \dots, \xi_N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_N \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{N-1} & \xi_2^{N-1} & \dots & \xi_N^{N-1} \end{pmatrix}.$$

Il determinante<sup>2</sup> della matrice di Vandermonde è

$$\det V(\xi_1, \dots, \xi_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\xi_j - \xi_i),$$

e quindi diverso da zero perché gli  $\xi_1, \dots, \xi_N$  sono tra loro distinti. La (5.1.5) implica dunque che  $c_1 = \dots = c_N = 0$ .  $\square$

Concludiamo ora la dimostrazione del Teorema 5.1.2. Per il Lemma 5.1.3 appena dimostrato, dalla (5.1.3) otteniamo che

$$f_j(e^{t\theta_1}, \dots, e^{t\theta_n}) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, N.$$

Quindi  $\exp(2t(aBa^*)) \in \mathbf{Q}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e ciò mostra che

$$B \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n).$$

Allora  $p \in \mathbf{G}$  e perciò  $u = g \circ p^{-1} \in \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ . L'applicazione

$$(\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)) \ni (u, B) \rightarrow u \exp(B) \in \mathbf{G}$$

è quindi continua e surgettiva. La sua inversa

$$\mathbf{G} \ni g \rightarrow (g \circ (g^*g)^{-1/2}, (g^*g)^{1/2}) \in (\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n))$$

è continua, onde è un omeomorfismo.  $\square$

Nello studiare i gruppi classici  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  della lista di Cartan seguiremo quindi il procedimento seguente:

- (1) verificheremo che esso contenga l'aggiunto di ogni suo elemento;

<sup>2</sup>Per dimostrare questa formula, ragioniamo per ricorrenza su  $N$ . La formula del determinante di Vandermonde è facilmente verificata nel caso  $N = 2$ . Supponiamo quindi  $N > 2$  e la formula vera per determinanti di Vandermonde di ordine  $N - 1$ . Sottraendo alla  $j + 1$ -esima riga  $\xi_1$  volte la  $j$ -esima, per  $j = 1, \dots, N - 1$ , otteniamo:

$$\det V(\xi_1, \dots, \xi_N) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \xi_2 - \xi_1 & \dots & \xi_N - \xi_1 \\ 0 & \xi_2(\xi_2 - \xi_1) & \dots & \xi_N(\xi_N - \xi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \xi_2^{N-2}(\xi_2 - \xi_1) & \dots & \xi_N^{N-2}(\xi_N - \xi_1) \end{pmatrix}.$$

Raccogliendo il fattore  $(\xi_j - \xi_1)$  nella  $j$ -esima colonna, per  $j = 2, \dots, N$ , si ottiene

$$\det V(\xi_1, \dots, \xi_N) = (\xi_2 - \xi_1) \cdot \dots \cdot (\xi_N - \xi_1) \cdot \det V(\xi_2, \dots, \xi_N)$$

da cui la formula desiderata segue per l'ipotesi di ricorrenza.

- (2) calcoleremo l'insieme  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)$  delle matrici Hermitiane contenute nella sua algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ ;  
 (3) studieremo il sottogruppo compatto  $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ .

Osserviamo ancora che l'algebra di Lie di  $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$  è  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n)$  e che l'applicazione esponenziale

$$\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$$

ha come immagine la componente connessa dell'identità in  $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ . Abbiamo infatti

**Teorema 5.1.4** (Cartan-Weyl-Hopf). *Sia  $\mathbf{G}$  un sottogruppo compatto e connesso di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ , con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Allora*

$$\mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \exp(X) \in \mathbf{G}$$

è surgettiva.

Non diamo qui la dimostrazione di questo teorema <sup>3</sup>, la cui validità è stata verificata per ciascuno dei gruppi classici compatti e connessi:  $\mathbf{SO}(n)$ ,  $\mathbf{U}(n)$ ,  $\mathbf{SU}(n)$  e  $\mathbf{Sp}(n)$ .

Osserviamo infine che  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)$  è invariante per l'azione aggiunta degli elementi di  $\mathbf{H} \cap \mathbf{U}(n)$ .

## 5.2. Alcuni gruppi di matrici e le loro algebre di Lie

Nel capitolo precedente abbiamo esaminato i gruppi classici compatti della lista di Cartan. Completiamo ora la *lista di Cartan* dando l'elenco dei gruppi classici non compatti, con le loro algebre di Lie.

- (1)  $\mathbf{U}(p, q)$  è il gruppo delle matrici complesse  $a \in \mathbf{GL}(p+q, \mathbb{C})$  che soddisfano  $a^* K a = K$  per una matrice Hermitiana simmetrica  $K$  con segnatura  $(p, q)$ . Ad esempio, possiamo prendere  $K = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$ . La sua algebra di Lie è

$$\mathfrak{u}(p, q) = \{X \in \mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{C}) \mid X^* K + K X = 0\}.$$

- (2)  $\mathbf{SU}(p, q)$  è il gruppo delle matrici complesse  $a \in \mathbf{U}(p, q)$  con determinante 1:  $\mathbf{SU}(p, q) = \mathbf{U}(p, q) \cap \mathbf{SL}(p+q, \mathbb{C})$ . L'algebra di Lie corrispondente è

$$\mathfrak{su}(p, q) = \{X \in \mathfrak{u}(p, q) \mid \operatorname{tr} X = 0\} = \mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{C}).$$

- (3)  $\mathbf{SU}^*(2n)$  è il gruppo delle matrici <sup>4</sup>  $a \in \mathbf{SL}(2n, \mathbb{C})$  tali che

$$a J = J \bar{a}$$

<sup>3</sup>Possiamo introdurre su  $\mathbf{G}$  una metrica Riemanniana invariante per le traslazioni a destra e a sinistra; allora le geodetiche per l'origine sono tutti e soli i sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{G}$ . La tesi segue allora dal fatto che l'identità  $e$  di  $\mathbf{G}$  si può congiungere a un qualsiasi punto  $g \in \mathbf{G}$  mediante una geodetica  $\gamma : [0, 1] \ni t \rightarrow \exp(tX) \in \mathbf{G}$  di lunghezza minima per cui  $\gamma(0) = e$  e  $\gamma(1) = g$ .

<sup>4</sup>Questo gruppo si può indicare anche mediante  $\mathbf{SL}(n, \mathbb{H})$  e la corrispondente algebra di Lie mediante  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$ .

dove  $\bar{a}$  è la matrice i cui coefficienti sono i coniugati dei coefficienti di  $a$  e  $J$  è una matrice reale antisimmetrica di rango  $2n$ . Ad esempio possiamo fissare  $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$ . La sua algebra di Lie è:

$$\mathfrak{su}^*(2n) = \left\{ X \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}) \mid XJ = J\bar{X} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^n \right\}.$$

- (4)  $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$  è il gruppo delle matrici  $a$  di  $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$  che lasciano invariata una matrice simmetrica non degenera  $Q$ :

$$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) = \{ a \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} a Q a = Q \}.$$

La sua algebra di Lie è:

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) = \{ X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} X Q + Q X = 0 \}.$$

- (5)  $\mathbf{SO}(p, q)$  è il gruppo delle matrici reali  $a \in \mathbf{SL}(p+q, \mathbb{R})$  tali che  $\operatorname{tr} a K a = K$  per una matrice reale simmetrica  $K \in \mathfrak{M}((p+q), (p+q); \mathbb{R})$  di segnatura  $(p, q)$ . La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{o}(p, q) = \{ X \in \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} X K + K X = 0 \}.$$

- (6)  $\mathbf{SO}^*(2n)$  è il gruppo delle matrici  $a \in \mathbf{SL}(2n, \mathbb{C})$  tali che

$$a^* J a = J \quad \text{e} \quad \operatorname{tr} a a = K$$

ove  $J$  è una matrice antihermitiana di rango  $2n$  e  $K$  è una matrice simmetrica di rango  $2n$  con  $JK = KJ$ . Possiamo ad esempio fissare  $K = I_{2n}$  e  $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$ . L'algebra di Lie corrispondente è:

$$\mathfrak{so}^*(2n) = \{ X \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}) \mid X^* J + J X = 0, \operatorname{tr} X K + K X = 0 \}.$$

- (7)  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$  è il gruppo delle matrici  $a \in \mathbf{GL}(2n, \mathbb{C})$  tali che  $\operatorname{tr} a J a = J$  per una matrice antisimmetrica  $J \in \mathfrak{M}(2n, \mathbb{C})$  di rango  $2n$ . La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{ X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} X J + J X = 0 \}.$$

- (8)  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$  è il gruppo delle matrici  $a \in \mathbf{GL}(2n, \mathbb{R})$  tali che  $\operatorname{tr} a J a = J$  per una matrice antisimmetrica  $J \in \mathfrak{M}(2n, \mathbb{R})$  di rango  $2n$ . La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) = \{ X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} X J + J X = 0 \}.$$

- (9)  $\mathbf{Sp}(p, q)$  è il gruppo delle matrici  $a \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$  (con  $p+q=n$ ) tali che  $a^* K a = K$  per una matrice Hermitiana  $K$  di segnatura  $(2p, 2q)$  che commuta con  $J$ . Se  $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$ , possiamo fissare ad esempio

$$K = \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & \\ & & I_p & \\ & & & -I_q \end{pmatrix}.$$

La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(p, q) = \{ X \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \mid X^* K + K X = 0 \}.$$

Osserviamo che  $\mathbf{Sp}(n) = \mathbf{Sp}(n, 0) = \mathbf{Sp}(0, n) = \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n)$ .

### 5.3. I gruppi $\mathbf{U}(p, q)$ e $\mathbf{SU}(p, q)$

Fissiamo  $K = I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$  e poniamo  $n = p + q$ .

**Lemma 5.3.1.** *Se  $g \in \mathbf{U}(p, q)$ , allora  $g^* \in \mathbf{U}(p, q)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Per la definizione del gruppo  $\mathbf{U}(p, q)$ , abbiamo

$$g^* I_{p,q} = I_{p,q} g^{-1}.$$

Da questa otteniamo, passando alle inverse:

$$g I_{p,q} = (g^*)^* I_{p,q} = I_{p,q} (g^*)^{-1}$$

e quindi  $g^* \in \mathbf{U}(p, q)$ . □

**Lemma 5.3.2.**  $\mathbf{U}(p, q) \cap \mathbf{U}(n) \cong \mathbf{U}(p) \bowtie \mathbf{U}(q)$ .

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo un elemento  $g \in \mathbf{U}(p, q) \cap \mathbf{U}(n)$  nella forma

$$g = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$$

con matrici  $a$  di tipo  $p \times p$ ,  $b$  di tipo  $q \times q$ ,  $c$  di tipo  $p \times q$ ,  $d$  di tipo  $q \times p$ . Poiché  $g \in \mathbf{U}(p, q)$ , abbiamo

$$a^* a - d^* d = I_p, \quad a^* c = d^* b, \quad b^* b - c^* c = I_q.$$

Essendo  $g \in \mathbf{U}(n)$ , abbiamo anche:

$$a^* a + d^* d = I_p, \quad a^* c + d^* b = 0, \quad b^* b + c^* c = I_q.$$

Da queste uguaglianze ricaviamo

$$c = 0, \quad d = 0$$

da cui segue la tesi. □

**Corollario 5.3.3.**  $\mathbf{SU}(p, q) \cap \mathbf{U}(n)$  è omeomorfo al prodotto topologico  $\mathbf{SU}(p) \times \mathbf{SU}(q) \times S^1$ .

DIMOSTRAZIONE. Se  $\sigma \in \mathbb{C}$ , per ogni intero positivo  $h$  indichiamo con  $D_h(\sigma)$  la matrice diagonale  $h \times h$ :

$$D_h(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione

$$\mathbf{SU}(p) \times \mathbf{SU}(q) \times S^1 \ni (a, b, \sigma) \longrightarrow \begin{pmatrix} D_p(\sigma) a & 0 \\ 0 & D_q(\sigma^{-1}) b \end{pmatrix} \in \mathbf{SU}(p, q) \cap \mathbf{U}(n)$$

è continua e bigettiva e dunque un omeomorfismo perché i due spazi sono compatti di Hausdorff. □

**Teorema 5.3.4.**  $\mathbf{SU}(p, q)$  è omeomorfo al prodotto topologico  $\mathbf{SU}(p) \times \mathbf{SU}(q) \times S^1 \times \mathbb{C}^{pq}$ .  $\mathbf{U}(p, q)$  è omeomorfo al prodotto topologico  $\mathbf{SU}(p, q) \times S^1$ . I due gruppi sono pertanto connessi per archi ma non compatti se  $pq \neq 0$ .

DIMOSTRAZIONE. Calcoliamo l'intersezione  $\mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n)$ . Scriviamo  $X \in \mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n)$  nella forma  $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{pmatrix}$  con  $X_{11} \in \mathfrak{p}(p)$ ,  $X_{22} \in \mathfrak{p}(q)$  e  $X_{12}$  matrice complessa di tipo  $p \times q$ . Allora:

$$\begin{aligned} 0 &= X^* I_{p,q} + I_{p,q} X \\ &= X I_{p,q} + I_{p,q} X \\ &= \begin{pmatrix} 2X_{11} & 0 \\ 0 & 2X_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n) = \mathfrak{su}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{12}^* & 0 \end{pmatrix} \mid X_{12} \in \mathfrak{M}(p \times q, \mathbb{C}) \right\}$$

La tesi è perciò conseguenza dei lemmi precedenti e del Teorema V.1.1.  $\square$

#### 5.4. I gruppi $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ e $\mathbf{SU}^*(2n)$

**Lemma 5.4.1.** *Se  $g \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ , allora  $g^* \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ .*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$${}^t g J g = J$$

e dunque

$$J g = \operatorname{tr} g^{-1} J$$

da cui, passando alle inverse:

$$g^{-1} J = J \operatorname{tr} g.$$

Passando ai coniugati, otteniamo:

$$\bar{g}^{-1} J = J g^*$$

da cui

$${}^t g^* J g^* = J$$

e dunque  $g^* \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ .  $\square$

**Teorema 5.4.2.**  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$  è omeomorfo a  $\mathbf{Sp}(n) \times \mathbb{R}^{n(2n+1)}$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $g \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ . Possiamo decomporre  $g$  in modo unico nella forma:

$$g = ab \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n) \quad \text{e} \quad b \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{P}_+(2n).$$

La  $b$  si può rappresentare in modo unico come esponenziale di una matrice  $B \in \mathfrak{p}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2n)$ . Scriviamo  $B$  nella forma

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & B_{22} \end{pmatrix}$$

con  $B_{hk}$  matrici complesse  $n \times n$ ,  $B_{11}$  e  $B_{22}$  Hermitiane. Da  $\operatorname{tr} B J + J B = 0$  otteniamo allora le uguaglianze:

$$B_{11} = -\operatorname{tr} B_{22}$$

$$B_{12} = \operatorname{tr} B_{12}.$$

La matrice  $B$  è dunque della forma

$$(*) \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ \bar{B}_{12} & -\bar{B}_{11} \end{pmatrix}$$

con  $B_{11}$  Hermitiana e  $B_{12}$  simmetrica. Le matrici Hermitiane della forma (\*) formano uno spazio vettoriale reale  $L$  di dimensione  $n^2 + n(n+1) = n(2n+1)$  e dunque la tesi segue dall'omeomorfismo del Teorema V.1.1:

$$\mathbf{Sp}(n) \times L \ni (a, B) \longrightarrow a \exp(B) \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}).$$

□

**Teorema 5.4.3.** *Il gruppo  $\mathbf{SU}^*(2n)$  è omeomorfo a  $\mathbf{Sp}(n) \times \mathbb{R}^{2n^2-n-1}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che  $g \in \mathbf{SU}^*(2n)$  se  $g \in \mathbf{SL}(2n, \mathbb{C})$  e

$$Jg = \bar{g}J.$$

Ne segue che, se  $g \in \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n)$  abbiamo

$${}^t g J g = J$$

e dunque  $g \in \mathbf{Sp}(n)$ .

Si verifica immediatamente che  $g^* \in \mathbf{SU}^*(2n)$  se  $g \in \mathbf{SU}^*(2n)$  e dunque possiamo ripetere il ragionamento fatto nella dimostrazione del teorema precedente, decomponendo  $g$  mediante

$$g = ab \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n) \text{ e } b \in \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{P}(2n).$$

La  $b$  è l'esponenziale di una matrice Hermitiana  $B$  in  $\mathfrak{su}^*(2n)$ : questo è lo spazio vettoriale reale  $L$  di dimensione  $2n^2 - n - 1$  delle matrici della forma:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ -\bar{B}_{12} & \bar{B}_{11} \end{pmatrix}$$

con  $B_{11}$  matrice  $n \times n$  Hermitiana con traccia nulla e  $B_{12}$  matrice  $n \times n$  complessa antisimmetrica:  ${}^t B_{12} = -B_{12}$ . Per il Teorema V.1.1 otteniamo un omeomorfismo:

$$\mathbf{Sp}(n) \times L \ni (a, B) \longrightarrow a \exp(B) \in \mathbf{SU}^*(2n),$$

che dimostra la tesi. □

### 5.5. I gruppi $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ e $\mathbf{SO}^*(2n)$

**Teorema 5.5.1.**  *$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$  è omeomorfo a  $\mathbf{SO}(n) \times \mathbb{R}^{(n^2-n)/2}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo in primo luogo che l'aggiunta  $g^*$  di un elemento  $g$  di  $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$  è ancora un elemento del gruppo. Infatti le equazioni che definiscono il gruppo sono:

$$\det(g) = 1, \quad \text{tr } g = I.$$

Quindi, poiché anche  $g \text{ tr } g = I$ :

$$\det(g^*) = \overline{\det(g)} = 1 \quad \text{e} \quad {}^t g^* g^* = (g {}^t g)^* = I.$$

Un elemento  $g$  di  $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n)$  soddisfa

$$\text{tr } g = g^{-1} = g^*$$

e dunque è una matrice a coefficienti reali. Otteniamo perciò:

$$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n) = \mathbf{SO}(n).$$

Decomponiamo  $g \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$  in modo unico mediante

$$g = ab \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n) \quad \text{e} \quad b \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{P}(n).$$

Gli elementi di  $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{P}(n)$  sono tutti e soli gli esponenziali delle matrici dello spazio vettoriale reale  $L$  di dimensione  $(n^2 - n)/2$ :

$$L = \{B \mid B \text{ Hermitiana e } \operatorname{tr} B = -B\} = i \cdot \mathfrak{o}(n)$$

cioè delle matrici a coefficienti puramente immaginari antisimmetriche. La tesi segue dal Teorema V.1.1.  $\square$

**Teorema 5.5.2.**  $\mathbf{SO}^*(2n)$  è omeomorfo a  $\mathbf{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-n}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo in primo luogo che il gruppo  $\mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n)$  è isomorfo, come gruppo topologico, a  $\mathbf{U}(n)$ . Infatti, per un elemento  $g$  di tale gruppo, valgono le equazioni:

$$\operatorname{tr} gg = I, \quad g^* J g = J, \quad g^* g = I, \quad \det(g) = 1.$$

La prima e la terza di queste equazioni ci dicono che  $g$  è una matrice reale di  $\mathbf{SO}(2n)$ . La seconda ci dice allora che  $g$  commuta con  $J$  e dunque è  $\mathbb{C}$ -lineare per la struttura complessa su  $\mathbb{R}^{2n}$  definita da  $J$ . Si verifica facilmente che, se definiamo l'isomorfismo  $\mathbb{R}$ -lineare  $\sigma : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$  mediante

$$\sigma(e_k) = e_k \quad \text{per} \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{e} \quad \sigma(Je_k) = \sigma(e_{k+n}) = ie_k$$

l'applicazione

$$\mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n) \ni g \longrightarrow \sigma \circ g \circ \sigma^{-1} \in \mathbf{U}(n)$$

è un isomorfismo di gruppi topologici. Per concludere la dimostrazione, osserviamo che il gruppo  $\mathbf{SO}^*(2n)$  è chiuso rispetto all'aggiunzione e dunque, dalla decomposizione

$$g = ab \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n) \quad \text{e} \quad b \in \mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{P}(2n).$$

Troviamo allora che  $b = \exp(B)$  dove  $B \in \mathfrak{so}^*(2n) \cap \mathfrak{p}(2n)$  è univocamente determinata come un elemento dello spazio vettoriale reale  $L$  di dimensione  $n^2 - n$  delle matrici:

$$B = i \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & -X \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad X, Y \in \mathfrak{o}(n).$$

L'omeomorfismo cercato segue dal Teorema V.1.1.  $\square$

### 5.6. I gruppi $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$

**Teorema 5.6.1.** *Abbiamo l'omeomorfismo*

$$\mathbf{Sp}(p, q) \cong \mathbf{Sp}(p) \times \mathbf{Sp}(q) \times \mathbb{R}^{4pq}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordiamo che il gruppo  $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$  è caratterizzato dalle equazioni:

$$\mathrm{tr} \, gJg = J \quad \text{e} \quad g^* \begin{pmatrix} I_{p,q} & \\ & I_{p,q} \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} I_{p,q} & \\ & I_{p,q} \end{pmatrix}.$$

Come abbiamo visto in precedenza, possiamo considerare un elemento  $g$  dell' intersezione  $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n) \subset \mathbf{Sp}(n)$  come un elemento di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{H})$ . Scriviamo  $\tilde{g}$  per la matrice a coefficienti quaternioni corrispondente a  $g$ . Troviamo allora: se  $g \in \mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$ , allora

$$\begin{aligned} \tilde{g}^* \tilde{g} &= I \\ \tilde{g}^* I_{p,q} g &= I_{p,q}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} g_1 & \\ & g_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad g_1 \in \mathbf{Sp}(p), \quad g_2 \in \mathbf{Sp}(q).$$

D'altra parte abbiamo al solito l'invarianza di  $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$  rispetto all'aggiunzione. Dal Teorema V.1.1 otteniamo un omeomorfismo

$$\mathbf{Sp}(p) \times \mathbf{Sp}(q) \times L \ni (g_1, g_2, B) \longrightarrow \begin{pmatrix} g_1 & \\ & g_2 \end{pmatrix} \exp(B) \in \mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$$

ove in questo caso  $L = (\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2n))$  è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $4pq$  di matrici Hermitiane. Le matrici di  $L$  hanno la forma:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & 0 & B_{14} \\ B_{12}^* & 0 & {}^t B_{14} & 0 \\ 0 & \bar{B}_{14} & 0 & -\bar{B}_{12} \\ B_{14}^* & 0 & -{}^t B_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

con  $B_{12}$  e  $B_{14}$  matrici complesse di tipo  $p \times q$ . □

### 5.7. I gruppi $\mathbf{SO}(p, q)$

**Teorema 5.7.1.** *Siano  $p, q$  due interi positivi con  $p + q = n$ . Allora il gruppo  $\mathbf{SO}(p, q)$  è omeomorfo a  $\{-1, 1\} \times \mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Ragioniamo come nella dimostrazione dei teoremi precedenti. Ricaviamo in primo luogo che  $\mathbf{SO}(p, q) \cap \mathbf{U}(n)$  è formato dalle matrici:

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$$

con  $g_1 \in \mathbf{O}(p)$ ,  $g_2 \in \mathbf{O}(q)$  e  $\det(g_1) \cdot \det(g_2) = 1$ .

Quindi abbiamo l'omeomorfismo:

$$\mathbf{SO}(p, q) \cap \mathbf{U}(n) \cong \{-1, 1\} \times \mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(q).$$

D'altra parte  $\mathbf{SO}(p, q) \cap \mathbf{P}(n)$  è l'immagine iniettiva mediante l'applicazione esponenziale delle matrici

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ {}^t B_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

ove  $B_{12}$  è una matrice reale  $p \times q$ . Concludiamo utilizzando il Teorema V.1.1.  $\square$



## CAPITOLO VI

### Spinori

#### 6.1. Rivestimenti

Vale in generale il seguente:

**Teorema 6.1.1.** *Il gruppo fondamentale di un gruppo topologico localmente connesso per archi è commutativo.*

*Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico localmente connesso per archi e connesso e sia  $\tilde{\mathbf{G}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}$  un suo rivestimento connesso. Fissato un punto  $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$ , vi è un'unica struttura di gruppo topologico su  $\tilde{\mathbf{G}}$  per cui  $\tilde{e}$  sia l'identità e  $\pi$  un omomorfismo di gruppi topologici.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbf{G}$  sono cammini continui con  $\alpha(0) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(1) = e$ , consideriamo l'applicazione continua:

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \ni (t, s) \rightarrow \alpha(t) \cdot \beta(s) \in \mathbf{G}.$$

Allora

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \begin{cases} F(2t, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(1, 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e

$$(\beta \cdot \alpha)(t) = \begin{cases} F(0, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(2t - 1, 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e possiamo definire un'omotetia tra  $\alpha \cdot \beta$  e  $\beta \cdot \alpha$  mediante:

$$G(s, t) = \begin{cases} F((1-s)2t, 2st) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F((1-s) + s(2t-1), s + (1-s)(2t-1)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ciò dimostra che  $\pi_1(\mathbf{G})$  è un gruppo abeliano. □

Sia ora  $\pi : \tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$  un rivestimento connesso di  $\mathbf{G}$ . Osserviamo che  $\tilde{\mathbf{G}}$  è connesso per archi.

Per ogni  $\tilde{g} \in \tilde{\mathbf{G}}$  indichiamo con  $\pi_1(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{g})$  il gruppo fondamentale di  $\tilde{\mathbf{G}}$  con punto base  $\tilde{g}$ . Dimostriamo innanzitutto il seguente:

**Lemma 6.1.2.** *Siano  $g \in \mathbf{G}$  e  $\tilde{g} \in \pi^{-1}(g)$ . Allora, per ogni  $\xi \in \pi_*(\pi_1(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{e}))$ , risulta  $L_{g*}(\xi) \in \pi_*(\pi_1(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{g}))$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}$  un laccetto con  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{e}$  e poniamo  $\alpha = \pi \circ \tilde{\alpha}$ . Dobbiamo dimostrare che il laccetto  $L_g \circ \alpha : [0, 1] \ni t \rightarrow L_g(\alpha(t)) \in \mathbf{G}$ , si rialza a un laccetto di punto iniziale  $\tilde{g}$ .

Sia  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}$  un cammino continuo con estremi  $\tilde{e}$  e  $\tilde{g}$  e sia  $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ . Consideriamo l'applicazione continua:

$$[0, 1] \times [0, 1] \ni (t, s) \rightarrow G(t, s) = \gamma(s) \cdot \alpha(t) \in \mathbf{G}.$$

Essa si rialza ad un'applicazione continua  $\tilde{g}(t, s)$  e  $t \rightarrow \tilde{g}(t, 1)$  rialza  $L_g \circ \alpha$ . Per dimostrare che questo è un laccetto, consideriamo l'insieme  $A$  degli  $s \in [0, 1]$  tali che  $\tilde{g}(0, s) = \tilde{g}(1, s)$ . Esso contiene 0, è chiuso perché  $\tilde{\mathbf{G}}$  è uno spazio di Hausdorff, ed è aperto perché  $\pi \circ \tilde{g}(0, s) = \gamma(s) = \pi \circ \tilde{g}(1, s)$  e  $\tilde{\mathbf{G}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}$  è un rivestimento. Coincide quindi con  $[0, 1]$ : in particolare  $\tilde{g}(0, 1) = \tilde{g}(1, 1)$  e  $t \rightarrow \tilde{g}(t, 1)$  è un laccetto.  $\square$

CONCLUSIONE DELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. Siano  $\tilde{g}_1$  e  $\tilde{g}_2$  due elementi di  $\tilde{\mathbf{G}}$  e siano  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2 : [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}$  cammini continui con  $\tilde{\alpha}_i(0) = \tilde{\beta}_i(0) = \tilde{e}_i$ ,  $\tilde{\alpha}_i(1) = \tilde{\beta}_i(1) = \tilde{g}_i$ , per  $i = 1, 2$ . Poniamo  $\alpha_i = \pi \circ \tilde{\alpha}_i$ ,  $\beta_i = \pi \circ \tilde{\beta}_i$  ( $i = 1, 2$ ). Consideriamo i cammini continui  $\alpha : [0, 1] \ni t \rightarrow \alpha_1(t)\alpha_2(t) \in \mathbf{G}$  e  $\beta : [0, 1] \ni t \rightarrow \beta_1(t)\beta_2(t) \in \mathbf{G}$  e siano  $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}$  e  $\tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}$  i loro rialzamenti con punto iniziale  $\tilde{e}$ . Dimostriamo che  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ . A questo scopo osserviamo che

$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha_1(t + st) \cdot \alpha_2(t - st) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_1(s + t - st) \cdot \alpha_2(t + st - s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è un'omotetia tra  $\alpha$  ed

$$\alpha' = \alpha_1 \cdot (L_{g_1} \circ \alpha_2) = \begin{cases} \alpha_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1 \cdot \alpha_2(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Se indichiamo con  $\tilde{\alpha}'$  il rilevamento di  $\alpha'$  con punto iniziale  $\tilde{e}$ , avremo quindi  $\tilde{\alpha}'(1) = \tilde{\alpha}(1)$ . Analogamente, posto

$$\beta' = \beta_1 \cdot (L_{g_1} \circ \beta_2) = \begin{cases} \beta_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1 \cdot \beta_2(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

i rilevamenti  $\tilde{\beta}$  e  $\tilde{\beta}'$  di  $\beta$  e  $\beta'$  con punto iniziale  $\tilde{e}$  hanno lo stesso punto finale in  $\tilde{\mathbf{G}}$ .

Osserviamo ora che i punti finali di  $\tilde{\alpha}$  e di  $\tilde{\beta}$  sono i punti finali dei rialzamenti dei cammini  $L_{g_1} \circ \alpha_2$  e  $L_{g_1} \circ \beta_2$  con punto iniziale  $\tilde{g}_1$ . Questi coincidono perché  $(L_{g_1} \circ \alpha_2) \cdot (L_{g_1} \circ \beta_2)^{-1} = L_{g_1} \circ (\alpha_2 \cdot \beta_2^{-1})$  è l'immagine mediante la traslazione a sinistra per  $g_1$  del laccetto  $\alpha_2 \cdot \beta_2^{-1}$ , che per ipotesi è immagine mediante  $\pi$  di un laccetto in  $\tilde{\mathbf{G}}$  di punto iniziale  $\tilde{e}$ . Per il Lemma 6.1.2, esso è allora l'immagine di un laccetto di punto iniziale  $\tilde{g}_1$  in  $\tilde{\mathbf{G}}$ .

Possiamo quindi definire:

$$\tilde{g}_1 \tilde{g}_2 = \tilde{\alpha}(1)$$

in quanto la definizione non dipende dalla scelta dei cammini  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  che congiungono  $\tilde{e}$  ai punti  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$  rispettivamente.

Si verifica senza difficoltà che, con questa definizione di prodotto,  $\tilde{\mathbf{G}}$  è un gruppo topologico con unità  $\tilde{e}$  e che  $\pi : \tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$  è un omomorfismo di gruppi.  $\square$

## 6.2. Il gruppo degli spinori

**Definizione 6.2.1.** Il rivestimento universale di  $\mathbf{SO}(n)$ , per  $n \geq 3$ , è un gruppo topologico, che si indica con  $\mathbf{Spin}(n)$ , e si dice il *gruppo degli spinori di ordine  $n$* . Il rivestimento  $\mathbf{Spin}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SO}(n)$  è a due fogli ed è un omomorfismo di gruppi. Osserviamo che  $\mathbf{Spin}(3) \simeq \mathbf{SU}(2)$ .

## 6.3. Algebre di Clifford

Sia  $\mathbb{k}$  un campo di caratteristica 0,  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  su  $\mathbb{k}$  e sia  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  una forma bilineare simmetrica.

Indichiamo con  $\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{h=0}^{\infty} \mathcal{T}^{\otimes h}(V)$  l'algebra tensoriale di  $V$ .

Sia  $\mathcal{I}(V, \beta)$  l'ideale bilatero in  $\mathcal{T}(V)$  generato dai tensori

$$v \otimes w + w \otimes v - \beta(v, w) \cdot 1,$$

al variare di  $v, w$  in  $V$ .

**Definizione 6.3.1.** L'algebra di Clifford<sup>1</sup>  $\text{Cliff}(V, \beta)$  è il quoziente

$$(6.3.1) \quad \text{Cliff}(V, \beta) = \mathcal{T}(V) / \mathcal{I}(V, \beta).$$

Dati due elementi  $\tau_1, \tau_2 \in \text{Cliff}(V, \beta)$  indicheremo il loro prodotto mediante  $\tau_1 \otimes \tau_2$ .

Identifichiamo  $V$  a  $\mathcal{T}^{\otimes 1}(V)$  ed indichiamo con  $\iota(v)$  l'immagine di un vettore  $v \in V \simeq \mathcal{T}^{\otimes 1}(V)$  in  $\text{Cliff}(V, \beta)$ .

**Proposizione 6.3.2.** L'algebra di Clifford  $\text{Cliff}(V, \beta)$  è caratterizzata, a meno di isomorfismi, dalle proprietà:

esiste un'inclusione  $\iota : V \hookrightarrow \text{Cliff}(V, \beta)$  tale che

- (C1)  $\iota(v) \otimes \iota(w) + \iota(w) \otimes \iota(v) = \beta(v, w) \cdot 1$  per ogni  $v, w \in V$ ;
- (C2)  $\iota(V)$  genera  $\text{Cliff}(V, \beta)$  come algebra associativa unitaria;
- (C3) Se  $\mathfrak{A}$ , con prodotto  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (a_1, a_2) \rightarrow a_1 \odot a_2 \in \mathfrak{A}$ , è un'algebra associativa e unitaria per cui è definita un'applicazione lineare  $\gamma : V \rightarrow \mathfrak{A}$  con la proprietà che

$$\gamma(v) \odot \gamma(w) + \gamma(w) \odot \gamma(v) = \beta(v, w) \cdot 1, \quad \forall v, w \in V,$$

allora vi è un unico omomorfismo di algebre associative unitarie

$$\tilde{\gamma} : \text{Cliff}(V, \beta) \rightarrow \mathfrak{A}$$

che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\gamma} & \mathfrak{A} \\ \downarrow \iota & \nearrow \tilde{\gamma} & \\ \text{Cliff}(V, \beta) & & \end{array}$$

<sup>1</sup>Queste algebre furono introdotte da W.K.Clifford nel 1878 (*Amer.J.Math.* **1**, 350-358) come un'unificazione dei quaternioni di Hamilton e dell'algebra esterna di Grassmann.

Poiché  $\iota : V \rightarrow \text{Cliff}(V, \beta)$  è iniettiva, identificheremo nel seguito  $V$  a un sottospazio di  $\text{Cliff}(V, \beta)$ , usando lo stesso simbolo per il vettore  $v \in V$  e la sua immagine  $\iota(v)$  in  $\text{Cliff}(V, \beta)$ .

Indichiamo con  $\text{Cliff}_k(V, \beta)$  il sottospazio vettoriale di  $\text{Cliff}(V, \beta)$  generato dai prodotti  $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_s$  con  $s \leq k$  e  $v_1, v_2, \dots, v_s \in V$ . Poiché

$$\text{Cliff}_{k_1}(V, \beta)\text{Cliff}_{k_2}(V, \beta) \subset \text{Cliff}_{k_1+k_2}(V, \beta)$$

per ogni coppia di interi non negativi  $k_1, k_2$ , otteniamo in questo modo una filtrazione di  $\text{Cliff}(V, \beta)$ . Vale il

**Lemma 6.3.3.** *Sia  $e_1, \dots, e_n$  una base di  $V$ . Allora, per ogni  $k \geq 1$ ,  $1$  e  $i$  vettori*

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_s} \quad \text{con} \quad 1 \leq s \leq k, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq n$$

*formano una base di  $\text{Cliff}_k(V, \beta)$ . In particolare  $\text{Cliff}(V, \beta) = \text{Cliff}_n(V, \beta)$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $2^n$ .*

Per la proprietà (C3), l'applicazione  $\gamma : V \ni v \rightarrow -v \in \text{Cliff}(V, \beta)$  si estende ad un automorfismo  $\alpha : \text{Cliff}(V, \beta) \rightarrow \text{Cliff}(V, \beta)$ , con  $\alpha^2 = 1$ . Otteniamo quindi una decomposizione

$$\text{Cliff}(V, \beta) = \text{Cliff}^+(V, \beta) \oplus \text{Cliff}^-(V, \beta),$$

dove  $\text{Cliff}^+(V, \beta)$  è costituito dalla sottoalgebra unitaria degli elementi lasciati fissi dall'involuzione  $\alpha$  e  $\text{Cliff}^-(V, \beta)$  dagli elementi  $\tau \in \text{Cliff}(V, \beta)$  tali che  $\alpha(\tau) = -\tau$ .

Il sottospazio  $\text{Cliff}^+(V, \beta)$  ha dimensione  $2^{n-1}$  ed è generato dai prodotti di un numero pari di elementi di  $V$ . Il sottospazio  $\text{Cliff}^-(V, \beta)$  ha la stessa dimensione ed è generato dai prodotti di un numero dispari di elementi di  $V$ .

Se  $\beta = 0$ , l'algebra di Clifford coincide con l'algebra di Grassmann  $\Lambda(V)$ .

Nel seguito ci restringeremo al caso in cui  $\beta$  sia non degenere.

#### 6.4. Spazi di Spinori

Supponiamo ora che  $V$  sia uno spazio vettoriale complesso di dimensione  $n$  e che  $\beta$  sia non degenere. Studiamo le rappresentazioni di  $\text{Cliff}(V, \beta)$  come algebra di endomorfismi lineari di uno spazio vettoriale complesso.

**Definizione 6.4.1.** Uno spazio di spinori per  $(V, \beta)$  è la coppia formata da uno spazio vettoriale complesso  $S$  e da un'applicazione  $\gamma : V \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(S)$  che goda delle proprietà:

- (S1)  $\gamma(x) \circ \gamma(y) + \gamma(y) \circ \gamma(x) = \beta(x, y) I_S$  per ogni  $x, y \in V$ ;
- (S2) Gli unici sottospazi di  $S$  invarianti rispetto a tutti gli endomorfismi  $\gamma(x)$ , per  $x \in V$ , sono  $\{0\}$  ed  $S$ .

Osserviamo che per le proprietà (C1), (C2) e (C3), la  $\gamma$  si estende in modo unico a un omomorfismo  $\tilde{\gamma} : \text{Cliff}(V, \beta) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(S)$ ; viceversa ogni rappresentazione lineare irriducibile di  $\text{Cliff}(V, \beta)$  è associata a un'applicazione  $\gamma$  che verifica la (S1).

Poiché  $\text{Cliff}(V, \beta)$  ha dimensione finita ed  $S = \{\tilde{\gamma}(x)(s) \mid x \in \text{Cliff}(V, \beta)\}$  se  $s \in S \setminus \{0\}$ , lo spazio vettoriale  $S$  ha dimensione finita.

Diremo che due spazi di spinori  $(S, \gamma)$  ed  $(S', \gamma')$  per  $(V, \beta)$  sono *equivalenti* se c'è un isomorfismo lineare  $T : S \rightarrow S'$  tale che  $T \circ \gamma(v) = \gamma'(v) \circ T$  per ogni  $v \in V$ .

**Teorema 6.4.2.** *Sia  $n = \dim_{\mathbb{C}} V$ . Allora:*

- (1) *Se  $n$  è pari, allora vi è a meno di equivalenza un unico spazio di spinori per  $(V, \beta)$ .*
- (2) *Se  $n$  è dispari, vi sono, a meno di equivalenza, esattamente due spazi di spinori non equivalenti per  $(V, \beta)$ .*

**6.4.1. Costruzione di uno spazio di spinori nel caso  $n = 2m$  pari.** Fissiamo una decomposizione  $V = W \oplus W^*$  di  $V$  nella somma diretta di due sottospazi totalmente isotropi per  $\beta$ . Osserviamo che  $\beta$  definisce un accoppiamento di dualità tra  $W$  e  $W^*$  con cui identifichiamo  $W^*$  al duale di  $W$ :

$$\langle x, x^* \rangle = \beta(x, x^*), \quad \text{per } x \in W, x^* \in W^*$$

ed abbiamo:

$$\beta(x + x^*, y + y^*) = \langle x | y^* \rangle + \langle y | x^* \rangle, \quad \text{per ogni } x, y \in W, x^*, y^* \in W^*.$$

Indichiamo con  $\Lambda^k(W^*)$  lo spazio vettoriale delle  $k$ -forme multilineari alternate su  $W$ . Sia  $\Lambda^\bullet(W^*) = \bigoplus_{k=0}^m \Lambda^k(W^*)$  l'algebra di Grassmann delle forme multilineari alternate su  $W$ . Ricordiamo che il prodotto in  $\Lambda^\bullet(W^*)$  è definito sugli elementi omogenei  $\phi \in \Lambda^p(W^*)$ ,  $\psi \in \Lambda^q(W^*)$  da:

$$(\phi \wedge \psi)(w_1, \dots, w_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p,q}} \text{sgn}(\sigma) \phi(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_p}) \psi(v_{\sigma_{p+1}}, \dots, v_{\sigma_{p+q}})$$

ove  $\text{sgn}(\sigma) = \pm 1$  è la segnatura della permutazione  $\sigma$  e  $\mathfrak{S}_{p,q}$  è l'insieme delle permutazioni  $\sigma$  di  $\{1, \dots, p+q\}$  tali che  $\sigma_1 < \dots < \sigma_p$  e  $\sigma_{p+1} < \dots < \sigma_{p+q}$ .

Per ogni  $w^* \in W^*$  indichiamo con  $\varepsilon(w^*)$  l'operatore:

$$\varepsilon(w^*) : \Lambda^\bullet(W^*) \ni \phi \rightarrow w^* \wedge \phi \in \Lambda^\bullet(W^*).$$

Per ogni  $w \in W$  indichiamo con  $\iota(w)$  l'operatore di prodotto interno:

$$\iota(w) : \Lambda^\bullet(W^*) \ni \phi \rightarrow w \lrcorner \phi \in \Lambda^\bullet(W^*).$$

Se  $\phi \in \Lambda^k(W^*)$ ,  $w \lrcorner \phi \in \Lambda^{k-1}(W^*)$  è definito da:

$$(w \lrcorner \phi)(w_1, \dots, w_{k-1}) = \phi(w, w_1, \dots, w_{k-1}) \quad \forall w_1, \dots, w_{k-1} \in W.$$

Osserviamo che valgono le:

$$\begin{aligned} \varepsilon(w_1^*) \circ \varepsilon(w_2^*) &= -\varepsilon(w_2^*) \circ \varepsilon(w_1^*) & \text{e} & \quad \iota(w_1) \circ \iota(w_2) = -\iota(w_2) \circ \iota(w_1) \\ & & & \quad \forall w_1, w_2 \in W, \forall w_1^*, w_2^* \in W^*. \end{aligned}$$

Inoltre si verifica immediatamente che:

$w \lrcorner (w^* \wedge \phi) = \langle w, w^* \rangle \phi - w^* \wedge (w \lrcorner \phi)$  per ogni  $w \in W$ ,  $w^* \in W^*$  e  $\phi \in \Lambda^\bullet(W^*)$ , cioè:

$$\varepsilon(w^*) \circ \iota(w) + \iota(w) \circ \varepsilon(w^*) = \langle w, w^* \rangle I_{\Lambda^\bullet(W^*)} \quad \forall w \in W, \forall w^* \in W^*.$$

Definiamo ora

$$\gamma : V = W \oplus W^* \ni (w + w^*) \rightarrow \varepsilon(w^*) + \iota(w) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^\bullet(W^*)).$$

Poiché

$\gamma(v_1) \circ \gamma(v_2) + \gamma(v_2) \circ \gamma(v_1) = \beta(v_1, v_2) I_{\Lambda^\bullet(W^*)}$  per ogni  $v_1, v_2 \in V$   
la  $\gamma$  si estende a un omomorfismo  $\tilde{\gamma} : \text{Cliff}(V, \beta) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^\bullet(W^*))$ .

Dimostriamo che  $\Lambda^\bullet(W^*)$  non contiene sottospazi propri invarianti rispetto a  $\tilde{\gamma}(\text{Cliff}(V, \beta))$ . Se  $E$  è un sottospazio  $\tilde{\gamma}(\text{Cliff}(V, \beta))$ -invariante di  $\Lambda^\bullet(W^*)$  diverso da  $\{0\}$ , fissiamo un elemento  $\phi \in E \setminus \{0\}$ . Decomponiamo  $\phi$  nella somma delle sue componenti omogenee:  $\phi = \phi_0 + \dots + \phi_j + \dots + \phi_p$  con  $\phi_j \in \Lambda^j(W^*)$  e  $\phi_d \neq 0$ . Siano  $w_1, \dots, w_d \in W$  tali che  $\phi_d(v_1, \dots, v_d) \neq 0$ . Allora  $\gamma(w_d) \circ \dots \circ \gamma(w_1)(\phi) = \phi_d(v_1, \dots, v_d) \in (\Lambda^0(W^*) \setminus \{0\}) \cap E$ . Quindi  $E$  contiene elementi non nulli omogenei di grado zero, quindi contiene 1 e tutti gli elementi  $w_1^* \wedge \dots \wedge w_p^* = \varepsilon(w_1^*) \circ \dots \circ \varepsilon(w_p^*)(1)$  al variare di  $p$  e di  $w_1^*, \dots, w_p^*$  in  $W^*$  e perciò coincide con  $\Lambda^\bullet(W^*)$ .

Quindi: Se  $n$  è pari,  $(\Lambda^\bullet(W^*), \tilde{\gamma})$  è uno spazio di spinori per  $(V, \beta)$ .

#### 6.4.2. Costruzione di uno spazio di spinori nel caso $n = 2m + 1$ dispari.

Fissiamo un vettore  $e_0 \in V$  con  $\beta(e_0, e_0) = 2$ . Sia  $U = \mathbb{C}e_0$  e siano  $W, W^*$  due sottospazi totalmente isotropi di  $U^\perp$  tali che  $U^\perp = W \oplus W^*, V = W \oplus U \oplus W^*$ .

Ripetiamo la costruzione del punto 1. Definiamo le applicazioni  $\gamma_\pm : V \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^\bullet(W^*))$  mediante:

$$\gamma(w + \lambda e_0 + w^*)(\phi) = (w] \pm (-1)^p \lambda + w^* \wedge) \phi \quad \text{se } \phi \in \Lambda^p(W^*).$$

Abbiamo

$$\{\gamma(v_1), \gamma(v_2)\} = \gamma(v_1) \circ \gamma(v_2) + \gamma(v_2) \circ \gamma(v_1) = \beta(v_1, v_2) I_{\Lambda^\bullet(W^*)}.$$

Per le proprietà (C1), (C2) e (C3) le applicazioni  $\gamma_\pm$  si estendono in modo unico ad omomorfismi

$$\tilde{\gamma}_\pm : \text{Cliff}(V, \beta) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^\bullet(W^*)).$$

Il fatto che  $\Lambda^\bullet(W^*)$  non abbia sottospazi propri non nulli che siano  $\tilde{\gamma}_\pm(\text{Cliff}(V, \beta))$ -invariante segue con lo stesso argomento usato nel caso pari.

Quindi: Se  $n$  è dispari,  $(\Lambda^\bullet(W^*), \tilde{\gamma}_+)$  e  $(\Lambda^\bullet(W^*), \tilde{\gamma}_-)$  sono spazi di spinori per  $(V, \beta)$ . Per completare la dimostrazione, utilizzeremo il seguente:

**Lemma 6.4.3.** Sia  $W$  un sottospazio totalmente isotropo massimale di  $V$  per la forma  $\beta$ . Se  $(S', \gamma')$  è uno spazio di spinori per  $(V, \beta)$ , poniamo

$$Z = \bigcap_{w \in W} \ker \gamma'(w).$$

- (1)  $Z$  ha dimensione 1; fissiamo  $z_0 \in Z \setminus \{0\}$ .
- (2) Se  $n$  è pari, vi è un unico isomorfismo di spazi spinoriali

$$(\Lambda^\bullet(W^*), \gamma) \xrightarrow{T} (S', \gamma')$$

tale che  $T(1) = z_0$ .

- (3) Se  $n$  è dispari, vi è un unico isomorfismo di spazi spinoriali

$$(\Lambda^\bullet(W^*), \gamma_\delta) \xrightarrow{T} (S', \gamma')$$

con  $T(1) = z_0$  e  $\gamma'(e_0)(z_0) = \delta z_0$  con  $\delta = \pm$ .

(4) Se  $n$  è dispari, i due spazi spinoriali  $(\Lambda^\bullet(W^*), \gamma_+)$  e  $(\Lambda^\bullet(W^*), \gamma_-)$  non sono equivalenti.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una base  $e_1, \dots, e_m$  di  $W$  ( $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ). Poiché

$$\gamma'(e_j)^2 = \frac{1}{2}\beta(e_j, e_j)I_{\Lambda^\bullet(W^*)} = 0,$$

abbiamo  $\ker \gamma'(e_j) \neq \{0\}$ . Inoltre  $\gamma'(e_i) \circ \gamma'(e_j) = -\gamma'(e_j) \circ \gamma'(e_i)$  per ogni  $i, j = 1, \dots, m$  e quindi ogni sottospazio  $\ker \gamma'(e_i)$  è  $\gamma'(e_j)$ -invariante per ogni  $i, j = 1, \dots, m$ . Abbiamo perciò

$$Z = \bigcap_{j=1}^m \ker \gamma'(e_j) \neq \{0\}.$$

Definiamo ora un'applicazione lineare

$$T : \Lambda^\bullet(W^*) \rightarrow S' \quad \text{mediante:}$$

$$\begin{aligned} T(w_1^* \wedge \dots \wedge w_p^*) &= \gamma'(w_1^*) \circ \dots \circ \gamma'(w_p^*)(z_0) \\ &\quad \forall w_1^*, \dots, w_p^* \in W^*. \end{aligned}$$

Dalle relazioni (S1) segue che l'immagine è invariante rispetto a  $\gamma'(V)$  e quindi l'applicazione  $T$  è surgettiva. Dimostriamo ora che  $T \circ \gamma(w + w^*) = \gamma'(w + w^*) \circ T$  per ogni  $w \in W$  e  $w^* \in W^*$ . Poiché per definizione  $T \circ \gamma(w^*) = \gamma'(w^*) \circ T$  per ogni  $w^* \in W^*$ , è sufficiente verificare che

$$(*) \quad T \circ \gamma(w)(\phi) = \gamma'(w) \circ T(\phi) \quad \forall w \in W, \forall \phi \in \Lambda^p(W^*)$$

per ogni  $p = 0, 1, \dots, m$ . Questa uguaglianza è verificata (ambo i membri sono nulli) quando  $p = 0$ . Supponiamo per induzione di averla dimostrata per ogni  $p \leq k < m$ . Sia  $\psi \in \Lambda^k(W^*)$  e  $w^* \in W^*$ . Abbiamo allora

$$\begin{aligned} T(\gamma(w)(w^* \wedge \psi)) &= T(\langle w, w^* \rangle \psi - w^* \wedge (\gamma(w)(\psi))) \\ &= (\langle w, w^* \rangle I_{S'} - \gamma'(w^*) \circ \gamma'(w)) \circ T(\psi) \\ &= \gamma'(w) \circ \gamma'(w^*) \circ T(\psi) \\ &= \gamma'(w) \circ T(w^* \wedge \psi). \end{aligned}$$

Questo dimostra che la (\*) vale per  $p = k + 1$  e quindi, per induzione, per ogni  $p = 0, 1, \dots, m$ .

Se  $n$  è dispari, se  $\phi \in \Lambda^p(W^*)$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} T(\gamma_\delta(e_0)(\phi)) &= \delta(-1)^p T(\phi) \\ &= \delta(-1)^p \gamma'(\phi)(z_0) \\ &= (-1)^p \gamma'(\phi) \circ \gamma'(e_0)(z_0) \\ &= \gamma'(e_0) \circ \gamma'(\phi)(z_0) \\ &= \gamma'(e_0)(T(\phi)). \end{aligned}$$

Questo dimostra che  $(S', \gamma')$  è isomorfo allo spazio spinoriale  $(\Lambda^\bullet(W^*), \gamma_\delta)$ .

Rimane da dimostrare che  $(\Lambda^\bullet(W^*), \gamma_+)$  e  $(\Lambda^\bullet(W^*), \gamma_-)$  non sono equivalenti. Se lo fossero ci sarebbe un isomorfismo  $R : \Lambda^\bullet(W^*) \rightarrow \Lambda^\bullet(W^*)$  tale che  $R \circ \gamma_+(v) = \gamma_-(v) \circ R$  per ogni  $v \in V$ . In particolare  $R$  commuta con  $\varepsilon(w^*)$  per ogni  $w^* \in W^*$

e con ogni  $\iota(w)$  con  $w \in W$ . Per l'irriducibilità (Lemma di Schur) ne segue che  $R = \lambda I_{\Lambda^*(W^*)}$ , con  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Ma questo implica che  $\gamma_-(e_0) = \gamma_+(e_0)$  e ci dà quindi una contraddizione.  $\square$

### C. STRUTTURA DELLE ALGEBRE DI CLIFFORD COMPLESSE

**Teorema 6.4.4.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale complesso di dimensione pari  $n = 2m$  e  $\beta$  una forma bilineare simmetrica non degenera su  $V$ . Se  $(S, \gamma)$  è uno spazio di spinori per  $(V, \beta)$ , allora l'applicazione  $\gamma : V \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(S)$  si estende in modo unico a un isomorfismo di algebre associative unitarie*

$$\tilde{\gamma} : \text{Cliff}(V, \beta) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathbb{C}}(S).$$

In particolare  $\text{Cliff}(V, \beta)$  è semplice.

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché la  $\tilde{\gamma} : \text{Cliff}(V, \beta) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathbb{C}}(S)$  è una rappresentazione irriducibile, per il Teorema di Burnside  $\tilde{\gamma}(\text{Cliff}(V, \beta)) = \text{End}_{\mathbb{C}}(S)$ . Quindi, poiché  $S$  ha dimensione  $2^m = 2^{n/2}$ , la dimensione di  $\text{Cliff}(V, \beta)$  è  $\geq \dim_{\mathbb{C}} \text{End}_{\mathbb{C}}(S) = 2^n$ . D'altra parte  $\text{Cliff}(V, \beta)$ , essendo generata dai prodotti  $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$  con  $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ , per una base  $e_1, \dots, e_n$  di  $V$ , ha dimensione  $\leq 2^n$ . Ne segue che  $\text{Cliff}(V, \beta)$  ha dimensione  $2^n$  e la  $\tilde{\gamma}$  è un isomorfismo lineare.  $\square$

**Teorema 6.4.5.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale complesso di dimensione dispari  $n = 2m + 1$  e  $\beta$  una forma bilineare simmetrica non degenera su  $V$ . Se  $(S, \gamma_+)$  ed  $(S, \gamma_-)$  sono due spazi di spinori non equivalenti per  $(V, \beta)$ , definiamo*

$$\gamma : V \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(S) \oplus \text{End}_{\mathbb{C}}(S) \quad \text{mediante} \quad \gamma(v) = \gamma_+(v) \oplus \gamma_-(v) \quad \forall v \in V.$$

Allora la  $\gamma$  si estende in modo unico a un isomorfismo di algebre associative unitarie  $\tilde{\gamma} : \text{Cliff}(V, \beta) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathbb{C}}(S) \oplus \text{End}_{\mathbb{C}}(S)$ . In particolare  $\text{Cliff}(V, \beta)$  è semisemplice ed è somma diretta di due ideali bilateri semplici isomorfi ciascuno a  $\text{End}_{\mathbb{C}}(S)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $W, W^*$  due sottospazi totalmente isotropi massimali di  $V$ , posti in dualità dalla forma  $\beta$  e poniamo, come al punto B,  $S = \Lambda^*(W^*)$ . Fissiamo una base  $w_1, \dots, w_m$  di  $W$  e sia  $w_1^*, \dots, w_m^*$  la base duale in  $W^*$ :  $\beta(w_j, w_h^*) = \delta_{j,h}$  per  $1 \leq j, h \leq m$ . Sia  $w_0 \in (W \oplus W^*)^\perp$  tale che  $\beta(w_0, w_0) = 2$ . Si verifica allora che

$$[\gamma_\pm(w_1), \gamma_\pm(w_1^*)] \circ \cdots \circ [\gamma_\pm(w_m), \gamma_\pm(w_m^*)] = \gamma_+(w_0).$$

Quindi l'immagine  $\tilde{\gamma}(\text{Cliff}(V, \beta))$  contiene l'endomorfismo  $I_S \oplus I_S$ . D'altra parte  $\gamma(w_0) = I_S \oplus (-I_S)$  e quindi l'immagine  $\tilde{\gamma}(\text{Cliff}(V, \beta))$  contiene sia  $I_S \oplus 0$  che  $0 \oplus I_S$ . Per il teorema precedente ne segue che  $\tilde{\gamma}$  è surgettiva e quindi, ripetendo l'argomento alla fine della dimostrazione del teorema precedente, ricaviamo che  $\tilde{\gamma}$  è anche un isomorfismo lineare.  $\square$

**Corollario 6.4.6.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale complesso di dimensione dispari  $n = 2m + 1$  e  $\beta$  una forma bilineare simmetrica non degenera su  $V$ ; siano  $W$  e  $W^*$  sottospazi totalmente isotropi massimali di  $V$  con  $W \cap W^* = \{0\}$  e sia  $V_0 = W \oplus W^* = \{0\}$ . Allora  $\text{Cliff}^+(V, \beta) \simeq \text{Cliff}(V_0, \beta|_{V_0})$ .*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo un'applicazione

$$\varphi : V_0 \ni v \rightarrow i w_0 \otimes v \in \text{Cliff}^+(V, \beta).$$

Essa soddisfa:

$$\begin{aligned} \{\varphi(v_1), \varphi(v_2)\} &= \varphi(v_1) \otimes \varphi(v_2) + \varphi(v_2) \otimes \varphi(v_1) \\ &= -w_0 \otimes v_1 \otimes w_0 \otimes v_2 - w_0 \otimes v_2 \otimes w_0 \otimes v_1 \\ &= (w_0 \otimes w_0) \otimes (v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1) \\ &= \beta(v_1, v_2) 1 \end{aligned}$$

e quindi si estende in modo unico a un'applicazione

$$\tilde{\varphi} : \text{Cliff}(V_0, \beta|_{V_0}) \rightarrow \text{Cliff}^+(V, \beta).$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) &= i^k w_0 \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes w_0 \otimes v_k \\ &= i^{k^2} \rightarrow \underbrace{w_0 \otimes \cdots \otimes w_0}_{k \text{ volte}} \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \end{aligned}$$

Da questo, poiché  $w_0 \otimes w_0 = 1$ , si ricava immediatamente che la  $\tilde{\varphi}$  è iniettiva e quindi anche surgettiva, perché i due spazi hanno entrambi dimensione  $2^{2m}$ .  $\square$

### 6.5. Immersione dell'algebra di Lie ortogonale nell'algebra di Clifford

Supponiamo come in precedenza che  $V$  sia uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita  $n$  e  $\beta$  una forma bilineare simmetrica non degenera su  $V$ .

Definiamo l'algebra di Lie ortogonale complessa  $\mathfrak{o}(V, \beta)$  come la sottoalgebra dell'algebra di Lie  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(V)$  degli endomorfismi complessi di  $V$  formata dagli endomorfismi  $X$  tali che

$$\beta(X(v), w) + \beta(v, X(w)) = 0 \quad \forall v, w \in V.$$

Si può facilmente verificare che  $\mathfrak{o}(V, \beta)$  è l'algebra di Lie del gruppo lineare

$$\mathbf{O}(V, \beta) = \{g \in \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V) \mid \beta(g(v), g(v)) = \beta(v, v) \forall v \in V\}.$$

### 6.6. I gruppi $\mathbf{O}_k(V, \beta)$ , $\mathbf{Pin}_k(V, \beta)$ , $\mathbf{Spin}_k(V, \beta)$

Consideriamo fissata su  $V$  una forma bilineare simmetrica non degenera  $\beta$  e definiamo il gruppo  $\mathbf{O}_k(V, \beta)$  mediante

$$\mathbf{O}_k(V, \beta) = \{g \in \mathbf{GL}_k(V) \mid \beta(g(v_1), g(v_2)) = \beta(v_1, v_2) \forall v_1, v_2 \in V\}.$$

Se  $g \in \mathbf{O}_k(V, \beta)$ , l'applicazione  $V \ni v \rightarrow g(v) \in \text{Cliff}(V, \beta)$  si estende per (C3) a un automorfismo di  $\text{Cliff}(V, \beta)$ . Definiamo su  $\text{Cliff}(V, \beta)$  la trasposizione  $\tau : \text{Cliff}(V, \beta) \rightarrow \text{Cliff}(V, \beta)$  mediante:

$$\tau(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_k \otimes \cdots \otimes v_2 \otimes v_1 \quad \forall v_1, v_2, \dots, v_k \in V.$$

La sua composizione con l'involuzione  $\alpha$  del punto A definisce un'involuzione:

$$\text{Cliff}(V, \beta) \ni u \rightarrow u^* \in \text{Cliff}(V, \beta),$$

$$\text{tale che} \quad (v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)^* = (-1)^k (v_k \otimes \cdots \otimes v_1)$$

$$\forall v_1, \dots, v_k \in V.$$

Osserviamo che per ogni  $v \in V$ :

$$v^* = -v, \quad v \otimes v^* = -\frac{1}{2}\beta(v, v).$$

In particolare, se  $v$  è anisotropo<sup>2</sup> e  $\beta(v, v) = -2$ , otteniamo:  $v \otimes v^* = v^* \otimes v = 1$ , cioè  $v^* = v^{-1}$ . Se  $w \in V$  otteniamo allora:

$$\begin{aligned} \alpha(v) \otimes w \otimes v^* &= (-v) \otimes w \otimes (-v) \\ &= ([v \otimes w + w \otimes v] \otimes v) - w \otimes v \otimes v \\ &= \beta(v, w)v + w \\ &= s_v(w) \end{aligned}$$

ove  $s_v(w) = w - 2\frac{\beta(w, v)}{\beta(v, v)}v = w + \beta(w, v)v$  è la simmetria rispetto al vettore anisotropo  $v$ . Supponiamo ora che  $\beta$  sia una forma bilineare simmetrica non degenera tale che  $-\beta(u, u) \in \{k^2 \mid k \in \mathbb{k}\}$  per ogni  $u \in V$ . Definiamo

$$\mathbf{Pin}_{\mathbb{k}}(V, \beta) = \{x \in \text{Cliff}(V, \beta) \mid x \otimes x^* = 1, \alpha(x) \otimes w \otimes x^* \in V \forall w \in V\}.$$

**Lemma 6.6.1.**  $\mathbf{Pin}_{\mathbb{k}}(V, \beta)$  è un sottogruppo del gruppo degli elementi invertibili di  $\text{Cliff}(V, \beta)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $x_1, x_2 \in \mathbf{Pin}_{\mathbb{k}}(V, \beta)$ . Allora:

$$(x_1 \otimes x_2) \otimes (x_1 \otimes x_2)^* = x_1 \otimes x_2 \otimes x_2^* \otimes x_1^* = x_1 \otimes x_1^* = 1,$$

e se  $w \in V$  abbiamo:

$$\alpha(x_1 \otimes x_2) \otimes w \otimes (x_1 \otimes x_2)^* = \alpha(x_1) \otimes (\alpha(x_2) \otimes w \otimes x_2^*) \otimes x_1^* \in V.$$

Se  $x \in \mathbf{Pin}_{\mathbb{k}}(V, \beta)$ , allora  $x^{-1} = x^*$  implica che  $x^{-1} \otimes (x^{-1})^* = x^* \otimes x^{**} = x^* \otimes x =$

1. Infine, osserviamo che  $\text{Cliff}(V, \beta) \ni y \rightarrow \alpha(x^{-1}) \otimes y \otimes (x^{-1})^* \in \text{Cliff}(V, \beta)$  è l'inversa della:  $\text{Cliff}(V, \beta) \ni y \rightarrow \alpha(x) \otimes y \otimes x^* \in \text{Cliff}(V, \beta)$ . Se quindi quest'ultima è un isomorfismo di  $V$  in sé, anche la sua inversa trasforma  $V$  in sé.  $\square$

Indichiamo con  $\mathbf{O}_{\mathbb{k}}(V, \beta)$  il gruppo ortogonale:

$$\mathbf{O}_{\mathbb{k}}(V, \beta) = \{a \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V) \mid \beta(a(v), a(w)) = \beta(v, w) \forall v, w \in V\}$$

e mediante  $\mathbf{SO}_{\mathbb{k}}(V, \beta)$  il gruppo speciale ortogonale:

$$\mathbf{SO}_{\mathbb{k}}(V, \beta) = \{a \in \mathbf{O}_{\mathbb{k}}(V, \beta) \mid \det(a) = 1\}.$$

Vale il seguente:

**Teorema 6.6.2.** Vi è un unico omomorfismo di gruppi

$$\rho : \mathbf{Pin}_{\mathbb{k}}(V, \beta) \rightarrow \mathbf{O}_{\mathbb{k}}(V, \beta)$$

tale che

$$\rho(x)(v) = \alpha(x) \otimes v \otimes x^* \quad \forall x \in \mathbf{Pin}_{\mathbb{k}}(V, \beta), \forall v \in V.$$

<sup>2</sup> Se  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ , o più in generale un campo di quadrati, per ogni  $u \in V$  anisotropo, vi sono esattamente due elementi  $\pm k \in \mathbb{k}$  tali che  $v = \pm ku$  verifica la condizione  $\beta(v, v) = -2$ . Lo stesso succede se  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  e  $\beta$  è definita negativa.

L'omomorfismo  $\rho$  è surgettivo e  $\ker \rho = \{\pm 1\}$ . Inoltre,

$$\rho^{-1}(\mathbf{SO}_{\mathbb{K}}(V, \beta)) = \mathbf{Pin}_{\mathbb{K}}(V, \beta) \cap \text{Cliff}^+(V, \beta) \xrightarrow[\text{def}]{} \mathbf{Spin}_{\mathbb{K}}(V, \beta).$$

Se  $V = \mathbb{R}^n$  e  $\beta = -(\cdot | \cdot)$  è l'opposto del prodotto scalare, scriviamo  $\mathbf{Pin}(n)$  e  $\mathbf{Spin}(n)$  invece di  $\mathbf{Pin}_{\mathbb{R}}(V, \beta)$  e  $\mathbf{Spin}_{\mathbb{R}}(V, \beta)$ . In questo caso  $\rho$  è un rivestimento a due fogli di  $\mathbf{O}(n)$  e quindi i gruppi  $\mathbf{Pin}(n)$  e  $\mathbf{Spin}(n)$  sono gruppi topologici compatti. Il gruppo  $\mathbf{Spin}(n)$  è semplicemente connesso ed è la componente connessa dell'identità in  $\mathbf{Pin}(n)$ .



## CAPITOLO VII

### Algebre di Lie

Prima di proseguire lo studio dei gruppi di Lie ed in particolare dei gruppi di Lie lineari, è conveniente raccogliere in questo capitolo alcune delle definizioni generali e delle proprietà più importanti delle algebre di Lie astratte.

#### 7.1. Nozioni fondamentali

Sia  $\mathbb{k}$  un campo. Un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  è uno spazio vettoriale  $\mathfrak{g}$  su  $\mathbb{k}$  su cui è assegnata un'operazione binaria (*commutatore*):

$$(7.1.1) \quad \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \longrightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$$

che gode delle seguenti proprietà:

$$(7.1.2) \quad \text{l'operazione } (X, Y) \rightarrow [X, Y] \text{ è } \mathbb{k}\text{-bilineare,}$$

$$(7.1.3) \quad [X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

$$(7.1.4) \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

(IDENTITÀ DI JACOBI).

**Osservazione 7.1.1.** Osserviamo che (7.1.3) implica che

$$(7.1.5) \quad [X, Y] = -[Y, X] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

e le due condizioni sono equivalenti se  $\mathbb{k}$  ha caratteristica  $\neq 2$ .

**Esempio 7.1.2.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{k}$ . Se poniamo  $[v, w] = 0$  per ogni  $v, w \in V$ , questo prodotto definisce su  $V$  una struttura di algebra di Lie.

In generale

**Definizione 7.1.3.** Chiamiamo algebra di Lie *abeliana* o *commutativa* un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  in cui il commutatore di due qualsiasi elementi sia nullo.

Dati due sottospazi vettoriali  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  di un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , indichiamo con  $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$  il sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{g}$  generato dai vettori della forma  $[X, Y]$  con  $X \in \mathfrak{A}$ ,  $Y \in \mathfrak{B}$ .

Per la (7.1.5), abbiamo  $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = [\mathfrak{B}, \mathfrak{A}]$ .

**Definizione 7.1.4.** Un sottoinsieme  $\mathfrak{a}$  di  $\mathfrak{g}$  si dice una *sottoalgebra di Lie* di  $\mathfrak{g}$  se è un sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{g}$  e  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$ ; un *ideale* di  $\mathfrak{g}$  se è una sottoalgebra ed inoltre  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$ .

Osserviamo che  $\{0\}$  e  $\mathfrak{g}$  sono ideali (banali) di  $\mathfrak{g}$ .

**Lemma 7.1.5.** Se  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  sono ideali di  $\mathfrak{g}$ , anche  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$  e  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$  sono ideali di  $\mathfrak{g}$ .

**Lemma 7.1.6.** *Sono ideali di  $\mathfrak{g}$  sono il suo centro  $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  e il suo derivato  $\mathfrak{g}^{(1)}$ , definiti da*

$$(7.1.6) \quad Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\},$$

$$(7.1.7) \quad \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

**Lemma 7.1.7.** *Se  $\alpha$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}$ , il suo normalizzatore in  $\mathfrak{g}$*

$$(7.1.8) \quad N_{\mathfrak{g}}(\alpha) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] \in \alpha \quad \forall Y \in \alpha\}$$

*è ancora una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}$ ; essa contiene  $\alpha$  ed è la più grande sottoalgebra di  $\mathfrak{g}$  che contiene  $\alpha$  come ideale.*

*Analogamente il centralizzatore di  $\alpha$  in  $\mathfrak{g}$*

$$(7.1.9) \quad C_{\mathfrak{g}}(\alpha) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \alpha\}$$

*è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}$ .*

**Definizione 7.1.8.** Siano  $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$  due algebre di Lie sullo stesso campo  $\mathbb{k}$ . Un'applicazione  $\phi : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$  si dice un *morfismo di algebre di Lie* se è  $\mathbb{k}$ -lineare e soddisfa inoltre:

$$(7.1.10) \quad \phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{f}.$$

**Lemma 7.1.9.** *Sia  $\phi : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$  un morfismo di algebre di Lie su  $\mathbb{k}$ . Allora  $\phi(\mathfrak{f})$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}$  e  $\ker \phi$  è un ideale di  $\mathfrak{f}$ .*

**Lemma 7.1.10.** *Se  $\alpha$  è un ideale dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , allora vi è un'unica struttura di algebra di Lie sul quoziente  $\mathfrak{g}/\alpha$  che renda la proiezione naturale  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\alpha$  un morfismo di algebre di Lie.*

**Definizione 7.1.11.** Con questa struttura  $\mathfrak{g}/\alpha$  si dice l'*algebra di Lie quoziente* di  $\mathfrak{g}$  rispetto all'ideale  $\alpha$ .

**Definizione 7.1.12.** Un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  si dice *semplice* se non è commutativa e non contiene ideali non banali.

## 7.2. Algebre di Lie lineari, derivazioni, rappresentazione aggiunta

Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{k}$ . Lo spazio vettoriale  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  di tutti gli endomorfismi  $\mathbb{k}$ -lineari di  $V$  è un'algebra di Lie con il prodotto definito da

$$(7.2.1) \quad [A, B] = A \circ B - B \circ A \quad \forall A, B \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V).$$

Con la struttura di algebra di Lie, esso si indica con  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ . Se  $V = \mathbb{k}^n$ , scriviamo  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$  invece di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^n)$ . Ogni sottoalgebra di un'algebra di Lie  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  si dice un'*algebra di Lie lineare*.

Un teorema di Ado-Iwasawa dice che *ogni algebra di Lie di dimensione finita è isomorfa a un'algebra di Lie lineare*.

Esempi importanti di algebre di Lie lineari sono i seguenti, ove  $V = \mathbb{k}^n$ ,  $1 \leq n < \infty$ :

$$(A_{\ell}) \quad \mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{k}) = \{X \in \mathfrak{gl}(\ell + 1, \mathbb{k}) \mid \text{tr}(X) = 0\};$$

( $B_\ell$ )  $\mathfrak{so}(\ell, \ell + 1; \mathbb{k})$ : trasformazioni antisimmetriche rispetto a una forma bilineare simmetrica con indice di Witt  $\ell$  in uno spazio vettoriale di dimensione dispari  $n = 2\ell + 1$ ; qui dobbiamo supporre che  $\mathbb{k}$  abbia caratteristica  $\neq 2$ ;

( $C_\ell$ )  $\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{k})$ : trasformazioni simpletiche, cioè che soddisfano

$$a(X(v), w) + a(v, X(w)) = 0 \quad \forall v, w \in V$$

per una forma alternata non degenera  $a$  su uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione pari  $n = 2\ell$  su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica  $\neq 2$ ;

( $D_\ell$ )  $\mathfrak{so}(\ell, \ell; \mathbb{k})$ : trasformazioni antisimmetriche rispetto a una forma bilineare simmetrica con indice di Witt  $\ell$  in uno spazio vettoriale di dimensione pari  $n = 2\ell$ ; anche qui dobbiamo supporre che caratteristica( $\mathbb{k}$ )  $\neq 2$ ;

- l'algebra  $\mathfrak{t}_+(n, \mathbb{k})$  delle matrici triangolari superiori a coefficienti in  $\mathbb{k}$ ;
- l'algebra  $\mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k})$  delle matrici triangolari superiori a coefficienti in  $\mathbb{k}$  con diagonale principale nulla;
- l'algebra  $\mathfrak{t}_-(n, \mathbb{k})$  delle matrici triangolari inferiori a coefficienti in  $\mathbb{k}$ ;
- l'algebra  $\mathfrak{n}_-(n, \mathbb{k})$  delle matrici triangolari inferiori a coefficienti in  $\mathbb{k}$  con diagonale principale nulla;
- l'algebra  $\mathfrak{d}(n, \mathbb{k})$  delle matrici diagonali a coefficienti in  $\mathbb{k}$ .

Notiamo che

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_+(n, \mathbb{k}) &= \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{d}(n, \mathbb{k}), \\ \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k}) &= [\mathfrak{t}_+(n, \mathbb{k}), \mathfrak{t}_+(n, \mathbb{k})], \\ \mathfrak{t}_-(n, \mathbb{k}) &= \mathfrak{n}_-(n, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{d}(n, \mathbb{k}), \\ \mathfrak{n}_-(n, \mathbb{k}) &= [\mathfrak{t}_-(n, \mathbb{k}), \mathfrak{t}_-(n, \mathbb{k})]. \end{aligned}$$

Sia  $\mathfrak{A}$  un'algebra su  $\mathbb{k}$ , con prodotto  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (a, b) \rightarrow a \cdot b \in \mathfrak{A}$ .

**Definizione 7.2.1.** Una *derivazione* di  $\mathfrak{A}$  è un'applicazione  $\mathbb{k}$ -lineare  $D : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  che soddisfa l'*identità di Leibniz*:

$$(7.2.2) \quad D(a \cdot b) = (D(a)) \cdot b + a \cdot (D(b)) \quad \forall a, b \in \mathfrak{A}.$$

Indichiamo con  $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{A})$  l'insieme delle derivazioni di  $\mathfrak{A}$ .

Si verifica facilmente che

**Lemma 7.2.2.**  $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{A})$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{A})$  e quindi un'algebra di Lie lineare.

Consideriamo in particolare l'algebra di Lie delle derivazioni di una  $\mathbb{k}$ -algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ .

**Lemma 7.2.3.** Fissato  $X \in \mathfrak{g}$ , l'applicazione

$$(7.2.3) \quad \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X) : \mathfrak{g} \ni Y \rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$$

è  $\mathbb{k}$ -lineare ed è una derivazione.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo l'identità di Jacobi:

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)([Y, Z]) &= [X, [Y, Z]] = -[Y, [Z, X]] - [Z, [X, Y]] \\ &= [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \\ &= [\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(Y), Z] + [Y, \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(Z)] \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

□

**Definizione 7.2.4.** Le derivazioni della forma  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ , al variare di  $X$  in  $\mathfrak{g}$ , si dicono *derivazioni interne* di  $\mathfrak{g}$ .

**Lemma 7.2.5.** *L'applicazione*

$$(7.2.4) \quad \text{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X) \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$$

è un morfismo di algebre di Lie. Le derivazioni interne formano un ideale dell'algebra di Lie  $\text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ .

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se  $D \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$  e  $X \in \mathfrak{g}$  abbiamo, per ogni  $Y \in \mathfrak{g}$ :

$$\begin{aligned} [D, \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)](Y) &= D([X, Y]) - [X, D(Y)] \\ &= [D(X), Y] + [X, D(Y)] - [X, D(Y)] \\ &= \text{ad}_{\mathfrak{g}}(D(X))(Y). \end{aligned}$$

Quindi

$$(7.2.5) \quad [D, \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)] = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(D(X)) \quad \forall D \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}), \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

dimostra che  $[\text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}), \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})] \subset \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ .

□

**Definizione 7.2.6.** La (7.2.4) si dice *rappresentazione aggiunta* di  $\mathfrak{g}$ .

**Lemma 7.2.7.** *Il nucleo della rappresentazione aggiunta è il centro  $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  di  $\mathfrak{g}$ .*

**Definizione 7.2.8.** Gli elementi di  $\text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$  che non appartengono ad  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  si dicono *derivazioni esterne* di  $\mathfrak{g}$ .

L'ideale delle derivazioni interne di  $\mathfrak{g}$  si indica anche con  $\text{int}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ .

Un ideale di  $\mathfrak{g}$  è un suo sottospazio vettoriale che è trasformato in sé da tutte le derivazioni interne.

**Definizione 7.2.9.** Un ideale  $\alpha$  di  $\mathfrak{g}$  si dice *caratteristico* se è trasformato in sé da tutte le derivazioni di  $\mathfrak{g}$ .

**Lemma 7.2.10.** *Il centro  $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  e il derivato  $\mathfrak{g}^{(1)}$  sono ideali caratteristici di  $\mathfrak{g}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se  $D \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ , abbiamo

$$\begin{aligned} [D(X), Y] &= D([X, Y]) - [X, D(Y)] = 0, \quad \forall X \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}), \quad \forall Y \in \mathfrak{g} \\ &\implies D(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})) \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D([X, Y]) &= [D(X), Y] + [X, D(Y)] \in \mathfrak{g}^{(1)}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \\ &\implies D(\mathfrak{g}^{(1)}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}. \end{aligned}$$

□

Osserviamo che, se  $\mathfrak{g}$  è semplice, allora il morfismo  $\text{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{int}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$  è un isomorfismo: quindi

**Proposizione 7.2.11.** *Ogni algebra di Lie semplice è isomorfa in modo naturale ad un'algebra di Lie lineare.*

**Esempio 7.2.12.** Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$ . Lo spazio  $\mathcal{E}(M; \mathbb{R})$  delle funzioni differenziabili di classe  $\mathcal{C}^{\infty}$ , a valori reali, definite su  $M$  è un'algebra reale per il prodotto di funzioni. L'algebra di Lie reale  $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}(M, \mathbb{R}))$  è l'algebra  $\mathfrak{X}(M)$  dei campi di vettori (di classe  $\mathcal{C}^{\infty}$ ) su  $M$ .

### 7.3. Rappresentazioni lineari

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie sul campo  $\mathbb{k}$ .

**Definizione 7.3.1.** Una *rappresentazione lineare* di  $\mathfrak{g}$  è il dato di uno spazio vettoriale  $V$  sul campo  $\mathbb{k}$  e di un morfismo di algebre di Lie

$$(7.3.1) \quad \rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V).$$

In questo caso diciamo anche che  $V$ , con la struttura data dall'operazione:

$$(7.3.2) \quad \mathfrak{g} \times V \ni (X, v) \longrightarrow \rho(X)(v) \in V$$

è un  $\mathfrak{g}$ -modulo.

Quando ciò non provochi confusione, scriveremo anche  $X \cdot v$  oppure  $Xv$  invece di  $\rho(X)(v)$ .

La rappresentazione aggiunta, discussa nel paragrafo precedente, è un esempio di rappresentazione.

Un altro esempio di rappresentazione lineare è la *rappresentazione banale*: dato un qualsiasi spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{k}$  si fa corrispondere ad ogni  $X$  di  $\mathfrak{g}$  l'endomorfismo nullo di  $V$ .

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$  e (7.3.1) una sua rappresentazione lineare di dimensione finita.

**Definizione 7.3.2.** Diciamo che  $\rho$  (o il corrispondente  $\mathfrak{g}$ -modulo  $V$ ) è *riducibile* se esiste un sotto- $\mathfrak{g}$ -modulo proprio non banale  $W$  di  $V$ ; altrimenti la  $\rho$  si dice *irriducibile* o *semplice*.

Diciamo che  $\rho$  (o il corrispondente  $\mathfrak{g}$ -modulo  $V$ ) è *decomponibile* se  $V$  è somma diretta di due sotto- $\mathfrak{g}$ -moduli  $W_1, W_2$  non banali:  $V = W_1 \oplus W_2$  con  $W_1, W_2 \neq \{0\}$ . È *indecomponibile* se non è decomponibile.

Infine, diciamo che  $\rho$  (o il  $\mathfrak{g}$ -modulo  $V$ ) è *completamente riducibile* o *completamente decomponibile* o *semisemplice* se  $V$  è somma diretta di sotto- $\mathfrak{g}$ -moduli semplici.

Vale il:

**Teorema 7.3.3** (Lemma di Schur). *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita  $n$  su  $\mathbb{k}$  e  $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una sua rappresentazione lineare di dimensione finita irriducibile. Se  $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  è diversa da 0 e soddisfa:*

$$(7.3.3) \quad [A, \rho(X)] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

allora è un endomorfismo semisemplice invertibile.

Se  $\mathbb{k}$  è algebricamente chiuso, allora  $A$  è un multiplo dell'identità.

In generale, il commutatore di  $\rho(\mathfrak{g})$  in  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$

$$(7.3.4) \quad \mathbb{K}_\rho = \{A \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V) \mid [A, \rho(\mathfrak{g})] = 0\}$$

è un corpo (non necessariamente commutativo) ed è un'estensione di dimensione finita di  $\mathbb{k}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $A \neq 0$ , lo spazio vettoriale  $V$  ha dimensione positiva. Sia  $p$  un fattore primo del polinomio minimo di  $A$  e poniamo

$$V_p = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \ker p(A)^h, \quad W = \ker p(A).$$

Allora  $W$  e  $V_p$  sono sottospazi  $\mathfrak{g}$ -invarianti di  $V$ , di dimensione positiva, con  $W \subset V_p$ . Per l'irriducibilità di  $\rho$ , deve essere  $W = V_p = V$  e questo dimostra che  $A$  è semisemplice e il suo spettro contiene un solo ideale primo di  $\mathbb{k}[x]$ .

Per la prima parte della dimostrazione ogni elemento diverso da 0 di  $\mathbb{K}_\rho$  è invertibile e quindi  $\mathbb{K}_\rho$  è un corpo.  $\square$

**Osservazione 7.3.4.** Se  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  è il campo dei numeri complessi e (7.3.1) una rappresentazione irriducibile di  $\mathfrak{g}$ , allora  $\mathbb{K}_\mathfrak{g} \simeq \mathbb{C}$ .

**Osservazione 7.3.5.** Se  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  è il campo dei numeri reali, il commutatore  $\mathbb{K}_\rho$  per una rappresentazione irriducibile  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$  di  $\mathfrak{g}$  può essere  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , oppure  $\mathbb{H}$ . Le rappresentazioni irriducibili di un'algebra di Lie reale si dividono quindi nei tipi reale, complesso, quaternionico.

Ad esempio, le rappresentazioni naturali di

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}(n) &\subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \\ \mathfrak{u}(n) &\subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}), \\ \mathfrak{sp}(n) &\subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(4n, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

sono rispettivamente di tipo reale, complesso e quaternionico.

Per distinguere i diversi casi, si considera la *complessificazione*  $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$  di  $\mathfrak{g}$  e la corrispondente rappresentazione complessa  $\tilde{\rho} : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\tilde{V})$ , dove  $\tilde{V} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$  è la complessificazione dello spazio vettoriale reale  $V$ .

La  $\rho$  è reale se  $\tilde{\rho}$  è irriducibile.

Altrimenti la  $\tilde{\rho}$  si decompone nella somma diretta di due rappresentazioni complesse irriducibili: se esse sono isomorfe, allora la  $\rho$  è di tipo quaternionico; se esse non sono isomorfe, allora la  $\rho$  è di tipo complesso.

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita  $\mathbb{k}$  e  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una rappresentazione lineare di dimensione finita. Allora anche la

$$(7.3.5) \quad \rho^* : \mathfrak{g} \ni X \rightarrow -{}^t\rho(X) \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V^*),$$

ove  $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$  è il duale dello spazio vettoriale  $V$ , è una rappresentazione lineare di dimensione finita.

**Definizione 7.3.6.** La (7.3.5) si dice la rappresentazione *controgradiente*, o *duale*, di  $\rho$ .

A due rappresentazioni lineari di dimensione finita  $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ ,  $\rho_W : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(W)$  possiamo associare il loro *prodotto tensoriale*

$$(7.3.6) \quad \rho_V \otimes \rho_W : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V \otimes_{\mathbb{k}} W),$$

definito da

$$\begin{aligned} \rho_V \otimes \rho_W(X)(v \otimes w) &= \rho_V(X)(v) \otimes w + v \otimes \rho_W(X)(w) \\ &\forall X \in \mathfrak{g}, \forall v \in V, \forall w \in W. \end{aligned}$$

Utilizzando la rappresentazione controgradiente e l'identificazione dello spazio  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$  con il prodotto tensoriale  $W \otimes V^*$ , si ottiene la rappresentazione

$$(7.3.7) \quad \rho_{\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W))$$

definita da

$$(7.3.8) \quad \begin{aligned} \rho_{\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)}(X) &= \rho_W(X) \circ A - A \circ \rho_V(X) \\ &\forall X \in \mathfrak{g}, \forall A \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W). \end{aligned}$$

In particolare la  $\rho_V$  induce una rappresentazione  $\rho_{\text{End}_{\mathbb{k}}(V)}$  su  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  definita da

$$(7.3.9) \quad \begin{aligned} \rho_{\text{End}_{\mathbb{k}}(V)}(X)(A) &= \rho_V(X) \circ A - A \circ \rho_V(X) \\ &\forall X \in \mathfrak{g}, \forall A \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V). \end{aligned}$$

#### 7.4. Forme invarianti

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$ .

**Definizione 7.4.1.** Una forma bilineare  $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$  si dice *invariante* se soddisfa

$$(7.4.1) \quad \beta([X, Y], Z) + \beta(Y, [X, Z]) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Una forma bilineare  $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$  si dice *completamente invariante* se soddisfa

$$(7.4.2) \quad \beta(D(X), Y) + \beta(X, D(Y)) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall D \in \text{Der}(\mathfrak{g}).$$

**Esempio 7.4.2.** L'applicazione

$$(7.4.3) \quad \beta(X, Y) = \text{traccia}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$$

è una forma bilineare simmetrica, invariante su  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ .

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \text{traccia}([X, Y]Z) &= \text{traccia}(XYZ) - \text{traccia}(YXZ) \\ &= \text{traccia}(YZX) - \text{traccia}(YXZ) = -\text{traccia}(Y[X, Z]). \end{aligned}$$

Dalla discussione dell'Esempio 7.4.2 otteniamo subito:

**Proposizione 7.4.3.** Se  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  è una rappresentazione lineare di dimensione finita di  $\mathfrak{g}$ , allora

$$(7.4.4) \quad \kappa_V(X, Y) = \text{traccia}(\rho(X)\rho(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

è una forma bilineare invariante su  $\mathfrak{g}$ . □

**Definizione 7.4.4.** Se  $\mathfrak{g}$  ha dimensione finita, la forma invariante

$$(7.4.5) \quad \kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{traccia}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

si dice la *forma di Killing* di  $\mathfrak{g}$ .

**Lemma 7.4.5.** Supponiamo che  $\mathfrak{g}$  abbia dimensione finita. Se  $\alpha$  è un ideale di  $\mathfrak{g}$ , allora la forma di Killing  $\kappa_{\alpha}$  di  $\alpha$  è la restrizione ad  $\alpha$  della forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  di  $\mathfrak{g}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Se infatti scegliamo una base  $E_1, \dots, E_n$  di  $\mathfrak{g}$  per cui  $E_1, \dots, E_m$  sia una base di  $\alpha$ , le trasformazioni  $\text{ad}(X)$ , con  $X \in \alpha$ , hanno matrici associate

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con  $A$  matrice  $m \times m$ , e matrici nulle  $0$  di tipi  $m \times (n - m)$ ,  $(n - m) \times m$  ed  $(n - m) \times (n - m)$ . Poiché la  $A$  è la matrice di  $\text{ad}_{\alpha}(X)$  nella base  $E_1, \dots, E_m$ , la tesi segue facilmente.  $\square$

**Proposizione 7.4.6.** Supponiamo che  $\mathfrak{g}$  abbia dimensione finita. La sua forma di Killing è completamente invariante.

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo  $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \text{Der}(\mathfrak{g})$ . Possiamo definire su  $\tilde{\mathfrak{g}}$  una struttura di algebra di Lie con il prodotto definito dalle:

$$\begin{cases} \llbracket X, Y \rrbracket = [X, Y] & \text{se } X, Y \in \mathfrak{g}, \\ \llbracket D, X \rrbracket = D(X) & \text{se } X \in \mathfrak{g}, D \in \text{Der}(\mathfrak{g}), \\ \llbracket D_1, D_2 \rrbracket = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 & \text{se } D_1, D_2 \in \text{Der}(\mathfrak{g}). \end{cases}$$

Poiché  $\mathfrak{g}$  è allora un ideale di  $\tilde{\mathfrak{g}}$ , la tesi segue dalla Proposizione 7.4.3 e dal Lemma 7.4.5.  $\square$

## 7.5. Automorfismi

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$ .

**Definizione 7.5.1.** Un automorfismo  $\alpha$  di  $\mathfrak{g}$  è un isomorfismo dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  con se stessa. Con il prodotto di composizione, gli automorfismi dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  formano un gruppo, che indicheremo con  $\text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ .

**Definizione 7.5.2.** Un elemento  $X$  dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  si dice *ad-nilpotente* se  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$  è nilpotente.

Se il campo  $\mathbb{k}$  ha caratteristica  $0$ , ed  $X \in \mathfrak{g}$  è ad-nilpotente possiamo definire l'*esponenziale* di  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$  mediante:

$$(7.5.1) \quad \exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X))^h}{h!}.$$

Poiché abbiamo supposto  $X$  ad-nilpotente, la somma a secondo membro della (7.5.1) contiene solo un numero finito di termini non nulli. Essa definisce quindi un'applicazione  $\mathbb{k}$ -lineare su  $\mathfrak{g}$ , che è un automorfismo di  $\mathfrak{g}$ .

Più in generale vale il:

**Lemma 7.5.3.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie sul campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica 0 e  $D$  una derivazione nilpotente di  $\mathfrak{g}$ . Allora*

$$(7.5.2) \quad \exp(D) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{D^h}{h!}$$

è un automorfismo di  $\mathfrak{g}$ .

DIMOSTRAZIONE. Vale la formula di Leibnitz:

$$D^n([X, Y]) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} [D^m(X), D^{n-m}(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \exp(D)([X, Y]) &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{D^h([X, Y])}{h!} \\ &= \sum_{h', h''=0}^{\infty} \frac{1}{h'! h''!} [D^{h'}(X), D^{h''}(Y)] \\ &= [\exp(D)(X), \exp(D)(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

ove tutte le sommatorie hanno significato perché contengono soltanto un numero finito di termini non nulli.

Infine  $\exp(D)$  è invertibile ed  $\exp(D)^{-1} = \exp(-D)$  mostra che anche l'inversa è un morfismo dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  in sé.  $\square$

**Definizione 7.5.4.** Gli automorfismi che sono composizione di un numero finito di automorfismi della forma  $\exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X))$ , con  $X$  elemento ad-nilpotente di  $\mathfrak{g}$ , si dicono *elementari*.

Indicheremo con  $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$  il gruppo degli automorfismi elementari di  $\mathfrak{g}$ .

**Lemma 7.5.5.** *Il gruppo  $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$  degli automorfismi elementari di  $\mathfrak{g}$  è un sottogruppo normale di  $\text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ .*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se  $X \in \mathfrak{g}$  è un elemento ad-nilpotente ed  $\alpha \in \text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ , allora  $\alpha(X)$  è ancora un elemento ad-nilpotente di  $\mathfrak{g}$  e

$$\alpha \circ \exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)) \circ \alpha^{-1} = \exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\alpha(X))).$$

$\square$

## 7.6. Algebre di Lie risolubili

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ .

**Definizione 7.6.1.** La sequenza decrescente di ideali

$$(7.6.1) \quad \mathfrak{g} = D^0\mathfrak{g} \supset D^1\mathfrak{g} \supset \cdots \supset D^h\mathfrak{g} \supset D^{h+1}\mathfrak{g} \supset \cdots$$

definita da

$$(7.6.2) \quad \begin{cases} D^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \\ D^{m+1}\mathfrak{g} = [D^m\mathfrak{g}, D^m\mathfrak{g}] \end{cases} \quad \forall m \geq 0.$$

si dice *serie derivata* di  $\mathfrak{g}$ .

**Definizione 7.6.2.** Diciamo che  $\mathfrak{g}$  è *risolubile* se  $D^n \mathfrak{g} = \{0\}$  per qualche intero non negativo  $n$ .

Ad esempio, l'algebra  $\mathfrak{t}(n, \mathbb{k})$  delle matrici triangolari superiori con coefficienti nel campo  $\mathbb{k}$  è un'algebra di Lie risolubile.

**Teorema 7.6.3.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ .

- (1) Se  $\mathfrak{g}$  è risolubile, allora ogni sottoalgebra  $\mathfrak{a}$  di  $\mathfrak{g}$  è risolubile ed ogni immagine di  $\mathfrak{g}$  mediante un morfismo di algebre di Lie è un'algebra di Lie risolubile.
- (2) Se  $\mathfrak{a}$  è un ideale risolubile di  $\mathfrak{g}$  e l'algebra quoziente  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  è risolubile, allora  $\mathfrak{g}$  è risolubile.
- (3) Se  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  sono ideali risolubili di  $\mathfrak{g}$ , allora  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$  è un ideale risolubile di  $\mathfrak{g}$ .

**Definizione 7.6.4.** In particolare, ogni algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di dimensione finita contiene un ideale risolubile massimale rispetto all'inclusione. Esso si dice il *radicale* di  $\mathfrak{g}$  e si indica con  $\text{rad}(\mathfrak{g})$ .

### 7.7. Algebre di Lie semisemplici

**Definizione 7.7.1.** Un'algebra di Lie di dimensione finita  $\mathfrak{g}$  per cui sia  $\text{rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$  si dice *semisemplice*.

Osserviamo che l'algebra quoziente  $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$  è semisemplice.

Vale il fondamentale risultato:

**Teorema 7.7.2** (Decomposizione di Levi-Malcev). Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita. Allora  $\mathfrak{g}$  contiene una sottoalgebra semisemplice  $\mathfrak{l}$  tale che

$$(7.7.1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \text{rad}(\mathfrak{g})$$

**Definizione 7.7.3.** Una sottoalgebra semisemplice  $\mathfrak{l}$  di  $\mathfrak{g}$  per cui valga la (7.7.1) si dice una *sottoalgebra di Levi* di  $\mathfrak{g}$ .

### 7.8. Algebre di Lie nilpotenti

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo  $\mathbb{k}$ . Si dice *serie centrale discendente* di  $\mathfrak{g}$  la sequenza di ideali di  $\mathfrak{g}$

$$(7.8.1) \quad \mathfrak{g} = C^0 \mathfrak{g} \supset C^1 \mathfrak{g} \supset \cdots \supset C^h \mathfrak{g} \supset C^{h+1} \mathfrak{g} \supset \cdots$$

definiti per ricorrenza da:

$$(7.8.2) \quad \begin{cases} C^0 \mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \\ C^{h+1} \mathfrak{g} = [C^h \mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \end{cases} \quad \text{per } h \geq 0.$$

Diciamo che  $\mathfrak{g}$  è *nilpotente* se  $C^n \mathfrak{g} = \{0\}$  per qualche intero non negativo  $n$ . Poiché  $D^m \mathfrak{g} \subset C^m \mathfrak{g}$  per ogni  $m \in \mathbb{N}$ , un'algebra di Lie nilpotente è anche risolubile.

L'algebra di Lie lineare  $\mathfrak{n}(n, \mathbb{k})$  è un esempio di algebra di Lie nilpotente.

**Teorema 7.8.1.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ .

- (1) Se  $\mathfrak{g}$  è nilpotente, allora ogni sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}$  ed ogni immagine di  $\mathfrak{g}$  mediante un morfismo di algebre di Lie è nilpotente.

(2)  $\mathfrak{g}$  è nilpotente se e soltanto se  $\mathfrak{g}/Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  è nilpotente.

(3) Se  $\mathfrak{g} \neq \{0\}$  ed è nilpotente, allora  $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La (1) e la (2) sono immediate. Per la (3) osserviamo che se  $\mathfrak{g}$  è nilpotente ed  $h$  è il più grande intero non negativo per cui  $C^h \mathfrak{g} \neq \{0\}$ , allora  $C^h \mathfrak{g} \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ .  $\square$

### 7.9. Il teorema di Engel

**Lemma 7.9.1.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ . Se  $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  è nilpotente, allora anche  $\text{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)}(A)$  è nilpotente.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $L_A$  e  $R_A$  gli endomorfismi di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  definiti rispettivamente da:

$$\begin{cases} L_A(X) = A \circ X & \forall X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V) \\ R_A(X) = X \circ A & \forall X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V). \end{cases}$$

Chiaramente  $L_A$  ed  $R_A$  sono nilpotenti e commutano tra loro. Quindi anche

$$\text{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)}(A) = L_A - R_A$$

è nilpotente.  $\square$

**Teorema 7.9.2.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n \geq 1$  su  $\mathbb{k}$ . Sia  $\alpha$  una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  formata da elementi nilpotenti. Allora esiste un vettore  $v \in V \setminus \{0\}$  tale che  $A(v) = 0$  per ogni  $A \in \alpha$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Ragioniamo per induzione su  $m = \dim_{\mathbb{k}}(\alpha)$ . Se  $m \leq 1$ , la tesi è banalmente vera. Supponiamo quindi  $m > 1$  e il teorema valido per algebre di Lie di dimensione  $< m$  di endomorfismi nilpotenti di uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Sia  $\mathfrak{b}$ , con  $\{0\} \subsetneq \mathfrak{b} \subsetneq \alpha$ , una sottoalgebra di Lie di  $\alpha$ . Per il Lemma 14.2.2,  $\text{ad}_{\alpha}(\mathfrak{b})$  è un'algebra di Lie di endomorfismi nilpotenti di  $\alpha$ . Per passaggio al quoziente, gli elementi di  $\mathfrak{b}$  definiscono un'algebra di Lie di endomorfismi nilpotenti di  $\alpha/\mathfrak{b}$ . Per l'ipotesi induttiva esiste allora  $A \in \alpha \setminus \mathfrak{b}$  tale che  $[\mathfrak{b}, A] \subset \mathfrak{b}$ . In particolare  $N_{\alpha}(\mathfrak{b}) \supseteq \mathfrak{b}$ .

Scegliamo ora la sottoalgebra  $\mathfrak{b}$  massimale tra le sottoalgebre di Lie propriamente contenute in  $\alpha$ . Per le considerazioni precedenti deve essere  $N_{\alpha}(\mathfrak{b}) = \alpha$  e quindi  $\mathfrak{b}$  è un ideale di  $\alpha$ . Consideriamo il morfismo di algebre di Lie  $\pi : \alpha \rightarrow \alpha/\mathfrak{b}$ . Se  $\alpha/\mathfrak{b}$  avesse dimensione maggiore di 1, l'immagine inversa  $\pi^{-1}(1)$  di una retta  $1$  di  $\alpha/\mathfrak{b}$  sarebbe una sottoalgebra di  $\alpha$  con  $\mathfrak{b} \subsetneq \pi^{-1}(1) \subsetneq \alpha$ . Questo è assurdo per la massimalità di  $\mathfrak{b}$  e quindi  $\dim_{\mathbb{k}} \alpha/\mathfrak{b} = 1$ .

Dunque, se  $A \in \alpha \setminus \mathfrak{b}$ , abbiamo

$$\alpha = \mathfrak{b} \oplus \mathbb{k}A.$$

Sia  $W = \{v \in V \mid B(v) = 0, \forall B \in \mathfrak{b}\}$ . Per l'ipotesi induttiva  $\dim_{\mathbb{k}} W > 0$ . Inoltre, poiché  $\mathfrak{b}$  è un ideale di  $\alpha$ , abbiamo  $A(W) \subset W$ . Infatti  $B(A(w)) = A(B(w)) + [B, A](w) = 0$  per ogni  $w \in W$  e  $B \in \mathfrak{b}$ . La restrizione di  $A$  a  $W$  è ancora nilpotente e quindi esiste  $v \in W \setminus \{0\}$  tale che  $A(v) = 0$ . Questo implica che  $X(v) = 0$  per ogni  $X \in \alpha$ . La dimostrazione è completa.  $\square$

Dal Teorema 7.9.2 si ottiene il

**Teorema 7.9.3** (Engel). *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\mathfrak{g}$  sia nilpotente è che tutti i suoi elementi siano ad-nilpotenti.*

**DIMOSTRAZIONE.** La necessità è ovvia. Per dimostrare la sufficienza ragioniamo per ricorrenza su  $m = \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$ . Se  $m \leq 1$  non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo  $m > 1$ . Per il teorema precedente esiste  $X \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$  tale che  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)(X) = 0$  per ogni  $Y \in \mathfrak{g}$ . In particolare  $X \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ . Osserviamo a questo punto che  $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}/Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  ha dimensione  $< m$  ed ogni elemento di  $\mathfrak{a}$  è ad-nilpotente. Per l'ipotesi induttiva  $\mathfrak{a}$  è nilpotente e questo implica che  $\mathfrak{g}$  è nilpotente.  $\square$

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  su  $\mathbb{k}$ . Una *bandiera completa* in  $V$  è una successione di sottospazi vettoriali di  $V$ :

$$(7.9.1) \quad \begin{cases} V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n \\ \text{con } \dim_{\mathbb{k}} V_i = i \text{ per } 0 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Vale il seguente:

**Teorema 7.9.4.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{k}$  e sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di endomorfismi nilpotenti di  $V$ . Allora esiste una bandiera completa  $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$  tale che  $X(V_i) \subset V_{i-1}$  per ogni  $1 \leq i \leq n$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\dim_{\mathbb{k}} V = 0$  non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi  $\dim_{\mathbb{k}}(V) = n > 0$  e il teorema vero per algebre di Lie nilpotenti di endomorfismi di uno spazio vettoriale di dimensione  $< n$  su  $\mathbb{k}$ . Per il Teorema 7.9.2, esiste  $v_1 \in V \setminus \{0\}$  tale che  $X(v_1) = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ . Sia  $V_1 = \mathbb{k} \cdot v_1$  e consideriamo la rappresentazione  $\rho$  di  $\mathfrak{g}$  su  $W = V/V_1$  ottenuta per passaggio al quoziente. Sia  $\pi : V \rightarrow W$  la proiezione nel quoziente. Poiché  $\rho(\mathfrak{g})$  consiste di endomorfismi nilpotenti di  $W$ , esiste per l'ipotesi induttiva una bandiera completa  $\{W_i\}_{0 \leq i \leq n-1}$  di  $W$  tale che  $\rho(X)(W_i) \subset W_{i-1}$ . Otteniamo allora la bandiera completa  $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$  desiderata aggiungendo a  $\{0\} = V_0$  e a  $V_1 = \mathbb{k} \cdot v_1$  i sottospazi  $V_i = \pi^{-1}(W_{i-1})$  per  $2 \leq i \leq n$ .  $\square$

Applicando questo risultato alla rappresentazione aggiunta otteniamo:

**Teorema 7.9.5.** *Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie nilpotente, allora esiste una successione di ideali di  $\mathfrak{g}$ :*

$$\mathfrak{a}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{m-1} \subset \mathfrak{a}_m = \mathfrak{g}$$

*tale che, per ogni  $1 \leq h \leq m$ , l'algebra di Lie  $\mathfrak{a}_h/\mathfrak{a}_{h-1}$  sia abeliana e di dimensione uno.*

**Teorema 7.9.6.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  e sia  $\mathfrak{g}$  una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  formata da endomorfismi nilpotenti. Allora  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie nilpotente.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia infatti  $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$  una bandiera completa tale che  $X(V_i) \subset V_{i-1}$  per  $1 \leq i \leq n$ , per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ . Scegliamo una base  $e_1, \dots, e_n$  di  $V$  tale che

$e_i \in V_i \setminus V_{i-1}$ . In tale base ogni elemento di  $\mathfrak{g}$  si rappresenta con una matrice di  $n(n, \mathbb{k})$ . Da questa osservazione segue la tesi.  $\square$

**Lemma 7.9.7.** *Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie nilpotente di dimensione finita ed  $\mathfrak{a}$  un ideale di  $\mathfrak{g}$ , allora  $\mathfrak{a} \cap Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Facciamo operare  $\mathfrak{g}$  su  $\mathfrak{a}$  mediante la rappresentazione aggiunta. Tutti gli  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)|_{\mathfrak{a}}$ , per  $X \in \mathfrak{g}$ , sono nilpotenti e quindi esiste  $A \in \mathfrak{a}$  tale che  $[\mathfrak{g}, A] = \{0\}$ . È quindi  $A \in \mathfrak{a} \cap Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ .  $\square$

### 7.10. Il Teorema di Lie

**Teorema 7.10.1.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n > 0$  su un campo  $\mathbb{k}$ , di caratteristica 0 e algebricamente chiuso. Sia  $\mathfrak{g}$  una sottoalgebra di Lie risolubile di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ . Esiste allora un vettore  $v \in V \setminus \{0\}$  tale che*

$$(7.10.1) \quad \forall A \in \mathfrak{g} \quad \exists \lambda(A) \in \mathbb{k} \quad \text{tale che} \quad A(v) = \lambda(A)v.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Ragioniamo per induzione su  $m = \dim_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ . La tesi è banale se  $m \leq 1$ . Supponiamo quindi  $m > 1$  ed il teorema vero per algebre risolubili, di dimensione minore di  $m$ , di endomorfismi lineari di uno spazio di dimensione finita positiva sul campo  $\mathbb{k}$ .

Osserviamo che  $\mathfrak{g}$  contiene un ideale  $\mathfrak{a}$  di codimensione 1: a questo scopo basta scegliere  $\mathfrak{a}$  uguale a un qualsiasi iperpiano di  $\mathfrak{g}$  contenente  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . Per l'ipotesi induttiva, esiste una forma lineare  $\lambda : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{k}$  tale che il sottospazio

$$W = \{v \in V \mid \forall A \in \mathfrak{a}, \exists \lambda_v(A) \in \mathbb{k} \text{ tale che } A(v) = \lambda_v(A)v\}$$

abbia dimensione positiva.

Dimostriamo ora che  $X(W) \subset W$  per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ . Siano  $w \in W$  ed  $X \in \mathfrak{g}$ . Se  $Y \in \mathfrak{a}$  abbiamo:

$$Y(X(w)) = X(Y(w)) + [Y, X](w) = \lambda_w(Y)(X(w)) + \lambda_w([Y, X])(w).$$

Basterà quindi dimostrare che  $\lambda_w([X, Y]) = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{g}$  ed  $Y \in \mathfrak{a}$ . Fissiamo  $X \in \mathfrak{g}$  e  $w \in W$ . Sia  $k$  il più grande intero non negativo tale che

$$(7.10.2) \quad w, X(w), \dots, X^k(w)$$

siano linearmente indipendenti. Indichiamo con  $W_i$  il sottospazio vettoriale di dimensione  $i$  generato da  $w, X(w), \dots, X^{i-1}(w)$ , per  $1 \leq i \leq k+1$  e poniamo  $W_0 = \{0\}$ . Ogni  $Y \in \mathfrak{a}$  lascia i sottospazi  $W_i$  invarianti e quindi la sua restrizione a  $W_{k+1}$  si scrive come una matrice triangolare superiore nella base (7.10.2). Verifichiamo, per ricorrenza su  $i = 0, \dots, k$  che

$$(7.10.3) \quad w_{i,Y} = Y(X^i(w)) - \lambda_w(Y)X^i(w) \in W_i \quad \forall Y \in \mathfrak{a},$$

per  $i = 0, \dots, k$ .

Per  $i = 0$  questo è conseguenza della definizione di  $W$ . Supponiamo ora che la (7.10.3) valga per  $i = h$ , con  $0 \leq h < k$  e dimostriamo che vale per  $i = h+1$ . Abbiamo:

$$Y(X^{h+1}(w)) = Y(X(X^h(w)))$$

$$\begin{aligned}
&= XY(X^h(w)) - [X, Y](X^h(w)) \\
&= X(\lambda_w(Y)X^h(w) + w_{h,Y}) - \lambda_w([X, Y])X^h(w) - w_{h,[X,Y]} \\
&= \lambda_w(Y)X^{h+1}(w) + X(w_{h,Y}) - \lambda_w([X, Y])X^h(w) - w_{h,[X,Y]} \\
&= \lambda_w(Y)X^{h+1}(w) + w_{h+1,Y}
\end{aligned}$$

e  $w_{h+1,Y} \in W_{h+1}$  perché  $X(w_{h,Y}) \in X(W_h) \subset W_{h+1}$ ,  $X^h(w) \in W_{h+1}$  e  $w_{h,[X,Y]} \in W_h \subset W_{h+1}$ . In particolare, per ogni  $Y$  possiamo considerare la traccia  $\text{tr}_{W_{k+1}}(Y)$  della restrizione di  $Y$  a  $W_{k+1}$  e

$$\text{tr}_{W_{k+1}}(Y) = (k+1)\lambda_w(Y).$$

Ora, anche  $X$  opera su  $W_{k+1}$  e la traccia della restrizione a  $W_{k+1}$  del commutatore  $[X, Y]$  è nulla. Da

$$0 = \text{tr}_{W_{k+1}}([X, Y]) = (k+1)\lambda_w([X, Y])$$

segue che  $\lambda_w([X, Y]) = 0$  perché  $\mathbb{k}$  ha caratteristica zero.

Quindi  $W$  è  $\mathfrak{g}$ -invariante. Se  $A \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{a}$ , abbiamo  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathbb{k}A$ . Osserviamo che, essendo  $\mathbb{k}$  algebricamente chiuso,  $W \ni w \rightarrow A(w) \in W$  ha un autovettore  $v \in W \setminus \{0\}$ . Tale  $v \neq 0$  soddisfa la tesi del teorema.  $\square$

Come corollario del Teorema 7.10.1, otteniamo il TEOREMA DI LIE:

**Teorema 7.10.2** (Lie). *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  su un campo algebricamente chiuso  $\mathbb{k}$  di caratteristica 0. Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra risolubile di endomorfismi di  $V$ . Allora esiste una bandiera completa  $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$  di  $V$  tale che  $A(V_i) \subset V_i$  per ogni  $A \in \mathfrak{g}$ .*

Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie risolubile (di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  algebricamente chiuso di caratteristica zero) e  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una sua rappresentazione lineare di dimensione finita,  $\rho(\mathfrak{g})$  è risolubile e quindi stabilizza una bandiera completa di  $V$ . Applicando questa osservazione alla rappresentazione aggiunta di  $\mathfrak{g}$  otteniamo:

**Teorema 7.10.3.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie risolubile di dimensione finita  $n$  su un campo  $\mathbb{k}$  algebricamente chiuso di caratteristica zero. Allora esiste una catena di ideali*

$$(7.10.4) \quad \{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{n-1} \subset \mathfrak{a}_n = \mathfrak{g}$$

di  $\mathfrak{g}$  con  $\dim_{\mathbb{k}}(\mathfrak{a}_i) = i$  per  $i = 0, 1, \dots, n-1, n$ .

Vale il seguente risultato relativo al cambiamento del campo di base:

**Lemma 7.10.4.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$ . Sia  $\tilde{\mathbb{k}}$  un'estensione del campo  $\mathbb{k}$ . Sia  $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathbb{k}} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$  l'algebra di Lie di dimensione finita su  $\tilde{\mathbb{k}}$  ottenuta per estensione  $\tilde{\mathbb{k}}$ -bilinare del commutatore di  $\mathfrak{g}$ . Allora*

- (1)  $\tilde{\mathfrak{g}}$  è risolubile se e soltanto se  $\mathfrak{g}$  è risolubile.
- (2)  $\tilde{\mathfrak{g}}$  è nilpotente se e soltanto se  $\mathfrak{g}$  è nilpotente.

Utilizzando il lemma, dimostriamo il seguente:

**Teorema 7.10.5.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero. L'algebra  $\mathfrak{g}$  è risolubile se e soltanto se il suo ideale derivato  $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  è nilpotente.*

**DIMOSTRAZIONE.** Chiaramente, se  $\mathfrak{g}^{(1)}$  è nilpotente,  $\mathfrak{g}$  è risolubile. Dimostriamo il viceversa.

Per il lemma precedente, possiamo supporre che il campo  $\mathbb{k}$  sia algebricamente chiuso: infatti, detta  $\tilde{\mathbb{k}}$  la chiusura algebrica di  $\mathbb{k}$  e posto  $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathbb{k}} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$ , abbiamo  $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)} = \tilde{\mathbb{k}} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}^{(1)}$ .

Sia dunque  $\mathbb{k}$  algebricamente chiuso; sia  $\{\alpha_i\}_{0 \leq i \leq n}$  una catena crescente di ideali di  $\mathfrak{g}$  con  $\dim_{\mathbb{k}} \alpha_i = i$ . Fissiamo una base  $X_1, \dots, X_n$  di  $\mathfrak{g}$  con  $X_i \in \alpha_i \setminus \alpha_{i-1}$  per  $1 \leq i \leq n$ . Per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ , l'endomorfismo  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$  si rappresenta nella base  $X_1, \dots, X_n$  mediante una matrice di  $t(n, \mathbb{k})$ . Poiché  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}([X, Y]) = [\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X), \text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)]$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , gli elementi di  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{(1)})$  si rappresentano nella base  $X_1, \dots, X_n$  come matrici di  $n(n, \mathbb{k})$  e sono quindi nilpotenti. Ne segue che  $\mathfrak{g}^{(1)}$  è nilpotente per il teorema di Engel.  $\square$

Come corollario deduciamo il seguente:

**Teorema 7.10.6.** *Sia  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie risolubile su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero. Allora possiamo costruire una successione crescente di sottoalgebre di  $\mathfrak{g}$*

$$\{0\} = \alpha_0 \subset \alpha_1 \subset \dots \subset \alpha_{m-1} \subset \alpha_m = \mathfrak{g},$$

*tali che, per ogni  $h$  con  $1 \leq h \leq m$ ,  $\alpha_{h-1}$  sia un ideale in  $\alpha_h$  ed il quoziente  $\alpha_h/\alpha_{h-1}$  sia un'algebra di Lie abeliana di dimensione uno.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $m = \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$ ,  $m' = \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}^{(1)}$  e  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$  la proiezione nel quoziente. Poiché  $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$  è abeliana, se

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{m-m'} = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$$

è una qualsiasi bandiera completa, le  $\alpha_h = \pi^{-1}(V_{h-m'})$ , per  $h = m', \dots, m$  sono sottoalgebre di  $\mathfrak{g}$  di dimensione  $h$ . Ciascuna è un ideale di codimensione uno nella successiva e  $\alpha_h/\alpha_{h-1}$  è abeliana di dimensione uno per  $h = m' + 1, \dots, m$ .

Per concludere la dimostrazione basta osservare che  $\alpha_{m'} = \mathfrak{g}^{(1)}$  è un'algebra di Lie nilpotente e quindi per il teorema di Engel contiene una sequenza di ideali

$$\{0\} = \alpha_0 \subset \alpha_1 \subset \dots \subset \alpha_{m'-1} \subset \alpha_{m'} = \mathfrak{g}^{(1)},$$

tali che  $\alpha_h/\alpha_{h-1}$  sia un'algebra di Lie abeliana di dimensione uno, per  $h = 1, \dots, m'$ .  $\square$

Osserviamo che, a differenza del caso in cui avevamo supposto che  $\mathbb{k}$  fosse algebricamente chiuso, qui non possiamo in generale ottenere che gli  $\alpha_h$  siano ideali in  $\mathfrak{g}$ , ma soltanto ciascuno un ideale nella successiva sottoalgebra  $\alpha_{h+1}$  di  $\mathfrak{g}$ .

### 7.11. Il più grande ideale di nilpotenza di una rappresentazione

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su un campo  $\mathbb{k}$ .

**Lemma 7.11.1.** *Sia  $\alpha$  un ideale di  $\mathfrak{g}$  e  $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una rappresentazione lineare irriducibile, di dimensione finita, di  $\mathfrak{g}$ , tale che, per ogni  $X \in \alpha$ ,  $\rho_V(X)$  sia nilpotente su  $V$ . Allora  $\rho_V(\alpha) = \{0\}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $W = \{v \in V \mid \rho_V(X)(v) = 0, \forall X \in \alpha\}$ . Per il teorema di Engel,  $W \neq \{0\}$ . D'altra parte, poiché  $\alpha$  è un ideale,  $W$  è un sottospazio  $\rho_V(\mathfrak{g})$ -invariante di  $V$ . Per l'irriducibilità,  $W = V$ .  $\square$

**Lemma 7.11.2.** *Sia  $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una rappresentazione lineare di  $\mathfrak{g}$ , e sia*

$$(7.11.1) \quad \{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_\nu = V$$

*una sua serie di Jordan-Hölder<sup>1</sup>. Per un ideale  $\alpha$  di  $\mathfrak{g}$  sono equivalenti*

- (1) *per ogni  $X \in \alpha$ ,  $\rho_V(X)$  è un endomorfismo nilpotente di  $V$ ;*
- (2)  *$\rho(X)(W_h) \subset W_{h-1}$  per ogni  $X \in \alpha$  ed ogni  $h = 1, \dots, \nu$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** L'implicazione (2)  $\Rightarrow$  (1) è ovvia. Mostriamo che vale anche l'implicazione opposta.

Sia  $\alpha$  un ideale di  $\mathfrak{g}$  tale che  $\rho_V(\alpha)$  sia un'algebra di endomorfismi nilpotenti di  $V$ .

Per tutte le rappresentazioni  $\rho_{W_h/W_{h-1}}$  indotte dalla  $\rho_V$  per passaggio al quoziente gli endomorfismi di  $\rho_{W_h/W_{h-1}}(\alpha)$  sono nilpotenti su  $W/W_{h-1}$ . Poiché le rappresentazioni  $\rho_{W_h/W_{h-1}}$  sono irriducibili, per il lemma precedente  $\rho_{W_h/W_{h-1}}(X) = 0$  per ogni  $X \in \alpha$ , e ciò equivale alla (2).  $\square$

Sia  $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una rappresentazione lineare di  $\mathfrak{g}$ , e sia (7.11.1) una sua serie di Jordan-Hölder. L'insieme

$$(7.11.2) \quad \mathfrak{n}_V = \{X \in \mathfrak{g} \mid \rho_V(X)(W_h) \subset W_{h-1}, \forall h = 1, \dots, \nu\}$$

è un ideale di  $\mathfrak{g}$ , che non dipende dalla particolare scelta della serie di Jordan-Hölder utilizzata nella sua definizione.

**Definizione 7.11.3.** L'ideale  $\mathfrak{n}_V$  definito dalla (7.11.2) si dice il *più grande ideale di nilpotenza* della rappresentazione  $\rho_V$ .

## 7.12. Il radicale nilpotente e il nilradicale

In tutto questo paragrafo supporremo che il campo  $\mathbb{k}$  abbia caratteristica zero. Tutte le algebre di Lie considerate saranno algebre di Lie su  $\mathbb{k}$  di dimensione finita.

**Definizione 7.12.1.** Si dice *radicale nilpotente* dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  l'intersezione  $\text{nil}(\mathfrak{g})$  dei nuclei delle sue rappresentazioni lineari irriducibili di dimensione finita.

**Lemma 7.12.2.** *Sia  $V \neq \{0\}$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{k}$  e  $\mathfrak{g}$  una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ . Supponiamo che  $V$  sia un  $\mathfrak{g}$ -modulo irriducibile. Se  $\alpha$  è un ideale abeliano di  $\mathfrak{g}$ , allora  $\alpha \cap \mathfrak{g}^{(1)} = \{0\}$ .*

<sup>1</sup>Ogni sottospazio  $W_h$  è  $\rho_V(\mathfrak{g})$ -invariante e le rappresentazioni indotte sui quozienti  $W_h/W_{h-1}$  sono irriducibili.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{A}$  la sottoalgebra unitaria (commutativa) di  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  generata da  $1_V$  ed  $\alpha$ . Dimostriamo che

se  $\mathfrak{b}$  è un ideale di  $\mathfrak{g}$  contenuto in  $\alpha$  e  $\text{tr}_V(AB) = 0$  per ogni  $A \in \mathcal{A}$  e  $B \in \mathfrak{b}$ , allora  $\mathfrak{b} = \{0\}$ .

Abbiamo infatti, se  $B \in \mathfrak{b}$ ,

$$\text{tr}_V(B^n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > 0,$$

e quindi ogni elemento  $B \in \mathfrak{b}$  è nilpotente. Per il teorema di Engel,

$$W = \bigcap_{B \in \mathfrak{b}} \ker B \neq \{0\}.$$

Poiché  $\mathfrak{b}$  è un ideale di  $\mathfrak{g}$  abbiamo

$$B(X(v)) = X(B(v)) - [X, B](v) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall B \in \mathfrak{b}, \quad \forall v \in W.$$

Quindi  $W$  è  $\mathfrak{g}$ -invariante e perciò  $W = V$  in quanto avevamo supposto che  $V$  fosse un  $\mathfrak{g}$ -modulo irriducibile. Ciò implica che  $\mathfrak{b} = \{0\}$ .

Possiamo applicare questo risultato a  $\mathfrak{b} = [\mathfrak{g}, \alpha]$ . Infatti: se  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $Y \in \alpha$  ed  $A \in \mathcal{A}$ , otteniamo:

$$\text{tr}_V([X, Y]A) = \text{tr}_V(XYA - YXA) = \text{tr}_V(XYA - XAY) = \text{tr}_V(X[Y, A]) = 0$$

perché  $\mathcal{A}$  è una sottoalgebra commutativa di  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ . Quindi  $[\mathfrak{g}, \alpha] = 0$ . Da ciò segue che gli endomorfismi di  $\mathfrak{g}$  commutano con quelli di  $\mathcal{A}$ . Fissiamo quindi  $X, Y \in \mathfrak{g}$  ed  $A \in \mathcal{A}$ . Abbiamo:

$$\text{tr}_V([X, Y]A) = \text{tr}_V(X[Y, A]) = 0$$

perché  $[Y, A] = 0$ . Quindi  $\text{tr}_V(ZA) = 0$  per ogni  $Z \in \mathfrak{g}^{(1)}$ ,  $A \in \mathcal{A}$ . Applicando quindi le considerazioni svolte all'inizio della dimostrazione all'ideale  $\mathfrak{g}^{(1)} \cap \alpha \subset \alpha$ , otteniamo che  $\mathfrak{g}^{(1)} \cap \alpha = \{0\}$ .  $\square$

Dal Lemma 7.12.2 otteniamo la seguente caratterizzazione del radicale nilpotente:

**Teorema 7.12.3.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero. Allora*

$$(7.12.1) \quad \text{nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g}).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Ogni funzionale lineare  $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$  che si annulla su  $\mathfrak{g}^{(1)}$  definisce una rappresentazione unidimensionale, e quindi irriducibile, di  $\mathfrak{g}$ . Quindi  $\text{nil}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}$ .

Consideriamo la rappresentazione aggiunta di  $\mathfrak{g}$ . Possiamo determinare una sequenza di sottospazi vettoriali  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ -invarianti di  $\mathfrak{g}$ :

$$\mathfrak{g}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_m = \mathfrak{g}$$

tali che la rappresentazione indotta su ciascuno dei quozienti  $\mathfrak{g}_h/\mathfrak{g}_{h-1}$ , per  $1 \leq h \leq m$ , sia irriducibile. In particolare  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$  è nilpotente per ogni  $X \in \text{nil}(\mathfrak{g})$ , in quanto  $[X, \mathfrak{g}_h] \subset \mathfrak{g}_{h-1}$  per ogni  $h = 1, \dots, m$  se  $X \in \text{nil}(\mathfrak{g})$ . Per il teorema di Engel  $\text{nil}(\mathfrak{g})$  è un ideale nilpotente di  $\mathfrak{g}$  e quindi è contenuto in  $\text{rad}(\mathfrak{g})$ .

Abbiamo quindi ottenuto l'inclusione

$$\text{nil}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g}).$$

Per dimostrare l'inclusione opposta, consideriamo una qualsiasi rappresentazione lineare irriducibile di dimensione finita  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ .

Sia  $k \geq 0$  il più piccolo numero naturale tale che  $\rho(D^{k+1}\text{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$ . Poniamo  $\mathfrak{g}' = \rho(\mathfrak{g})$  ed  $\alpha = \rho(D^k\text{rad}(\mathfrak{g}))$ . Allora  $V$  è un  $\mathfrak{g}'$ -modulo irriducibile ed  $\alpha$  un ideale abeliano di  $\mathfrak{g}'$ . Per il Lemma 7.12.2,

$$\rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap D^k\text{rad}(\mathfrak{g})) \subset D\mathfrak{g}' \cap \alpha = \{0\}.$$

Se fosse  $k > 0$ , avremmo  $D^k\text{rad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}$  e quindi  $\rho(D^k\text{rad}(\mathfrak{g})) = \rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap D^k\text{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$  contraddirebbe la scelta di  $k$ . Deve essere perciò  $k = 0$  e quindi  $\rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$ . Dunque  $\ker \rho \supset \mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g})$  per ogni rappresentazione  $\rho$  irriducibile di dimensione finita: la dimostrazione è completa.  $\square$

**Corollario 7.12.4.** *Il radicale nilpotente  $\text{nil}(\mathfrak{g})$  è un ideale caratteristico di  $\mathfrak{g}$ .*

**Corollario 7.12.5.** *Se  $\mathfrak{g}$  è risolubile, allora il suo radicale nilpotente coincide con il suo ideale derivato  $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ .*

*Per ogni rappresentazione semplice di dimensione finita  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  di un'algebra di Lie risolubile  $\mathfrak{g}$ , la  $\rho(\mathfrak{g})$  è commutativa e la sottoalgebra associativa di  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  generata dall'identità  $I_V$  e da  $\rho(\mathfrak{g})$  è un'estensione algebrica di  $\mathbb{k}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $\mathfrak{g}$  coincide con il proprio radicale  $\mathfrak{r}$ , abbiamo  $\text{nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{g}^{(1)}$ . Quindi  $[\rho(\mathfrak{g}), \rho(\mathfrak{g})] = \rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \{0\}$  e  $\rho(\mathfrak{g})$  è commutativa. La sottoalgebra associativa  $\mathbb{K}_{\rho}$  di  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  generata da  $\rho(\mathfrak{g})$  e da  $I_V$  è quindi un'algebra commutativa in cui ogni elemento diverso da zero è invertibile per il lemma di Schur. Quindi  $\mathbb{K}_{\rho}$  è un campo. Poiché è uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ , esso ne è un'estensione algebrica.  $\square$

**Corollario 7.12.6.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$ , con radicale  $\mathfrak{r}$ . Allora i seguenti insiemi sono uguali:*

- (1) *il più grande ideale nilpotente di  $\mathfrak{g}$ ;*
- (2) *il più grande ideale nilpotente di  $\mathfrak{r}$ ;*
- (3) *l'insieme degli  $X \in \mathfrak{r}$  tali che  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$  sia nilpotente;*
- (4) *l'insieme degli  $X \in \mathfrak{r}$  tali che  $\text{ad}_{\mathfrak{r}}(X)$  sia nilpotente.*

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $\alpha, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$  gli ideali descritti rispettivamente nei punti (1), (2), (3) (4). Abbiamo chiaramente  $\alpha \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{c} \subset \mathfrak{d}$ . Poiché  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{r}$  per ogni  $X \in \mathfrak{r}$ , vale anche l'inclusione  $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{c}$  e quindi  $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$ . Per dimostrare che i quattro ideali sono uguali basterà quindi verificare che  $\mathfrak{c} \subset \alpha$ . Consideriamo la rappresentazione aggiunta di  $\mathfrak{r}$  in  $\mathfrak{g}$  e sia

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{m-1} \subset V_m = \mathfrak{g}$$

una serie di Jordan-Hölder per  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ , cioè una catena massimale di sottospazi vettoriali  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ -invarianti di  $\mathfrak{g}$ . Indichiamo con  $\rho_h$  la rappresentazione indotta sul quoziente  $V_h/V_{h-1}$  dalla restrizione a  $\mathfrak{r}$  della rappresentazione aggiunta. Poiché essa è irriducibile, abbiamo  $\rho_h(X) = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{r}$  per cui  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$  è nilpotente. Quindi  $\mathfrak{d} = \bigcap_h \ker \rho_h$  è un ideale nilpotente di  $\mathfrak{g}$  e quindi è contenuto in  $\alpha$ .  $\square$

**Definizione 7.12.7.** L'ideale  $\mathfrak{n}$  formato dagli elementi  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -nilpotenti del radicale  $\mathfrak{r}$  di  $\mathfrak{g}$  si dice il *nilradicale* o il *più grande ideale nilpotente* di  $\mathfrak{g}$ .

**Corollario 7.12.8.** Il nilradicale di  $\mathfrak{g}$  è un suo ideale caratteristico.

Se indichiamo con  $\mathfrak{n}_0$  il radicale nilpotente<sup>2</sup>  $\text{nil}(\mathfrak{g})$  di  $\mathfrak{g}$ , abbiamo la catena di inclusioni

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{r} \supset \mathfrak{n} \supset \mathfrak{n}_0.$$

### 7.13. Automorfismi speciali

**Proposizione 7.13.1.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero e siano  $\mathfrak{n}$  il suo ideale nilpotente massimale ed  $\mathfrak{n}_0$  il suo radicale nilpotente. Allora

$$\text{Aut}_{\mathfrak{n}} = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{n}\} \quad \text{ed} \quad \text{Aut}_{\mathfrak{n}_0} = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{n}_0\}$$

sono sottogruppi normali di  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  contenuti in  $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Basta osservare che sia  $\mathfrak{n}$  che  $\mathfrak{n}_0$  sono ideali caratteristici di  $\mathfrak{g}$ , cioè invarianti per automorfismi di  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

**Definizione 7.13.2.** Gli elementi di  $\text{Aut}_{\mathfrak{n}_0}(\mathfrak{g})$  si dicono *automorfismi speciali* di  $\mathfrak{g}$ .

Vale la seguente precisazione del Teorema 7.7.2:

**Teorema 7.13.3.** Se  $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}'$  sono due sottoalgebre di Levi di un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero, allora esiste un automorfismo speciale  $a \in \text{Aut}_{\mathfrak{n}_0}(\mathfrak{g})$  tale che  $\mathfrak{l}' = a(\mathfrak{l})$ .

---

<sup>2</sup> Anche l'inclusione  $\mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}$  può essere propria. Ad esempio, se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie abeliana, abbiamo  $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{n}_0 = \{0\}$ .



## Criteri di Cartan ed algebre di Lie semisemplici

### 8.1. La decomposizione di Wedderburn

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$ .

Un endomorfismo  $\mathbb{k}$ -lineare  $A$  di  $V$  si dice *semisemplice* (o *completamente riducibile*) se ogni sottospazio  $A$ -invariante di  $V$  ammette un complemento  $A$ -invariante.

Se  $\mathbb{k}$  è algebricamente chiuso, gli endomorfismi semisemplici sono tutti e soli quelli diagonalizzabili.

Ad un endomorfismo  $A$  di  $V$  associamo il suo *polinomio minimo*  $\mu_A$  ed il suo *polinomio caratteristico*  $p_A$ . Essi sono i polinomi monici in  $\mathbb{k}[x]$  caratterizzati da

$$\begin{aligned}(\mu_A) &= \{f \in \mathbb{k}[x] \mid f(A) = 0\}, \\ p_A(x) &= \det(x \cdot \text{id}_V - A).\end{aligned}$$

Ricordiamo i seguenti risultati:

**Lemma 8.1.1.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché un endomorfismo  $A$  di  $V$  sia semisemplice è che il suo polinomio minimo  $\mu_A$  sia prodotto di fattori primi semplici distinti.*

**Lemma 8.1.2.** *Il solo endomorfismo che sia al tempo stesso nilpotente e semisemplice è l'endomorfismo nullo.*

Se  $\mathbb{k}'$  è un'estensione di  $\mathbb{k}$ , il prodotto tensoriale  $\mathbb{k}' \otimes_{\mathbb{k}} V$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{k}'$  che ha su  $\mathbb{k}'$  la stessa dimensione di  $V$  su  $\mathbb{k}$ . Ogni  $A \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  definisce un endomorfismo  $\mathbb{k}'$ -lineare  $1 \otimes_{\mathbb{k}} A$  su  $\mathbb{k}' \otimes_{\mathbb{k}} V$ , che ha lo stesso polinomio minimo e polinomio caratteristico di  $A$ .

Segue allora dal Lemma 8.1.1 che

**Lemma 8.1.3.** *Sia  $\mathbb{k}'$  un'estensione del campo  $\mathbb{k}$ . Un endomorfismo  $A$  di  $V$  è semisemplice (rispettivamente: nilpotente), se e soltanto se il corrispondente endomorfismo  $1 \otimes_{\mathbb{k}} A$  di  $\mathbb{k}' \otimes_{\mathbb{k}} V$  è semisemplice (rispettivamente: nilpotente).*

Ricaviamo allora facilmente il seguente

**Lemma 8.1.4.** *Se  $S_1, S_2 \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  sono semisemplici ed  $[S_1, S_2] = 0$ , allora  $S_1 + S_2$  è semisemplice.*

Utilizziamo i Lemmi 8.1.1 ed 8.1.3 per dimostrare il seguente teorema di decomposizione:

**Teorema 8.1.5** (decomposizione di Wedderburn). *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero. Allora ogni endomorfismo  $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  si decompone in modo unico nella forma:*

$$(8.1.1) \quad \begin{aligned} A &= S_A + N_A \quad \text{con } S_A \text{ semisemplice, } N_A \text{ nilpotente ed} \\ [S_A, A] &= [N_A, A] = [S_A, N_A] = 0. \end{aligned}$$

*Inoltre  $S_A, N_A \in \mathbb{k}[A]$  e possiamo esprimere  $S_A$  ed  $N_A$  come polinomi di  $A$  privi di termine costante.*

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo innanzi tutto l'esistenza della decomposizione.

Sia  $\mu_A = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$  la fattorizzazione del polinomio minimo di  $A$  in prodotto di potenze di polinomi primi distinti. Se  $k_1 = \cdots = k_m = 1$ , allora  $A$  è semisemplice per il Lemma 8.1.1 ed  $S_A = A$ ,  $N_A = 0$  ci dà la decomposizione desiderata.

Supponiamo quindi  $k_i > 1$  per qualche  $i$ . Sia  $f = p_1 \cdots p_m$  e consideriamo l'ideale  $\mathfrak{n}$  di  $\mathbb{k}[A]$  generato da  $f(A)$ . Dimostriamo per ricorrenza che è possibile determinare endomorfismi  $A_k$  di  $V$  ( $1 \leq k \leq n$ ) tali che

$$(8.1.2) \quad \begin{cases} A_k \in \mathbb{k}[A], \\ A_k = A + N_k \quad \text{con } N_k \in \mathfrak{n}, \\ f(A_k) \in \mathfrak{n}^k. \end{cases}$$

Per  $k = 1$  è sufficiente porre  $A_1 = A$ . Supponiamo ora di aver già costruito  $A_k$  per qualche  $k \geq 1$ . Cerchiamo di determinare  $A_{k+1}$  nella forma  $A_{k+1} = A_k + T$  con  $T \in \mathfrak{n}^k$ . Dalla formula di Taylor ricaviamo:

$$(8.1.3) \quad f(A_{k+1}) = f(A_k + T) = f(A_k) + f'(A_k) \circ T + T_1,$$

con  $T_1 \in \mathfrak{n}^{k+1}$ . Poiché  $f$  è prodotto di fattori primi semplici,  $f$  ed  $f'$  sono primi tra loro. Poiché  $f(A_k) \in \mathfrak{n}^k$ , i fattori primi del polinomio minimo di  $A_k$  sono fattori primi di  $f$ . Perciò  $\mu_{A_k}$  ed  $f'$  sono primi tra loro e dunque  $f'(A_k)$  è invertibile. Possiamo scegliere quindi

$$T = -[f'(A_k)]^{-1} \circ f(A_k) \in \mathfrak{n}^k.$$

Abbiamo allora

$$\begin{cases} A_{k+1} = A_k + T = A + (N_k + T) \quad \text{con } N_{k+1} = N_k + T \in \mathfrak{n}, \\ f(A_{k+1}) = T_1 \in \mathfrak{n}^{k+1}. \end{cases}$$

Per  $k = n$  è  $f(A_n) = 0$  e quindi  $S_A = A_n$  è semisemplice ed otteniamo la decomposizione desiderata ponendo  $N_A = -N_n \in \mathfrak{n}$ .

Per dimostrare che  $S_A = p'(A)$  ed  $N_A = p''(A)$  per polinomi  $p', p'' \in \mathbb{k}[x]$  privi di termine costante, osserviamo innanzi tutto che questo è ovvio nel caso in cui  $A$  non sia invertibile: il sottospazio  $\ker A$  è  $S_A$  ed  $N_A$ -invariante. Poiché la restrizione di  $N_A$  a  $\ker A$  è nilpotente, vi è allora almeno un elemento  $v \in \ker A \setminus \{0\}$  tale che  $A(v) = N_A(v) = S_A(v) = 0$  e quindi qualsiasi espressione di  $S_A$  e di  $N_A$  come polinomio di  $A$  non può contenere termine costante. Se  $A$  è invertibile, per il teorema di Hamilton-Cayley l'identità si può scrivere come un polinomio senza termine costante di  $A$ , onde per ogni polinomio  $p \in \mathbb{k}[x]$  possiamo trovare un polinomio  $q \in \mathbb{k}[x]$  privo di termine costante tale che  $p(A) = q(A)$ .

Dimostriamo ora l'unicità. Se  $A = S + N$  è un'altra decomposizione con  $S$  semisemplice ed  $N$  nilpotente che commutano con  $A$ , allora  $[S, S_A] = 0$  ed  $[N, N_A] = 0$  perché  $S_A, N_A \in \mathbb{k}[A]$ . Quindi  $S - S_A$  ed  $N_A - N$  sono rispettivamente semisemplice e nilpotente e quindi dall'uguaglianza  $S - S_A = N_A - N$  segue che  $S = S_A$  ed  $N = N_A$  in quanto  $S - S_A = 0$  per il Lemma 8.1.3 perché al tempo stesso semisemplice e nilpotente.  $\square$

Se  $A \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ , indichiamo con  $\text{ad}(A) \in \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V))$  l'applicazione

$$(8.1.4) \quad \text{ad}(A) : \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V) \ni X \longrightarrow [A, X] = A \circ X - X \circ A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V).$$

**Teorema 8.1.6.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero. Sia  $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  un endomorfismo lineare di  $V$  ed  $A = S_A + N_A$  la sua decomposizione di Wedderburn, con  $S_A$  semisemplice ed  $N_A$  nilpotente. Allora  $\text{ad}(S_A)$  ed  $\text{ad}(N_A)$  sono rispettivamente la componente semisemplice e la componente nilpotente della decomposizione di Wedderburn di  $\text{ad}(A)$ .*

## 8.2. Il criterio di risolubilità di Cartan

Dimostriamo in primo luogo una semplice proprietà della traccia rispetto al commutatore.

**Lemma 8.2.1.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ . Allora*

$$(8.2.1) \quad \text{tr}_V([X, Y]Z) = \text{tr}_V(X[Y, Z]) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V).$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \text{tr}_V([X, Y]Z) &= \text{tr}_V(XYZ) - \text{tr}_V(YXZ) \\ &= \text{tr}_V(YZX - ZYX) \\ &= \text{tr}_V([Y, Z]X) = \text{tr}_V(X[Y, Z]), \\ &\quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V). \end{aligned}$$

$\square$

Otteniamo quindi il CRITERIO DI RISOLUBILITÀ DI CARTAN:

**Teorema 8.2.2.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero. Condizione necessaria e sufficiente affinché una sottoalgebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  sia risolubile è che*

$$(8.2.2) \quad \text{tr}_V(XY) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}^{(1)}, \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che il campo  $\mathbb{k}$  sia algebricamente chiuso. La necessità segue allora dal fatto che, in un'opportuna base  $e_1, \dots, e_n$  di  $V$  gli elementi di  $\mathfrak{g}$  si possono rappresentare con matrici di  $\mathfrak{t}(n, \mathbb{k})$  e quelli di  $\mathfrak{g}^{(1)}$  con matrici di  $\mathfrak{n}(n, \mathbb{k})$ .

Supponiamo viceversa che valga la (8.2.2). Sia  $X = S_X + N_X$  la decomposizione di Wedderburn di un elemento  $X \in \mathfrak{g}$ . Per il Teorema 8.1.6,  $\text{Ad}(S_X)$  è la parte semisemplice di  $\text{Ad}(X)$  e dunque, per il Teorema 8.1.5, un polinomio in  $\mathbb{k}[\text{Ad}(X)]$ . Abbiamo perciò  $\text{Ad}(S_X)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}$ .

Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gli autovalori di  $X$ , ripetuti con la loro molteplicità, ed  $e_1, \dots, e_n$  una base di autovalori di  $V$ , con  $Xe_i = \lambda_i e_i$  per  $i = 1, \dots, n$ .

Sia  $E$  il  $\mathbb{Q}$ -sottospazio vettoriale di  $\mathbb{k}$  generato da  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  e consideriamo un qualsiasi funzionale  $\mathbb{Q}$ -lineare  $\phi : E \rightarrow \mathbb{Q}$ . Ad esso associamo l'endomorfismo  $X_\phi \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  definito da

$$X_\phi e_i = \phi(\lambda_i) e_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Osserviamo che se  $\lambda_i - \lambda_j = \lambda_h - \lambda_\ell$ , anche  $\phi(\lambda_i) - \phi(\lambda_j) = \phi(\lambda_h) - \phi(\lambda_\ell)$ . Possiamo in particolare trovare un polinomio  $\psi \in \mathbb{k}[x]$  tale che

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(\lambda_i - \lambda_j) = \phi(\lambda_i) - \phi(\lambda_j) \quad \text{se } 1 \leq i < j \leq m.$$

Abbiamo allora

$$\psi(\text{Ad}(S_X)) = \text{Ad}(X_\phi).$$

In particolare,

$$[X_\phi, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}^{(1)}.$$

Sia ora  $X \in \mathfrak{g}^{(1)}$  e siano  $X_1, \dots, X_\ell \in \mathfrak{g}$  tali che  $X = \sum_{j=1}^{\ell} [X_{2j-1}, X_{2j}]$ . Applichiamo ad  $X$  la costruzione precedente. Abbiamo, per ogni  $\phi \in E^*$ , dove  $E^*$  è il duale del  $\mathbb{Q}$ -spazio vettoriale  $E$  generato dagli autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  di  $X$ ,

$$\text{tr}_V(X_\phi X) = \sum_{j=1}^{\ell} \text{tr}_V(X_\phi [X_{2j-1}, X_{2j}]) = \sum_{j=1}^{\ell} \text{tr}_V([X_\phi, X_{2j-1}] X_{2j}) = 0$$

per la (8.2.2), perché  $[X_\phi, X_{2j-1}] \in \mathfrak{g}^{(1)}$  ed  $X_{2j} \in \mathfrak{g}$ , per  $j = 1, \dots, \ell$ . D'altra parte,

$$\text{tr}_V(X_\phi X) = \text{tr}_V(X_\phi S_X) = \sum_{i=1}^n \phi(\lambda_i) \lambda_i,$$

onde, applicando  $\phi$  all'ultimo membro di questa uguaglianza, otteniamo che

$$\sum_{i=1}^n \phi_i^2(\lambda_i) = 0 \implies \phi(\lambda_i) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall \phi \in E^*.$$

Ne segue che  $E^* = 0$ , e quindi  $E = \{0\}$ . Ciò dimostra che  $S_X = 0$  e dunque  $X = N_X$  è nilpotente.  $\square$

**Teorema 8.2.3.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero. Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\mathfrak{g}$  sia risolubile è che valga la:*

$$(8.2.3) \quad \text{tr}_{\mathfrak{g}}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}^{(1)}, \quad \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** La necessità è ovvia. Dimostriamo il viceversa. Se vale la (8.2.3), allora  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  è risolubile per il teorema precedente. Poiché il nucleo  $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  della rappresentazione aggiunta è risolubile in quanto abeliano, ne segue che  $\mathfrak{g}$  è risolubile.  $\square$

### 8.3. La forma di Killing

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su un campo  $\mathbb{k}$ .

**Definizione 8.3.1.** Un ideale  $\mathfrak{a}$  di  $\mathfrak{g}$  si dice *caratteristico* se  $D(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$  per ogni derivazione  $D \in \text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ .

**Lemma 8.3.2.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  ed  $\mathfrak{a}$  un ideale caratteristico di  $\mathfrak{g}$ . Allora ogni ideale (risp. ideale caratteristico) di  $\mathfrak{a}$  è un ideale (risp. ideale caratteristico) di  $\mathfrak{g}$ .

Se  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  sono ideali caratteristici di  $\mathfrak{g}$ , anche  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$  e  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$  sono ideali caratteristici di  $\mathfrak{g}$ .

**Osservazione 8.3.3.** Gli ideali  $\mathfrak{D}^m \mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{C}^m \mathfrak{g}$  sono caratteristici per ogni intero non negativo  $m$ .

**Definizione 8.3.4.** Una forma bilineare simmetrica  $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$  sull'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  si dice *invariante* se:

$$(8.3.1) \quad \beta([X, Y], Z) = \beta(X, [Y, Z]) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g},$$

completamente invariante se:

$$(8.3.2) \quad \beta(D(X), Y) + \beta(X, D(Y)) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall D \in \text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}).$$

**Lemma 8.3.5.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  e sia  $\beta$  una forma bilineare simmetrica invariante su  $\mathfrak{g}$ . Sia  $\mathfrak{a}$  un ideale di  $\mathfrak{g}$  e poniamo

$$\mathfrak{a}^\perp = \{X \in \mathfrak{g} \mid \beta(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{a}\}.$$

Allora:

- (1)  $\mathfrak{a}^\perp$  è un ideale di  $\mathfrak{g}$ ;
- (2) se  $\beta$  è completamente invariante ed  $\mathfrak{a}$  caratteristico, anche  $\mathfrak{a}^\perp$  è caratteristico;
- (3) se  $\beta$  è non degenere, allora  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$  è abeliano.

**Lemma 8.3.6.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo  $\mathbb{k}$  e  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una rappresentazione lineare di dimensione finita. Allora

$$(8.3.3) \quad \beta_\rho(X, Y) = \text{tr}_V(\rho(X)\rho(Y)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

è una forma bilineare simmetrica invariante su  $\mathfrak{g}$ .

**Lemma 8.3.7.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$  e sia  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una rappresentazione lineare di dimensione finita di  $\mathfrak{g}$ . Allora:

$$(8.3.4) \quad \beta_\rho(X, Y) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \text{nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g}).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo una bandiera di sottospazi  $\rho(\mathfrak{g})$ -invarianti di  $V$ :

$$V_0 = \{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_m = V$$

tali che i  $\mathfrak{g}$ -moduli  $V_i/V_{i-1}$  siano irriducibili per ogni  $i = 1, \dots, m$ . Scegliamo una base  $e_1, \dots, e_n$  tale che per ogni  $i = 1, \dots, m$  vi sia un intero positivo  $n_i \leq n$  tale che  $e_1, \dots, e_{n_i}$  sia una base di  $V_i$ . Gli elementi di  $\rho(\mathfrak{g})$  si rappresentano in questa base come matrici triangolari superiori a blocchi e quelli di  $\rho(\text{nil}(\mathfrak{g}))$  hanno

blocchi nulli sulla diagonale principale. Quindi gli endomorfismi  $\rho(X) \circ \rho(Y)$  con  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $Y \in \text{nil}(\mathfrak{g})$  sono matrici triangolari superiori a blocchi con blocchi nulli sulla diagonale principale e quindi hanno traccia nulla.  $\square$

**Definizione 8.3.8.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$ . La forma bilineare simmetrica invariante:

$$(8.3.5) \quad \kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{tr}_{\mathfrak{g}}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

si dice *forma di Killing* di  $\mathfrak{g}$ .

**Teorema 8.3.9.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$  e sia  $\alpha$  un ideale di  $\mathfrak{g}$ . Allora

$$(8.3.6) \quad \kappa_{\alpha}(X, Y) = \kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) \quad \forall X, Y \in \alpha.$$

**Teorema 8.3.10.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo  $\mathbb{k}$ . La sua forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  è completamente invariante.

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\mathfrak{g}$  non ha derivazioni esterne, non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi che  $\mathfrak{g}$  ammetta derivazioni esterne. Sia  $D$  una derivazione esterna di  $\mathfrak{g}$ . Allora  $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{k}D$  è un'algebra di Lie che contiene  $\mathfrak{g}$  come un ideale di codimensione uno. La tesi segue allora dal fatto che  $\kappa_{\tilde{\mathfrak{g}}}|_{\mathfrak{g}} = \kappa_{\mathfrak{g}}$  per il teorema precedente.  $\square$

**Teorema 8.3.11.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo  $\mathbb{k}$ . Il suo radicale  $\text{rad}(\mathfrak{g})$  è l'ortogonale di  $\mathfrak{g}^{(1)}$  per la forma di Killing.

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,  $Z \in \text{rad}(\mathfrak{g})$ . Allora  $[Y, Z] \in \mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g})$ . Quindi

$$\kappa_{\mathfrak{g}}([X, Y], Z) = \kappa_{\mathfrak{g}}(X, [Y, Z]) = 0.$$

Dunque, se  $\mathfrak{r}$  è l'ortogonale di  $\mathfrak{g}^{(1)}$  per la forma di Killing, abbiamo  $\text{rad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{r}$ . D'altra parte, per il criterio di risolubilità di Cartan,  $\mathfrak{r}$  è un ideale risolubile e quindi  $\mathfrak{r} \subset \text{rad}(\mathfrak{g})$  e i due insiemi sono uguali.  $\square$

In particolare, otteniamo:

**Teorema 8.3.12.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero. Il suo radicale  $\text{rad}(\mathfrak{g})$  e il suo radicale caratteristico  $\text{nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g})$  sono ideali caratteristici.

Poiché un ideale di un ideale caratteristico di  $\mathfrak{g}$  è un ideale di  $\mathfrak{g}$ , abbiamo:

**Lemma 8.3.13.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero. Allora  $\mathfrak{g}$  è semisemplice se e soltanto se non contiene ideali abeliani  $\neq \{0\}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti,  $\text{rad}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$  se e soltanto se contiene un ideale abeliano diverso da  $\{0\}$ .  $\square$

Possiamo quindi enunciare il:

**Teorema 8.3.14** (criterio di semisemplicità di Cartan). *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero. Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\mathfrak{g}$  sia semisemplice è che la sua forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  sia non degenera.*

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che  $\mathfrak{g}^{\perp}$  è un ideale risolubile per il criterio di risolubilità di Cartan. Quindi, se  $\mathfrak{g}$  è semisemplice, deve essere  $\mathfrak{g}^{\perp} = \{0\}$  e perciò  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  non degenera.

Supponiamo viceversa che  $\mathfrak{g}^{\perp} = \{0\}$  e sia  $\mathfrak{a}$  un ideale abeliano di  $\mathfrak{g}$ . Se  $X \in \mathfrak{a}$ ,  $Y \in \mathfrak{g}$ , allora  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X) \circ \text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a}$  e quindi  $(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X) \circ \text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y))^2(\mathfrak{g}) \subset [X, \mathfrak{a}] = \{0\}$  ci dice che  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X) \circ \text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)$  è nilpotente. Dunque, se  $X \in \mathfrak{a}$ , abbiamo  $\kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = 0$  per ogni  $Y \in \mathfrak{g}$  e dunque  $X = 0$  per l'ipotesi che  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  fosse non degenera. Ciò dimostra che  $\mathfrak{a} = \{0\}$  per ogni ideale abeliano di  $\mathfrak{g}$ , cioè che  $\mathfrak{g}$  è semisemplice.  $\square$

#### 8.4. Alcune proprietà delle algebre di Lie semisemplici

Supporteremo sempre in questo paragrafo che  $\mathbb{k}$  sia un campo di caratteristica zero e che le algebre di Lie considerate siano di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ .

**Teorema 8.4.1.** *Tutte le derivazioni di un'algebra di Lie semisemplice  $\mathfrak{g}$  sono interne. Ogni ideale di un'algebra di Lie semisemplice è semisemplice e caratteristico.*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  è non degenera su  $\mathfrak{g}$ , se  $\mathfrak{a}$  è un ideale di  $\mathfrak{g}$ , allora  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$  è un ideale abeliano. Poiché  $\mathfrak{g}$  è semisemplice, esso deve essere  $\{0\}$ . Quindi la restrizione di  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  ad  $\mathfrak{a}$ , che coincide con  $\kappa_{\mathfrak{a}}$ , è non degenera e  $\mathfrak{a}$  è semisemplice per il criterio di Cartan.

Poiché  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie semisemplice, l'applicazione  $\text{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$  è un monomorfismo ed induce quindi un isomorfismo di  $\mathfrak{g}$  sull'algebra  $\text{int}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$  delle derivazioni interne di  $\mathfrak{g}$ . Questa è dunque un ideale semisemplice di  $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ . Indichiamo con  $\tilde{\kappa}$  la forma di Killing di  $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ . Essa è non degenera su  $\text{int}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$  ed abbiamo quindi la decomposizione in somma diretta di ideali:

$$\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}) = \text{int}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}) \oplus \text{int}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})^{\perp}.$$

Da

$$[\text{int}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}), \text{int}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})^{\perp}] = \{0\}$$

ricaviamo che  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(D(X)) = [D, \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)] = 0$  per ogni  $D \in \text{int}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})^{\perp}$  ed  $X \in \mathfrak{g}$ . Ma  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$  è un monomorfismo e perciò da  $D(X) = 0$  per ogni  $X$  in  $\mathfrak{g}$  deduciamo che  $D = 0$ . La dimostrazione è completa.  $\square$

**Teorema 8.4.2.** *Se  $\mathfrak{g}$  è semisemplice, allora  $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}$  e per ogni ideale  $\mathfrak{a}$  di  $\mathfrak{g}$  si ha  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{a}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti l'ortogonale di  $\mathfrak{g}^{(1)}$  rispetto alla forma di Killing è un ideale abeliano e quindi zero. L'ultima osservazione segue dal fatto che tutti gli ideali di  $\mathfrak{g}$  sono semisemplici.  $\square$

**Teorema 8.4.3.** *Ogni algebra di Lie semisemplice  $\mathfrak{g}$  si decompone in modo unico come somma diretta di ideali semplici.*

**DIMOSTRAZIONE.** *Esistenza della decomposizione.* Se  $\alpha$  è un ideale di  $\mathfrak{g}$ , allora  $\alpha \cap \alpha^\perp$  è un ideale abeliano di  $\mathfrak{g}$  e quindi uguale a  $\{0\}$ . Abbiamo perciò la decomposizione

$$\mathfrak{g} = \alpha \oplus \alpha^\perp$$

di  $\mathfrak{g}$  in somma diretta di ideali. Inoltre le forme di Killing di  $\alpha$  e di  $\alpha^\perp$ , che sono le restrizioni ad  $\alpha$  e ad  $\alpha^\perp$  della forma di Killing di  $\mathfrak{g}$ , sono non degeneri. Per il criterio di Cartan, sia  $\alpha$  che  $\alpha^\perp$  sono semisemplici.

Da queste considerazioni segue per ricorrenza l'esistenza della decomposizione. Infatti, se  $\mathfrak{g}$  è semplice, non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti scegliamo un ideale proprio  $\alpha_1$  di  $\mathfrak{g}$  di dimensione minima. Chiaramente  $\alpha_1$  è semplice perché, essendo caratteristico, ogni suo ideale proprio sarebbe un ideale proprio di  $\mathfrak{g}$  di dimensione inferiore a quella di  $\alpha_1$ . Se anche  $\alpha_1^\perp$  è semplice abbiamo finito. Altrimenti scegliamo un ideale non nullo  $\alpha_2$  di dimensione minima in  $\alpha_1^\perp$ . Se  $(\alpha_1 \oplus \alpha_2)^\perp$  è semplice o  $\{0\}$  abbiamo finito. Altrimenti ripetiamo il ragionamento svolto sopra, definendo  $\alpha_3$  come l'ideale non nullo di dimensione minima di  $(\alpha_1 \oplus \alpha_2)^\perp$ . Iterando questo procedimento, poiché  $\mathfrak{g}$  ha dimensione finita otteniamo la decomposizione di  $\mathfrak{g}$  in somma diretta di ideali semplici:

$$(8.4.1) \quad \mathfrak{g} = \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_m.$$

*Unicità.* Sia 8.4.1 una decomposizione di  $\mathfrak{g}$  in somma diretta di ideali semplici. Se  $\alpha$  è un ideale semplice di  $\mathfrak{g}$ , abbiamo:

$$\alpha = [\alpha, \mathfrak{g}] = [\alpha_1, \alpha] \oplus \cdots \oplus [\alpha_m, \alpha]$$

da cui segue che tutti tranne uno degli ideali a secondo membro sono uguali a zero, ed uno di essi, diciamo  $[\alpha_j, \alpha]$ , è uguale ad  $\alpha$ . Abbiamo quindi  $\alpha = [\alpha_j, \alpha] = \alpha_j$  perché sia  $\alpha$  che  $\alpha_j$  sono semplici e questo dimostra che gli ideali nella decomposizione 8.4.1 sono tutti e soli gli ideali semplici di  $\mathfrak{g}$ . Ciò prova l'unicità.  $\square$

**Teorema 8.4.4.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie semisemplice e sia  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una sua rappresentazione lineare di dimensione finita fedele, tale cioè che  $\ker \rho = \{0\}$ . Allora la forma bilineare invariante  $\beta_\rho$  è non degenera su  $\mathfrak{g}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo in  $\mathfrak{g}$  l'ideale

$$\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \beta_\rho(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Per il criterio di risolubilità di Cartan,  $\rho(\alpha)$ , essendo ortogonale a  $\mathfrak{D}\rho(\mathfrak{g}) = \rho(\mathfrak{g}^{(1)})$ , è risolubile. Poiché abbiamo supposto che  $\rho$  fosse fedele, questo implica che  $\alpha$  è risolubile, e quindi  $\{0\}$  perché  $\mathfrak{g}$  è semisemplice.  $\square$

### 8.5. L'elemento di Casimir di una rappresentazione

Anche in questo paragrafo supporremo che  $\mathbb{k}$  sia un campo di caratteristica zero e tutte le algebre di Lie considerate si intendono di dimensione finita sul campo  $\mathbb{k}$ .

**Teorema 8.5.1.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$  e sia  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una sua rappresentazione lineare di dimensione finita. Sia  $\alpha$  un ideale di  $\mathfrak{g}$*

su cui la forma bilineare simmetrica invariante  $\beta_\rho$  sia non degenere. Fissiamo una base  $X_1, \dots, X_m$  di  $\mathfrak{a}$  e sia  $Y_1, \dots, Y_m$  la base di  $\mathfrak{a}$  tale che

$$(8.5.1) \quad \beta_\rho(X_i, Y_j) = \delta_{i,j} \quad \forall 1 \leq i, j \leq m.$$

Allora l'endomorfismo  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\rho, \mathfrak{a})$  di  $V$  definito da:

$$(8.5.2) \quad \mathbf{c} = \sum_{i=1}^m \rho(X_i) \circ \rho(Y_i) \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$$

commuta con tutti gli elementi di  $\rho(\mathfrak{g})$  ed è indipendente dalla scelta della base  $X_1, \dots, X_m$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo un elemento  $Z$  di  $\mathfrak{g}$  e scriviamo:

$$(8.5.3) \quad [Z, X_i] = a_i^j X_j, \quad [Z, Y_i] = b_i^j Y_j, \quad \text{con } a_i^j, b_i^j \in \mathbb{k} \text{ per } 1 \leq i, j \leq m.$$

I coefficienti  $a_i^j$  e  $b_i^j$  si possono determinare mediante:

$$(8.5.4) \quad a_i^j = \beta_\rho([Z, X_i], Y_j) = -\beta_\rho(X_i, [Z, Y_j]) = -b_j^i \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} [\mathbf{c}, \rho(Z)] &= \sum_{i=1}^m (\rho(X_i) \circ \rho(Y_i) \circ \rho(Z) - \rho(Z) \circ \rho(X_i) \circ \rho(Y_i)) \\ &= \sum_{i=1}^m (\rho(X_i) \circ [\rho(Y_i), \rho(Z)] + [\rho(X_i), \rho(Z)] \circ \rho(Y_i)) \\ &= \sum_{i=1}^m (\rho(X_i) \circ \rho([Y_i, Z]) - \rho([X_i, Z]) \circ \rho(Y_i)) \\ &= \sum_{i,j=1}^m (-b_i^j \rho(X_i) \circ \rho(Y_j) - a_i^j \rho(X_j) \circ \rho(Y_i)) \\ &= - \sum_{i,j=1}^m (b_i^j \rho(X_i) \circ \rho(Y_j) + a_i^j \rho(X_i) \circ \rho(Y_j)) = 0. \end{aligned}$$

Questo dimostra che  $\mathbf{c}$  appartiene al centralizzatore di  $\rho(\mathfrak{g})$  in  $\text{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ .

L'invarianza dell'elemento  $\mathbf{c}$  rispetto alla scelta della base  $X_1, \dots, X_m$  è una semplice verifica.  $\square$

**Definizione 8.5.2.** L'elemento  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\rho, \mathfrak{a})$  si dice *elemento di Casimir* della rappresentazione  $\rho$  su  $\mathfrak{a}$ .

**Teorema 8.5.3.** Sia  $\mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una rappresentazione lineare di dimensione finita dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , sia  $\mathfrak{a}$  un ideale di  $\mathfrak{g}$  su cui  $\beta_\rho$  è non degenere e sia  $\mathbf{c}$  il corrispondente elemento di Casimir di  $\rho$  su  $\mathfrak{a}$ . Allora

$$(8.5.5) \quad \text{tr}_V(\mathbf{c}) = \dim_{\mathbb{k}}(\mathfrak{a}).$$

Se  $\rho$  è irriducibile, allora  $\mathbf{c}$  è invertibile. Se  $\mathbb{k}$  è algebricamente chiuso, allora

$$(8.5.6) \quad \mathbf{c} = \left( \frac{\dim_{\mathbb{k}} \alpha}{\dim_{\mathbb{k}} V} \right) \cdot \text{Id}_V.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, con le notazioni del lemma precedente, abbiamo:

$$\text{tr}_V(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^m \text{tr}_V(\rho(X_i) \circ \rho(Y_i)) = \sum_{i=1}^m \beta_\rho(X_i, Y_i) = m,$$

ove  $m = \dim_{\mathbb{k}} \alpha$ . Se  $\rho$  è irriducibile, per il lemma di Schur  $\mathbf{c}$  è invertibile e, se  $\mathbb{k}$  è algebricamente chiuso,  $\mathbf{c}$  è un multiplo dell'identità. Supponiamo ora che  $\mathfrak{g}$  sia semisemplice e sia  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una sua rappresentazione lineare di dimensione finita. Il nucleo di  $\rho$  è un ideale di  $\mathfrak{g}$  ed ammette quindi un complementare  $\alpha = (\ker \rho)^\perp$  (ortogonale rispetto alla forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}}$ ), su cui la  $\beta_\rho$  è non degenere. La  $\beta_\rho$  è non degenere su  $\alpha$  per il Teorema 8.4.  $\square$

### 8.6. Il teorema di Weyl

Al solito supponiamo che il campo  $\mathbb{k}$  abbia caratteristica zero e che tutte le algebre di Lie (su  $\mathbb{k}$ ) considerate abbiano dimensione finita.

**Lemma 8.6.1.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie semisemplice. Se  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  è una rappresentazione di dimensione finita di  $\mathfrak{g}$ , allora  $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}_{\mathbb{k}}(V)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , otteniamo

$$\rho(\mathfrak{g}) = [\rho(\mathfrak{g}), \rho(\mathfrak{g})] \subset [\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V), \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)] = \mathfrak{sl}_{\mathbb{k}}(V).$$

$\square$

Dimostriamo ora il:

**Teorema 8.6.2 (Weyl).** *Ogni rappresentazione lineare di dimensione finita di un'algebra di Lie semisemplice, di dimensione finita su un campo di caratteristica 0, è completamente riducibile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie semisemplice, di dimensione finita sul campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica 0. Sia  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una sua rappresentazione lineare di dimensione finita.

Se  $\dim_{\mathbb{k}}(V) \leq 1$ , la tesi è banalmente vera. Supporremo quindi nel seguito che  $n = \dim_{\mathbb{k}} V > 1$ .

(1) Consideriamo dapprima il caso in cui  $V$  contenga un sottospazio  $\mathfrak{g}$ -invariante  $W$  di codimensione uno in  $V$ . Ragioniamo per ricorrenza su  $n = \dim_{\mathbb{k}} V$ .

(1a) Mostriamo che possiamo ricondurci al caso in cui  $W$  sia un  $\mathfrak{g}$ -modulo irriducibile.

Se  $\{0\} \neq U \subsetneq W$  è un sottospazio  $\mathfrak{g}$ -invariante, possiamo considerare la successione esatta di  $\mathfrak{g}$ -moduli:

$$0 \longrightarrow W/U \longrightarrow V/U \longrightarrow \mathbb{k} \longrightarrow 0.$$

Poiché  $\dim_{\mathbb{k}}(V/U) < \dim_{\mathbb{k}} V$ , per l'ipotesi induttiva esiste un sottospazio di dimensione uno  $\mathfrak{g}$ -invariante  $W_1/U$  di  $V/U$  tale che

$$V/U = W/U \oplus W_1/U.$$

Allora la

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow W_1 \longrightarrow \mathbb{k} \longrightarrow 0$$

è una successione esatta di  $\mathfrak{g}$ -moduli. Poiché  $\dim_{\mathbb{k}} W_1 < \dim_{\mathbb{k}} V$  ed  $U$  ha codimensione uno in  $W_1$ , per l'ipotesi induttiva  $W_1$  contiene una retta  $\mathfrak{g}$ -invariante  $L$  tale che  $W_1 = U \oplus L$ . Da questa ricaviamo che  $V = W \oplus L$  e quindi abbiamo ottenuto un complemento  $\mathfrak{g}$ -invariante di  $W$  in  $V$ .

(1b) Supponiamo quindi che  $W$  sia un sottospazio di codimensione uno di  $V$  ed un  $\mathfrak{g}$ -modulo irriducibile. Sia  $\mathfrak{c}_\rho$  l'elemento di Casimir della rappresentazione  $\rho$ . Poiché  $\mathfrak{c}_\rho$  commuta con gli elementi di  $\rho(\mathfrak{g})$ , e  $\rho(\mathfrak{g})(V) \subset W$  in quanto le rappresentazioni uno-dimensionali di un'algebra di Lie semisemplice sono banali per il Lemma 8.6.1, abbiamo  $\mathfrak{c}_\rho(W) \subset W$  e  $\ker \mathfrak{c}_\rho$  è un sotto- $\mathfrak{g}$ -modulo di  $V$ . Inoltre  $\mathfrak{c}_\rho$  è invertibile su  $W$  e nullo su  $V/W$ . Quindi  $\ker \mathfrak{c}_\rho$  è una retta  $\mathfrak{g}$ -invariante di  $V$  tale che  $V = W \oplus \ker \mathfrak{c}_\rho$ .

(2) Consideriamo ora il caso generale.

Se  $V$  è un  $\mathfrak{g}$ -modulo irriducibile, non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo che vi sia un sotto- $\mathfrak{g}$ -modulo  $W$  con  $\{0\} \neq W \subsetneq V$ . Consideriamo la rappresentazione  $\Psi$  indotta da  $\rho$  su  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ . Sia  $\mathcal{V}$  il sottospazio di  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$  che consiste delle applicazioni lineari  $\alpha : V \rightarrow W$  la cui restrizione a  $W$  sia un multiplo dell'identità su  $W$ :

$$\alpha(w) = k_\alpha \cdot w \quad \forall w \in W.$$

Se  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $w \in W$  ed  $\alpha \in \mathcal{V}$ , abbiamo:

$$\Psi(X)(\alpha)(w) = \rho(X)(\alpha(w)) - \alpha(\rho(X)(w)) = 0.$$

Sia  $\mathcal{W}$  il sottospazio delle  $\alpha$  di  $\mathcal{V}$  che si annullano su  $W$ . Anch'esso è un sottospazio  $\Psi(\mathfrak{g})$ -invariante; inoltre  $\Psi(\mathfrak{g})(\mathcal{V}) \subset \mathcal{W}$  e  $\mathcal{V}/\mathcal{W}$  ha dimensione uno. Per la parte (1) della dimostrazione, esiste una retta  $\Psi(\mathfrak{g})$ -invariante  $\mathcal{L}$  tale che  $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{L}$ . Fissiamo un generatore  $\alpha_0$  di  $\mathcal{L}$ . Abbiamo

$$\rho(X) \circ \alpha_0 - \alpha_0 \circ \rho(X) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

perché tutte le rappresentazioni uno-dimensionali di  $\mathfrak{g}$  sono nulle. Quindi  $\ker \alpha_0$  è un sotto- $\mathfrak{g}$ -modulo di  $V$  e  $V = W \oplus \ker \alpha_0$ .

La dimostrazione è completa.  $\square$

### 8.7. Algebre di Lie spezzabili

Sia  $\mathbb{k}$  un campo di caratteristica zero.

**Definizione 8.7.1.** Un'algebra di Lie lineare  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  si dice *spezzabile* se per ogni elemento  $X$  di  $\mathfrak{g}$  la sua componente semisemplice  $S_X$  e la sua componente nilpotente  $N_X$  nella decomposizione di Wedderburn sono anch'esse elementi di  $\mathfrak{g}$ .

**Lemma 8.7.2.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ . Allora l'algebra  $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$  delle sue derivazioni è spezzabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo supporre che  $\mathbb{k}$  sia algebricamente chiuso. Sia  $D$  una derivazione di  $\mathfrak{g}$  ed  $S$  ed  $N$  rispettivamente la sua componente semisemplice e la sua componente nilpotente nella sua decomposizione di Wedderburn in  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ . Per ogni  $\lambda \in \mathbb{k}$ , poniamo

$$\mathfrak{g}^\lambda = \bigcup_{m \geq 0} \ker(D - \lambda)^m.$$

Si verifica allora che

$$[\mathfrak{g}^{\lambda_1}, \mathfrak{g}^{\lambda_2}] \subset \mathfrak{g}^{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Ciò deriva dall'identità:

$$(D - (\lambda_1 + \lambda_2))^n([X, Y]) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} [(D - \lambda_1)^m(X), (D - \lambda_2)^{n-m}(Y)]$$

$$\forall n = 0, 1, 2, \dots, \quad X, Y \in \mathfrak{g},$$

che si dimostra facilmente per induzione su  $n$ . Ne segue che

$$S([X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}]) = (\lambda_1 + \lambda_2)[X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}] \quad \forall X_{\lambda_1} \in \mathfrak{g}^{\lambda_1}, X_{\lambda_2} \in \mathfrak{g}^{\lambda_2},$$

e da questa formula segue facilmente che  $S$ , e quindi  $N = D - S$ , è una derivazione di  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

In particolare, data un'algebra di Lie semisemplice  $\mathfrak{g}$ , poiché tutte le derivazioni di  $\mathfrak{g}$  sono interne, potremo associare ad ogni elemento  $X$  gli elementi  $S_X$  ed  $N_X$  tali che

$$\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X) = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(S_X) + \text{ad}_{\mathfrak{g}}(N_X)$$

sia la decomposizione di Wedderburn della derivazione  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$  di  $\mathfrak{g}$ .

**Definizione 8.7.3.** Chiameremo  $S_X$  ed  $N_X$  le componenti *semisemplice* e *nilpotente*, rispettivamente, di  $X$  in  $\mathfrak{g}$ .

**Teorema 8.7.4.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{k}$  e sia  $\mathfrak{g}$  una sottoalgebra di Lie semisemplice di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ . Allora  $\mathfrak{g}$  contiene le componenti semisemplice e nilpotente di ogni suo elemento.

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo supporre che  $\mathbb{k}$  sia algebricamente chiuso. Per ogni sottospazio lineare  $W$  di  $V$  indichiamo con  $\mathfrak{a}_W$  la sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  formata dagli endomorfismi lineari  $X$  tali che  $X(W) \subset W$  e  $\text{tr}_W(X) = 0$ . Poiché  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)}$ , abbiamo in particolare  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}_W$  per ogni sotto- $\mathfrak{g}$ -modulo  $W$  di  $V$ . Sia allora  $\tilde{\mathfrak{g}}$  l'intersezione del normalizzatore di  $\mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  con le algebre di Lie  $\mathfrak{a}_W$  al variare di  $W$  tra i sotto- $\mathfrak{g}$ -moduli di  $V$ . Sia  $X \in \mathfrak{g}$  e siano  $S_X$  ed  $N_X$  le componenti semisemplice e nilpotente della sua decomposizione di Wedderburn. Poiché  $S_X$  ed  $N_X$  sono polinomi di  $X$  privi di termine costante, abbiamo  $S_X, N_X \in \tilde{\mathfrak{g}}$ .

Mostriamo che  $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$ . Osserviamo che  $\mathfrak{g}$  è un ideale semisemplice di  $\tilde{\mathfrak{g}}$  e quindi, detto  $\mathfrak{g}^\perp$  l'ortogonale di  $\mathfrak{g}$  in  $\tilde{\mathfrak{g}}$  rispetto alla forma di Killing di  $\tilde{\mathfrak{g}}$ , abbiamo la decomposizione di  $\tilde{\mathfrak{g}}$  in somma diretta di ideali:  $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^\perp$ . Sia  $W$  un sotto- $\mathfrak{g}$ -modulo irriducibile di  $V$ . Per il Lemma di Schur, la restrizione di un qualsiasi elemento  $A$  di  $\mathfrak{g}^\perp$  è un multiplo dell'identità su  $W$ . Poiché  $A$  ha traccia nulla su  $W$ , ne segue che  $A = 0$ . Poiché  $V$  è somma diretta di  $\mathfrak{g}$ -moduli semplici, da questa osservazione deduciamo che  $\mathfrak{g}^\perp = \{0\}$  e quindi  $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$ .  $\square$

**Teorema 8.7.5.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ . Sia  $X \in \mathfrak{sl}_{\mathbb{k}}(V)$ . Allora  $X = S_X + N_X$  è la sua decomposizione di Wedderburn se e soltanto se  $\text{ad}_{\mathfrak{sl}_{\mathbb{k}}(V)}(S_X)$  e  $\text{ad}_{\mathfrak{sl}_{\mathbb{k}}(V)}(N_X)$  sono le componenti semisemplice e nilpotente nella decomposizione di Wedderburn di  $\text{ad}_{\mathfrak{sl}_{\mathbb{k}}(V)}(X)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che, se  $X = S_X + N_X$  è la decomposizione di Wedderburn di  $X$ , allora  $\text{ad}_{\mathfrak{sl}_{\mathbb{k}}(V)}(S_X)$  e  $\text{ad}_{\mathfrak{sl}_{\mathbb{k}}(V)}(N_X)$  sono rispettivamente semisemplice e nilpotente. La tesi segue dall'unicità della decomposizione di Wedderburn. (Nota che  $\text{tr}_V(S_X) = \text{tr}_V(X) - \text{tr}_V(N_X) = 0$  e quindi  $S_X \in \mathfrak{sl}_{\mathbb{k}}(V)$ ).  $\square$

Vale il seguente:

**Teorema 8.7.6.** *Sia  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una rappresentazione lineare di dimensione finita di un'algebra di Lie semisemplice. Allora  $\rho(X) = \rho(S_X) + \rho(N_X)$  è, per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ , la decomposizione di Wedderburn dell'endomorfismo  $\rho(X)$  di  $V$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo ricondurci al caso in cui  $\mathbb{k}$  sia algebricamente chiuso. Fissiamo  $X \in \mathfrak{g}$  e sia  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{k}} \mathfrak{g}^{\lambda}$  la decomposizione spettrale di  $\mathfrak{g}$  rispetto all'endomorfismo  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ . Se  $Y \in \mathfrak{g}^{\lambda}$  abbiamo:

$$[\rho(S_X), \rho(Y)] = \rho([X, Y]) = \lambda \rho(Y)$$

e quindi otteniamo la decomposizione

$$\rho(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{k}} \rho(\mathfrak{g}^{\lambda}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{k}} \rho(\mathfrak{g}^{\lambda}).$$

Chiaramente  $\text{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(S_X))$  e  $\text{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(N_X))$  sono le componenti semisemplice e nilpotente di  $\text{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(X))$ . Poiché  $\rho(\mathfrak{g})$  è semisemplice, abbiamo  $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}_{\mathbb{k}}(V)$ . Ne segue che  $\rho(S_X)$  e  $\rho(N_X)$  sono la componente semisemplice e nilpotente di  $\rho(X)$  per il Teorema 8.7.4.  $\square$



## Coomologia delle algebre di Lie e teorema di Levi-Malcev

### 9.1. Coomologia delle algebre di Lie

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ .

Sia  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una rappresentazione lineare di  $\mathfrak{g}$ . Nel Capitolo X introdurremo l'algebra involuante universale  $\mathfrak{G}$  e mostreremo che è possibile considerare  $V$  come un  $\mathfrak{G}$ -modulo. Poiché  $\mathfrak{G}$  è un anello associativo unitario, ha senso calcolare i gruppi  $\text{Ext}_{\mathfrak{G}}^p(\mathbb{k}, V)$ . Questi gruppi si indicano con  $H^p(\mathfrak{g}, V)$  e si dicono i *gruppi di coomologia di  $\mathfrak{g}$  a coefficienti in  $V$* .

Ne daremo comunque qui una definizione intrinseca, che corrisponde alla rappresentazione che se ne otterrebbe a partire da una risoluzione del  $\mathfrak{G}$ -modulo banale  $\mathbb{k}$ , evitando così il riferimento esplicito all'algebra omologica.

Utilizzeremo queste nozioni nella dimostrazione del teorema di Levi-Malcev.

Fissiamo una rappresentazione lineare  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  di  $\mathfrak{g}$  e scriviamo per semplicità

$$(9.1.1) \quad Xv = \rho(X)(v), \quad \text{per } X \in \mathfrak{g}, v \in V.$$

**Definizione 9.1.1.** Sia  $\Lambda^q(\mathfrak{g}, V)$  lo spazio vettoriale delle forme  $q$ -multilineari alternate a coefficienti in  $V$ . Poniamo

$$(9.1.2) \quad \begin{aligned} (\mathfrak{d}_q \alpha)(X_0, \dots, X_q) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i X_i \alpha(\dots, \widehat{X}_i, \dots) \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots), \end{aligned}$$

$\forall \alpha \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, V), \forall X_0, \dots, X_q \in \mathfrak{g}.$

In questo modo definiamo un omomorfismo di  $\mathfrak{g}$ -moduli

$$(9.1.3) \quad \mathfrak{d}_q : \Lambda^q(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow \Lambda^{q+1}(\mathfrak{g}, V).$$

Si verifica facilmente

**Lemma 9.1.2.**  $\mathfrak{d}_{q+1} \circ \mathfrak{d}_q = 0$  per ogni intero  $q \geq 0$ .

Otteniamo perciò un complesso di spazi vettoriali ed applicazioni  $\mathbb{k}$ -lineari

$$(9.1.4) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda^0(\mathfrak{g}, V) & \xrightarrow{\mathfrak{d}_0} & \Lambda^1(\mathfrak{g}, V) & \longrightarrow & \\ & & \dots & \longrightarrow & \Lambda^q(\mathfrak{g}, V) & \xrightarrow{\mathfrak{d}_q} & \Lambda^{q+1}(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Poniamo  $\mathfrak{d}_{-1} = 0 : 0 \rightarrow \Lambda^0(\mathfrak{g}, V) \simeq V$ .

**Definizione 9.1.3.** Definiamo, per ogni intero non negativo  $q$ , il  $q$ -esimo gruppo di coomologia di  $\mathfrak{g}$  a coefficienti in  $V$  come il quoziente

$$(9.1.5) \quad H^q(\mathfrak{g}, V) = \frac{\ker \mathfrak{d}_q}{\text{Imm } \mathfrak{d}_{q-1}}.$$

**Il primo gruppo di coomologia e le derivazioni.** Osserviamo che

$$(\mathfrak{d}_0 v)(X) = Xv \quad \text{per } v \in V, X \in \mathfrak{g},$$

$$(\mathfrak{d}_0 \theta)(X, Y) = X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta([X, Y]) \quad \text{per } \theta \in \Lambda^1(\mathfrak{g}, V), X, Y \in \mathfrak{g}.$$

In particolare:

$$\ker \mathfrak{d}_0 = H^0(\mathfrak{g}, V) = \{v \in V \mid Xv = 0, \forall X \in \mathfrak{g}\},$$

$$\begin{aligned} \ker \mathfrak{d}_1 &= \{D \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}, V) \mid D([X, Y]) = XD(Y) - YD(X)\} \\ &= \text{Der}(\mathfrak{g}, V). \end{aligned}$$

**Definizione 9.1.4.** Chiamiamo *interna* una derivazione a valori in  $V$  della forma

$$(9.1.6) \quad D_v(X) = Xv, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \text{per } v \in V.$$

Sia

$$(9.1.7) \quad \text{Der}_0(\mathfrak{g}, V) = \{D_v \mid v \in V\}.$$

Abbiamo allora

**Lemma 9.1.5.**  $H^1(\mathfrak{g}, V) = \text{Der}(\mathfrak{g}, V)/\text{Der}_0(\mathfrak{g}, V)$ .

Se  $V$  è un  $\mathfrak{g}$ -modulo banale, allora  $H^1(\mathfrak{g}, V) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}, V)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La prima affermazione è conseguenza diretta della definizione. Verifichiamo la seconda. Se  $Xv = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{g}$  e  $v \in V$ , allora  $\text{Imm } \mathfrak{d}_0 = 0$  e  $\ker \mathfrak{d}_1 \simeq H^1(\mathfrak{g}, V)$  consiste delle applicazioni  $\mathbb{k}$  lineari  $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow V$  per cui

$$(9.1.8) \quad \theta([X, Y]) = X\theta(Y) - Y\theta(X) = 0,$$

e quindi si identifica con  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}, V)$ .  $\square$

**Derivazioni e prodotti semidiretti.** Le derivazioni di un'algebra di Lie sono legate ai prodotti semidiretti, cioè alle estensioni spezzabili.

Sia  $\mathfrak{q}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$  e  $V$  un  $\mathfrak{q}$ -modulo. Definiamo sulla somma diretta

$$(9.1.9) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{q} \oplus V$$

una struttura di algebra di Lie, con prodotto  $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ , ponendo

$$(9.1.10) \quad \llbracket X \oplus u, Y \oplus v \rrbracket = [X, Y] \oplus (Xv - Yu), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{q}, \forall u, v \in V.$$

L'inclusione naturale  $V \ni v \rightarrow 0 \oplus v \in \mathfrak{g}$  ci permette di identificare  $V$  ad un ideale abeliano di  $\mathfrak{g}$ .

**Definizione 9.1.6.** L'algebra di Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \oplus V$ , con la struttura definita da (9.1.10), si dice *l'estensione abeliana banale* di  $\mathfrak{q}$  mediante  $V$ .

Indichiamo con  $\pi_{\mathfrak{q}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{q}$  e  $\pi_V : \mathfrak{g} \rightarrow V$  le proiezioni naturali.

**Proposizione 9.1.7.** *Sia  $\mathfrak{g}$  l'estensione abeliana banale di  $\mathfrak{q}$  mediante  $V$ . Allora lo spazio  $\text{Der}(\mathfrak{q}, V)$  delle derivazioni di  $\mathfrak{q}$  a valori in  $V$  è isomorfo, in modo canonico, allo spazio degli omomorfismi di algebre di Lie  $\phi : \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$  tali che  $\pi_{\mathfrak{g}} \circ \phi$  sia l'identità su  $\mathfrak{q}$ .*

Se  $D \in \text{Der}(\mathfrak{q}, V)$ , l'applicazione

$$(9.1.11) \quad \lambda_D : \mathfrak{g} \ni X \oplus v \longrightarrow X \oplus (v + D(X)) \in \mathfrak{g}$$

è un automorfismo di  $\mathfrak{g}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \oplus V$  è un omomorfismo di algebre di Lie con  $\pi_{\mathfrak{g}} \circ \phi = \text{id}_{\mathfrak{g}}$ , definiamo

$$D_{\phi}(X) = \pi_V \circ \phi(X), \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Poiché  $\phi$  è un omomorfismo di algebre di Lie, abbiamo

$$\begin{aligned} D_{\phi}([X, Y]) &= \pi_V(\phi([X, Y])) = \pi_V(\phi(\phi(X), \phi(Y))) = \pi_V(\llbracket \phi(X), \phi(Y) \rrbracket) \\ &= \pi_V(\llbracket X \oplus \pi_V \circ \phi(X), Y \oplus \pi_V \circ \phi(Y) \rrbracket) \\ &= \pi_V([X, Y] \oplus \{X(\pi_V \circ \phi(Y)) - Y(\pi_V \circ \phi(X))\}) \\ &= X(\pi_V \circ \phi(Y)) - Y(\pi_V \circ \phi(X)) = XD_{\phi}(Y) - YD_{\phi}(X), \end{aligned}$$

e quindi  $D_{\phi} \in \text{Der}(\mathfrak{g}, V)$ .

Viceversa, se  $D \in \text{Der}(\mathfrak{g}, V)$ , possiamo definire

$$\phi_D : \mathfrak{g} \ni X \rightarrow X \oplus D(X) \in \mathfrak{g} \oplus V.$$

Poiché

$$\begin{aligned} \llbracket \phi_D(X), \phi_D(Y) \rrbracket &= \llbracket X \oplus D(X), Y \oplus D(Y) \rrbracket \\ &= [X, Y] \oplus \{XD(Y) - YD(X)\} = \phi_D([X, Y]), \end{aligned}$$

questo è un omomorfismo di algebre di Lie. Chiaramente l'applicazione  $\phi \rightarrow D_{\phi}$  è bigettiva, con inversa  $D \rightarrow \phi_D$ .

Sia  $D \in \text{Der}(\mathfrak{q}, V)$ . Allora

$$\begin{aligned} \llbracket \lambda_D(X \oplus u), \lambda_D(Y \oplus v) \rrbracket &= \llbracket X \oplus (u + D(X)), Y \oplus (v + D(Y)) \rrbracket \\ &= [X, Y] \oplus (Xv - Yu + XD(Y) - YD(X)) \\ &= [X, Y] \oplus (Xv - Yu + D([X, Y])) \\ &= \lambda_D([X, Y] \oplus (Xv - Yu)) \\ &= \lambda_D(\llbracket X \oplus u, Y \oplus v \rrbracket), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{q}, \forall u, v \in V. \end{aligned}$$

Questo dimostra che  $\lambda_D$  è un omomorfismo di algebre di Lie. Si verifica facilmente che  $\lambda_{-D}$  è l'inversa di  $\lambda_D$ , che è quindi un automorfismo di  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

**Il secondo gruppo di coomologia e le estensioni.** Se  $\mathfrak{a}$  è un ideale di  $\mathfrak{g}$ , il quoziente  $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  è un'algebra di Lie ed abbiamo una successione esatta

$$(9.1.12) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{q} \longrightarrow 0$$

di algebre di Lie e di omomorfismi di algebre di Lie. L'omomorfismo  $\iota$  è l'inclusione,  $\pi$  la proiezione sul quoziente.

Osserviamo che ogni  $\mathfrak{q}$ -modulo  $V$  diviene un  $\mathfrak{g}$ -modulo mediante l'azione

$$(9.1.13) \quad Xv = \pi(X)v, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall v \in V.$$

Consideriamo poi  $V$  come un  $\mathfrak{a}$ -modulo banale. Considereremo allora i differenziali:

$$\mathfrak{d}_q^{\mathfrak{a}} : \Lambda^q(\mathfrak{a}, V) \longrightarrow \Lambda^{q+1}(\mathfrak{a}, V),$$

$$\mathfrak{d}_q^{\mathfrak{g}} : \Lambda^q(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow \Lambda^{q+1}(\mathfrak{g}, V),$$

$$\mathfrak{d}_q^{\mathfrak{q}} : \Lambda^q(\mathfrak{q}, V) \longrightarrow \Lambda^{q+1}(\mathfrak{q}, V).$$

Risultano definite applicazioni

$$\pi^* : \Lambda^q(\mathfrak{q}, V) \longrightarrow \Lambda^q(\mathfrak{g}, V),$$

$$\iota^* : \Lambda^q(\mathfrak{q}, V) \longrightarrow \Lambda^q(\mathfrak{a}, V),$$

caratterizzate da

$$\pi^* \theta(X_1, \dots, X_q) = \theta(\pi(X_1), \dots, \pi(X_q)), \quad \forall \theta \in \Lambda^q(\mathfrak{q}, V), \quad \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{q},$$

$$\iota^* \eta(X_1, \dots, X_q) = \eta(X_1, \dots, X_q), \quad \forall \eta \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, V), \quad \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{a}.$$

Osserviamo che le  $\pi^* : \Lambda^q(\mathfrak{q}, V) \longrightarrow \Lambda^q(\mathfrak{g}, V)$  sono iniettive.

**Lemma 9.1.8.** *Valgono le*

$$(9.1.14) \quad \pi^* \circ \mathfrak{d}_q^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{d}_q^{\mathfrak{g}} \circ \pi^*, \quad \iota^* \circ \mathfrak{d}_q^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{d}_q^{\mathfrak{a}} \circ \iota^*, \quad \forall q \in \mathbb{Z}_+.$$

In particolare, risultano univocamente definiti gli omomorfismi

$$(9.1.15) \quad \pi^* : H^q(\mathfrak{q}, V) \ni [\theta] \longrightarrow [\pi^* \theta] \in H^q(\mathfrak{g}, V),$$

$$(9.1.16) \quad \iota^* : H^q(\mathfrak{g}, V) \ni [\theta] \longrightarrow [\iota^* \theta] \in H^q(\mathfrak{a}, V).$$

Indichiamo con  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, V)$  lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari  $\psi : \mathfrak{a} \rightarrow V$  che sono omomorfismi di  $\mathfrak{g}$ -moduli, tali cioè che risulti

$$(9.1.17) \quad \pi(X)\psi(A) = \psi([X, A]), \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall A \in \mathfrak{a}.$$

**Lemma 9.1.9.** *Per ogni  $\psi \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, V)$  possiamo trovare  $\psi' \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}, V) = \Lambda^1(\mathfrak{g}, V)$  e  $\theta' \in \Lambda^2(\mathfrak{q}, V)$  tali che*

$$(9.1.18) \quad \iota^* \psi' = \psi'|_{\mathfrak{a}} = \psi, \quad \mathfrak{d}_2^{\mathfrak{q}} \theta' = 0, \quad \pi^* \theta' = \mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}} \psi'.$$

*La corrispondenza*

$$(9.1.19) \quad \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, V) \ni \psi \longrightarrow [\theta'] \in H^2(\mathfrak{q}, V),$$

*ove abbiamo indicato con  $[\theta']$  la classe di coomologia definita da  $\theta'$ , definita da (9.1.18) è un'applicazione lineare.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\psi \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, V)$  e sia  $\psi' \in \Lambda^1(\mathfrak{g}, V)$  una qualsiasi estensione di  $\psi$ . Se  $X \in \mathfrak{a}$  ed  $Y \in \mathfrak{g}$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}} \psi'(X, Y) &= \pi(X)\psi'(Y) - \pi(Y)\psi'(X) - \psi'([X, Y]) \\ &= -\pi(Y)\psi(X) + \psi([Y, X]) = 0 \end{aligned}$$

per la (9.1.17). Quindi il nucleo di  $\mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}}\psi'$  contiene  $\mathfrak{a}$ , e dunque  $\mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}}\psi'$  definisce una forma  $\theta' \in \Lambda^2(\mathfrak{q}, V)$  tale che  $\pi^*\theta' = \mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}}\psi'$ . Poiché le  $\pi^*$  sono iniettive, da

$$\pi^*\mathfrak{d}_2^{\mathfrak{q}}\theta' = \mathfrak{d}_2^{\mathfrak{q}}\pi^*\theta' = \mathfrak{d}_2^{\mathfrak{q}}\mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}}\psi' = 0$$

segue che  $\mathfrak{d}_2^{\mathfrak{q}}\theta' = 0$ .

Se  $\psi'' \in \Lambda^1(\mathfrak{g}, V)$  è un altro prolungamento di  $\psi$ , allora  $\psi' - \psi''$  si annulla su  $\mathfrak{a}$  e definisce quindi un elemento  $\alpha \in \Lambda^1(\mathfrak{q}, V)$  con  $\psi' - \psi'' = \pi^*\alpha$ . Se  $\pi^*\theta'' = \mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}}\psi''$ , abbiamo

$$\pi^*(\theta' - \theta'') = \mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}}(\psi' - \psi'') = \mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}}\pi^*\alpha = \pi^*\mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}}\alpha \implies \theta' - \theta'' = \mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}}\alpha.$$

La dimostrazione è completa.  $\square$

Vale il

**Teorema 9.1.10.** *Dalla successione esatta (9.1.12) otteniamo, per ogni  $\mathfrak{q}$ -modulo  $V$  una successione esatta lunga*

$$(9.1.20) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Der}(\mathfrak{q}, V) & \xrightarrow{\pi^*} & \text{Der}(\mathfrak{g}, V) & \xrightarrow{r_{\mathfrak{a}}} & \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, V) \\ & & \xrightarrow{\delta} & & \xrightarrow{\pi^*} & & \\ & & H^2(\mathfrak{q}, V) & & H^2(\mathfrak{g}, V) & & \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Alla derivazione  $D \in \text{Der}(\mathfrak{q}, V)$  facciamo corrispondere la derivazione  $\bar{D} = \pi^*D \in \text{Der}(\mathfrak{g}, V)$ , definita da

$$\bar{D}(X) = D(\pi(X)), \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Viceversa, una derivazione  $\bar{D} \in \text{Der}(\mathfrak{g}, V)$  definisce una derivazione in  $\text{Der}(\mathfrak{q}, V)$  se e soltanto se si annulla su  $\mathfrak{a}$ . Questo dimostra l'esattezza della (9.1.20) in  $\text{Der}(\mathfrak{g}, V)$ .

Sia  $\psi \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, V)$ , con  $\delta(\psi) = 0$ . Sia  $\psi' \in \Lambda^1(\mathfrak{g}, V)$  un qualsiasi prolungamento di  $\psi$  e sia  $\theta' \in \Lambda^2(\mathfrak{q}, V)$  tale che  $\pi^*\theta' = \mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}}\psi'$ . Poiché  $\theta'$  è coomologa a 0, possiamo trovare una  $\alpha \in \Lambda^1(\mathfrak{q}, V)$  tale che  $\theta' = \mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}}\alpha$ . Allora

$$\mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}}(\psi' - \pi^*\alpha) = 0.$$

Quindi  $\psi' - \pi^*\alpha \in \text{Der}(\mathfrak{g}, V)$  e la sua restrizione ad  $\mathfrak{a}$  è uguale a  $\psi$ . Questo dimostra l'esattezza in  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, V)$ .

Sia ora  $\theta \in \Lambda^2(\mathfrak{q}, V)$ , con  $\mathfrak{d}_2^{\mathfrak{q}}\theta = 0$  e  $\pi^*[\theta] = [\pi^*\theta] = 0$ , ove, come al solito, abbiamo indicato con  $[\theta]$  l'elemento di  $H^2(\mathfrak{q}, V)$  definito da  $\theta$  e con  $[\pi^*\theta]$  l'elemento di  $H^2(\mathfrak{g}, V)$  definito da  $\pi^*\theta$ . Sia  $\eta \in \Lambda^1(\mathfrak{g}, V)$  tale che  $\mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}}\eta = \pi^*\theta$ . Se  $X \in \mathfrak{g}$  ed  $Y \in \mathfrak{a}$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \pi(X)\eta(Y) &= (\mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}}\eta)(X, Y) + \pi(Y)\eta(X) + \eta([X, Y]) \\ &= \theta(\pi(X), \pi(Y)) + \pi(Y)\eta(X) + \eta([X, Y]) \\ &= \eta([X, Y]). \end{aligned}$$

Quindi la restrizione di  $\eta$  ad  $\mathfrak{a}$  definisce un elemento  $\psi$  di  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, V)$  per cui  $\delta(\psi) = [\theta]$ . Ciò completa la dimostrazione.  $\square$

**Definizione 9.1.11.** Chiamiamo una successione esatta (9.1.12) un'*estensione* dell'algebra di Lie  $\mathfrak{q}$ .

**Estensioni abeliane.** Supponiamo ora che l'ideale  $\mathfrak{a}$  in (9.1.12) sia abeliano. Allora

$$[X, A] = [Y, A], \quad \forall A \in \mathfrak{a} \quad \text{se } X - Y \in \mathfrak{a}.$$

Possiamo quindi definire su  $\mathfrak{a}$  una struttura di  $\mathfrak{q}$ -modulo ponendo

$$\pi(X) \cdot A = [X, A], \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Diciamo che la struttura di  $\mathfrak{q}$ -modulo di  $\mathfrak{a}$  è *indotta dall'estensione* (9.1.12).

Viceversa, dato un  $\mathfrak{q}$ -modulo se  $V$ , possiamo considerare le successioni esatte

$$(9.1.21) \quad 0 \longrightarrow V \xrightarrow{\iota} \mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{q} \longrightarrow 0$$

tali che

- (1)  $\mathfrak{g}$  sia un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ ,
- (2)  $\iota(V)$  sia un ideale abeliano di  $\mathfrak{g}$ ,
- (3)  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{q}$  sia un omomorfismo surgettivo di algre di Lie,
- (4)  $\iota(\pi(X)v) = [X, \iota(v)]$  per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $v \in V$ .

**Definizione 9.1.12.** Una successione esatta (9.1.21) che soddisfi (1), (2), (3), (4) si dice un'*estensione abeliana* di  $\mathfrak{q}$  mediante  $V$ .

Se

$$(9.1.22) \quad 0 \longrightarrow V \xrightarrow{\iota} \mathfrak{g}' \xrightarrow{\pi} \mathfrak{q} \longrightarrow 0$$

è un'altra estensione abeliana di  $\mathfrak{q}$  mediante  $V$ , diciamo che essa è *equivalente* alla (9.1.21) se esiste un isomorfismo di algre di Lie  $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  che renda commutativo il diagramma

$$(9.1.23) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\iota} & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{q} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \alpha \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\iota} & \mathfrak{g}' & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{q} \longrightarrow 0. \end{array}$$

**Teorema 9.1.13.** *C'è una corrispondenza biunivoca tra  $H^2(\mathfrak{q}, V)$  e l'insieme delle classi di isomorfismo di estensioni abeliane di  $\mathfrak{q}$  mediante  $V$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\theta \in \Lambda^2(\mathfrak{q}, V)$ , con  $d_2(\theta) = 0$ . Abbiamo cioè

$$\begin{aligned} X\theta(Y, Z) + Y\theta(Z, X) + Z\theta(X, Y) \\ - \theta([X, Y], Z) - \theta([Y, Z], X) - \theta([Z, X], Y) = 0, \\ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{q}. \end{aligned}$$

Definiamo su  $\mathfrak{q} \oplus V$  una struttura di algebra di Lie ponendo

$$[[X \oplus u, Y \oplus v]] = [X, Y] \oplus (Xv - Yu - \theta(X, Y)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{q}, \forall u, v \in V.$$

Dobbiamo verificare che vale l'identità di Jacobi. Siano  $X, Y, Z \in \mathfrak{q}$  ed  $u, v, w \in V$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} [[[[X \oplus u, Y \oplus v], Z \oplus w]]] &= [[[[X, Y] \oplus (Xv - Yu - \theta(X, Y)), Z \oplus w]] \\ &= [[X, Y], Z] \oplus ([X, Y]w - Z(Xv - Yu + \theta(X, Y)) - \theta([X, Y], Z)) \\ &= [[X, Y], Z] \oplus (([X, Y]w - ZXv + ZYu) - \{Z\theta(X, Y) - \theta([X, Y], Z)\}). \end{aligned}$$

Abbiamo

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

per l'identità di Jacobi in  $\mathfrak{q}$ ,

$$\begin{aligned} [X, Y]w - ZXv + ZYu + [Y, Z]u - XYw + XZv \\ + [Z, X]v - YZu + YXw = 0 \end{aligned}$$

per la definizione di  $\mathfrak{q}$ -modulo,

$$\begin{aligned} (Z\theta(X, Y) - \theta([X, Y], Z) + (X\theta(Y, Z) - \theta([Y, Z], X)) \\ + (Y\theta(Z, X) - \theta([Z, X], Y)) = 0 \end{aligned}$$

per la condizione  $\mathfrak{d}_2(\theta) = 0$ .

Da questo segue che il prodotto  $[[\cdot, \cdot]]$  soddisfa l'identità di Jacobi.

In questo modo abbiamo associato ad ogni  $\theta \in \Lambda^2(\mathfrak{q}, V)$  un'estensione abeliana di  $\mathfrak{q}$  mediante  $V$ .

Sia  $\alpha \in \Lambda^1(\mathfrak{q}, V)$  e consideriamo la struttura di algebra di Lie su  $\mathfrak{q} \oplus V$  definita da  $\theta' = \theta + \mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}}\alpha$ .

Il prodotto di Lie definito da  $\theta'$  è

$$\begin{aligned} [[X \oplus u, Y \oplus v]]' &= [X, Y] \oplus (Xv - Yu - \theta(X, Y) - (\mathfrak{d}_1^{\mathfrak{q}}\alpha)(X, Y)) \\ &= [X, Y] \oplus (X(v - \alpha(Y)) - Y(u - \alpha(X)) + \alpha([X, Y]) - \theta(X, Y)). \end{aligned}$$

L'applicazione

$$\lambda_\alpha : \mathfrak{q} \oplus V \ni X \oplus u \longrightarrow X \oplus (u - \alpha(X)) \in \mathfrak{q} \oplus V$$

è un isomorfismo di algebre di Lie tra la struttura definita da  $[[\cdot, \cdot]]'$  e quella definita da  $[[\cdot, \cdot]]$ . Abbiamo infatti:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha([[X \oplus u, Y \oplus v]]') &= \lambda_\alpha([X, Y] \oplus (X(v - \alpha(Y)) - Y(u - \alpha(X)) + \alpha([X, Y]) - \theta(X, Y)) \\ &= [X, Y] \oplus ((X(v - \alpha(Y)) - Y(u - \alpha(X)) - \theta(X, Y)) \\ &= [[X \oplus (u - \alpha(X)), Y \oplus (v - \alpha(Y))]] \\ &= [[\lambda_\alpha(X \oplus u), \lambda_\alpha(Y \oplus v)]], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{q}, \forall u, v \in V. \end{aligned}$$

Viceversa, sia (9.1.21) un'estensione abeliana di  $\mathfrak{q}$  mediante  $V$ . Scegliendo un qualsiasi isomorfismo lineare di  $\ker \pi$  con  $V$ , possiamo identificare, come spazio vettoriale,  $\mathfrak{g}$  alla somma diretta  $\mathfrak{q} \oplus V$ . Poiché  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{q}$  è un omomorfismo di algebre di Lie ed  $\iota(V)$  un ideale abeliano di  $\mathfrak{g}$ , il prodotto di Lie  $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$  di  $\mathfrak{g}$  si scriverà nella forma

$$[X \oplus u, Y \oplus v]_{\mathfrak{g}} = [X, Y] \oplus (Xv - Yu - \theta(X, Y)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{q}, \forall u, v \in V$$

per un elemento  $\theta \in \Lambda^2(\mathfrak{q}, V)$ . L'identità di Jacobi

$$[[X \oplus 0, Y \oplus 0], Z \oplus 0]_{\mathfrak{g}} + [[Y \oplus 0, Z \oplus 0], X \oplus 0]_{\mathfrak{g}} + [[X \oplus 0, X \oplus 0], Y \oplus 0]_{\mathfrak{g}} = 0$$

ci dà

$$\begin{aligned} 0 &= [[X, Y] \oplus (-\theta(X, Y)), Z \oplus 0]_{\mathfrak{g}} \\ &\quad + [[Y, Z] \oplus (-\theta(Y, Z)), X \oplus 0]_{\mathfrak{g}} + [[Z, X] \oplus (-\theta(Z, X)), Y \oplus 0]_{\mathfrak{g}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [[X, Y], Z] \oplus (Z\theta(X, Y) - \theta([X, Y], Z)) \\
&+ [[Y, Z], X] \oplus (X\theta(Y, Z) - \theta([Y, Z], X)) \\
&+ [[Z, X], Y] \oplus (Y\theta(Z, X) - \theta([Z, X], Y)), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.
\end{aligned}$$

In particolare questa relazione dà  $\mathfrak{d}_2^q \theta = 0$ . Dunque ogni estensione abeliana mediante  $V$  di  $\mathfrak{g}$  si ottiene, a meno di isomorfismi, da un elemento di  $H^2(\mathfrak{g}, V)$ . La dimostrazione è completa.  $\square$

## 9.2. Una successione esatta lunga

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ .

Siano  $V, W$  due  $\mathfrak{g}$ -moduli.

**Definizione 9.2.1.** Un'applicazione  $\mathbb{k}$ -lineare  $\alpha : V \rightarrow W$  è un *omomorfismo di  $\mathfrak{g}$ -moduli* se

$$(9.2.1) \quad \alpha(Xv) = X\alpha(v), \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall v \in V.$$

**Proposizione 9.2.2.** *Sia*

$$(9.2.2) \quad 0 \longrightarrow U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W \longrightarrow 0$$

*una successione esatta di  $\mathfrak{g}$ -moduli ed omomorfismi. Vi è allora una successione esatta lunga in coomologia:*

$$\begin{array}{ccccccc}
(9.2.3) & 0 & \longrightarrow & H^0(\mathfrak{g}, U) & \xrightarrow{\alpha_*} & H^0(\mathfrak{g}, V) & \xrightarrow{\beta_*} & H^0(\mathfrak{g}, W) \\
& & & \xrightarrow{\delta} & H^1(\mathfrak{g}, U) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & H^{q-1}(\mathfrak{g}, W) \\
& & & \xrightarrow{\delta} & H^q(\mathfrak{g}, U) & \xrightarrow{\alpha_*} & H^q(\mathfrak{g}, V) & \xrightarrow{\beta_*} & H^q(\mathfrak{g}, W) \\
& & & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(\mathfrak{g}, U) & \longrightarrow & \dots & & 
\end{array}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che la successione esatta (9.2.2) definisce, per ogni intero non negativo  $q$ , una successione esatta

$$(9.2.4) \quad 0 \longrightarrow \Lambda^q(\mathfrak{g}, U) \xrightarrow{\alpha_*} \Lambda^q(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{\beta_*} \Lambda^q(\mathfrak{g}, W) \longrightarrow 0,$$

ove

$$\begin{aligned}
(\alpha_* \eta_q)(X_1, \dots, X_q) &= \alpha(\eta_q(X_1, \dots, X_q)), \quad \forall \eta_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, U), \quad \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{g}, \\
(\beta_* \theta_q)(X_1, \dots, X_q) &= \beta(\theta_q(X_1, \dots, X_q)), \quad \forall \theta_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, V), \quad \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{g}.
\end{aligned}$$

Definiamo innanzi tutto gli omomorfismi  $\delta$  e, contestualmente, dimostriamo l'esattezza in  $H^q(\mathfrak{g}, W)$ . Sia  $\xi_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, W)$ , con  $\mathfrak{d}_q \xi_q = 0$ . Poiché  $\beta_*$  è surgettiva, possiamo trovare una forma  $\theta_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, V)$  tale che  $\beta_* \theta_q = \xi_q$ . Poiché  $\beta$  è un omomorfismo di  $\mathfrak{g}$ -moduli, commuta con  $\mathfrak{d}$ , per cui abbiamo

$$\beta_*(\mathfrak{d}_q \theta_q) = \mathfrak{d}_q(\beta_* \theta_q) = \mathfrak{d}_q \xi_q = 0.$$

Per l'esattezza di (9.2.4), vi è allora un'unica  $\eta_{q+1} \in \Lambda^{q+1}(\mathfrak{g}, U)$  tale che

$$\mathfrak{d}_q \theta_q = \alpha_* \eta_{q+1},$$

e da

$$\alpha_*(\mathfrak{d}_{q+1}\eta_{q+1}) = \mathfrak{d}_{q+1}(\alpha_*\eta_{q+1}) = \mathfrak{d}_{q+1}\mathfrak{d}_q\theta_q = 0$$

segue che  $\mathfrak{d}_{q+1}\eta_{q+1} = 0$ , per l'iniettività di  $\alpha_*$ . Se  $\theta'_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, V)$  e  $\beta_*\theta'_q = \beta_*\theta_q = \xi_q$ , allora, per l'esattezza di (9.2.4) vi è  $\eta_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, U)$  tale che

$$\theta'_{q+1} = \theta_q + \alpha_*\eta_q.$$

Definiamo allora  $\eta'_{q+1}$  mediante

$$\alpha_*\eta'_{q+1} = \mathfrak{d}_q(\theta_q + \alpha_*\eta_q) = \mathfrak{d}_q\theta_q + \alpha_*(\mathfrak{d}_q\eta_q).$$

Abbiamo allora

$$\alpha_*\eta'_{q+1} = \alpha_*(\eta_{q+1} + \mathfrak{d}_q\eta_q) \implies \eta'_{q+1} = \eta_{q+1} + \mathfrak{d}_q\eta_q.$$

Questo dimostra che la catena

$$\begin{aligned} [\xi_q] \in H^q(\mathfrak{g}, W) &\longrightarrow (\theta_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, V), \beta_*\theta_q = \xi_q) \\ &\longrightarrow (\eta_{q+1} \in \Lambda^{q+1}(\mathfrak{g}, U), \alpha_*\eta_{q+1} = \mathfrak{d}_q\theta_q) \longrightarrow [\eta_{q+1}] \in H^{q+1}(\mathfrak{g}, U) \end{aligned}$$

definisce un'applicazione  $\delta : H^q(\mathfrak{g}, W) \rightarrow H^{q+1}(\mathfrak{g}, U)$ . È chiaro altresì che la composizione  $H^q(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{\beta_*} H^q(\mathfrak{g}, U) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(\mathfrak{g}, W)$  è nulla, (nella costruzione precedente si può prendere  $\mathfrak{d}\theta' = 0$ ).

Se  $[\eta_{q+1}] = \delta([\xi_q]) = 0$ , allora  $\eta_{q+1} = \mathfrak{d}_q\eta_q$  per qualche  $\eta_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, U)$  ed abbiamo perciò

$$\mathfrak{d}_q\theta_q = \alpha_*\mathfrak{d}_q\eta_q \implies \mathfrak{d}_q(\theta_q - \alpha_*\eta_q) = 0.$$

Poiché  $\beta_*(\theta_q - \alpha_*\eta_q) = \beta_*\theta_q = \xi_q$ , in questo caso  $[\xi_q] = \beta_*([\theta_q - \alpha_*\eta_q])$  è immagine di una classe di coomologia di  $H^q(\mathfrak{g}, V)$ . Questo dimostra l'esattezza in  $H^q(\mathfrak{g}, W)$ .

Sia ora  $\theta_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, V)$ , con  $\mathfrak{d}_q\theta_q = 0$  e  $\beta_*([\theta_q]) = [\beta_*\theta_q] = 0$ . Esisterà allora  $\xi_{q-1} \in \Lambda^{q-1}(\mathfrak{g}, W)$  tale che

$$\mathfrak{d}_{q-1}\xi_{q-1} = \beta_*\theta_q.$$

Sia  $\theta_{q-1} \in \Lambda^{q-1}(\mathfrak{g}, V)$  tale che  $\beta_*\theta_{q-1} = \xi_{q-1}$ . Abbiamo allora

$$\beta_*(\theta_q - \mathfrak{d}_{q-1}\theta_{q-1}) = \beta_*\theta_q - \mathfrak{d}_{q-1}\beta_*\theta_{q-1} = \beta_*\theta_q - \mathfrak{d}_{q-1}\xi_{q-1} = 0.$$

Vi è allora un unico elemento  $\eta_q \in \Lambda(\mathfrak{g}, U)$  tale che

$$\alpha_*\eta_q = \theta_q - \mathfrak{d}_{q-1}\theta_{q-1}.$$

Da

$$\alpha_*(\mathfrak{d}_q\eta_q) = \mathfrak{d}_q\alpha_*\eta_q = \mathfrak{d}_q(\theta_q - \mathfrak{d}_{q-1}\theta_{q-1}) = 0$$

segue che  $\mathfrak{d}_q\eta_q = 0$  e dunque  $\eta_q$  definisce una classe  $[\eta_q] \in H^q(\mathfrak{g}, U)$  con  $\alpha_*([\eta_q]) = [\theta_q]$ .

Sia infine  $\eta_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, U)$ , con  $\mathfrak{d}\eta_q = 0$  e  $\alpha_*([\eta_q]) = 0$ . Esiste quindi  $\theta_{q-1} \in \Lambda^{q-1}(\mathfrak{g}, V)$  tale che

$$\alpha_*\eta_q = \mathfrak{d}_{q-1}\theta_{q-1}.$$

Abbiamo allora

$$\mathfrak{d}_{q-1}\beta_*\theta_{q-1} = \beta_*\mathfrak{d}_{q-1}\theta_{q-1} = \beta_*\alpha_*\eta_q = 0.$$

Quindi  $\xi_{q-1} = \beta_*\theta_{q-1} \in \Lambda^{q-1}(\mathfrak{g}, W)$  soddisfa  $\mathfrak{d}_{q-1}\xi_{q-1} = 0$  e definisce perciò una classe di coomologia  $[\xi_{q-1}] \in H^{q-1}(\mathfrak{g}, W)$ . Abbiamo

$$(9.2.5) \quad \xi_{q-1} = \beta_*\theta_{q-1}, \quad \alpha_*\eta_q = \mathfrak{d}_{q-1}\theta_{q-1}$$

e quindi  $\delta([\xi_{q-1}]) = [\eta_q]$ . Ciò dimostra l'esattezza anche in  $H^q(\mathfrak{g}, U)$  e completa quindi la dimostrazione.  $\square$

### 9.3. Coomologia delle algebre di Lie semisemplici. I

Dimostriamo innanzi tutto la seguente

**Teorema 9.3.1.** *Se  $\mathfrak{g}$  è semisemplice e  $V$  è un  $\mathfrak{g}$ -modulo semplice di dimensione finita su cui  $\mathfrak{g}$  agisca in modo non banale, allora  $H^q(\mathfrak{g}, V) = 0$  per ogni  $q \geq 0$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$  l'omomorfismo di rappresentazione. Poiché  $\mathfrak{g}$  è semisemplice, l'ideale  $\ker \rho$  ha un ideale complementare  $\mathfrak{a} = \ker \rho^\perp$  che è semisemplice e su cui  $\rho$  si restringe a una rappresentazione fedele. La forma della rappresentazione

$$\beta(X, Y) = \text{tracciav}(\rho(X)\rho(Y))$$

è non degenere su  $\mathfrak{a}$ . Possiamo allora trovare due basi  $X_1, \dots, X_n$  ed  $Y_1, \dots, Y_n$  di  $\mathfrak{a}$  tali che

$$\beta(X_i, Y_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

Ricordiamo che  $\mathbf{c} = \sum_{i=1}^n \rho(X_i)\rho(Y_i)$  è l'elemento di Casimir della rappresentazione  $\rho$ .

Definiamo un'applicazione

$$\sigma_q : \Lambda^q(\mathfrak{g}, V) \rightarrow \Lambda^{q-1}(\mathfrak{g}, V)$$

ponendo

$$(\sigma_q \theta)(Z_1, \dots, Z_{q-1}) = \sum_{i=1}^n X_i \theta(Y_i, X_1, \dots, X_{q-1}), \quad \forall Z_1, \dots, Z_{q-1} \in \mathfrak{g}.$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{d}_{q-1}\sigma_q + \sigma_{q+1}\mathfrak{d}_q)(\theta)(Z_1, \dots, Z_q) \\ &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q (-1)^j Z_j X_i \theta(Y_i, \dots, \widehat{Z}_j, \dots) \\ & \quad - \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j < h \leq q} (-1)^{j+h} X_i \theta(Y_i, [Z_j, Z_h], \dots, \widehat{Z}_j, \dots, \widehat{Z}_h, \dots) \\ & \quad + \sum_{i=1}^n X_i Y_i \theta(Z_1, \dots, Z_q) \\ & \quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q (-1)^j X_i \theta([Y_i, Z_j], \dots, \widehat{Z}_j, \dots) \\ & \quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q (-1)^j X_i Z_j \theta(Y_i, \dots, \widehat{Z}_j, \dots) \\ & \quad + \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j < h \leq q} (-1)^{j+h} X_i \theta(Y_i, [Z_j, Z_h], \dots, \widehat{Z}_j, \dots, \widehat{Z}_h, \dots) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q (-1)^j [X_i, Z_j] \theta(Y_i, \dots, \widehat{Z}_j, \dots) \\ & \quad + \sum_{i=1}^n X_i Y_i \theta(Z_1, \dots, Z_q) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q (-1)^j X_i \theta([Y_i, Z_j], \dots, \widehat{Z}_j, \dots).$$

Osserviamo ora che, se

$$[X_i, Z_h] = \sum_{j=1}^n c_{i,h}^j X_j, \quad [Y_i, Z_h] = \sum_{j=1}^n d_{i,h}^j Y_j,$$

otteniamo

$$c_{i,h}^j = \beta([X_i, Z_h], Y_j) = \beta(X_i, [Z, Y_j]) = -d_{j,h}^i.$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q (-1)^j [X_i, Z_j] \theta(Y_i, \dots, \widehat{Z}_j, \dots) \\ &= \sum_{i,h=1}^n \sum_{j=1}^q (-1)^j c_{i,j}^h X_h \theta(Y_i, \dots, \widehat{Z}_j, \dots), \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q (-1)^j X_i \theta([Y_i, Z_j], \dots, \widehat{Z}_j, \dots) \\ &= \sum_{i,h=1}^n \sum_{j=1}^q (-1)^j d_{i,j}^h X_i \theta(Y_h, \dots, \widehat{Z}_j, \dots) \\ &= - \sum_{i,h=1}^n \sum_{j=1}^q (-1)^j c_{i,j}^h X_i \theta(Y_h, \dots, \widehat{Z}_j, \dots). \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto l'identità

$$(9.3.1) \quad (\mathfrak{d}_{q-1} \sigma_q + \sigma_{q+1} \mathfrak{d}_q)(\theta)(Z_1, \dots, Z_q) = \mathbf{c} \theta(Z_1, \dots, Z_q).$$

Poiché  $\mathbf{c}$  commuta con tutti gli endomorfismi di  $\rho(\mathfrak{g})$  ed è invertibile, otteniamo che, se  $\theta$  soddisfa  $\mathfrak{d}_q \theta = 0$ , allora  $\alpha = \mathbf{c}^{-1} \sigma_q \theta \in \Lambda^{q-1}(\mathfrak{g}, V)$  soddisfa  $\mathfrak{d}_{q-1} \alpha = \theta$ .  $\square$

**Osservazione 9.3.2.** Se  $\mathfrak{g}$  è semisemplice, ma la sua azione sul  $\mathfrak{g}$ -modulo  $V$  è banale, la coomologia può essere non zero anche in dimensione positiva. Consideriamo ad esempio  $\mathbb{k}$  come un  $\mathfrak{g}$ -modulo banale e definiamo

$$\theta_3(X, Y, Z) = \kappa_{\mathfrak{g}}([X, Y], Z), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g},$$

ove  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  è la forma di Killing. Poiché

$$\kappa_{\mathfrak{g}}([X, Y], Z) = \kappa_{\mathfrak{g}}([Y, Z], X) = \kappa_{\mathfrak{g}}([Z, X], Y),$$

abbiamo  $\theta_3 \in \Lambda^3(\mathfrak{g}, \mathbb{k})$ . Inoltre  $\mathfrak{d}_3 \theta_3 = 0$  per l'identità di Jacobi. Ma si può verificare che  $[\theta_3] \neq 0$ .

**Teorema 9.3.3** (Primo lemma di Whitehead). *Se  $\mathfrak{g}$  è semisemplice, allora  $H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$  per ogni  $\mathfrak{g}$ -modulo di dimensione finita  $V$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo per assurdo che vi siano dei  $\mathfrak{g}$ -moduli di dimensione finita per cui il primo gruppo di coomologia sia non nullo. Tra essi ve ne sarà allora uno, diciamo  $V$ , di dimensione minima. Se  $V$  non fosse semplice, conterrebbe un  $\mathfrak{g}$ -sottomodulo non banale  $U$ , con  $0 \neq U \subsetneq V$  ed avremmo quindi, con  $W = V/U$ , una successione esatta corta di  $\mathfrak{g}$ -moduli (9.2.2). Da essa otteniamo la successione esatta

$$H^1(\mathfrak{g}, U) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, W).$$

Poiché sia  $U$  che  $W$  hanno dimensione minore di  $V$ , segue dall'ipotesi induttiva che  $H^1(\mathfrak{g}, U) = 0$ ,  $H^1(\mathfrak{g}, W) = 0$ . Ma ciò implica che anche  $H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$ , dandoci

una contraddizione. Perciò  $V$  deve essere semplice. Inoltre, per il Teorema 9.3.1,  $V$  deve essere un  $\mathfrak{g}$ -modulo banale. Ci siamo quindi ricondotti al caso in cui  $V \simeq \mathbb{k}$ . Un elemento  $\theta_1 \in \Lambda^1(\mathfrak{g}, \mathbb{k})$  soddisfa  $\delta\theta_1 = 0$  se

$$0 = (d\theta_1)(X, Y) = -\theta_1([X, Y]) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Poiché  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  perché  $\mathfrak{g}$  è semisemplice, questo implica che  $\theta_1 = 0$ . La dimostrazione è completa.  $\square$

#### 9.4. Il teorema di Weyl

Diamo in questo paragrafo un'altra dimostrazione del Teorema di Weyl sulla decomponibilità delle rappresentazioni finite delle algebre di Lie semisemplici.

Ricordiamo che, se  $U$  e  $V$  sono due  $\mathfrak{g}$ -moduli di dimensione finita, lo spazio  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, U)$  è anch'esso un  $\mathfrak{g}$ -modulo, per l'azione definita da:

$$(9.4.1) \quad (X\alpha)(v) = X(\alpha(v)) - \alpha(Xv), \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall \alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, U), \forall v \in V.$$

Gli elementi di  $H^0(\mathfrak{g}, \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, U))$  sono i  $\mathfrak{g}$ -omomorfismi di  $V$  in  $U$ , cioè le applicazioni lineari  $\alpha : V \rightarrow U$  tali che

$$\alpha(Xv) = X(\alpha(v)), \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall v \in V.$$

**Teorema 9.4.1** (Weyl). *Se  $\mathfrak{g}$  è semisemplice, ogni  $\mathfrak{g}$ -modulo di dimensione finita è somma diretta di  $\mathfrak{g}$ -moduli semplici.*

**DIMOSTRAZIONE.** Basta dimostrare che, se  $V$  è un  $\mathfrak{g}$ -modulo di dimensione finita che contiene un sotto- $\mathfrak{g}$ -modulo  $U$ , con  $0 \neq U \subsetneq V$ , allora esiste un sotto- $\mathfrak{g}$ -modulo  $E$  di  $V$  tale che  $V = U \oplus E$ .

Dati due  $\mathfrak{g}$ -moduli  $U$  e  $V$  con  $0 \neq U \subsetneq V$ , poniamo  $W = V/U$ . Abbiamo allora una successione esatta di  $\mathfrak{g}$ -moduli:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(W, U) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, U) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(U, U) \longrightarrow 0.$$

Otteniamo una successione esatta

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, \text{Hom}_{\mathbb{k}}(W, U)) \longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, U)) \\ &\longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, \text{Hom}_{\mathbb{k}}(U, U)) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}_{\mathbb{k}}(W, U)) = 0, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è una conseguenza del primo lemma di Whitehead. Per la surgettività di  $H^0(\mathfrak{g}, \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, U)) \rightarrow H^0(\mathfrak{g}, \text{Hom}_{\mathbb{k}}(U, U))$ , esiste un  $\mathfrak{g}$ -omomorfismo  $V \rightarrow U$  la cui restrizione ad  $U$  sia l'identità. Il suo nucleo definisce un sottospazio  $\mathfrak{g}$ -invariante  $E$  complementare ad  $U$ .  $\square$

#### 9.5. Coomologia delle algebre di Lie semisemplici. II

**Teorema 9.5.1** (Secondo lemma di Whitehead). *Se  $\mathfrak{g}$  è semisemplice, allora  $H^2(\mathfrak{g}, V) = 0$  per ogni  $\mathfrak{g}$ -modulo di dimensione finita  $V$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Ragionando come nella dimostrazione del primo lemma di Whitehead, ci possiamo ricondurre al caso in cui  $V = \mathbb{k}$  e l'azione di  $\mathfrak{g}$  su  $\mathbb{k}$  è banale.

Sia  $\theta \in \Lambda^2(\mathfrak{g}, \mathbb{k})$ , con

$$\theta([X, Y], Z) + \theta([Y, Z], X) + \theta([Z, X], Y) = 0.$$

Definiamo allora una struttura di algebra di Lie su  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{k}$  ponendo

$$[[X \oplus k_1, Y \oplus k_2]] = [X, Y] \oplus \theta(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{k}.$$

Possiamo considerare  $\mathfrak{g}'$  come un  $\mathfrak{g}$ -modulo, rispetto all'azione descritta da

$$X \cdot (Y \oplus k) = [X, Y] \oplus \theta(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall k \in \mathbb{k}.$$

Osserviamo che  $0 \oplus \mathbb{k}$  è un  $\mathfrak{g}$ -sottomodulo di  $\mathfrak{g}'$ . Per il teorema di Weyl vi è un sotto- $\mathfrak{g}$ -modulo  $E$  di  $\mathfrak{g}'$  complementare di  $0 \oplus \mathbb{k}$  in  $\mathfrak{g}'$ . Esso è della forma  $E = \{X \oplus \alpha(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$ , per un'applicazione lineare  $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$ . Abbiamo allora

$$[X, Y] \oplus \alpha([X, Y]) = X \cdot (Y \oplus \alpha(Y)) = [X, Y] \oplus \theta(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

e dunque  $\mathfrak{d}_1(-\alpha) = \theta$ . □

**Osservazione 9.5.2.** Sia  $\phi \in \Lambda^1(\mathfrak{g}, \mathbb{k})$ . L'equazione  $\mathfrak{d}_1\phi = \theta$  significa che

$$(9.5.1) \quad d\phi(X, Y) = -\phi([X, Y]) = \theta(X, Y).$$

Poiché  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ , la (9.5.1) determina completamente la  $\phi$ . In particolare quindi la condizione  $\mathfrak{d}_2\theta = 0$ , per  $\mathfrak{g}$  semisemplice, è equivalente all'implicazione

$$(X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}, [X_1, Y_1] = [X_2, Y_2]) \implies \theta(X_1, Y_1) = \theta(X_2, Y_2),$$

cioè al fatto che  $\theta(X, Y)$  sia funzione di  $[X, Y]$ .

## 9.6. Il teorema di Levi-Malcev

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$ ,  $\mathfrak{r}$  il suo radicale,  $\mathfrak{n}$  il più grande ideale nilpotente di  $\mathfrak{g}$  ed  $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{r} \subset \mathfrak{n}$  il suo radicale nilpotente. Per ogni  $X \in \mathfrak{n}$

$$(9.6.1) \quad Y \longrightarrow \exp(\text{Ad}(X))(Y) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} (\text{Ad}(X))^h(Y)$$

è ben definita, quale sia il campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica 0, perché ha solo un numero finito di termini diversi da 0 e l'applicazione

$$(9.6.2) \quad \exp(\text{Ad}(X)) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

è un automorfismo dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ .

Ricordiamo che  $\text{Aut}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{g})$  (rispettivamente  $\text{Aut}_{\mathfrak{n}_0}(\mathfrak{g})$ ) indica il gruppo di automorfismi di  $\mathfrak{g}$  generato dagli  $\exp(\text{Ad}(X))$ , al variare di  $X$  in  $\mathfrak{n}$  (rispettivamente, al variare di  $X$  in  $\mathfrak{n}_0$ ). Entrambi sono sottogruppi normali del gruppo  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  di tutti gli automorfismi di  $\mathfrak{g}$ .

$\text{Aut}_{\mathfrak{n}_0}(\mathfrak{g})$  si dice *il gruppo degli automorfismi speciali* di  $\mathfrak{g}$ .

**Definizione 9.6.1.** Si dice *fattore di Levi* di  $\mathfrak{g}$  una sua sottoalgebra  $\mathfrak{s}$  per cui l'applicazione composta

$$(9.6.3) \quad \mathfrak{s} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}/\mathfrak{r},$$

in cui  $\iota$  è l'inclusione e  $\pi$  la proiezione nel quoziente, sia un isomorfismo.

Un fattore di Levi  $s$  è semisemplice e dà luogo ad una decomposizione di  $g$  in prodotto semidiretto

$$(9.6.4) \quad g = s \oplus r,$$

che si dice *decomposizione di Levi* di  $g$ .

**Teorema 9.6.2** (Levi-Malcev). *Ogni algebra di Lie  $g$  su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero ammette un fattore di Levi. Il gruppo degli automorfismi speciali opera transitivamente sui fattori di Levi di  $g$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo in primo luogo l'esistenza di un fattore di Levi. Ragioniamo per induzione sulla dimensione di  $g$ .

Un'algebra di Lie di dimensione minore o uguale ad 1 è abeliana. Quindi coincide con il suo radicale ed ha pertanto fattore di Levi banale.

Supponiamo ora che  $\dim_{\mathbb{k}} g = n > 1$  e che il teorema sia vero per algebre di Lie di dimensione minore di  $n$ . Se  $g$  non contiene ideali abeliani, allora è semisemplice e coincide con il suo fattore di Levi. Dunque, in questo caso, non c'è nulla da dimostrare.

Supponiamo allora che  $g$  contenga un ideale abeliano  $a$  di dimensione positiva. Per l'ipotesi induttiva, il quoziente  $g' = g/a$  contiene un fattore di Levi  $s'$ . Sia  $\pi : g \rightarrow g'$  la proiezione naturale e  $b = \pi^{-1}(s')$ .

Il radicale di  $g'$  è  $r' = \pi(r)$ . Quindi  $g = b + r$  e perciò il quoziente  $q = b/a$  è isomorfo a  $g/r$ . Consideriamo la successione esatta

$$(9.6.5) \quad 0 \longrightarrow a \longrightarrow b \xrightarrow{\pi|_b} q \longrightarrow 0.$$

Poiché  $a$  è un ideale abeliano e  $q$  semisemplice,  $a$  è in modo naturale un  $q$ -modulo. Per i Teoremi e, la successione esatta (9.6.5) si spezza: abbiamo cioè un isomorfismo  $\psi : q \rightarrow s \subset b$  di  $q$  su una sottoalgebra  $s$  di  $b$ , che inverte a destra la  $\pi|_b : s \rightarrow q$ . La  $s$  è un fattore di Levi di  $b$  e quindi anche di  $g$ , perché da  $b = s \oplus a$  segue la (9.6.4).

Resta da verificare che il gruppo degli automorfismi speciali opera transitivamente sui fattori di Levi di  $g$ . A questo scopo, utilizziamo ancora l'induzione sulla dimensione di  $g$  e la costruzione e le notazioni ( $g'$ ,  $s'$ ,  $b$ ,  $s$ ) introdotte nella prima parte della dimostrazione, corrispondenti ad una speciale scelta di  $a$  che preciseremo nel seguito.

Al solito, se  $r = 0$ , oppure  $r = g$ , non c'è nulla da dimostrare.

Supponiamo sia  $0 \neq r \neq g$ . Allora il centro  $z$  di  $r$  è un ideale abeliano non banale di  $g$  su cui opera in modo naturale l'algebra di Lie semisemplice  $l = g/r$ . Sia  $a$  un sotto- $l$ -modulo irriducibile non banale di  $z$ . Poiché  $a$  è un ideale abeliano non banale di  $g$ , ad esso possiamo applicare la costruzione della prima parte della dimostrazione.

Se  $f$  è un fattore di Levi di  $g$ , allora  $\pi(f)$  è un fattore di Levi di  $g'$ . Osserviamo che il radicale nilpotente  $n'_0$  di  $g'$  è la proiezione  $\pi(n_0)$  del radicale nilpotente  $n_0$  di  $g$ . Per induzione,  $\pi(f)$  si trasforma in  $s'$  mediante un automorfismo speciale di  $g'$ . Ciò equivale ad affermare che esiste un automorfismo speciale di  $g$  che trasforma  $f$  in un fattore di Levi  $f'$  di  $g$  contenuto in  $b$ . Basterà quindi verificare che il gruppo degli automorfismi speciali di  $b$  è transitivo sui fattori di Levi di  $b$ .

Poiché abbiamo supposto che  $l$  operi su  $\alpha$  in modo irriducibile, possono darsi due casi. Nel primo caso,  $\alpha$  ha dimensione uno e l'azione di  $l$  su  $\alpha$  è banale. Allora  $\mathfrak{b}$  contiene un unico ideale semisemplice  $\mathfrak{s} = \mathfrak{b}^{(1)}$ , che è anche il suo unico fattore di Levi, e la tesi è dunque banalmente verificata.

Nel secondo caso, l'azione di  $l$  su  $\alpha$  è non banale e quindi  $\alpha = [\mathfrak{b}, \alpha]$  coincide con il radicale nilpotente di  $\mathfrak{b}$ . I fattori di Levi di  $\mathfrak{b}$  sono tutti della forma

$$\mathfrak{s}_\phi = \{X + \phi(X) \mid X \in \mathfrak{s}\}$$

per un'applicazione lineare  $\phi : \mathfrak{s} \rightarrow \alpha$ . La condizione che  $\mathfrak{s}_\phi$  sia una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{b}$  ci dice che  $\phi$  è una derivazione di  $\mathfrak{s}$  a valori in  $\alpha$ . Per il Teorema 9.3.3 (primo lemma di Whitehead)  $\phi$  è della forma

$$\phi(X) = [A, X], \quad \forall X \in \mathfrak{s}, \quad \text{con } A \in \alpha.$$

Quindi

$$\mathfrak{s}_\phi = \exp(\text{Ad}(A))(\mathfrak{s})$$

è immagine di  $\mathfrak{s}$  mediante un automorfismo speciale. La dimostrazione è completa.  $\square$



## Algebra involuante universale e Teorema di Ado

### 10.1. Algebra involuante universale

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ .

**Definizione 10.1.1.** L'algebra involuante universale di  $\mathfrak{g}$  è l'algebra associativa unitaria  $\mathfrak{U}$  che si ottiene come quoziente dell'algebra tensoriale  $T^*(\mathfrak{g})$  rispetto all'ideale bilatero generato dagli elementi

$$X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y],$$

al variare di  $X$  ed  $Y$  in  $\mathfrak{g}$ .

Abbiamo un'inclusione naturale  $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{U}$ , che ci permette di identificare  $\mathfrak{g}$  a un sottospazio di  $\mathfrak{U}$ .

Indicheremo con  $u \cdot v$ , od anche  $uv$  per semplicità, il prodotto associativo in  $\mathfrak{U}$ .

L'algebra involuante universale è caratterizzata dalla *proprietà universale*:

**Teorema 10.1.2.** Sia  $\mathfrak{A}$  un'algebra associativa unitaria. Per ogni applicazione  $\mathbb{k}$ -lineare  $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{A}$  tale che

$$(10.1.1) \quad \alpha([X, Y]) = \alpha(X)\alpha(Y) - \alpha(Y)\alpha(X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

esiste un unico morfismo di algebre associative unitarie  $\tilde{\alpha} : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{A}$  che renda commutativo il diagramma

$$(10.1.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{U} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha} \\ \mathfrak{A} & \xlongequal{\quad} & \mathfrak{A}. \end{array}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per la proprietà universale del prodotto tensoriale, ogni applicazione  $\mathbb{k}$ -lineare  $\alpha$  di  $\mathfrak{g}$  in un'algebra associativa unitaria  $\mathfrak{A}$  si estende in modo unico ad un morfismo di algebre associative unitarie

$$\hat{\alpha} : T^*(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{A}.$$

Per (10.1.1) il nucleo di  $\hat{\alpha}$  contiene l'ideale bilatero di  $T^*(\mathfrak{g})$  generato dagli elementi  $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$ , al variare di  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , e quindi definisce per passaggio al quoziente un morfismo di algebre associative unitarie  $\tilde{\alpha} : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{A}$  che rende commutativo il diagramma (10.1.2).  $\square$

In particolare

**Corollario 10.1.3.** *Ogni rappresentazione lineare  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  di  $\mathfrak{g}$  si estende in modo unico ad una rappresentazione lineare<sup>1</sup>  $\tilde{\rho} : \mathfrak{G} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ .*

*Ogni derivazione  $D \in \text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  si estende in modo unico ad una derivazione di  $\mathfrak{G}$ .*

**Teorema 10.1.4** (Poincaré-Birkhoff-Witt). *Supponiamo che  $\mathfrak{g}$  abbia dimensione finita e sia  $X_1, \dots, X_n$  una base di  $\mathfrak{g}$  come spazio vettoriale su  $\mathbb{k}$ . Allora ogni elemento di  $\mathfrak{G}$  si rappresenta in modo unico con un'espressione polinomiale della forma*

$$(10.1.3) \quad \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^d a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}, \quad \text{con } a_{i_1, \dots, i_n} \in \mathbb{k}.$$

Di conseguenza,  $\mathfrak{G}$  è isomorfo, come spazio vettoriale su  $\mathbb{k}$ , allo spazio  $\mathbb{k}[X_1, \dots, X_n]$  dei polinomi in  $n$  indeterminate con coefficienti in  $\mathbb{k}$ . Non lo è come anello associativo unitario, a meno che  $\mathfrak{g}$  non sia commutativa.

Definiamo una filtrazione di  $\mathfrak{G}$ , ponendo

$$(10.1.4) \quad \mathfrak{G}_d = \left\{ \sum_{h=0}^d \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_h \leq n} a_{i_1, \dots, i_h} X_{i_1} \cdots X_{i_h} \mid \text{con } a_{i_1, \dots, i_h} \in \mathbb{k} \right\},$$

per  $d = 0, 1, 2, \dots$

Il graduato associato è proprio l'anello dei polinomi a coefficienti in  $\mathbb{k}$  in  $n$  indeterminate.

**Corollario 10.1.5.** *Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ , la sua algebra invilupante universale  $\mathfrak{G}$  è Noetheriana sia a destra che a sinistra.*

## 10.2. Ideali cofiniti e rappresentazioni ideali

Siano  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  e  $\mathfrak{G}$  la sua algebra invilupante universale.

**Definizione 10.2.1.** Un ideale bilatero  $\mathfrak{M}$  di  $\mathfrak{G}$  si dice *cofinito* se il quoziente  $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ .

**Proposizione 10.2.2.** (1) *Condizione necessaria e sufficiente affinché un ideale bilatero  $\mathfrak{M}$  di  $\mathfrak{G}$  sia cofinito è che, per ogni  $x \in \mathfrak{G}$ , esista un polinomio non nullo  $p_x \in \mathbb{k}[T]$  tale che  $p_x(x) \in \mathfrak{M}$ .*  
 (2) *Il prodotto  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cdots \mathfrak{M}_k$  di un numero finito di ideali bilateri cofiniti  $\mathfrak{M}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , di  $\mathfrak{G}$  è ancora un ideale bilatero cofinito di  $\mathfrak{G}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{G}/\mathfrak{M} < \infty$ , per ogni  $x \in \mathfrak{G}$  esiste un intero positivo  $d$  per cui gli elementi  $1, x, x^2, \dots, x^d$  siano linearmente dipendenti su  $\mathbb{k}$  e quindi un polinomio non nullo  $p_x \in \mathbb{k}[T]$ , di grado  $\leq d$ , per cui  $p_x(x) \in \mathfrak{M}$ .

Viceversa, supponiamo che  $X_1, \dots, X_n$  generino  $\mathfrak{g}$  come spazio vettoriale su  $\mathbb{k}$  e che, per ogni  $i = 1, \dots, n$ , vi sia un polinomio  $p_i \in \mathbb{k}[T]$ , di grado positivo

<sup>1</sup>Indichiamo lo spazio degli endomorfismi lineari di uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{k}$  con  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ , quando vogliamo sottolinearne la struttura di algebra di Lie, e con  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  quando vogliamo invece considerarne la struttura di anello commutativo unitario.

$d_i$ , tale che  $p_i(X_i) \in \mathfrak{M}$ . Allora, per ogni  $x \in \mathfrak{G}$  possiamo trovare un polinomio  $p = \sum_{i_1 < d_1} a_{i_1, \dots, i_n} T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n} \in \mathbb{k}[T_1, \dots, T_n]$ , tale che

$$x - \sum_{i_1 < d_1} a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \in \mathfrak{M}.$$

Quindi  $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita minore o uguale di  $d_1 \cdots d_n$  su  $\mathbb{k}$ .

La (2) è facile conseguenza della (1). Se  $x \in \mathfrak{G}$  e, per ogni  $i = 1, \dots, k$ ,  $p_{i,x} \in \mathbb{k}[T]$  è un polinomio non nullo tale che  $p_{i,x}(x) \in \mathfrak{M}_i$ , allora  $p_x = p_{1,x} \cdots p_{k,x} \in \mathbb{k}[T]$  è un polinomio non nullo tale che  $p_x(x) \in \mathfrak{M}$ .  $\square$

Se  $\mathfrak{M}$  è un ideale bilatero di  $\mathfrak{G}$ , detta  $\pi : \mathfrak{G} \rightarrow V_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{M}$  la proiezione nel quoziente, la

$$(10.2.1) \quad X \cdot \pi(x) = \pi(X \cdot x), \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall x \in \mathfrak{G}$$

definisce una rappresentazione lineare  $\rho_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V_{\mathfrak{M}})$ .

**Definizione 10.2.3.** La rappresentazione lineare  $\rho_{\mathfrak{M}}$  definita dalla (10.2.1) si dice la *rappresentazione ideale* associata all'ideale bilatero  $\mathfrak{M}$ .

La rappresentazione ideale  $\rho_{\mathfrak{M}}$  è di dimensione finita se e solo se  $\mathfrak{M}$  è cofinito.

### 10.3. Rappresentazioni di dimensione finita ed ideali cofiniti

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$ .

Per il Corollario 10.1.3, ogni rappresentazione lineare  $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  si estende ad una rappresentazione lineare  $\tilde{\rho}_V : \mathfrak{G} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ . Se  $x \in \mathfrak{G}$  e  $v \in V$ , scriveremo a volte, per semplicità,  $x \cdot v$  invece di  $\tilde{\rho}_V(x)(v)$ .

**Proposizione 10.3.1.** Il nucleo  $\mathfrak{M}$  di  $\tilde{\rho}_V$  è un ideale bilatero di  $\mathfrak{G}$ .

DIMOSTRAZIONE. Se  $x \in \mathfrak{M}$ ,  $y \in \mathfrak{G}$ ,  $v \in V$ , abbiamo

$$(x \cdot y) \cdot v = x \cdot (y \cdot v) = 0, \quad (y \cdot x) \cdot v = y \cdot (x \cdot v) = y \cdot 0 = 0.$$

$\square$

**Definizione 10.3.2.** Il nucleo di  $\tilde{\rho}_V$  si dice l'*annullatore* di  $V$ .

Una rappresentazione lineare  $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  ci permette di considerare lo spazio vettoriale  $V$  come un  $\mathfrak{G}$ -modulo sinistro.

**Definizione 10.3.3.** Diciamo che  $V$  è di *tipo finito* se è finitamente generato come  $\mathfrak{G}$ -modulo sinistro.

Se  $V$  è di tipo finito, la scelta di un sistema finito  $v_1, \dots, v_k$  di generatori del  $\mathfrak{G}$ -modulo  $V$  ci permette di dare una *presentazione* di  $V$ , cioè un epimorfismo della forma:

$$\varpi : \mathfrak{G}^k \ni (x_1, \dots, x_k) \longrightarrow x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_k \cdot e_k \in V.$$

Poiché  $\mathfrak{G}$  è Noetheriana, il nucleo di  $\varpi$  è finitamente generato e possiamo includere l'omomorfismo  $\varpi$  in una successione esatta

$$(10.3.1) \quad \mathfrak{G}^h \xrightarrow{P} \mathfrak{G}^k \xrightarrow{\varpi} V \longrightarrow 0,$$

di  $\mathfrak{G}$ -moduli sinistri e di omomorfismi, ove

$$(10.3.2) \quad P(x_1, \dots, x_h) = \left( \sum_{i=1}^h x_i p_{i,1}, \dots, \sum_{i=1}^h x_i p_{i,k} \right)$$

per una matrice  $(p_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq h, \\ 1 \leq j \leq k}}$  di tipo  $h \times k$  a coefficienti in  $\mathfrak{G}$ .

**Definizione 10.3.4.** La (10.3.1) si dice una *presentazione finita* di  $V$ .

**Osservazione 10.3.5.** Se  $x \in \mathfrak{G}$ , l'endomorfismo  $\tilde{\rho}_V(x)$  si descrive mediante

$$\tilde{\rho}_V(x)(\varpi(x_1, \dots, x_k)) = \varpi(x \cdot x_1, \dots, x \cdot x_k), \quad \forall x_1, \dots, x_k \in \mathfrak{G}.$$

In particolare

**Lemma 10.3.6.** *Sia  $x \in \mathfrak{G}$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\tilde{\rho}_V(x)$  sia nilpotente è che esista un intero positivo  $p$  per cui  $x^p \in \mathfrak{M}$ .  $\square$*

**Proposizione 10.3.7.** *Sia  $V$  un  $\mathfrak{G}$ -modulo sinistro di tipo finito ed  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{G}$  il suo annullatore. Allora  $V$  ha dimensione finita su  $\mathbb{k}$  se e soltanto se  $\mathfrak{M}$  è cofinito.*

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo una presentazione finita (10.3.1) di  $V$ . Poiché  $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{G}^k \subset P(\mathfrak{G}^h)$ , abbiamo un omomorfismo surgettivo

$$\mathfrak{G}^k / (\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{G}^k) \simeq (\mathfrak{G}/\mathfrak{M})^k \rightarrow \mathfrak{G}^k / P(\mathfrak{G}^h),$$

e dunque

$$k \cdot \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{G}/\mathfrak{M} \geq \dim_{\mathbb{k}} V.$$

Questo dimostra che  $V$  ha dimensione finita su  $\mathbb{k}$  se  $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$  ha dimensione finita su  $\mathbb{k}$ . Supponiamo che, viceversa,  $V$  abbia dimensione finita su  $\mathbb{k}$  e siano  $v_1, \dots, v_n$  generatori di  $V$  come spazio vettoriale su  $\mathbb{k}$ . Allora per ogni  $x \in \mathfrak{G}$  esistono polinomi  $p_i \in \mathbb{k}[T]$  tali che  $p_i(x) \cdot v_i = 0$ . Se  $p$  è il minimo comune multiplo di  $p_1, \dots, p_n$ , abbiamo allora  $p(x) \in \mathfrak{M}$ . Per la Proposizione 10.2.2 questo implica che  $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$  ha dimensione finita su  $\mathbb{k}$ .  $\square$

**Proposizione 10.3.8.** *Sia  $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una rappresentazione lineare di dimensione finita,  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{G}$  l'annullatore di  $V$  e  $\rho_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V_{\mathfrak{M}})$  la corrispondente rappresentazione ideale. Allora:*

$$(10.3.3) \quad \ker \rho_{\mathfrak{M}} \subset \ker \rho_V,$$

$$(10.3.4) \quad \rho(X) \text{ nilpotente} \iff \rho_{\mathfrak{M}}(X) \text{ nilpotente}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dalla presentazione finita (10.3.1) di  $V$  otteniamo un'applicazione lineare surgettiva

$$\pi : V_{\mathfrak{M}}^k \rightarrow V,$$

tale che

$$\begin{aligned} \rho_V(X)(\pi(v_1, \dots, v_k)) &= \pi(\rho_{\mathfrak{M}}(X)(v_1), \dots, \rho_{\mathfrak{M}}(X)(v_k)), \\ &\forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall v_1, \dots, v_k \in V_{\mathfrak{M}}. \end{aligned}$$

Da questa segue la (10.3.3). La (10.3.4) è una conseguenza del Lemma 10.3.6.  $\square$

### 10.4. Estensione di rappresentazioni ideali

Siano  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  ed  $\mathfrak{n}$  un ideale di  $\mathfrak{g}$ .

Lo spazio  $\text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})$  delle derivazioni di  $\mathfrak{g}$  a valori in  $\mathfrak{n}$  è un'algebra di Lie per il commutatore del prodotto di composizione:

$$(10.4.1) \quad [D_1, D_2](X) = D_1(D_2(X)) - D_2(D_1(X)), \\ \forall D_1, D_2 \in \text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}), \forall X \in \mathfrak{g}.$$

**Proposizione 10.4.1.** *Siano  $\mathfrak{n}$  un ideale di  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{M}$  un ideale bilatero cofinito di  $\mathfrak{G}$  e  $\rho_{\mathfrak{M}}$ , definita da (10.2.1), la corrispondente rappresentazione ideale. Allora:*

(a) *L'applicazione  $D \rightarrow \hat{D}$ , che fa corrispondere a  $D \in \text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})$  la<sup>2</sup>*

$$(10.4.2) \quad \hat{D}(\pi(x)) = \pi(\tilde{D}(x)), \quad \forall x \in \mathfrak{G},$$

*è una rappresentazione lineare di  $\text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})$  in  $V_{\mathfrak{M}}$ ;*

(b) *Se  $x \in \mathfrak{G}$  e  $D \in \text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})$ , allora  $\tilde{\rho}_{\mathfrak{M}}(\tilde{D}(x)) = [\hat{D}, \tilde{\rho}_{\mathfrak{M}}(x)]$ ;*

(c) *Se  $D \in \text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})$  è nilpotente, allora anche  $\hat{D}$  è nilpotente.*

**DIMOSTRAZIONE.** La (a) è di verifica immediata, perché il prodotto di Lie in  $\text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})$  è il commutatore.

Siano  $x, y \in \mathfrak{G}$ . Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\mathfrak{M}}(\tilde{D}(x))(\pi(y)) &= \pi(\tilde{D}(x)y) = \pi(\tilde{D}(xy) - x\tilde{D}(y)) \\ &= \hat{D}(\pi(xy)) - \tilde{\rho}_{\mathfrak{M}}(x)(\tilde{D}(y)) = (\hat{D} \circ \tilde{\rho}_{\mathfrak{M}}(x) - \tilde{\rho}_{\mathfrak{M}}(x) \circ \hat{D})(\pi(y)). \end{aligned}$$

Questo dimostra la (b).

(c). Se  $D^{\ell} = 0$ , allora, per ogni intero positivo  $h$ , la  $\tilde{D}^{h\ell}$  annulla tutti i monomi  $Y_1 \cdots Y_r$  con  $r \leq h$  ed  $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{g}$ . Da questo segue che per ogni  $v \in V$ , esiste un intero positivo  $k_v$  tale che  $\hat{D}^{k_v} v = 0$ . Poiché  $V$  ha dimensione finita, questo implica che  $\hat{D}$  è nilpotente.  $\square$

Su  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus \text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})$  possiamo definire una struttura naturale di algebra di Lie, che rende le inclusioni naturali  $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g}'$  e  $\text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}) \hookrightarrow \mathfrak{g}'$  morfismi di algebre di Lie. Il prodotto  $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket : \mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}'$  è definito da:

$$(10.4.3) \quad \begin{aligned} \llbracket X_1, X_2 \rrbracket &= [X_1, X_2], \quad \llbracket D, X \rrbracket = D(X), \\ \llbracket D_1, D_2 \rrbracket &= D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1, \\ \forall X_1, X_2, X \in \mathfrak{g}, \quad \forall D, D_1, D_2 \in \text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}). \end{aligned}$$

Osserviamo che, per ogni  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,  $D \in \text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})$ ,  $x \in \mathfrak{G}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\mathfrak{M}}(\llbracket X, Y \rrbracket)(x) &= \pi(\llbracket X, Y \rrbracket \cdot x) = \pi((X \cdot Y - Y \cdot X) \cdot x) \\ &= (\tilde{\rho}_{\mathfrak{M}}(X) \circ \tilde{\rho}_{\mathfrak{M}}(Y) - \tilde{\rho}_{\mathfrak{M}}(Y) \circ \tilde{\rho}_{\mathfrak{M}}(X))(\pi(x)), \\ \pi(D(X) \cdot (x)) &= \pi(\tilde{D}(X \cdot x) - X \cdot \tilde{D}(x)) \\ &= (\hat{D} \circ \tilde{\rho}_{\mathfrak{M}}(X) - \tilde{\rho}_{\mathfrak{M}}(X) \circ \hat{D})(x). \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Ricordiamo che  $\tilde{D}$  è l'estensione a  $\mathfrak{G}$  della derivazione  $D$ .

Risulta perciò definita una rappresentazione lineare  $\rho'_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  tale che

$$(10.4.4) \quad \begin{cases} \rho'_{\mathfrak{M}}(X)(\pi(x)) = \pi(X \cdot x), & \text{se } X \in \mathfrak{g}, x \in \mathfrak{G}, \\ \rho'_{\mathfrak{M}}(D)(\pi(x)) = \pi(\tilde{D}(x)) & \text{se } D \in \text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}), x \in \mathfrak{G}, \end{cases}$$

Possiamo allora riformulare la Proposizione 10.4.1 nel modo seguente:

**Proposizione 10.4.2.** *Siano  $\mathfrak{M}$  un ideale bilatero cofinito dell'algebra invilupante universale  $\mathfrak{G}$  dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{n}$  un ideale di  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus \text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})$ . Allora la (10.4.4) definisce una rappresentazione lineare  $\rho'_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V_{\mathfrak{M}})$ , che estende la rappresentazione ideale  $\rho_{\mathfrak{M}}$ .*

*Se gli elementi  $\rho_{\mathfrak{M}}(X)$ , al variare di  $X$  in  $\mathfrak{n}$  sono nilpotenti, allora anche gli elementi  $\rho'_{\mathfrak{M}}(D)$ , al variare di  $D$  in  $\text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})$ , sono nilpotenti.*

Possiamo ora formulare il seguente

**Teorema 10.4.3** (di estensione). *Sia  $\mathfrak{a}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$  e*

$$(10.4.5) \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{b}$$

*una decomposizione di  $\mathfrak{a}$  nella somma diretta di un ideale  $\mathfrak{g}$  e di una sottoalgebra  $\mathfrak{b}$ . Sia  $\mathfrak{G}$  l'algebra invilupante universale di  $\mathfrak{g}$  ed  $\mathfrak{M}$  un ideale bilatero cofinito di  $\mathfrak{G}$ .*

*Allora la rappresentazione ideale  $\rho_{\mathfrak{M}}$  di  $\mathfrak{g}$  si estende ad una rappresentazione  $\rho : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V_{\mathfrak{M}})$  di  $\mathfrak{a}$ , tale che*

$$(10.4.6) \quad X \in \mathfrak{b}, \text{ ad}(X)|_{\mathfrak{g}} \text{ nilpotente} \implies \rho(X) \text{ nilpotente.}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus \text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ . Definiamo un'applicazione lineare  $\alpha : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}'$  ponendo

$$\begin{cases} \alpha(X) = X, & \text{se } X \in \mathfrak{g}, \\ \alpha(X) = \text{ad}(X)|_{\mathfrak{g}}, & \text{se } X \in \mathfrak{b}. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che  $\alpha$  è un omomorfismo di algebre di Lie. Per la Proposizione 10.4.2, la  $\rho_{\mathfrak{M}}$  si estende ad una rappresentazione  $\rho'_{\mathfrak{M}}$  di  $\mathfrak{g}'$  su  $V$ . La  $\rho = \rho' \circ \alpha$  è la rappresentazione cercata.  $\square$

## 10.5. Il teorema di Ado

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$ .

**Definizione 10.5.1.** Una rappresentazione lineare  $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  si dice *nilpotente* se, per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ , l'endomorfismo  $\rho_V(X)$  è nilpotente.

**Osservazione 10.5.2.** Se  $V$  ha dimensione finita e  $\rho_V$  è nilpotente, anche  $\tilde{\rho}_V$  è nilpotente. Se infatti

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_s = V$$

è una serie di Jordan-Hölder di  $\rho_V$ , abbiamo  $\rho_V(X)(V_j) \subset V_{j-1}$  per  $X \in \mathfrak{g}$  e  $j = 1, \dots, s$  e quindi anche  $\rho_V(x)(V_j) \subset V_{j-1}$  per  $x \in \mathfrak{G}$  e  $j = 1, \dots, s$ .

**Esempio 10.5.3.** Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie abeliana di dimensione  $n$ , possiamo costruire una rappresentazione lineare nilpotente fedele di dimensione finita nel modo seguente. Indichiamo con  $V$  lo spazio vettoriale  $\mathfrak{g} \oplus \mathbb{k}E$ , ove  $E$  è un vettore linearmente indipendente da  $\mathfrak{g}$ . Ad  $X \in \mathfrak{g}$  facciamo corrispondere l'endomorfismo  $A_X$  di  $V$  definito da

$$A_X(\mathfrak{g}) = 0, \quad A_X(E) = X.$$

**Proposizione 10.5.4** (Caso nilpotente). *Ogni algebra di Lie nilpotente ammette una rappresentazione lineare nilpotente fedele di dimensione finita.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie nilpotente su  $\mathbb{k}$ .

Ragioniamo per induzione sulla dimensione di  $\mathfrak{g}$ . Se  $\mathfrak{g}$  ha dimensione 1 è abeliana ed ammette quindi in modo banale una rappresentazione lineare nilpotente fedele di dimensione finita.

Se  $\dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{g} > 1$ , per il Teorema di Engel  $\mathfrak{g}$  contiene un ideale  $\mathfrak{a}$  di codimensione 1. Per l'ipotesi induttiva,  $\mathfrak{a}$  ammette una rappresentazione lineare nilpotente fedele di dimensione finita. Per la Proposizione 10.3.8 possiamo supporre che questa sia una rappresentazione ideale. Per il Teorema d'estensione 10.4.3 questa rappresentazione si estende ad una rappresentazione lineare nilpotente di  $\mathfrak{g}$ .

Abbiamo quindi dimostrato che esiste una rappresentazione nilpotente  $\rho_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V_1)$  con  $\ker \rho_1 \cap \mathfrak{a} = \{0\}$ . Se  $\ker \rho_1 = \{0\}$ , la  $\rho_1$  è fedele e la tesi è verificata. Altrimenti,  $\ker \rho_1$  è un ideale di dimensione 1 di  $\mathfrak{g}$ . Esso possiede una rappresentazione lineare nilpotente fedele di dimensione finita, che, per la Proposizione 10.3.8 ed il Teorema 10.4.3 ci permette di costruire una rappresentazione lineare nilpotente di dimensione finita  $\rho_2 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V_2)$  con  $\ker \rho_2 \cap \ker \rho_1 = \{0\}$ . La somma diretta  $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$  delle due rappresentazioni ci dà una rappresentazione lineare nilpotente di dimensione finita e fedele di  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

**Proposizione 10.5.5** (Caso risolubile). *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie risolubile ed  $\mathfrak{n}$  il suo nilradicale. La  $\mathfrak{g}$  ammette una rappresentazione lineare di dimensione finita e fedele  $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  per cui ogni  $\rho_V(X)$  con  $X \in \mathfrak{n}$  sia nilpotente.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\mathfrak{g}$  è nilpotente, la tesi segue dalla Proposizione 10.5.4. In particolare, la tesi è verificata se  $\mathfrak{g}$  ha dimensione 1. Ragioniamo per induzione sulla dimensione di  $\mathfrak{g}$ , supponendo la tesi vera per algebre di Lie risolubili di dimensione positiva minore della dimensione di  $\mathfrak{g}$ .

Possiamo fissare un ideale  $\mathfrak{a}$ , di codimensione 1 in  $\mathfrak{g}$ , con  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{a}$ . Chiaramente il nilradicale di  $\mathfrak{a}$  contiene  $\mathfrak{n}$  e quindi, per l'ipotesi induttiva, esiste una rappresentazione lineare fedele di dimensione finita di  $\mathfrak{a}$  che faccia corrispondere a tutti gli elementi di  $\mathfrak{n}$  endomorfismi nilpotenti. Per la proposizione 10.3.8 possiamo supporre sia una rappresentazione ideale. Per il Teorema d'estensione 10.4.3 questa si estende ad una rappresentazione lineare di dimensione finita  $\rho_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V_1)$  tale che  $\rho_1(X)$  sia nilpotente per ogni  $X \in \mathfrak{n}$  e  $\ker \rho_1 \cap \mathfrak{a} = \{0\}$ . Se  $\ker \rho_1 = \{0\}$  abbiamo finito. Altrimenti, osserviamo che  $\ker \rho_1$  è un ideale di dimensione 1 di  $\mathfrak{g}$  ed  $[\mathfrak{n}, \ker \rho_1] = \{0\}$ . Possiamo allora considerare una rappresentazione ideale nilpotente fedele di  $\ker \rho_1$ . Per il teorema d'estensione, essa si estende ad una rappresentazione lineare di dimensione finita  $\rho_2 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V_2)$  tale che  $\rho_2(X)$  sia

nilpotente per ogni  $X \in \mathfrak{n}$ . La somma diretta  $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$  delle due rappresentazioni è una rappresentazione fedele di  $\mathfrak{g}$  che soddisfa la tesi.  $\square$

**Teorema 10.5.6** (Teorema di Ado). *Sia  $\mathfrak{n}$  il nilradicale di  $\mathfrak{g}$ . Esiste una rappresentazione lineare fedele di dimensione finita  $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  tale che  $\rho_V(X)$  sia nilpotente per ogni  $X \in \mathfrak{n}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$  una decomposizione di Levi-Malcev di  $\mathfrak{g}$ , in cui  $\mathfrak{r}$  è il radicale di  $\mathfrak{g}$  ed  $\mathfrak{s}$  una sua sottoalgebra di Levi. Per la Proposizione 10.5.5 esiste una rappresentazione lineare fedele di dimensione finita di  $\mathfrak{r}$  per cui ad ogni elemento di  $\mathfrak{n}$  corrisponda un endomorfismo nilpotente. Per la Proposizione 10.5.4 possiamo supporre che questa sia una rappresentazione ideale. Per il Teorema d'estensione 10.4.3 tale rappresentazione si estende ad una rappresentazione  $\rho_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V_1)$ , con  $\ker \rho_1 \cap \mathfrak{r} = \{0\}$  e  $\rho_1(X)$  nilpotente per ogni  $X \in \mathfrak{n}$ . La somma diretta  $\rho$  di  $\rho_1$  e della rappresentazione aggiunta di  $\mathfrak{g}$  soddisfa allora la tesi.  $\square$

## Gruppi di Lie astratti

### 11.1. Gruppi e algebre di Lie astratte

Abbiamo definito un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  come un gruppo topologico separato localmente isomorfo a un sottogruppo di Lie del gruppo lineare reale.

Possiamo dare una definizione equivalente dicendo che

**Definizione 11.1.1.** Un gruppo di Lie è un gruppo topologico separato  $\mathbf{G}$  su cui è definita una struttura di varietà analitica reale tale che l'applicazione

$$(11.1.1) \quad \mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g_1, g_2) \longrightarrow g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{G}$$

sia analitica<sup>1</sup>.

Le traslazioni a destra e a sinistra in un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  sono diffeomorfismi analitici.

Denotiamo con  $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$  lo spazio vettoriale reale dei campi di vettori di classe  $\mathcal{C}^\infty$  su  $\mathbf{G}$ .

**Definizione 11.1.2.** Un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$  su  $\mathbf{G}$  si dice *invariante a sinistra* se  $L_{g*}X = X$  per ogni  $g \in \mathbf{G}$ .

Chiaramente un campo di vettori invariante a sinistra è analitico.

Indichiamo con  $\mathfrak{X}^{\mathbf{G}}(\mathbf{G})$  l'insieme dei campi di vettori invarianti a sinistra su  $\mathbf{G}$ .

Vale il:

**Teorema 11.1.3.** *Con l'operazione di commutazione di campi di vettori:*

$$(11.1.2) \quad [X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{G}), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{G}, \mathbb{R})$$

e con la struttura naturale di spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ , l'insieme  $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$  dei campi di vettori invarianti a sinistra è un'algebra di Lie.

L'applicazione  $\mathfrak{L}(\mathbf{G}) \ni X \rightarrow X_e \in T_e\mathbf{G}$  è un isomorfismo lineare.

**Definizione 11.1.4.** Indichiamo con  $\mathfrak{g}$ , o con  $\text{Lie}(\mathbf{G})$ , lo spazio tangente nell'identità del gruppo di Lie  $\mathbf{G}$ .

Per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ , indichiamo con  $\vec{X}$  il campo di vettori invariante a sinistra definito da  $\vec{X}_g = L_{g*}X$ , per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ .

Definiamo su  $\mathfrak{g}$  una struttura di algebra di Lie reale ponendo

$$(11.1.3) \quad [X, Y] = [\vec{X}, \vec{Y}]_e, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

<sup>1</sup>Il teorema di Gleason, Montgomery e Zippin (cf. Montgomery, Zippin Topological Transformation Groups Interscience, N.Y., 1955) dice che un gruppo topologico localmente euclideo ha una ed una sola struttura analitica in cui le operazioni di gruppo sono analitiche.

Sia  $\pi : T\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  la proiezione canonica.

**Definizione 11.1.5.** La *forma di Maurer-Cartan* di  $\mathbf{G}$  è la forma differenziale

$$(11.1.4) \quad T\mathbf{G} \ni v \longrightarrow L_{\pi(v)_*^{-1}}v \in \mathfrak{g}$$

che associa, ad ogni vettore tangente  $v \in T\mathbf{G}$ , l'unico elemento  $X$  di  $\mathfrak{g}$  per cui  $\vec{X}_{\pi(v)} = v$ .

**Proposizione 11.1.6.** Siano  $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$  e sia  $A \in \mathcal{C}^k((a, b), \mathfrak{g})$  una curva di classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $k \geq 1$ . Fissato un qualsiasi elemento  $g_0 \in \mathbf{G}$ , il problema di Cauchy

$$(11.1.5) \quad \begin{cases} \theta_{\mathbf{G}}(\dot{\gamma}) = A(t), \\ \gamma(0) = g_0 \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione in  $\gamma \in \mathcal{C}^{k+1}((a, b), \mathbf{G})$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per il teorema di esistenza e unicità per le soluzioni di sistemi di equazioni differenziali ordinarie, il problema di Cauchy (11.1.5) ammette una soluzione unica in un intorno aperto connesso di 0 in  $(a, b)$ . Sia  $(a_0, b_0) \subset (a, b)$ , con  $a_0 < 0 < b_0$ , l'intervallo massimale di esistenza della soluzione  $\gamma$  di (11.1.5). Vogliamo dimostrare che  $a_0 = a$  e  $b_0 = b$ .

Se fosse  $b_0 < b$ , poiché per ogni  $c < b$   $A([0, c])$  è compatto in  $\mathfrak{g}$ , avremmo:

$\exists \epsilon \in \mathbb{R}$ , con  $0 < \epsilon < b - b_0$ , tale che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \eta \in \mathcal{C}^{k+1}((-\epsilon, \epsilon), \mathbf{G}), \\ \theta(\dot{\eta}(t)) = A(t + t_0), \quad \text{se } |t| < \epsilon, \\ \eta(0) = e \end{cases}$$

ammetta soluzione per ogni  $t_0 \in \mathbb{R}$  con  $t_0 \in [0, b_0 + \epsilon]$ . Consideriamo una partizione

$$0 = \tau_{-1} = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_\nu < b_0 < \tau_\nu + \epsilon, \quad \text{con } \tau_h - \tau_{h-1} < \epsilon, \quad \forall 1 \leq h \leq \nu.$$

Definiamo allora per ricorrenza  $\psi_h \in \mathcal{C}^{k+1}((-\epsilon, \epsilon), \mathbf{G})$ , per  $h = 0, 1, \dots, \nu$ , come la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \theta_{\mathbf{G}}(\dot{\psi}_h) = A(t + \tau_h), \quad \text{se } |t| < \epsilon, \\ \psi_h(0) = e. \end{cases}$$

Allora la curva

$$\bar{\gamma}(t) = \psi_{h-1}(\tau_h)\psi_h(t - \tau_h) \quad \text{per } \tau_h \leq t < \tau_h + \epsilon, \quad \text{per } h = 0, 1, \dots, \nu$$

è ben definita e prolunga la soluzione  $\gamma$  di (11.1.5) all'intervallo  $[0, \tau_\nu + \epsilon) \supset [0, b_0]$ . Segue da ciò che  $\gamma$  è definita su  $(a_0, b)$ . Ragionando in modo analogo per l'estremo sinistro dell'intervallo di definizione, otteniamo che  $\gamma$  è definita su tutto l'intervallo  $(a, b)$ .  $\square$

**Definizione 11.1.7.** Se  $X \in \mathfrak{g}$ , indichiamo con  $\exp(tX) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbf{G})$  la soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$(\dagger) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \exp(tX) = \vec{X} = L_{\exp(tX)_*}X \\ \exp(0X) = \exp(0) = e. \end{cases}$$

**Osservazione 11.1.8.** Si verifica facilmente che

$$(11.1.6) \quad \exp(t_1 X) \exp(t_2 X) = \exp((t_1 + t_2) X), \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Se  $\mathbf{G} = \mathbf{GL}(n, \mathbb{k})$ , con  $\mathbb{k}$  uguale a  $\mathbb{R}$  o a  $\mathbb{C}$ , allora  $\text{Lie}(\mathbf{G}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$  ed otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \exp(tX) = \exp(tX) \circ X \\ \exp(0 \cdot X) = \exp(0) = I_n \end{cases}$$

che ha come soluzione l'esponenziale definito sulle matrici nel §3.5 del Capitolo III. Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo lineare, o un sottogruppo di lie di un gruppo lineare, la definizione di algebra di Lie data in precedenza coincide con la definizione astratta che abbiamo ora introdotto (cf. la discussione dei sottogruppi di Lie del gruppo lineare nel §3.5 del Capitolo III).

In modo analogo al caso dei sottogruppi di Lie dei gruppi lineari, anche per i gruppi di Lie astratti vale il:

**Teorema 11.1.9.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . L'applicazione esponenziale:*

$$\mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \exp(X) \in \mathbf{G}$$

*definisce un diffeomorfismo tra un intorno aperto di 0 in  $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^\ell$  e un intorno aperto dell'identità in  $\mathbf{G}$ .*

**Definizione 11.1.10.** Un omomorfismo tra due gruppi di Lie  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$  è un'applicazione  $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$  che è al tempo stesso un omomorfismo di gruppi ed un'applicazione differenziabile.

Esso si dice un isomorfismo di gruppi di Lie se è invertibile ed anche l'inversa  $\phi^{-1} : \mathbf{G}_2 \rightarrow \mathbf{G}_1$  è un omomorfismo di gruppi di Lie.

**Teorema 11.1.11.** *Sia  $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$  un omomorfismo di gruppi di Lie. Allora:*

- (1)  $d\phi_e : \text{Lie}(\mathbf{G}) \rightarrow \text{Lie}(\mathbf{H})$  è un omomorfismo di algebre di Lie.
- (2)  $\ker \phi$  è un sottogruppo chiuso normale di  $\mathbf{G}$ , con algebra di Lie  $\ker d\phi_e$ .
- (3)  $\phi(\mathbf{G})$  è un sottogruppo di Lie di  $\mathbf{H}$ , con algebra di Lie  $d\phi_e(\text{Lie}(\mathbf{G}))$ .
- (4) Un isomorfismo di gruppi topologici tra due gruppi di Lie è anche un isomorfismo di gruppi di Lie.

**Definizione 11.1.12.** Un omomorfismo locale tra due gruppi di Lie  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$  è un'applicazione analitica  $\phi : U \rightarrow \mathbf{H}$ , definita su intorno aperto  $U$  di  $e_{\mathbf{G}}$  in  $\mathbf{G}$  tale che  $\phi(e_{\mathbf{G}}) = e_{\mathbf{H}}$  e  $\phi(g_1)\phi(g_2) = \phi(g_1g_2)$  se  $g_1, g_2, g_1g_2 \in U$ .

Il suo differenziale nell'identità  $d\phi_{e_{\mathbf{G}}} : \text{Lie}(\mathbf{G}) \rightarrow \text{Lie}(\mathbf{H})$  è allora un morfismo di algebre di Lie.

Due gruppi di Lie  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$  si dicono *localmente isomorfi* se esiste un omeomorfismo analitico  $\phi : U \rightarrow V$  di un intorno  $U$  di  $e_{\mathbf{G}}$  in  $\mathbf{G}$  su un intorno  $V$  di  $e_{\mathbf{H}}$  in  $\mathbf{H}$  tale che  $\phi(e_{\mathbf{G}}) = e_{\mathbf{H}}$  e  $\phi(g_1)\phi(g_2) = \phi(g_1g_2)$  per ogni  $g_1, g_2 \in U$  tali che  $g_1g_2 \in U$ .

In questo caso, il differenziale di  $\phi$  nell'identità definisce un isomorfismo  $d\phi_{e_{\mathbf{G}}} : \text{Lie}(\mathbf{G}) \rightarrow \text{Lie}(\mathbf{H})$  tra le loro algebre di Lie.

Il fatto che ogni gruppo di Lie sia localmente isomorfo a un sottogruppo di Lie del gruppo lineare è conseguenza del teorema<sup>2</sup> (per la dimostrazione nel caso della caratteristica zero, vedi Capitolo X, Teorema 10.5.6)

**Teorema 11.1.13** (Ado-Iwasawa). *Ogni algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  ammette una rappresentazione fedele di dimensione finita. Esiste cioè per qualche intero positivo  $n$  un omomorfismo iniettivo di algebre di Lie  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ .*

Il gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  sarà quindi localmente isomorfo al gruppo analitico associato a una qualsiasi rappresentazione matriciale fedele della sua algebra di Lie. Vale il seguente:

**Teorema 11.1.14.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie. Allora il suo rivestimento universale  $\widetilde{\mathbf{G}}$  ammette un'unica struttura di gruppo di Lie che rende la proiezione di rivestimento  $\pi : \widetilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$  un omomorfismo di gruppi di Lie e un isomorfismo locale. In particolare,  $\pi_* : \text{Lie}(\widetilde{\mathbf{G}}) \rightarrow \text{Lie}(\mathbf{G})$  è un isomorfismo di algebre di Lie.*

*Data un'algebra di Lie reale  $\mathfrak{g}$  esiste unico, a meno di isomorfismi, un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso  $\mathbf{G}_{\mathfrak{g}}$  la cui algebra di Lie è isomorfa a  $\mathfrak{g}$ .*

*Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso ed  $\mathbf{H}$  un qualsiasi gruppo di Lie, allora per ogni omomorfismo  $\Phi : \text{Lie}(\mathbf{G}) \rightarrow \text{Lie}(\mathbf{H})$  delle loro algebre di Lie esiste un unico omomorfismo  $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$  tale che  $\Phi = d\phi_{e_{\mathbf{G}}}$ .*

*Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso ed  $\mathbf{H}$  un qualsiasi gruppo di Lie, allora ogni omomorfismo locale di  $\mathbf{G}$  in  $\mathbf{H}$  è restrizione di un omomorfismo globale, univocamente determinato.*

**Definizione 11.1.15.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie. Un sottogruppo di Lie di  $\mathbf{G}$  è un suo sottogruppo  $\mathbf{H}$ , dotato di una struttura di varietà analitica tale che l'inclusione  $\mathbf{H} \hookrightarrow \mathbf{G}$  sia un'applicazione analitica.*

Osserviamo che la topologia di  $\mathbf{H}$  è, in generale, più fine della topologia di sottospazio.

In modo analogo al caso dei sottogruppi del gruppo lineare abbiamo:

**Teorema 11.1.16.** *Ogni sottogruppo chiuso  $\mathbf{H}$  di un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  è un suo sottogruppo di Lie con la topologia indotta.*

*Per ogni sottoalgebra di Lie  $\mathfrak{h}$  dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  esiste uno ed un solo sottogruppo di Lie connesso  $\mathbf{H}$  di  $\mathbf{G}$  che abbia algebra di Lie  $\mathfrak{h}$ .*

**Definizione 11.1.17.** *Un'azione  $\phi^3$  (sinistra) di un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  su una varietà differenziabile  $M$  è un'applicazione differenziabile:*

$$\mathbf{G} \times M \ni (g, x) \longrightarrow \phi_g(x) \in M, \quad \text{tale che}$$

<sup>2</sup> La dimostrazione di questo risultato è dovuta ad I.D. Ado [Rappresentazione matriciale di algebre di Lie (in russo) Usp. Math. Nauk **2** no. 6 (1947 pp.159-173)] per i campi di caratteristica 0, e a K. Iwasawa [On the representation of Lie algebras Japan J. Math **19**, (1948), pp.405-426] per campi di caratteristica qualsiasi.

<sup>3</sup>In modo analogo si definisce un'azione a destra di un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  su una varietà differenziabile  $M$  come un'applicazione differenziabile:  $M \times \mathbf{G} \ni (x, g) \rightarrow x \cdot \phi_g \in M$  tale che  $x \cdot \phi_{g_1 g_2} = (x \cdot \phi_{g_1}) \cdot \phi_{g_2} \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbf{G}, \forall x \in M, \quad x \cdot \phi_e = x \quad \forall x \in M.$

$$\phi_{g_1}(\phi_{g_2}(x)) = \phi_{g_1 g_2}(x), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathfrak{G}, \forall x \in M.$$

Vale il seguente:

**Teorema 11.1.18.** *Sia  $\phi$  un'azione a sinistra di un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  su una varietà differenziabile  $M$ , sia  $x_0$  un punto di  $M$ . Consideriamo l'applicazione differenziabile:  $\phi_{x_0} : \mathbf{G} \ni g \rightarrow \phi_g(x_0) \in M$ . Allora:*

- (1) *Lo stabilizzatore  $\mathbf{G}_{x_0} = \{g \in \mathbf{G} \mid \phi_g(x_0) = x_0\}$  è un sottogruppo di Lie chiuso di  $\mathbf{G}$  con algebra di Lie uguale a  $\ker d\phi_{x_0 e}$ .*
- (2) *L'orbita  $\mathbf{G}x_0 = \phi_{x_0}(\mathbf{G}) = \{\phi_g(x_0) \mid g \in \mathbf{G}\}$  è una sottovarietà differenziabile di  $M$ .*

## 11.2. Struttura dei gruppi di Lie astratti

Descriviamo in questo paragrafo alcune proprietà generali dei gruppi di Lie astratti, che si ricollegano ai risultati sulla struttura delle algebre di Lie esposti nei Capitoli VII, VIII, IX, X.

**Teorema 11.2.1.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso, con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Sia  $\mathfrak{a}$  un ideale di  $\mathfrak{g}$  ed  $\mathbf{A}$  il corrispondente sottogruppo analitico di  $\mathbf{G}$ . Allora  $\mathbf{A}$  è un sottogruppo normale chiuso di  $\mathbf{G}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbf{H}$  un gruppo di Lie analitico con algebra di Lie  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ . Poiché  $\mathbf{G}$  è semplicemente connesso, esiste un omomorfismo di gruppi di Lie  $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$  il cui differenziale nell'identità  $d\phi_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  sia la proiezione canonica nel quoziente. Allora  $\mathbf{A}$  è la componente connessa dell'identità del nucleo di  $\phi$ , e quindi è un sottogruppo chiuso normale di  $\mathbf{G}$ .  $\square$

Il sottogruppo  $\mathbf{A}$  risulta essere semplicemente connesso<sup>4</sup>. Vale infatti il seguente:

**Teorema 11.2.2.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso e sia  $\mathbf{A}$  un suo sottogruppo analitico normale. Allora  $\mathbf{A}$  è chiuso e sia  $\mathbf{A}$  che  $\mathbf{G}/\mathbf{A}$  sono semplicemente connessi.*

*Inoltre il fibrato  $\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}/\mathbf{A}$  ammette una sezione analitica globale.*

Dividiamo la dimostrazione del teorema in una serie di lemmi.

**Lemma 11.2.3.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero ed  $\mathfrak{a}$  un suo ideale, massimale tra gli ideali propriamente contenuti in  $\mathfrak{g}$ . Allora esiste una sottoalgebra  $\mathfrak{b}$  di  $\mathfrak{g}$  tale che  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $\mathfrak{a}$  è massimale, l'algebra quoziente  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  è semplice, quindi o ha dimensione uno, o è semisemplice. Nel primo caso, è sufficiente scegliere  $\mathfrak{b} = \mathbb{k}X$  per un qualsiasi  $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{a}$ . Nel secondo caso, osserviamo che il radicale  $\mathfrak{r}$  di  $\mathfrak{g}$  è contenuto in  $\mathfrak{a}$ . Quindi, se  $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$  è una decomposizione di Levi-Malčev di  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{s}$  è un ideale di  $\mathfrak{s}$  e quindi  $\mathfrak{s} = (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{r}) \oplus \mathfrak{b}$  per un ideale  $\mathfrak{b}$  di  $\mathfrak{s}$ . Quindi  $\mathfrak{b}$  è una sottoalgebra di  $\mathfrak{g}$  per cui risulta  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ .  $\square$

<sup>4</sup>A. Malčev *On the simple connectedness of invariant subgroups of Lie groups* Doklady Akademii Nauk SSSR **34** (1942) pp.10-13.

**Lemma 11.2.4.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso, con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Siano  $\mathfrak{a}$  un ideale e  $\mathfrak{b}$  una sottoalgebra di  $\mathfrak{g}$  tali che  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ , e siano  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  i sottogruppi analitici generati da  $\mathfrak{a}$  e  $\mathfrak{b}$  rispettivamente. Allora l'applicazione*

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \ni (a, b) \rightarrow ab \in \mathbf{G}$$

*è un isomorfismo di gruppi di Lie.*

*In particolare  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sono entrambi chiusi e semplicemente connessi ed abbiamo:*

$$\mathbf{AB} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{e\}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $\tilde{\mathbf{A}}$  e  $\tilde{\mathbf{B}}$  gruppi di Lie analitici semplicemente connessi con algebre di Lie  $\mathfrak{a}$  e  $\mathfrak{b}$ . Poiché  $\tilde{\mathbf{B}}$  è semplicemente connesso, l'applicazione

$$\mathfrak{b} \ni X \rightarrow \text{ad}(X)|_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a})$$

si estende a un'applicazione

$$\tilde{\text{ad}} : \tilde{\mathbf{B}} \ni b \rightarrow \tilde{\text{ad}}_b \in \text{Aut}(\tilde{\mathbf{A}})$$

e possiamo quindi definire il prodotto semidiretto  $\mathbf{G}' = \tilde{\mathbf{A}} \ltimes \tilde{\mathbf{B}}$  ponendo

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \tilde{\text{ad}}_{b_1}(a_2), b_1 b_2)$$

se  $a_1, a_2 \in \tilde{\mathbf{A}}$  e  $b_1, b_2 \in \tilde{\mathbf{B}}$ .

Poiché topologicamente  $\mathbf{G}'$  è prodotto cartesiano di connessi e semplicemente connessi, è connesso e semplicemente connesso, con algebra di Lie  $\mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}$ . Quindi l'isomorfismo naturale tra  $\mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}$  e  $\mathfrak{g}$  definisce un isomorfismo tra i gruppi di Lie  $\mathbf{G}'$  e  $\mathbf{G}$ . Ne segue la tesi, in quanto  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sono le immagini di  $\tilde{\mathbf{A}}$  e  $\tilde{\mathbf{B}}$  nell'isomorfismo di  $\mathbf{G}'$  su  $\mathbf{G}$ .  $\square$

**Lemma 11.2.5.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso, con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Siano  $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_m$  sottoalgebre di Lie di  $\mathfrak{g}$ , tali che*

$$(i) \quad \mathfrak{g} = \bigoplus_{h=0}^m \mathfrak{b}_h,$$

$$(ii) \quad \mathfrak{a}_{h-1} = \bigoplus_{0 \leq j < h} \mathfrak{b}_j \text{ è un ideale di } \mathfrak{a}_h = \bigoplus_{0 \leq j \leq h} \mathfrak{b}_j \text{ per ogni } h = 1, \dots, m.$$

*Allora, per ogni  $h = 0, 1, \dots, m$ , il sottogruppo analitico  $\mathbf{B}_h$  di  $\mathbf{G}$  con algebra di Lie  $\mathfrak{b}_h$  è semplicemente connesso e l'applicazione:*

$$\mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_1 \times \dots \times \mathbf{B}_m \ni (b_0, b_1, \dots, b_m) \rightarrow b_0 \cdot b_1 \cdots b_m \in \mathbf{G}$$

*è un diffeomorfismo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $\mathbf{A}_h$  i sottogruppi analitici di  $\mathbf{G}$  con algebra di Lie  $\mathfrak{a}_h$  ( $h = 0, 1, \dots, m$ ). Utilizzando il lemma precedente, si ottiene per ricorrenza che per ogni  $h = 1, \dots, m$  i sottogruppi  $\mathbf{A}_{m-h}$  e  $\mathbf{B}_{m-h+1}$  sono semplicemente connessi ed  $\mathbf{A}_{m-h} \times \mathbf{B}_{m-h+1} \ni (a, b) \rightarrow a \cdot b \in \mathbf{A}_{m-h+1}$  è un diffeomorfismo. Poiché  $\mathbf{A}_m = \mathbf{G}$ , otteniamo la tesi da

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &\simeq \mathbf{A}_{m-1} \times \mathbf{B}_m \simeq \mathbf{A}_{m-2} \times \mathbf{B}_{m-1} \times \mathbf{B}_m \simeq \mathbf{A}_{m-3} \times \mathbf{B}_{m-2} \times \mathbf{B}_{m-1} \times \mathbf{B}_m \\ &\simeq \dots \simeq \mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}_1 \cdots \times \mathbf{B}_m = \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_1 \cdots \times \mathbf{B}_m. \end{aligned}$$

$\square$

La dimostrazione del Teorema 11.2.2 si ricava dai lemmi precedenti: se  $\mathfrak{a}$  è l'algebra di Lie di  $\mathbf{A}$ , possiamo costruire una catena massimale di sottoalgebre

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \subsetneq \mathfrak{a}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{a}_{m-1} \subsetneq \mathfrak{a}_m = \mathfrak{g}$$

tale che ogni  $\mathfrak{a}_h$  sia un ideale in  $\mathfrak{a}_{h+1}$ . Usando il Lemma 11.2.3, possiamo trovare sottoalgebre  $\mathfrak{b}_h$  tali che  $\mathfrak{a}_h = \mathfrak{a}_{h-1} \oplus \mathfrak{b}_h$  per ogni  $h = 1, \dots, m$ . Posto allora  $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}_0$ , abbiamo  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{h=0}^m \mathfrak{b}_h$  e possiamo applicare il Lemma 11.2.5 per ottenere la tesi del Teorema 11.2.2.  $\square$

**Corollario 11.2.6.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Sia  $\mathfrak{z}$  il centro di  $\mathfrak{g}$ . Il sottogruppo analitico  $\mathbf{Z}$  di  $\mathbf{G}$  con algebra di Lie  $\mathfrak{z}$  è semplicemente connesso.*

### 11.3. Il commutatore

**Definizione 11.3.1.** Il *commutatore*  $\mathbf{G}^{(1)}$  di un gruppo  $\mathbf{G}$  è il sottogruppo generato dagli elementi  $(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$ , al variare di  $a$  e  $b$  in  $\mathbf{G}$ .

**Lemma 11.3.2.** *Il commutatore  $\mathbf{G}^{(1)}$  è un sottogruppo normale di  $\mathbf{G}$  ed è il suo più piccolo sottogruppo normale per cui il quoziente  $\mathbf{G}/\mathbf{G}^{(1)}$  sia un sottogruppo abeliano.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $a, b, g \in \mathbf{G}$ , allora  $\text{ad}_g((a, b)) = (\text{ad}_g(a), \text{ad}_g(b))$ . Quindi  $\mathbf{G}^{(1)}$  è un sottogruppo normale. Se  $\mathbf{A}$  è un qualsiasi gruppo abeliano e  $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{A}$  un omomorfismo di gruppi, allora  $\mathbf{G}^{(1)} \subset \ker \phi$ , e quindi  $\mathbf{G}^{(1)}$  è il più piccolo sottogruppo normale di  $\mathbf{G}$  per cui il quoziente  $\mathbf{G}/\mathbf{G}^{(1)}$  sia abeliano.  $\square$

Ricordiamo che il *commutatore* di un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  su un campo  $\mathbb{k}$  è il suo ideale  $\mathfrak{g}^{(1)}$  generato dagli elementi della forma  $[X, Y]$  al variare di  $X, Y$  in  $\mathfrak{g}$ . Abbiamo:

**Lemma 11.3.3.**

- (1) *Il commutatore  $\mathfrak{g}^{(1)}$  di un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  su  $\mathbb{k}$  è il suo più piccolo ideale  $\mathfrak{g}'$  per cui il quoziente  $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$  sia abeliano.*
- (2) *Se  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathbf{G})$ , allora  $\mathfrak{g}^{(1)}$  è l'algebra di Lie di  $\mathbf{G}^{(1)}$ .*
- (3) *Se  $\mathbf{G}$  è connesso e semplicemente connesso allora il suo commutatore  $\mathbf{G}^{(1)}$  è chiuso in  $\mathbf{G}$  e connesso, e coincide con il sottogruppo analitico di  $\mathfrak{g}^{(1)}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Le prime due affermazioni sono di facile verifica e ne tralasciamo perciò la dimostrazione.

Supponiamo ora che  $\mathbf{G}$  sia un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso. Consideriamo l'algebra di Lie  $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ . Essa è abeliana e quindi possiamo considerarla come l'algebra di Lie del gruppo additivo  $\mathbb{R}^k$  per qualche intero positivo  $k$ . Per il Teorema 11.1.14, l'omomorfismo canonico  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$  è il differenziale nell'identità di un omomorfismo di algebre di Lie  $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Il suo nucleo è un sottogruppo chiuso normale  $\mathbf{H}$  di  $\mathbf{G}$ , con algebra di Lie  $\mathfrak{g}^{(1)}$ . Poiché  $\mathbf{G}/\mathbf{H} \simeq \mathbb{R}^k$  è abeliano,  $\mathbf{H} \supset \mathbf{G}^{(1)}$ .

Dico che  $\mathbf{H}$  è connesso. Siano infatti  $a, b$  due punti distinti di  $\mathbf{H}$ . Poiché  $\mathbf{G}$  è connesso per archi, possiamo trovare un cammino continuo  $s : [0, 1] \rightarrow \mathbf{G}$  con

$s(0) = a$ ,  $s(1) = b$ . Allora  $\phi(s(t))$  è un laccetto continuo in  $\mathbb{R}^k$ , con  $\phi(s(0)) = \phi(s(1)) = 0$ . Sia  $F : [0, 1] \times [0, 1] \ni (t, \tau) \rightarrow F(t, \tau) \in \mathbb{R}^k$  un'omotopia di  $\phi \circ s$  con il laccetto costante:  $F(0, \tau) = 0$ ,  $F(1, \tau) = 0$  per ogni  $\tau \in [0, 1]$  ed  $F(t, 1) = 0$  per ogni  $t \in [0, 1]$ .

Poiché  $\phi$  è una fibrazione localmente banale, la  $F$  si rialza ad un'applicazione continua  $\tilde{F} : [0, 1] \times [0, 1] \ni (t, \tau) \rightarrow \tilde{F}(t, \tau) \in \mathbf{G}$  con  $\tilde{F}(t, 0) = s(t)$  per  $t \in [0, 1]$ ,  $\tilde{F}(0, \tau) = a$  ed  $\tilde{F}(1, \tau) = b$  per ogni  $\tau \in [0, 1]$ ,  $\phi \circ \tilde{F} = F$ . Poiché  $F(t, 1) = 0$ , abbiamo  $\tilde{F}(t, 1) \in \mathbf{H}$  per ogni  $t \in [0, 1]$  e quindi  $[0, 1] \ni t \rightarrow \tilde{F}(t, 1) \in \mathbf{H}$  è un cammino continuo in  $\mathbf{H}$  che congiunge  $a$  a  $b$ . Perciò  $\mathbf{H}$  è connesso per archi.

Quindi  $\mathbf{H}$  è il sottogruppo analitico con algebra di Lie  $\mathfrak{g}^{(1)}$ . Otteniamo così l'inclusione  $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}^{(1)}$ , e quindi, poiché vale anche l'inclusione opposta, concludiamo che  $\mathbf{H} = \mathbf{G}^{(1)}$ .  $\square$

Da questo lemma si ricava subito la:

**Proposizione 11.3.4.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie connesso, con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Se  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , allora  $\mathbf{G}$  coincide con il suo commutatore  $\mathbf{G}^{(1)}$ .*  $\square$

Sia ora  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Se  $\mathfrak{h}$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}$ , non è detto che il sottogruppo analitico  $\mathbf{H}$  generato da  $\mathfrak{h}$  sia chiuso in  $\mathbf{G}$ . Possiamo allora considerare il più piccolo sottogruppo chiuso  $\mathbf{Q}$  di  $\mathbf{G}$  che contiene  $\mathbf{H}$ .

**Definizione 11.3.5.** La sua algebra di Lie  $\mathfrak{q} = \text{Lie}(\bar{\mathbf{H}})$  si indica con  $\mathfrak{h}^M$  e si dice la *chiusura di Malčev* di  $\mathfrak{h}$  in  $\mathfrak{g}$ .

Vale il:

**Teorema 11.3.6.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie ed  $\mathfrak{h}$  una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathbf{G})$ . I commutatori di  $\mathfrak{h}$  e della sua chiusura di Malčev  $\mathfrak{h}^M$  coincidono:*

$$(11.3.1) \quad \mathfrak{h}^{M(1)} = \mathfrak{h}^{(1)}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia

$$\mathbf{H}_1 = \{g \in \mathbf{G} \mid (\text{Ad}_g - I_{\mathfrak{g}})(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^{(1)}\}.$$

Allora  $\mathbf{H}_1$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{G}$  e la sua algebra di Lie è

$$\mathfrak{h}_1 = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}(X)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^{(1)}\}.$$

Poiché  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_1$ , abbiamo  $\mathfrak{h}^M \subset \mathfrak{h}_1$ , cioè  $[\mathfrak{h}^M, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}^{(1)}$ .

Consideriamo quindi il sottogruppo chiuso:

$$\mathbf{H}_2 = \{g \in \mathbf{G} \mid (\text{Ad}_g - I_{\mathfrak{g}})(\mathfrak{h}^M) \subset \mathfrak{h}^{(1)}\}$$

con algebra di Lie

$$\mathfrak{h}_2 = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}(X)(\mathfrak{h}^M) \subset \mathfrak{h}^{(1)}\}.$$

Da  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_2$  segue che  $\mathfrak{h}^M \subset \mathfrak{h}_2$ , cioè  $(\mathfrak{h}^M)^{(1)} = [\mathfrak{h}^M, \mathfrak{h}^M] \subset \mathfrak{h}^{(1)}$ . Poiché  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}^M$ , vale anche l'inclusione opposta:  $\mathfrak{h}^{(1)} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset [\mathfrak{h}^M, \mathfrak{h}^M]$ , e dunque l'uguaglianza che volevamo dimostrare.  $\square$

Utilizzando questo teorema, possiamo dimostrare la:

**Proposizione 11.3.7.** *Sia  $\mathbf{H}$  un sottogruppo di Lie analitico di un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$ . Se  $\mathbf{K}$  è la chiusura di  $\mathbf{H}$  in  $\mathbf{G}$ , e  $\tilde{\mathbf{K}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{K}$  il suo rivestimento universale, allora il sottogruppo analitico  $\tilde{\mathbf{H}} = (\pi^{-1}(\mathbf{H}))_e$  è un sottogruppo chiuso di  $\tilde{\mathbf{K}}$ , localmente isomorfo ad  $\mathbf{H}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Il gruppo  $\mathbf{K}$  è il sottogruppo analitico di  $\mathbf{G}$  la cui algebra di Lie  $\mathfrak{k}$  è la chiusura di Malčev  $\mathfrak{h}^M$  di  $\mathfrak{h} = \text{Lie}(\mathbf{H})$ . Il quoziente  $\tilde{\mathbf{K}}/\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}$  è un gruppo di Lie semplicemente connesso con algebra di Lie abeliana, e quindi isomorfo al gruppo additivo di uno spazio vettoriale  $\mathbb{R}^m$ . Poiché  $\mathfrak{h}^{(1)} = \mathfrak{k}^{(1)}$ , il quoziente  $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}^{(1)}$  è una sottoalgebra di Lie dell'algebra di Lie  $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}^{(1)}$  di  $\tilde{\mathbf{K}}/\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}$ . Il corrispondente sottogruppo analitico  $\mathbf{A}$  è un sottospazio vettoriale di  $\tilde{\mathbf{K}}/\tilde{\mathbf{K}}^{(1)} \simeq \mathbb{R}^m$  e quindi chiuso.

La sua immagine inversa in  $\tilde{\mathbf{K}}$  rispetto alla proiezione  $\tilde{\mathbf{K}} \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}/\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}$  è un sottogruppo chiuso, di cui  $\tilde{\mathbf{H}}$  è la componente connessa dell'identità.  $\square$

**Definizione 11.3.8.** Se  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$  sono due sottogruppi normali di un gruppo  $\mathbf{G}$ , allora il sottogruppo  $(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)$  generato dai commutatori  $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$  con  $g_1 \in \mathbf{G}_1$  e  $g_2 \in \mathbf{G}_2$  è ancora un sottogruppo normale di  $\mathbf{G}$ , che si dice il mutuo commutatore di  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$ .

In modo analogo il commutatore  $[g_1, g_2]$  di due ideali di un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  è ancora un ideale dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ .

Enunciamo il seguente teorema, che ci sarà utile per discutere la struttura dei gruppi di Lie risolubili e nilpotenti.

**Teorema 11.3.9.** (1) *Se  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$  sono due sottogruppi di Lie normali connessi di un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$ , allora il loro mutuo commutatore  $(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)$  è ancora un gruppo di Lie normale connesso, con*

$$\text{Lie}((\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)) = [\text{Lie}(\mathbf{G}_1), \text{Lie}(\mathbf{G}_2)].$$

(2) *Se  $\mathfrak{h}_1$  e  $\mathfrak{h}_2$  sono due ideali dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $\mathbf{G}$  ed  $\mathfrak{h}_1^M, \mathfrak{h}_2^M$  le loro chiusure di Malčev, abbiamo:*

$$[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2] = [\mathfrak{h}_1^M, \mathfrak{h}_2^M].$$

#### 11.4. Gruppi di Lie nilpotenti e risolubili

Dato un gruppo  $\mathbf{G}$  poniamo:

$$\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}^1(G) = (G, G), \quad \mathcal{D}^k(G) = (\mathcal{D}^{k-1}(G), \mathcal{D}^{k-1}(G)) \quad \text{per } k > 1$$

$$\mathcal{C}(G) = \mathcal{C}^1(G) = (G, G), \quad \mathcal{C}^k(G) = (\mathcal{C}^{k-1}(G), G) \quad \text{per } k > 1.$$

**Teorema 11.4.1.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie connesso con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Allora, per ogni  $k \geq 1$ ,  $\mathcal{D}^k(\mathbf{G})$  e  $\mathcal{C}^k(\mathbf{G})$  sono sottogruppi di Lie connessi e normali di  $\mathbf{G}$ , con*

$$\text{Lie}(\mathcal{D}^k(\mathbf{G})) = \mathfrak{D}^k(\mathfrak{g}), \quad \text{Lie}(\mathcal{C}^k(\mathbf{G})) = \mathfrak{C}^k(\mathfrak{g}).$$

*Se  $\mathbf{G}$  è semplicemente connesso, allora  $\mathcal{D}^k(\mathbf{G})$  e  $\mathcal{C}^k(\mathbf{G})$  sono chiusi e semplicemente connessi.*

Questo teorema è un'immediata conseguenza del Teorema 11.3.9.

**Definizione 11.4.2.** Un gruppo  $\mathbf{G}$  si dice *nilpotente* (o *unipotente*) se  $\mathcal{C}^m(\mathbf{G}) = \{e\}$  per qualche intero  $m > 0$ . Un gruppo  $\mathbf{G}$  si dice *risolubile* se  $\mathcal{D}^m(\mathbf{G}) = \{e\}$  per qualche intero  $m > 0$ .

Dal Teorema 11.4.1 ricaviamo il corollario:

- Corollario 11.4.3.** (1) *Un gruppo di Lie connesso è nilpotente se e soltanto se la sua algebra di Lie è nilpotente.*  
 (2) *Un gruppo di Lie connesso è risolubile se e soltanto se la sua algebra di Lie è risolubile.*  
 (3) *Se  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo normale nilpotente di un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$ , anche la sua chiusura  $\overline{\mathbf{H}}$  è un sottogruppo normale nilpotente di  $\mathbf{G}$ .*  
 (4) *Se  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo normale risolubile di un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$ , anche la sua chiusura  $\overline{\mathbf{H}}$  è un sottogruppo normale risolubile di  $\mathbf{G}$ .*

**Definizione 11.4.4.** Un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  si dice *semisemplice* se la sua algebra di Lie è semisemplice, cioè se ogni suo sottogruppo di Lie normale risolubile è discreto<sup>5</sup>.

Abbiamo:

**Corollario 11.4.5.** *Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo connesso semisemplice con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , allora  $(\mathbf{G}, \mathbf{G}) = \mathbf{G}$  e  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ .  $\square$*

I gruppi di Lie connessi nilpotenti e risolubili hanno rivestimento universale Euclideo. Abbiamo infatti:

**Teorema 11.4.6.** *Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo di Lie nilpotente connesso con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , allora l'applicazione esponenziale*

$$\mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \exp(X) \in \mathbf{G}$$

*è un rivestimento.*

*L'immagine inversa dell'identità mediante l'applicazione esponenziale è un sottogruppo additivo discreto  $\Gamma$  di  $\mathfrak{g}$ , contenuto nel centro  $\mathfrak{z}$  di  $\mathfrak{g}$ , isomorfo al gruppo fondamentale  $\pi_1(\mathbf{G})$ , ed abbiamo un diffeomorfismo  $\mathbf{G} \simeq \mathfrak{g}/\Gamma$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per l'esponenziale vale la formula del differenziale che abbiamo dimostrato nel caso delle matrici:

$$(d \exp)(X) = d(L_{\exp(X)})(e) \circ \frac{I_{\mathfrak{g}} - \exp(-\text{ad}(X))}{\text{ad}(X)} \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

ove abbiamo identificato  $T_X \mathfrak{g}$  con  $\mathfrak{g}$ .

Utilizziamo il teorema di Ado per rappresentare  $\mathfrak{g}$  come una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$  per uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita. Per il Teorema di Engel possiamo, scegliendo un'opportuna base di  $V$ , identificare  $\mathfrak{g}$  ad un'algebra nilpotente di matrici triangolari inferiori. Possiamo così verificare direttamente che la trasformazione

$$(I_{\mathfrak{g}} - \exp(-\text{ad}(X)))/\text{ad}(X)$$

<sup>5</sup>Questa definizione differisce da quella che si utilizza ad esempio nella teoria dei gruppi finiti, in cui si richiede che  $\mathbf{G}$  non contenga sottogruppi normali risolubili non banali.

ha determinante 1 per ogni  $X$  ed è quindi invertibile: l'esponenziale  $\mathfrak{g} \xrightarrow{\exp} \mathbf{G}$  è quindi una sommersione differenziabile.

Siano  $A, B$  due elementi di  $\mathfrak{g}$  per cui  $\exp(A) = \exp(B)$ . Poiché

$$\text{Ad}(\exp(X)) = \exp(\text{ad}(X)), \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

avremo anche  $\exp(\text{ad}(A)) = \exp(\text{ad}(B))$ . L'esponenziale di matrici è iniettivo sull'insieme delle matrici nilpotenti (Teorema 2.2.2 del Capitolo II). Otteniamo perciò che  $\text{ad}(A) = \text{ad}(B)$ , cioè  $C = A - B \in \mathfrak{z}$ . Poiché  $C \in \mathfrak{z}$ , abbiamo:

$$\exp(B) = \exp(A) = \exp(B + C) = \exp(B) \exp(C) = \exp(C) \exp(B)$$

e quindi  $\exp(C) = e$ .

Otteniamo perciò la caratterizzazione:

$$\Gamma = \{Z \in \mathfrak{z} \mid \exp(Z) = e\}.$$

Osserviamo che  $\Gamma$  è un sottogruppo additivo di  $\mathfrak{g}$  perché è contenuto in  $\mathfrak{z}$  e quindi, se  $Z_1, Z_2 \in \Gamma$ , è  $\exp(Z_1 + Z_2) = \exp(Z_1) \exp(Z_2) = e$ .

Per completare la dimostrazione osserviamo che l'esponenziale di matrici  $\text{Exp} : \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V) \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$  definisce un diffeomorfismo tra  $\mathfrak{g}$  e il gruppo nilpotente di matrici  $\tilde{\mathbf{G}} = \text{Exp}(\mathfrak{g})$ . Esso si identifica quindi al rivestimento universale di  $\mathbf{G}$  e l'applicazione di rivestimento si ottiene dal diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{Exp}} & \tilde{\mathbf{G}} \\ \parallel & & \downarrow p \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\exp} & \mathbf{G}, \end{array}$$

da cui si ricavano le altre affermazioni del teorema.  $\square$

**Teorema 11.4.7.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie risolubile connesso e semplicemente connesso. Sia  $X_1, \dots, X_m$  una base di  $\mathfrak{g}$  adattata alla sequenza di sottoalgebre  $\{\mathfrak{a}_h\}$  descritta nel Teorema 7.10.6 del Capitolo VII. Allora l'applicazione*

$$\mathbb{R}^m \ni (t_1, \dots, t_m) \longrightarrow \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_m X_m) \in \mathbf{G}$$

*è un diffeomorfismo di  $\mathbb{R}^m$  su  $\mathbf{G}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione è un'applicazione immediata del Lemma 11.2.5. Poiché le algebre di Lie  $\mathfrak{b}_i = \mathbb{R} X_i$  soddisfano le ipotesi del Lemma 11.2.5, i sottogruppi a un parametro  $\mathbf{B}_i = \{\exp(tX_i) \mid t \in \mathbb{R}\}$  sono semplicemente connessi e l'applicazione  $\mathbf{B}_1 \times \cdots \times \mathbf{B}_m \ni (b_1, \dots, b_m) \rightarrow b_1 \cdots b_m \in \mathbf{G}$  è un diffeomorfismo.  $\square$

**Corollario 11.4.8.** *Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo di Lie risolubile connesso e  $X_1, \dots, X_m$  una base di  $\mathfrak{g}$  adattata alla sequenza di sottoalgebre  $\{\mathfrak{a}_h\}$  descritta nel Teorema 7.10.6 del Capitolo VII. Allora l'applicazione*

$$\mathbb{R}^m \ni (t_1, \dots, t_m) \longrightarrow \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_m X_m) \in \mathbf{G}$$

*è un rivestimento di  $\mathbf{G}$ .*

Dal Teorema 11.4.7 ricaviamo:

**Teorema 11.4.9.** *I sottogruppi analitici di un gruppo di Lie risolubile semplicemente connesso sono chiusi e semplicemente connessi.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie risolubile, connesso e semplicemente connesso, con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathbf{B}$  un suo sottogruppo di Lie connesso, con algebra di Lie  $\mathfrak{b}$ .

Fissiamo una bandiera completa di sottoalgebre di  $\mathfrak{g}$ :

$$(\dagger) \quad \{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{m-1} \subset \mathfrak{a}_m = \mathfrak{g}$$

con  $\mathfrak{a}_{h-1}$  ideale in  $\mathfrak{a}_h$  e  $\mathfrak{a}_h/\mathfrak{a}_{h-1}$  algebra di Lie abeliana di dimensione uno per ogni  $h = 1, \dots, m$ . Consideriamo le intersezioni  $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}_h$ . È

$$\dim(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}_h) \leq 1 + \dim(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}_{h-1})$$

e quindi possiamo fissare una base  $X_1, \dots, X_m$  di  $\mathfrak{g}$ , adattata alla bandiera  $(\dagger)$  tale che, per una sequenza  $1 \leq h_1 < \cdots < h_\mu \leq m$ , i vettori  $X_{h_1}, \dots, X_{h_\mu}$  formino una base di  $\mathfrak{b}$ . Allora  $\mathbf{B}$  risulta uguale all'immagine del sottospazio vettoriale  $V = \{t \in \mathbb{R}^m \mid t_j = 0 \text{ se } j \neq h_1, \dots, h_\mu\}$  mediante il diffeomorfismo

$$\mathbb{R}^m \ni t \longrightarrow \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_m X_m) \in \mathbf{G}$$

e quindi chiuso e semplicemente connesso.  $\square$

**Teorema 11.4.10.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie connesso, con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Siano  $\mathfrak{r}$  il radicale ed  $\mathfrak{s}$  un fattore di Levi di  $\mathfrak{g}$  ed  $\mathbf{R}, \mathbf{S}$  i sottogruppi analitici di  $\mathbf{G}$  generati da  $\mathfrak{r}$  e  $\mathfrak{s}$ , rispettivamente. Allora:*

- (1)  $\mathbf{R}$  è un sottogruppo chiuso normale di  $\mathbf{G}$ .
- (2)  $\mathbf{G} = \mathbf{R}\mathbf{S}$ ;
- (3) Se  $\mathbf{S}'$  è un altro sottogruppo di Lie analitico semisemplice massimale in  $\mathbf{G}$ , allora  $\mathbf{S}$  ed  $\mathbf{S}'$  sono coniugati in  $\mathbf{G}$ , ed  $\mathbf{S}' = g\mathbf{S}g^{-1}$  con  $g \in \mathbf{N}_0$  dove  $\mathbf{N}_0$  è il sottogruppo analitico che ha come algebra di Lie il radicale nilpotente  $\mathfrak{n}_0$  di  $\mathfrak{g}$ , e  $\mathbf{G} = \mathbf{R}\mathbf{S}'$ ;
- (4) Se  $\mathbf{G}$  è semplicemente connesso, allora  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}$  sono chiusi e semplicemente connessi e l'applicazione

$$\mathbf{R} \times \mathbf{S} \ni (a, b) \longrightarrow ab \in \mathbf{G}$$

è un diffeomorfismo.

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che, se  $\mathfrak{r}^M$  è la chiusura di Malčev di  $\mathfrak{r}$ , da  $[\mathfrak{r}^M, \mathfrak{r}^M] = [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$  segue che  $\overline{\mathbf{R}}$  è ancora risolubile e quindi, poiché la chiusura di un sottogruppo normale è ancora normale,  $\mathbf{R} = \overline{\mathbf{R}}$  è chiuso.

In modo analogo si ottiene che anche il sottogruppo analitico  $\mathbf{N}$  la cui algebra di Lie è l'ideale nilpotente massimale di  $\mathfrak{g}$  è chiuso.

Poiché  $\mathbf{R}$  è un sottogruppo normale di  $\mathbf{G}$ , il prodotto  $\mathbf{R}\mathbf{S}$  è un sottogruppo di  $\mathbf{G}$ . L'applicazione  $\mathbf{R} \times \mathbf{S} \ni (a, b) \rightarrow ab \in \mathbf{G}$  è differenziabile ed il suo differenziale è surgettivo in  $(e_{\mathbf{R}}, e_{\mathbf{S}})$ . Perciò la sua immagine è un sottogruppo di  $\mathbf{G}$  che contiene un intorno dell'identità. Poiché  $\mathbf{G}$  è, essa coincide con  $\mathbf{G}$ .

Se  $\mathbf{G}$  è semplicemente connesso, allora, per il Lemma 11.2.4,  $\mathbf{S}$  è semplicemente connesso e l'applicazione  $\mathbf{R} \times \mathbf{S} \ni (a, b) \rightarrow ab \in \mathbf{G}$  è un diffeomorfismo.

La 3) è conseguenza del Teorema 7.13.3 del Capitolo VII.  $\square$

**Corollario 11.4.11.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie connesso, con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Siano  $\mathfrak{r}$  il radicale di  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{n}$  l'ideale nilpotente massimale di  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{n}_0$  il radicale nilpotente di  $\mathfrak{g}$ . Allora i sottogruppi analitici  $\mathbf{R}$  con algebra di Lie  $\mathfrak{r}$ ,  $\mathbf{N}$  con algebra di Lie  $\mathfrak{n}$ , sono chiusi. Se  $\mathbf{G}$  è semplicemente connesso,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{N}_0$  sono chiusi e semplicemente connessi.*

**DIMOSTRAZIONE.** Il fatto che  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{N}$  siano chiusi è una conseguenza del Corollario 11.4.3, in quanto  $\overline{\mathbf{R}}$  è ancora risolubile ed  $\overline{\mathbf{N}}$  è ancora nilpotente. Nel caso in cui  $\mathbf{G}$  sia semplicemente connesso,  $(\mathbf{G}, \mathbf{G})$  è chiuso e quindi anche  $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cap (\mathbf{G}, \mathbf{G})$  è chiuso. Inoltre  $\mathbf{R}$  è semplicemente connesso per il Teorema 11.4.10 e quindi lo sono anche  $\mathbf{N}$  ed  $\mathbf{N}_0$  in quanto sottogruppi analitici di un gruppo risolubile semplicemente connesso.  $\square$

### 11.5. Rappresentazioni lineari di gruppi di Lie

**Definizione 11.5.1.** Chiamiamo *rappresentazione lineare di dimensione finita* di un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  il dato di uno spazio vettoriale reale  $V$  e di un omomorfismo di gruppi di Lie  $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ .

La rappresentazione  $\rho$  si dice

*irriducibile* se non esiste nessun sottospazio vettoriale  $\rho(\mathbf{G})$ -invariante  $W$  di  $V$  con  $\{0\} \subsetneq W \subsetneq V$ ,

*indecomponibile* se non esistono due sottospazi lineari  $\rho(\mathbf{G})$ -invarianti  $W_1, W_2$  diversi da  $\{0\}$  e tali che  $V = W_1 \oplus W_2$ ,

*totalmente decomponibile* se esistono sottospazi  $\rho(\mathbf{G})$ -invarianti  $W_i, i = 1, \dots, k$ , tali che  $V = \bigoplus_{i=1}^k W_i$  e  $\rho_i : \mathbf{G} \ni g \rightarrow \rho(g)|_{W_i} \in \mathbf{GL}(W_i)$  sia irriducibile per ogni  $i$ .

Diciamo che un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  è *linearizzabile* se ammette una rappresentazione lineare di dimensione finita *fedele* (cioè iniettiva).

Per le rappresentazioni lineari vale il

**Teorema 11.5.2** (Lemma di Schur). *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie e  $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$  una sua rappresentazione di dimensione finita irriducibile. Se  $\mathbb{A}$  è un sottoanello commutativo unitario di  $\text{End}_{\mathbb{R}}(V)$  i cui endomorfismi commutano con tutte le applicazioni di  $\rho(\mathbf{G})$ , allora  $\mathbb{A}$  è un campo, isomorfo ad  $\mathbb{R}$ , o al campo  $\mathbb{C}$  dei numeri complessi.*

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti, se  $T \in \mathbb{A}$ , allora  $\ker T$  è  $\rho(\mathbf{G})$ -invariante e quindi uguale o a  $\{0\}$ , o a  $V$ . In particolare tutti gli elementi di  $\mathbb{A}$  diversi da 0 sono invertibili e quindi  $\mathbb{A}$  è un'estensione algebrica di  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Per il Teorema di Ado, ogni gruppo di Lie è localmente isomorfo ad un sottogruppo di Lie di un gruppo lineare  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ , ma non tutti i gruppi di Lie sono *globalmente* isomorfi a sottogruppi di Lie di un gruppo lineare.

Per costruire un esempio, possiamo utilizzare il:

**Teorema 11.5.3.** *Se  $\mathbf{G}$  è un sottogruppo connesso semisemplice di un gruppo lineare, allora il suo centro  $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$  è finito.*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $\mathbf{G}$  sia un gruppo di Lie connesso semisemplice e che la rappresentazione  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$  sia irriducibile. Il centro  $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$  è un sottogruppo chiuso discreto di  $\mathbf{G}$ . Per il Lemma di Schur, il sottoanello unitario  $\mathbb{A}$  di  $\text{End}_{\mathbb{R}}(V)$  generato da  $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ , è isomorfo o al campo  $\mathbb{R}$  o al campo  $\mathbb{C}$ .

Poiché  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , ogni elemento  $X \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$  ha traccia nulla e dunque ogni elemento di  $\mathbf{G}$  ha determinante 1. Quindi gli unici multipli dell'identità che possono essere contenuti in  $\mathbf{G}$  sono  $\pm \text{Id}_V$ . Supponiamo che  $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$  contenga un elemento  $a$  che non sia un multiplo dell'identità. Esso ha due autovalori complessi distinti  $\lambda, \bar{\lambda}$  con  $|\lambda| = 1$ . Poiché  $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$  è chiuso e discreto in  $\mathbf{G}$ ,  $\lambda = e^{i\theta}$  (con  $\theta \in \mathbb{R}$ ) deve essere una radice di indice intero dell'unità e  $\{a^h \mid h \in \mathbb{Z}\}$  isomorfo a un sottogruppo finito di  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Inoltre  $V$  si decompone nella somma diretta di sottospazi di dimensione due,  $V = \bigoplus W_i$ , su ciascuno dei quali  $a$  si rappresenta come una rotazione di angolo  $\theta$ .

Per il Lemma di Schur  $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \subset \mathbb{R}[a]$ . Quindi  $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$  si può considerare come un sottogruppo discreto del gruppo  $\mathbf{SO}(2)$  e quindi è un gruppo finito.

Se la rappresentazione fedele  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$  non è irriducibile, utilizziamo la proprietà di totale decomponibilità delle rappresentazioni lineari dei gruppi di Lie semisemplici<sup>6</sup>: scriviamo  $V = \bigoplus_{h=1}^m V_h$  come una somma diretta di sottospazi vettoriali, ciascuno dei quali sia  $\mathbf{G}$ -irriducibile. Indichiamo con  $\rho_h$  la rappresentazione lineare su  $V_h$  indotta dalla restrizione. Per la prima parte della dimostrazione,  $\mathbf{Z}(\rho_h(\mathbf{G}))$  è finito. Poiché l'applicazione

$$\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \ni a \longrightarrow (\rho_1(a), \dots, \rho_m(a)) \in \mathbf{Z}(\rho_1(\mathbf{G})) \times \dots \times \mathbf{Z}(\rho_m(\mathbf{G}))$$

è iniettiva per la fedeltà della  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ , ne segue che  $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$  è finito.  $\square$

Se  $\tilde{\mathbf{G}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}$  è un rivestimento connesso di un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$ , allora  $\pi^{-1}(e_{\mathbf{G}})$  è contenuto nel centro di  $\tilde{\mathbf{G}}$ . Infatti, se  $a \in \pi^{-1}(e_{\mathbf{G}})$ , l'applicazione  $\text{ad}_{\tilde{\mathbf{G}}}(a)$  è un automorfismo di  $\mathbf{G}$  che coincide con l'identità in un intorno di  $e_{\tilde{\mathbf{G}}}$  e quindi su  $\tilde{\mathbf{G}}$ .

In particolare, il rivestimento universale di un gruppo di Lie semisemplice che abbia gruppo fondamentale non finito non è linearizzabile.

Ad esempio, il rivestimento universale  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  di  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  non è linearizzabile e il suo centro è isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . In modo analogo non sono linearizzabili i rivestimenti universali  $\widetilde{\mathbf{SO}}(p, 2)$  di  $\mathbf{SO}(p, 2)$  se  $p \geq 1$  ed  $\widetilde{\mathbf{SU}}(p, q)$  di  $\mathbf{SU}(p, q)$  se  $p, q \geq 1$ .

La condizione di avere un gruppo fondamentale finito è necessaria ma non sufficiente per la linearizzabilità di un gruppo di Lie semisemplice: sappiamo<sup>7</sup>

<sup>6</sup> Vedi il Capitolo VIII: per un gruppo di Lie semisemplice connesso la totale decomponibilità delle sue rappresentazioni lineari è facile conseguenza di quella delle corrispondenti rappresentazioni lineari della sua algebra di Lie.

<sup>7</sup> Vedi V.V.Gorbatsevich, A.L.Onishchik, E.B.Vinberg *Structure of Lie groups and Lie algebras*, in *Lie groups and Lie Algebras III, Encyclopaedia of Mathematical Sciences 41*, Springer, Berlin 1994, p.153.

infatti che per ogni  $n \geq 1$  il gruppo  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  ammette un rivestimento  $\mathbf{A}_n$  ad  $n$  fogli, che non è linearizzabile<sup>8</sup>.

Per i gruppi di Lie risolubili vale il criterio<sup>9</sup>:

**Teorema 11.5.4.** *Un gruppo di Lie semisemplice connesso  $\mathbf{G}$  ammette una rappresentazione lineare fedele se e soltanto se  $(\mathbf{G}, \mathbf{G})$  è semplicemente connesso.*

Citiamo infine il seguente teorema di Djokovic<sup>10</sup>:

**Teorema 11.5.5.** *Se un gruppo di Lie connesso ammette una rappresentazione lineare fedele, allora è isomorfo, come gruppo di Lie, ad un sottogruppo chiuso di un gruppo lineare.*

---

<sup>8</sup>Un gruppo di Lie connesso linearizzabile  $\mathbf{G}$  ammette una *complessificazione*  $\hat{\mathbf{G}}$ : se  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  è una linearizzazione di  $\mathbf{G}$ , allora  $\hat{\mathbf{G}}$  è il sottogruppo analitico di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  la cui algebra di Lie è la complessificazione  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Lie}(\mathbf{G})$  dell'algebra di Lie di  $\mathbf{G}$ . L'affermazione segue quindi dal fatto che  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$  è semplicemente connesso: infatti ogni gruppo di Lie linearizzabile e connesso con algebra di Lie isomorfa a  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$  è generato in un  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$  dall'immagine mediante l'esponenziale di  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ , ed è quindi isomorfo a  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ . Più in generale: i rivestimenti non banali di una forma reale di un gruppo di Lie complesso connesso, semplicemente connesso e linearizzabile non sono linearizzabili.

<sup>9</sup>A.L.Malčev *On piecewise connected locally closed groups* Dokl. Akad. Nauk SSSR **40** (1943) pp.108-110.

<sup>10</sup>D.Djokovic *A closure theorem for analytic subgroups of a real Lie group* Can. Math. Bull. **19** (1976) pp.435-439



## Misura di Haar e rappresentazioni lineari

### 12.1. Richiami di teoria della misura

Cominciamo ricordando alcune nozioni di teoria della misura.

Sia  $E$  un insieme. Una *tribù* di  $E$  è una famiglia  $\mathfrak{T}$  di sottoinsiemi di  $E$  che contenga la differenza  $A \setminus B$  di ogni coppia  $A, B$  di suoi sottoinsiemi e le unioni ed intersezioni  $\bigcup A_n, \bigcap A_n$  delle sue sottofamiglie  $\{A_n\}_{n \in M \subset \mathbb{N}}$  finite o numerabili.

Una *misura* su  $E$  è una funzione  $\mu$ , definita su una tribù  $\mathfrak{T}$  di  $E$

$$\mu : \mathfrak{T} \ni A \longrightarrow \mu(A) \in [0, +\infty] \subset \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

che sia *completamente additiva*, cioè:

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$$

se  $\{A_n\}_{n \in M \subset \mathbb{N}} \subset \mathfrak{T}$  ed  $A_m \cap A_n = \emptyset \quad \forall m \neq n \in M$ ,

e che goda inoltre della proprietà:

$$\forall A \in \mathfrak{T}, \exists \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{T} \text{ con } \mu(A_n) < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{tali che } A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Gli insiemi di  $\mathfrak{T}$  si dicono *misurabili*.

La misura  $\mu$  si dice *completa* se tutti i sottoinsiemi di un insieme misurabile di misura nulla sono misurabili.

Ogni misura si può completare a una misura completa, estendendone la definizione alla più piccola tribù  $\tilde{\mathfrak{T}}$  che contenga sia  $\mathfrak{T}$  che tutti i sottoinsiemi degli insiemi misurabili di misura nulla.

Una funzione reale  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , a valori non negativi, si dice *misurabile* rispetto a  $\mu$  se per ogni numero reale  $t > 0$  l'insieme  $\{x \in E \mid f(x) \geq t\}$  è misurabile. Sono allora misurabili tutti gli insiemi  $E(f; s, t) = \{x \in E \mid s \leq f(x) < t\}$  con  $0 < s < t \leq +\infty$ . Definiamo il suo integrale mediante:

$$\int_E f(x) d\mu(x)$$

$$= \sup \left\{ \sum_{j=1}^n t_j \mu(E(f; t_j, t_{j+1})) \mid 0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = +\infty \right\}.$$

Se il suo integrale è finito, la  $f$  si dice *integrabile*.

Una funzione  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *misurabile* se  $f^+ = \max\{f, 0\}$  ed  $f^- = \max\{-f, 0\}$  sono entrambe misurabili, ed *integrabile* se sono entrambe integrabili.

In questo caso si pone

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \int_E f^+(x) d\mu(x) - \int_E f^-(x) d\mu(x).$$

Una  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  si dice misurabile (risp. integrabile) se lo sono sia la sua parte reale  $\operatorname{Re} f$  che la sua parte immaginaria  $\operatorname{Im} f$ . Se è integrabile poniamo

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \int_E \operatorname{Re} f(x) d\mu(x) + i \int_E \operatorname{Im} f(x) d\mu(x).$$

Supponiamo ora che  $E$  sia uno spazio topologico localmente compatto e sia  $\mathcal{C}_c(E, \mathbb{C})$  lo spazio delle funzioni continue a valori complessi nulle fuori da un compatto di  $E$ . Indichiamo con  $\mathcal{C}_c(E, \mathbb{R}^+) \subset \mathcal{C}_c(E, \mathbb{C})$  il sottoinsieme delle  $f$  che assumono valori reali non negativi.

Sia  $\mu$  una misura su  $E$  per cui tutte le funzioni di  $\mathcal{C}_c(E, \mathbb{C})$  siano integrabili: allora

$$\mathcal{C}_c(E, \mathbb{C}) \ni f \longrightarrow I(f) = \int_E f(x) d\mu(x) \in \mathbb{C}$$

è un funzionale lineare tale che

$$I(f) \geq 0 \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{C}_c(E, \mathbb{R}^+).$$

Vale il Teorema di Riesz-Markoff<sup>1</sup>:

**Teorema 12.1.1.** *Sia  $E$  uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff e sia  $I : \mathcal{C}_c(E, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  un funzionale lineare tale che  $I(f) \geq 0$  per ogni  $f \in \mathcal{C}_c(E, \mathbb{R}^+)$ . Allora risulta univocamente determinata una misura  $\mu$ , definita sulla più piccola tribù  $\mathfrak{B}(E)$  di  $E$  che contiene tutti i sottoinsiemi compatti di  $E$ , tale che*

$$\mu(K) = \inf\{I(f) \mid f \in \mathcal{C}_c(E, \mathbb{R}^+) \text{ ed } f(x) \geq 1 \forall x \in K\}, \quad \forall \text{ compatto } K \subset E.$$

Le funzioni  $f \in \mathcal{C}_c(E, \mathbb{C})$  sono integrabili rispetto a  $\mu$  e

$$\int_E f(x) d\mu(x) = I(f) \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(E, \mathbb{C}).$$

La tribù  $\mathfrak{B}(E)$  generata dai compatti di  $E$  si dice la *tribù di Borel* di  $E$  e la misura definita nel Teorema 12.1.1 si dice una *misura di Radon* su  $E$ .

## 12.2. La misura di Haar

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico.

**Definizione 12.2.1.** Si dice *misura di Haar* su  $\mathbf{G}$  una misura di Radon  $\mu$  non nulla e invariante a sinistra su  $\mathbf{G}$ .

L'invarianza a sinistra di  $\mu$  significa, in modo equivalente, che

$$\mu(g \cdot A) = \mu(A), \quad \forall A \in \mathfrak{B}(\mathbf{G}), \forall g \in \mathbf{G},$$

ovvero che

$$\int_E f(g \cdot x) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x), \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C}), \forall g \in \mathbf{G}.$$

<sup>1</sup>Vedi: S.Berberian, *Measure and integration*, Chelsea, New York, 1965; p.227

In questo caso chiamiamo il funzionale  $I(f) = \int_E f(x) d\mu(x)$  un *integrale di Haar* su  $\mathbf{G}$ .

Dimostriamo il seguente<sup>2</sup>

**Teorema 12.2.2.** *Ogni gruppo topologico localmente compatto ammette una misura di Haar. Essa è unica, a meno di moltiplicazione per una costante positiva.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico localmente compatto. Indichiamo con  $\mathcal{P}$  l'insieme delle funzioni  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{R}^+)$  non identicamente nulle. Se  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$  e  $g \in \mathbf{G}$ , indichiamo con  $f_g$  la funzione di  $\mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$  definita da  $f_g(x) = f(g^{-1} \cdot x)$  per ogni  $x \in \mathbf{G}$ .

Per dimostrare l'esistenza di una misura di Haar su  $\mathbf{G}$ , basta costruire un funzionale  $I_0 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  che goda delle proprietà  $\clubsuit$ :

- (1)  $I_0(f) > 0 \quad \forall f \in \mathcal{P},$
- (2)  $I_0(f_1 + f_2) = I_0(f_1) + I_0(f_2) \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{P},$
- (3)  $I_0(kf) = kI_0(f) \quad \forall k \in \mathbb{R}, k > 0, \quad \forall f \in \mathcal{P},$
- (4)  $I_0(f_g) = I_0(f) \quad \forall f \in \mathcal{P}.$

Si verifica facilmente infatti che, posto  $I_0(0) = 0$ , ed

$$I(f) = I_0([\operatorname{Re} f]^+) - I_0([\operatorname{Re} f]^-) + i\{I_0([\operatorname{Im} f]^+) - I_0([\operatorname{Im} f]^-)\},$$

l'applicazione  $\mathbb{C}$ -lineare:

$$I : \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C}) \ni f \longrightarrow I(f) \in \mathbb{C}$$

è allora un integrale di Haar, cui per il Teorema 12.1.1 risulta associata un'unica misura di Haar su  $\mathbf{G}$ .

Dividiamo la dimostrazione del Teorema in diversi lemmi.

**Lemma 12.2.3.** *Se  $f, \phi \in \mathcal{P}$ , allora esistono un numero finito di elementi  $g_1, \dots, g_n$  di  $\mathbf{G}$  e numeri reali non negativi  $k_1, \dots, k_n$  tali che*

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^n k_i \phi_{g_i}(x) \quad \forall x \in \mathbf{G}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $U$  la parte interna del supporto di  $\phi$ . Osserviamo che  $U \neq \emptyset$  perché  $\phi \in \mathcal{P}$ . Fissiamo un elemento  $h_0 \in U$  e un intorno aperto  $W$  di  $h_0$  in  $U$  con  $\overline{W}$  compatto e contenuto in  $U$ . Allora  $V = L_{h_0^{-1}}(W)$  è un intorno aperto di  $e$ , relativamente compatto in  $\mathbf{G}$ . Gli aperti  $L_g(V)$ , al variare di  $g$  in  $\mathbf{G}$ , ricoprono il compatto  $K = \operatorname{supp} f$ . Possiamo allora fissare un numero finito di elementi  $h_1, \dots, h_n$  di  $\mathbf{G}$  tali che  $K \subset \bigcup_{i=1}^n L_{h_i}(V)$ . Sia  $c_0$  il minimo di  $\phi(x)$  sul compatto  $\overline{W}$ . Poiché  $\overline{W}$  è contenuto nella parte interna del supporto di  $\phi$ , il numero  $c_0$  è positivo. Per ogni  $i = 1, \dots, n$ , sia  $k_i = (\max_{L_{h_i}(\overline{V})} f)/c_0$  e sia  $g_i = h_i h_0^{-1}$ . Allora

$$f(x) \leq \sup_{1 \leq i \leq n} k_i \phi_{g_i}(x) \leq \sum_{i=1}^n k_i \phi_{g_i}(x) \quad \forall x \in \operatorname{supp} f,$$

<sup>2</sup>A. Haar, *Der Maassbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen*, Comp. Math. **34** (1933), 147-169

da cui segue la tesi.  $\square$

Siano  $f, \phi \in \mathcal{P}$ . Definiamo il *rapporto tra  $f$  e  $\phi$*  come il numero:

$$(f : \phi) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n k_i \mid \exists g_1, \dots, g_n \in \mathbf{G} \text{ tali che } f(x) \leq \sum_{i=1}^n k_i \phi_{g_i}(x) \forall x \in \mathbf{G} \right\}.$$

Vale poi il seguente:

**Lemma 12.2.4.** *Se  $f, \phi \in \mathcal{P}$ , allora  $(f : \phi) \geq \frac{\max_{\mathbf{G}} f}{\max_{\mathbf{G}} \phi}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se  $f(x) \leq \sum_{i=1}^n k_i \phi_{g_i}(x) \forall x \in \mathbf{G}$ , abbiamo:

$$f(x) \leq \left( \sum_{i=1}^n k_i \right) \max_{\mathbf{G}} \phi.$$

Passando agli estremi superiori dei due membri, otteniamo la tesi.  $\square$

Nel lemma seguente elenchiamo alcune proprietà del rapporto tra due funzioni positive la cui verifica è immediata:

**Lemma 12.2.5.** *Sia  $\phi \in \mathcal{P}$ . Valgono allora le proprietà  $\diamond$ :*

- (i)  $(f_g : \phi) = (f : \phi) \quad \forall f \in \mathcal{P}, \forall g \in \mathbf{G},$
- (ii)  $(kf : \phi) = k(f : \phi) \quad \forall k \in \mathbb{R} \text{ con } k > 0, \forall f \in \mathcal{P},$
- (iii)  $(f_1 + f_2 : \phi) \leq (f_1 : \phi) + (f_2 : \phi) \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{P},$
- (iv)  $f_1, f_2 \in \mathcal{P} \text{ e } f_1 \leq f_2 \implies (f_1 : \phi) \leq (f_2 : \phi)$

Abbiamo poi:

**Lemma 12.2.6.** *Se  $f, \phi, \psi \in \mathcal{P}$ , allora*

$$(f : \psi) \leq (f : \phi)(\phi : \psi).$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se  $f \leq \sum k_i \phi_{g_i}$  e  $\phi \leq \sum l_j \psi_{h_j}$ , allora  $f \leq \sum_{i,j} k_i l_j \psi_{g_i h_j}$ .  $\square$

**Corollario 12.2.7.** *Se  $f, \phi, \psi \in \mathcal{P}$ , allora*

$$\frac{1}{(\psi : f)} \leq \frac{(f : \phi)}{(\psi : \phi)} \leq (f : \psi).$$

È  $(f : f) = 1$  per ogni  $f \in \mathcal{P}$ . Infatti  $(f : f) \leq \max_{\mathbf{G}} f / \max_{\mathbf{G}} f = 1$  e da  $(f : f) \leq (f : f)(f : f)$  ricaviamo che è anche  $1 \leq (f : f)$ , da cui l'uguaglianza. Fissiamo ora una  $\psi \in \mathcal{P}$  con  $\psi(e) > 0$  e per ogni coppia di funzioni  $f, \phi \in \mathcal{P}$  poniamo:

$$A_f(\phi) = \frac{(f : \phi)}{(\psi : \phi)} \in \left[ \frac{1}{(\psi : f)}, (f : \psi) \right].$$

Sia

$$X = \prod_{f \in \mathcal{P}} \left[ \frac{1}{(\psi : f)}, (f : \psi) \right].$$

Per il teorema di Tychonoff  $X$  è uno spazio topologico compatto. Consideriamo l'applicazione

$$A : \mathbf{G} \ni \phi \longrightarrow A(\phi) = (A_f(\phi))_{f \in \mathcal{P}} \in X.$$

Per ogni intorno aperto  $V$  di  $e$  in  $\mathbf{G}$ , definiamo

$$\mathcal{F}_V = \{A(\phi) \mid \phi \in \mathcal{P}, \quad \phi(g) = \phi(g^{-1}) \forall g \in \mathbf{G} \text{ e } \text{supp } \phi \subset V\}.$$

È  $\mathcal{F}_V \neq \emptyset$  per ogni intorno  $V$  di  $e$  in  $\mathbf{G}$ . Infatti  $W = V \cap \{g^{-1} \mid g \in V\}$  è ancora un intorno di  $e$  in  $\mathbf{G}$  e, per ogni funzione  $\eta \in \mathcal{P}$  con supporto contenuto in  $W$ , posto  $\phi(g) = \eta(g) + \eta(g^{-1})$ , l'elemento  $A(\phi)$  appartiene a  $\mathcal{F}_V$ .

Osserviamo che, se  $V_1 \subset V_2$  sono intorni aperti di  $e$  in  $\mathbf{G}$ , allora  $\mathcal{F}_{V_1} \subset \mathcal{F}_{V_2}$ . Indichiamo con  $\overline{\mathcal{F}}_V$  la chiusura di  $\mathcal{F}_V$  in  $X$ . Poiché  $X$  è compatto e l'intersezione di un qualsiasi numero finito di insiemi  $\overline{\mathcal{F}}_V$ , al variare di  $V$  tra gli intorni aperti di  $e$  in  $\mathbf{G}$  non è vuoto, ne ricaviamo che

$$\mathcal{I} = \bigcap_{V \text{ aperto } \ni e} \overline{\mathcal{F}}_V \neq \emptyset$$

**Lemma 12.2.8.** *Un punto  $I = (I_f)_{f \in \mathcal{P}}$  di  $\mathcal{I}$  definisce un funzionale*

$$I : \mathcal{P} \ni f \longmapsto I(f) = I_f \in \mathbb{R}$$

che soddisfa le condizioni  $\heartsuit$ :

- (1)  $I(f) > 0 \quad \forall f \in \mathcal{P},$
- (2)  $I(f_1 + f_2) \leq I(f_1) + I(f_2) \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{P},$
- (3)  $I(kf) = kI(f) \quad \forall 0 < k \in \mathbb{R} \quad \forall f \in \mathcal{P},$
- (4)  $I(f_g) = I(f) \quad \forall f \in \mathcal{P}, \forall g \in \mathbf{G}.$

**DIMOSTRAZIONE.** La tesi è una conseguenza immediata del Lemma VII.1.5. Infatti le condizioni  $\diamond$  valgono per ciascuna delle  $f \rightarrow A_f(\phi)$  e quindi per continuità valgono le  $\heartsuit$  per la  $f \rightarrow I(f)$ .  $\square$

Per completare la dimostrazione dell'esistenza della misura di Haar, basterà verificare che nella (2) di  $\heartsuit$  possiamo sostituire l'uguaglianza alla disuguaglianza. Fissiamo due funzioni  $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{P}$ , con  $\eta_1(g) + \eta_2(g) \leq 1$  per ogni  $g \in \mathbf{G}$ . Poiché esse sono uniformemente continue, per ogni  $\epsilon > 0$  possiamo trovare un intorno  $V$  di  $e$  in  $\mathbf{G}$  tale che, per ogni  $g \in \mathbf{G}$  ed  $h \in L_g(V)$ , risulti

$$|\eta_1(h) - \eta_1(g)| + |\eta_2(h) - \eta_2(g)| < \epsilon.$$

Fissiamo una  $\phi \in \mathcal{P}$  con supporto contenuto in  $V$  e  $\phi(g^{-1}) = \phi(g)$  per ogni  $g \in \mathbf{G}$ .

Sia  $f \in \mathcal{P}$  e siano  $g_1, \dots, g_n \in \mathbf{G}$  e  $k_1, \dots, k_n$  reali positivi tali che  $f(x) \leq \sum_{i=1}^n k_i \phi_{g_i}(x)$  per ogni  $x \in \mathbf{G}$ . Osserviamo che  $\phi_{g_i}$  ha supporto contenuto in  $L_{g_i}(V)$  e quindi

$$f(x) \leq \sum' k_i \phi_{g_i}(x)$$

ove  $\sum'$  significa che la somma è ristretta agli indici  $i$  per cui  $x \in L_{g_i}(V)$ . Poiché  $\eta_i(x) \leq \eta_i(g_i) + \epsilon$  se  $x \in L_{g_i}(V)$ , avremo anche

$$f(x) \eta_i(x) \leq \sum' k_i [\eta_i(g_i) + \epsilon] \phi_{g_i}(x)$$

per  $i = 1, 2$ . Otteniamo perciò

$$(f\eta_1 : \phi) + (f\eta_2 : \phi) \leq \left( \sum_{i=1}^n k_i \right) (1 + 2\epsilon)$$

da cui segue che:

$$(f\eta_1 : \phi) + (f\eta_2 : \phi) \leq (f : \phi) (1 + 2\epsilon)$$

per un  $\epsilon$  arbitrariamente piccolo, purché  $\phi$  abbia supporto in un opportuno intorno  $V$  di  $e$  in  $\mathbf{G}$ . Da questa relazione ricaviamo

$$(*) \quad I(f\eta_1) + I(f\eta_2) \leq I(f).$$

Se  $f_1, f_2 \in \mathcal{P}$ , fissiamo una  $f \in \mathcal{P}$  che sia uguale a 1 in un intorno di  $\text{supp}(f_1 + f_2)$  e poniamo

$$\eta_i(x) = \begin{cases} f_i(x)/f(x) & \text{se } f(x) > 0 \\ 0 & \text{se } x \notin \text{supp } f_i \end{cases}$$

per  $i = 1, 2$ . Allora dalla (\*) e dalle (♡) segue che

$$I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2) \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{P}.$$

Ciò completa la dimostrazione dell'esistenza dell'integrale di Haar. Dimostriamo ora l'unicità, a meno di moltiplicazione per uno scalare.

Sia  $\mu$  una misura di Haar e indichiamo con  $I(f) = \int_{\mathbf{G}} f(x) d\mu(x)$  il corrispondente integrale di Haar. Se  $f, \phi \in \mathcal{P}$  e  $f \leq \sum_{i=1}^n k_i \phi_{g_i}$ , integrando ambo i membri otteniamo:

$$I(f) \leq \sum_{i=1}^n k_i I(\phi_{g_i}) = \left( \sum_{i=1}^n k_i \right) I(\phi),$$

da cui ricaviamo che

$$I(f)/I(\phi) \leq (f : \phi).$$

Fissiamo ora una  $f \in \mathcal{P}$  e sia  $\epsilon > 0$ . Per l'uniforme continuità di  $f$ , esiste un intorno  $V$  di  $e$  in  $\mathbf{G}$  tale che  $|f(x) - f(gx)| < \epsilon$  per ogni  $x \in \mathbf{G}$  e  $g \in V$ . Sia  $\phi \in \mathcal{P}$ , con  $\phi(x) = \phi(x^{-1})$  per ogni  $x \in \mathbf{G}$  e supporto contenuto in  $V$ . Consideriamo l'integrale  $\int_{\mathbf{G}} f(x) \phi(x^{-1}g) d\mu(x)$ . Poiché  $\phi(x^{-1}g) = \phi(g^{-1}x)$  si annulla quando  $x$  non appartiene a  $gV = L_g(V)$ , e  $f(x) \geq f(g) - \epsilon$  se  $x \in gV$ , otteniamo:

$$\int_{\mathbf{G}} f(x) \phi(x^{-1}g) d\mu(x) \geq [f(g) - \epsilon] \int_{\mathbf{G}} \phi(x^{-1}g) d\mu(x) = [f(g) - \epsilon] I(\phi).$$

Quindi:

$$f(g) - \epsilon \leq (1/I(\phi)) \int_{\mathbf{G}} f(x) \phi(x^{-1}g) d\mu(x).$$

Poiché  $\phi$  è uniformemente continua, per ogni  $\delta > 0$  possiamo trovare un intorno  $W$  di  $e$  in  $\mathbf{G}$  tale che  $|\phi(x) - \phi(y)| < \delta$  se  $y x^{-1} \in W$ .

Siano  $g_1, \dots, g_n \in \mathbf{G}$  tali che  $\text{supp } f \subset \bigcup_{i=1}^n L_{g_i}(W)$  e sia  $\{\psi_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \mathcal{P}$  una partizione dell'unità su  $\text{supp } f$  subordinata al ricoprimento  $\{L_{g_i}(W)\}_{1 \leq i \leq n}$ . Poiché  $\psi_i$  ha supporto contenuto in  $L_{g_i}(W)$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{G}} f(x) \phi(x^{-1}g) d\mu(x) &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{G}} f(x) \psi_i(x) \phi(x^{-1}g) d\mu(x) \\ &\leq \sum_{i=1}^n I(f\psi_i) [\phi_{g_i}(g) + \delta]. \end{aligned}$$

Posto  $k_i = I(f\psi_i)/I(\phi)$ , abbiamo  $\sum_{i=1}^n k_i = I(f)/I(\phi)$  e

$$f(x) \leq \epsilon + \delta \sum_{i=1}^n k_i + \sum_{i=1}^n k_i \phi_{g_i}(x).$$

Se  $\tilde{f} \in \mathcal{P}$  è maggiore o uguale di 1 sul supporto di  $f$ , avremo:

$$f(x) \leq \left( \epsilon + \delta \sum_{i=1}^n k_i \right) \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^n k_i \phi_{g_i}(x).$$

Poiché  $\delta > 0$  può essere scelto arbitrariamente piccolo, abbiamo:

$$(*) \quad (f : \phi) \leq \epsilon (\tilde{f} : \phi) + (I(f)/I(\phi)).$$

Sia  $f_0$  un'altra funzione di  $\mathcal{P}$ . Essendo  $(f_0 : \phi) \geq I(f_0)/I(\phi)$ , abbiamo (dividendo i due membri di  $(*)$  per  $(f_0 : \phi)$  e tenendo conto del fatto che  $(I(f)/I(\phi))/(f_0 : \phi) \leq (I(f)/I(\phi))/(I(f_0)/I(\phi)) = I(f)/I(f_0)$ ):

$$I(f)/I(f_0) \leq \frac{(f : \phi)}{(f_0 : \phi)} \leq \epsilon \frac{(\tilde{f} : \phi)}{(f_0 : \phi)} + I(f)/I(f_0) \leq \epsilon (\tilde{f} : f_0) + I(f)/I(f_0).$$

Ora, possiamo prendere  $\epsilon > 0$  arbitrariamente piccolo purché il supporto di  $\phi$  sia contenuto in un opportuno intorno  $V$  di  $e$ . Questo dimostra che il rapporto  $I(f)/I(f_0)$  è univocamente determinato e quindi l'integrale di Haar è unico a meno di un fattore moltiplicativo.  $\square$

### 12.3. Gruppi unimodulari

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico localmente compatto e  $\mu$  una misura di Haar su  $\mathbf{G}$ . Fissato un elemento  $g \in \mathbf{G}$ , consideriamo il funzionale

$$\mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C}) \ni f \longrightarrow I_g(f) = \int_{\mathbf{G}} f(xg^{-1}) d\mu(x) \in \mathbb{R}.$$

Poiché esso è un integrale di Haar, otteniamo:

$$I_g(f) = \lambda(g) \cdot \int_{\mathbf{G}} f(x) d\mu(x) = \lambda(g) \cdot I(f)$$

(ove abbiamo indicato con  $I(f)$  l'integrale di Haar associato alla misura  $\mu$ ) per una funzione  $\lambda : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ . Osserviamo che

$$\begin{aligned} \lambda(g_1 g_2) I(f) &= I_{g_1 g_2}(f) = \lambda(g_1) I_{g_2}(f) = \lambda(g_1) \lambda(g_2) I(f), \\ &\forall g_1, g_2 \in \mathbf{G}, \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

e quindi  $\lambda : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  è un omomorfismo di gruppi. Poiché per  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$  fissata, l'applicazione  $\mathbf{G} \ni g \rightarrow R_{g^{-1}}^* f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$  (ove  $R_{g^{-1}}^* f(x) = f(xg^{-1})$ ) per ogni  $x \in \mathbf{G}$  è continua, l'applicazione  $\lambda$  è continua.

Se  $\mathbf{G}$  è connesso, ci sono solo due possibilità: o  $\lambda(\mathbf{G}) = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , oppure  $\lambda(\mathbf{G}) = \{1\}$ .

**Teorema 12.3.1.** *Vale la formula di cambiamento di variabile nell'integrale:*

$$(12.3.1) \quad \int_{\mathbf{G}} f(x^{-1})\lambda(x^{-1}) d\mu(x) = \int_{\mathbf{G}} f(x) d\mu(x) \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{R}).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo il funzionale  $J(f) = \int_{\mathbf{G}} f(x^{-1})\lambda(x^{-1}) d\mu(x)$ . Abbiamo:

$$\begin{aligned} J(L_g^* f) &= \int_{\mathbf{G}} f(gx^{-1})\lambda(x^{-1}) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbf{G}} f([xg^{-1}]^{-1})\lambda(x^{-1}) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbf{G}} f(y^{-1})\lambda(g^{-1}y^{-1}) d\mu(yg) \\ &= \int_{\mathbf{G}} f(y^{-1})[\lambda(g^{-1})\lambda(y^{-1})] [\lambda(g) d\mu(y)] = J(f) \end{aligned}$$

Quindi  $J(f)$  è un multiplo dell'integrale di Haar. Scegliendo delle  $f \in \mathcal{P}$  con  $f(x) = f(x^{-1})$  e supporti che variano in un sistema fondamentale di intorno di  $e$  in  $\mathbf{G}$ , si verifica facilmente che il rapporto  $J(f)/I(f)$  approssima, e quindi è uguale ad 1.  $\square$

**Definizione 12.3.2.** Il gruppo topologico localmente compatto  $\mathbf{G}$  si dice *unimodulare* se  $\lambda(\mathbf{G}) = \{1\}$ , cioè se la misura di Haar  $\mu$  su  $\mathbf{G}$  è invariante sia a sinistra che a destra:

$$\int_{\mathbf{G}} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbf{G}} f(g \cdot x) d\mu(x) = \int_{\mathbf{G}} f(x \cdot g) d\mu(x) \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C}), \forall g \in \mathbf{G}.$$

**Teorema 12.3.3.** *Ogni gruppo topologico compatto e localmente compatto è unimodulare.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\mathbf{G}$  è compatto e localmente compatto, allora  $\lambda(\mathbf{G})$  è un sottogruppo compatto di  $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  e quindi è uguale a  $\{1\}$ .  $\square$

In generale,  $\mathbf{U} = \lambda^{-1}(1)$  è un sottogruppo normale chiuso di  $\mathbf{G}$ , e il quoziente  $\mathbf{G}/\mathbf{U}$  è isomorfo a un sottogruppo additivo del gruppo additivo  $\mathbb{R}$  dei numeri reali.

Se  $\mathbf{G}$  è connesso e non è unimodulare, allora  $\mathbf{G}/\mathbf{U} \simeq \mathbb{R}$ .

#### 12.4. Misure relativamente invarianti sugli spazi omogenei

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico localmente compatto.

**Definizione 12.4.1.** Una misura di Radon  $\eta$  su  $\mathbf{G}$  si dice *relativamente invariante* se vi è una funzione  $\kappa_\eta : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  tale che

$$(12.4.1) \quad \int_{\mathbf{G}} f(g^{-1}x) d\eta(x) = \kappa_\eta(g) \int_{\mathbf{G}} f(x) d\eta(x), \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C}), \forall g \in \mathbf{G}.$$

Osserviamo che la  $\kappa_\eta$  è necessariamente continua ed è un omomorfismo di  $\mathbf{G}$  nel gruppo moltiplicativo  $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ .

Data  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$ , consideriamo la funzione  $x \rightarrow F(x) = \kappa_\eta^{-1}(x) f(x)$ . Risulta

$$F(g^{-1}x) = \kappa_\eta^{-1}(g^{-1}x) f(g^{-1}x) = \kappa_\eta(g) \kappa_\eta^{-1}(x) f(g^{-1}x)$$

e quindi il funzionale lineare  $f \rightarrow I(f) = \int_{\mathbf{G}} \kappa_\eta^{-1}(x) f(x) d\eta(x)$  soddisfa  $I(L_g^* f) = I(f)$  per ogni  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$  ed è dunque un integrale di Haar.

Abbiamo quindi ottenuto:

**Teorema 12.4.2.** Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico relativamente compatto e sia  $\mu$  una sua misura di Haar. Gli integrali di Radon relativamente invarianti su  $\mathbf{G}$  sono allora tutti e soli i funzionali della forma:

$$(12.4.2) \quad J(f) = k \int_{\mathbf{G}} f(x) \kappa(x) d\mu(x) \quad f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$$

ove  $k$  è un numero reale positivo e  $\kappa : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  un omomorfismo continuo.  $\square$

Estendiamo ora la nozione di misura relativamente invariante al caso degli spazi omogenei.

Sia  $\mathbf{H}$  un sottogruppo chiuso di un gruppo topologico  $\mathbf{G}$ , e sia  $X = \mathbf{G}/\mathbf{H}$  il corrispondente spazio omogeneo. Indichiamo con  $\pi : \mathbf{G} \rightarrow X$  la proiezione nel quoziente.

**Definizione 12.4.3.** Si dice *misura relativamente invariante su  $X$*  una misura di Radon  $\nu$  su  $X$  per cui esista una funzione  $\kappa_\nu : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  tale che  $\nu(g(A)) = \kappa_\nu(g) \cdot \nu(A)$  per ogni compatto  $A$  di  $X$ : per il corrispondente integrale di Radon avremo:

$$(12.4.3) \quad \int_X f(g^{-1}x) d\nu(x) = \kappa_\nu(g) \int_X f(x) d\nu(x), \quad \forall g \in \mathbf{G}, \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C}).$$

Poiché  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{G}$ , esso è a sua volta un gruppo localmente compatto. Su di esso vi è quindi una misura di Haar  $\mu_{\mathbf{H}}$ .

Possiamo definire un'applicazione  $\mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}_c(X, \mathbb{C})$  mediante *integrazione lungo la fibra*: ad  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$  associamo

$$(12.4.4) \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{H}} f(xh) d\mu_{\mathbf{H}}(h) \quad \text{se } \pi(x) = \xi \in X.$$

Il valore dell'integrale a secondo membro non dipende infatti dal particolare rappresentante  $x$  di  $\xi \in X$  in  $\mathbf{G}$ .

**Lemma 12.4.4.** L'integrazione lungo la fibra è un'applicazione surgettiva

$$\mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}_c(X, \mathbb{C})$$

ed associa a funzioni di  $\mathcal{P}(\mathbf{G})$  funzioni di  $\mathcal{P}(X)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $f \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{C})$ . Poiché la proiezione  $\pi : \mathbf{G} \rightarrow X$  è aperta, per ogni  $\xi \in \text{supp } f$  esiste un aperto  $U_\xi$  relativamente compatto in  $\mathbf{G}$  tale che  $\pi(U_\xi)$  sia un intorno aperto di  $\xi$  in  $X$ . Poiché  $\text{supp } f$  è un compatto, esisteranno un numero finito di punti  $\xi_1, \dots, \xi_n$  tali che  $\text{supp } f \subset \bigcup_{i=1}^n \pi(U_{\xi_i})$ . Fissiamo ora una funzione reale non negativa  $F$  con supporto compatto in  $\mathbf{G}$  e che sia uguale a 1 in un intorno del compatto  $\bigcup_{i=1}^n \overline{U_{\xi_i}}$ . La funzione  $\hat{F}(\xi)$  è continua e strettamente positiva in un intorno di  $\text{supp } f$ : ne segue che la  $\tilde{f}(x) = F(x) f(\pi(x)) / \hat{F}(\pi(x))$  è ben definita e continua con supporto compatto in  $\mathbf{G}$ , ed abbiamo  $\hat{\tilde{f}} = f$ . L'ultima affermazione del lemma è evidente.  $\square$

Supponiamo ora vi sia su  $X$  una misura di Radon relativamente invariante  $\nu$ , e indichiamo con  $J(f) = \int_X f(\xi) d\nu(\xi)$  il corrispondente integrale sulle  $f \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{C})$ . Mediante l'integrazione sulla fibra possiamo associare ad esso un funzionale  $I'$  su  $\mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$ , ponendo  $I'(f) = J(\hat{f})$  per ogni  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$ . Abbiamo

$$I'(L_g^* f) = J(L_g^* \hat{f}) = \kappa_\nu(g^{-1}) J(\hat{f}) = \kappa_\nu(g^{-1}) I'(f).$$

Quindi, per la discussione sulle misure relativamente invarianti su  $\mathbf{G}$ , avremo, per una misura di Haar  $\mu_{\mathbf{G}}$  su  $\mathbf{G}$ :

$$\begin{aligned} (\#) \quad & \int_X \left[ \int_{\mathbf{H}} f(xh) d\mu_{\mathbf{H}}(h) \right] d\nu(\pi(x)) \\ &= \int_{\mathbf{G}} f(x) \kappa_\nu(x) d\mu_{\mathbf{G}}(x), \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Indichiamo con  $\lambda_{\mathbf{H}}$  e  $\lambda_{\mathbf{G}}$  gli omomorfismi, relativi ai gruppi  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ , definiti come all'inizio del §2. Applicando la formula (#) sia ad  $f$  che ad  $R_{h^{-1}}^* f$  otteniamo:

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbf{H}}(h) \int_{\mathbf{G}} f(x) \kappa_\nu(x) d\mu_{\mathbf{G}}(x) &= \lambda_{\mathbf{H}}(h) \int_X \left( \int_{\mathbf{H}} f(xk) d\mu_{\mathbf{H}}(k) \right) d\nu(\pi(x)) \\ &= \int_X \left( \int_{\mathbf{H}} f(xkh^{-1}) d\mu_{\mathbf{H}}(k) \right) d\nu(\pi(x)) \\ &= \int_{\mathbf{G}} f(xh^{-1}) \kappa_\nu(xh^{-1}) \kappa_\nu(h) d\mu_{\mathbf{G}}(x) \\ &= \kappa_\nu(h) \lambda_{\mathbf{G}}(h) \int_{\mathbf{G}} f(x) \kappa_\nu(x) d\mu_{\mathbf{G}}(x), \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C}), \end{aligned}$$

da cui ricaviamo la relazione:

$$(12.4.5) \quad \lambda_{\mathbf{H}}(h) = \kappa_\nu(h) \lambda_{\mathbf{G}}(h) \quad \forall h \in \mathbf{H}.$$

Da queste considerazioni segue il:

**Teorema 12.4.5.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista una misura di Radon relativamente invariante sullo spazio omogeneo  $X = \mathbf{G}/\mathbf{H}$  è che vi sia un omomorfismo continuo  $\kappa : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$  tale che*

$$(\dagger) \quad \kappa(h) \lambda_{\mathbf{G}}(h) = \lambda_{\mathbf{H}}(h), \quad \forall h \in \mathbf{H}.$$

Le misure di Radon relativamente invarianti su  $X$  sono tutte e sole quelle che soddisfano

$$(\ddagger) \quad \int_X \left( \int_{\mathbf{H}} f(xh) d\mu_{\mathbf{H}}(h) \right) d\nu(\pi(x)) = k \int_{\mathbf{G}} f(x) \kappa(x) d\mu_{\mathbf{G}}(x),$$

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C}),$$

per una  $\kappa$  che soddisfa  $(\dagger)$  ed una costante positiva  $k \in \mathbb{R}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per completare la dimostrazione, occorre dimostrare la sufficienza: a questo scopo basterà provare che, data una  $\phi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{C})$ , il secondo membro della  $(\ddagger)$  dipende solo da  $\phi$  e non dalla scelta di una  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$  con  $\hat{f} = \phi$ . Basterà, per la linearità, mostrare che, se  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$  e  $\hat{f} = 0$ , allora  $\int_{\mathbf{G}} \kappa(x) f(x) d\mu_{\mathbf{G}}(x) = 0$ . Da  $\hat{f} = 0$  ricaviamo (vedi Teorema 12.3.1) che anche

$$\int_{\mathbf{H}} f(xh^{-1}) \lambda_{\mathbf{H}}(h^{-1}) d\mu_{\mathbf{H}}(h) = 0.$$

Sia  $F \in \mathcal{P}$ . Scambiando l'ordine d'integrazione otteniamo:

$$0 = \int_{\mathbf{G}} \left( \int_{\mathbf{H}} f(xh^{-1}) \lambda_{\mathbf{H}}(h^{-1}) d\mu_{\mathbf{H}}(h) \right) F(x) \kappa(x) d\mu_{\mathbf{G}}(x)$$

$$= \int_{\mathbf{H}} \left( \int_{\mathbf{G}} F(x) f(xh^{-1}) \kappa(x) d\mu_{\mathbf{G}}(x) \right) \lambda_{\mathbf{H}}(h^{-1}) d\mu_{\mathbf{H}}(h).$$

Ponendo  $y = xh^{-1}$  otteniamo:

$$0 = \int_{\mathbf{H}} \left( \int_{\mathbf{G}} F(yh) f(y) \kappa(yh) d\mu_{\mathbf{G}}(yh) \right) \lambda_{\mathbf{H}}(h^{-1}) d\mu_{\mathbf{H}}(h)$$

$$= \int_{\mathbf{H}} \left( \int_{\mathbf{G}} F(yh) f(y) \kappa(y) \kappa(h) \lambda_{\mathbf{G}}(h) d\mu_{\mathbf{G}}(y) \right) \lambda_{\mathbf{H}}(h^{-1}) d\mu_{\mathbf{H}}(h)$$

$$= \int_{\mathbf{H}} \left( \int_{\mathbf{G}} F(yh) f(y) \kappa(y) d\mu_{\mathbf{G}}(y) \right) d\mu_{\mathbf{H}}(h)$$

$$= \int_{\mathbf{G}} \kappa(x) f(x) \left( \int_{\mathbf{H}} F(xh) d\mu_{\mathbf{H}}(h) \right) d\mu_{\mathbf{G}}(x).$$

Per concludere, è sufficiente scegliere una  $F$  tale che  $\int_{\mathbf{H}} F(xh) d\mu_{\mathbf{H}}(h) = 1$  per ogni  $x \in \text{supp } f$ . A questo scopo fissiamo una  $p \in \mathcal{P}$  uguale a 1 in un intorno  $U$  di  $\text{supp } f$  e una  $\psi \in \mathcal{P}$ , uguale a 1 in un intorno di  $\text{supp } f$  e con supporto contenuto in  $U$  e poniamo

$$F(x) = \begin{cases} \psi(x)p(x) / \int_{\mathbf{H}} p(xh) d\mu_{\mathbf{H}}(h) & \text{se } x \in U, \\ 0 & \text{se } x \notin \text{supp } \psi. \end{cases}$$

□

Applicando il Teorema 12.4.5, osserviamo che, in particolare, se  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo normale di  $\mathbf{G}$ , si può prendere  $\kappa(g) = 1$  per ogni  $g \in \mathbf{G}$ . Ne segue che  $\mathbf{U} = \lambda_{\mathbf{G}}^{-1}(1)$  è un gruppo unimodulare, e tutti i suoi sottogruppi normali chiusi sono unimodulari. In particolare  $\mathbf{U}$  è il più grande sottogruppo unimodulare di  $\mathbf{G}$ .

Osserviamo infine che se  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo chiuso unimodulare di  $\mathbf{G}$ , allora possiamo scegliere  $\kappa$  uguale a  $1/\lambda_{\mathbf{G}}$ , e quindi  $X = \mathbf{G}/\mathbf{H}$  ammette una misura di Radon relativamente invariante.

### 12.5. Misura di Haar nei gruppi di Lie

Ricordiamo che un *gruppo di Lie* è un gruppo topologico  $\mathbf{G}$ , con una struttura differenziabile per cui l'applicazione  $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (x, y) \rightarrow x^{-1}y \in \mathbf{G}$  sia differenziabile.

In un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  le traslazioni a sinistra  $L_g$ , a destra  $R_g$  e l'aggiunzione  $\text{ad}_g$  sono diffeomorfismi. Indichiamo con  $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$  lo spazio vettoriale dei *campi di vettori invarianti a sinistra*, cioè delle sezioni globali  $X \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{G}, T\mathbf{G})$  tali che  $L_{g*}(X) = X$  per ogni  $g \in \mathbf{G}$ . Il differenziale della traslazione a sinistra definisce un isomorfismo  $L_{g*} : T_e\mathbf{G} \rightarrow T_g\mathbf{G}$  e ci permette di associare ad ogni vettore  $X \in T_e\mathbf{G}$  un campo di vettori invariante a sinistra  $x \rightarrow \vec{X}_x = L_{x*}(X)$ .

Indichiamo con  $\mathfrak{g}$  lo spazio tangente a  $\mathbf{G}$  nell'identità  $e$ . L'applicazione

$$\mathfrak{g} \ni X \rightarrow \vec{X} \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$$

è un isomorfismo di  $\mathfrak{g}$  con lo spazio dei campi di vettori invarianti a sinistra su  $\mathbf{G}$ . Possiamo allora definire un prodotto su  $\mathfrak{g}$  mediante il commutatore di campi di vettori invarianti a sinistra:

$$[X, Y] := (\vec{X}\vec{Y} - \vec{Y}\vec{X})_e.$$

Con questo prodotto  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie reale, che si dice *associata al gruppo di Lie  $\mathbf{G}$* . L'applicazione  $\vartheta : T\mathbf{G} \rightarrow \mathfrak{g}$  che associa a  $v \in T_g\mathbf{G}$  l'elemento  $X = \vartheta_g(v)$  tale che  $X_g^* = L_{g*}(X) = v$  si dice la *forma di Cartan* su  $\mathbf{G}$ . Per definizione essa è invariante a sinistra:  $L_g^*\vartheta = \vartheta$  per ogni  $g \in \mathbf{G}$ .

Essa ci permette di associare ad ogni prodotto scalare reale  $b$  su  $\mathfrak{g}$  una *metrica Riemanniana* invariante a sinistra  $\mathfrak{g}$  su  $\mathbf{G}$  mediante:

$$(12.5.1) \quad \mathfrak{g}(v, w) = b(\vartheta(v), \vartheta(w)).$$

Chiaramente <sup>3</sup> la misura associata è una misura di Haar su  $\mathbf{G}$ . Indichiamo con  $\text{Ad}(a) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  il differenziale nell'identità dell'automorfismo interno  $\text{ad}(a) : \mathbf{G} \ni x \rightarrow a x a^{-1} \in \mathbf{G}$ . Esso è un automorfismo dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ .

**Lemma 12.5.1.** *Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo di Lie, abbiamo:*

$$(12.5.2) \quad \lambda_{\mathbf{G}}(a) = |\det \text{Ad}(a)|^{-1} \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

Ciò significa che, se  $\mu_{\mathbf{G}}$  è una misura di Haar di  $\mathbf{G}$ , allora

$$\int_{\mathbf{G}} f(x a^{-1}) d\mu_{\mathbf{G}}(x) = \int_{\mathbf{G}} f(x) d\mu_{\mathbf{G}}(x a) = (1/|\det \text{Ad}(a)|) \int_{\mathbf{G}} f(x) d\mu_{\mathbf{G}}(x) \\ \forall a \in \mathbf{G}, \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C}).$$

<sup>3</sup>Se  $\mathfrak{g}$  è una metrica Riemanniana sulla varietà differenziabile  $\mathbf{G}$  di dimensione  $m$ , la metrica associata si definisce in coordinate locali  $x^1, \dots, x^m$  mediante  $d\mu_{\mathfrak{g}} = \sqrt{|\det(g_{i,j})|} d\lambda$ , ove  $\lambda$  è la misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^m$  e la matrice  $(g_{i,j})_{1 \leq i, j \leq m}$  è definita da  $g_{i,j} = \mathfrak{g}(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$ .

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti per la forma di Cartan:

$$R_a^* \vartheta = R_a^* \circ L_{a^{-1}}^* \vartheta = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \vartheta.$$

Localmente la misura di Haar  $d\mu_{\mathfrak{g}}$  è proporzionale alla forma  $\underbrace{\vartheta \wedge \cdots \wedge \vartheta}_{n \text{ volte}}$  (dove  $n$  è la dimensione di  $\mathfrak{g}$ ). Per la definizione del determinante otteniamo:

$$\underbrace{\text{Ad}(a^{-1}) \circ \vartheta \wedge \cdots \wedge \text{Ad}(a^{-1}) \circ \vartheta}_{n \text{ volte}} = [\det \text{Ad}(a^{-1})] \underbrace{\vartheta \wedge \cdots \wedge \vartheta}_{n \text{ volte}}.$$

Da questa formula segue la tesi.  $\square$

**Esempio 12.5.2.** Consideriamo  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  come un aperto dello spazio vettoriale delle matrici reali  $n \times n$ . Nelle coordinate canoniche, la forma di Cartan di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  è  $\vartheta = x^{-1} dx$ . Possiamo fissare il prodotto scalare  $\mathfrak{b}(X, Y) = \text{traccia}(X^t Y)$  per  $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ . Allora la metrica Riemanniana invariante a sinistra associata è definita da:

$$\mathfrak{g}_a(\vec{X}, \vec{Y}) = \text{traccia}({}^t(a^{-1} X)(a^{-1} Y)) = \text{traccia}(X(a^t a)^{-1} Y).$$

Utilizzando la metrica Riemanniana possiamo calcolare la misura di Haar. Rispetto alla misura di Lebesgue  $dV(x)$  sull'aperto  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ , essa è data da  $d\mu(x) = |\det x|^{-n} dV(x)$ .

Per verificare quest'uguaglianza, ricordiamo che, se  $A, B$  sono due endomorfismi dello spazio vettoriale  $V$ , di dimensione finita  $n$  su  $\mathbb{K}$ , il determinante del loro prodotto tensoriale  $A \otimes B$ , (l'endomorfismo di  $V \otimes V$  tale che  $(A \otimes B)(v \otimes w) = A(v) \otimes B(w)$  per ogni  $v, w \in V$ ), è il prodotto delle potenze  $n$ -esime dei loro determinanti:  $\det(A \otimes B) = (\det A)^n \cdot (\det B)^n$ .

Le matrici  $E_{i,j} = (\delta_{i,h} \cdot \delta_{j,k})_{1 \leq h,k \leq n}$  formano una base ortonormale per  $\mathfrak{b}$ . Abbiamo:

$$\begin{aligned} \text{traccia}({}^t E_{i,j}(a^t a)^{-1} E_{h,k}) &= \text{traccia}(E_{j,i} E_{h,k} (a^t a)^{-1}) = \delta_{j,k} [(a^t a)^{-1}]_{i,h} \\ &\forall 1 \leq i, j, h, k \leq n. \end{aligned}$$

Quindi, rispetto alle coordinate cartesiane globali su  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ , abbiamo  $g_{(i,j),(h,k)}(a) = \delta_{j,k} [(a^t a)^{-1}]_{i,h}$  e quindi la matrice  $(g_{(i,j),(h,k)}(a))$  è il prodotto tensoriale  $(a^t a)^{-1} \otimes I_n$ . Quindi:

$$\sqrt{\det(g_{(i,j),(h,k)}(a))} = \frac{1}{|\det a|^n}$$

ci dà  $d\mu_{\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})}(x) = |\det x|^{-n} dV(x)$  ove  $V$  è la misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Osserviamo infine che, identificando  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  al prodotto tensoriale  $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ , abbiamo  $\text{Ad}(a) \simeq a \otimes a^{-1}$  e quindi  $\det \text{Ad}(a) = 1$  per ogni  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  e quindi  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  è unimodulare.

**Esempio 12.5.3.** Sia  $\mathbf{T}_+(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \text{ con } ac \neq 0 \right\}$  il gruppo delle matrici reali  $2 \times 2$  triangolari superiori invertibili. Si verifica allora che

$$\det \text{Ad} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \frac{a}{c}$$

e quindi il gruppo lineare  $\mathbf{T}_+(2, \mathbb{R})$  non è unimodulare.

**Esempio 12.5.4.** Più in generale, se  $n > 1$  e  $\mathbf{G}$  è il sottogruppo di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  di tutte le trasformazioni  $a$  che mandano in sé il sottospazio vettoriale generato dai primi  $m$  vettori della base  $e_1, \dots, e_m$ , con  $1 \leq m < n$ , né  $\mathbf{G}$ , né  $\mathbf{G} \cap \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$  sono unimodulari.

**Esempio 12.5.5.** Sia  $\mathbf{T}_+(n, \mathbb{R})$  il gruppo delle matrici reali  $n \times n$  triangolari superiori. In questo caso abbiamo

$$\det \text{Ad} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}^{n-1} a_{22}^{n-2} \dots a_{nn}^{1-n}$$

e quindi il gruppo lineare  $\mathbf{T}^+(n, \mathbb{R})$  non è unimodulare.

**Esempio 12.5.6.** Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo lineare, possiamo supporre<sup>4</sup> che  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ . La forma di Cartan di  $\mathbf{G}$  è la restrizione a  $\mathbf{G}$  della forma di Cartan  $x^{-1}dx$  di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ .

Se esiste una forma bilineare simmetrica non degenera  $\mathfrak{b}$  su  $\mathfrak{g}$  tale che

$$\mathfrak{b}(\text{Ad}(a)(X), \text{Ad}(a)(Y)) = \mathfrak{b}(X, Y) \text{ per ogni } X, Y \in \mathfrak{g},$$

allora  $\mathbf{G}$  è unimodulare.

**Esempio 12.5.7.** Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie sul campo  $\mathbb{k}$ , per ogni  $X \in \mathfrak{g}$  possiamo definire una derivazione interna  $\text{Ad}(X)$  di  $\mathfrak{g}$  mediante:

$$\text{Ad}(X) : \mathfrak{g} \ni Y \rightarrow \text{Ad}(X)(Y) = [X, Y] \in \mathfrak{g}.$$

Se  $\mathfrak{g}$  è l'algebra di Lie del gruppo lineare  $\mathbf{G}$ , l'endomorfismo  $\text{Ad}(X)$  è il differenziale in  $e \in \mathbf{G}$  dell'automorfismo  $\text{ad}(\exp(X))$ . Abbiamo quindi:

Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo lineare connesso, condizione necessaria e sufficiente affinché sia unimodulare è che

$$\text{traccia}(\text{Ad}(X)) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

## 12.6. Rappresentazioni dei gruppi topologici

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico.

**Definizione 12.6.1.** Una rappresentazione di  $\mathbf{G}$  su uno spazio di Hilbert complesso  $V$  è un omomorfismo  $\Phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathcal{G}(V)$  di  $\mathbf{G}$  nel gruppo  $\mathcal{G}(V)$  degli isomorfismi lineari di  $V$  in  $V$  che sono continui con i loro inversi, tale che l'applicazione  $\mathbf{G} \times V \ni (g, v) \rightarrow \Phi(g)(v) \in V$  sia continua.

Osserviamo che vale il seguente

<sup>4</sup>Facendo corrispondere ad ogni matrice  $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  la matrice  $\begin{pmatrix} \text{Re } a & -\text{Im } a \\ \text{Im } a & \text{Re } a \end{pmatrix}$  possiamo associare ad ogni gruppo lineare  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  un sottogruppo chiuso  $\mathbf{G}'$  di  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(2n, \mathbb{R})$ , isomorfo a  $\mathbf{G}$  come gruppo topologico.

**Lemma 12.6.2.** Siano  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico,  $V$  uno spazio di Hilbert complesso e  $\Phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathcal{G}(V)$  un omomorfismo. Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\Phi$  sia una rappresentazione nel senso precisato sopra è che siano soddisfatte le due condizioni:

- (i) Per ogni  $v \in V$  l'applicazione  $\mathbf{G} \ni g \rightarrow \Phi(g)(v) \in V$  è continua in  $g = e$ ;
- (ii) Esistono un intorno aperto  $U$  di  $e$  in  $\mathbf{G}$  ed una costante  $C$  tali che

$$(12.6.1) \quad \|\Phi(g)\| = \sup_{\|v\|=1} \|\Phi(g)(v)\| \leq C, \quad \forall g \in U.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Le condizioni (i) ed (ii) sono chiaramente necessarie. Viceversa, la (ii) implica che la  $\Phi$  è continua in  $e$  e quindi, essendo  $\mathbf{G}$  e  $\mathcal{G}(V)$  gruppi topologici, è continua. Resta da verificare la continuità della  $\mathbf{G} \times V \ni (g, v) \rightarrow \Phi(g)(v) \in V$ . Siano  $g, g_0 \in \mathbf{G}$  e  $v, v_0 \in V$ . Abbiamo:

$$\begin{aligned} \|\Phi(g)(v) - \Phi(g_0)(v_0)\| &\leq \|\Phi(g_0)\| \cdot \|\Phi(g_0^{-1}g)(v) - v_0\| \\ &\leq \|\Phi(g_0)\| \cdot \|\Phi(g_0^{-1}g)(v - v_0)\| \\ &\quad + \|\Phi(g_0)\| \cdot \|\Phi(g_0^{-1}g)(v_0) - v_0\| \\ &\leq \|\Phi(g_0)\| \cdot \|\Phi(g_0^{-1}g)\| \cdot \|v - v_0\| \\ &\quad + \|\Phi(g_0)\| \cdot \|\Phi(g_0^{-1}g)(v_0) - v_0\|. \end{aligned}$$

Sotto le ipotesi (i) ed (ii) i due addendi nelle ultime due righe della disequaglianza tendono a zero quando  $g \rightarrow g_0$  in  $\mathbf{G}$  e  $v \rightarrow v_0$  in  $V$ .  $\square$

**Definizione 12.6.3.** Una rappresentazione  $\Phi$  di  $\mathbf{G}$  su uno spazio di Hilbert  $V$  si dice *unitaria* se  $\|\Phi(g)\| = 1$  per ogni  $g \in \mathbf{G}$ .

Se  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ , la rappresentazione

$$(12.6.2) \quad \mathbf{G} \times \mathbb{C}^n \ni (g, v) \longrightarrow g(v) \in \mathbb{C}^n$$

si dice la *rappresentazione standard*.

**Esempio 12.6.4.** Sia  $V$  lo spazio vettoriale dei polinomi complessi in  $n$  indeterminate, omogenei di grado  $k$ . Otteniamo una rappresentazione di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  su  $V$  ponendo:

$$\Phi(g)(p)(x) = p(g^{-1}(x)) \quad \text{per } x = {}^t(x^1, \dots, x^n).$$

**Esempio 12.6.5.** Sia  $V$  lo spazio vettoriale complesso dei polinomi omogenei di grado  $k$  di  $2n$  variabili reali  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ . Utilizzando le variabili complesse  $z_j = x_j + iy_j, \bar{z}_j = x_j - iy_j$ , poniamo  $z = {}^t(z_1, \dots, z_n), \bar{z} = {}^t(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$  e scriviamo ogni  $p \in V$  come un polinomio  $p(z, \bar{z})$ . Definiamo allora un'azione di  $\mathbf{U}(n)$  su  $V$  mediante:

$$\Phi(g)(p)(z, \bar{z}) = p(g^{-1}(z), {}^t g(\bar{z})).$$

**Esempio 12.6.6.** Sia  $\Lambda^k \mathbb{C}^n$  la potenza esterna  $k$ -esima di  $\mathbb{C}^n$ . Vi è allora un'unica azione di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  su  $\Lambda^k \mathbb{C}^n$  per cui risulti:

$$\Phi(g)(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = g(v_1) \wedge \dots \wedge g(v_k) \quad \forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}^n.$$

**Esempio 12.6.7.** Consideriamo il gruppo additivo  $\mathbf{G} = \mathbb{R}^n$ . Sia  $L^2(\mathbb{R}^n)$  lo spazio vettoriale delle funzioni a valori complessi su  $\mathbb{R}^n$  che sono di quadrato sommabile in  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $\mathbb{R}^n \times L^2(\mathbb{R}^n) \ni (v, f) \rightarrow f(\cdot + v) \in L^2(\mathbb{R}^n)$  è una rappresentazione unitaria.

**Esempio 12.6.8.** Più in generale, sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico localmente compatto, sia  $\mu$  una misura di Haar su  $\mathbf{G}$ . Risulta allora definita una rappresentazione unitaria  $\Phi$  su  $L^2(\mathbf{G}, d\mu)$  mediante  $\Phi(g)(f)(x) = f(gx)$  per ogni  $g, x \in \mathbf{G}$ , per ogni  $f \in L^2(\mathbf{G}, d\mu)$ .

**Esempio 12.6.9.** Sia  $X = \mathbf{G}/\mathbf{H}$  uno spazio omogeneo del gruppo topologico localmente compatto  $\mathbf{G}$ , con sottogruppo di isotropia chiuso  $\mathbf{H}$ , e sia  $\nu$  una misura di Radon relativamente invariante su  $X$ . Allora  $\Phi : \mathbf{G} \times L^2(X, \nu) \ni (g, f) \rightarrow (L_g)_*(f) \in L^2(X, \nu)$  è una rappresentazione di  $\mathbf{G}$ . Essa è unitaria se la funzione  $\kappa_\nu$  è identicamente uguale a 1.

Sia  $\Phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathcal{G}(V)$  una rappresentazione di un gruppo topologico  $\mathbf{G}$  su uno spazio di Hilbert complesso  $V$ .

**Definizione 12.6.10.** Un sottospazio  $W$  di  $V$  si dice *invariante*  $\Phi(g)(W) \subset W$  per ogni  $g \in \mathbf{G}$ ; in questo caso<sup>5</sup>, se  $W$  è chiuso in  $V$ , otteniamo una *sottorappresentazione* di  $\mathbf{G}$  su  $W$  ed una *rappresentazione quoziente* su  $V/W$  nel modo ovvio.

La rappresentazione  $\Phi$  si dice *irriducibile* se non esistono sottospazi invarianti non banali.

Due rappresentazioni  $\Phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathcal{G}(V)$  e  $\Psi : \mathbf{G} \rightarrow \mathcal{G}(W)$  si dicono *equivalenti* se esiste un isomorfismo lineare, continuo e con inversa continua,  $\phi : V \rightarrow W$  tale che  $\Psi(g) \circ \phi = \phi \circ \Phi(g)$  per ogni  $g \in \mathbf{G}$ .

**Esempio 12.6.11.** Sia  $k$  un intero positivo e sia  $V$  lo spazio vettoriale dei polinomi complessi delle variabili reali  $x_1, \dots, x_n$ , omogenei di grado  $k$ . Poniamo  $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$  e definiamo  $\Phi : \mathbf{SO}(n) \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$  mediante:

$$\Phi(g)(p)(x) = p(g^{-1}(x)) \quad \forall g \in \mathbf{SO}(n), \forall p \in V.$$

Introduciamo l'operatore di Laplace  $\Delta = (\partial^2/\partial x_1^2) + \dots + (\partial^2/\partial x_n^2)$  e definiamo

$$(12.6.3) \quad A : V \ni p \longrightarrow (x_1^2 + \dots + x_n^2) \cdot (\Delta(p)) \in V.$$

Si verifica che  $\Phi(g) \circ A = A \circ \Phi(g)$  per ogni  $g \in \mathbf{SO}(n)$ . Ne segue che  $\ker A$  e  $A(V)$  sono due sottospazi invarianti per  $\Phi$ .

## 12.7. Rappresentazioni dei gruppi lineari

Consideriamo ora il caso in cui il gruppo  $\mathbf{G}$  sia un sottogruppo chiuso<sup>6</sup> di un gruppo lineare  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ .

<sup>5</sup>Osserviamo che, se  $W$  è invariante, anche la sua chiusura  $\overline{W}$  in  $V$  è invariante.

<sup>6</sup>Il teorema seguente vale più in generale per un qualsiasi gruppo di Lie.

**Teorema 12.7.1.** *Ogni rappresentazione di dimensione finita di un gruppo lineare è di classe  $\mathcal{C}^\infty$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  un gruppo lineare e sia  $\pi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}(N, \mathbb{C})$  una sua rappresentazione lineare di dimensione finita.

Fissiamo un intorno  $U$  di  $e$  in  $\mathbf{GL}(N, \mathbb{C})$  tale che ogni elemento  $g \in U$  abbia in  $U$  un'unica radice quadrata  $g^{1/2} \in U$ : a questo scopo è sufficiente fissare un intorno aperto  $2V$  di  $0$  nell'algebra di Lie  $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$  di  $\mathbf{GL}(N, \mathbb{C})$  tale che  $X \rightarrow \exp(X)$  sia un diffeomorfismo di  $2V$  su un intorno aperto di  $e$  in  $\mathbf{GL}(N, \mathbb{C})$  e porre  $U = \exp(V)$ . Possiamo supporre che  $U$  sia una palla aperta di  $\mathbb{C}^{n^2}$  contenuta in  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ .

Dimostriamo il teorema nel caso particolare in cui  $\mathbf{G}$  sia il gruppo moltiplicativo dei reali positivi. Scegliamo  $\epsilon$  sufficientemente piccolo in modo che  $\pi(e^t) \in U$  per ogni  $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ . Sia  $Y \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$  tale che  $\pi(e^\epsilon) = \exp(\epsilon Y)$ . Otteniamo allora, per l'unicità della radice quadrata in  $U$ , che  $\pi(e^{\epsilon/2^m}) = \exp(\frac{\epsilon}{2^m} Y)$  per ogni intero  $m \geq 0$  e quindi che  $\exp(e^{\epsilon/2^m}) = \exp(\frac{\epsilon}{2^m} Y)$  per ogni  $\ell \in \mathbb{Z}$  ed  $m \in \mathbb{N}$ . Poiché  $\pi$  è continua, ne segue che  $\pi(e^t) = \exp(tY)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Chiaramente la rappresentazione  $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \ni e^t \rightarrow \exp(tY) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  è differenziabile di classe  $\mathcal{C}^\infty$ , perché composta di applicazioni differenziabili di classe  $\mathcal{C}^\infty$ :

$$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \xrightarrow{\log(\cdot)Y} \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}) \xrightarrow{\exp} \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Il ragionamento che abbiamo svolto nel caso particolare in cui  $\mathbf{G} = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  ci permette, in generale, di definire un diagramma commutativo:

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\Pi} & \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ \mathbf{G} & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{GL}(N, \mathbb{C}) \end{array}$$

in cui l'applicazione  $\Pi$  è lineare. Ne segue che la  $\pi$  è di classe  $\mathcal{C}^\infty$  in un intorno di  $e = \exp(0)$  (perché  $\exp$  è un diffeomorfismo in un intorno di  $0$ ) e quindi dappertutto.  $\square$

Dalla dimostrazione del Teorema 12.7.1 segue il:

**Corollario 12.7.2.** *Se  $\Phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  è una rappresentazione di dimensione finita di un gruppo lineare  $\mathbf{G}$ , allora il suo differenziale nell'origine:*

$$d\Phi_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$

*è un omomorfismo di algebre di Lie.*

**Definizione 12.7.3.** Un omomorfismo  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  di un'algebra di Lie reale  $\mathfrak{g}$  si dice una *rappresentazione di dimensione finita* di  $\mathfrak{g}$ .

Dalla dimostrazione del Teorema 12.7.1 segue ancora il

**Corollario 12.7.4.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo lineare connesso e semplicemente connesso e sia  $\mathfrak{g}$  la sua algebra di Lie. Ad ogni rappresentazione di dimensione finita di  $\mathfrak{g}$  corrisponde un'unica rappresentazione lineare di  $\mathbf{G}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che in questo caso all'omomorfismo  $\Pi$  di algebre di Lie corrisponde un omomorfismo  $\pi$  di gruppi di Lie che rende (\*) commutativo.  $\square$

### 12.8. Operatori di Radon

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo ed  $\mathfrak{F}$  una famiglia di funzioni su  $\mathbf{G}$ .

**Definizione 12.8.1.** Un'applicazione lineare  $T : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$  è un *operatore (a sinistra) del gruppo  $\mathbf{G}$*  se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- (i)  $\mathfrak{F}$  è  $\mathbf{G}$ -invariante: cioè  $\{x \rightarrow R_g^* f(x) = f(xg)\} \in \mathfrak{F}$  per ogni  $f \in \mathfrak{F}$ .
- (ii)  $T$  commuta con l'azione del gruppo: cioè  $R_g^*(T(f)) = T(R_g^* f)$ , ovvero  $(T(f))(xg) = T_x(f(xg))$ .

Osserviamo che se  $f \in \mathfrak{F}$  è costante sulle classi laterali sinistre  $g\mathbf{H}$  di un sottogruppo  $\mathbf{H}$  di  $\mathbf{G}$ , anche  $T(f)$  sarà costante sulle classi laterali sinistre di  $\mathbf{G}$ : quindi ogni operatore del gruppo  $\mathbf{G}$  induce un operatore sulla corrispondente classe di funzioni definita su un qualsiasi spazio omogeneo  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ .

Per ogni  $g \in \mathbf{G}$ , la traslazione a destra  $R_g^*$  definisce un operatore del gruppo  $\mathbf{G}$  su una qualsiasi classe  $\mathbf{G}$ -invariante di funzioni complesse  $\mathfrak{F}$  su  $\mathbf{G}$ .

Se poniamo  $S_g = L_{g^{-1}}^*$ , le  $S_g$  (con il prodotto di composizione) formano un gruppo isomorfo a  $\mathbf{G}$  e la trasformazione  $g \rightarrow S_g$  è un isomorfismo di gruppi.

Le loro combinazioni lineari a coefficienti complessi

$$(*) \quad T = \sum_{i=1}^n k_i S_{g_i}$$

formano un anello.

Se  $\nu$  è una misura a valori complessi definita su  $\mathbf{G}$ , possiamo associare ad essa un operatore

$$(**) \quad T_\nu f(x) = \int_{\mathbf{G}} f(y^{-1}x) d\nu(y).$$

Osserviamo che  $T_\nu$  è della forma (\*) nel caso di una misura a valori complessi con il supporto concentrato in un numero finito di punti.

**Definizione 12.8.2.** Se  $\mathbf{G}$  è localmente compatto e  $\nu$  una misura complessa di Radon, e allora  $T_\nu$  si dice un *operatore di Radon*. Se la misura  $\nu$  ha massa finita, diremo che  $T_\nu$  è un *operatore di Radon limitato*.

Se  $f$  è limitata e uniformemente continua a destra (se cioè per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $e$  in  $\mathbf{G}$  tale che  $|f(xg) - f(x)| < \epsilon$  per ogni  $g \in U$  ed  $x \in \mathbf{G}$ ) e  $\nu$  una misura di Radon limitata, allora

$$T_\nu f(xg) - T_\nu f(x) = \int_{\mathbf{G}} (f(y^{-1}xg) - f(y^{-1}x)) d\nu(y)$$

e quindi

$$|T_\nu f(xg) - T_\nu f(x)| \leq \int_{\mathbf{G}} |f(y^{-1}xg) - f(y^{-1}x)| d\nu(y) \leq \epsilon \int_{\mathbf{G}} |d\nu(y)| \quad \forall x \in \mathbf{G},$$

e  $T_\nu f$  è anch'essa uniformemente continua a destra.

Se  $\nu_1$  e  $\nu_2$  sono due misure di Radon complesse di massa finita, abbiamo chiaramente  $T_{\nu_1} + T_{\nu_2} = T_{\nu_1 + \nu_2}$  e vale inoltre:

$$T_{\nu_1} \circ T_{\nu_2}(f)(x) = \iint_{\mathbf{G} \times \mathbf{G}} f(y_1^{-1} y_2^{-1} x) d\nu_1(y_1) d\nu_2(y_2).$$

Il secondo membro di quest'uguaglianza è un integrale di Radon, rispetto a una misura di Radon di massa finita  $\nu$ :

$$T_{\nu_1} \circ T_{\nu_2}(f)(x) = \int_{\mathbf{G}} f(y^{-1} x) d\nu(y),$$

per cui risulta:  $\nu(\mathbf{G}) = \nu_1(\mathbf{G}) \cdot \nu_2(\mathbf{G})$ .

In particolare,

**Proposizione 12.8.3.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico localmente compatto. Con il prodotto di composizione gli operatori di Radon limitati formano un anello.*  $\square$

Sia ora  $\mu_{\mathbf{G}}$  la misura di Haar su  $\mathbf{G}$ . Indichiamo con  $L^p(\mathbf{G})$  lo spazio di Banach delle funzioni misurabili di potenza  $p$  sommabile su  $\mathbf{G}$ :

$$(12.8.1) \quad L^p(\mathbf{G}) = \left\{ f \text{ è } \mu_{\mathbf{G}}\text{-misurabile e } \int_{\mathbf{G}} |f(x)|^p d\mu_{\mathbf{G}}(x) = \|f\|_p^p < +\infty \right\}.$$

Se  $\nu$  è una misura di Radon complessa di massa totale finita abbiamo:

$$\int_{\mathbf{G}} T_\nu(f)(x) \cdot \phi(x) d\mu_{\mathbf{G}}(x) = \int_{\mathbf{G}} d\nu(y) \int_{\mathbf{G}} f(y^{-1} x) \phi(x) d\mu_{\mathbf{G}}(x)$$

$$\text{e quindi } \left| \int_{\mathbf{G}} T_\nu(f)(x) \cdot \phi(x) d\mu_{\mathbf{G}}(x) \right| \leq \left( \int_{\mathbf{G}} |d\nu(y)| \right) \|f\|_p \|\phi\|_{p'}.$$

$\forall f \in L^p(\mathbf{G}), \forall \phi \in L^{p'}(\mathbf{G})$  (ove  $1 < p, p' < +\infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ).

Abbiamo ottenuto:

**Teorema 12.8.4.** *L'anello degli operatori di Radon limitati opera sugli spazi  $L^p(\mathbf{G})$  per ogni  $p \in ]1, +\infty[$ .*

## 12.9. Prodotto di convoluzione

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico localmente compatto. Allora anche il prodotto diretto  $\mathbf{G} \bowtie \mathbf{G}$  è un gruppo topologico localmente compatto. Siano  $\mu_{\mathbf{G}}$  e  $\mu_{\mathbf{G} \bowtie \mathbf{G}}$  le loro rispettive misure di Haar. Per i corrispondenti integrali di Haar abbiamo:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{G} \bowtie \mathbf{G}} F(x, y) d\mu_{\mathbf{G} \bowtie \mathbf{G}}(x, y) &= \int_{\mathbf{G}} d\mu_{\mathbf{G}}(y) \int_{\mathbf{G}} F(x, y) d\mu_{\mathbf{G}}(x) \\ &= \int_{\mathbf{G}} d\mu_{\mathbf{G}}(y) \int_{\mathbf{G}} F(y^{-1} x, y) d\mu_{\mathbf{G}}(x). \end{aligned}$$

Quindi: la trasformazione

$$\mathbf{G} \bowtie \mathbf{G} \ni (x, y) \longrightarrow (y^{-1} x, y) \in \mathbf{G} \bowtie \mathbf{G}$$

è un omeomorfismo che lascia invariata la misura di Haar di  $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ . In particolare, se  $\phi, \psi$  sono due funzioni  $\mu_{\mathbf{G}}$ -misurabili su  $\mathbf{G}$ , il loro prodotto tensoriale

$$(\phi \otimes \psi)(x, y) = \phi(x)\psi(y)$$

è misurabile, e risulta misurabile anche la  $\phi(y^{-1}x)\psi(y)$ , e la  $y \rightarrow \phi(y^{-1}x)\psi(y)$  è misurabile per quasi tutti gli  $x$  di  $\mathbf{G}$ .

Supponiamo ora che  $\psi \in L^1(\mathbf{G})$ . Allora  $\psi(x)d\mu_{\mathbf{G}}(x)$  definisce una misura di Radon di massa finita su  $\mathbf{G}$  e quindi un corrispondente operatore di Radon  $\psi^*$  del gruppo  $\mathbf{G}$ .

**Definizione 12.9.1.** Data  $\phi \in L^p(\mathbf{G})$  la funzione di  $L^p(\mathbf{G})$ :

$$\psi * \phi(x) = \int_{\mathbf{G}} \psi(y) \phi(y^{-1}x) d\mu_{\mathbf{G}}(y) = \int_{\mathbf{G}} \psi(xy) \phi(y^{-1}) d\mu_{\mathbf{G}}(y)$$

si dice *prodotto di convoluzione* di  $\psi$  e  $\phi$ .

Osserviamo che vale la

$$\|\psi * \phi\|_{L^p(\mathbf{G})} \leq \|\psi\|_{L^1(\mathbf{G})} \|\phi\|_{L^p(\mathbf{G})}.$$

Data una qualsiasi funzione  $f$  su  $\mathbf{G}$ , sia  $\check{f}$  la funzione su  $\mathbf{G}$  definita da  $\check{f}(x) = f(x^{-1})$  per ogni  $x \in \mathbf{G}$ .

Vale la

**Proposizione 12.9.2.** Se  $\check{\phi} \in L^p(\mathbf{G})$  e  $\psi \in L^{p'}(\mathbf{G})$ , con  $1 < p, p' < +\infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , allora  $\psi * \phi$  è una funzione continua e

$$|\psi * \phi(x)| \leq \|\psi\|_{L^{p'}(\mathbf{G})} \|\phi\|_{L^p(\mathbf{G})} \quad \forall x \in \mathbf{G}.$$

Nel caso di un gruppo unimodulare, l'applicazione  $f \rightarrow \check{f}$  è un'isometria su ciascuno degli spazi  $L^p(\mathbf{G})$ , per  $1 \leq p \leq +\infty$ . Abbiamo:

**Teorema 12.9.3.** Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico unimodulare. Allora il prodotto di convoluzione gode delle proprietà:

(i) Se  $\phi \in L^p(\mathbf{G})$  e  $\psi \in L^{p'}(\mathbf{G})$ , con  $1 < p, p' < +\infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , allora  $\psi * \phi$  è una funzione continua e limitata e

$$\|\psi * \phi\|_{L^\infty(\mathbf{G})} \leq \|\psi\|_{L^{p'}(\mathbf{G})} \|\phi\|_{L^p(\mathbf{G})}.$$

(ii) Siano  $p, q, r$  numeri reali  $\geq 1$  e tali che  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ . Allora, se  $\phi \in L^p(\mathbf{G})$  e  $\psi \in L^q(\mathbf{G})$ , il prodotto di convoluzione  $\phi * \psi$  è una funzione di  $L^r(\mathbf{G})$  e vale la maggiorazione:

$$\|\phi * \psi\|_{L^r(\mathbf{G})} \leq \|\phi\|_{L^p(\mathbf{G})} \|\psi\|_{L^q(\mathbf{G})}.$$

(iii) Il prodotto di convoluzione gode della proprietà associativa<sup>7</sup>:

$$(\phi_1 * \phi_2) * \phi_3 = \phi_1 * (\phi_2 * \phi_3) := \phi_1 * \phi_2 * \phi_3.$$

<sup>7</sup>Se il gruppo  $\mathbf{G}$  non è commutativo, non lo è in generale nemmeno il prodotto di convoluzione.

### 12.10. Operatori associati a una rappresentazione

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico localmente compatto ed unimodulare e sia  $\mu_{\mathbf{G}}$  una sua misura di Haar. Se  $\Phi$  è una rappresentazione di  $\mathbf{G}$  sullo spazio di Hilbert  $V$ , associamo ad ogni  $f \in L^1(\mathbf{G})$ , con supporto compatto, un operatore lineare  $\Phi(f) : V \rightarrow V$  mediante la formula

$$(\#) \quad \Phi(f)(v) = \int_{\mathbf{G}} f(x)\Phi(x)(v) d\mu_{\mathbf{G}}(x) \quad \forall v \in V.$$

Se  $f \in L^1(\mathbf{G})$  ha supporto compatto, abbiamo

$$\|\Phi(f)(v)\| \leq \sup_{x \in \text{supp } f} \|\Phi(x)\| \cdot \|f\|_{L^1(\mathbf{G})} \cdot \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

e quindi  $\Phi(f)$  è un operatore limitato.

Osserviamo che, se  $W \subset V$  è un sottospazio chiuso invariante  $\Phi(\mathbf{G})$ -invariante di  $V$ , allora  $W$  è anche  $\Phi(f)$ -invariante.

Se  $\Phi$  è unitaria, allora  $\Phi(f)$  è definito, mediante la formula (#), per tutte le  $f \in L^1(\mathbf{G})$ . È un operatore limitato su  $V$  con:

$$\|\Phi(f)\| \leq \|f\|_{L^1(\mathbf{G})}.$$

Osserviamo ancora che:

**Lemma 12.10.1.** *Se  $\Phi$  è una rappresentazione unitaria di un gruppo topologico localmente compatto e unimodulare  $\mathbf{G}$ , allora:*

$$(12.10.1) \quad [\Phi(f)]^* = \Phi(f^*) \quad \text{con} \quad f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}, \quad \text{cioè} \quad f^* = \bar{f},$$

ed inoltre

$$(12.10.2) \quad \Phi(f_1) \circ \Phi(f_2) = \Phi(f_1 * f_2) \quad \forall f_1, f_2 \in L^1(\mathbf{G}).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $\Phi$  è unitaria, abbiamo  $[\Phi(x)]^* = \Phi(x^{-1})$ . Tenuto conto del fatto che su un gruppo unimodulare  $\int_{\mathbf{G}} h(x^{-1}) d\mu_{\mathbf{G}}(x) = \int_{\mathbf{G}} h(x) d\mu_{\mathbf{G}}(x)$  per ogni  $h \in L^1(\mathbf{G})$  (vedi Teorema VIII.2.1), abbiamo:

$$[\Phi(f)]^*(v) = \int_{\mathbf{G}} \bar{f}(x)\Phi(x^{-1})(v) d\mu_{\mathbf{G}}(x) = \int_{\mathbf{G}} \bar{f}(x^{-1})\Phi(x)(v) d\mu_{\mathbf{G}}(x) = \Phi(f^*)(v).$$

Risulta poi:

$$\begin{aligned} \Phi(f_1) \circ \Phi(f_2)(v) &= \int_{\mathbf{G}} f_1(y)\Phi(y) \left( \int_{\mathbf{G}} f_2(x)\Phi(x)(v) dx \right) dy \\ &= \iint_{\mathbf{G} \times \mathbf{G}} f_1(y)f_2(x)\Phi(yx)(v) dy dx \\ &= \iint_{\mathbf{G} \times \mathbf{G}} f_1(y)f_2(y^{-1}x)\Phi(x)(v) dy dx \\ &= \int_{\mathbf{G}} \left( \int_{\mathbf{G}} f_1(y)f_2(y^{-1}x) dy \right) \Phi(x)(v) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbf{G}} (f_1 * f_2)(x) \Phi(x)(v) dx \\ &= \Phi(f_1 * f_2)(v). \end{aligned}$$

□

## Rappresentazioni dei gruppi compatti

### 13.1. Relazioni di ortogonalità di Schur

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo compatto. Indichiamo con  $dx$  la sua misura di Haar, normalizzata in modo che risulti  $\int_{\mathbf{G}} dx = 1$ .

**Proposizione 13.1.1.** *Se  $\Phi$  è una rappresentazione di  $\mathbf{G}$  su uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione finita, allora esiste un prodotto scalare Hermitiano su  $V$  che rende  $\Phi$  unitaria.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $(\cdot | \cdot)_0$  un qualsiasi prodotto scalare Hermitiano su  $V$ . Definiamo su  $V$  un nuovo prodotto scalare ponendo

$$(\nu | w)_{0, \Phi} = \int_{\mathbf{G}} (\Phi(x)(\nu) | \Phi(x)(w))_0 dx \quad \forall \nu, w \in V.$$

Questo nuovo prodotto scalare ha chiaramente le proprietà richieste.  $\square$

**Corollario 13.1.2.** *Ogni rappresentazione  $\Phi$  di un gruppo compatto  $\mathbf{G}$  su uno spazio vettoriale di dimensione finita  $V$  si decompone in una somma diretta di rappresentazioni irriducibili.*

Abbiamo cioè una decomposizione  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  di  $V$  in una somma diretta di sottospazi  $\Phi(\mathbf{G})$ -invarianti irriducibili.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo infatti fissare su  $V$  un prodotto Hermitiano che renda la  $\Phi$  unitaria. Basta osservare allora che se il sottospazio  $W$  è  $\Phi(\mathbf{G})$ -invariante, lo è anche il suo ortogonale  $W^\perp$ .  $\square$

**Teorema 13.1.3** (Lemma di Schur). *Siano  $\Phi$  e  $\Phi'$  due rappresentazioni lineari irriducibili non banali del gruppo compatto  $\mathbf{G}$  sugli spazi vettoriali di dimensione finita  $V$  e  $V'$  rispettivamente. Supponiamo esista un'applicazione lineare  $L : V \rightarrow V'$  tale che  $L \circ \Phi(x) = \Phi'(x) \circ L$  per ogni  $x \in \mathbf{G}$ . Allora  $L$  è o un isomorfismo lineare oppure l'applicazione nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti  $\ker L$  ed  $L(V)$  sono sottospazi invarianti di  $V$  e di  $V'$  rispettivamente, e quindi o  $\ker L = \{0\}$  ed  $L(V) = V'$ , oppure  $\ker L = V$  ed  $L(V) = \{0\}$ .  $\square$

**Corollario 13.1.4.** *Sia  $\Phi$  una rappresentazione irriducibile del gruppo compatto  $\mathbf{G}$  sullo spazio vettoriale di dimensione finita  $V$ . Allora ogni endomorfismo  $L$  di  $V$  che commuti con tutte le  $\Phi(x)$ , al variare di  $x$  in  $\mathbf{G}$ , è un multiplo dell'identità:*

$$(13.1.1) \quad \{L \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V) \mid L \circ \Phi(x) = \Phi(x) \circ L \forall x \in \mathbf{G}\} = \mathbb{C} \cdot I_V.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $L$  un endomorfismo di  $V$  che commuta con tutte le  $\Phi(x)$ , al variare di  $x$  in  $\mathbf{G}$ , e sia  $\lambda \in \mathbb{C}$  un autovalore di  $L$ . Per il Lemma di Schur  $L - \lambda I_V = 0$ .  $\square$

**Teorema 13.1.5** (Relazioni di ortogonalità di Schur). *Siano  $\Phi, \Phi'$  due rappresentazioni unitarie irriducibili e non equivalenti del gruppo compatto  $\mathbf{G}$  sugli spazi vettoriali di dimensione finita  $V, V'$ , rispettivamente. Allora per ogni  $u, v \in V$  e  $u', v' \in V'$  le due funzioni  $x \rightarrow (\Phi(x)(u)|v)_V$  e  $x \rightarrow (\Phi'(x)(u')|v')_{V'}$ , sono ortogonali in  $L^2(\mathbf{G})$ :*

$$(13.1.2) \quad \int_{\mathbf{G}} (\Phi(x)(u)|v)_V \overline{(\Phi'(x)(u')|v')_{V'}} dx = 0$$

Abbiamo inoltre, per ogni  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ :

$$(13.1.3) \quad \int_{\mathbf{G}} (\Phi(x)(u_1)|v_1)_V \overline{(\Phi(x)(u_2)|v_2)_V} dx = \frac{(u_1|u_2)_V \overline{(v_1|v_2)_V}}{\dim_{\mathbb{C}} V}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $L : V' \rightarrow V$  una qualsiasi applicazione lineare e definiamo una nuova applicazione lineare  $\tilde{L} : V' \rightarrow V$  mediante:

$$\tilde{L} = \int_{\mathbf{G}} \Phi(x) \circ L \circ \Phi'(x^{-1}) dx.$$

Chiaramente  $\Phi(y) \circ \tilde{L} = \tilde{L} \circ \Phi'(y)$  per ogni  $y \in \mathbf{G}$  e quindi, poiché  $\Phi$  e  $\Phi'$  non sono equivalenti,  $\tilde{L} = 0$  per il Lemma di Schur.

Consideriamo allora l'applicazione  $L \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V', V)$  definita, per  $u \in V$  ed  $u' \in V'$  fissati, da  $v' \rightarrow L(v') = (v'|u')u$ . Allora:

$$\int_{\mathbf{G}} (\Phi'(x^{-1})(v')|u')_{V'} \Phi(x)(u) dx = \int_{\mathbf{G}} \overline{(\Phi'(x)(u')|v')_{V'}} \Phi(x)(u) dx = 0$$

e facendo il prodotto scalare in  $V$  per  $v$  otteniamo (13.1.2).

Per ottenere la (13.1.3), ripetiamo il ragionamento precedente: partendo da una qualsiasi applicazione lineare  $L : V \rightarrow V$ , la  $\tilde{L} = \int_{\mathbf{G}} \Phi(x) \circ L \circ \Phi(x^{-1}) dx$  è un multiplo dell'identità:  $\tilde{L} = \lambda I_V$ . Calcolando la traccia di ambo i membri, abbiamo:

$$\text{traccia}(\tilde{L}) = \lambda \dim_{\mathbb{C}} V = \text{traccia}(L).$$

Da questa uguaglianza ricaviamo che

$$(13.1.4) \quad (\tilde{L}(v_2)|v_1)_V = \frac{\text{traccia}(L)}{\dim_{\mathbb{C}} V} \cdot \overline{(v_1|v_2)_V}.$$

Fissati  $u_1, u_2 \in V$ , poniamo ora  $L(v) = (v|u_2)_V u_1$ . Allora  $\text{traccia}(L) = (u_1|u_2)_V$  e quindi la (13.1.4) dà la (13.1.3).  $\square$

Sia  $\{\Phi^{(\alpha)}\}$  un insieme massimale di rappresentazioni unitarie irriducibili, due a due non equivalenti, del gruppo topologico compatto  $\mathbf{G}$ . Per ogni indice  $\alpha$  sia  $n^{(\alpha)}$  il grado della rappresentazione  $\Phi^{(\alpha)}$ , cioè la dimensione dello spazio vettoriale complesso  $V^{(\alpha)}$  su cui operano le  $\Phi^{(\alpha)}(x)$  ( $x \in \mathbf{G}$ ); per ogni  $\alpha$  sia  $e_1^{(\alpha)}, \dots, e_{n^{(\alpha)}}^{(\alpha)}$  una base ortonormale di  $V^{(\alpha)}$ . Allora le funzioni

$$(13.1.5) \quad \phi_{i,j}^{(\alpha)}(x) = \sqrt{n^{(\alpha)}} \left( \Phi^{(\alpha)}(x) e_i^{(\alpha)} \middle| e_j^{(\alpha)} \right)_{V^{(\alpha)}}, \quad x \in \mathbf{G}, \quad 1 \leq i, j \leq n^{(\alpha)},$$

per le relazioni di ortogonalità di Schur, formano un sistema ortonormale di vettori di  $L^2(\mathbf{G})$ .

**Definizione 13.1.6.** Data una rappresentazione unitaria  $\Phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$  di grado finito di un gruppo compatto  $\mathbf{G}$ , si dice *coefficiente (matriciale) della rappresentazione* una funzione della forma:

$$\mathbf{G} \ni x \rightarrow (\Phi(x)u|v)_V \in \mathbb{C}.$$

Si dice *carattere* della rappresentazione  $\Phi$  la funzione

$$\mathbf{G} \ni x \rightarrow \chi_{\Phi}(x) = \text{traccia}(\Phi(x)) = \sum_{i=1}^{n_{\Phi}} (\Phi(x)e_i|e_i)_V$$

(dove  $n_{\Phi}$  è il grado di  $\Phi$  ed  $e_1, \dots, e_{n_{\Phi}}$  una base ortonormale di  $V$ ).

**Proposizione 13.1.7.** I caratteri  $\chi_{\Phi}$  e  $\chi_{\Phi'}$  di due rappresentazioni unitarie irriducibili di grado finito di un gruppo compatto  $\mathbf{G}$  soddisfano:

- (i)  $\chi_{\Phi}(x^{-1}) = \overline{\chi_{\Phi}(x)}$  per ogni  $x \in \mathbf{G}$ ;
- (ii)  $\chi_{\Phi} * \chi_{\Phi'} = 0$  se  $\Phi$  e  $\Phi'$  non sono equivalenti;
- (iii)  $\chi_{\Phi} * \chi_{\Phi} = n_{\Phi}^{-1} \chi_{\Phi}$ .

DIMOSTRAZIONE. (i) Con le notazioni introdotte in precedenza abbiamo:

$$\begin{aligned} \chi_{\Phi}(x^{-1}) &= \sum_{i=1}^{n_{\Phi}} (\Phi(x^{-1})e_i|e_i)_V = \sum_{i=1}^{n_{\Phi}} (e_i|\Phi(x)e_i)_V \\ &= \sum_{i=1}^{n_{\Phi}} \overline{(\Phi(x)e_i|e_i)_V} = \overline{\chi_{\Phi}(x)}. \end{aligned}$$

Per verificare (ii) e (iii), osserviamo che

$$\begin{aligned} \chi_{\Phi} * \chi_{\Phi'}(x) &= \int_{\mathbf{G}} \chi_{\Phi}(xy) \chi_{\Phi'}(y^{-1}) dy \\ &= \sum_{i=1}^{n_{\Phi}} \sum_{j=1}^{n_{\Phi'}} \int_{\mathbf{G}} (\Phi(xy)(e_i)|e_i)_V \overline{(\Phi'(y)(e'_j)|e'_j)_{V'}} dy \\ &= \sum_{i=1}^{n_{\Phi}} \sum_{j=1}^{n_{\Phi'}} \int_{\mathbf{G}} (\Phi(y)(\Phi(x)(e_i))|e_i)_V \overline{(\Phi'(y)(e'_j)|e'_j)_{V'}} dy. \end{aligned}$$

Se  $\Phi$  e  $\Phi'$  sono irriducibili e non equivalenti, otteniamo la (ii) dalle relazioni di ortogonalità di Schur.

Se  $\Phi = \Phi'$ , otteniamo invece:

$$\begin{aligned} \chi_{\Phi} * \chi_{\Phi}(x) &= \sum_{i,j=1}^{n_{\Phi}} \int_{\mathbf{G}} (\Phi(y)(\Phi(x)(e_i))|e_i)_V \overline{(\Phi(y)(e_j)|e_j)_V} dy \\ &= \sum_{i,j=1}^{n_{\Phi}} n_{\Phi}^{-1} (\Phi(x)(e_i)|e_j)_V (e_i|e_j)_V \\ &= n_{\Phi}^{-1} \chi_{\Phi}(x), \end{aligned}$$

e quindi la (iii). □

### 13.2. Il teorema di Peter-Weyl

Dimostriamo in questo paragrafo il teorema di Peter-Weyl, che è di importanza cruciale nella teoria delle rappresentazioni:

**Teorema 13.2.1** (Peter-Weyl). *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo compatto. Valgono allora:*

- (A) *I coefficienti matriciali delle sue rappresentazioni unitarie di grado finito generano un sottospazio vettoriale denso in  $L^2(\mathbf{G})$ .*
- (B) *Se  $\{\Phi^{(\alpha)}\}_{\alpha \in A}$  è una famiglia massimale di rappresentazioni unitarie di grado finito di  $\mathbf{G}$ , due a due non equivalenti, la famiglia*

$$(13.2.1) \quad \{\phi_{i,j}^{(\alpha)} \mid \alpha \in A, 1 \leq i, j \leq n^{(\alpha)}\},$$

*dove le  $\phi_{i,j}^{(\alpha)}$  sono definite dalle (13.1.5), è una base ortonormale di  $L^2(\mathbf{G})$ .*

- (C) *Ogni rappresentazione irriducibile di  $\mathbf{G}$  ha grado finito.*
- (D) *Ogni rappresentazione unitaria di  $\mathbf{G}$  su uno spazio di Hilbert  $V$  si decompone nella somma diretta di rappresentazioni irriducibili di grado finito.*
- (E) *Sia  $\Phi$  una rappresentazione unitaria di un gruppo compatto  $\mathbf{G}$  su uno spazio di Hilbert  $V$ . Per ogni rappresentazione unitaria irriducibile  $\tau$  di  $\mathbf{G}$ , sia  $E_\tau$  la proiezione ortogonale di  $V$  sulla chiusura della somma diretta di tutti i sottospazi invarianti irriducibili di  $V$  su cui la  $\Phi$  è equivalente a  $\tau$ . Allora*

$$(13.2.2) \quad E_\tau = n_\tau \Phi(\bar{\chi}_\tau),$$

*ove  $n_\tau$  è il grado della rappresentazione  $\tau$  e  $\chi_\tau$  il suo carattere. Abbiamo*

$$(13.2.3) \quad E_\tau \circ E_{\tau'} = 0 \quad \text{se } \tau \text{ e } \tau' \text{ non sono equivalenti}$$

*e vale la decomposizione ortogonale*

$$(13.2.4) \quad v = \sum_{\tau} E_\tau(v),$$

*ove la somma è fatta rispetto a tutte le classi di equivalenza  $[\tau]$  di rappresentazioni unitarie irriducibili di  $\mathbf{G}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** (A) Sia  $U$  la chiusura in  $L^2(\mathbf{G})$  dello spazio vettoriale generato dai coefficienti matriciali delle rappresentazioni unitarie irriducibili di  $\mathbf{G}$ .

Osserviamo che, se  $h(x) = (\Phi(x)(v)|u)_W$  è il coefficiente matriciale di una rappresentazione unitaria  $\Phi$  di grado finito, allora anche

$$\begin{aligned} h^*(x) &= \overline{h(x^{-1})} = (\Phi(x)(u)|v)_W, \\ L_g^* h(x) &= h(gx) = (\Phi(x)(u)|\Phi(g^{-1})(v))_W, \\ R_g^* h(x) &= h(xg) = (\Phi(x)[\Phi(g)(u)]|v)_W \end{aligned}$$

sono coefficienti matriciali della stessa rappresentazione.

Ne segue che  $U$  è invariante rispetto alle operazioni  $h \rightarrow h^*$ ,  $h \rightarrow L_g^* h$  ed  $h \rightarrow R_g^* h$ .

Supponiamo per assurdo che  $U \neq L^2(\mathbf{G})$ . Allora  $U^\perp$  è un sottospazio chiuso non banale di  $L^2(\mathbf{G})$ , anch'esso invariante per le operazioni di agguinzione e di traslazione sinistra e destra.

Dimostriamo che  $U^\perp$  contiene allora una funzione continua non banale. Se  $f \in U^\perp$ , per ogni intorno aperto  $\omega$  di  $e$  in  $\mathbf{G}$  consideriamo la funzione caratteristica  $\chi_\omega$  di  $\omega$ . Indichiamo con  $|\omega|$  la misura di Haar di  $\omega$ . Allora  $\frac{1}{|\omega|}\chi_\omega * f$  è una funzione continua perché convoluzione di due funzioni di  $L^2(\mathbf{G})$ . Ne segue che  $f$  è limite in  $L^2(\mathbf{G})$  di una successione di funzioni continue.

Infatti, per ogni  $\epsilon > 0$  fissato, esiste un intorno  $\omega$  di  $e$  in  $\mathbf{G}$  tale che

$$\int_{\mathbf{G}} |f(x) - f(y^{-1}x)|^2 dx < \epsilon^2, \quad \forall y \in \omega,$$

perché la traslazione a sinistra è una rappresentazione unitaria di  $\mathbf{G}$  su  $L^2(\mathbf{G})$ . Con tali  $\epsilon$  ed  $\omega$  abbiamo:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbf{G}} \left( f(x) - \frac{1}{|\omega|} \chi_\omega * f(x) \right) \cdot v(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbf{G}} \left( f(x) - \frac{1}{|\omega|} \left[ \int_{\omega} f(y^{-1}x) dy \right] \right) \cdot v(x) dx \right| \\ &= \frac{1}{|\omega|} \left| \int_{\omega} dy \left[ \int_{\mathbf{G}} (f(x) - f(y^{-1}x)) \cdot v(x) dx \right] \right| \\ &\leq \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} dy \int_{\mathbf{G}} |f(x) - f(y^{-1}x)| \cdot |v(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \|f - L_{y^{-1}}^* f\|_{L^2(\mathbf{G})} \cdot \|v\|_{L^2(\mathbf{G})} dy \leq \epsilon \|v\|_{L^2(\mathbf{G})} \end{aligned}$$

Quindi, se tutte le funzioni continue  $\frac{1}{|\omega|}\chi_\omega * f$  appartenessero ad  $U$ , anche  $f$  apparterebbe ad  $U$ . Ciò dimostra che  $U^\perp$  contiene una funzione  $f_1$  continua e diversa da 0. Possiamo supporre che  $f_1(e) = 1$ . Definiamo

$$f_2(x) = \int_{\mathbf{G}} f_1(yxy^{-1}) dy.$$

Questa funzione è ancora continua, appartiene ad  $U^\perp$  perché tutte le  $x \rightarrow f_1(yxy^{-1})$ , al variare di  $y$  in  $\mathbf{G}$ , appartengono ad  $U^\perp$ . Inoltre  $f_2(e) = f_1(e) = 1$  ed  $f_2(gxg^{-1}) = f_2(x)$  per ogni  $x, g \in \mathbf{G}$ . Poniamo finalmente:

$$F(x) = \frac{1}{2} (f_2(x) + f_2^*(x)) = (f_2(x) + \overline{f_2(x^{-1})}).$$

Allora:

$$\begin{cases} F \in U^\perp \text{ ed è continua,} \\ F(gxg^{-1}) = F(x) \quad \forall x, g \in \mathbf{G}, \\ F(x) = F^*(x) = \overline{F(x^{-1})}, \\ F(e) = 1. \end{cases}$$

Poniamo  $\kappa(x, y) = F(x^{-1}y)$ . Abbiamo (ricordiamo che la misura di Haar è stata normalizzata, in modo che  $\int_{\mathbf{G}} dx = 1$ ):

$$\kappa(y, x) = \overline{\kappa(x, y)} \quad \text{e} \quad \iint_{\mathbf{G} \times \mathbf{G}} |\kappa(x, y)|^2 dx dy = \int_{\mathbf{G}} |F(x)|^2 dx < +\infty.$$

Quindi l'operatore

$$T\phi(x) = \int_{\mathbf{G}} \kappa(x, y)\phi(y) dy$$

è un operatore di Hilbert-Schmidt<sup>1</sup>  $T : L^2(\mathbf{G}) \rightarrow L^2(\mathbf{G})$ . Osserviamo che  $T$  non è nullo perché  $F \neq 0$ . Questo operatore ha dunque un autovalore reale non nullo  $\lambda$  ed il corrispondente autospazio  $V_\lambda = \{\phi \in L^2(\mathbf{G}) \mid T(\phi) = \lambda\phi\}$  ha dimensione finita (la somma dei quadrati degli autovalori di  $T$ , ripetuti con la loro molteplicità, è uguale a  $\int_{\mathbf{G}} |F(x)|^2 dx < +\infty$ ).

Il sottospazio  $V_\lambda$  è invariante rispetto alla rappresentazione regolare a sinistra  $L_{g^{-1}}^*$ , che è una rappresentazione unitaria di  $\mathbf{G}$ ; infatti  $T$  commuta con  $L_{g^{-1}}^*$  per ogni  $g \in \mathbf{G}$ :

$$\begin{aligned} T(L_{g^{-1}}^*\phi)(x) &= \int_{\mathbf{G}} F(x^{-1}y)\phi(g^{-1}y) dy \\ &= \int_{\mathbf{G}} F(x^{-1}gy)\phi(y) dy \\ &= \int_{\mathbf{G}} F(x^{-1}gy)\phi(y) dy \\ &= (T\phi)(g^{-1}x) = L_{g^{-1}}^*(T\phi)(x). \end{aligned}$$

Poiché ha dimensione finita,  $V_\lambda$  contiene un sottospazio invariante irriducibile  $W_\lambda$ . Sia  $\phi_1, \dots, \phi_n$  una base ortonormale di  $W_\lambda$ . I suoi coefficienti matriciali sono:

$$\psi_{ij}(x) = (L_{x^{-1}}^*\phi_i | \phi_j)_{L^2(\mathbf{G})} = \int_{\mathbf{G}} \phi_j(x^{-1}y)\phi_i(y) dy$$

e per definizione stanno in  $U$ . Quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbf{G}} F(x)\overline{\psi_{ii}(x)} dx \\ &= \iint_{\mathbf{G} \times \mathbf{G}} F(x)\overline{\phi_i(x^{-1}y)}\phi_i(y) dy dx \\ &= \iint_{\mathbf{G} \times \mathbf{G}} F(x)\overline{\phi_i(x^{-1}y)}\phi_i(y) dx dy \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Sia  $H$  uno spazio di Hilbert. Se  $A : H \rightarrow H$  è un'applicazione lineare di rango finito, possiamo definire la traccia di  $A$  mediante  $\text{traccia}(A) = \sum_{i=1}^{\ell} (A(e_i) | e_i)$  per una qualsiasi base ortonormale  $e_1, \dots, e_\ell$  di  $A(H)$  (il valore  $\text{traccia}(A)$  non dipende dalla scelta della base). Se  $A$  ha rango finito, anche la sua aggiunta  $A^*$  ha rango finito, la composizione  $A^*A$  ha rango finito e  $\|A\|_{HS(H)} = (\text{traccia}(A^*A))^{1/2}$  è una norma sullo spazio vettoriale  $\mathcal{F}$  degli endomorfismi lineari di rango finito di  $H$ . Si chiamano *operatori di Hilbert Schmidt* su  $H$  gli endomorfismi lineari di  $H$  che appartengono alla chiusura di  $\mathcal{F}$  nello spazio degli endomorfismi rispetto alla norma  $\|\cdot\|_{HS(H)}$ .

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\mathbf{G} \times \mathbf{G}} F(yx^{-1}) \overline{\phi_i(x)} \phi_i(y) dx dy \\
&= \int_{\mathbf{G}} \left[ \int_{\mathbf{G}} F(x^{-1}y) \phi_i(y) dy \right] \overline{\phi_i(x)} dx \\
&= \int_{\mathbf{G}} (T\phi_i)(x) \overline{\phi_i(x)} dx \\
&= \lambda \int_{\mathbf{G}} |\phi_i(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

e questo contraddice il fatto che  $\lambda \neq 0$  e  $W_\lambda \neq \{0\}$ .

Questo mostra che  $U^\perp = \{0\}$  e quindi  $U = L^2(\mathbf{G})$ .

Abbiamo chiaramente (A)  $\Leftrightarrow$  (B). (C) è conseguenza di (D). Dimostriamo quindi che vale (D).

Sia  $\Phi$  una rappresentazione unitaria di  $\mathbf{G}$  su uno spazio di Hilbert  $V$ . Per il Lemma di Zorn, possiamo trovare una famiglia massimale di sottospazi invarianti di dimensione finita, due a due ortogonali, di  $V$ . Sia  $U$  la chiusura della loro somma. Allora  $U^\perp$  è un sottospazio invariante chiuso. Per dimostrare che  $U = V$ , basterà dimostrare per contraddizione che se  $U \neq V$ , allora  $U^\perp$  contiene un sottospazio invariante di dimensione finita.

Sia  $v$  un vettore non nullo di  $U^\perp$ . Per ogni intorno aperto  $\omega$  di  $e$  in  $\mathbf{G}$  possiamo considerare

$$v_\omega = \frac{1}{|\omega|} \Phi(\chi_\omega)v = \frac{1}{|\omega|} \int_\omega \Phi(x)(v) dx.$$

Tutti i  $v_\omega$  appartengono ad  $U^\perp$ , e poiché  $v$  appartiene alla chiusura di  $\{v_\omega\}$ , esiste un intorno aperto  $\omega$  di  $e$  in  $\mathbf{G}$  per cui  $v_\omega \neq 0$ .

Se  $h$  è una combinazione lineare di coefficienti matriciali di rappresentazioni irriducibili di grado finito di  $\mathbf{G}$ , allora appartiene ad un sottospazio di dimensione finita  $W$ , invariante per la rappresentazione regolare sinistra, di  $L^2(\mathbf{G})$ . Sia  $h_1, \dots, h_n$  una base di un tale sottospazio  $W \subset L^2(\mathbf{G})$ . Se  $g$  è un qualsiasi elemento di  $\mathbf{G}$ , abbiamo  $L_{g^{-1}}^* h = \sum_{i=1}^n c_i h_i$  per opportuni  $c_i \in \mathbb{C}$ . Allora:

$$\begin{aligned}
\Phi(g)\Phi(h)v &= \Phi(g) \int_{\mathbf{G}} h(x)\Phi(x)(v) dx \\
&= \int_{\mathbf{G}} h(x)\Phi(gx)(v) dx \\
&= \int_{\mathbf{G}} h(g^{-1}x)\Phi(x)(v) dx \\
&= \sum_{i=1}^n c_i \int_{\mathbf{G}} h_i(x)\Phi(x)(v) dx,
\end{aligned}$$

e quindi il sottospazio di dimensione finita  $\sum_{i=1}^n \mathbb{C} \Phi(h_i)(v)$  è un sottospazio  $\Phi(\mathbf{G})$ -invariante. Se quindi possiamo dimostrare che  $\Phi(h)(v) \neq 0$  per qualche combinazione lineare  $h$  di coefficienti matriciali, troveremo una contraddizione, che dimostrerà il punto (D).

Per (A), possiamo trovare una combinazione lineare  $h$  di coefficienti matriciali tale che

$$\|\chi_\omega - h\|_{L^1(\mathbf{G})} \leq \|\chi_\omega - h\|_{L^2(\mathbf{G})} \leq \frac{1}{2\|v\|_V} \|\Phi(\chi_\omega)(v)\|_V.$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} \|\Phi(\chi_\omega)(v) - \Phi(h)(v)\|_V &\leq \|\Phi(\chi_\omega - h)(v)\|_V \leq \|\chi_\omega - h\|_{L^1(\mathbf{G})} \|v\|_V \\ &\leq \|\chi_\omega - h\|_{L^2(\mathbf{G})} \|v\|_V \leq \frac{1}{2} \|\Phi(\chi_\omega)(v)\|_V \end{aligned}$$

e quindi

$$\|\Phi(h)(v)\|_V \geq \|\Phi(\chi_\omega)(v)\|_V - \|\Phi(\chi_\omega)(v) - \Phi(h)(v)\|_V \geq \frac{1}{2} \|\Phi(\chi_\omega)(v)\|_V > 0.$$

Questo dimostra (D) e quindi anche (C).

Dimostriamo infine il punto (E).

Per le proprietà dei caratteri, posto, per ogni rappresentazione unitaria di grado finito  $\tau$ ,

$$E_\tau = n_\tau \Phi(\bar{\chi}_\tau),$$

abbiamo:

$$\begin{cases} E_\tau^* = n_\tau \Phi(\check{\chi}_\tau) = n_\tau \Phi(\bar{\chi}_\tau) = E_\tau \\ E_\tau E_{\tau'} = n_\tau n_{\tau'} \Phi(\bar{\chi}_\tau * \bar{\chi}_{\tau'}) = 0 \quad \text{se } \tau \text{ e } \tau' \text{ non sono equivalenti} \\ E_\tau^2 = n_\tau^2 \Phi(\bar{\chi}_\tau * \bar{\chi}_\tau) = n_\tau \Phi(\bar{\chi}_\tau) = E_\tau. \end{cases}$$

Quindi le  $E_\tau$  sono delle proiezioni ortogonali e due di queste proiezioni che corrispondano a rappresentazioni unitarie irriducibili di grado finito non equivalenti commutano.

Sia  $U$  un sottospazio irriducibile di  $V$  per cui  $\Phi|_U$  sia equivalente a  $\tau$ . Sia  $u_1, \dots, u_n$  una base ortonormale di  $U$  e consideriamo i coefficienti matriciali

$$\phi_{i,j}(x) = (\Phi(x)u_i|u_j), \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq n.$$

Allora

$$\chi_\tau(x) = \sum_{i=1}^n \phi_{i,i}(x) \quad \text{e} \quad \Phi(x)(u_j) = \sum_{i=1}^n \phi_{i,j}(x)(u_i).$$

Per le relazioni di ortogonalità di Schur otteniamo:

$$\begin{aligned} E_\tau(u_j) &= n_\tau \int_{\mathbf{G}} \overline{\chi_\tau(x)} \Phi(x)(u_j) dx \\ &= n_\tau \int_{\mathbf{G}} \sum_{i,k} \overline{\phi_{k,k}(x)} \phi_{i,j}(x)(u_i) dx \\ &= u_j. \end{aligned}$$

Se  $u$  è un vettore di un sottospazio irriducibile di tipo  $\tau'$  non equivalente a  $\tau$ , allora  $E_\tau(u) = E_\tau \circ E_{\tau'}(u) = 0$ . Considerando una decomposizione di  $V$  in una somma diretta di sottospazi  $\Phi(\mathbf{G})$ -invarianti irriducibili, si verifica infine facilmente che  $E_\tau$  è proprio la proiezione sulla somma diretta di quei sottospazi della decomposizione che sono di tipo  $\tau$ .

La dimostrazione è completa.  $\square$

### 13.3. Applicazioni del Teorema di Peter-Weyl

Ricordiamo che la *norma di Hilbert-Schmidt* di un operatore  $T : V \rightarrow V$  definito su uno spazio di Hilbert  $V$  è definita da

$$\|T\|_{HS(V)} = \sum_i \|T(e_i)\|_V^2,$$

dove  $\{e_i\}$  è una qualsiasi base ortonormale di  $V$ . Come conseguenza della parte (B) nell'enunciato del teorema di Peter-Weyl, otteniamo il

**Teorema 13.3.1** (formula di Parseval-Plancherel). *Se  $f \in L^2(\mathbf{G})$ , allora*

$$(13.3.1) \quad \|f\|_{L^2(\mathbf{G})}^2 = \int_{\mathbf{G}} |f(x)|^2 dx = \sum_{\Phi} n_{\Phi} \|\Phi(f)\|_{HS(V^{(\Phi)})}^2,$$

ove la sommatoria è estesa a tutte le classi di equivalenza di rappresentazioni unitarie irriducibili  $\Phi$ , ed  $n_{\Phi}$  è il grado di  $\Phi$ , cioè la dimensione dello spazio di Hilbert di dimensione finita  $V^{(\Phi)}$ .

Abbiamo ancora, per la rappresentazione regolare a sinistra:

**Teorema 13.3.2.** *Sia  $\tau$  una rappresentazione unitaria irriducibile del gruppo compatto  $\mathbf{G}$ . Allora ogni decomposizione di  $L^2(\mathbf{G})$  in sottospazi irriducibili per la rappresentazione regolare sinistra di  $\mathbf{G}$  contiene esattamente  $n_{\tau}$  sottospazi di tipo  $\tau$ , ciascuno di dimensione  $n_{\tau}$ . La somma diretta dei sottospazi di tipo  $\tau$  di  $L^2(\mathbf{G})$  è un sottospazio  $L^*(\mathbf{G})$ -invariante di dimensione  $n_{\tau}^2$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia infatti  $V^{\tau}$  lo spazio della rappresentazione  $\tau$ . Fissiamo una base ortonormale  $u_1, \dots, u_{n_{\tau}}$  di  $V^{\tau}$ . Allora i coefficienti matriciali

$$(\tau(x)(u_i)|u_j) \quad 1 \leq i, j \leq n_{\tau}$$

formano una base di un sottospazio  $L^*(\mathbf{G})$ -invariante di  $L^2(\mathbf{G})$ , che generano l'immagine della proiezione  $E_{\tau}$  per le relazioni di ortogonalità di Schur.  $\square$

**Corollario 13.3.3.** *Sia  $\Phi$  una qualsiasi rappresentazione unitaria del gruppo compatto  $\mathbf{G}$ . Sia  $\tau$  una rappresentazione unitaria irriducibile di  $\mathbf{G}$ . Allora il numero di sottospazi irriducibili di tipo  $\tau$  in una decomposizione di  $V^{\Phi}$  in somma diretta di sottospazi  $\Phi(\mathbf{G})$ -invarianti irriducibili è indipendente dalla scelta della decomposizione.*

**Definizione 13.3.4.** Esso si indica con  $[\Phi : \tau]$  e si dice la *molteplicità* di  $\tau$  in  $\Phi$ .

**Definizione 13.3.5.** Se  $\Phi$  e  $\tau$  sono due rappresentazioni lineari dello stesso gruppo  $\mathbf{G}$ , indichiamo con  $\text{Hom}_{\mathbf{G}}(V^{\Phi}, V^{\tau})$  lo spazio vettoriale di tutte le applicazioni lineari  $T : V^{\Phi} \rightarrow V^{\tau}$  tali che  $\tau(g) \circ T = T \circ \Phi(g)$  per ogni  $g \in \mathbf{G}$ .

**Lemma 13.3.6.** *Siano  $\Phi$  e  $\tau$  due rappresentazioni unitarie dello stesso gruppo compatto  $\mathbf{G}$  e supponiamo che  $\tau$  sia irriducibile. Allora*

$$(13.3.2) \quad [\Phi : \tau] = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbf{G}}(V^{\Phi}, V^{\tau}) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbf{G}}(V^{\tau}, V^{\Phi}).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per il Lemma di Schur ed il teorema di Peter-Weyl, ogni applicazione in  $\text{Hom}_{\mathbf{G}}(V^{\Phi}, V^{\tau})$  si annulla sul sottospazio  $(E_{\tau}(V^{\Phi}))^{\perp}$ . Decomponiamo il sottospazio  $E_{\tau}(V^{\Phi})$  nella somma diretta di sottospazi irriducibili  $V^{(\alpha)}$ . Ciascuno di essi è equivalente a  $V^{\tau}$  (punto (E) del Teorema di Peter-Weyl). Utilizzando il Lemma di Schur, otteniamo che, per ogni  $\alpha$ , lo spazio  $\text{Hom}_{\mathbf{G}}(V^{(\alpha)}, V^{\tau})$  ha dimensione 1 (uguale alla dimensione di  $\text{Hom}_{\mathbf{G}}(V^{\tau}, V^{\tau})$ ). Da questa osservazione segue che  $[\Phi : \tau] = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbf{G}}(V^{\Phi}, V^{\tau})$ . L'ultima uguaglianza segue dal fatto che gli elementi di  $\text{Hom}_{\mathbf{G}}(V^{\tau}, V^{\Phi})$  sono gli aggiunti di quelli di  $\text{Hom}_{\mathbf{G}}(V^{\Phi}, V^{\tau})$  e quindi i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione.  $\square$

Sia  $\mathbf{H}$  un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{G}$  e sia  $\sigma$  una rappresentazione unitaria di  $\mathbf{H}$  su uno spazio di Hilbert  $W^{\sigma}$ .

**Definizione 13.3.7.** Chiamiamo *rappresentazione indotta* la rappresentazione

$$\Phi = \text{ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\sigma)$$

che opera sul completamento  $V^{\Phi}$  in  $L^2(\mathbf{G}, W^{\sigma})$  dello spazio delle funzioni  $f : \mathbf{G} \rightarrow W^{\sigma}$  continue, tali che  $f(xh) = \sigma(h)^{-1}(f(x))$  per ogni  $x \in \mathbf{G}$  ed ogni  $h \in \mathbf{H}$ , mediante la formula <sup>2</sup>

$$(13.3.3) \quad \Phi(g)(f(x)) = f(g^{-1}x) \quad \forall x, g \in \mathbf{G}.$$

**Teorema 13.3.8** (Teorema di reciprocità di Frobenius). *Sia  $\mathbf{H}$  un sottogruppo chiuso di un gruppo compatto  $\mathbf{G}$  e  $\sigma$  una rappresentazione unitaria irriducibile di  $\mathbf{H}$  su uno spazio di Hilbert  $W^{\sigma}$ . Sia  $\tau$  una rappresentazione unitaria irriducibile di  $\mathbf{G}$  su uno spazio di Hilbert  $V^{\tau}$  e sia  $\Phi = \text{ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\sigma)$ , che agisce sullo spazio di Hilbert  $V^{\Phi}$ . Allora:*

$$(13.3.4) \quad [\text{ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\sigma) : \tau] = [\tau|_{\mathbf{H}} : \sigma].$$

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che  $V^{\Phi}$  è contenuto in  $L^2(\mathbf{G}, W^{\sigma})$ , e quest'ultimo spazio è la somma diretta di  $n_{\sigma}$  copie di  $L^2(\mathbf{G}) = L^2(\mathbf{G}, \mathbb{C})$ . Perciò  $\tau$  ha molteplicità  $n_{\sigma}n_{\tau}$  in  $L^2(\mathbf{G}, W^{\sigma})$ , e quindi al più  $n_{\sigma}n_{\tau}$  in  $V^{\Phi}$ . Per il lemma di Schur, l'immagine di ogni elemento di  $\text{Hom}_{\mathbf{G}}(V^{\tau}, V^{\Phi})$  è formata da funzioni continue. In particolare, ha senso considerare il valore in  $e \in \mathbf{G}$  di una funzione nell'immagine di un elemento di  $\text{Hom}_{\mathbf{G}}(V^{\tau}, V^{\Phi})$ . Poniamo  $\varepsilon_e(f) = f(e)$ .

Per ogni  $v \in V^{\tau}$ ,  $A \in \text{Hom}_{\mathbf{G}}(V^{\tau}, V^{\Phi})$ ,  $h \in \mathbf{H}$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} \sigma(h)(\varepsilon_e(A(v))) &= \sigma(h)[(A(v))(e)] = (A(v))(h^{-1}) \\ &= (\Phi(h)(A(v)))(e) = (A(\tau(h)(v)))(e) = \varepsilon_e(A(\tau(h)(v))). \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Osserviamo che, se  $\mathbf{H} = \mathbf{G}$ , allora la relazione  $f(xy) = \sigma(y^{-1})(f(x))$  per ogni  $x, y \in \mathbf{G}$  implica che  $f(x) = \sigma(x^{-1})(f(e))$  per ogni  $x \in \mathbf{G}$ . Otteniamo in questo modo un isomorfismo lineare

$$W^{\sigma} \ni w \rightarrow \{x \rightarrow f_w(x) = \sigma(x^{-1})(w)\} \in V^{\Phi}$$

che è un'equivalenza di rappresentazioni unitarie. Abbiamo infatti

$$f_{\sigma(g)(w)}(x) = \sigma(x^{-1})(\sigma(g)(w)) = \sigma(x^{-1}g)(w) = f_w(g^{-1}x) = \Phi(g)(f_w)(x).$$

Quindi:  $\text{ind}_{\mathbf{G}}^{\mathbf{G}}(\sigma)$  è equivalente a  $\sigma$  per ogni rappresentazione unitaria  $\sigma$  di  $\mathbf{G}$ .

Quindi  $\varepsilon_e(A) \in \text{Hom}_{\mathbf{H}}(V^\tau, W^\sigma)$  ed otteniamo così un'applicazione lineare

$$\varepsilon_e : \text{Hom}_{\mathbf{G}}(V^\tau, V^\Phi) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{H}}(V^\tau, W^\sigma).$$

Per dimostrare il Teorema, utilizzando il Lemma precedente, basterà dimostrare che quest'applicazione è un isomorfismo.

Dimostriamo che  $\varepsilon_e$  è iniettiva. Sia  $A \in \text{Hom}_{\mathbf{G}}(V^\tau, V^\Phi)$  e supponiamo che risulti  $A(v)(e) = 0$  per ogni  $v \in V^\tau$ . Posto  $v = \tau(x^{-1})(v')$  per un qualsiasi  $v' \in V^\tau$  e  $x \in \mathbf{G}$ , abbiamo:

$$0 = (A(v))(e) = (A(\tau(x^{-1})(v')))(e) = (\Phi(x^{-1})(A(v')))(e) = (A(v'))(x).$$

Questo dimostra che  $A(v') = 0$  e quindi, per l'arbitrarietà di  $v'$ , che  $A = 0$ .

Rimane da dimostrare che  $\varepsilon_e$  è surgettiva. Fissiamo  $B \in \text{Hom}_{\mathbf{H}}(V^\tau, W^\sigma)$ . Definiamo allora

$$(A(v))(x) = B(\tau(x^{-1})(v)) \quad \forall v \in V^\tau, \forall x \in \mathbf{G}.$$

Poiché per ogni  $x \in \mathbf{G}$  ed  $h \in \mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned} (A(v))(xh) &= B(\tau(h^{-1}) \circ \tau(x^{-1})(v)) = \sigma(h^{-1})(B(\tau(x^{-1})(v))) \\ &= \sigma(h^{-1})((A(v))(x)), \end{aligned}$$

abbiamo  $A(v) \in V^\Phi$ . In effetti  $A \in \text{Hom}_{\mathbf{G}}(V^\tau, V^\Phi)$  perché

$$(\Phi(x_0)(A(v)))(x) = (A(v))(x_0^{-1}x) = B(\tau(x_0^{-1})(\tau(x_0)(v))) = A(\tau(x_0)(v))(x),$$

da cui  $\Phi(x_0) \circ A = A \circ \tau(x_0)$ . Infine,  $\varepsilon_e(A) = B$  perché

$$A(v)(e) = B(\tau(e)(v)) = B(v).$$

Questo dimostra che  $\varepsilon_e$  è surgettiva e completa quindi la dimostrazione del teorema.  $\square$

### 13.4. Gruppi di Lie compatti

I gruppi di Lie compatti sono lineari. Abbiamo infatti:

**Teorema 13.4.1.** *Un gruppo di Lie compatto  $\mathbf{G}$  ammette una rappresentazione unitaria fedele di grado finito  $\Phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per il punto (A) del Teorema di Peter-Weyl, per ogni  $x \in \mathbf{G} \setminus \{e\}$ , esiste una rappresentazione unitaria irriducibile  $\tau_x$  tale che  $\tau_x(x) \neq I_{V_x}$ . Fissiamo  $x_1 \neq e$  in  $\mathbf{G}$  e consideriamo il sottogruppo  $\mathbf{G}_1 = \ker \tau_{x_1}$ : esso è un sottogruppo di Lie di  $\mathbf{G}$  di dimensione strettamente minore di quella di  $\mathbf{G}$ . Se  $\mathbf{G}_1$  ha dimensione positiva, scegliamo  $x_2 \in (\mathbf{G}_1)_e \setminus \{e\}$  e consideriamo la rappresentazione unitaria  $\tau_{x_1} \oplus \tau_{x_2}$ . Il suo nucleo è un sottogruppo di Lie di dimensione minore di quella di  $\mathbf{G}_1$ . Procedendo per ricorrenza, otteniamo una rappresentazione unitaria  $\Phi_0 : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}(n_0, \mathbb{C})$  il cui nucleo ha dimensione zero. Poiché  $\mathbf{G}$  è compatto,  $\ker \Phi_0$  è finito. La

$$\Phi_0 \oplus \bigoplus_{x \in \ker \Phi_0} \tau_x$$

è allora la rappresentazione unitaria cercata.  $\square$



## Sistemi di radici delle algebre di Lie semisemplici

### 14.1. Potenze tensoriali, simmetriche e alternate di una rappresentazione

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  su un campo  $\mathbb{k}$ . Indichiamo con  $T(V)$  la sua algebra tensoriale e con  $T^m(V)$  il sottospazio vettoriale di  $T(V)$  formato dai tensori omogenei di grado  $m$ : abbiamo la decomposizione  $T(V) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} T^m(V)$ . Sia  $\mathcal{I}$  l'ideale bilatero di  $T(V)$  generato dai tensori della forma  $v \otimes w - w \otimes v$  al variare di  $v, w$  in  $V$ .  $\mathcal{I}$  è un ideale omogeneo e quindi l'algebra quoziente  $S(V) = T(V)/\mathcal{I}$  è un'algebra graduata:

$$(14.1.1) \quad S(V) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} S^m(V).$$

**Definizione 14.1.1.** L'algebra  $S(V)$  si dice *algebra simmetrica* di  $V$ ; gli elementi di  $S^m(V)$  si dicono *tensori simmetrici* omogenei di grado  $m$ .

**Definizione 14.1.2.** Sia  $\mathcal{J}$  l'ideale bilatero di  $T(V)$  generato dai tensori della forma  $v \otimes v$ , al variare di  $v$  in  $V$ . Esso è un ideale graduato di  $T(V)$  e quindi l'algebra esterna  $\Lambda(V) = T(V)/\mathcal{J}$  di  $V$ , è un'algebra graduata:

$$(14.1.2) \quad \Lambda(V) = \bigoplus_{m=0}^n \Lambda^m(V).$$

Essa è un'algebra di dimensione finita  $2^n$ .

Osserviamo che, in modo naturale,

$$T^0(V) \simeq S^0(V) \simeq \Lambda^0(V) \simeq \mathbb{k} \quad \text{e}$$

$$T^1(V) \simeq S^1(V) \simeq \Lambda^1(V) \simeq V.$$

Abbiamo:

**Lemma 14.1.3.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$  e  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una sua rappresentazione lineare di dimensione finita. Allora esiste un'unica rappresentazione lineare  $T(\rho)$  di  $\mathfrak{g}$  su  $T(V)$  che goda delle seguenti proprietà:

- (i)  $T(\rho)(X) \in \text{Der}_{\mathbb{k}}(T(V)) \quad \forall X \in \mathfrak{g},$
- (ii)  $T(\rho)(X)(k) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall k \in \mathbb{k} \simeq T^0(V),$
- (iii)  $T(\rho)(X)(v) = \rho(X)(v) \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall v \in V \simeq T^1(V).$

Abbiamo inoltre:

$$(14.1.3) \quad T(\rho)(\mathfrak{g})(T^m(V)) \subset T^m(V) \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

$$(14.1.4) \quad T(\rho)(\mathfrak{g})(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}, \quad T(\rho)(\mathfrak{g})(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}.$$

In particolare, per ogni  $m \in \mathbb{N}$  la  $\rho$  induce rappresentazioni lineari di dimensione finita

$$(14.1.5) \quad T^m(\rho) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(T^m(V)),$$

$$(14.1.6) \quad S^m(\rho) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(S^m(V)),$$

$$(14.1.7) \quad \Lambda^m(\rho) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\Lambda^m(V)).$$

**Esempio 14.1.4.** Se scegliamo una base  $e_1, \dots, e_n$  di  $V$ , vi è un unico isomorfismo naturale dell'algebra  $S(V)$  con l'algebra  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  dei polinomi in  $n$  indeterminate, che fa corrispondere agli elementi della base i monomi  $x_1, \dots, x_n$  rispettivamente.

### 14.2. Rappresentazioni lineari di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$

Sia  $\mathbb{k}$  un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0. Consideriamo l'algebra di Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$  delle matrici  $2 \times 2$  a coefficienti in  $\mathbb{k}$  con traccia nulla. Consideriamo la base standard di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ :

$$(14.2.1) \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le regole di commutazione si esprimono nella base standard mediante:

$$(14.2.2) \quad [X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y.$$

Abbiamo quindi, nella base standard:

$$\text{ad}_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{ad}_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})}(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{ad}_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})}(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi la forma di Killing ha, come matrice associata nella base  $X, Y, H$  la

$$(14.2.3) \quad [\mathcal{K}_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})}] = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Per il criterio di Cartan  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$  è semisemplice ed è ovviamente semplice perché ha dimensione 3.

**14.2.1. Pesi e vettori massimali di una rappresentazione.** Sia  $V$  un  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ -modulo di dimensione finita. La  $H$  definisce un elemento semisemplice di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  e quindi, avendo supposto  $\mathbb{k}$  algebricamente chiuso,  $V$  si decompone in somma diretta

$$(14.2.4) \quad V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{k}} V_{\lambda}, \quad \text{con } V_{\lambda} = \{v \in V \mid H \cdot v = \lambda v\}.$$

**Definizione 14.2.1.** I  $\lambda \in \mathbb{k}$  per cui  $V_\lambda \neq \{0\}$  si dicono *pesi* della rappresentazione  $V$  e il  $V_\lambda$  corrispondente *spazio di peso* o *autospazio* di  $V$  corrispondente a  $\lambda$ . La dimensione di  $V_\lambda$  si dice la *molteplicità* del peso  $\lambda$  della rappresentazione  $V$ .

Dalle formule di commutazione (14.2.2), otteniamo:

$$(14.2.5) \quad \begin{cases} H \cdot (X \cdot v) = X \cdot (H \cdot v) + [H, X] \cdot v = X \cdot (H \cdot v) + 2X \cdot v, \\ H \cdot (Y \cdot v) = Y \cdot (H \cdot v) + [H, Y] \cdot v = Y \cdot (H \cdot v) - 2Y \cdot v, \\ \forall v \in V. \end{cases}$$

Vale perciò:

**Lemma 14.2.2.** *Sia  $V$  un  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ -modulo di dimensione finita. Allora*

$$(14.2.6) \quad X \cdot V_\lambda \subset V_{\lambda+2}, \quad Y \cdot V_\lambda \subset V_{\lambda-2}.$$

**Definizione 14.2.3.** In particolare, se  $V \neq \{0\}$ , vi è un  $\lambda \in \mathbb{k}$  tale che  $V_\lambda \neq \{0\}$  e  $V_{\lambda+2} = \{0\}$ . Un tale  $\lambda$  si dice *peso massimale* della rappresentazione  $V$  e ogni  $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$  un *vettore massimale* di  $V$ .

**14.2.2. Classificazione delle rappresentazioni irriducibili di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ .** Sia  $V$  (con  $0 < \dim_{\mathbb{k}} V < \infty$ ) un  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ -modulo irriducibile,  $\lambda$  un peso massimale e  $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$  un vettore massimale. Definiamo:

$$(14.2.7) \quad \begin{cases} w_{-1} = 0, \\ w_0 = v, \\ w_j = \frac{1}{j} Y \cdot w_{j-1} = \frac{1}{j!} Y^j \cdot v \quad \text{per } j \geq 1. \end{cases}$$

**Lemma 14.2.4.** *Con le ipotesi e le notazioni introdotte sopra abbiamo:*

$$\begin{aligned} (i) \quad & H \cdot w_j = (\lambda - 2j)w_j, \\ (ii) \quad & X \cdot w_i = (\lambda - j + 1)w_{j-1}, \\ (iii) \quad & Y \cdot w_i = (j + 1)w_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

**DIMOSTRAZIONE.** (iii) segue dalla definizione ed (i) dal Lemma 14.2.2. Dimostriamo la (ii) per induzione. Essa è vera per  $j = 0$ . Supponiamo  $i \geq 0$  e la (ii) valida per  $0 \leq j \leq i$ . Allora

$$\begin{aligned} (i+1)X \cdot w_{i+1} &= X \cdot Y \cdot w_i \\ &= Hw_i + Y \cdot X \cdot w_i \\ &= (\lambda - 2i)w_i + (\lambda - i + 1)Y \cdot w_{i-1} \\ &= ((i+1)\lambda - 2i - i^2 + i)w_i \\ &= (i+1)(\lambda - i)w_i. \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione.  $\square$

Poiché  $V$  ha dimensione finita, vi è un più piccolo intero non negativo  $m$  tale che  $w_m \neq 0$  e  $w_j = 0$  per  $j > m$ . Il sottospazio  $W$  generato da  $w_0, w_1, \dots, w_m$  è un sotto- $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ -modulo di  $V$  e quindi coincide con  $V$  perché  $V$  è irriducibile. Esso ha

dimensione  $(m + 1)$  in quanto i  $w_j$ , essendo autovettori corrispondenti a differenti autovalori di  $H$ , sono linearmente indipendenti. Dalla (ii) otteniamo, per  $j = m + 1$ :

$$0 = X \cdot w_{m+1} = (\lambda - m)w_m,$$

e quindi  $\lambda = m$  perché  $w_m \neq 0$ . Quindi il peso massimale  $\lambda$  è un intero non negativo  $m$  e gli autovalori di  $H$  sono:

$$\{m - 2j \mid 0 \leq j \leq m\}.$$

Otteniamo quindi:

**Teorema 14.2.5.** *Le rappresentazioni irriducibili di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$  di dimensione positiva sono isomorfe alle rappresentazioni  $S^m(\mathbb{k}^2)$ : in particolare ogni rappresentazione irriducibile di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$  è completamente determinata, a meno di equivalenza, dalla sua dimensione e per ogni intero  $m \geq 0$  vi è, a meno di equivalenza, una e una sola rappresentazione irriducibile di dimensione  $m$ .*  $\square$

### 14.2.3. Rappresentazioni di dimensione finita di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ .

**Teorema 14.2.6.** *Sia  $V$  un  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ -modulo di dimensione finita. Allora i pesi di  $V$  formano un sottoinsieme di  $\mathbb{Z}$ , simmetrico rispetto a 0.  $V$  si decompone nella somma diretta di  $\dim_{\mathbb{k}} V_0 + \dim_{\mathbb{k}} V_1$  sotto- $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ -moduli irriducibili.*

**Esempio 14.2.7.** Consideriamo  $T^2(\mathbb{k}^2)$ . Scelta la base canonica  $\{e_i \otimes e_j \mid 1 \leq i, j \leq 2\}$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} T^2(H)(e_1 \otimes e_1) &= 2e_1 \otimes e_1, \\ T^2(H)(e_1 \otimes e_2) &= 0, \\ T^2(H)(e_2 \otimes e_1) &= 0, \\ T^2(H)(e_2 \otimes e_2) &= -2e_2 \otimes e_2; \end{aligned}$$

e quindi otteniamo  $T^2(\mathbb{k}^2) \simeq S^0(\mathbb{k}^2) \oplus S^2(\mathbb{k}^2)$ .

**Esempio 14.2.8.**  $S^2(\mathbb{k}^2) \otimes S^2(\mathbb{k}^2) \simeq S^0(\mathbb{k}^2) \oplus S^2(\mathbb{k}^2) \oplus S^4(\mathbb{k}^2)$ .

I pesi dell' $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ -modulo  $S^2(\mathbb{k}^2) \otimes S^2(\mathbb{k}^2)$  sono le somme di tutte le coppie dei pesi della rappresentazione  $S^2(\mathbb{k}^2)$ : otteniamo quindi  $\pm 4$  con molteplicità 1,  $\pm 2$  con molteplicità 2, 0 con molteplicità 3: avremo quindi una decomposizione nella somma diretta dei tre moduli irriducibili di pesi massimali rispettivamente 4, 2 e 0.

**Esempio 14.2.9.**  $\Lambda^2(S^5(\mathbb{k}^2)) \simeq S^0(\mathbb{k}^2) \oplus S^4(\mathbb{k}^2) \oplus S^8(\mathbb{k}^2)$ .

I pesi del  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ -modulo  $\Lambda^2(S^5(\mathbb{k}^2))$  sono le somme di tutte le coppie di pesi distinti di  $S^5(\mathbb{k}^2)$ : otteniamo quindi  $\pm 8$  con molteplicità 1,  $\pm 4$  e  $\pm 2$  con molteplicità 2 e 0 con molteplicità 3. Quindi  $\Lambda^2(S^5(\mathbb{k}^2))$  si decompone nella somma diretta di tre moduli irriducibili, di pesi massimali rispettivamente 0, 4 e 8.

## 14.3. Sottoalgebre torali

In questo paragrafo  $\mathfrak{g}$  indica un'algebra di Lie semisemplice, di dimensione positiva finita su un campo algebricamente chiuso  $\mathbb{k}$  di caratteristica 0. Sia  $\mathcal{S}$  l'insieme degli elementi semisemplici di  $\mathfrak{g}$ . Osserviamo che, per il teorema di Engel,  $\mathcal{S}$  contiene elementi non nulli.

**Definizione 14.3.1.** Chiamiamo *torale* una qualsiasi sottoalgebra di  $\mathfrak{g}$  contenuta in  $\mathcal{S}$ .

**Lemma 14.3.2.** Ogni sottoalgebra torale di  $\mathfrak{g}$  è abeliana.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathfrak{a} \subset \mathcal{S}$  una sottoalgebra torale di  $\mathfrak{g}$ . Se  $\mathfrak{a}$  non fosse abeliana, vi sarebbe un  $X \in \mathfrak{a}$  tale che  $[X, \mathfrak{a}] \neq \{0\}$ . Quindi  $\text{ad}_{\mathfrak{a}}(X)$  dovrebbe avere un autovalore  $\lambda \neq 0$  e vi sarebbe perciò  $Y \in \mathfrak{a}$  tale che  $[X, Y] = \lambda Y \neq 0$ . Poiché  $\text{ad}_{\mathfrak{a}}(Y)$  è semisemplice, ed  $Y$  è un autovettore di  $\text{ad}_{\mathfrak{a}}(Y)$  corrispondente all'autovalore 0, possiamo trovare una base  $X_1, \dots, X_{\ell}$  di  $\mathfrak{a}$  formata da autovettori di  $\text{ad}_{\mathfrak{a}}(Y)$  con  $X_1 = Y$ . Sia  $[Y, X_i] = \lambda_i X_i$ . Esprimiamo  $X$  come combinazione lineare di elementi della base  $\{X_i\}$ : da  $X = \sum_{i=1}^{\ell} \xi^i X_i$  ricaviamo:

$$0 \neq -\lambda Y = [Y, X] = \sum_{i \geq 2} \lambda_i \xi^i X_i,$$

e quindi una contraddizione perché  $Y = X_1$  e  $X_2, \dots, X_{\ell}$  sono linearmente indipendenti.  $\square$

**Lemma 14.3.3.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{k}$  e sia  $\mathfrak{a}$  una sottoalgebra di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  formata da endomorfismi semisemplici. Per ogni  $\alpha \in \mathfrak{a}^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{a}, \mathbb{k})$  poniamo:

$$(14.3.1) \quad V^{\alpha} = \{v \in V \mid A(v) = \alpha(A)v \quad \forall A \in \mathfrak{a}\}.$$

Allora

$$(14.3.2) \quad V = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{a}^*} V^{\alpha}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Ragioniamo per induzione su  $\ell = \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{a}$ . Se  $\ell = 0$  non c'è nulla da dimostrare e se  $\ell = 1$  la tesi si riduce al fatto che un endomorfismo semisemplice è diagonalizzabile in quanto  $\mathbb{k}$  è algebricamente chiuso.

Supponiamo ora che  $n > 1$  e la tesi sia vera per algebre di endomorfismi semisemplici di dimensione  $< n$ . Poiché  $\mathfrak{a}$  è abeliana, un iperpiano  $\mathfrak{b}$  di  $\mathfrak{a}$  è una sottoalgebra abeliana di endomorfismi semisemplici di  $V$ . Avremo quindi

$$V = \bigoplus W^{\beta} \quad \text{con} \quad W^{\beta} = \{v \in V \mid B(v) = \beta(B)v \quad \forall B \in \mathfrak{b}\}.$$

Fissiamo  $A \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b}$ . Poiché  $[A, \mathfrak{b}] = \{0\}$ , i sottospazi  $W^{\beta}$  sono  $A$ -invarianti. Poiché  $A$  è semisemplice, abbiamo  $W^{\beta} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{k}} (W^{\beta})^{\lambda}$  per ogni  $\beta \in \mathfrak{b}^*$ .

L'applicazione  $\mathfrak{a}^* \ni \alpha \rightarrow (\alpha|_{\mathfrak{b}}, \alpha(A)) \in \mathfrak{b}^* \oplus \mathbb{k}$  è bigettiva ed abbiamo  $V^{\alpha} = (W^{\alpha|_{\mathfrak{b}}})^{\alpha(A)}$ , da cui la tesi.  $\square$

Fissiamo ora una sottoalgebra torale massimale  $\mathfrak{h}$  di  $\mathfrak{g}$ .

Per ogni  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  poniamo

$$(14.3.3) \quad \mathfrak{g}^{\alpha} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X, \quad \forall H \in \mathfrak{h}\}.$$

**Definizione 14.3.4.** Gli  $\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}$  tali che  $\mathfrak{g}^{\alpha} \neq \{0\}$  si dicono *radici* di  $\mathfrak{g}$  rispetto ad  $\mathfrak{h}$ , o della coppia  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ .

Indicheremo con  $\mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ , o con  $\mathcal{R}$  quando ciò non ingeneri confusione, il sistema delle radici della coppia  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ .

Per i Lemmi 14.3.2 e 14.3.3 abbiamo una decomposizione di  $\mathfrak{g}$ :

$$(14.3.4) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Osserviamo che  $\mathfrak{g}^0$  è il *centralizzatore* di  $\mathfrak{h}$  in  $\mathfrak{g}$ . Poiché ovviamente  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^\alpha] = \mathfrak{g}^\alpha$  se  $\alpha \in \mathcal{R}$ , se ne conclude che  $\mathfrak{g}^0$  è anche il *normalizzatore* di  $\mathfrak{h}$  in  $\mathfrak{g}$ .

**Teorema 14.3.5.** *Sia  $\mathfrak{h}$  una sottoalgebra torale massimale di  $\mathfrak{g}$ . Allora*

- (i)  $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$  per ogni  $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ ;
- (ii) Se  $\alpha \in \mathcal{R}$ , ogni elemento  $X$  di  $\mathfrak{g}^\alpha$  è nilpotente;
- (iii) i sottospazi  $\mathfrak{g}^\alpha$ , per  $\alpha \in \mathcal{R}$ , sono totalmente isotropi rispetto alla forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}}$ ;
- (iv) se  $\alpha, \beta \in \mathfrak{a}^*$  ed  $\alpha + \beta \neq 0$ , i sottospazi  $\mathfrak{g}^\alpha$  e  $\mathfrak{g}^\beta$  sono ortogonali per la forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}}$ ;
- (v) per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$  la forma di Killing è non degenera su  $\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$  e definisce un accoppiamento di dualità tra  $\mathfrak{g}^\alpha$  e  $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ ;
- (vi) la forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  è non degenera su  $\mathfrak{g}^0$ .

**Lemma 14.3.6.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  su  $\mathbb{k}$  e siano  $A, N$  endomorfismi di  $V$  tali che  $[A, N] = 0$  ed  $N$  è nilpotente. Allora  $\text{tr}_V(AN) = 0$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti  $(AN)^m = A^m N^m$  per ogni intero non negativo  $m$  e quindi anche  $AN$  è nilpotente.  $\square$

**Teorema 14.3.7.** *Ogni algebra torale massimale di  $\mathfrak{g}$  coincide col suo normalizzatore in  $\mathfrak{g}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathfrak{h}$  una sottoalgebra torale massimale di  $\mathfrak{g}$ . Dobbiamo dimostrare che  $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$ .

Sia  $X \in \mathfrak{g}^0$ , ed  $S_X, N_X \in \mathfrak{g}$  le componenti semisemplice e nilpotente di  $X$ . Poiché  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(S_X)$  ed  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(N_X)$  sono polinomi senza termine costante di  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ , abbiamo  $S_X, N_X \in \mathfrak{g}^0$ . Inoltre, poiché la somma di endomorfismi semisemplici che commutano tra loro è ancora un endomorfismo semisemplice,  $\mathfrak{h}$  contiene tutti gli elementi semisemplici di  $\mathfrak{g}^0$ . Per il Lemma 14.3.6,  $\kappa_{\mathfrak{g}}(HN) = 0$  per ogni elemento nilpotente  $N$  di  $\mathfrak{g}^0$ . Quindi, per il punto (vi) del Teorema 14.3.5,  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  è non degenera su  $\mathfrak{h}$  ed abbiamo una decomposizione ortogonale  $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{g}^0)$ , in cui il secondo addendo diretto è o  $\{0\}$  o un sottospazio di dimensione positiva su cui la forma di Killing è non degenera. Ma quest'ultima possibilità è da scartare perché per il Teorema di Engel  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{g}^0)$  è un'algebra di Lie nilpotente di endomorfismi di  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

**Definizione 14.3.8.** Una sottoalgebra  $\mathfrak{c}$  di una sottoalgebra di Lie  $\mathfrak{a}$  che sia nilpotente e coincida col suo normalizzatore si dice una *sottoalgebra di Cartan* di  $\mathfrak{a}$ .

Quindi il Teorema 14.3.7 si può riformulare:

**Teorema 14.3.9.** *Ogni sottoalgebra torale massimale di un'algebra di Lie semisemplice  $\mathfrak{g}$ , di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$ , algebricamente chiuso e di caratteristica zero, è una sottoalgebra di Cartan.*

**Osservazione 14.3.10.** È vero viceversa che tutte le sottoalgebre di Cartan di un'algebra di Lie semisemplice sono torali massimali; l'enunciato rimane vero anche senza l'ipotesi che  $\mathbb{k}$  sia algebricamente chiuso.

Abbiamo quindi ottenuto:

**Teorema 14.3.11.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie semisemplice, di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$ , algebricamente chiuso e di caratteristica zero, e sia  $\mathfrak{h}$  una sottoalgebra torale massimale di  $\mathfrak{g}$ . Sia  $\mathcal{R}$  il sistema di radici della coppia  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ . Abbiamo allora la decomposizione:*

$$(14.3.5) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Poiché  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  è non degenera su  $\mathfrak{h}$ , per ogni elemento  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  vi è uno e un solo elemento  $T_\alpha$  in  $\mathfrak{h}$  tale che

$$(14.3.6) \quad \alpha(H) = \kappa_{\mathfrak{g}}(H, T_\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathfrak{h}^*, \quad \forall H \in \mathfrak{h}.$$

#### 14.4. Alcune proprietà del sistema delle radici

**Teorema 14.4.1.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie semisemplice, di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$ , algebricamente chiuso e di caratteristica zero, e sia  $\mathfrak{h}$  una sottoalgebra torale massimale di  $\mathfrak{g}$ . Sia  $\mathcal{R}$  il sistema di radici della coppia  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ . Allora*

- (a)  $\mathcal{R}$  genera  $\mathfrak{h}^*$ ;
- (b)  $\alpha \in \mathcal{R} \implies -\alpha \in \mathcal{R}$ ;
- (c) se  $\alpha \in \mathcal{R}$  ed  $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ ,  $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ , allora

$$(14.4.1) \quad [X_\alpha, X_{-\alpha}] = \kappa_{\mathfrak{g}}(X_\alpha, X_{-\alpha}) T_\alpha,$$

e quindi  $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] = \mathbb{k} \cdot T_\alpha$ ;

- (d)  $\alpha(T_\alpha) = \kappa_{\mathfrak{g}}(T_\alpha, T_\alpha) \neq 0$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$ ;
- (e) sia  $\alpha \in \mathcal{R}$ . Poniamo

$$(14.4.2) \quad H_\alpha = \frac{2T_\alpha}{\kappa_{\mathfrak{g}}(T_\alpha, T_\alpha)}.$$

Fissato  $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha \setminus \{0\}$ , possiamo trovare  $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$  tale che:

$$(14.4.3) \quad [X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha, \quad [H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha, \quad [H_\alpha, X_{-\alpha}] = -2X_{-\alpha}.$$

Il sottospazio  $\mathfrak{s}_\alpha$  generato da  $X_\alpha, X_{-\alpha}, H_\alpha$  è una sottoalgebra semplice di  $\mathfrak{g}$ , isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ .

**DIMOSTRAZIONE.** (a) Se  $\mathcal{R}$  non generasse  $\mathfrak{h}^*$ , potremmo trovare  $H \in \mathfrak{h}$  tale che  $\alpha(H) = 0$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$ . Da  $[H, \mathfrak{h}] = 0$  ed  $[H, \mathfrak{g}^\alpha] = 0$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$  seguirebbe allora che  $H \in Z(\mathfrak{g})$ , e questo dà una contraddizione in quanto  $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$  perché  $\mathfrak{g}$  è semisemplice.

(b) è conseguenza del punto (iv) del Teorema 14.3.5.

(c) Se  $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ ,  $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$  ed  $H \in \mathfrak{h}$ , abbiamo:

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(H, [X_\alpha, X_{-\alpha}]) = \kappa_{\mathfrak{g}}([X_\alpha, X_{-\alpha}], H) = \alpha(H)\kappa_{\mathfrak{g}}(X_\alpha, X_{-\alpha}).$$

Poiché  $[X_\alpha, X_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}$ ,  $\alpha(H) = \kappa_{\mathfrak{g}}(H, T_\alpha)$ , il punto (c) segue dal fatto che  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  è non degenera su  $\mathfrak{h}$ .

(d) Supponiamo per assurdo che  $\kappa_{\mathfrak{g}}(T_\alpha, T_\alpha) = \alpha(T_\alpha) = 0$  per qualche  $\alpha \in \mathcal{R}$ . Siano  $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$  ed  $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$  tali che  $\kappa_{\mathfrak{g}}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$ . Allora per (c) il sottospazio vettoriale  $r$  di  $\mathfrak{g}$  generato da  $X_\alpha, X_{-\alpha}, T_\alpha$  è una sottoalgebra risolubile di  $\mathfrak{g}$  e  $\mathbb{k} \cdot T_\alpha = r^{(1)}$ . Per il teorema di Lie  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(T_\alpha)$  sarebbe allora un endomorfismo nilpotente di  $\mathfrak{g}$ . Ma, essendo al tempo stesso semisemplice, dovremmo avere  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(T_\alpha) = 0$ , che ci dà una contraddizione.

La verifica di (e) è a questo punto immediata.  $\square$

**Teorema 14.4.2.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie semisemplice, di dimensione finita sul campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero ed algebricamente chiuso. Sia  $\mathfrak{h}$  una sottoalgebra torale massimale di  $\mathfrak{g}$  ed  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  il corrispondente sistema di radici. Allora:*

- (1)  $\dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}^\alpha = 1$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$ ;
- (2) se  $\alpha \in \mathcal{R}$ , allora  $\pm\alpha$  sono i soli multipli di  $\alpha$  contenuti in  $\mathcal{R}$ ;
- (3) se  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ , allora  $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$  e  $\beta - \beta(H_\alpha)\alpha \in \mathcal{R}$ ;
- (4) se  $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \mathcal{R}$ , allora  $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ ;
- (5) siano  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ , con  $\beta \neq \pm\alpha$  e siano  $r, q$  i più grandi interi positivi tali che  $\beta - r\alpha \in \mathcal{R}$ ,  $\beta + q\alpha \in \mathcal{R}$ . Allora  $\mathcal{R}$  contiene tutte le radici  $\beta + h\alpha$  con  $-r \leq h \leq q$  e  $\beta(H_\alpha) = r - q$ ;
- (6)  $\mathfrak{g}$  è generata dai sottospazi  $\mathfrak{g}^\alpha$  con  $\alpha \in \mathcal{R}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\alpha \in \mathcal{R}$  e sia  $\mathfrak{s}_\alpha$  la sottoalgebra di  $\mathfrak{g}$  isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$  del punto (e) del Teorema 14.4.1. Consideriamo il sotto- $\mathfrak{s}_\alpha$ -modulo di  $\mathfrak{g}$ :

$$M = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{k \in \mathbb{k} \setminus \{0\}} \mathfrak{g}^{k\alpha}.$$

I pesi di  $M$  sono 0 ed i numeri  $k\alpha(H_\alpha) = 2k$  con  $k \in \mathbb{k} \setminus \{0\}$  per cui  $\mathfrak{g}^{k\alpha} \neq \{0\}$ . Poiché i pesi delle rappresentazioni finite di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$  sono interi, otteniamo che  $2k \in \mathbb{Z}$  se  $\mathfrak{g}^{k\alpha} \neq \{0\}$ . Inoltre  $\mathfrak{s}_\alpha$  opera banalmente sull'iperpiano  $\ker \alpha$  di  $\mathfrak{h}$  ed  $\mathfrak{s}_\alpha$  è un sotto- $\mathfrak{s}_\alpha$ -modulo irriducibile di  $M$ , di peso massimale 2. Quindi i pesi pari dell' $\mathfrak{s}_\alpha$ -modulo  $M$  sono 0 e 2; in particolare  $h\alpha \notin \mathcal{R}$  se  $h \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$ . Chiaramente da questo segue che nemmeno  $\alpha/h$  può appartenere ad  $\mathcal{R}$  se  $h$  è un intero non nullo diverso da  $\pm 1$ . In conclusione  $M = \ker \alpha \oplus \mathfrak{s}_\alpha$  e da questo otteniamo (1) e (2).

Fissiamo ora  $\beta \in \mathcal{R}$  non proporzionale ad  $\alpha$ . Consideriamo l' $\alpha$ -stringa per  $\beta$ : essa è l' $\mathfrak{s}_\alpha$ -modulo:

$$M_\beta = \bigoplus_{h \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{\beta+h\alpha}.$$

I pesi di  $M_\beta$  sono  $\{\beta(H_\alpha) + 2h \mid h \in \mathbb{Z}, \mathfrak{g}^{\beta+h\alpha} \neq \{0\}\} \subset \mathbb{Z}$ . Poiché  $\beta + h\alpha \neq 0$  per ogni  $h \in \mathbb{Z}$ , tutti i pesi di  $M_\beta$  hanno molteplicità uno e quindi  $M_\beta$  è irriducibile. Otteniamo perciò  $M_\beta = \bigoplus_{h=-r}^q \mathfrak{g}^{\beta+h\alpha}$  con  $\mathfrak{g}^{\beta+h\alpha} \neq \{0\}$  per ogni intero  $h$  con  $-r \leq h \leq q$ . Inoltre

$$\begin{cases} \beta(H_\alpha) - 2r = -m \\ \beta(H_\alpha) + 2q = m \end{cases}$$

per qualche intero non negativo  $m$ , e quindi

$$(14.4.4) \quad \beta(H_\alpha) = r - q \in \mathbb{Z}.$$

Infine, poiché  $-r \leq -r + q \leq q$ , otteniamo che

$$(14.4.5) \quad \beta - \beta(H_\alpha)\alpha \in \mathcal{R}.$$

Abbiamo così dimostrato (3), (4) e (5).

La (6) segue dal fatto che  $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] = \mathbb{k} \cdot T_\alpha$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , e le  $T_\alpha$ , al variare di  $\alpha$  in  $\mathcal{R}$ , generano  $\mathfrak{h}$ .  $\square$

### 14.5. Proprietà di razionalità del sistema delle radici

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie semisemplice, di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  algebricamente chiuso di caratteristica zero.

Fissiamo una sua sottoalgebra torale massimale  $\mathfrak{h}$  ed indichiamo con  $\mathcal{R}$  il corrispondente sistema di radici.

Per ogni  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  sia  $T_\alpha$  l'elemento di  $\mathfrak{h}$  tale che

$$\alpha(H) = \kappa_{\mathfrak{g}}(H, T_\alpha) \quad \forall H \in \mathfrak{h}.$$

Possiamo allora definire una forma bilineare simmetrica su  $\mathfrak{h}^*$  ponendo

$$(14.5.1) \quad (\alpha|\beta) = \kappa_{\mathfrak{g}}(T_\alpha, T_\beta) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*.$$

Poiché  $\mathcal{R}$  genera  $\mathfrak{h}^*$ , possiamo fissare una base  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$  di  $\mathfrak{h}^*$  contenuta in  $\mathcal{R}$ .

**Lemma 14.5.1.** *Ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$  è una combinazione lineare a coefficienti razionali degli elementi della base  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\} \subset \mathcal{R}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\alpha = \sum_{i=1}^{\ell} a^i \alpha_i$ , con  $a^i \in \mathbb{k}$ . Abbiamo per ogni  $i = 1, \dots, \ell$ :

$$(\alpha|\alpha_i) = \sum_{j=1}^{\ell} a^j (\alpha_j|\alpha_i)$$

e quindi

$$\frac{2(\alpha|\alpha_i)}{(\alpha_i|\alpha_i)} = \sum_{j=1}^{\ell} a^j \frac{2(\alpha_j|\alpha_i)}{(\alpha_i|\alpha_i)}, \quad i = 1, \dots, \ell$$

cioè:

$$\mathbb{Z} \ni \alpha(H_{\alpha_i}) = \sum_{j=1}^{\ell} a^j \alpha_j(H_{\alpha_i}), \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Questo è un sistema lineare, nelle incognite  $a^1, \dots, a^\ell$ , a coefficienti interi. Poiché  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  è non degenera su  $\mathfrak{h}$ , la forma bilineare simmetrica  $(\cdot|\cdot)$  è non degenera su  $\mathfrak{h}^*$  e quindi anche la matrice a coefficienti interi  $(\alpha_j(H_{\alpha_i}))_{1 \leq i, j \leq \ell}$  è non degenera. Il sistema lineare ha perciò un'unica soluzione razionale  $a^1, \dots, a^\ell$ .  $\square$

Sia  $E_{\mathbb{Q}}$  il sottospazio  $\mathbb{Q}$ -lineare di  $\mathfrak{h}^*$  generato da  $\mathcal{R}$ . Per il Lemma 14.5.1, la dimensione di  $E_{\mathbb{Q}}$  su  $\mathbb{Q}$  è uguale alla dimensione di  $\mathfrak{h}^*$  su  $\mathbb{k}$ . Poniamo  $E = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}}$ .

**Lemma 14.5.2.** *La forma bilineare simmetrica*

$$(14.5.2) \quad E_{\mathbb{Q}} \times E_{\mathbb{Q}} \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

*si prolunga a un prodotto scalare su  $E$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Scegliamo una base di  $\mathfrak{g}$  i cui elementi siano o in  $\mathfrak{h}$  oppure in  $\mathfrak{g}^{\alpha}$  per  $\alpha \in \mathcal{R}$ . Ogni  $T_{\xi}$ , per  $\xi \in \mathfrak{h}^*$ , si scrive in tale base in forma diagonale. Abbiamo perciò:

$$(14.5.3) \quad (\xi, \eta) = \kappa_{\mathfrak{g}}(T_{\xi}, T_{\eta}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \alpha(T_{\xi})\alpha(T_{\eta}).$$

In particolare, se  $\beta \in \mathcal{R}$ :

$$(14.5.4) \quad (\beta|\beta) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} (\alpha|\beta)^2.$$

Abbiamo

$$\frac{4}{(\beta|\beta)} = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} (\alpha(H_{\beta}))^2 \in \mathbb{Z}$$

e quindi otteniamo che  $(\beta|\beta)$  è, per ogni  $\beta \in \mathcal{R}$ , un numero razionale positivo. Poiché  $2(\alpha|\beta)/(\beta|\beta) \in \mathbb{Z}$ , concludiamo che  $(\alpha|\beta) \in \mathbb{Q}$  per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ , e quindi  $(\xi|\eta) \in \mathbb{Q}$  per ogni  $\xi, \eta \in E_{\mathbb{Q}}$ . Poiché  $(\alpha|\xi) \in \mathbb{Q}$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$  e  $\xi \in E_{\mathbb{Q}}$ ,

$$(\xi|\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} (\alpha|\xi)^2 \quad \text{è razionale} > 0 \quad \forall \xi \in E_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}.$$

Essendo  $(\cdot|\cdot)$  definita positiva, essa si estende ad un prodotto scalare su  $E$ .  $\square$

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel

**Teorema 14.5.3.** *Siano  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h}$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $E$ ,  $(\cdot|\cdot)$  definiti come sopra. Allora  $E$  è uno spazio Euclideo e:*

- (R1)  $\mathcal{R} \subset E \setminus \{0\}$  è un sistema di generatori di  $E$ ;
- (R2) per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ ,  $s_{\alpha}(\beta) = \beta - \frac{2(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha \in \mathcal{R}$ ;
- (R3) per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ ,  $\frac{2(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z}$ ;
- (R4)  $\alpha \in \mathcal{R} \implies 2\alpha \notin \mathcal{R}$ .

**Definizione 14.5.4.** Le proprietà (R1), (R2), (R3) caratterizzano i *sistemi di radici* in  $E$ . Quando vale anche la (R4) il sistema di radici si dice *ridotto*.

Per la classificazione delle algebre di Lie semisemplici (di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  algebricamente chiuso di caratteristica 0), classificheremo prima tutti i sistemi di radici di uno spazio Euclideo  $E$  e mostreremo poi che ad ogni tale sistema corrisponde effettivamente un'algebra di Lie semisemplice.

## Sistemi astratti di radici

### 15.1. Definizioni principali

Sia  $E$  uno spazio vettoriale reale, di dimensione finita  $\ell \geq 1$ . Sia  $\alpha \in E$ . Chiamiamo *riflessione* di vettore  $\alpha$  una trasformazione lineare di  $E$  che lascia fissi i punti di un iperpiano di  $E$  e trasforma  $\alpha$  in  $-\alpha$ .

Una riflessione  $\sigma$  di vettore  $\alpha$  determina univocamente una forma lineare  $\alpha^\vee \in E^* \setminus \{0\}$  tale che

$$(15.1.1) \quad \sigma(\beta) = \beta - \alpha^\vee(\beta)\alpha, \quad \forall \beta \in E, \quad \alpha^\vee(\alpha) = 2.$$

Se  $\sigma$  è una riflessione, abbiamo  $\sigma^2 = e$ , ove  $e$  indica l'identità di  $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ .

**Lemma 15.1.1.** *Sia  $\mathcal{R}$  un sistema finito di generatori di  $E$  e sia  $\alpha \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ . Allora vi è al più una riflessione  $\sigma$  di vettore  $\alpha$  tale che  $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $s$  e  $\sigma$  siano due riflessioni, di vettore  $\alpha \in \mathcal{R}$ , tali che  $s(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ . Consideriamo la composizione  $\tau = s \circ \sigma$ . Abbiamo  $\tau(\alpha) = \alpha$  e la  $\tau$  definisce, per passaggio al quoziente, l'identità su  $E/\mathbb{R} \cdot \alpha$ . Il suo polinomio minimo è quindi una potenza di  $(x-1)$ :  $\mu_\tau = (x-1)^k$  per un intero positivo  $k$ . D'altra parte la  $\tau$  agisce come una permutazione sugli elementi di  $\mathcal{R}$  e quindi potremo trovare un intero positivo  $h$  tale che  $\tau^h(\beta) = \beta$  per ogni  $\beta \in \mathcal{R}$ . Poiché  $\mathcal{R}$  è un sistema di generatori di  $E$ , ne deduciamo che  $\tau^h = e$  e dunque il polinomio minimo di  $\tau$  divide  $x^h - 1$ . Il massimo comun denominatore dei polinomi  $(x-1)^k$  e  $x^h - 1$  è  $x-1$ ; quindi  $\mu_\tau(x) = x-1$  e  $\tau = e$ . Otteniamo perciò  $s = \sigma^{-1} = \sigma$ , e quindi la tesi.  $\square$

**Definizione 15.1.2.** Un *sistema di radici* di  $E$  è un sottoinsieme  $\mathcal{R}$  di  $E$  che gode delle proprietà:

- (R1)  $\mathcal{R}$  è finito,  $0 \notin \mathcal{R}$  ed  $\mathcal{R}$  genera  $E$ ;
- (R2) per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$  esiste un funzionale  $\alpha^\vee \in E^*$  tale che  $\alpha^\vee(\alpha) = 2$  e la riflessione

$$(15.1.2) \quad s_\alpha(\xi) = \xi - \alpha^\vee(\xi)\alpha \quad \forall \xi \in E$$

trasforma  $\mathcal{R}$  in sé;

- (R3) per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$ , è  $\alpha^\vee(\mathcal{R}) \subset \mathbb{Z}$ .

Osserviamo che la (R3) è ben posta, in quanto, per il Lemma 18.1.7, la  $s_\alpha$  in (R2), e quindi la  $\alpha^\vee$ , è univocamente determinata.

**Definizione 15.1.3.** Gli elementi  $\alpha$  di  $\mathcal{R}$  si dicono *radici* e la dimensione di  $E$  il *rango* del sistema di radici  $\mathcal{R}$ .

**Definizione 15.1.4.** Dato un sistema di radici  $\mathcal{R}$ , indichiamo con  $\mathbf{A}(\mathcal{R})$  il gruppo delle trasformazioni lineari di  $E$  che lasciano  $\mathcal{R}$  invariante e con  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$  il sottogruppo di  $\mathbf{A}(\mathcal{R})$  generato dalle riflessioni  $s_\alpha$  di (R2), per  $\alpha \in \mathcal{R}$ . Il gruppo  $\mathbf{A}(\mathcal{R})$  si dice il *gruppo degli automorfismi* di  $\mathcal{R}$  e  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$  il suo *gruppo di Weyl*.

Osserviamo che  $\mathbf{A}(\mathcal{R})$  e  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$  sono gruppi finiti.  
Ricordiamo il seguente:

**Lemma 15.1.5.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo finito di trasformazioni lineari dello spazio vettoriale di dimensione finita  $E$  su  $\mathbb{R}$ . Possiamo allora definire su  $E$  un prodotto scalare  $\mathbf{G}$ -invariante, tale cioè che gli elementi di  $\mathbf{G}$  siano trasformazioni ortogonali di  $E$  rispetto a tale prodotto scalare.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $g : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  un qualsiasi prodotto scalare su  $E$ . Definiamo allora

$$(15.1.3) \quad (\xi|\eta) = \sum_{a \in \mathbf{G}} g(a(\xi), a(\eta)) \quad \forall \xi, \eta \in E.$$

Chiaramente  $(\cdot|\cdot)$  è un prodotto scalare  $\mathbf{G}$ -invariante su  $E$ . □

Utilizzando il lemma 15.1, considereremo fissato nel seguito un prodotto scalare  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ -invariante su  $E$ . In particolare potremo identificare  $E$  con il suo duale  $E^*$ . Essendo le  $s_\alpha$  simmetrie ortogonali, avremo:

$$(15.1.4) \quad \alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\|\alpha\|^2} \quad \forall \alpha \in \mathcal{R}.$$

**Teorema 15.1.6.** *Sia  $\mathcal{R}$  un sistema di radici in  $E$ , su cui pensiamo fissato un prodotto scalare  $\mathbf{A}(\mathcal{R})$ -invariante. Allora:*

- (i)  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$  è un sottogruppo normale di  $\mathbf{A}(\mathcal{R})$ ;
- (ii)  $\mathcal{R}^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \mathcal{R}\}$  è un sistema di radici in  $E$ ;
- (iii)  $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$ ;
- (iv)  $\mathbf{W}(\mathcal{R}^\vee) = \mathbf{W}(\mathcal{R})$  e  $\mathbf{A}(\mathcal{R}^\vee) = \mathbf{A}(\mathcal{R})$ .

**DIMOSTRAZIONE.** (i) Sia  $\alpha \in \mathcal{R}$  e sia  $\sigma \in \mathbf{A}(\mathcal{R})$ . Allora  $\sigma \circ s_\alpha \circ \sigma^{-1}$  è una riflessione che trasforma  $\mathcal{R}$  in sé, di vettore  $\sigma(\alpha)$ . Otteniamo:

$$(15.1.5) \quad \sigma \circ s_\alpha \circ \sigma^{-1} = s_{\sigma(\alpha)} \quad \forall \alpha \in \mathcal{R}, \quad \forall \sigma \in \mathbf{A}(\mathcal{R}).$$

Poiché le  $s_\alpha$ , per  $\alpha \in \mathcal{R}$ , generano  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ , ne segue che  $\sigma \mathbf{W}(\mathcal{R}) \sigma^{-1} \subset \mathbf{W}(\mathcal{R})$  per ogni  $\sigma \in \mathbf{A}(\mathcal{R})$  e quindi  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$  è un sottogruppo normale di  $\mathbf{A}(\mathcal{R})$ .

(ii),(iii) Chiaramente  $\mathcal{R}^\vee$  è finito, contenuto in  $E \setminus \{0\}$  e genera  $E$ . Se  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  abbiamo:

$$s_\alpha(\beta^\vee) = \frac{2s_\alpha(\beta)}{\|\beta\|^2} = \frac{2s_\alpha(\beta)}{\|s_\alpha(\beta)\|^2} = (s_\alpha(\beta))^\vee,$$

perché  $s_\alpha$  è un'isometria. Quindi  $\mathcal{R}^\vee$  soddisfa (R2) e  $\mathbf{W}(\mathcal{R}^\vee) = \mathbf{W}(\mathcal{R})$ ; poiché  $s_\alpha = s_{\alpha^\vee}$ , si ha chiaramente  $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$ ; quindi anche (R3) è verificata ed  $\mathcal{R}^\vee$  è un sistema di radici.

(iv) Poiché abbiamo scelto un prodotto scalare  $\mathbf{A}(\mathcal{R})$ -invariante, gli  $a \in \mathbf{A}(\mathcal{R})$  sono isometrie. Quindi  $a(\beta^\vee) = (a(\beta))^\vee$  per ogni  $\beta \in \mathcal{R}$ . Questo dimostra che

$\mathbf{A}(\mathcal{R}) \subset \mathbf{A}(\mathcal{R}^{\vee})$ . Ma, essendo  $\mathcal{R}^{\vee\vee} = \mathcal{R}$ , vale anche l'inclusione opposta e quindi i due gruppi coincidono.  $\square$

**Osservazione 15.1.7.** Se fissiamo su  $E$  un prodotto scalare che sia soltanto  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ -invariante, il punto (iv) può non essere più verificato: il teorema ci dice comunque che i gruppi  $\mathbf{A}(\mathcal{R})$  e  $\mathbf{A}(\mathcal{R}^{\vee})$  sono canonicamente isomorfi.

Il sistema di radici  $\mathcal{R}^{\vee}$  si dice *inverso* o *duale* di  $\mathcal{R}$ . Fissato un sistema di radici  $\mathcal{R}$ , porremo

$$(15.1.6) \quad \langle \alpha, \beta \rangle = (\alpha|\beta^{\vee}) = \frac{(\alpha|\beta)}{\|\beta\|^2} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}.$$

Otteniamo

$$(15.1.7) \quad \begin{cases} \langle \alpha, \alpha \rangle = 2 & \forall \alpha \in \mathcal{R}, \\ \langle -\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, -\beta \rangle = -\langle \alpha, \beta \rangle & \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \\ \langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}, & \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R} \\ \text{se } \alpha, \beta \in \mathcal{R}, & \langle \alpha, \beta \rangle = 0 \Leftrightarrow (\alpha|\beta) = 0 \Leftrightarrow s_{\alpha} \circ s_{\beta} = s_{\beta} \circ s_{\alpha}. \end{cases}$$

## 15.2. Relazioni tra coppie di radici

Sia  $\mathcal{R}$  un sistema di radici in  $E$ , su cui è fissato un prodotto scalare  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ -invariante.

Se  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  abbiamo:

$$(15.2.1) \quad \langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \widehat{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}.$$

Quindi  $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle$  può assumere solo i valori 0, 1, 2, 3, 4. Elenchiamo nel seguito le diverse possibilità:

TABELLA 1

1)	$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = 0$	$\widehat{\alpha\beta} = \pi/2$		$s_{\alpha} \circ s_{\beta}$ ha ordine 2
2)	$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = 1$	$\widehat{\alpha\beta} = \pi/3$	$\ \alpha\  = \ \beta\ $	$s_{\alpha} \circ s_{\beta}$ ha ordine 3
3)	$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = -1$	$\widehat{\alpha\beta} = 2\pi/3$	$\ \alpha\  = \ \beta\ $	$s_{\alpha} \circ s_{\beta}$ ha ordine 3
4)	$\langle \alpha, \beta \rangle = 1 \langle \beta, \alpha \rangle = 2$	$\widehat{\alpha\beta} = \pi/4$	$\sqrt{2}\ \alpha\  = \ \beta\ $	$s_{\alpha} \circ s_{\beta}$ ha ordine 4
5)	$\langle \alpha, \beta \rangle = -1 \langle \beta, \alpha \rangle = -2$	$\widehat{\alpha\beta} = 3\pi/4$	$\sqrt{2}\ \alpha\  = \ \beta\ $	$s_{\alpha} \circ s_{\beta}$ ha ordine 4
6)	$\langle \alpha, \beta \rangle = 1 \langle \beta, \alpha \rangle = 3$	$\widehat{\alpha\beta} = \pi/6$	$\sqrt{3}\ \alpha\  = \ \beta\ $	$s_{\alpha} \circ s_{\beta}$ ha ordine 6
7)	$\langle \alpha, \beta \rangle = -1 \langle \beta, \alpha \rangle = -3$	$\widehat{\alpha\beta} = 5\pi/6$	$\sqrt{3}\ \alpha\  = \ \beta\ $	$s_{\alpha} \circ s_{\beta}$ ha ordine 6
8)	$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = 2$	$\widehat{\alpha\beta} = 0$	$\alpha = \beta$	$s_{\alpha} \circ s_{\beta} = e$
9)	$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = -2$	$\widehat{\alpha\beta} = \pi$	$\alpha = -\beta$	$s_{\alpha} \circ s_{\beta} = e$
10)	$\langle \alpha, \beta \rangle = 1 \langle \beta, \alpha \rangle = 4$	$\widehat{\alpha\beta} = 0$	$2\alpha = \beta$	$s_{\alpha} \circ s_{\beta} = e$
11)	$\langle \alpha, \beta \rangle = -1 \langle \beta, \alpha \rangle = -4$	$\widehat{\alpha\beta} = \pi$	$2\alpha = -\beta$	$s_{\alpha} \circ s_{\beta} = e$

In particolare abbiamo:

**Teorema 15.2.1.** Sia  $\mathcal{R}$  un sistema di radici in  $E$ .

- (i) Se due radici di  $\mathcal{R}$  sono proporzionali, il loro fattore di proporzionalità non può essere che uno dei numeri  $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$ .
- (ii) Se  $\alpha, \beta$  sono due radici non proporzionali e  $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$ , allora  $\langle \alpha, \beta \rangle \in \{0, 1, -1\}$ .

**Teorema 15.2.2.** Sia  $\mathcal{R}$  un sistema di radici in  $E$ . Siano  $\alpha, \beta$  due radici di  $\mathcal{R}$  con  $\alpha \neq \pm\beta$ .

- (i) Se  $(\alpha|\beta) > 0$ , allora  $\alpha - \beta \in \mathcal{R}$ ;
- (i) Se  $(\alpha|\beta) < 0$ , allora  $\alpha + \beta \in \mathcal{R}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** (i) Possiamo supporre  $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$ . Allora, se  $\alpha$  e  $\beta$  non sono proporzionali,  $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$  e quindi  $\alpha - \beta = s_\beta(\alpha) \in \mathcal{R}$ . Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono proporzionali, allora  $\beta = 2\alpha$  e  $\beta - \alpha = \alpha \in \mathcal{R}$ .

(ii) segue da (i) sostituendo  $-\beta$  a  $\beta$ . □

**Corollario 15.2.3.** Se  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  e  $\alpha - \beta \notin \mathcal{R}$ ,  $\alpha + \beta \notin \mathcal{R}$ , allora  $(\alpha|\beta) = 0$ .

Due radici  $\alpha, \beta$  che soddisfino le condizioni del Corollario 15.2.3, si dicono *fortemente ortogonali*.

**Proposizione 15.2.4.** Sia  $\mathcal{R}$  un sistema di radici in  $E$ . Siano  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  due radici non proporzionali. Allora:

- (i)  $\{j \in \mathbb{Z} | \beta + j\alpha \in \mathcal{R}\}$  è un intervallo  $[-r, q]$  di  $\mathbb{Z}$  contenente 0;
- (ii) sia  $S = \{\beta + j\alpha | -r \leq j \leq q, j \in \mathbb{Z}\}$ . Allora  $s_\alpha(S) = S$  e  $s_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - r\alpha$ ;
- (iii)  $\langle \beta, \alpha \rangle = r - q$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $r, q$  i più grandi interi non negativi tali che  $\beta - r\alpha, \beta + q\alpha \in \mathcal{R}$ . Se la (i) fosse falsa, potremmo trovare interi  $m_1, m_2$  con  $-r \leq m_1 < m_2 \leq q$  tali che  $\beta + m_1\alpha, \beta + m_2\alpha \in \mathcal{R}$ , ma  $\beta + (m_1 + 1)\alpha \notin \mathcal{R}, \beta + (m_2 - 1)\alpha \notin \mathcal{R}$ . Per il Teorema 15.2.2, avremmo:

$$\begin{cases} (\beta + m_1\alpha|\alpha) \geq 0, \\ (\beta + m_2\alpha|\alpha) \leq 0. \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro troviamo

$$(m_1 - m_2)\|\alpha\|^2 \geq 0$$

e quindi una contraddizione perché  $(m_1 - m_2) < 0, \|\alpha\| > 0$ . Questo dimostra (i).

(ii),(iii) Chiaramente  $s_\alpha(S) \subset S$  e vale l'uguaglianza perché  $S$  è finito. Abbiamo

$$s_\alpha(\beta + j\alpha) = \beta - (\langle \beta, \alpha \rangle + 2j)\alpha \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

e quindi  $j \rightarrow -(\langle \beta, \alpha \rangle + 2j)$  è una bigezione decrescente dell'intervallo  $\{j \in \mathbb{Z} | -r \leq j \leq q\}$ . Otteniamo perciò

$$s_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - (\langle \beta, \alpha \rangle + 2q)\alpha = \beta - r\alpha$$

da cui  $\langle \beta, \alpha \rangle = r - q$ . □

**Proposizione 15.2.5.** *Siano  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  due radici non proporzionali. Allora l' $\alpha$ -stringa per  $\beta$ :*

$$\{\beta + j\alpha \in \mathcal{R} \mid j \in \mathbb{Z}\}$$

*contiene al più 4 elementi.*

**DIMOSTRAZIONE.** Con le notazioni della proposizione precedente: sia  $\gamma = \beta - r\alpha$  e consideriamo la  $\alpha$ -stringa per  $\gamma$ . Abbiamo  $\langle \gamma, \alpha \rangle = -(r + q)$ . Poiché  $|\langle \gamma, \alpha \rangle| \in \{0, 1, 2, 3\}$  per la Tabella 1, otteniamo la tesi.  $\square$

**Teorema 15.2.6.** *Se  $\mathcal{R}$  è un sistema di radici in  $E$ , anche*

$$(15.2.2) \quad \mathcal{R}' = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid 2\alpha \notin \mathcal{R}\}$$

*è un sistema di radici in  $E$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** È chiaro che  $\mathcal{R}'$  soddisfa la (R1) e la (R3). La (R2) segue dal fatto che le  $s_\alpha$  sono isometrie, e che per ogni radice  $\alpha \in \mathcal{R}$  il sistema  $\mathcal{R}'$  contiene soltanto i vettori di  $\mathcal{R}$  proporzionali ad  $\alpha$  di lunghezza massima.  $\square$

Un sistema di radici  $\mathcal{R}$  che soddisfi la proprietà:

$$(R4) \quad \alpha \in \mathcal{R} \implies 2\alpha \notin \mathcal{R}$$

si dice *ridotto*.

**Teorema 15.2.7.** *Sia  $\mathcal{R}$  un sistema di radici in  $E$  e sia  $\Phi$  un qualsiasi sottoinsieme di  $\mathcal{R}$ . Sia  $\mathcal{E}'$  il sottospazio vettoriale di  $E$  generato da  $\Phi$ . Allora  $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap \mathcal{E}'$  è un sistema di radici in  $\mathcal{E}'$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** La verifica è immediata: per costruzione  $\mathcal{R}' \subset \mathcal{E}' \setminus \{0\}$  è un sistema di generatori di  $\mathcal{E}'$ ; le restrizioni ad  $\mathcal{E}'$  delle simmetrie  $s_\alpha$  di  $\mathcal{R}$ , al variare di  $\alpha$  in  $\mathcal{R}'$ , sono riflessioni di  $\mathcal{R}'$  e chiaramente  $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$  quando  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ .  $\square$

### 15.3. Basi e camere di Weyl di un sistema di radici

Sia  $\mathcal{R}$  un sistema di radici in  $E$ . Un sottoinsieme  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{R}$  si dice una *base* di  $\mathcal{R}$  se:

(B1)  $\mathcal{B}$  è una base di  $E$ ;

(B2) se  $\beta = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} b^\alpha \alpha \in \mathcal{R}$ , allora  $b^\alpha \in \mathbb{Z}$  e i coefficienti  $b^\alpha$  sono o tutti  $\geq 0$  o tutti  $\leq 0$ .

Fissata una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{R}$  poniamo

$$(15.3.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}^+(\mathcal{B}) &= \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} b^\alpha \alpha \in \mathcal{R} \mid b^\alpha \in \mathbb{N} \right\}, \\ \mathcal{R}^-(\mathcal{B}) &= \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} b^\alpha \alpha \in \mathcal{R} \mid -b^\alpha \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

Per le (B1) e (B2) abbiamo:

$$(15.3.2) \quad \mathcal{R}^+(\mathcal{B}) \cup \mathcal{R}^-(\mathcal{B}) = \mathcal{R}, \quad \mathcal{R}^+(\mathcal{B}) \cap \mathcal{R}^-(\mathcal{B}) = \emptyset.$$

Le radici di  $\mathcal{R}^+(\mathcal{B})$  (risp.  $\mathcal{R}^-(\mathcal{B})$ ) si dicono *positive* (risp. *negative*) rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

Fissata una base  $\mathcal{B}$ , introduciamo un ordinamento parziale sulle radici: se  $\beta = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} b^\alpha \alpha$  e  $\gamma = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} c^\alpha \alpha$  sono radici distinte, diciamo che  $\beta < \gamma$  se  $b^\alpha \leq c^\alpha$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$ .

**Definizione 15.3.1.** Questo ordinamento parziale si dice l'*ordinamento lessicografico* associato alla base  $\mathcal{B}$ .

**Lemma 15.3.2.** Sia  $\mathcal{B}$  una base del sistema di radici  $\mathcal{R}$  in  $E$ . Se  $\alpha \neq \beta \in \mathcal{B}$ , allora  $(\alpha|\beta) \leq 0$ .

DIMOSTRAZIONE. Per la proprietà (B2),  $\beta - \alpha \notin \mathbb{R}$  e quindi  $(\alpha|\beta) \leq 0$ .  $\square$

Fissato il sistema di radici  $\mathcal{R}$  in  $E$ , chiamiamo *regolare* un elemento  $\xi$  di  $E$  tale che  $(\xi|\alpha) \neq 0$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$ . Gli elementi regolari formano un aperto denso (aperto di Zariski) di  $E$ .

Fissato un elemento regolare  $\xi$  di  $E$ , poniamo

$$(15.3.3) \quad \mathcal{R}^+(\xi) = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid (\alpha|\xi) > 0\}, \quad \mathcal{R}^-(\xi) = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid (\alpha|\xi) < 0\}.$$

Abbiamo ovviamente:

$$(15.3.4) \quad \mathcal{R}^+(\xi) \cup \mathcal{R}^-(\xi) = \mathcal{R}, \quad \mathcal{R}^+(\xi) \cap \mathcal{R}^-(\xi) = \emptyset.$$

Una radice  $\alpha \in \mathcal{R}^+(\xi)$  si dice  $\xi$ -decomponibile se esistono  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{R}^+(\xi)$  tali che  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ ; altrimenti si dice  $\xi$ -semplice. Indichiamo con  $\mathcal{B}(\xi)$  l'insieme delle radici  $\xi$ -semplici di  $\mathcal{R}^+(\xi)$ .

**Teorema 15.3.3.** Sia  $\mathcal{R}$  un sistema di radici in  $E$  e sia  $\xi$  un elemento regolare di  $E$  rispetto ad  $\mathcal{R}$ . Allora  $\mathcal{B}(\xi)$  è una base di  $\mathcal{R}$ . Viceversa, ogni base  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{R}$  è della forma  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\xi)$  per un elemento  $\xi$  di  $E$  regolare rispetto ad  $\mathcal{R}$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\xi \in E$  un elemento regolare. Se  $\mathcal{B}(\xi)$  non fosse una base, potremmo fissare  $\beta \in \mathcal{R}^+(\xi) \setminus \{\sum_{\alpha \in \mathcal{B}(\xi)} a^\alpha \alpha \mid a^\alpha \in \mathbb{Z}, a^\alpha \geq 0\}$  con  $(\beta|\xi)$  minimo. Poiché  $\beta$  non è  $\xi$ -semplice, avremo  $\beta = \beta_1 + \beta_2$  con  $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{R}^+(\xi)$ . Allora

$$(\beta|\xi) = (\beta_1|\xi) + (\beta_2|\xi)$$

con  $0 < (\beta_1|\xi) < (\beta|\xi)$ ,  $0 < (\beta_2|\xi) < (\beta|\xi)$ . Per la scelta di  $\beta$ , sia  $\beta_1$  che  $\beta_2$  sono combinazioni lineari a coefficienti interi non negativi di elementi di  $\mathcal{B}(\xi)$ ; quindi lo è anche  $\beta$  e questo dà una contraddizione: dunque  $\mathcal{B}(\xi)$  soddisfa (B2) ed è un sistema di generatori.

Resta da dimostrare che  $\mathcal{B}(\xi)$  è linearmente indipendente. Osserviamo innanzi tutto che  $(\alpha|\beta) \leq 0$  se  $\alpha \neq \beta \in \mathcal{B}(\xi)$ . Infatti, se fosse  $(\alpha|\beta) > 0$ , allora  $\alpha - \beta$  e  $\beta - \alpha$  sarebbero radici. Uno dei due, diciamo  $\alpha - \beta$ , apparterrà allora a  $\mathcal{R}^+(\xi)$  e quindi  $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$  non sarebbe semplice. Sia ora  $\mathcal{B}(\xi) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  e siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  tali che  $\sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i = 0$ . Allora

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i^+ \alpha_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i^- \alpha_i \quad \text{ove} \quad \lambda_i^+ = \max\{\lambda_i, 0\}, \quad \lambda_i^- = \max\{-\lambda_i, 0\}.$$

Allora

$$\left\| \sum_{i=1}^r \lambda_i^+ \alpha_i \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^r \lambda_i^+ \lambda_j^- (\alpha_i | \alpha_j) \leq 0$$

mostra che  $\sum_{i=1}^r \lambda_i^+ \alpha_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i^- \alpha_i = 0$ . Quindi

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i^+ (\alpha_i | \xi) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^- (\alpha_i | \xi) = 0$$

implica che  $\lambda_i^+ = \lambda_i^- = \lambda_i = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, r$  e quindi  $\mathcal{B}(\xi)$  è anche linearmente indipendente.

Viceversa, data una base  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$  di  $\mathcal{R}$ , è sempre possibile trovare un elemento regolare  $\xi$  tale che  $(\xi | \alpha_i) > 0$  per  $i = 1, \dots, \ell$ . Allora  $\mathcal{R}^+(\mathcal{B}) = \mathcal{R}^+(\xi)$  e  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\xi)$ .  $\square$

Indichiamo con  $\mathcal{C}(\mathcal{R})$  le componenti connesse dell'aperto  $E \setminus \cup_{\alpha \in \mathcal{R}} \alpha^\perp$  degli elementi regolari di  $E$  rispetto ad  $\mathcal{R}$ . Gli elementi  $C$  di  $\mathcal{C}(\mathcal{R})$  si dicono *camere di Weyl* di  $\mathcal{R}$ . Per il teorema appena dimostrato, le camere di Weyl sono in corrispondenza biunivoca con le basi di  $\mathcal{R}$ .

Se  $C \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$  e  $\xi \in C$ , porremo

$$(15.3.5) \quad \mathcal{B}(C) = \mathcal{B}(\xi), \quad \mathcal{R}^+(C) = \mathcal{R}^+(\xi), \quad \mathcal{R}^-(C) = \mathcal{R}^-(\xi).$$

Osserviamo che valgono le relazioni:

$$(15.3.6) \quad \begin{cases} \mathcal{R}^+(C) = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid (\alpha | \xi) > 0 \quad \forall \xi \in C\}; \\ C = \{\xi \in E \mid (\xi | \alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{R}^+(C)\} = \{\xi \in E \mid (\xi | \alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{B}(C)\}. \end{cases}$$

**Lemma 15.3.4.** *Sia  $\mathcal{B}$  una base del sistema di radici  $\mathcal{R}$ . Se  $\beta \in \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$  non è semplice, allora esiste  $\alpha \in \mathcal{B}$  tale che  $(\alpha | \beta) > 0$ ; in particolare esiste  $\alpha \in \mathcal{B}$  tale che  $\beta - \alpha \in \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$  e supponiamo sia  $(\beta | \alpha_i) \leq 0$  per ogni  $i = 1, \dots, \ell$ . Abbiamo  $\beta = \sum_{i=1}^\ell b^i \alpha_i$  con  $b^i \in \mathbb{Z}$ ,  $b^i \geq 0$  per ogni  $i$ . Allora

$$0 < \|\beta\|^2 = \sum_{i=1}^\ell b^i (\beta | \alpha_i)$$

ci dà una contraddizione, perché ogni addendo del secondo membro è  $\leq 0$ .  $\square$

**Definizione 15.3.5.** Fissata una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{R}$ , chiamiamo *altezza* di una radice  $\beta = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} b^\alpha \alpha$  il numero naturale positivo

$$(15.3.7) \quad \text{ht}_{\mathcal{B}}(\beta) = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} |b^\alpha|.$$

**Lemma 15.3.6.** *Sia  $\mathcal{B}$  una base del sistema di radici  $\mathcal{R}$ , e sia  $\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$  il corrispondente sistema di radici positive. Sia  $\beta \in \mathcal{R}^+$  e sia  $m = \text{ht}_{\mathcal{B}}(\beta)$ . Allora*

esiste una  $m$ -upla  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  di elementi di  $\mathcal{B}$  (non necessariamente distinti) tale che

$$(15.3.8) \quad \beta = \sum_{h=1}^m \alpha_h \quad e, \text{ per ogni } 1 \leq j \leq m \quad \sum_{h=1}^j \alpha_h \in \mathcal{R}^+.$$

DIMOSTRAZIONE. Si applica l'induzione rispetto all'altezza della radice  $\beta$  e il Lemma precedente.  $\square$

**Lemma 15.3.7.** *Sia  $\mathcal{B}$  una base del sistema di radici  $\mathcal{R}$  e sia  $\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$  il corrispondente sistema di radici positive. Allora per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$  abbiamo:*

$$(15.3.9) \quad s_\alpha(\mathcal{R}^+) = (\mathcal{R}^+ \setminus \{\alpha\}) \cup \{-\alpha\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $\beta \in \mathcal{R}^+ \setminus \{\alpha\}$ , allora

$$\beta = b^\alpha \alpha + \sum_{\gamma \in \mathcal{B} \setminus \{\alpha\}} b^\gamma \gamma \quad \text{con } b^\gamma > 0 \quad \text{per qualche } \gamma \in \mathcal{B} \setminus \{\alpha\}.$$

Allora

$$s_\alpha(\beta) = - \left( b^\alpha + \sum_{\gamma \in \mathcal{B} \setminus \{\alpha\}} b^\gamma \langle \gamma, \alpha \rangle \right) + \sum_{\gamma \in \mathcal{B} \setminus \{\alpha\}} b^\gamma \gamma.$$

Poiché  $b^\gamma > 0$  per qualche  $\gamma \in \mathcal{B} \setminus \{\alpha\}$ , abbiamo allora  $s_\alpha(\beta) \in \mathcal{R}^+$ .  $\square$

**Corollario 15.3.8.** *Sia  $\mathcal{B}$  una base del sistema di radici  $\mathcal{R}$  e sia  $\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$  il corrispondente sistema di radici positive. Poniamo  $\delta = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \alpha$ . Se  $\beta \in \mathcal{B}$ , allora  $s_\beta(\delta) = \delta - \beta$ .*

**Lemma 15.3.9.** *Sia  $\mathcal{R}$  un sistema di radici ridotto in  $E$ . Ogni radice di  $\mathcal{R}$  appartiene a una base di  $\mathcal{R}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\alpha \in \mathcal{R}$ . Possiamo allora trovare un elemento regolare  $\xi$  tale che  $0 < (\alpha|\xi) < |(\beta|\xi)|$  per ogni  $\beta \in \mathcal{R} \setminus \{\pm\alpha\}$ . Chiaramente  $\alpha \in \mathcal{B}(\xi)$ .  $\square$

## 15.4. Gruppo di Weyl e camere di Weyl

Consideriamo fissati in questo paragrafo lo spazio vettoriale  $E$ , un sistema di radici ridotto  $\mathcal{R}$  in  $E$  e un prodotto scalare  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ -invariante su  $E$ .

**Lemma 15.4.1.** *Sia  $\mathcal{B}$  una base di  $\mathcal{R}$  e sia  $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$  una  $t$ -upla di elementi di  $\mathcal{B}$ . Se  $s_{\alpha_1} \circ \dots \circ s_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t) \in \mathcal{R}^-(\mathcal{B})$ , allora esiste un indice  $k$ , con  $1 \leq k < t$ , tale che*

$$s_{\alpha_1} \circ \dots \circ s_{\alpha_{t-1}} \circ s_{\alpha_t} = s_{\alpha_1} \circ \dots \circ s_{\alpha_{k-1}} \circ s_{\alpha_{k+1}} \circ \dots \circ s_{\alpha_{t-1}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo per semplicità  $s_{\alpha_i} = s_i$ ,  $\sigma = s_1 \circ \dots \circ s_t$ , e poniamo:

$$\beta_i = s_{i+1} \circ \dots \circ s_{t-1}(\alpha_t), \quad \text{se } 0 \leq i \leq t-2, \quad \beta_{t-1} = \alpha_t.$$

Per ipotesi  $\beta_0 \in \mathcal{R}^-(\mathcal{B})$ , mentre  $\beta_{t-1} \in \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$ . Vi sarà quindi un più piccolo indice  $k$ , con  $1 \leq k \leq t-1$ , tale che  $\beta_k \in \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$ . Abbiamo  $\beta_{k-1} = s_k(\beta_k)$ . Poiché  $s_k$  permuta tutti gli elementi di  $\mathcal{R}^+(\mathcal{B})$  diversi da  $\alpha_k$ , ne segue che  $\beta_k = \alpha_k$  e  $\beta_{k-1} = -\alpha_k$ . Se  $k = t-1$ , abbiamo  $\alpha_{t-1} = \alpha_t$  e quindi  $\sigma = s_1 \circ \dots \circ s_{t-2}$ . Se  $k < t-1$ , allora:

$$\alpha_k = s_{k+1} \circ \dots \circ s_{t-1}(\alpha_t)$$

e dunque

$$s_k = s_{\alpha_k} = (s_{k+1} \circ \cdots \circ s_{t-1}) \circ s_t \circ (s_{t-1} \circ \cdots \circ s_{k+1}) .$$

Sostituendo, otteniamo:

$$\begin{aligned} \sigma &= s_1 \circ \cdots \circ s_{k-1} \circ (s_{k+1} \circ \cdots \circ s_{t-1}) \circ s_t \circ (s_{t-1} \circ \cdots \circ s_{k+1}) \circ s_{k+1} \circ \cdots \circ s_t \\ &= s_1 \circ \cdots \circ s_{k-1} \circ s_{k+1} \circ \cdots \circ s_{t-1} . \end{aligned}$$

□

**Corollario 15.4.2.** *Sia  $\mathcal{B}$  una base di  $\mathcal{R}$  e sia  $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$  un elemento esprimibile come prodotto di simmetrie  $s_\alpha$  con  $\alpha \in \mathcal{B}$ . Se*

$$\sigma = s_{\alpha_1} \circ \cdots \circ s_{\alpha_t} \quad \text{con } \alpha_i \in \mathcal{B} \text{ e } t \text{ minimo}$$

allora  $\sigma(\alpha_i) \in \mathcal{R}^-(\mathcal{B})$ .

**Teorema 15.4.3.** *Sia  $\mathcal{B}$  una base di  $\mathcal{R}$ .*

- (1) *Per ogni elemento regolare  $\gamma$  di  $E$  esiste un elemento  $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$  tale che  $(\sigma(\alpha)|\gamma) > 0$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$ .*
- (2) *Se  $\mathcal{B}'$  è un'altra base di  $\mathcal{R}$ , esiste un elemento  $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$  tale che  $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$ .*
- (3) *Per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$  esiste  $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$  tale che  $\sigma(\alpha) \in \mathcal{B}$ .*
- (4) *Le riflessioni  $s_\alpha$ , con  $\alpha \in \mathcal{B}$ , generano  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ .*
- (5) *Se  $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$  e  $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ , allora  $\sigma$  è l'identità.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbf{W}'$  il sottogruppo di  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$  generato dalle riflessioni rispetto agli elementi della base  $\mathcal{B}$ . Dimosteremo innanzi tutto che (1), (2) e (3) valgono con  $\mathbf{W}'$  al posto di  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ ; dimosteremo poi (4) e (5). (1) Sia  $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+(\mathcal{B})} \alpha$  e scegliamo  $\sigma \in \mathbf{W}'$  tale che

$$(\sigma(\gamma)|\delta) = \max_{\tau \in \mathbf{W}'} (\tau(\gamma)|\delta) .$$

Abbiamo allora, per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$ :

$$(\sigma(\gamma)|\delta) \geq (s_\alpha \circ \sigma(\gamma)|\delta) = (\sigma(\gamma)|s_\alpha(\delta)) = (\sigma(\gamma)|\delta) - (\sigma(\gamma)|\alpha)$$

e quindi  $(\sigma(\gamma)|\alpha) \geq 0$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$ . Poiché  $\gamma$  è un elemento regolare, vale la maggiorazione stretta. Poiché  $\sigma$  è un'isometria,  $(\sigma(\gamma)|\alpha) = (\sigma^{-1}(\alpha)|\gamma)$  ed otteniamo la tesi. (2) Sia  $\mathcal{B}'$  un'altra base di  $\mathcal{R}$ . Allora  $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(\gamma)$  per un elemento regolare  $\gamma$  di  $E$ . Utilizzando il punto (1), esiste  $\sigma \in \mathbf{W}'$  tale che  $(\sigma(\alpha)|\gamma) > 0$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$ . Ma questo implica che  $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}(\gamma) = \mathcal{B}'$ . (3) Sia  $\alpha \in \mathcal{R}$ . Possiamo fissare un elemento regolare  $\gamma$  tale che

$$0 < (\alpha|\gamma) < |(\beta|\gamma)| \quad \forall \beta \in \mathcal{R} \setminus \{\pm\alpha\} .$$

Basterà a questo scopo fissare  $\gamma$  in una palla di centro  $\alpha$  la cui chiusura non contenga altri elementi di  $\mathcal{R} \cup \{0\}$ . Chiaramente  $\alpha$  è una radice  $\gamma$ -semplice ed appartiene quindi a  $\mathcal{B}(\gamma)$ . Per il punto (2) possiamo trovare  $\sigma \in \mathbf{W}'$  tale che  $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}(\gamma)$  e quindi  $\sigma^{-1}(\alpha) \in \mathcal{B}$ . (4) Sia  $\alpha \in \mathcal{R}$ . Per il punto (3) possiamo trovare  $\sigma \in \mathbf{W}'$  e  $\beta \in \mathcal{B}$  tale che  $\sigma(\beta) = \alpha$ . Allora  $s_\alpha = \sigma \circ s_\beta \circ \sigma^{-1} \in \mathbf{W}'$ . Quindi  $\mathbf{W}'$  contiene tutte le riflessioni di  $\mathcal{R}$  e quindi coincide con il suo gruppo di Weyl  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ . (5)

Sia  $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$  tale che  $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ . Se  $\sigma$  non fosse l'identità, potremmo scriverla come prodotto di un numero minimo  $t$  di riflessioni rispetto ai vettori della base  $\mathcal{B}$ :

$$\sigma = s_{\alpha_1} \circ \cdots \circ s_{\alpha_t}$$

con  $t \geq 1$  e  $\alpha_i \in \mathcal{B}$ . Ma, per il Corollario 15.4.2, avremmo  $\sigma(\alpha_t) \in \mathcal{R}^-(\mathcal{B})$ , e quindi una contraddizione.  $\square$

Da questo teorema si ricava:

**Teorema 15.4.4.** *Il gruppo di Weyl  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$  opera in modo semplicemente transitivo sull'insieme  $\mathcal{C}(\mathcal{R})$  delle camere di Weyl di  $\mathcal{R}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per la corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle camere di Weyl e l'insieme delle basi di  $\mathcal{R}$ , la (2) del Teorema 15.4.3 ci dice che  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$  opera in modo transitivo sulle camere di Weyl e la (5) che la sola trasformazione di  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$  che fissi una qualsiasi camera di Weyl è l'identità.  $\square$

**Lemma 15.4.5.** *Sia  $C_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$  una camera di Weyl e sia  $\bar{C}_0$  la sua chiusura. Allora  $\bar{C}_0$  è un dominio fondamentale di  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ : ciò significa che per ogni  $\xi \in E$ , l'orbita  $\mathbf{W}(\mathcal{R}) \cdot \xi$  interseca  $\bar{C}_0$  in uno e un solo punto.*

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che  $\{\bar{C} \mid C \in \mathcal{C}(\mathcal{R})\}$  è un ricoprimento di  $E$ . Quindi ogni  $\xi \in E$  appartiene alla chiusura di una camera di Weyl di  $\mathcal{R}$ . Fissiamo un elemento  $\xi \in E \setminus \{0\}$ . Esso appartiene alla chiusura di una camera di Weyl  $C_\xi$ . Poiché  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$  opera in modo semplicemente transitivo su  $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ , vi è un unico  $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$  tale che  $\sigma(C_\xi) = C_0$ . Risulterà allora anche  $\bar{C}_0 = \overline{\sigma(C_\xi)} = \sigma(\bar{C}_\xi)$  e quindi  $\sigma(\xi) \in \bar{C}_0$ .

Per concludere la dimostrazione, basterà verificare che, se  $\xi, \eta \in \bar{C}_0$  ed esiste  $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$  tale che  $\sigma(\xi) = \eta$ , allora  $\xi = \eta$ . Ragioniamo per ricorrenza sul minimo numero  $t$  di riflessioni rispetto a vettori della base  $\mathcal{B}(C_0)$  in cui si può decomporre  $\sigma$ . Se  $t = 0$ , allora  $\sigma$  è l'identità e  $\xi = \eta$ . Supponiamo che  $t > 0$  e che due elementi di  $\bar{C}_0$  trasformati l'uno nell'altro dal prodotto di meno di  $t$  riflessioni rispetto a vettori di  $\mathcal{B}(C_0)$  coincidano. Sia  $\sigma = s_{\alpha_1} \circ \cdots \circ s_{\alpha_t}$  con  $\alpha_i \in \mathcal{B}(C_0)$  e  $t$  minimo. Per il Corollario 15.4.2,  $\sigma(\alpha_t) \in \mathcal{R}^-(C_0)$  e quindi:

$$0 > (\eta | \sigma(\alpha_t)) = (\sigma^{-1}(\eta) | \alpha_t) = (\xi | \alpha_t) = 0.$$

Quindi  $s_{\alpha_t}(\xi) = \xi$  perché  $\xi$  e  $\alpha_t$  sono ortogonali ed  $\eta = s_{\alpha_1} \circ \cdots \circ s_{\alpha_{t-1}}(\xi)$  implica che  $\xi = \eta$  per l'ipotesi induttiva.  $\square$

**Lemma 15.4.6.** *Sia  $C \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ . Allora  $\bar{C} \subset \mathcal{R}^+(C)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\alpha \in \bar{C} \cap \mathcal{R}$  e sia  $\alpha = \sum_{\beta \in \mathcal{B}(C)} a^\beta \beta$ . Abbiamo  $(\alpha | \beta) \geq 0$  per ogni  $\beta \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$  e

$$0 < \|\alpha\|^2 = \sum_{\beta \in \mathcal{B}(C)} a^\beta (\alpha | \beta),$$

da cui ricaviamo che  $a^\beta > 0$  per qualche  $\beta \in \mathcal{B}(C)$  e quindi  $\alpha \in \mathcal{R}^+(C)$ .  $\square$

### 15.5. Sistemi di radici irriducibili

Osserviamo in primo luogo che vale il seguente:

**Lemma 15.5.1.** *Ogni rappresentazione lineare di un gruppo finito è completamente riducibile.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo finito,  $E$  uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e  $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(E)$  una rappresentazione lineare. Possiamo fissare su  $E$  un prodotto scalare  $\rho(\mathbf{G})$ -invariante. Allora, per ogni sottospazio  $\rho(\mathbf{G})$ -invariante  $W$  di  $E$ , anche  $W^\perp$  è  $\rho(\mathbf{G})$ -invariante. Da questa osservazione la tesi segue facilmente per induzione sulla dimensione di  $E$ .  $\square$

**Lemma 15.5.2.** *Sia  $\mathcal{R}$  un sistema di radici in uno spazio vettoriale reale  $E$ . Se  $E_1 \neq \{0\}$  è un sottospazio  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ -invariante di  $E$ , allora  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \cap E_1$  è un sistema di radici in  $E_1$ . Esiste un sottospazio  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ -invariante  $E_2$  di  $E$  tale che  $E = E_1 \oplus E_2$  e*

$$(15.5.1) \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \quad \text{con} \quad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \cap E_1, \quad \mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \cap E_2.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo limitarci a considerare il caso  $E_1 \neq E$ . Fissiamo su  $E$  un prodotto scalare  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ -invariante e sia  $E_2 = E_1^\perp$ . Allora  $E = E_1 \oplus E_2$  ed ogni radice  $\alpha$  di  $\mathcal{R}$  si decompone in modo unico in una somma:

$$\alpha = \xi + \eta \quad \text{con} \quad \xi \in E_1, \quad \eta \in E_2.$$

Poiché  $\|\alpha\|^2 = (\alpha|\xi) + (\alpha|\eta) > 0$ , sarà o  $(\alpha|\xi) > 0$  oppure  $(\alpha|\eta) > 0$ . Supponiamo per fissare le idee che sia  $(\alpha|\xi) > 0$ . Allora:

$$s_\alpha(\xi) = (1 - \langle \xi, \alpha \rangle) \xi - \langle \xi \alpha \rangle \eta \in E_1.$$

Poiché  $\langle \xi, \alpha \rangle \neq 0$ , questa relazione implica che  $\eta = 0$  e  $\alpha = \xi \in E_1$ . Quindi

$$\mathcal{R} = (\mathcal{R} \cap E_1) \cup (\mathcal{R} \cap E_2)$$

e da questa è facile ricavare che  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \cap E_1$  e  $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \cap E_2$  sono sistemi di radici in  $E_1$  ed  $E_2$  rispettivamente.  $\square$

**Teorema 15.5.3.** *Sia  $\mathcal{R}$  un sistema di radici in uno spazio vettoriale reale  $E$ , su cui pensiamo fissato un prodotto scalare  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ -invariante.*

*Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) *esiste una partizione*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2, \quad \text{con} \quad \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset, \quad \mathcal{R}_1 \neq \emptyset, \quad \mathcal{R}_2 \neq \emptyset$$

*tale che*

$$(\alpha|\beta) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{R}_1, \quad \forall \beta \in \mathcal{R}_2.$$

(2) *Esiste un sottospazio  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ -invariante  $E_1$  di  $E$  con  $\{0\} \neq E_1 \neq E$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** (1) $\Rightarrow$ (2). Siano  $E_1$  ed  $E_2$  i sottospazi di  $E$  generati da  $\mathcal{R}_1$  e da  $\mathcal{R}_2$  rispettivamente. Chiaramente essi sono sottospazi  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ -invarianti di  $\mathcal{R}$ , diversi da  $\{0\}$  e da  $E$ .

(2) $\Rightarrow$ (1). È una conseguenza del Lemma 15.5.2.  $\square$

Un sistema di radici  $\mathcal{R}$  per cui valgono le condizioni equivalenti del Teorema 15.5.3 si dice *riducibile*. Chiamiamo *irriducibile* un sistema di radici  $\mathcal{R}$  che non sia riducibile.

**Lemma 15.5.4.** *Siano  $E_1, \dots, E_m$  sottospazi vettoriali di dimensione finita dello spazio vettoriale reale  $E$  tali che  $E = \bigoplus_{i=1}^m E_i$  e sia, per ogni  $i$ ,  $\mathcal{R}_i$  un sistema di radici in  $E_i$ . Allora  $\mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{R}_i$  è un sistema di radici in  $E$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\alpha$  è una radice di  $\mathcal{R}_i$  ed  $s_\alpha^{(i)}$  la corrispondente riflessione in  $E_i$ , estendiamo  $s_\alpha^{(i)}$  a una riflessione  $s_\alpha$  in  $E$  ponendo:

$$s_\alpha(\xi) = \begin{cases} s_\alpha^{(i)}(\xi) & \text{se } \xi \in E_i, \\ \xi & \text{se } \xi \in E_j, j \neq i. \end{cases}$$

Si verifica che  $\mathcal{R}$  è un sistema di radici in  $E$ , con riflessioni  $s_\alpha$ .  $\square$

**Definizione 15.5.5.** Nella situazione del Lemma 15.5, diciamo che il sistema di radici  $\mathcal{R}$  è la *somma diretta* dei sistemi di radici  $\mathcal{R}_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ).

**Lemma 15.5.6.** *Sia  $\mathcal{R}$  un sistema di radici irriducibile in  $E$ . Sia  $\alpha$  una qualsiasi radice di  $\mathcal{R}$ . allora  $\{\sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})\}$  è un sistema di generatori di  $E$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti il sottospazio vettoriale di  $E$  generato da  $\{\sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})\}$  è  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ -invariante e  $\neq \{0\}$ . Esso deve quindi coincidere con  $E$ .  $\square$

**Teorema 15.5.7.** *Sia  $\mathcal{R}$  un sistema di radici in  $E$ . Allora  $\mathcal{R}$  si decompone in modo unico nella somma diretta di sistemi di radici irriducibili in sottospazi di  $E$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $E = \bigoplus_{i=1}^m E_i$  una decomposizione di  $E$  in somma diretta di sottospazi  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ -irriducibili. Per i risultati precedenti  $\mathcal{R}_i = \mathcal{R} \cap E_i$  è, per ogni  $i = 1, \dots, m$  un sistema di radici irriducibile in  $E_i$  ed  $\mathcal{R}$  è la somma diretta dei sistemi di radici  $\mathcal{R}_i$ . Resta da verificare che la decomposizione è unica. Ma questo è conseguenza del Lemma 15.5, perché ogni sottospazio  $E_i$  è uno dei sottospazi generati da  $\{\sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})\}$  per qualche  $\alpha \in \mathcal{R}$ .  $\square$

Questo risultato riduce il problema della classificazione dei sistemi di radici a quello della classificazione dei sistemi di radici irriducibili.

### 15.6. Proprietà dei sistemi di radici irriducibili

In questo paragrafo indicheremo con  $E$  uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e con  $\mathcal{R}$  un sistema di radici irriducibile in  $E$ . Su  $E$  penseremo fissato un prodotto scalare  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ -invariante.

**Lemma 15.6.1.** *Sia  $\mathcal{B}$  una base di  $\mathcal{R}$ . Se  $\mathcal{R}$  ha rango  $\geq 2$ , allora per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$  esiste  $\beta \in \mathcal{B}$  tale che  $(\alpha|\beta) < 0$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo per assurdo che  $\alpha \in \mathcal{B}$  sia ortogonale a tutti gli altri elementi  $\beta$  di  $\mathcal{B}$ . Allora  $E_1 = \mathbb{R}\alpha$  e il sottospazio generato  $E_2$  da  $\mathcal{B} \setminus \{\alpha\}$  sono mutuamente ortogonali ed invarianti rispetto ad  $s_\beta$  per ogni  $\beta \in \mathcal{B}$ . Poiché le riflessioni rispetto ai vettori di  $\mathcal{B}$  generano  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ , ne concludiamo che  $E_1$  ed  $E_2$  sono sottospazi  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ -invarianti, contraddicendo l'irriducibilità di  $\mathcal{R}$ .  $\square$

**Lemma 15.6.2.** *Sia  $\mathcal{B}$  una base di  $\mathcal{R}$ . Allora esiste un unico elemento  $\tilde{\alpha}$  di  $\mathcal{R}$  tale che*

$$(15.6.1) \quad \alpha \underset{\mathcal{B}}{<} \tilde{\alpha} \quad \forall \alpha \in \mathcal{R} \setminus \{\tilde{\alpha}\}$$

e inoltre

$$(15.6.2) \quad \tilde{\alpha} = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} k^\beta \beta \quad \text{con } k^\beta > 0 \quad \forall \beta \in \mathcal{B}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\tilde{\alpha}$  massimale in  $\mathcal{R}$  rispetto all'ordinamento parziale  $\underset{\mathcal{B}}{<}$ . Chiaramente  $\tilde{\alpha} \in \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$ . Sia (15.6.2) l'espressione di  $\tilde{\alpha}$  come combinazione lineare di elementi della base. Poniamo

$$\mathcal{B}_1 = \{\alpha \in \mathcal{B} \mid k^\alpha > 0\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{\alpha \in \mathcal{B} \mid k^\alpha = 0\}.$$

Chiaramente  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  (unione disgiunta) e  $\mathcal{B}_1 \neq \emptyset$ . Supponiamo per assurdo che anche  $\mathcal{B}_2 \neq \emptyset$ . Poiché  $\tilde{\alpha} - \alpha \notin \mathcal{R}$  se  $\alpha \in \mathcal{B}_2$ , abbiamo  $(\tilde{\alpha}|\alpha) \leq 0$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}_2$ . D'altra parte, poiché  $\mathcal{R}$  è irriducibile, per il Lemma 15.6.1, esisteranno  $\alpha \in \mathcal{B}_1$  e  $\beta \in \mathcal{B}_2$  tali che  $(\alpha|\beta) < 0$ . Quindi

$$(\tilde{\alpha}|\beta) = \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_1} k^\gamma (\gamma|\beta) < 0$$

implica che  $\tilde{\alpha} + \beta \in \mathcal{R}$ , contraddicendo la massimalità di  $\tilde{\alpha}$ .

Per la massimalità di  $\tilde{\alpha}$  abbiamo quindi  $(\tilde{\alpha}|\alpha) \geq 0$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$  e quindi  $\tilde{\alpha}$  appartiene alla chiusura della camera di Weyl  $C$  corrispondente a  $\mathcal{B}$ .

Dimostriamo l'unicità di  $\tilde{\alpha}$ . Se  $\gamma$  fosse un altro elemento massimale di  $\mathcal{R}$  rispetto a  $\underset{\mathcal{B}}{<}$ , avremmo

$$(\tilde{\alpha}|\gamma) = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k^\alpha (\alpha|\gamma) > 0$$

e dunque  $\eta = \tilde{\alpha} - \gamma \in \mathcal{R}$ . Se  $\eta \in \mathcal{R}^+$ , da  $\tilde{\alpha} = \gamma + \eta$  avremmo  $\gamma \underset{\mathcal{B}}{<} \tilde{\alpha}$ , contraddicendo la massimalità di  $\tilde{\alpha}$ , se  $\eta \in \mathcal{R}^-(\mathcal{B})$ , da  $\gamma = \tilde{\alpha} + (-\eta)$  avremmo  $\tilde{\alpha} \underset{\mathcal{B}}{<} \gamma$ , contraddicendo la massimalità di  $\tilde{\alpha}$ . La dimostrazione è completa.  $\square$

**Lemma 15.6.3.** *Sia  $\tilde{\alpha}$  una radice massimale di  $\mathcal{R}$  rispetto a una base  $\mathcal{B}$ . Allora  $\|\tilde{\alpha}\| \geq \|\alpha\|$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\alpha \in \mathcal{R}$ . A meno di sostituirla con  $\sigma(\alpha)$  per qualche  $\alpha \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$  possiamo supporre che  $\alpha \in \overline{C}$ , ove  $C$  è la camera di Weyl corrispondente a  $\mathcal{B}$ . Poiché  $\tilde{\alpha} - \alpha \underset{\mathcal{B}}{\rightarrow} 0$ , abbiamo contemporaneamente:

$$(\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha} - \alpha) \geq 0 \quad \text{e} \quad (\alpha|\tilde{\alpha} - \alpha) \geq 0,$$

da cui sommando membro a membro si ricava  $\|\tilde{\alpha}\|^2 \geq \|\alpha\|^2$ .  $\square$

**Lemma 15.6.4.** *Supponiamo  $\mathcal{R}$  ridotto. Allora l'insieme  $\{\|\alpha\| \mid \alpha \in \mathcal{R}\}$  contiene al più due elementi.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $\alpha, \beta$  due elementi di  $\mathcal{R}$ . Possiamo supporre che  $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$ . Poiché  $\{\sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})\}$  genera  $E$ , possiamo supporre  $(\alpha|\beta) > 0$ . Allora  $\|\beta\|/\|\alpha\| \in \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ . Sia  $\gamma$  un terzo elemento di  $\mathcal{R}$ . Possiamo supporre che  $\|\beta\| \leq \|\gamma\|$ . Allora i tre numeri  $\|\beta\|/\|\alpha\|, \|\gamma\|/\|\alpha\|, \|\gamma\|/\|\beta\|$  devono tutti e tre appartenere all'insieme  $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ . Ma questo non è possibile se  $\|\alpha\| < \|\beta\| < \|\gamma\|$ .  $\square$

## Classificazione dei sistemi di radici

In questo capitolo classificheremo i sistemi astratti di radici. A ciascuno di essi assoceremo un *diagramma di Dynkin*. Troveremo prima condizioni *necessarie* affinché un diagramma sia il diagramma di Dynkin di un sistema di radici e mostreremo in seguito che queste condizioni sono anche *sufficienti*.

### 16.1. Grafi

**Definizione 16.1.1.** Si dice *grafo (combinatorio)* una coppia  $\Gamma = (V, L)$  in cui  $V$  sia un insieme ed  $L$  una famiglia di sottoinsiemi di  $V$ , composti ciascuno da due elementi.

Gli elementi di  $V$  sono i *vertici* e quelli di  $L$  i *lati* di  $\Gamma$ .

Dato un grafo  $\Gamma = (V, L)$  e un sottoinsieme  $W$  di  $V$ , indichiamo con  $L_W$  la famiglia degli elementi di  $L$  che sono contenuti in  $W$ .

**Definizione 16.1.2.** Il grafo  $\Gamma|_W = (W, L_W)$  si dice il *sottografo* di  $\Gamma$  generato da  $W$ .

**Definizione 16.1.3.** Un *cammino* in  $\Gamma = (V, L)$  è una sequenza finita  $c = (\alpha_j)_{0 \leq j \leq n}$  di elementi di  $V$  tali che  $\{\alpha_{j-1}, \alpha_j\} \in L$  per ogni  $j = 1, \dots, n$ .

In numero  $n$  si dice *lunghezza* del cammino.

Un cammino  $c = (\alpha_j)_{0 \leq j \leq n}$  si dice *aperto* se  $\alpha_0 \neq \alpha_n$  e *chiuso* se  $\alpha_0 = \alpha_n$ .

I cammini di lunghezza zero sono esempi di cammini chiusi.

**Definizione 16.1.4.** Un cammino aperto  $c = (\alpha_j)_{0 \leq j \leq n}$  ha sempre lunghezza  $n \geq 1$  e si dice *semplice* quando  $\alpha_i \neq \alpha_j$  per ogni  $0 \leq i < j \leq n$ .

Un cammino chiuso  $c = (\alpha_j)_{0 \leq j \leq n}$  si dice *semplice* se o ha lunghezza zero, oppure se ha lunghezza positiva e  $c' = (\alpha_j)_{0 \leq j \leq n-1}$  è un cammino semplice aperto.

Un cammino semplice chiuso di lunghezza positiva ha lunghezza  $\geq 3$  e si dice un *ciclo* di  $\Gamma$ .

**Definizione 16.1.5.** Due vertici  $\alpha, \beta \in V$  si dicono

*legati* se  $\{\alpha, \beta\} \in L$ ,

*connessi* se esiste un cammino  $c = (\alpha_j)_{0 \leq j \leq n}$  tale che  $\alpha_0 = \alpha$ ,  $\alpha_n = \beta$ .

Diciamo in questo caso che  $c$  connette  $\alpha$  a  $\beta$ .

La relazione di essere connessi è una relazione di equivalenza tra i vertici  $V$  di un grafo  $\Gamma = (V, L)$ ; le classi di equivalenza si dicono le *componenti connesse del grafo*.

Un sottoinsieme  $W$  di  $V$  si dice *totalmente sconnesso* se  $L_W = \emptyset$ , e si dice *connesso* se due qualsiasi dei suoi vertici sono connessi da un cammino in  $\Gamma|_W$ .

Un vertice  $\alpha$  di un grafo  $\Gamma = (V, L)$  si dice:

*isolato* se  $\alpha \notin \cup L$ ;

*estremo* se appartiene al più ad un elemento di  $L$ ;

*interno* se appartiene ad almeno due elementi di  $L$ ;

*di ramificazione* se appartiene ad almeno tre elementi di  $L$ .

Chiaramente un punto isolato è un estremo; un punto di ramificazione è anche interno e un punto interno non è un estremo di  $\Gamma$ .

**Definizione 16.1.6.** Un grafo si dice una *foresta* se non contiene cicli; un *albero* se è una foresta connessa.

**Teorema 16.1.7.** (i) *Ogni foresta finita e non vuota contiene un estremo.*

(ii) *I vertici di una famiglia non vuota si possono ripartire in due insiemi totalmente sconnessi.*

**DIMOSTRAZIONE.** (i) Sia  $\Gamma = (V, L)$  una foresta non vuota. Se  $\Gamma$  contiene un punto isolato, allora questo è un estremo. Possiamo quindi supporre che  $\Gamma$  non contenga punti isolati. Fissiamo allora in  $\Gamma$  un cammino semplice aperto  $c = (\alpha_j)_{0 \leq j \leq n}$  massimale. Dico che  $\alpha_n$  è un estremo di  $\Gamma$ . Infatti, se così non fosse, potremmo trovare un  $\beta \in V$  con  $\beta \neq \alpha_{n-1}$  tale che  $\{\alpha_n, \beta\} \in L$ . Ma non può essere  $\beta \neq \alpha_i$  per  $i = 0, \dots, n-2$  perché allora il cammino semplice aperto  $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n+1}$  ottenuto ponendo  $\alpha_{n+1} = \beta$  avrebbe lunghezza  $n+1$  maggiore di quella di  $c$ , né  $\beta = \alpha_i$  per qualche  $0 \leq i < n-1$  perché altrimenti  $\Gamma$  conterrebbe il ciclo:  $(\alpha_i = \beta, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, \beta)$ . Quindi  $\alpha_n$  è un estremo e la (i) è dimostrata.

Possiamo dimostrare la (ii) per induzione sul numero  $m$  di elementi di  $V$ . Fissato un estremo  $\alpha$  di  $\Gamma$ , e posto  $W = V \setminus \{\alpha\}$ , per l'ipotesi induttiva applicata alla foresta  $\Gamma|_W$  potremmo ripartire  $W$  in due sottoinsiemi totalmente sconnessi  $W_1$  e  $W_2$ . A meno di scambiare gli indici, possiamo supporre che  $\{\alpha, \beta\} \notin L$  per ogni  $\beta \in W_1$ . Allora  $V_1 = W_1 \cup \{\alpha\}$  e  $V_2 = W_2$  è una partizione di  $V$  in due insiemi totalmente sconnessi.  $\square$

**Definizione 16.1.8.** Un grafo  $\Gamma = (V, L)$  si dice una *catena* se è finito ed esiste un cammino semplice aperto  $(\alpha_j)_{0 \leq j \leq n}$  tale che  $V = \{\alpha_j | 0 \leq j \leq n\}$ .

**Lemma 16.1.9.** *Un albero  $\Gamma = (V, L)$  è una catena se e soltanto se non contiene punti di ramificazione.*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $\Gamma$  sia una catena e sia  $c = (\alpha_j)_{0 \leq j \leq n}$  un cammino semplice aperto massimale in  $\Gamma$ . I vertici  $\alpha_0$  e  $\alpha_n$  sono estremi; se ci fosse quindi un punto di ramificazione esso sarebbe un  $\alpha_r$  con  $0 < r < n$ . Sia  $0 < j < n$  tale che  $j \neq r \pm 1$  e  $\{\alpha_r, \alpha_j\} \in L$ . A meno di cambiare l'ordine nel cammino  $c$  possiamo supporre  $0 \leq j < j+1 < r$ . Allora  $(\alpha_r, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_r)$  sarebbe un ciclo in  $\Gamma$ .

Viceversa, supponiamo che  $\Gamma$  sia un albero privo di punti di ramificazione e sia  $(\alpha_j)_{0 \leq j \leq n}$  una catena aperta massimale in  $\Gamma$ . Se  $V \neq \{\alpha_j | 0 \leq j \leq n\}$ , esisterebbe

un  $\beta \in V$  non appartenente alla catena, ma tale che  $\{\beta, \alpha_j\} \in L$ . Dovrebbe essere  $\beta \neq \alpha_0, \alpha_n$  perché questi sono estremi. Allora  $\alpha_j$  sarebbe un punto di ramificazione di  $\Gamma$ , perché  $\{\alpha_j, \alpha_{j-1}\}, \{\alpha_j, \alpha_{j+1}\}, \{\alpha_j, \beta\} \in L$ .  $\square$

## 16.2. Matrici di Cartan

Sia  $E$  uno spazio vettoriale reale di dimensione  $\ell \geq 1$  e sia  $\mathcal{R}$  un sistema di radici in  $E$ . Su  $E$  consideriamo fissato un prodotto scalare  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ -invariante.

Fissata una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{R}$ , associamo a  $\mathcal{R}$  la matrice  $\ell \times \ell$ :

$$(16.2.1) \quad M_{\mathcal{R}} = (\langle \alpha, \beta \rangle)_{\alpha, \beta \in \mathcal{B}}$$

Essa si dice la *matrice di Cartan* di  $\mathcal{R}$ .

Osserviamo che, se  $\mathcal{B}'$  è un'altra base di  $\mathcal{R}$ , allora  $\mathcal{B}' = \sigma(\mathcal{B})$  per un elemento  $\sigma$  del gruppo di Weyl  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ . Poiché  $\langle \sigma(\alpha), \sigma(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$  per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ , in quanto  $\sigma$  è un'isometria di  $E$ , la matrice di Cartan non dipende dalla particolare scelta della base  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{R}$ .

La matrice di Cartan caratterizza completamente un sistema di radici ridotto:

**Teorema 16.2.1.** *Siano  $\mathcal{R}$  un sistema di radici ridotto in  $E$ ,  $\mathcal{R}'$  un sistema di radici ridotto in  $E'$ . Supponiamo che  $\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{R}} E' = \ell$  e siano  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$  una base di  $\mathcal{R}$  ed  $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_\ell\}$  una base di  $\mathcal{R}'$ . Se  $\langle \alpha'_i, \alpha'_j \rangle = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$  per ogni  $1 \leq i, j \leq \ell$ , e  $\phi : E \rightarrow E'$  è l'isomorfismo lineare tale che  $\phi(\alpha_i) = \alpha'_i$  per  $i = 1, \dots, \ell$ , allora  $\phi(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$  e  $\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$  per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Il teorema segue dal fatto che il gruppo di Weyl di un sistema di radici è generato dalle riflessioni rispetto ai vettori di una base e che ogni radice di un sistema di radici ridotto è immagine, mediante il gruppo di Weyl, di una radice della base.  $\square$

## 16.3. Diagrammi di Dynkin

Sia  $E$  uno spazio vettoriale reale di dimensione finita  $\ell \geq 1$  e sia  $\mathcal{R}$  un sistema di radici in  $E$ . Fissiamo una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{R}$  e un prodotto scalare  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ -invariante in  $E$ .

Associamo ad  $\mathcal{R}$  un diagramma nel modo seguente:

- (1) gli elementi della base  $\mathcal{B}$  sono i vertici del diagramma;
- (2) congiungiamo due radici distinte  $\alpha, \beta$  di  $\mathcal{B}$  con

$$\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \widehat{\alpha\beta} \quad \text{lati};$$

- (3) se due vertici  $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$  sono connessi da lati, e  $\|\alpha\| < \|\beta\|$  aggiungiamo una freccia che indica la radice più corta  $\alpha$ .

Osserviamo che

- due radici di  $\mathcal{B}$  possono essere connesse al più da tre lati;
- quelle non connesse da alcun lato sono tra loro ortogonali;
- quelle connesse da un solo lato hanno la stessa lunghezza; quelle connesse da due lati hanno lunghezze il cui rapporto è  $\sqrt{2}$ ,
- quelle connesse da tre lati hanno lunghezze il cui rapporto è  $\sqrt{3}$ .

Dal diagramma di Dynkin possiamo ricavare la matrice di Cartan e quindi i sistemi di radici ridotti sono completamente determinati (a meno di isomorfismi) dai loro diagrammi di Dynkin. Chiaramente il diagramma di Dynkin non dipende dalla particolare scelta della base  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{R}$ .

Indicheremo nel seguito con  $\Delta(\mathcal{R})$  il diagramma di Dynkin del sistema di radici ridotto  $\mathcal{R}$ . Indicheremo ancora con  $\Gamma(\mathcal{R})$  il grafo associato al diagramma di Dynkin: fissata una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{R}$ , il grafo  $\Gamma(\mathcal{R})$  ha come insieme di vertici  $\mathcal{B}$  e i lati sono

$$L(\mathcal{R}) = \{ \{\alpha, \beta\} \subset \mathcal{B} \mid \alpha \neq \beta \text{ e } (\alpha|\beta) \neq 0 \}.$$

Il numero di lati in  $\Delta(\mathcal{R})$  che congiungono due radici  $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$  legate in  $\Gamma(\mathcal{R})$  si dice anche la *molteplicità* di  $\{\alpha, \beta\} \in L(\mathcal{R})$ .

Nel seguito considereremo fissato lo spazio Euclideo  $E$ , un sistema di radici  $\mathcal{R}$  in  $E$  e una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{R}$ ; il prodotto scalare in  $E$  è  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ -invariante.

**Lemma 16.3.1.** *Sia  $\mathcal{B}'$  un sottoinsieme di  $\mathcal{B}$ , sia  $E'$  il sottospazio vettoriale di  $E$  generato da  $\mathcal{B}'$  ed  $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap E'$ . Allora  $\mathcal{R}'$  è un sistema di radici in  $E'$ ,  $\mathcal{B}'$  è una base di  $\mathcal{R}'$  ed il diagramma di Dynkin  $\Delta(\mathcal{R}')$  di  $\mathcal{R}'$  si ottiene da  $\Delta(\mathcal{R})$  cancellando i vertici di  $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$  e i lati che escono da essi.*

**DIMOSTRAZIONE.** Basta osservare che  $s_\alpha(\mathcal{R}') \subset \mathcal{R}'$  se  $\alpha \in \mathcal{R}'$ . □

**Lemma 16.3.2.** *Se  $\mathcal{R}$  ha rango  $\ell$ , allora il numero di lati del grafo  $\Gamma(\mathcal{R})$  è strettamente minore di  $\ell$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ . Poiché i vettori della base  $\mathcal{B}$  sono linearmente indipendenti,

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|} \neq 0.$$

Quindi abbiamo:

$$0 < \|\gamma\|^2 = \ell + \sum_{1 \leq i < j \leq \ell} \frac{2(\alpha_i|\alpha_j)}{\|\alpha_i\| \|\alpha_j\|}.$$

Abbiamo

$$(\alpha_i|\alpha_j) \leq 0 \quad \text{per ogni } 1 \leq i < j \leq \ell,$$

$$\frac{4(\alpha|\beta)^2}{\|\alpha\|^2 \|\beta\|^2} \in \{1, 2, 3\}, \quad \text{se } \{\alpha_i, \alpha_j\} \in L(\mathcal{R}).$$

Quindi

$$\frac{2(\alpha_i|\alpha_j)}{\|\alpha_i\| \|\alpha_j\|} \leq -1 \quad \text{se } \{\alpha_i, \alpha_j\} \in L(\mathcal{R}).$$

Da questa osservazione segue la tesi. □

**Lemma 16.3.3.** *Il grafo  $\Gamma(\mathcal{R})$  associato ad un sistema di radici non contiene cicli.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per il Lemma 16.3.1, un ciclo di  $\Gamma(\mathcal{R})$  sarebbe il grafo associato ad un sistema di radici. Ciò non è possibile per il Lemma 16.3.2. □

**Lemma 16.3.4.** *In nessun vertice del diagramma di Dynkin  $\Delta(\mathcal{R})$  di un sistema di radici  $\mathcal{R}$  concorrono più di tre lati.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\alpha \in \mathcal{B}$  e siano  $\beta_1, \dots, \beta_k$  le radici di  $\mathcal{B}$  connesse ad  $\alpha$ , in  $\Delta(\mathcal{R})$ , da almeno un lato. Utilizzando il Lemma 16.3.1, possiamo supporre che  $\mathcal{B} = \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_k\}$ . Per il Lemma 16.3.3,  $\{\beta_i, \beta_j\} \notin L(\mathcal{R})$  se  $1 \leq i < j \leq k$ . Quindi  $\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \dots, \frac{\beta_k}{\|\beta_k\|}$  è un sistema ortonormale in  $E$ . Completiamolo ad una base ortonormale di  $E$  con l'aggiunta di un vettore  $\beta_0$ . Allora  $(\alpha|\beta_0) \neq 0$  e

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{h=0}^k \langle \alpha, \beta_h \rangle \beta_h.$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned} 2 = \langle \alpha, \alpha \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{h=0}^k \langle \alpha, \beta_h \rangle \langle \beta_h, \alpha \rangle \\ &> \frac{1}{2} \sum_{h=1}^k \langle \alpha, \beta_h \rangle \langle \beta_h, \alpha \rangle, \end{aligned}$$

onde

$$\sum_{h=1}^k \langle \alpha, \beta_h \rangle \langle \beta_h, \alpha \rangle < 4.$$

Poiché il primo membro di questa uguaglianza è il numero dei lati del diagramma di Dynkin che escono da  $\alpha$ , otteniamo la tesi.  $\square$

**Lemma 16.3.5.** *Sia  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  un cammino semplice aperto in  $\Gamma(\mathcal{R})$ . Allora:*

- (i)  $\alpha_0 = \alpha_1 + \dots + \alpha_k \in \mathcal{R}$ ;
- (ii)  $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \cup \{\alpha_0\}$  è la base di un sistema di radici  $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ ;
- (iii) Il diagramma di Dynkin  $\Delta(\mathcal{R}')$  si ottiene da  $\Delta(\mathcal{R})$  sostituendo ai vertici  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  e ai lati che li uniscono l'unico vertice  $\alpha_0$ , e facendo convergere in  $\alpha_0$  tutti i lati che congiungevano uno dei vertici  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) con i vertici in  $\mathcal{B} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** (i) Se  $\beta_i = \sum_{h=1}^i \alpha_h$ , per  $i = 1, \dots, k$ , abbiamo:

$$(\beta_i|\alpha_{i+1}) = (\alpha_i|\alpha_{i+1}) < 0 \quad \forall 1 \leq i \leq k-1.$$

Quindi per ricorrenza  $\beta_i \in \mathcal{R}$  per ogni  $i = 1, \dots, k$  ed in particolare  $\alpha_0 = \beta_k \in \mathcal{R}$ .

(ii) Sia  $E'$  il sottospazio vettoriale di  $E$  generato da  $\mathcal{B}'$ . Allora  $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap E'$  è un sistema di radici in  $E'$ . Chiaramente  $\mathcal{B}'$  è un sistema di radici semplici in  $\mathcal{R}^+(\mathcal{B}) \cap \mathcal{R}'$  e quindi una base in  $\mathcal{R}'$ .

(iii) Poiché  $\Gamma(\mathcal{R})$  non contiene cicli, ogni radice in  $\mathcal{B} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  è legata ad al più una delle radici  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ . Quindi

$$\langle \alpha_0, \beta \rangle \langle \beta, \alpha_0 \rangle = \max_{1 \leq i \leq k} \langle \alpha_i, \beta \rangle \langle \beta, \alpha_i \rangle, \quad \forall \beta \in \mathcal{B} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\},$$

da cui segue (iii).  $\square$

Otteniamo perciò:

**Lemma 16.3.6.** *Sia  $\Delta(\mathcal{R})$  il diagramma di Dynkin di un sistema di radici  $\mathcal{R}$  ridotto e irriducibile. Si hanno allora le seguenti alternative:*

- (1) Il grafo  $\Gamma(\mathcal{R})$  possiede un solo punto di ramificazione; allora due radici di  $\mathcal{B}$  sono connesse da al più un lato in  $\Delta(\mathcal{R})$ .
- (2) Il grafo  $\Gamma(\mathcal{R})$  è una catena e  $\Delta(\mathcal{R})$  contiene al più una coppia di vertici legati da più di un lato.

**DIMOSTRAZIONE.** (1) Ragioniamo per ricorrenza sul rango  $\ell$  di  $\mathcal{R}$ . Supponiamo che le radici in  $\mathcal{B}$  siano  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$  e che  $\alpha_1$  sia un punto di ramificazione di  $\Gamma(\mathcal{R})$  legato alle radici  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ . Se  $\ell = 4$ , non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, poiché  $\Gamma(\mathcal{R})$  è connesso, possiamo supporre che  $\{\alpha_4, \alpha_5\} \in L(\mathcal{R})$ . Il lato  $\{\alpha_4, \alpha_5\}$  ha molteplicità 1 in  $\Delta(\mathcal{R})$ , perché altrimenti nel diagramma di Dynkin del sistema di radici generato da  $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$  dalla radice  $\alpha_1 + \alpha_4$  uscirebbero più di tre lati.

Consideriamo ora il sistema di radici  $\mathcal{R}'$ , con base

$$\mathcal{B}' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_6, \dots, \alpha_\ell\}.$$

Per l'ipotesi induttiva  $\Gamma(\mathcal{R}')$  ha il solo punto di diramazione  $\alpha_1$  e per ogni coppia di radici legate  $\beta, \beta' \in \mathcal{B}'$  è  $\langle \beta, \beta' \rangle = -1$ . Ma questo implica che anche tutte le coppie di radici legate di  $\Gamma(\mathcal{R})$  sono collegate da una sola linea nel diagramma di Dynkin  $\Delta(\mathcal{R})$ .

Resta da dimostrare che  $\alpha_4$  e  $\alpha_5$  non sono punti di diramazione di  $\Gamma(\mathcal{R})$ . Se  $\alpha_4$  fosse di diramazione, a meno di cambiare gli indici potremmo supporre che  $\{\alpha_4, \alpha_6\} \in L(\mathcal{R})$ . Ma nel diagramma ottenuto identificando a un punto i vertici  $\alpha_1$  ed  $\alpha_4$  avremmo allora quattro lati che escono da  $\alpha_1 + \alpha_4$ , e questo ci darebbe una contraddizione. Analogamente si esclude la possibilità che  $\alpha_5$  sia di diramazione, considerando il diagramma ottenuto identificando a un vertice i vertici  $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5$ : nel vertice  $\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5$  convergerebbero almeno quattro lati.

(2) Se  $\Gamma(\mathcal{R})$  non contiene punti di diramazione, allora è una catena. Sia  $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$  un cammino semplice aperto massimale in  $\Gamma(\mathcal{R})$ . Possiamo ragionare per ricorrenza su  $\ell$ . Il caso  $\ell \leq 2$  è ovvio. Poiché non più di tre lati del diagramma di Dynkin possono uscire da uno stesso vertice, ci sarà un indice  $i$ , con  $1 \leq i < \ell$ , tale che  $\alpha_i$  ed  $\alpha_{i+1}$  siano legati da un solo lato in  $\Delta(\mathcal{R})$ . Applichiamo allora l'ipotesi induttiva al diagramma  $\Delta(\mathcal{R}')$  del sottosistema di radici  $\mathcal{R}'$  con base

$$\mathcal{B}' = \{\alpha_i + \alpha_{i+1}\} \cup \{\alpha_j \mid 1 \leq j \leq \ell, \quad j \neq i, i+1\},$$

ottenendo la tesi. □

**Lemma 16.3.7.** *Se  $\Gamma(\mathcal{R})$  è una catena, allora possono darsi i casi seguenti:*

- (1) ogni lato di  $\Gamma(\mathcal{R})$  ha molteplicità 1 in  $\Delta(\mathcal{R})$  (tipo  $A_\ell$ );
- (2) c'è un solo lato di  $\Gamma(\mathcal{R})$  di molteplicità 2 in  $\Delta(\mathcal{R})$ , cui appartiene uno degli estremi (tipi  $B_\ell$  e  $C_\ell$ );
- (3)  $\mathcal{R}$  ha rango quattro, un solo lato di molteplicità 2 e i vertici che gli appartengono non sono estremi (tipo  $F_4$ );
- (4)  $\mathcal{R}$  ha rango 2 e il lato in  $\Gamma(\mathcal{R})$  ha molteplicità 3 in  $\Delta(\mathcal{R})$  (tipo  $G_2$ ).

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\Gamma(\mathcal{R})$  ha un lato di molteplicità 3 in  $\Delta(\mathcal{R})$ , allora ha necessariamente rango due e un solo lato per il Lemma 16.3.4.

Supponiamo quindi che vi sia in  $\Gamma(\mathcal{R})$  un lato di molteplicità due in  $\Delta(\mathcal{R})$ . Abbiamo già dimostrato che vi è al più un lato di  $\Gamma(\mathcal{R})$  di molteplicità maggiore di uno in  $\Delta(\mathcal{R})$ . Una catena aperta massimale in  $\Gamma(\mathcal{R})$  sarà quindi della forma:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_q, \dots, \beta_1)$$

con

$$\begin{cases} \langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle = \langle \alpha_{i+1}, \alpha_i \rangle = -1 & \text{se } 1 \leq i < p, \\ \langle \beta_i, \beta_{i+1} \rangle = \langle \beta_{i+1}, \beta_i \rangle = -1 & \text{se } 1 \leq i < q, \\ \langle \alpha_p, \beta_q \rangle = -1, \quad \langle \beta_q, \alpha_p \rangle = -2, \\ \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_i, \beta_h \rangle = \langle \beta_h, \beta_k \rangle = 0 & \text{altrimenti,} \\ \|\beta_i\| = \sqrt{2}\|\alpha_j\| & \text{se } 1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq p. \end{cases}$$

Consideriamo i due vettori

$$\xi = \sum_{h=1}^p h\alpha_h \quad \text{e} \quad \eta = \sum_{h=1}^q h\beta_h.$$

Possiamo supporre per semplicità che  $\|\alpha_i\| = 1$  per ogni  $1 \leq i \leq p$  e  $\|\beta_i\| = \sqrt{2}$  per  $1 \leq i \leq q$ . Allora:

$$\begin{cases} \|\xi\|^2 = \sum_{h=1}^p h^2 - \sum_{h=1}^{p-1} h(h+1) = \frac{p(p+1)}{2} \\ \|\eta\|^2 = 2\sum_{h=1}^q h^2 - 2\sum_{h=1}^{q-1} h(h+1) = q(q+1). \end{cases}$$

Otteniamo poi

$$(\xi|\eta) = pq(\alpha_q|\beta_q) = -pq.$$

Per la diseguaglianza di Cauchy, tenuto conto del fatto che  $\xi$  ed  $\eta$  non sono proporzionali, risulta:

$$2p^2q^2 < p(p+1)q(q+1), \quad \text{ovvero} \quad (p-1)(q-1) < 2.$$

Avremo allora le seguenti possibilità:

$$\begin{aligned} p &= 1, q \text{ arbitrario (tipo } B_\ell), \\ q &= 1, p \text{ arbitrario (tipo } C_\ell), \\ p &= 2, q = 2 \text{ (tipo } F_4). \end{aligned}$$

Il Lemma è dimostrato.  $\square$

**Lemma 16.3.8.** *Supponiamo che  $\Gamma(\mathcal{R})$  sia connesso e contenga un punto di diramazione. Allora ogni lato di  $\Gamma(\mathcal{R})$  ha molteplicità 1 in  $\Delta(\mathcal{R})$  e possono darsi i seguenti casi:*

- (1) *Il punto di diramazione è legato a due estremi di  $\Gamma(\mathcal{R})$  (tipo  $D_\ell$ );*
- (2) *il rango di  $\mathcal{R}$  è o 6, o 7 o 8 e il punto di diramazione è connesso a uno degli estremi da un cammino semplice di lunghezza 2 e ad un altro estremo da un cammino semplice di lunghezza 1 (casi  $E_6, E_7, E_8$ ).*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\psi$  il punto di diramazione e siano

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \psi), (\beta_1, \dots, \beta_q, \psi), (\gamma_1, \dots, \gamma_r, \psi),$$

con  $r \leq q \leq p$ , i cammini semplici che lo connettono agli estremi di  $\Gamma(\mathcal{R})$ . Consideriamo i vettori:

$$\xi = \sum_{h=1}^p h\alpha_h, \quad \eta = \sum_{h=1}^q h\beta_h, \quad \theta = \sum_{h=1}^r h\gamma_h.$$

Essi sono due a due ortogonali e inoltre  $\xi, \eta, \theta, \psi$  sono linearmente indipendenti in  $E$ . Poiché tutti i vettori della base  $\mathcal{B}$  hanno la stessa lunghezza per il Lemma



In  $\mathbb{R}^{\ell+1}$  fissiamo la base canonica  $e_0, e_1, \dots, e_\ell$  e, posto  $e = e_0 + e_1 + \dots + e_n$  definiamo  $E = e^\perp$ . Poniamo

$$(16.4.1) \quad \mathcal{R} = \{\alpha \in \mathbb{Z}^{\ell+1} \mid \alpha \in E, \|\alpha\|^2 = 2\}.$$

Allora

$$(16.4.2) \quad \mathcal{R} = \{e_i - e_j \mid 0 \leq i \neq j \leq \ell\}.$$

Dimostreremo che  $\mathcal{R}$  è un sistema di radici di rango  $\ell$  e che una base di  $\mathcal{R}$  è costituita dalle radici:

$$(16.4.3) \quad \alpha_1 = e_1 - e_0, \alpha_2 = e_2 - e_1, \dots, \alpha_\ell = e_\ell - e_{\ell-1}.$$

Osserviamo che

$$(16.4.4) \quad \langle \alpha, \beta \rangle \in \{1, 0, -1\} \quad \forall \alpha \neq \beta \in \mathcal{R}$$

e che per ogni  $0 \leq i \neq j \leq \ell$ :

$$(16.4.5) \quad s_{e_i - e_j}(e_h) = \begin{cases} e_h & \text{se } h \neq i, j, \\ e_j & \text{se } h = i, \\ e_i & \text{se } h = j. \end{cases}$$

Quindi  $s_\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$ . Da queste osservazioni segue che  $\mathcal{R}$  è un sistema di radici e che il suo gruppo di Weyl  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$  è isomorfo al gruppo  $\mathfrak{S}_{\ell+1}$  delle permutazioni dei vettori della base canonica di  $\mathbb{R}^{\ell+1}$ .

La cardinalità di  $\mathcal{R}$  è  $\ell(\ell+1)$ . Il fatto che  $\mathcal{B}$  sia una base di  $\mathcal{R}$  segue dal fatto che, se  $0 \leq i \neq j \leq \ell$ , abbiamo:

$$(16.4.6) \quad e_i - e_j = \begin{cases} \sum_{h=j+1}^i \alpha_h & \text{se } i > j, \\ -\sum_{h=i+1}^j \alpha_h & \text{se } i < j. \end{cases}$$

La più grande radice rispetto alla base  $\mathcal{B}$  è

$$(16.4.7) \quad e_\ell - e_0 = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i.$$

Chiaramente il diagramma di Dynkin di  $\mathcal{R}$  è una catena di lunghezza  $\ell-1$ , con lati tutti di molteplicità 1 e quindi di tipo  $A_\ell$ .

Il gruppo quoziente  $\mathbf{A}(\mathcal{R})/\mathbf{W}(\mathcal{R})$  è isomorfo al gruppo degli automorfismi del diagramma di Dynkin: esso consiste quindi dell'identità e della trasformazione  $\alpha_i \rightarrow \alpha_{\ell-i+1}$ . Quindi  $\mathbf{A}(\mathcal{R})/\mathbf{W}(\mathcal{R}) \simeq \mathbb{Z}_2$  ed abbiamo

$$(16.4.8) \quad \mathbf{A}(\mathcal{R}) \simeq \begin{cases} \mathfrak{S}_2 & \text{se } \ell = 1, \\ \mathfrak{S}_{\ell+1} \times \mathbb{Z}_2 & \text{se } \ell \geq 2, \end{cases}$$







Quindi  $\mathcal{R}$  contiene  $2\ell(\ell - 1)$  radici. La verifica del fatto che  $\mathcal{R}$  sia un sistema di radici è immediata:

è chiaro che  $\mathcal{R}$  genera  $\mathbb{R}^\ell$ ; abbiamo poi

$$(16.4.27) \quad \langle \alpha, \beta \rangle \in \{0, \pm 1\} \quad \forall \alpha \neq \beta \in \mathcal{R},$$

ed inoltre da

$$(16.4.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{e_i - e_j}(e_h) = \begin{cases} e_h & \text{se } h \neq i, j, \\ e_j & \text{se } h = i, \\ e_i & \text{se } h = j; \end{cases} \\ s_{e_i + e_j}(e_h) = \begin{cases} e_h & \text{se } h \neq i, j, \\ -e_j & \text{se } h = i, \\ -e_i & \text{se } h = j; \end{cases} \end{array} \right.$$

segue che  $s_\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$ .

Il vettore  $\xi = (\ell - 1, \ell - 2, \dots, 2, 1, 0)$  è regolare e  $|\langle \xi | \alpha \rangle| \geq 1$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$ . Abbiamo  $\mathcal{R}^+(\xi) = \{e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq \ell\}$ . La base  $\mathcal{B}$  relativa alla camera di Weyl che contiene  $\xi$  è costituita dagli  $\alpha \in \mathcal{R}$  per cui  $\langle \xi | \alpha \rangle = 1$ , cioè dai vettori:

$$(16.4.29) \quad \alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = e_2 - e_3, \dots, \alpha_{\ell-1} = e_{\ell-1} - e_\ell, \alpha_\ell = e_{\ell-1} + e_\ell.$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} e_i - e_j &= \sum_{h=i}^{j-1} \alpha_h, & 1 \leq i < j \leq \ell, \\ e_i + e_j &= \sum_{h=i}^{j-1} \alpha_h + 2 \sum_{h=j}^{\ell-2} \alpha_h + \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell, & 1 \leq i < j \leq \ell - 2, \\ e_i + e_{\ell-1} &= \sum_{h=i}^{\ell} \alpha_h, & 1 \leq i < \ell - 1, \\ e_i + e_\ell &= \sum_{h=i}^{\ell} \alpha_h, & 1 \leq i \leq \ell - 2, \\ e_{\ell-1} + e_\ell &= \alpha_\ell \end{aligned}$$

Osserviamo che  $\alpha_{\ell-2}$  è l'unico punto di diramazione e quindi il diagramma di Dynkin di  $\mathcal{R}$  è effettivamente di tipo  $D_\ell$ .

Per ogni  $1 \leq i < j \leq \ell$  poniamo:

$$\sigma_{i,j} = s_{e_i - e_j} \circ s_{e_i + e_j}.$$

Abbiamo:

$$(16.4.30) \quad \sigma_{i,j}(e_h) = \begin{cases} e_h & \text{se } h \neq i, j, \\ -e_i & \text{se } h = i, \\ -e_j & \text{se } h = j. \end{cases}$$

Queste trasformazioni generano un sottogruppo normale di  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ , isomorfo a  $\mathbb{Z}_2^{\ell-1}$ , mentre le  $s_{e_i - e_j}$  generano un sottogruppo isomorfo a  $\mathfrak{S}_\ell$ . Abbiamo quindi

$$(16.4.31) \quad \mathbf{W}(\mathcal{R}) \simeq \mathbb{Z}_2^{\ell-1} \ltimes \mathfrak{S}_\ell.$$

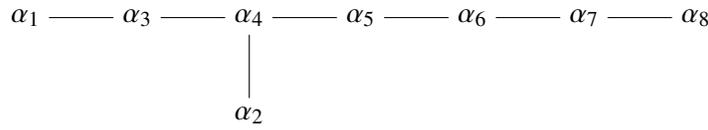
Se  $\ell \geq 5$ , il gruppo di automorfismi del diagramma di Dynkin si riduce all'identità e quindi

$$(16.4.32) \quad \mathbf{A}(\mathcal{R}) = \mathbf{W}(\mathcal{R}) \simeq \mathbb{Z}_2^{\ell-1} \times \mathfrak{S}_\ell \quad \text{se } \ell \geq 5.$$

Nel caso  $\ell = 4$ , le permutazioni dei vertici  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$  sono isomorfismi del diagramma di Dynkin e quindi, nel caso  $\ell = 4$ , otteniamo

$$(16.4.33) \quad \mathbf{A}(\mathcal{R}_{D_4}) \simeq (\mathbb{Z}_2^{\ell-1} \times \mathfrak{S}_\ell) \times \mathfrak{S}_3.$$

**Tipo  $E_8$ .**



Matrice di Cartan:

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia  $E = \mathbb{R}^8$ , con base canonica  $e_1, \dots, e_8$ . Consideriamo il sottogruppo additivo  $\Lambda$  di  $\mathbb{R}^8$  definito da:

$$(16.4.34) \quad \alpha \in \Lambda \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \sum_{h=1}^8 k_h e_h, \\ 2k_i \in \mathbb{Z} \quad \forall 1 \leq i \leq 8, \\ k_i - k_j \in \mathbb{Z} \quad \forall 1 \leq i < j \leq 8, \\ \sum_{i=1}^8 k_i \in 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Sia

$$(16.4.35) \quad \mathcal{R} = \{\alpha \in \Lambda \mid \|\alpha\|^2 = 2\}.$$

$\mathcal{R}$  contiene tutti i vettori della forma  $\pm e_i \pm e_j$  con  $1 \leq i < j \leq 8$  e quindi genera  $\mathbb{R}^8$ . Scriviamo un elemento  $\alpha$  di  $\mathcal{R}$  nella forma:

$$\alpha = \sum_{h=1}^8 \frac{t_h}{2} e_h$$

con  $t_1, \dots, t_8 \in \mathbb{Z}$ . Poiché  $t_i - t_j \in 2\mathbb{Z}$  per ogni  $i, j = 1, \dots, 8$ , i coefficienti  $t_h$  sono o tutti pari o tutti dispari.

Nel caso siano tutti pari, scriviamo  $t_h = 2r_h$  con  $r_h \in \mathbb{Z}$  per  $h = 1, \dots, 8$  e dalla condizione che  $\sum r_h^2 = 2$  deduciamo che  $\alpha$  è della forma  $\pm e_i \pm e_j$  con  $1 \leq i < j \leq 8$ .

Se i  $t_h$  sono tutti dispari, poniamo  $t_h = 2r_h + 1$  con  $r_h \in \mathbb{Z}$  per ogni  $h = 1, \dots, 8$ . Dalla  $\sum (2r_h + 1)^2 = 8$ , deduciamo che gli  $r_h$  devono essere tutti uguali o a 0 o a  $-1$ , cioè i  $t_h$  sono tutti uguali a  $\pm 1$  ed otteniamo quindi:

$$\alpha = \sum \epsilon_i e_i \quad \text{con} \quad \epsilon_i \in \{1, -1\} \quad \text{per ogni} \quad i = 1, \dots, 8 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^8 \epsilon_i \in 4\mathbb{Z}.$$

Posto  $\epsilon_i = (-1)^{k_i}$ , la condizione  $\sum_{i=1}^8 \epsilon_i \in 4\mathbb{Z}$  equivale a  $\sum_{h=1}^8 k_h \in 2\mathbb{Z}$ .

Gli elementi di  $\mathcal{R}$  sono quindi:

$$(16.4.36) \quad \begin{cases} \pm e_i \pm e_j & \text{per } 1 \leq i < j \leq 8, \\ \frac{1}{2} \sum_{h=1}^8 (-1)^{k_h} e_h & \text{con } k_h \in \{0, 1\}, \sum_{h=1}^8 k_h \in 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Quindi il numero di elementi di  $\mathcal{R}$  è

$$\binom{8}{2} \cdot 4 + 2^7 = 28 \cdot 4 + 128 = 240.$$

Se  $\alpha = \sum a_h e_h, \beta = \sum b_h e_h$  appartengono a  $\mathcal{R}$ , e  $\alpha \neq \pm \beta$ , abbiamo

$$(16.4.37) \quad \langle \alpha, \beta \rangle = 2(\alpha|\beta) = 2 \sum a_h b_h \in \{0, \pm 1\},$$

come si verifica facilmente utilizzando le (16.4.36).

Se  $\alpha = \sum a_h e_h, \beta = \sum b_h e_h$  appartengono a  $\mathcal{R}$ , abbiamo:

$$(16.4.38) \quad s_\alpha(\beta) = \sum_{h=1}^8 \left( b_h - \left( \sum_{i=1}^8 a_i b_i \right) a_h \right) e_h$$

ed esaminando le varie possibilità in (16.4.36) si ricava che  $s_\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$ . Consideriamo il vettore  $\xi = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 23) \in \mathbb{R}^8$ . Esso è regolare perché:

$$\begin{cases} (\xi| \pm e_i \pm e_j) = \pm(i-1) \pm (j-1) \neq 0 & \text{per } 1 \leq i < j \leq 8 \\ (\xi| \pm e_i \pm e_8) = \pm(i-1) \pm 23 \neq 0 & \text{per } 1 \leq i \leq 7 \\ (\xi| \pm e_8 + \sum_{h=1}^7 \epsilon_h e_h) = 23 + \sum \epsilon_h (h-1) \end{cases}$$

e

$$\left| \sum \epsilon_h (h-1) \right| \leq \left| \sum_{h=1}^6 h \right| \leq 21.$$

Chiaramente  $|(\xi|\alpha)| \geq 1 \quad \forall \alpha \in \mathcal{R}$  e  $(\xi|\alpha) = 1$  per le radici:

$$(16.4.39) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_8) - \frac{1}{2}(e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7), \\ \alpha_2 = e_1 + e_2, \\ \alpha_3 = e_2 - e_1, \\ \alpha_4 = e_3 - e_2, \\ \alpha_5 = e_4 - e_3, \\ \alpha_6 = e_5 - e_4, \\ \alpha_7 = e_6 - e_5, \\ \alpha_8 = e_7 - e_6. \end{cases}$$

Esse formano quindi una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{R}$ .

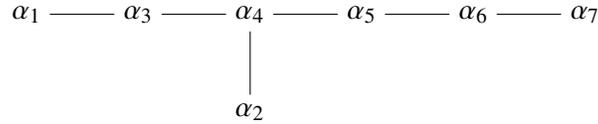
La radice  $\alpha_4$  è legata alle radici  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\alpha_5$  ed è dunque il vertice di diramazione di  $\Gamma(\mathcal{R})$ . Si verifica facilmente che il diagramma di Dynkin è di tipo  $E_8$ .

Chiaramente  $(\xi|\alpha)$  per  $\alpha \in \mathcal{R}$  ha un massimo per  $\alpha = e_7 + e_8$ , che risulta quindi il vettore di peso massimo:

$$(16.4.40) \quad e_7 + e_8 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8.$$

Il gruppo di Weil  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$  coincide con il gruppo  $\mathbf{A}(\mathcal{R})$  degli automorfismi di  $\mathcal{R}$  e ha ordine  $2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ .

**Tipo  $E_7$ .**



La matrice di Cartan è:

$$E_7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo  $\mathbb{R}^8$ , in cui è fissato un sistema di radici  $\tilde{\mathcal{R}}$  di tipo  $E_8$ , con base  $\alpha_1, \dots, \alpha_8$  descritta da (16.4.39).

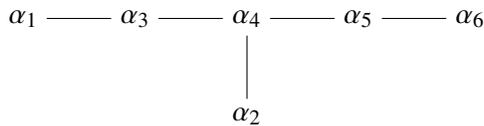
Consideriamo il sottospazio  $E$  generato da  $\alpha_1, \dots, \alpha_7$ . Questa è la base di un sistema di radici  $\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}} \cap E$  di tipo  $E_7$ . I suoi elementi sono

$$(16.4.41) \quad \begin{cases} \pm e_i \pm e_j & \text{per } 1 \leq i < j \leq 6, \\ \pm(e_7 - e_8), \\ \pm \frac{1}{2}(e_7 - e_8 + \sum_{h=1}^6 \epsilon_h e_h) & \text{con } \epsilon_h \in \{\pm 1\}, \quad \sum_{h=1}^6 \epsilon_h \notin 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Il numero di radici in  $E$  è  $2 + \binom{6}{2} \cdot 4 + 2^6 = 126$ .

Il gruppo di Weyl coincide con il gruppo degli automorfismi e ha ordine  $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$ .

**Tipo  $E_6$ .**



Matrice di Cartan:

$$E_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo  $\mathbb{R}^8$ , in cui è fissato un sistema di radici  $\tilde{\mathcal{R}}$  di tipo  $E_8$ , con base  $\alpha_1, \dots, \alpha_8$  descritta da (16.4.39).

Consideriamo il sottospazio  $E$  generato da  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ . Questa è la base di un sistema di radici  $\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}} \cap E$  di tipo  $E_6$ . I suoi elementi sono

$$(16.4.42) \quad \begin{cases} \pm e_i \pm e_j & \text{per } 1 \leq i < j \leq 5, \\ \pm \frac{1}{2} (e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{h=1}^5 \epsilon_h e_h) & \text{con } \epsilon_h \in \{\pm 1\}, \quad \sum_{h=1}^5 \epsilon_h \in 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Il numero di radici è  $\binom{5}{2} \cdot 4 + 2^5 = 72$ .

Il gruppo di Weyl  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$  ha ordine  $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$  e il quoziente  $\mathbf{A}(\mathcal{R})/\mathbf{W}(\mathcal{R})$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ .

**Tipo  $F_4$ .**

$$\alpha_1 \text{ --- } \alpha_2 \implies \alpha_3 \text{ --- } \alpha_4$$

Matrice di Cartan:

$$F_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo in  $\mathbb{R}^4$  la base canonica  $e_1, e_2, e_3, e_4$  e poniamo  $e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ . Il sottogruppo additivo  $\Lambda$  di  $\mathbb{R}^4$  generato da  $e_1, e_2, e_3, e_4, \frac{1}{2}e$  si caratterizza come l'insieme dei vettori  $\alpha = k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 + k_4 e_4$  di  $\mathbb{R}^4$  tali che:

$$(16.4.43) \quad \begin{cases} 2k_i \in \mathbb{Z} & \text{per } i = 1, 2, 3, 4, \\ k_i - k_j \in \mathbb{Z} & \text{per } i, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Sia

$$(16.4.44) \quad \mathcal{R} = \{\alpha \in \Lambda \mid \|\alpha\| = 1\} \cup \{\alpha \in \Lambda \mid \|\alpha\|^2 = 2\}.$$

Allora  $\mathcal{R}$  consiste dei vettori:

$$(16.4.45) \quad \begin{cases} \pm e_i & \text{per } i = 1, 2, 3, 4, \\ \pm e_i \pm e_j & \text{per } 1 \leq i < j \leq 4, \\ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4). \end{cases}$$

Si verifica che  $\mathcal{R}$  è un sistema di radici e che

$$(16.4.46) \quad \alpha_1 = e_2 - e_3, \quad \alpha_2 = e_3 - e_4, \quad \alpha_3 = e_4, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$$

è una base di  $\mathcal{R}$ .

Poiché la matrice di Cartan di  $\mathcal{R}$  è la  $F_4$  data sopra, questo è un sistema di tipo  $F_4$ . Poiché le radici di lunghezza massima formano un sistema di tipo  $D_4$ , otteniamo

$$(16.4.47) \quad \mathbf{A}(\mathcal{R}) = \mathbf{W}(\mathcal{R}) \simeq (\mathbb{Z}_2^3 \ltimes \mathfrak{S}_4) \ltimes \mathfrak{S}_3.$$

**Tipo  $G_2$ .**

$$\alpha_1 \implies \alpha_2$$

Matrice di Cartan:

$$G_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo in  $\mathbb{R}^3$  l'iperpiano  $E$  ortogonale a  $e = e_1 + e_2 + e_3$ . Sia

$$(16.4.48) \quad \mathcal{R} = \{\alpha \in \mathbb{Z}^3 \mid (\alpha|e) = 0, \|\alpha\|^2 \in \{2, 6\}\}.$$

Gli elementi di  $\mathcal{R}$  sono della forma  $k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3$  con  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ ,  $k_1 + k_2 + k_3 = 0$  e  $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \in \{2, 6\}$ . Otteniamo quindi i 12 elementi:

$$\begin{cases} \pm(e_1 - e_2), \pm(e_1 - e_3), \pm(e_2 - e_3), & \text{di lunghezza } \sqrt{2} \\ \pm(2e_1 - e_2 - e_3), \pm(2e_2 - e_1 - e_3), \pm(2e_3 - e_1 - e_2), & \text{di lunghezza } \sqrt{6}. \end{cases}$$

Si verifica direttamente che  $\langle \alpha, \beta \in \{\pm 1, \pm 3\}$  se  $\alpha \neq \beta \in \mathcal{R}$  e che  $s_\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$ . Quindi  $\mathcal{R}$  è un sistema di radici. Una sua base è

$$(16.4.49) \quad \alpha_1 = e_1 - e_2, \quad \alpha_2 = e_2 + e_3 - 2e_1.$$

Il gruppo di Weyl coincide con il gruppo degli automorfismi di  $\mathcal{R}$  ed è isomorfo al gruppo diedrale di ordine 12, definito dai generatori  $a, b$  e dalla relazione  $(ab)^6 = 1$ .

### 16.5. Sistemi di radici non ridotti

Fissiamo uno spazio vettoriale reale  $E$ , su cui consideriamo fissato un prodotto scalare  $(\cdot|\cdot)$ . Considereremo in  $E$  sistemi di radici per  $\mathcal{R}$  il cui gruppo di Weyl sia un gruppo di trasformazioni ortogonali rispetto al prodotto scalare assegnato. Ricordiamo che, se  $\mathcal{R} \subset E$  è un sistema di radici, due radici proporzionali di  $\mathcal{R}$  possono avere, come fattore di proporzionalità, solo uno dei numeri  $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$ . Una radice  $\alpha \in \mathcal{R}$  tale che  $\alpha/2 \notin \mathcal{R}$  si dice *indivisibile*.

**Teorema 16.5.1.** *Sia  $\mathcal{R} \subset E$  un sistema di radici irriducibile, non ridotto, di rango  $\geq 2$ .*

- (i) *L'insieme  $\mathcal{R}' = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid \alpha/2 \notin \mathcal{R}\}$  è un sistema di radici irriducibile e ridotto di  $E$  e  $\mathbf{W}(\mathcal{R}') = \mathbf{W}(\mathcal{R})$ .*
- (ii) *Sia  $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$  l'insieme delle radici di lunghezza minima  $\lambda$  in  $\mathcal{R}$ . Allora due qualsiasi radici non proporzionali di  $\mathcal{A}$  sono ortogonali.*
- (iii) *Sia  $\mathcal{D}$  l'insieme delle radici di  $\mathcal{R}$  di lunghezza  $\lambda\sqrt{2}$ . Allora  $\mathcal{D} \neq \emptyset$  ed abbiamo:*

$$(16.5.1) \quad \mathcal{R}' = \mathcal{A} \cup \mathcal{D} \quad \text{ed} \quad \mathcal{R} = \mathcal{A} \cup \mathcal{D} \cup 2\mathcal{A}.$$

DIMOSTRAZIONE. (i)  $\mathcal{R}' \subset E \setminus \{0\}$  contiene un multiplo di ciascuna radice di  $\mathcal{R}$  e quindi genera  $E$ . Inoltre  $s_\alpha(\mathcal{R}') = \mathcal{R}'$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$  e quindi è chiaro che le proprietà (R1), (R2) ed (R3) che definiscono i sistemi di radici sono soddisfatte. (ii), (iii) Poiché  $\mathcal{R}$  non è ridotto, contiene almeno una radice  $\alpha$  tale che  $2\alpha$  sia ancora una radice. Poiché  $\mathcal{R}$  è irriducibile e di rango  $\geq 2$ , vi è almeno una radice  $\beta \in \mathcal{R}$  tale che  $\langle \beta, \alpha \rangle > 0$ . Abbiamo  $\frac{1}{2}\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \beta, 2\alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ . L'unica possibilità è quindi che  $\langle \beta, \alpha \rangle \geq 2$ , e dunque  $\|\beta\| = \|\alpha\| \sqrt{2}$ . Poiché  $\mathcal{R}'$  è ridotto e irriducibile le possibili lunghezze di elementi di  $\mathcal{R}'$  possono essere solo  $\lambda$  e  $\lambda \sqrt{2}$ , ove  $\lambda$  è la minima lunghezza di un elemento di  $\mathcal{R}$ . Il gruppo di Weyl  $\mathbf{W}(\mathcal{R}')$  opera transitivamente sulle radici di lunghezza minima  $\lambda$  e quindi: per ogni  $\alpha \in \mathcal{A}$  anche  $2\alpha$  è una radice ed otteniamo perciò le decomposizioni:  $\mathcal{R}' = \mathcal{A} \cup \mathcal{D}$  e  $\mathcal{R} = \mathcal{A} \cup \mathcal{D} \cup 2\mathcal{A}$ .  $\square$

Viceversa, abbiamo:

**Teorema 16.5.2.** *Sia  $\mathcal{R}$  un sistema di radici ridotto e irriducibile. Supponiamo che  $\{\|\alpha\| \mid \alpha \in \mathcal{R}\} = \{\lambda, \lambda \sqrt{2}\}$ . Sia  $\mathcal{A} = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid \|\alpha\| = \lambda\}$ . Se due qualsiasi elementi di  $\mathcal{A}$  sono tra loro ortogonali, allora  $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup 2\mathcal{A}$  è ancora un sistema di radici, non ridotto, di cui  $\mathcal{R}$  è il sistema di radici indivisibili.*



## Costruzione delle algebre di Lie semisemplici

### 17.1. Algebra involupante universale

Sia  $\mathfrak{A}$  un'algebra associativa su un campo  $\mathbb{k}$ . Lo spazio vettoriale  $\mathfrak{A}$ , con il commutatore definito da

$$(17.1.1) \quad [a, b] = ab - ba \quad \forall a, b \in \mathfrak{A}$$

è un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$ .

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie ed  $\mathfrak{A}$  un'algebra associativa sullo stesso campo  $\mathbb{k}$ . Chiamiamo *rappresentazione* di  $\mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{A}$  un omomorfismo di algebre di Lie:

$$(17.1.2) \quad \rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

per la struttura di algebra di Lie di  $\mathfrak{A}$  definita dalla (17.1.1). Ciò significa che

$$(17.1.3) \quad \rho([X, Y]) = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$ .

**Definizione 17.1.1.** Chiamiamo *algebra involupante universale* di  $\mathfrak{g}$  il dato di un'algebra associativa unitaria  $\mathfrak{G}$  su  $\mathbb{k}$  e di una rappresentazione  $u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{G}$  tale che

- (i)  $u(\mathfrak{g})$  genera  $\mathfrak{G}$  come  $\mathbb{k}$ -algebra associativa unitaria;
- (ii) per ogni rappresentazione  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{A}$  di  $\mathfrak{g}$  in un'algebra associativa unitaria  $\mathfrak{A}$  su  $\mathbb{k}$  esiste un omomorfismo di  $\mathbb{k}$ -algebre associative unitarie  $\tilde{\rho} : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{A}$  che renda commutativo il diagramma:

$$(17.1.4) \quad \begin{array}{ccc} & \mathfrak{g} & \\ u \swarrow & & \searrow \rho \\ \mathfrak{G} & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & \mathfrak{A} \end{array}$$

Osserviamo che, per la condizione (i), l'estensione  $\tilde{\rho}$  di  $\rho$  è unica.

**Teorema 17.1.2.** *Ogni algebra di Lie ammette un'algebra involupante universale, unica a meno di isomorfismi.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie sul campo  $\mathbb{k}$ . Indichiamo con  $T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} T^m(\mathfrak{g})$  l'algebra tensoriale del  $\mathbb{k}$  spazio vettoriale  $\mathfrak{g}$ . Sia  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{A}$  una rappresentazione di  $\mathfrak{g}$  in una  $\mathbb{k}$ -algebra associativa unitaria  $\mathfrak{A}$ . Per la proprietà universale del prodotto tensoriale, la  $\rho$  si estende a un unico morfismo di algebre associative unitarie

$$(17.1.5) \quad T(\rho) : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{A}.$$

Poiché  $\rho$  è una rappresentazione, il nucleo di  $T(\rho)$  contiene l'ideale bilatero  $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$  generato dagli elementi della forma

$$(17.1.6) \quad X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y], \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Il quoziente

$$(17.1.7) \quad \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \frac{T(\mathfrak{g})}{\mathcal{I}(\mathfrak{g})}$$

è un'algebra associativa unitaria e per passaggio al quoziente otteniamo una rappresentazione  $u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  definita dal diagramma commutativo:

$$(17.1.8) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\iota} & T(\mathfrak{g}) \\ & \searrow u & \swarrow \pi \\ & \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) & \end{array}$$

ove la  $\iota$  è l'inclusione associata all'isomorfismo  $\mathfrak{g} \simeq T^1(\mathfrak{g})$  e la  $\pi$  è la proiezione nel quoziente. Osserviamo che  $\mathcal{I}(\mathfrak{g}) \cap u(\mathfrak{g}) = \{0\}$ , quindi  $u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  è iniettiva e  $u(\mathfrak{g})$  genera  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  perché  $T^1(\mathfrak{g})$  genera  $T(\mathfrak{g})$  come algebra associativa unitaria. In particolare  $u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  verifica la condizione (i).

Poiché  $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$  è contenuto nel nucleo di  $T(\rho)$ , otteniamo un diagramma commutativo:

$$(17.1.9) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & \mathfrak{A} \\ u \uparrow & & \uparrow T(\rho) \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\iota} & T(\mathfrak{g}) \end{array}$$

che definisce la  $\tilde{\rho}$ . Quindi  $u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  soddisfa anche (ii) ed è un'algebra involupante universale di  $\mathfrak{g}$ .

Dimostriamo ora l'unicità. Se  $u' : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{G}$  è un'algebra involupante universale di  $\mathfrak{g}$ , otteniamo estensioni  $\tilde{u} : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  ed  $\tilde{u}' : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{G}$  di  $u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  ed  $u' : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{G}$ . Osserviamo che  $u' = \tilde{u}' \circ u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{G}$  ed  $u = \tilde{u} \circ u' : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  sono rappresentazioni e la prima si estende all'identità su  $\mathfrak{G}$ , la seconda all'identità su  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ : quindi  $\tilde{u}' \circ \tilde{u}$  ed  $\tilde{u} \circ \tilde{u}'$  sono rispettivamente l'identità su  $\mathfrak{G}$  ed  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  e dunque  $\mathfrak{G}$  e  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  sono isomorfi.  $\square$

Quindi, a meno di isomorfismi, l'algebra  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  costruita nella dimostrazione del Teorema 17.1.2 è l'algebra involupante universale di  $\mathfrak{g}$ . Essendo il quoziente dell'algebra graduata  $T(\mathfrak{g})$  rispetto all'ideale bilatero  $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ , l'algebra involupante universale è dotata di una *filtrazione canonica*

$$(17.1.10) \quad \mathfrak{U}^{(0)}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{U}^{(1)}(\mathfrak{g}) \subset \dots \subset \mathfrak{U}^{(m)}(\mathfrak{g}) \subset \dots$$

ove

$$(17.1.11) \quad \mathfrak{U}^{(m)}(\mathfrak{g}) = \pi(T^m(\mathfrak{g})).$$

Ricordiamo che vale il

**Teorema 17.1.3** (Poincaré-Birchoff-Witt). *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  e sia  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  la sua algebra invilupante universale, su cui si considera la filtrazione canonica. Allora il graduato associato all'algebra filtrata  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ :*

$$(17.1.12) \quad \mathfrak{g}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g})) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{U}^{(m)}(\mathfrak{g})}{\mathfrak{U}^{(m-1)}(\mathfrak{g})}$$

è isomorfo all'algebra simmetrica di  $\mathfrak{g}$ .

In particolare, se  $\{X_i\}_{i \in I}$  è una base di  $\mathfrak{g}$  come spazio vettoriale su  $\mathbb{k}$  e fissiamo su  $I$  un ordinamento totale  $<$ , gli elementi

$$(17.1.13) \quad \pi(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_m}) \quad \text{con} \quad i_1 \leq \cdots \leq i_m$$

formano una base di  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  come spazio vettoriale su  $\mathbb{k}$ .

Per la dimostrazione, vedi Bourbaki: *Groupes et algèbres de Lie I*, §2, n. 7.

Una conseguenza del Teorema 18.1.8 è la seguente:

**Proposizione 17.1.4.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  e sia  $u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  la sua algebra invilupante universale. Sia  $\mathfrak{a}$  una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}$  e sia  $u_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{a})$  la sua algebra invilupante universale.*

- (i) *Vi è un monomorfismo canonico di algebre associative unitarie:  $\hat{\iota} : \mathfrak{U}(\mathfrak{a}) \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  che rende il diagramma:*

$$(17.1.14) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{a} & \xrightarrow{\iota} & \mathfrak{g} \\ u_{\mathfrak{a}} \downarrow & & \downarrow u \\ \mathfrak{U}(\mathfrak{a}) & \xrightarrow{\hat{\iota}} & \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

commutativo ( $\iota : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}$  è l'inculsione).

- (ii) *Se  $\mathfrak{a}$  è un ideale di  $\mathfrak{g}$  e  $u_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}} : \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$  la sua algebra invilupante universale, vi è un unico epimorfismo canonico di  $\mathbb{k}$ -algebre associative unitarie  $\hat{\pi} : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$  che renda commutativo il diagramma:*

$$(17.1.15) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \\ u \downarrow & & \downarrow u_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}} \\ \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\hat{\pi}} & \mathfrak{U}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}). \end{array}$$

Il suo nucleo è l'ideale bilatero di  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  generato da  $u(\mathfrak{a})$ .

- (iii) *Se  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$  è una somma diretta di ideali  $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}$ ,  $i \in I$ , allora:*

$$(17.1.16) \quad \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \simeq \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_i).$$

**DIMOSTRAZIONE.** (i) L'inculsione  $\iota : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}$  si estende a un'inclusione  $T(\iota) : T(\mathfrak{a}) \rightarrow T(\mathfrak{g})$  tra le algebre tensoriali. Basta allora osservare che  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) \cap T(\iota)(T(\mathfrak{a})) = T(\iota)(\mathcal{S}(\mathfrak{a}))$ .

(ii) L'epimorfismo lineare  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  induce un epimorfismo  $T(\pi) : T(\mathfrak{g}) \rightarrow T(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ . Poiché l'immagine inversa di  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$  in  $T(\mathfrak{g})$  contiene  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ , chiaramente otteniamo un epimorfismo  $\hat{\pi} : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$  che rende il diagramma (17.1.15) commutativo. Utilizzando il Teorema 18.1.8, si dimostra facilmente che il nucleo è l'ideale bilatero generato da  $u(\mathfrak{a})$  in  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ .

(iii) Si verifica che anche questa è una facile conseguenza del Teorema 18.1.8.  $\square$

**Proposizione 17.1.5.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  e sia  $u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  la sua algebra involupante universale. Se  $\Gamma \subset \mathfrak{g}$  è un sistema di generatori di  $\mathfrak{g}$  come algebra di Lie, allora  $\mathfrak{g}$  è isomorfa alla sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  generata da  $u(\Gamma)$ .*

Se  $\mathfrak{G}$  è una  $\mathbb{k}$ -algebra associativa unitaria, chiamiamo *rappresentazione lineare* di  $\mathfrak{G}$  il dato di uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{k}$  e di un omomorfismo di algebre associative unitarie  $\rho : \mathfrak{G} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ .

Sia ora  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  e sia  $\rho$  una rappresentazione lineare di  $\mathfrak{g}$  su uno spazio vettoriale  $V$ . Essa si prolunga in modo unico a una rappresentazione lineare  $\tilde{\rho}$  di  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  su  $V$ , che rende commutativo il diagramma:

$$(17.1.17) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{u} & \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \tilde{\rho} \\ \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V) & \xlongequal{\quad} & \text{End}_{\mathbb{k}}(V). \end{array}$$

## 17.2. Algebre di Lie libere

Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{k}$ .

**Definizione 17.2.1.** Chiamiamo *algebra di Lie libera* di  $V$  il dato di un'algebra di Lie  $\alpha$  su  $\mathbb{k}$  e di un monomorfismo  $\mathbb{k}$ -lineare

$$(17.2.1) \quad \iota : V \longrightarrow \alpha$$

tale che:

Per ogni algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  su  $\mathbb{k}$  ed ogni applicazione  $\mathbb{k}$ -lineare  $\phi : V \rightarrow \mathfrak{g}$  esiste un unico omomorfismo di algebre di Lie  $\tilde{\phi} : \alpha \rightarrow \mathfrak{g}$  che renda commutativo il diagramma:

$$(17.2.2) \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{g} \\ & \searrow \iota & \swarrow \tilde{\phi} \\ & \alpha & \end{array}$$

**Teorema 17.2.2.** *Per ogni spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{k}$  esiste, unica a meno di isomorfismi, un'algebra di Lie libera su  $V$ . La sua algebra involupante universale è isomorfa a  $T(V)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $T(V)$  l'algebra tensoriale di  $V$ . Consideriamo su  $T(V)$  la struttura di algebra di Lie definita da (17.1.1) e sia  $\mathfrak{L}(V)$  la sottoalgebra di Lie di  $T(V)$  generata da  $V \simeq T^1(V)$ .

Sia  $\mathfrak{g}$  una qualsiasi algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  e  $\phi : V \rightarrow \mathfrak{g}$  un'applicazione  $\mathbb{k}$ -lineare. Essa si estende a un omomorfismo di algebre:

$$T(\phi) : T(V) \rightarrow T(\mathfrak{g})$$

che dà, per passaggio al quoziente, un'applicazione:

$$\pi \circ T(\phi) : T(V) \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g}),$$

ove  $u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  è l'algebra involupante universale di  $\mathfrak{g}$  e  $\pi : T(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  la proiezione canonica. Identifichiamo  $\mathfrak{g}$  a  $u(\mathfrak{g})$ , utilizzando la Proposizione 17.1.5.

Definiamo  $\tilde{\phi}$  come la restrizione di  $\pi \circ T(\phi)$  a  $\mathfrak{Q}(V)$ . L'immagine di  $\tilde{\phi}$  è contenuta in  $\mathfrak{g}$  ed è un omomorfismo di algebre di Lie che rende commutativo il diagramma (17.2.2) (con  $\alpha = \mathfrak{Q}(V)$ ). L'unicità di  $\tilde{\phi}$  segue dal fatto che  $V$  genera  $\mathfrak{Q}(V)$  come algebra di Lie.

L'unicità, a meno di isomorfismi, dell'algebra di Lie libera di  $V$  segue dalla proprietà universale espressa dal diagramma commutativo (17.2.2). Se  $\iota_\alpha : V \rightarrow \alpha$  è un'algebra di Lie libera di  $V$ , otteniamo diagrammi commutativi:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\iota} & \mathfrak{Q}(V) \\ & \searrow \iota_\alpha & \nearrow \tilde{\iota} \\ & \alpha & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\iota} & \mathfrak{Q}(V) \\ & \searrow \iota_\alpha & \nearrow \tilde{\iota}_\alpha \\ & \alpha & \end{array}$$

e  $\tilde{\iota} \circ \tilde{\iota}_\alpha = id_{\mathfrak{Q}(V)}$ ,  $\tilde{\iota}_\alpha \circ \tilde{\iota} = id_\alpha$  perché estendono rispettivamente  $\iota = \tilde{\iota} \circ \iota_\alpha$  e  $\iota_\alpha = \tilde{\iota}_\alpha \circ \iota$ .

Sia ora  $\mathfrak{A}$  un'algebra associativa unitaria e sia  $\rho : \mathfrak{Q}(V) \rightarrow \mathfrak{A}$  una rappresentazione di  $\mathfrak{Q}(V)$ . Identifichiamo  $V$  a  $\iota(V) \subset \mathfrak{Q}(V)$ . La restrizione  $\rho|_V : V \rightarrow \mathfrak{A}$  si estende in modo unico a un omomorfismo di  $\mathbb{k}$ -algebre unitarie:

$$T(\rho|_V) : T(V) \rightarrow \mathfrak{A}.$$

La restrizione di  $T(\rho|_V)$  a  $\mathfrak{Q}(V) \subset T(V)$  coincide con  $\rho$  perché  $V$  genera  $\mathfrak{Q}(V)$  come sottoalgebra di Lie di  $T(V)$ .  $\square$

Sia ora  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  e sia  $\{X_i\}_{i \in I}$  un sistema di generatori di  $\mathfrak{g}$  come algebra di Lie. Sia  $V$  il sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{g}$  generato da  $\{X_i\}_{i \in I}$ . L'inclusione  $V \hookrightarrow \mathfrak{g}$  definisce un unico epimorfismo:

$$(17.2.3) \quad \pi : \mathfrak{Q}(V) \longrightarrow \mathfrak{g}.$$

Indichiamo con  $\mathcal{I}(V, \mathfrak{g})$  il nucleo di  $\pi$ . L'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  è allora isomorfa al quoziente  $\mathfrak{Q}(V)/\mathcal{I}(V, \mathfrak{g})$ . Osserviamo ancora che l'algebra involupante universale di  $\mathfrak{g}$  è isomorfa al quoziente di  $T(V)$  rispetto al suo ideale bilatero generato da  $\mathcal{I}(V, \mathfrak{g})$ .

Viceversa, dato uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{k}$  ed un ideale  $\mathcal{I}$  di  $\mathfrak{Q}(V)$ , l'algebra di Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{Q}(V)/\mathcal{I}$  risulta univocamente determinata da una base  $(X_i)_{i \in I}$  di  $V$  e da un sistema di generatori  $(Z_j)_{j \in J}$  di  $\mathcal{I}$ .

I generatori  $Z_j$  si possono a loro volta scrivere come *polinomi di Lie*  $P_j(\dots X_i \dots)$  nei vettori  $X_i$  della base assegnata di  $V$ . Diremo allora che l'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  è definita dai *generatori*  $(X_i)_{i \in I}$  e dalle *relazioni*

$$(17.2.4) \quad P_j(\dots X_i \dots) = 0 \quad \text{per } j \in J.$$

### 17.3. Una costruzione preliminare

Sia  $\mathcal{R}$  un sistema di radici nello spazio vettoriale reale  $E$ , di dimensione finita  $\ell \geq 1$ . Fissiamo una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{R}$ , e sia  $(n_{\alpha,\beta})$ , con  $n_{\alpha,\beta} = \langle \alpha, \beta \rangle$ , la matrice di Cartan di  $\mathcal{R}$ . Fissato un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero, sia  $B$  lo spazio vettoriale libero su  $\mathbb{k}$  con base  $\mathcal{B}$ . Sia  $T(B)$  l'algebra tensoriale di  $B$ . Per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$  definiamo degli endomorfismi  $\mathbb{k}$ -lineari  $x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha$  di  $T(B)$  ponendo:

$$(17.3.1) \quad \begin{cases} x_\alpha(1) = \alpha, \\ x_\alpha(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = \alpha \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n, \\ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{B}, \end{cases}$$

$$(17.3.2) \quad \begin{cases} h_\alpha(1) = 0, \\ h_\alpha(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = \left( \sum_{i=1}^n n_{\alpha_i, \alpha} \right) \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n \\ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{B}, \end{cases}$$

e definiamo  $y_\alpha$  per ricorrenza ponendo

$$(17.3.3) \quad \begin{cases} y_\alpha(1) = 0, \\ y_\alpha(\beta) = 0 \quad \forall \beta \in \mathcal{B}, \\ y_\alpha(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = (x_{\alpha_1} \circ y_\alpha - \delta_{\alpha, \alpha_1})(\alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) \\ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{B}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

**Lemma 17.3.1.** *Per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$ , l'endomorfismo  $x_\alpha$  ha grado 1, l'endomorfismo  $h_\alpha$  ha grado 0, l'endomorfismo  $y_\alpha$  ha grado  $-1$ . Valgono le relazioni:*

- (1)  $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$ ;
- (2)  $[h_\alpha, x_\beta] = n_{\beta, \alpha} x_\beta$  per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ ;
- (3)  $[h_\alpha, y_\beta] = -n_{\beta, \alpha} y_\beta$  per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ ;
- (4)  $[h_\alpha, h_\beta] = 0$  per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ ;
- (5)  $[x_\alpha, y_\beta] = 0$  per ogni  $\alpha \neq \beta \in \mathcal{B}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Il fatto che  $x_\alpha$  abbia grado 1 e  $h_\alpha$  grado 0 segue immediatamente dalla definizione. La relazione  $y_\alpha(T^m(B)) \subset T^{m-1}(B)$  si verifica ancora facilmente per induzione su  $m$ . La (4) è ovvia dalla definizione.

Osserviamo che:

$$(x_\alpha \circ y_\beta - y_\beta \circ x_\alpha)(1) = y_\beta(\alpha) = 0$$

se  $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ ; se  $\gamma$  è un'altra radice in  $\mathcal{B}$  otteniamo:

$$\begin{aligned} (x_\alpha \circ y_\beta - y_\beta \circ x_\alpha)(\gamma) &= -y_\beta \circ x_\alpha(\gamma) \\ &= -y_\beta(\alpha \otimes \gamma) \\ &= -(x_\alpha \circ y_\beta - \delta_{\beta, \alpha} h_\alpha)(\gamma) \\ &= \delta_{\beta, \alpha} n_{\gamma, \alpha} \gamma \end{aligned}$$

e quindi la (1) e la (5) valgono per la restrizione di  $[x_\alpha, y_\beta]$  a  $T^0(B) \oplus T^1(B)$ . Abbiamo poi, per ogni  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{B}$ :

$$y_\beta \circ x_\alpha(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = y_\beta(\alpha \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n)$$

$$= (x_\alpha \circ y_\beta - \delta_{\alpha,\beta})(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n)$$

e quindi:

$$[x_\alpha, y_\beta](\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = \delta_{\alpha,\beta} h_\beta(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n)$$

dimostra (1) e (5).

Verifichiamo la (2). Siano  $\alpha, \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{B}$ . Allora:

$$[h_\alpha, x_\beta](1) = h_\alpha \circ x_\beta(1) = n_{\beta,\alpha} \beta = n_{\beta,\alpha} x_\beta(1),$$

$$\begin{aligned} [h_\alpha, x_\beta](\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) &= h_\alpha(\beta \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) - \left( \sum_{i=1}^n n_{\alpha_i,\alpha} \right) \beta \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n \\ &= n_{\beta,\alpha} x_\beta(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n). \end{aligned}$$

Per dimostrare la (3), consideriamo per  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{B}$ :

$$\begin{aligned} 0 &= [h_\alpha, [x_\beta, y_\gamma]] \\ &= [n_{\beta,\alpha} x_\beta, y_\gamma] + [x_\beta, [h_\alpha, y_\gamma]] \\ &= [x_\beta, n_{\gamma,\alpha} y_\gamma] + [h_\alpha, y_\gamma]. \end{aligned}$$

Osserviamo che  $([h_\alpha, y_\gamma] + n_{\gamma,\alpha} y_\gamma)(t) = 0$  se  $t \in T^0(B) \oplus T^1(B)$ . Abbiamo poi, se  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{B}$ :

$$\begin{aligned} ([h_\alpha, y_\gamma] + n_{\gamma,\alpha} y_\gamma)(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) &= ([h_\alpha, y_\gamma] + n_{\gamma,\alpha} y_\gamma) \circ x_{\alpha_1}(\alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) \\ &= x_{\alpha_1} \circ ([h_\alpha, y_\gamma] + n_{\gamma,\alpha} y_\gamma)(\alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) \end{aligned}$$

da cui si dimostra per ricorrenza su  $n$  che

$$([h_\alpha, y_\gamma] + n_{\gamma,\alpha} y_\gamma)(T^n(B)) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi vale la (3).  $\square$

**Lemma 17.3.2.** *Gli endomorfismi  $\{x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{B}\}$  sono linearmente indipendenti.*

**DIMOSTRAZIONE.** Gli  $x_\alpha$ , per  $\alpha \in \mathcal{B}$  sono linearmente indipendenti perché gli  $x_\alpha(1) = \alpha$  sono linearmente indipendenti. Gli  $h_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{B}$ , sono linearmente indipendenti perché le loro restrizioni a  $B$  sono definite da:

$$h_\alpha(\beta) = n_{\beta,\alpha} \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{B}$$

e la matrice di Cartan è invertibile.

Consideriamo una combinazione lineare nulla degli  $y_\alpha$ :

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k_\alpha y_\alpha = 0.$$

Abbiamo allora

$$0 = [x_\beta, \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k_\alpha y_\alpha] = k_\beta h_\beta$$

e quindi  $k_\beta = 0$  per ogni  $\beta \in \mathcal{B}$ .

La tesi segue infine dal fatto che gli  $x_\alpha$ ,  $h_\alpha$ ,  $y_\alpha$  hanno rispettivamente gradi 1, 0 e  $-1$ .  $\square$

Sia ora  $\mathfrak{a}$  l'algebra di Lie definita dai generatori  $H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha$  ( $\alpha \in \mathcal{B}$ ) e dalle relazioni:

$$(17.3.4) \quad \begin{cases} [H_\alpha, H_\beta] = 0 & \forall \alpha, \beta \in \mathcal{B}; \\ [H_\alpha, X_\beta] = n_{\beta, \alpha} X_\beta & \forall \alpha, \beta \in \mathcal{B}; \\ [H_\alpha, Y_\beta] = -n_{\beta, \alpha} Y_\beta & \forall \alpha, \beta \in \mathcal{B}; \\ [X_\alpha, Y_\beta] = \delta_{\alpha, \beta} H_\beta & \forall \alpha, \beta \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

Indichiamo con  $\mathfrak{R}$  l'ideale delle relazioni.

**Lemma 17.3.3.** *Vi è un'unica rappresentazione*

$$(17.3.5) \quad \rho : \mathfrak{a} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(T(\mathcal{B}))$$

definita da

$$(17.3.6) \quad \begin{cases} \rho(X_\alpha) = x_\alpha, \\ \rho(Y_\alpha) = y_\alpha, \\ \rho(H_\alpha) = h_\alpha, \\ \text{per ogni } \alpha \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

In particolare gli elementi  $\{X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{B}\}$  sono linearmente indipendenti in  $\mathfrak{a}$ .

**Lemma 17.3.4.** *Esiste un unico isomorfismo involutivo  $\theta : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$  tale che*

$$(17.3.7) \quad \begin{cases} \theta(X_\alpha) = Y_\alpha \\ \theta(Y_\alpha) = X_\alpha \\ \theta(H_\alpha) = -H_\alpha \\ \forall \alpha \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

Sia  $Q \subset \mathbb{R}^\ell$  lo  $\mathbb{Z}$ -modulo libero generato da  $\mathcal{B}$ . Possiamo definire su  $\mathfrak{a}$  una  $Q$ -graduazione, in cui gli elementi  $X_\alpha, Y_\alpha$  e  $H_\alpha$  abbiano rispettivamente gradi  $\alpha, -\alpha$  e  $0$ . Poiché gli elementi di  $\mathfrak{R}$  sono omogenei, l'ideale  $\mathcal{I}_\mathfrak{a}$  generato da  $\mathfrak{R}$  è omogeneo e quindi  $\mathfrak{a}$  è un'algebra di Lie  $Q$ -omogenea:

$$(17.3.8) \quad \mathfrak{a} = \bigoplus_{q \in Q} \mathfrak{a}^q.$$

**Lemma 17.3.5.** *Sia  $Z \in \mathfrak{a}$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché  $Z \in \mathfrak{a}^q$ ,  $q \in Q$ , è che*

$$(17.3.9) \quad [H_\alpha, Z] = \langle q, \alpha \rangle Z \quad \forall \alpha \in \mathcal{B}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo per ogni  $q \in Q$ :

$$\mathfrak{a}^{(q)} = \{Z \in \mathfrak{a} \mid [H_\alpha, Z] = \langle q, \alpha \rangle Z \quad \forall \alpha \in \mathcal{B}.\}$$

Chiaramente  $\mathfrak{a}^{(q)} \cap \mathfrak{a}^{(q')} = \{0\}$  se  $q \neq q'$ . Basterà quindi verificare che  $\mathfrak{a}^q \subset \mathfrak{a}^{(q)}$  per ogni  $q \in Q$ . Ora, per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$ , l'endomorfismo di  $\mathfrak{a}$  definito come moltiplicazione per  $\langle q, \alpha \rangle$  su  $\mathfrak{a}^q$ , per ogni  $q \in Q$ , è una derivazione di grado zero di  $\mathfrak{a}$  che coincide con la derivazione interna  $\text{ad}_\mathfrak{a}(H_\alpha)$ . Poiché per ogni  $q \neq 0$  è  $\langle q, \alpha \rangle \neq 0$  per qualche  $\alpha \in \mathcal{B}$ , otteniamo la tesi.  $\square$

Poniamo

$$(17.3.10) \quad \begin{cases} Q^+ = \{ \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k^\alpha \alpha \mid k_\alpha \in \mathbb{N}, \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k^\alpha > 0 \}, \\ Q^- = \{ \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k^\alpha \alpha \mid -k_\alpha \in \mathbb{N}, \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k^\alpha < 0 \}. \end{cases}$$

Poiché  $Q^+ + Q^+ \subset Q^+$  e  $Q^- + Q^- \subset Q^-$ , i sottospazi

$$(17.3.11) \quad \alpha^+ = \bigoplus_{q \in Q^+} \alpha^q \quad \text{e} \quad \alpha^- = \bigoplus_{q \in Q^-} \alpha^q$$

sono sottoalgebre di  $\mathfrak{a}$ .

**Proposizione 17.3.6.** (1)  $\alpha^+$  è la sottoalgebra di  $\mathfrak{a}$  generata da  $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{B}}$ ;  
 (2)  $\alpha^-$  è la sottoalgebra di  $\mathfrak{a}$  generata da  $(Y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{B}}$ ;  
 (3)  $(H_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{B}}$  è una base di  $\alpha^0$ ;  
 (4)  $\mathfrak{a} = \alpha^+ \oplus \alpha^0 \oplus \alpha^-$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\tilde{\alpha}^+$  (risp.  $\tilde{\alpha}^-$ ) la sottoalgebra di  $\mathfrak{a}$  generata da  $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{B}}$  (risp.  $(Y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{B}}$ ). Indichiamo poi con  $\mathfrak{h}$  il sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{a}$  generato da  $(H_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{B}}$ . Esso è una sottoalgebra abeliana di  $\mathfrak{a}$ .

Osserviamo che  $\tilde{\alpha}^\pm$  sono sottoalgebre  $Q$ -graduate, con  $\tilde{\alpha}^+ \subset \alpha^+$ ,  $\tilde{\alpha}^- \subset \alpha^-$ . Inoltre abbiamo:

$$\begin{cases} [\mathfrak{h}, \tilde{\alpha}^+] \subset \tilde{\alpha}^+, \\ [\mathfrak{h}, \tilde{\alpha}^-] \subset \tilde{\alpha}^-, \\ [Y_\alpha, \tilde{\alpha}^+] \subset \mathfrak{h} + \tilde{\alpha}^+, \\ [Y_\alpha, \tilde{\alpha}^-] \subset \mathfrak{h} + \tilde{\alpha}^-, \\ \text{per ogni } \alpha \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

Posto  $\tilde{\mathfrak{a}} = \tilde{\alpha}^+ + \mathfrak{h} + \tilde{\alpha}^-$ , la  $\tilde{\mathfrak{a}}$  è stabile per  $\text{ad}(X_\alpha)$ ,  $\text{ad}(H_\alpha)$ ,  $\text{ad}(Y_\alpha)$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$ . Quindi è una sottoalgebra di  $\mathfrak{a}$ , che contiene un sistema di generatori di  $\mathfrak{a}$  e quindi coincide con  $\mathfrak{a}$ . Otteniamo quindi  $\alpha^+ = \tilde{\alpha}^+$ ,  $\alpha^- = \tilde{\alpha}^-$ ,  $\alpha^0 = \mathfrak{h}$ .  $\square$

**Proposizione 17.3.7.** Siano  $V_+$  e  $V_-$  i sottospazi vettoriali di  $\mathfrak{a}$  generati da  $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{B}}$  e  $(Y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{B}}$  rispettivamente. Allora  $\alpha_+$  e  $\alpha_-$  sono le algebre di Lie libere degli spazi vettoriali  $V_+$ ,  $V_-$  rispettivamente.

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordiamo che  $B$  è lo spazio vettoriale su  $\mathbb{k}$  con base  $\mathcal{B}$ . Sia  $\mathcal{Q}(B) \subset T(B)$  l'algebra di Lie libera di  $B$ . Definiamo l'applicazione lineare  $\phi : B \rightarrow \alpha^+$  ponendo  $\phi(\alpha) = X_\alpha$ . Essa si estende a un morfismo di algebre di Lie  $\tilde{\phi} : \mathcal{Q}(B) \rightarrow \alpha^+$ . Utilizziamo la rappresentazione  $\rho$  di  $\mathfrak{a}$  su  $T(B)$ . La composizione  $\rho \circ \tilde{\phi}$  è una rappresentazione di  $\alpha^+$  su  $T(B)$  e  $\rho \circ \tilde{\phi}(X_\alpha)$  coincide con la moltiplicazione a sinistra per  $\alpha$ . Quindi  $\rho \circ \tilde{\phi}$  è iniettiva e perciò  $\tilde{\phi}$  è iniettiva. È un isomorfismo perché  $\{\phi(\alpha) = X_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{B}\}$  genera  $\alpha^+$ .

Utilizzando l'involuzione  $\theta$ , si dimostra che lo stesso vale per  $\alpha^-$ .  $\square$

## 17.4. Costruzione dell'algebra di Lie semisemplice

Utilizziamo le notazioni del paragrafo precedente.

Per ogni coppia di elementi distinti  $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$  definiamo:

$$(17.4.1) \quad \begin{cases} X_{\alpha,\beta} = (\text{ad}_a(X_\alpha))^{1-n_{\beta,\alpha}}(X_\beta), \\ Y_{\alpha,\beta} = (\text{ad}_a(Y_\alpha))^{1-n_{\beta,\alpha}}(Y_\beta), \\ \alpha, \beta \in \mathcal{B}, \quad \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

**Lemma 17.4.1.** Per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ , con  $\alpha \neq \beta$ , abbiamo:

$$(17.4.2) \quad [\alpha^+, Y_{\alpha,\beta}] = 0 \quad [\alpha^-, X_{\alpha,\beta}] = 0.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per verificare la prima uguaglianza, è sufficiente verificare che  $[X_\gamma, Y_{\alpha,\beta}] = 0$  per ogni  $\gamma \in \mathcal{B}$ . Consideriamo i tre casi possibili:

(i)  $\gamma \neq \alpha, \beta$ .

In questo caso  $[X_\gamma, Y_\alpha] = [X_\gamma, Y_\beta] = 0$  e da questa segue immediatamente che  $[X_\gamma, Y_{\alpha,\beta}] = 0$ .

(ii)  $\gamma = \beta$ .

In questo caso  $[X_\beta, Y_\alpha] = 0$  e quindi:

$$\begin{aligned} [X_\beta, Y_{\alpha,\beta}] &= (\text{ad}_a(Y_\alpha))^{1-n_{\beta,\alpha}}([X_\beta, Y_\alpha]) \\ &= (\text{ad}_a(Y_\alpha))^{1-n_{\beta,\alpha}}(H_\alpha) \\ &= n_{\alpha,\beta} (\text{ad}_a(Y_\alpha))^{-n_{\beta,\alpha}}(Y_\alpha). \end{aligned}$$

Se  $n_{\beta,\alpha} \neq 0$ , allora  $[X_\beta, Y_{\alpha,\beta}] = 0$  perché  $[Y_\alpha, Y_\alpha] = 0$ ; se  $n_{\beta,\alpha} = 0$ , anche  $n_{\alpha,\beta} = 0$  e dunque  $[X_\beta, Y_{\alpha,\beta}] = 0$ .

(iii)  $\gamma = \alpha$ .

Abbiamo:

$$\text{ad}_a(X_\alpha) \circ \text{ad}_a(Y_\alpha)^{1-n_{\beta,\alpha}}(Y_\beta) = [\text{ad}_a(X_\alpha), \text{ad}_a(Y_\alpha)^{1-n_{\beta,\alpha}}](Y_\beta)$$

perché  $\text{ad}_a(Y_\beta) = [X_\alpha, Y_\beta] = 0$ . Utilizziamo ora l'uguaglianza:

$$\begin{aligned} &[\text{ad}_a(X_\alpha), \text{ad}_a(Y_\alpha)^{1-n_{\beta,\alpha}}] \\ &= \sum_{h=0}^{-n_{\beta,\alpha}} \text{ad}_a(Y_\alpha)^h \circ [\text{ad}_a(X_\alpha), \text{ad}_a(Y_\alpha)] \circ \text{ad}_a(Y_\alpha)^{-n_{\beta,\alpha}-h} \\ &= \sum_{h=0}^{-n_{\beta,\alpha}} \text{ad}_a(Y_\alpha)^h \circ \text{ad}_a(H_\alpha) \circ \text{ad}_a(Y_\alpha)^{-n_{\beta,\alpha}-h} \end{aligned}$$

Tenuto conto del fatto che:

$$\begin{aligned} \text{ad}_a(H_\alpha) \circ \text{ad}_a(Y_\alpha)^k &= \text{ad}_a(Y_\alpha)^k \circ \text{ad}_a(H_\alpha) \\ &+ \sum_{h=0}^{k-1} \text{ad}_a(Y_\alpha)^h \circ [\text{ad}_a(H_\alpha), \text{ad}_a(Y_\alpha)] \circ \text{ad}_a(Y_\alpha)^{k-h-1} \\ &= \text{ad}_a(Y_\alpha)^k \circ \text{ad}_a(H_\alpha) - 2 \sum_{h=0}^{k-1} \text{ad}_a(Y_\alpha)^h \text{ad}_a(Y_\alpha)^{k-h} \\ &= \text{ad}_a(Y_\alpha)^k \circ \text{ad}_a(H_\alpha) - 2k \cdot \text{ad}_a(Y_\alpha)^k, \end{aligned}$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} &[\text{ad}_a(X_\alpha), \text{ad}_a(Y_\alpha)^{1-n_{\beta,\alpha}}] \\ &= \sum_{h=0}^{-n_{\beta,\alpha}} \text{ad}_a(Y_\alpha)^h \left( \text{ad}_a(Y_\alpha)^{-n_{\beta,\alpha}-h} \text{ad}_a(H_\alpha) + 2(n_{\beta,\alpha} + h) \text{ad}_a(Y_\alpha)^{-n_{\beta,\alpha}-h} \right) \\ &= (1 - n_{\beta,\alpha}) \text{ad}_a(Y_\alpha)^{-n_{\beta,\alpha}} \text{ad}_a(H_\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left( n_{\beta,\alpha}(1 + n_{\beta,\alpha}) + \frac{-n_{\beta,\alpha}(1 + n_{\beta,\alpha})}{2} \right) \text{ad}_a(Y_\alpha)^{-n_{\beta,\alpha}} \\
& = (1 - n_{\beta,\alpha}) \text{ad}_a(Y_\alpha)^{-n_{\beta,\alpha}} \left( \text{ad}_a(H_\alpha) + n_{\beta,\alpha} \text{Id}_a \right).
\end{aligned}$$

Poiché  $(\text{ad}_a(H_\alpha) + n_{\beta,\alpha} \text{Id}_a)(Y_\beta) = 0$ , otteniamo  $[X_\alpha, Y_{\alpha,\beta}] = 0$ .

Ciò dimostra la prima uguaglianza. La seconda si ottiene utilizzando l' involuzione  $\theta$ :

$$[Y_\gamma, X_{\alpha,\beta}] = [\theta(X_\gamma), \theta(Y_{\alpha,\beta})] = \theta([X_\gamma, Y_{\alpha,\beta}]) = 0.$$

□

**Lemma 17.4.2.** *L'ideale  $\mathfrak{n}_+$  di  $\mathfrak{a}_+$  generato da  $(X_{\alpha,\beta})_{\alpha \neq \beta \in \mathcal{B}}$  è un ideale di  $\mathfrak{a}$ . Analogamente, l'ideale  $\mathfrak{n}_-$  di  $\mathfrak{a}_-$  generato da  $(Y_{\alpha,\beta})_{\alpha \neq \beta \in \mathcal{B}}$  è un ideale di  $\mathfrak{a}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathfrak{n}'_+$  il sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{a}$  generato da

$$(X_{\alpha,\beta})_{\alpha \neq \beta \in \mathcal{B}}.$$

Poiché gli  $X_{\alpha,\beta}$  sono elementi  $Q$ -omogenei,  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}'_+] \subset \mathfrak{n}'_+$ . Sia  $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$  l'algebra involupante universale di  $\mathfrak{a}$  e sia  $\rho$  la rappresentazione di  $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$  su  $\mathfrak{a}$  indotta dalla rappresentazione aggiunta. Allora l'ideale di  $\mathfrak{a}$  generato da  $\mathfrak{n}'_+$  è  $\rho(\mathfrak{U}(\mathfrak{a}))(\mathfrak{n}'_+)$ . Dalla decomposizione  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_-$ , per il Teorema di Poincaré-Birchoff-Witt abbiamo:

$$\rho(\mathfrak{U}(\mathfrak{a}))(\mathfrak{n}'_+) = \rho(\mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+))\rho(\mathfrak{U}(\mathfrak{h}))\rho(\mathfrak{U}(\mathfrak{a}_-))(\mathfrak{n}'_+) = \rho(\mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+))(\mathfrak{n}'_+) = \mathfrak{n}_+$$

e questo dimostra la prima asserzione del lemma. La seconda si ricava dalla prima utilizzando l'isomorfismo  $\theta$  e il fatto che  $\theta(\mathfrak{n}_+) = \mathfrak{n}_-$ . □

Poniamo

$$(17.4.3) \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_-.$$

Otteniamo così un ideale di  $\mathfrak{a}$ , che è  $Q$ -graduato, perché ammette un sistema di generatori omogenei. Quindi anche l'algebra quoziente:

$$(17.4.4) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{a}/\mathfrak{n}$$

è  $Q$ -graduata:

$$(17.4.5) \quad \mathfrak{g} = \bigoplus_{q \in Q} \mathfrak{g}^q.$$

Inoltre, poiché  $\mathfrak{a}^q = \{0\}$  se  $q \notin Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$ , anche  $\mathfrak{g}^q = \{0\}$  se  $q \notin Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$ .

Tenuto conto della definizione di  $\mathfrak{a}$  e dell'ideale  $\mathfrak{n}$ , l'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  su  $\mathbb{k}$  è definita dai generatori  $(X_\alpha, H_\alpha, Y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{B}}$  e dalle relazioni:

$$(17.4.6) \quad \begin{cases} [H_\alpha, H_\beta] = 0 & \forall \alpha, \beta \in \mathcal{B}, \\ [H_\alpha, X_\beta] = n_{\beta, \alpha} X_\beta & \forall \alpha, \beta \in \mathcal{B}, \\ [H_\alpha, Y_\beta] = -n_{\beta, \alpha} Y_\beta & \forall \alpha, \beta \in \mathcal{B}, \\ [X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha & \forall \alpha \in \mathcal{B}, \\ [X_\alpha, Y_\beta] = 0 & \forall \alpha \neq \beta \in \mathcal{B}, \\ (\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha))^{1-n_{\beta, \alpha}}(X_\beta) = 0 & \forall \alpha \neq \beta \in \mathcal{B}, \\ (\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y_\alpha))^{1-n_{\beta, \alpha}}(Y_\beta) = 0 & \forall \alpha \neq \beta \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

Poiché  $\mathfrak{a}^0 \cap \mathfrak{n} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} = \{0\}$ , la proiezione di  $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}^0$  in  $\mathfrak{g}$  è un isomorfismo: indicheremo ancora con  $\mathfrak{h}$  la sua immagine: essa è una sottoalgebra abeliana che coincide con il sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{g}$  generato da  $(H_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{B}}$ . Poiché  $\mathfrak{n}$  è  $\theta$ -invariante, l'isomorfismo  $\theta$  definisce per passaggio al quoziente un isomorfismo di  $\mathfrak{g}$ , che indicheremo ancora con  $\theta$ .

**Lemma 17.4.3.** *Per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$ , gli endomorfismi  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)$  e  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y_\alpha)$  per  $\alpha \in \mathcal{B}$  sono localmente nilpotenti.<sup>1</sup>*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\alpha \in \mathcal{B}$  e sia  $\mathfrak{b}$  il sottoinsieme di  $\mathfrak{g}$  formato dagli elementi  $Z \in \mathfrak{g}$  tali che  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)^p(Z) = 0$  per qualche  $p \in \mathbb{N}$ . Poiché  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)$  è una derivazione di  $\mathfrak{g}$ , il sottoinsieme  $\mathfrak{b}$  è una sottoalgebra di  $\mathfrak{g}$ . Ma  $X_\beta, H_\beta, Y_\beta \in \mathfrak{b}$  per ogni  $\beta \in \mathcal{B}$  e quindi  $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}$ .  $\square$

**Lemma 17.4.4.** *Siano  $q, q' \in \mathcal{Q}$  e supponiamo che  $\sigma(q) = q'$  per qualche  $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ . Allora esiste un automorfismo  $\psi$  di  $\mathfrak{g}$  tale che  $\psi(\mathfrak{g}^q) = \mathfrak{g}^{q'}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$  è generato dalle riflessioni rispetto agli elementi di una base, possiamo limitarci a considerare il caso in cui  $\sigma = s_\alpha$  per una radice  $\alpha \in \mathcal{B}$ . Definiamo

$$(17.4.7) \quad \psi_\alpha = e^{\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)} \circ e^{-\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y_\alpha)} \circ e^{\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)}.$$

Per il lemma precedente,  $\psi_\alpha$  è ben definita ed è un automorfismo di  $\mathfrak{g}$ . Per ogni  $\beta \in \mathcal{B}$  abbiamo:

$$e^{\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)}(H_\beta) = H_\beta - n_{\alpha, \beta} X_\alpha.$$

Otteniamo perciò:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(H_\beta) &= e^{\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)} \circ e^{-\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y_\alpha)}(H_\beta - n_{\alpha, \beta} X_\alpha) \\ &= e^{\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)}(H_\beta - n_{\alpha, \beta} Y_\alpha - n_{\alpha, \beta}(X_\alpha + H_\alpha - Y_\alpha)) \\ &= e^{\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)}(H_\beta - n_{\alpha, \beta} H_\alpha - n_{\alpha, \beta} X_\alpha) \\ &= H_\beta - n_{\alpha, \beta} X_\alpha + 2n_{\alpha, \beta} X_\alpha - n_{\alpha, \beta} X_\alpha \\ &= H_\beta - n_{\alpha, \beta} H_\alpha. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Un endomorfismo  $T$  di uno spazio vettoriale  $V$  si dice localmente nilpotente se per ogni  $v \in V \setminus \{0\}$  esiste un intero positivo  $m(v)$  tale che  $T^{m(v)}(v) = 0$ . Chiaramente un endomorfismo nilpotente è anche localmente nilpotente e i due concetti coincidono se  $V$  ha dimensione finita.

Quindi:

$$[H_\beta, \psi_\alpha^{-1}(Z)] = \psi_\alpha^{-1}([\psi_\alpha(H_\beta), Z]) = \langle s_\alpha(q), \beta \rangle \psi_\alpha^{-1}(Z) \quad \forall Z \in \mathfrak{g}^q, \quad \forall \beta \in \mathcal{B}.$$

Ciò dimostra che  $\psi_\alpha^{-1}(\mathfrak{g}^q) \subset \mathfrak{g}^{s_\alpha(q)}$ . Applicando nuovamente  $\psi_\alpha^{-1}$  si ottiene l'inclusione opposta e quindi l'uguaglianza.  $\square$

**Lemma 17.4.5.** *Supponiamo che  $q \in Q$  non sia multiplo di un elemento di  $\mathcal{R}$ . Allora esiste  $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$  tale che  $\sigma(q) = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k^\alpha \alpha$  con i coefficienti  $k^\alpha \in \mathbb{Z}$  non tutti dello stesso segno.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per ipotesi, l'iperpiano  $q^\perp$  è distinto dagli iperpiani  $\gamma^\perp$  per  $\gamma \in \mathcal{R}$ . Possiamo quindi trovare un elemento regolare  $\xi \in E$  tale che  $(\xi|q) = 0$ . Sia  $C_\xi$  la camera di Weyl che contiene  $\xi$ . Poiché  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$  opera transitivamente sulle camere di Weyl, esiste  $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$  tale che  $\sigma(C_\xi) = C(\mathcal{B})$ . Abbiamo quindi  $(\sigma(\xi)|\alpha) > 0$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$ . Sia  $\sigma(q) = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k^\alpha \alpha$ . Abbiamo:

$$0 = (\xi|q) = (\sigma(\xi)|\sigma(q)) = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k^\alpha (\sigma(\xi)|\alpha).$$

Poiché  $(\sigma(\xi)|\alpha) > 0$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$  e i coefficienti  $k^\alpha$  non sono tutti nulli, ne segue che essi non possono avere tutti lo stesso segno.  $\square$

**Lemma 17.4.6.** *Sia  $q \in Q$ . Allora:*

- (1) se  $0 \neq q \notin \mathcal{R}$ , allora  $\mathfrak{g}^q = \{0\}$ ;
- (2) se  $q \in \mathcal{R}$ , allora  $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}^q = 1$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $q$  non è multiplo di un elemento di  $\mathcal{R}$ , allora esiste  $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$  tale che  $\sigma(q) \notin Q^+ \cup Q^-$ . Poiché  $\mathfrak{a}^{\sigma(q)} = \{0\}$ , ne segue che  $\mathfrak{g}^{\sigma(q)}$  e quindi  $\mathfrak{g}^q$  sono uguali a  $\{0\}$ .

Se  $\alpha \in \mathcal{B}$  ed  $m$  un intero positivo, abbiamo  $\mathfrak{a}^{m\alpha} = \{0\}$  e quindi  $\mathfrak{g}^{m\alpha} = \{0\}$ . Ciò segue dal fatto che  $\mathfrak{a}_+$  è l'algebra di Lie libera con generatori  $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{B}}$ . Non può essere  $\mathfrak{g}^\alpha = \{0\}$  perché questo vorrebbe dire che  $X_\alpha \in \mathfrak{n}_+$ . Ciò non è possibile in quanto  $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} = \{0\}$ . Quindi  $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}^\alpha = \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{a}^\alpha = 1$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$ . La tesi segue quindi dal fatto che ogni elemento  $\gamma$  di  $\mathcal{R}$  è immagine di un elemento di  $\mathcal{B}$  mediante una trasformazione  $\sigma$  di  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ .  $\square$

Abbiamo quindi il

**Teorema 17.4.7.**  *$\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie semisemplice su  $\mathbb{K}$ ;  $\mathfrak{h}$  è una sua algebra torale massimale (una sua algebra di Cartan) e  $\mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathcal{R}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per il lemma precedente,  $\mathfrak{g}$  ha dimensione finita, uguale alla somma delle cardinalità di  $\mathcal{R}$  e di  $\mathcal{B}$ .

Sia  $\mathfrak{t}$  un ideale abeliano di  $\mathfrak{g}$ . Poiché  $[\mathfrak{t}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{t}$ , l'ideale  $\mathfrak{t}$  è  $Q$ -graduato. Quindi

$$\mathfrak{t} = (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\gamma \in \mathcal{R}} \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}^\gamma.$$

Per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$ ,  $\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha} \oplus \mathbb{K} \cdot H_\alpha$  è una sottoalgebra di  $\mathfrak{g}$  isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ . Utilizzando gli automorfismi di  $\mathfrak{g}$  corrispondenti agli elementi del gruppo di Weyl, otteniamo che ogni  $\mathfrak{g}^\gamma$ ,  $\gamma \in \mathcal{R}$ , è contenuto in una sottoalgebra di  $\mathfrak{g}$  isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ . Da questo segue che  $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}^\gamma = \{0\}$  per ogni  $\gamma \in \mathcal{R}$ . Quindi  $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$ . Ma per

ogni  $H \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$  esiste un  $\alpha \in \mathcal{B}$  tale che  $[H, X_\alpha] = \alpha(H)X_\alpha \neq 0$ . Ciò dimostra che  $\mathfrak{t} = \{0\}$ : quindi  $\{0\}$  è l'unico ideale abeliano di  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{g}$  è semisemplice.

Le stesse considerazioni ci dicono che  $\mathfrak{h}$  è torale massimale in  $\mathfrak{g}$  ed abbiamo  $\mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  per la costruzione precedente.  $\square$

**Osservazione 17.4.8.** L'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  è *semplice* se e soltanto se il grafo  $\Gamma(\mathcal{R})$  corrispondente al diagramma di Dynkin del suo sistema di radici  $\mathcal{R}$  è connesso. Infatti, se  $\mathfrak{g}$  non fosse semplice,  $\mathcal{R}$  si spezzerebbe nell'unione  $\mathcal{R}' \cup \mathcal{R}''$  di due sottoinsiemi non vuoti di radici mutuamente ortogonali. Viceversa, dato un tale spezzamento,  $\mathfrak{g}$  risulterebbe uguale alla somma diretta dei due ideali semisemplici  $\mathfrak{g}'$  e  $\mathfrak{g}''$  corrispondenti ai sistemi di radici  $\mathcal{R}'$  e  $\mathcal{R}''$  rispettivamente.

## Sottoalgebre di Cartan e di Borel

### 18.1. Elementi regolari e algebre di Cartan

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  su un campo  $\mathbb{k}$ .

Se  $A \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  è un endomorfismo lineare di  $V$ , indichiamo con  $p_A(x)$  il suo polinomio caratteristico:

$$(18.1.1) \quad p_A(x) = \det(x - A) = \sum_{h=0}^n a_h(A)x^h.$$

Ricordiamo che il coefficiente  $a_h(A)$  è, a meno del segno, la traccia della rappresentazione di  $A$  sulla potenza alternata  $(n-h)$ -esima di  $V$ , definita da  $\wedge^{n-h}A(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-h}) = A(v_1) \wedge \cdots \wedge A(v_{n-h})$  sui monomi di  $\wedge^{n-h}V$ :

$$(18.1.2) \quad a_h(A) = (-1)^{n-h} \text{tr}(\wedge^{n-h}A).$$

Quindi, per ogni  $0 \leq h \leq n$ , l'applicazione

$$(18.1.3) \quad a_h : \text{End}_{\mathbb{k}}(V) \ni A \longrightarrow a_h(A) \in \mathbb{k}$$

è polinomiale ed omogenea di grado  $n-h$ .

Sia  $\nu(A)$  il più piccolo intero non negativo  $h$  per cui  $a_h(A) \neq 0$ . Questo numero è la molteplicità algebrica di 0 come autovalore di  $A$  (è 0 se  $A$  è invertibile), cioè la dimensione del sottospazio vettoriale

$$(18.1.4) \quad V^0(A) = \bigcup_{h=0}^{\infty} \ker A^h.$$

Per ogni  $\lambda \in \mathbb{k}$  porremo ancora:

$$(18.1.5) \quad V^\lambda(A) = \bigcup_{h=0}^{\infty} \ker(\lambda - A)^h.$$

Supporremo nel seguito che il campo  $\mathbb{k}$  abbia caratteristica 0.

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita  $n \geq 1$  su  $\mathbb{k}$ .

Consideriamo la rappresentazione aggiunta  $\text{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}) = \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ . Per  $X \in \mathfrak{g}$  useremo le notazioni semplificate:  $p_X(x) = p_{\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)}$ ,  $a_h(X) = a_h(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X))$ ,  $\nu(X) = \nu(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X))$ ,  $\mathfrak{g}^0(X) = \mathfrak{g}^0(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X))$ .

Se  $\mathcal{Q}$  è un sottoinsieme di  $\mathfrak{g}$ , porremo

$$(18.1.6) \quad \mathfrak{g}^0(\mathcal{Q}) = \bigcap_{X \in \mathcal{Q}} \mathfrak{g}^0(X)$$

e, più in generale, se  $\alpha : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{k}$  è una qualsiasi applicazione:

$$(18.1.7) \quad \mathfrak{g}^\alpha(\mathcal{Q}) = \bigcap_{X \in \mathcal{Q}} \ker(\alpha(X) - \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X))^n.$$

**Osservazione 18.1.1.** Sia  $A \in \mathfrak{g}$ . Poiché  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(A)$  è una derivazione di  $\mathfrak{g}$ , la

$$\{0\} \subset \ker \text{ad}_{\mathfrak{g}}(A) \subset \ker(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(A))^2 \subset \cdots \ker(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(A))^k \subset \cdots$$

è una successione crescente di sottoalgebre di  $\mathfrak{g}$ . Quindi  $\mathfrak{g}^0(A)$  e  $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{g})$  per  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$  sono sottoalgebre di Lie di  $\mathfrak{g}$ .

**Definizione 18.1.2.** L'intero positivo  $\ell = \min\{\nu(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$  si dice il *rango* dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  e si indica con  $\text{rk}(\mathfrak{g})$ .

Gli elementi  $X$  di  $\mathfrak{g}$  tali che  $\nu(X) = \ell = \text{rk}(\mathfrak{g})$  si dicono *regolari* in  $\mathfrak{g}$ .

Osserviamo che, se  $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ , il suo rango è maggiore o uguale ad uno.

Gli elementi regolari in  $\mathfrak{g}$  sono l'insieme degli  $X \in \mathfrak{g}$  con  $a_{\ell}(X) \neq 0$ , e formano perciò un aperto di Zariski non vuoto di  $\mathfrak{g}$ . In particolare, sono un aperto denso per la topologia Euclidea di  $\mathfrak{g}$ , nel caso  $\mathbb{k}$  sia  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

**Lemma 18.1.3.** Siano  $\mathbb{k}'$  un'estensione del campo  $\mathbb{k}$ ,  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  e  $\mathfrak{g}' = \mathbb{k}' \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$  l'algebra di Lie su  $\mathbb{k}'$  ottenuta da  $\mathfrak{g}$  per estensione del campo. Allora  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{g}'$  hanno lo stesso rango.

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché ogni aperto di Zariski di  $\mathfrak{g}'$  contiene elementi di  $\mathfrak{g}$ , l'affermazione del lemma segue dal fatto che, se  $A \in \mathfrak{g}$ , i polinomi caratteristici di  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(A)$  e di  $\text{ad}_{\mathfrak{g}'}(A)$  sono uguali.  $\square$

**Esempio 18.1.4.** Il rango di un'algebra di Lie nilpotente è uguale alla sua dimensione.

**Esempio 18.1.5.** Sia  $\text{tr}^+(n, \mathbb{k})$  l'algebra di Lie risolubile delle matrici  $n \times n$  triangolari superiori con coefficienti in  $\mathbb{k}$ . Gli elementi regolari di  $\text{tr}^+(n, \mathbb{k})$  sono le matrici che hanno sulla diagonale  $n$  elementi distinti. Esse sono diagonalizzabili. Per calcolare il rango di  $\text{tr}^+(n, \mathbb{k})$  sarà quindi sufficiente calcolare  $\nu(\text{ad}_{\text{tr}^+(n, \mathbb{k})}(H))$  per una matrice  $H = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Se  $X = (x_{i,j})$ , con  $x_{i,j} = 0$  per  $i > j$ , abbiamo  $[H, X] = ([\lambda_i - \lambda_j]x_{i,j})$ . In particolare,  $\text{ad}_{\text{tr}^+(n, \mathbb{k})}(H)$  si diagonalizza nella base canonica  $\{E_{i,j}\}_{i \leq j}$  di  $\text{tr}^+(n, \mathbb{k})$  che consiste delle matrici  $E_{i,j}$  che hanno uguale ad 1 il coefficiente dell' $i$ -esima riga e  $j$ -esima colonna e tutti gli altri uguali a zero. Abbiamo

$$p_{\text{ad}_{\text{tr}^+(n, \mathbb{k})}(H)}(x) = x^n \prod_{i < j} (x - \lambda_i + \lambda_j)$$

e quindi il rango di  $\text{tr}^+(n, \mathbb{k})$  è  $n$ .

**Esempio 18.1.6.** Verifichiamo che il rango di  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$  è  $(n-1)$ . Per il Lemma 18.1.3 possiamo supporre  $\mathbb{k}$  algebricamente chiuso. Ogni  $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$  si decompone in modo unico nella somma  $X = X_s + X_n$  di un  $X_s$  semisemplice ed un  $X_n$  nilpotente, che commutano tra loro. Le loro rappresentazioni aggiunte  $\text{ad}_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})}(X_s)$  ed  $\text{ad}_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})}(X_n)$  sono ancora semisemplici e nilpotenti e commutano tra loro. In particolare,  $\text{ad}_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})}(X)$  ed  $\text{ad}_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})}(X_s)$  hanno lo stesso polinomio caratteristico. Per calcolare il rango di  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$  possiamo quindi ricondurci al caso degli endomorfismi  $H$  semisemplici, e quindi diagonalizzabili, perché abbiamo supposto  $\mathbb{k}$  algebricamente chiuso. Sia  $H = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  con  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ . L' $\text{ad}_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})}(H)$  è

diagonale nella base  $\{E_{i,j}\}_{i \neq j} \cup \{E_{i,i} - E_{n,n}\}_{1 \leq i < n}$ , ed ha polinomio caratteristico

$$p_{\text{ad}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{k})}(H)}(x) = x^{n-1} \prod_{i \neq j} (x - \lambda_i + \lambda_j).$$

Da questo ricaviamo che il rango di  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$  è maggiore o uguale ad  $n-1$ , e verifichiamo che è proprio uguale ad  $n-1$ , scegliendo un elemento regolare  $H$  con tutti gli  $n$  autovalori distinti. In particolare, tutti gli elementi regolari di  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$ , come endomorfismi di  $\mathbb{k}^n$ , hanno tutti gli autovalori distinti, e sono quindi semisemplici.

**Lemma 18.1.7.** *Sia  $\mathfrak{a}$  una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}$ . Se  $\mathfrak{a}$  contiene un elemento  $A$  regolare in  $\mathfrak{g}$ , allora tale elemento  $A$  è anche regolare in  $\mathfrak{a}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $X \in \mathfrak{a}$ , allora  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$ , ed  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$  definisce perciò, per restrizione, un endomorfismo  $X'$  di  $\mathfrak{a}$  e, per passaggio al quoziente, un endomorfismo  $X''$  di  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ . È  $p_X(x) = p_{X'}(x) \cdot p_{X''}(x)$  e quindi  $\nu(X) = \nu(X') + \nu(X'')$ . Se  $\ell'$  è il rango di  $\mathfrak{a}$  ed  $\ell''$  il minimo dei  $\nu(X'')$  al variare di  $X$  in  $\mathfrak{a}$ , abbiamo  $\nu(X') = \ell'$  e  $\nu(X'') = \ell''$  per  $X$  in un aperto di Zariski non vuoto di  $\mathfrak{a}$ . Inoltre, per la definizione del rango  $\ell$  di  $\mathfrak{g}$ , abbiamo  $\ell' + \ell'' \geq \ell$ . Se  $A \in \mathfrak{a}$  è regolare in  $\mathfrak{g}$ , allora da  $\nu(A') \geq \ell'$ ,  $\nu(A'') \geq \ell''$  e  $\nu(A) = \nu(A') + \nu(A'') = \ell$ , otteniamo che  $\nu(A') = \ell'$ ,  $\nu(A'') = \ell''$ . In particolare  $A$  è regolare in  $\mathfrak{a}$ .  $\square$

**Teorema 18.1.8.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$ , di dimensione finita  $n \geq 1$  e di rango  $\ell$ .*

(1) *Se  $H$  è un qualsiasi elemento regolare in  $\mathfrak{g}$ , allora*

$$\mathfrak{g}^0(H) = \bigcup_{k \geq 0} \ker([\text{ad}_{\mathfrak{g}}(H)]^k)$$

*è una sottoalgebra nilpotente massimale di  $\mathfrak{g}$ , di dimensione  $\ell$ , e coincide con il proprio normalizzatore in  $\mathfrak{g}$ .*

(2) *Viceversa, se  $\mathfrak{h}$  è una sottoalgebra nilpotente di  $\mathfrak{g}$  che coincide con il proprio normalizzatore in  $\mathfrak{g}$ , allora  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(H) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$  per un elemento  $H$  di  $\mathfrak{h}$  regolare in  $\mathfrak{g}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** (1) Sia  $H$  un elemento regolare di  $\mathfrak{g}$ . Allora  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(H)$  è una sottoalgebra di  $\mathfrak{g}$  di dimensione  $\ell$ . Per il Lemma 18.1.7,  $H$  è regolare in  $\mathfrak{h}$ . Poiché  $\text{ad}_{\mathfrak{h}}(H)$  è nilpotente, ne segue che  $\text{ad}_{\mathfrak{h}}(X)$  è nilpotente per ogni  $X \in \mathfrak{h}$ . Quindi  $\mathfrak{h}$  è nilpotente per il Teorema di Engel. Abbiamo perciò  $\text{rk}(\mathfrak{h}) = \dim \mathfrak{h} = \ell = \text{rk}(\mathfrak{g})$ .

Se  $Y$  è un elemento del normalizzatore di  $\mathfrak{h}$  in  $\mathfrak{g}$ , allora  $[H, Y] \in \mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(H)$  e quindi  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(H)^m(Y) = 0$  per  $m \in \mathbb{N}$  sufficientemente grande: quindi  $Y \in \mathfrak{h}$  ed  $\mathfrak{h}$  coincide con il proprio normalizzatore in  $\mathfrak{g}$ .

Per dimostrare che  $\mathfrak{h}$  è nilpotente massimale, possiamo ricondurci al caso in cui  $\mathbb{k}$  sia algebricamente chiuso. Sia

$$(18.1.8) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{h=1}^m \mathfrak{g}^{\lambda_h}(H),$$

ove  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{k}$  sono gli autovalori non nulli distinti di  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ , la decomposizione spettrale di  $\mathfrak{g}$  rispetto ad  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ .

Una qualsiasi sottoalgebra  $\mathfrak{a}$  di  $\mathfrak{g}$  contenente  $\mathfrak{h}$  è  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ -invariante e quindi si decompone nella somma diretta

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{h=1}^m (\mathfrak{g}^{\lambda_h}(H) \cap \mathfrak{a}).$$

Poiché  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$  è invertibile su  $\mathfrak{g}^{\lambda_h}(H)$ , ne segue che, se  $\mathfrak{a}$  è nilpotente, allora  $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}$ . Questo dimostra che  $\mathfrak{h}$  è massimale nilpotente e completa la dimostrazione di (1).

(2) Supponiamo ora che  $\mathfrak{h}$  sia una sottoalgebra di Lie nilpotente di  $\mathfrak{g}$  che coincida con il proprio normalizzatore:

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}.$$

Poiché  $\mathfrak{h}$  è nilpotente,  $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$  contiene il normalizzatore di  $\mathfrak{h}$  in  $\mathfrak{g}$ .

Dimostriamo ora l'inclusione opposta. Consideriamo la rappresentazione di  $\mathfrak{h}$  su  $W = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$  indotta per passaggio al quoziente dalla rappresentazione aggiunta. Se fosse  $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \neq \mathfrak{h}$ , per il Teorema di Engel potremmo trovare  $X \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \setminus \mathfrak{h}$  tale che  $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ . Ma un tale  $X$  apparterebbe allora al normalizzatore di  $\mathfrak{h}$  in  $\mathfrak{g}$ , contro l'ipotesi che  $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ . Abbiamo quindi  $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ .

Per completare la dimostrazione di (2), possiamo limitarci a considerare il caso in cui  $\mathbb{k}$  sia algebricamente chiuso. Abbiamo allora una decomposizione:

$$(18.1.9) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{j=1}^m \mathfrak{g}^{\alpha_j}(\mathfrak{h})$$

con  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ . Basterà quindi scegliere un elemento  $H \in \mathfrak{h}$  con  $\alpha_j(H) \neq 0$  per  $j = 1, \dots, m$  per ottenere  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}^0(H)$ .  $\square$

**Definizione 18.1.9.** Chiamiamo *sottoalgebra di Cartan* di  $\mathfrak{g}$  una sottoalgebra di Lie  $\mathfrak{h}$  di  $\mathfrak{g}$  che sia nilpotente e coincida con il proprio normalizzatore in  $\mathfrak{g}$ .

Il Teorema 18.1.8 ci dice quindi:

**Teorema 18.1.10.** *Ogni algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di dimensione finita  $n$  su  $\mathbb{k}$  ammette sottoalgebre di Cartan.*

*Ogni sottoalgebra di Cartan di  $\mathfrak{g}$  è della forma  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(H)$  per un elemento regolare  $H$  di  $\mathfrak{g}$ .*

*Tutte le algebre di Cartan di  $\mathfrak{g}$  hanno la stessa dimensione, ed essa è uguale al rango di  $\mathfrak{g}$ .*

**Osservazione 18.1.11.** Se  $\mathfrak{g}$  è nilpotente, allora  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$  è l'unica sottoalgebra di Cartan di  $\mathfrak{g}$ .

Abbiamo dimostrato in precedenza che, se  $\mathfrak{g}$  è semisemplice, allora le sue sottoalgebre di Cartan sono abeliane e coincidono con le *sottoalgebre torali massimali* di  $\mathfrak{g}$ .

## 18.2. Coniugazione delle sottoalgebre di Cartan di un'algebra di Lie risolubile

Siano  $\mathbb{k}$  un campo di caratteristica zero,  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$  e  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una sua rappresentazione lineare di dimensione finita.

**Definizione 18.2.1.** Un elemento  $H$  di  $\mathfrak{g}$  è *regolare* per la rappresentazione  $\rho$  se

$$(18.2.1) \quad \dim_{\mathbb{k}} V^0(\rho(H)) = \min\{\dim_{\mathbb{k}}(V^0(\rho(X))) \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

**Notazione.** Quando ciò non possa creare confusione, ometteremo di esplicitare la rappresentazione  $\rho$ , scrivendo ad esempio  $Xv$  invece di  $\rho(X)v$  se  $X \in \mathfrak{g}$  e  $v \in V$ . In particolare, se  $I \subset \mathfrak{g}$ ,  $W \subset V$  e  $k$  è un intero positivo, porremo

$$I^k W = \{\rho(X_1) \circ \cdots \circ \rho(X_k)w \mid X_1, \dots, X_k \in I, w \in W\}.$$

**Lemma 18.2.2** (Lemma di Fitting per le algebre di Lie nilpotenti). *Siano  $\mathfrak{h}$  un'algebra di Lie nilpotente, di dimensione finita su  $\mathbb{k}$  e  $V$  un  $\mathfrak{h}$ -modulo di dimensione finita. Posto*

$$(18.2.2) \quad V'(\mathfrak{h}) = \bigcap_{h=0}^{\infty} \mathfrak{h}^h(V),$$

abbiamo la decomposizione di  $V$ :

$$(18.2.3) \quad V = V^0(\mathfrak{h}) \oplus V'(\mathfrak{h})$$

in somma diretta di sotto- $\mathfrak{h}$ -moduli.

Se  $H$  è un elemento regolare della rappresentazione, allora  $V^0(\mathfrak{h}) = V^0(H)$  e  $V'(\mathfrak{h}) = V'(H)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per il Lemma di Fitting, è  $V = V^0(A) \oplus V'(A)$  per ogni endomorfismo  $A$  di  $V$ . Sarà quindi sufficiente dimostrare l'ultima affermazione dell'enunciato.

Se  $H \in \mathfrak{h}$ , abbiamo:

$$V'(\mathfrak{h}) \supset V'(H) = \bigcap_{h=0}^{\infty} H^h(V),$$

$$V^0(\mathfrak{h}) \subset V^0(H) = \bigcup_{h=0}^{\infty} \ker H^h,$$

$$\text{inoltre } V^0(\mathfrak{h}) \cap V'(\mathfrak{h}) = \{0\}.$$

Basta quindi dimostrare che, se  $H$  è regolare in  $\mathfrak{h}$ , allora  $V^0(\mathfrak{h}) = V^0(H)$  per avere anche  $V'(\mathfrak{h}) = V'(H)$  e completare la dimostrazione.

Se  $X$  è un qualsiasi elemento di  $\mathfrak{h}$ , allora, per ogni intero positivo  $m$ :

$$H^m \cdot X = \sum_{h=0}^m \binom{m}{h} \text{ad}_{\mathfrak{h}}(H)^h(X) \cdot H^{m-h}.$$

Poiché  $\mathfrak{h}$  è nilpotente, otteniamo che  $X \cdot V^0(H) \subset V^0(H)$  per ogni  $X \in \mathfrak{h}$ . Quindi  $V^0(H)$  è un sotto- $\mathfrak{h}$ -modulo di  $V$ . Gli elementi regolari della rappresentazione  $V$  sono anche elementi regolari della sottorappresentazione  $V^0(H)$ . Quindi, poiché l'elemento regolare  $H$  è nilpotente su  $V^0(H)$ , tutti gli  $X \in \mathfrak{h}$  definiscono endomorfismi nilpotenti di  $V^0(H)$  ed otteniamo perciò  $V^0(\mathfrak{h}) = V^0(H)$ . Ciò completa la dimostrazione del lemma.  $\square$

**Lemma 18.2.3.** *Sia  $\mathfrak{h}$  un'algebra di Lie nilpotente, di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ . Siano  $V, W$  due  $\mathfrak{h}$ -moduli di dimensione finita. Se  $\phi : V \rightarrow W$  è un epimorfismo di  $\mathfrak{h}$ -moduli, allora*

$$(18.2.4) \quad \phi(V^0(\mathfrak{h})) = W^0(\mathfrak{h}).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che  $\phi(V^0(\mathfrak{h})) \subset W^0(\mathfrak{h})$ ,  $\phi(V'(\mathfrak{h})) \subset W'(\mathfrak{h})$ . Quindi, se  $\phi$  è surgettiva, devono valere le uguaglianze  $\phi(V^0(\mathfrak{h})) = W^0(\mathfrak{h})$  e  $\phi(V'(\mathfrak{h})) = W'(\mathfrak{h})$ .  $\square$

**Lemma 18.2.4.** *Sia  $\mathfrak{h}$  un'algebra di Lie nilpotente, di dimensione finita sul campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero. Sia  $V$  un  $\mathfrak{h}$ -modulo tale che  $V^0(\mathfrak{h}) = \{0\}$ . Se  $\phi : \mathfrak{h} \rightarrow V$  è una derivazione di  $\mathfrak{h}$  in  $V$ , cioè se*

$$\phi([H_1, H_2]) = H_1\phi(H_2) - H_2\phi(H_1) \quad \forall H_1, H_2 \in \mathfrak{h},$$

*allora esiste un  $v \in V$  tale che*

$$\phi(H) = Hv \quad \forall H \in \mathfrak{h}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo lo spazio vettoriale  $W = V \oplus \mathbb{k}$  e poniamo

$$(*) \quad H(v, k) = (Hv - k\phi(H), 0) \quad \forall (v, k) \in W.$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} [H_1, H_2](v, k) &= ([H_1, H_2]v - k\phi([H_1, H_2]), 0) \\ &= (H_1H_2v - kH_1\phi(H_2), 0) - (H_2H_1v - kH_2\phi(H_1), 0) \\ &= H_1(H_2v - k\phi(H_2), 0) - H_2(H_1v - k\phi(H_1), 0) \\ &= H_1H_2(v, k) - H_2H_1(v, k), \quad \forall H_1, H_2 \in \mathfrak{h}, \forall (v, k) \in W. \end{aligned}$$

Quindi la (\*) definisce su  $W$  una struttura di  $\mathfrak{h}$ -modulo. La proiezione naturale  $\pi : W \ni (v, k) \rightarrow k \in \mathbb{k}$  è un epimorfismo di  $\mathfrak{h}$ -moduli, di  $W$  sull' $\mathfrak{h}$ -modulo banale  $\mathbb{k}$ . Quindi  $\pi(W^0(\mathfrak{h})) = \mathbb{k} = \mathbb{k}^0(\mathfrak{h})$ . Poiché  $V \oplus \{0\}$  è un sotto- $\mathfrak{h}$ -modulo di  $W$  isomorfo a  $V$  e  $V^0(\mathfrak{h}) = \{0\}$ , il sottospazio  $W^0(\mathfrak{h})$  ha dimensione 1 ed è generato da un vettore della forma  $(v, 1)$ . Esso è isomorfo all' $\mathfrak{h}$ -modulo banale  $\mathbb{k}$  e quindi

$$H(v, 1) = (Hv - \phi(H), 0) = (0, 0), \quad \forall H \in \mathfrak{h},$$

cioè  $\phi(H) = Hv$  per ogni  $H \in \mathfrak{h}$ .  $\square$

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero. Consideriamo la sua serie centrale discendente  $\{\mathfrak{C}^h(\mathfrak{g})\}$ , ove

$$(18.2.5) \quad \begin{cases} \mathfrak{C}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \\ \mathfrak{C}^h(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{C}^{h-1}(\mathfrak{g})] \end{cases} \quad \text{se } h > 0,$$

e poniamo

$$(18.2.6) \quad \mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{g}) = \bigcap_{h=0}^{\infty} \mathfrak{C}^h(\mathfrak{g}).$$

Osserviamo che  $\mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{g})$  è  $\{0\}$  quando  $\mathfrak{g}$  è nilpotente ed è in un ideale nilpotente di  $\mathfrak{g}$  se  $\mathfrak{g}$  è risolubile: infatti in questo caso  $\mathfrak{C}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  è un ideale nilpotente di  $\mathfrak{g}$  che contiene  $\mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{g})$ .

Quindi, se  $\mathfrak{g}$  è risolubile, per ogni  $X \in \mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{g})$  la serie

$$(18.2.7) \quad a(X) = \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(X)) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(X))^h$$

contiene solo un numero finito di addendi non nulli e perciò è convergente e definisce un automorfismo di  $\mathfrak{g}$ .

**Definizione 18.2.5.** Il sottogruppo  $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$  di  $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$  generato dagli  $a(X)$ , al variare di  $X$  in  $\mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{g})$ , si dice il *gruppo degli automorfismi speciali* di  $\mathfrak{g}$ .

**Teorema 18.2.6.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie risolubile, di dimensione finita sul campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero. Se  $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$  sono due sottoalgebre di Cartan di  $\mathfrak{g}$ , allora esiste un automorfismo speciale  $a \in \mathbf{S}(\mathfrak{g})$  tale che*

$$(18.2.8) \quad a(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Ragioniamo per induzione sulla dimensione  $n$  di  $\mathfrak{g}$ . Se  $n \leq 1$ , allora  $\mathfrak{g}$  è nilpotente e quindi ogni sottoalgebra di Cartan di  $\mathfrak{g}$  è uguale a  $\mathfrak{g}$  e non c'è nulla da dimostrare.

Supponiamo ora che  $n > 1$  e che il teorema sia vero per algebre di Lie risolubili di dimensione  $< n$ .

Siano  $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$  due sottoalgebre di Cartan di  $\mathfrak{g}$ . Poiché  $\mathfrak{g}$  è risolubile, contiene ideali abeliani non banali. Fissiamo un ideale abeliano di  $\mathfrak{g}$ , di dimensione minima tra tutti gli ideali abeliani non banali contenuti in  $\mathfrak{g}$ . Sia  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\alpha$  la proiezione nel quoziente. Allora  $\pi(\mathfrak{h})$  e  $\pi(\mathfrak{h}')$  sono sottoalgebre di Cartan di  $\mathfrak{g}/\alpha$ . Poiché  $\mathfrak{g}/\alpha$  è un'algebra risolubile di dimensione  $< n$  su  $\mathbb{k}$ , possiamo applicare l'ipotesi induttiva. Tenuto conto del fatto che  $\mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{g}/\alpha) = \pi(\mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{g}))$ , gli automorfismi speciali di  $\mathfrak{g}/\alpha$  si ottengono per passaggio al quoziente dagli automorfismi speciali di  $\mathfrak{g}$ : esiste quindi un automorfismo speciale  $a_0$  di  $\mathfrak{g}$  tale che

$$a_0(\mathfrak{h} + \alpha) = a_0(\mathfrak{h}) + \alpha = \mathfrak{h}' + \alpha.$$

A meno di sostituire ad  $\mathfrak{h}$  la sottoalgebra di Cartan  $a_0(\mathfrak{h})$ , potremo supporre nel seguito della dimostrazione che

$$\mathfrak{h} + \alpha = \mathfrak{h}' + \alpha.$$

Se  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h} + \alpha \neq \mathfrak{g}$ , allora  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{h}'$  sono sottoalgebre di Cartan di un'algebra risolubile  $\mathfrak{g}'$  di dimensione  $< n$  su  $\mathbb{k}$ . Osservando che  $\mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{g}') \subset \mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{g})$ , otteniamo in questo caso la tesi per l'ipotesi induttiva.

Supponiamo perciò, nel seguito della dimostrazione, che

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \alpha = \mathfrak{h}' + \alpha.$$

Poiché  $\alpha$  è minimale, avremo o  $[\mathfrak{g}, \alpha] = 0$ , oppure  $[\mathfrak{g}, \alpha] = \alpha$ . Nel primo caso  $\alpha$  è contenuta nel centro di  $\mathfrak{g}$  e quindi in ogni sottoalgebra di Cartan di  $\mathfrak{g}$ : abbiamo allora  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' = \mathfrak{g}$  e la tesi è dimostrata. Consideriamo poi il caso in cui

$$[\mathfrak{g}, \alpha] = \alpha.$$

Poiché  $[\alpha, \alpha] = \{0\}$ , essendo  $\alpha$  abeliana, questa relazione equivale ad

$$\alpha = [\mathfrak{h}, \alpha],$$

e dunque  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$ . Analogamente è  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}' = \{0\}$  e quindi

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{a}.$$

In particolare, possiamo definire un'applicazione  $\phi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{a}$  associando ad ogni elemento  $H \in \mathfrak{h}$  l'unico elemento  $\phi(H) \in \mathfrak{a}$  tale che  $H - \phi(H) \in \mathfrak{h}'$ . Osserviamo che, se  $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$ ,

$$[H_1, H_2] - [H_1, \phi(H_2)] - [\phi(H_1), H_2] = [H_1 - \phi(H_1), H_2 - \phi(H_2)] \in \mathfrak{h}'.$$

Quindi

$$\phi([H_1, H_2]) = [H_1, \phi(H_2)] + [\phi(H_1), H_2] \quad \forall H_1, H_2 \in \mathfrak{h},$$

e  $\phi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{a}$  è una derivazione. Poiché  $\mathfrak{a}^0(\mathfrak{h}) = \{0\}$ , essa è interna: esiste cioè un elemento  $A \in \mathfrak{a}$  tale che  $\phi(H) = [A, H]$  per ogni  $H \in \mathfrak{h}$ , cioè:

$$H - [A, H] \in \mathfrak{h}' \quad \forall H \in \mathfrak{h}.$$

Chiaramente  $A \in \mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{g})$  ed

$$a(-A)(X) = X - [A, X] \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

in quanto  $(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(A))^2 = 0$ . Quindi  $\mathfrak{h}' = a(-A)(\mathfrak{h})$  per un automorfismo speciale  $a(-A) \in \mathbf{S}(\mathfrak{g})$ . La dimostrazione è completa.  $\square$

### 18.3. Automorfismi elementari

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie, di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$ . Se  $X \in \mathfrak{g}$  è un elemento nilpotente di  $\mathfrak{g}$ , tale cioè che  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$  sia un endomorfismo nilpotente di  $\mathfrak{g}$ , allora solo un numero finito di termini della serie

$$(18.3.1) \quad e(X) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} (\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X))^h$$

è diverso da zero e quindi la serie è convergente e la  $e(X)$  definisce un automorfismo dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ .

**Definizione 18.3.1.** Gli elementi del sottogruppo  $\mathbf{E}(\mathfrak{g})$  di  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  generato dagli automorfismi  $e(X)$  al variare di  $X$  tra gli elementi nilpotenti di  $\mathfrak{g}$  si dice il *gruppo degli automorfismi elementari* di  $\mathfrak{g}$ .

Poiché, se  $a \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$  e  $X$  è un elemento nilpotente di  $\mathfrak{g}$ , abbiamo:

$$(18.3.2) \quad a \circ e(X) \circ a^{-1} = e(a(X)),$$

gli automorfismi elementari formano un sottogruppo normale di  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ .

Osserviamo che, se  $\mathfrak{g}$  è risolubile, allora  $\mathbf{S}(\mathfrak{g}) \subset \mathbf{E}(\mathfrak{g})$ .

### 18.4. Sottoalgebre di Borel e coniugazione delle algebre di Cartan

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$ .

**Definizione 18.4.1.** Si dice *sottoalgebra di Borel* di  $\mathfrak{g}$  una sua sottoalgebra di Lie risolubile massimale.

Osserviamo che ogni sottoalgebra di Borel di  $\mathfrak{g}$  contiene il radicale di  $\mathfrak{g}$ , e quindi le sottoalgebre di Borel di  $\mathfrak{g}$  sono in corrispondenza biunivoca con quelle dell'algebra semisemplice  $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ .

**Lemma 18.4.2.** *Le sottoalgebre di Borel coincidono con il proprio normalizzatore.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathfrak{b}$  una sottoalgebra di Borel di  $\mathfrak{g}$ . Il suo normalizzatore in  $\mathfrak{g}$  è una sottoalgebra risolubile di  $\mathfrak{g}$  che contiene  $\mathfrak{b}$ , e quindi coincide con  $\mathfrak{b}$  perché  $\mathfrak{b}$  è massimale.  $\square$

Supponiamo ora che  $\mathbb{k}$  sia algebricamente chiuso, di caratteristica zero. Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie semisemplice, di dimensione finita  $n$  su  $\mathbb{k}$ . Sia  $\mathfrak{h}$  una sua sottoalgebra di Cartan,  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  il sistema di radici corrispondente. Fissiamo una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{R}$  e consideriamo il sistema delle radici positive  $\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$ .

**Lemma 18.4.3.** *Con le notazioni introdotte sopra:*

$$(18.4.1) \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \mathfrak{g}^\alpha$$

*è una sottoalgebra di Borel di  $\mathfrak{g}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Chiaramente  $\mathfrak{b}$  è risolubile. Se non fosse massimale, poiché  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$ , la sottoalgebra  $\mathfrak{b}$  conterrebbe uno dei sottospazi  $\mathfrak{g}^{-\alpha}$  con  $\alpha \in \mathcal{R}^+$  e quindi una sottoalgebra isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ . Ma, contenendo una sottoalgebra semisemplice, non potrebbe essere risolubile.  $\square$

**Proposizione 18.4.4.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo  $\mathbb{k}$ , che supponiamo di caratteristica zero ed algebricamente chiuso. Ogni sottoalgebra di Borel  $\mathfrak{b}$  di  $\mathfrak{g}$  contiene una sua sottoalgebra di Cartan.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathfrak{b}$  una sottoalgebra di Borel di  $\mathfrak{g}$ . Per ogni  $X$  di  $\mathfrak{b}$ , indichiamo con  $X'$  l'endomorfismo lineare di  $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$  definito da  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$  per passaggio al quoziente. Per il Teorema di Lie, gli endomorfismi  $X'$  possono essere simultaneamente triangolarizzati: esistono quindi dei funzionali lineari  $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathfrak{b}^*$  tali che, in una base opportuna di  $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ , ogni  $X'$  sia rappresentato da una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(X) & * & * & \cdots & * \\ 0 & \gamma_2(X) & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \gamma_3(X) & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_m(X) \end{pmatrix}.$$

Ogni  $\gamma_i(X)$  è autovalore di  $X'$ . Se fosse, per qualche  $i$  con  $1 \leq i \leq m$ ,  $\gamma_i(X) = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{b}$ , allora esisterebbe per il Teorema di Lie un  $Y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{b}$  tale che  $[Y, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{b}$ .

Ma ciò non è possibile perché allora  $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b} \oplus \mathbb{k} \cdot Y$  sarebbe una sottoalgebra risolubile di  $\mathfrak{g}$  che contiene propriamente  $\mathfrak{b}$  e ciò contraddirebbe la massimalità di  $\mathfrak{b}$ . Quindi  $\mathfrak{b} \setminus \bigcup_{h=1}^m \ker \gamma_h$  è un aperto di Zariski non vuoto di  $\mathfrak{b}$ . Esso contiene perciò un elemento  $H$  regolare in  $\mathfrak{b}$ ; essendo invertibile su  $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ , esso è anche regolare in  $\mathfrak{g}$  e quindi  $\mathfrak{g}^0(H)$  è una sottoalgebra di Cartan contenuta in  $\mathfrak{b}$ .  $\square$

**Lemma 18.4.5.** *Siano  $\mathcal{R}$  un sistema astratto di radici ridotto nello spazio Euclideo  $E$  ed  $\mathcal{S}$  un sottoinsieme di  $\mathcal{R}$  che goda delle proprietà:*

- (1) *Se  $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$  e  $\alpha + \beta \in \mathcal{R}$ , allora  $\alpha + \beta \in \mathcal{S}$ ;*
- (2) *Se  $\alpha \in \mathcal{S}$ , allora  $-\alpha \notin \mathcal{S}$ .*

*Allora esiste una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{R}$  tale che  $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Ragioniamo per induzione sulla dimensione di  $E$ . Il caso in cui  $E$  abbia dimensione 1 è banale.

Possiamo allora supporre che  $\mathcal{S}$  generi  $E$ : altrimenti consideriamo il sistema di radici  $\mathcal{R}'$  che si ottiene intersecando  $\mathcal{R}$  con il sottospazio  $E'$  di  $E$  generato da  $\mathcal{S}$ . Possiamo allora, per l'ipotesi induttiva, trovare un elemento regolare  $\xi'$  di  $E'$  tale che  $(\xi|\alpha) > 0$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{S}$  e basterà quindi scegliere un elemento regolare  $\xi$  di  $E$  sufficientemente vicino a  $\xi'$  per avere  $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}^+(\xi)$ .

Supponiamo quindi, nel seguito della dimostrazione, che  $\mathcal{S}$  generi  $E$ . Dividiamo l'argomento in tre punti.

(a) Mostriamo che nessuna somma  $\alpha_1 + \dots + \alpha_m$  di elementi di  $\mathcal{S}$  è nulla. Ragioniamo per induzione su  $m$ . Il caso  $m = 1$  è banale. Supponiamo quindi  $m > 1$  e l'enunciato vero per una somma qualsiasi di meno di  $m$  elementi di  $\mathcal{S}$ . Se  $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 0$ , allora  $(\alpha_1|\alpha_2 + \dots + \alpha_m) = -\|\alpha_2 + \dots + \alpha_m\|^2 < 0$  e quindi esiste un indice  $j$ , con  $2 \leq j \leq m$ , tale che  $(\alpha_1|\alpha_j) < 0$ . Ma questo implica che  $\alpha_1 + \alpha_j \in \mathcal{R}$  e dunque  $\alpha_1 + \alpha_j \in \mathcal{S}$  perché somma di radici di  $\mathcal{S}$ . Dalla

$$(\alpha_1 + \alpha_j) + \alpha_2 + \dots + \alpha_{j-1} + \alpha_{j+1} + \dots + \alpha_m = 0$$

otteniamo una somma di  $m - 1$  radici di  $\mathcal{S}$  uguale a zero, e quindi una contraddizione.

(b) Mostriamo ora che esiste un elemento  $\gamma \in \mathcal{S}$  tale che  $(\gamma|\alpha) \geq 0$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{S}$ . Se così non fosse, potremmo trovare una successione  $\{\alpha_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$  tale che  $\beta_\nu = \sum_{h=0}^{\nu} \alpha_h$  sia un elemento di  $\mathcal{S}$  per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ . Infatti, se  $\alpha_0, \dots, \alpha_\nu$  sono stati già costruiti in modo che  $\beta_0, \dots, \beta_\nu \in \mathcal{S}$ , abbiamo  $\beta_\nu \neq 0$  e quindi esisterebbe un  $\alpha_{\nu+1} \in \mathcal{S}$  tale che  $(\beta_\nu|\alpha_{\nu+1}) < 0$ . Ma questa condizione implica che  $\beta_{\nu+1} = \beta_\nu + \alpha_{\nu+1} \in \mathcal{R}$  e quindi  $\beta_{\nu+1} \in \mathcal{S}$  per la proprietà (1). Ma  $\mathcal{S}$  contiene un numero finito di elementi e dunque dovrebbe essere  $\beta_i = \beta_j$  per due indici  $0 \leq i < j$  e ciò contraddirebbe il punto (a), perché  $\beta_j - \beta_i$  sarebbe una somma nulla di elementi di  $\mathcal{S}$ .

(c) Fissiamo quindi  $\gamma \in \mathcal{S}$  con  $(\gamma|\alpha) \geq 0$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{S}$ . Consideriamo  $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cap \gamma^\perp$  ed  $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap \gamma^\perp$ . Per l'ipotesi induttiva sulla dimensione, esiste un  $\gamma' \in \gamma^\perp$  tale che  $(\gamma'|\alpha) > 0$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{S} \cap \gamma^\perp$ . Allora  $\xi = \gamma + \epsilon\gamma'$  è, per  $\epsilon > 0$  sufficientemente piccolo, un elemento non nullo di  $E$  tale che  $(\xi|\alpha) > 0$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{S}$ . Basterà quindi scegliere un  $\eta$  regolare sufficientemente vicino a  $\xi$  per ottenere  $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}^+(\eta)$ .  $\square$

**Proposizione 18.4.6.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie semisemplice sul campo  $\mathbb{k}$ , di caratteristica zero ed algebricamente chiuso. Ogni sottoalgebra di Borel  $\mathfrak{b}$  di  $\mathfrak{g}$  si rappresenta nella forma (18.4.1) rispetto ad un sistema di radici  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  relativo ad una sottoalgebra di Cartan  $\mathfrak{h}$  contenuta in  $\mathfrak{b}$  e ad un suo ordinamento lessicografico.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per la Proposizione 18.4.4, una sottoalgebra di Borel  $\mathfrak{b}$  contiene una sottoalgebra di Cartan  $\mathfrak{h}$  ed è quindi somma diretta di  $\mathfrak{h}$  e di autospazi  $\mathfrak{g}^\alpha$ , al variare di  $\alpha$  in un sottoinsieme  $\mathcal{S}$  di  $\mathcal{R}$ . Poiché  $\mathfrak{b}$  è risolubile, se  $\alpha \in \mathcal{S}$ , allora  $-\alpha \notin \mathcal{S}$ ; inoltre, poiché  $\mathfrak{b}$  è una sottoalgebra, se  $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$  e  $\alpha + \beta \in \mathcal{R}$ , allora  $\alpha + \beta \in \mathcal{S}$ . Per il Lemma 18.4.5,  $\mathcal{S}$  è contenuto in un sottoinsieme di radici positive  $\mathcal{R}^+$  di  $\mathcal{R}$ : quindi  $\mathfrak{b}$  è contenuta in una sottoalgebra risolubile della forma (18.4.1) e quindi, essendo massimale, coincide con essa.  $\square$

Da questa proposizione otteniamo:

**Proposizione 18.4.7.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie semisemplice sul campo  $\mathbb{k}$ , algebricamente chiuso e di caratteristica zero. Sia  $\ell = \text{rk}(\mathfrak{g})$  e sia  $2n$  la cardinalità di un sistema di radici  $\mathcal{R}$  di  $\mathfrak{g}$  rispetto a una sua sottoalgebra di Cartan  $\mathfrak{h}$ . Allora  $\mathfrak{g}$  ha dimensione  $2n + \ell$  ed inoltre:*

- (1) *Ogni sottoalgebra di Borel  $\mathfrak{b}$  di  $\mathfrak{g}$  ha dimensione  $n + \ell$ ;*
- (2) *per ogni algebra di Borel  $\mathfrak{b}$  di  $\mathfrak{g}$ , il suo derivato  $\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$  è un ideale nilpotente di  $\mathfrak{b}$  di dimensione  $n$ ;*
- (3) *per ogni sottoalgebra di Borel  $\mathfrak{b}$  di  $\mathfrak{g}$ , la sottoalgebra  $\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$  è ortogonale a  $\mathfrak{b}$  rispetto alla forma di Killing di  $\mathfrak{g}$ .*

**Proposizione 18.4.8.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie, di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  algebricamente chiuso. Siano  $\mathfrak{b}$  e  $\mathfrak{b}'$  due sottoalgebre di Borel di  $\mathfrak{g}$ . Allora  $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$  contiene una sottoalgebra di Cartan di  $\mathfrak{g}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo dapprima il caso in cui  $\mathfrak{g}$  sia semisemplice.

Sia  $\ell = \text{rk}(\mathfrak{g})$  e, posto  $\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ ,  $\mathfrak{n}' = [\mathfrak{b}', \mathfrak{b}']$ , sia  $n = \dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{n}'$ . Per la proposizione precedente,  $\dim \mathfrak{b} = \dim \mathfrak{b}' = n + \ell$  e  $\dim \mathfrak{g} = 2n + \ell$ .

Poniamo  $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$  e dimostriamo che

$$(18.4.2) \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}.$$

Per la formula d'intersezione di Grassmann abbiamo:

$$\dim \mathfrak{a} \geq \dim \mathfrak{b} + \dim \mathfrak{b}' - \dim \mathfrak{g} = 2(n + \ell) - (2n + \ell) = \ell.$$

Gli elementi di  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n}$  sono nilpotenti e appartengono a  $\mathfrak{b}'$ ; essi appartengono perciò ad  $\mathfrak{n}'$  e quindi:

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n} \subset \mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}'.$$

D'altra parte,  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{b}^\perp$  e  $\mathfrak{n}' \subset \mathfrak{b}'^\perp$ , ove gli ortogonali sono calcolati utilizzando la forma di Killing di  $\mathfrak{g}$ , che è non degenere. Abbiamo perciò:

$$\mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}' \subset \mathfrak{b}^\perp \cap \mathfrak{b}'^\perp = (\mathfrak{b} + \mathfrak{b}')^\perp.$$

Per la formula d'intersezione di Grassmann:

$$\dim(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}') = 2(n + \ell) - \dim \mathfrak{a}$$

e quindi

$$\dim(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}')^\perp = (2n + \ell) - ((2n + \ell) - \dim \mathfrak{a}) = \dim \mathfrak{a} - \ell.$$

Otteniamo perciò:

$$\dim(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n}) \leq \dim \mathfrak{a} - \ell.$$

Utilizzando ancora la formula d'intersezione di Grassmann otteniamo:

$$\dim(\mathfrak{a} + \mathfrak{n}) = \dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{n} - \dim(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n}) \geq \dim \mathfrak{a} + n - (\dim \mathfrak{a} - \ell) = n + \ell.$$

Poiché  $\mathfrak{a} + \mathfrak{n} \subset \mathfrak{b}$  e  $\dim(\mathfrak{a} + \mathfrak{n}) \geq \dim \mathfrak{b}$ , ne segue che  $\mathfrak{a} + \mathfrak{n} = \mathfrak{b}$ .

Fissiamo ora un elemento  $H$  di  $\mathfrak{b}$  regolare in  $\mathfrak{g}$ . Possiamo allora scrivere  $H = A + Z$  con  $A \in \mathfrak{a}$ ,  $Z \in \mathfrak{n}$ . Poiché  $\mathfrak{b}$  è risolubile, e  $Z$  è nilpotente,  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$  e  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(A)$  hanno allora lo stesso polinomio caratteristico e quindi  $A \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$  è un elemento regolare in  $\mathfrak{g}$ . L'algebra di Cartan  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(A)$  è allora contenuta sia in  $\mathfrak{b}$  che  $\mathfrak{b}'$ . Ciò completa la dimostrazione nel caso di una  $\mathfrak{g}$  semisemplice.

In generale, siano  $\mathfrak{r}$  il radicale di  $\mathfrak{g}$  e  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$  la proiezione nel quoziente. Allora  $\pi(\mathfrak{b})$  e  $\pi(\mathfrak{b}')$  sono sottoalgebre di Borel di  $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$  e, per la prima parte della dimostrazione, esiste un'algebra di Cartan  $\hat{\mathfrak{h}}$  di  $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$  contenuta in  $\pi(\mathfrak{b}) \cap \pi(\mathfrak{b}')$ . Basterà allora considerare la sottoalgebra  $\pi^{-1}(\hat{\mathfrak{h}}) \supset \mathfrak{r}$  e scegliere in essa un elemento  $H$  tale che  $\pi(H)$  sia regolare in  $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$  e  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$  ristretto ad  $\mathfrak{r}$  abbia nucleo di dimensione minima: allora  $H$  è regolare in  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{g}^0(H)$  è una sottoalgebra di Cartan contenuta in  $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ .  $\square$

**Teorema 18.4.9.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo  $\mathbb{k}$ , di caratteristica zero e algebricamente chiuso. Il gruppo  $\mathbf{E}(\mathfrak{g})$  degli automorfismi elementari agisce transitivamente sulle algebre di Borel di  $\mathfrak{g}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché tutte le algebre di Borel di  $\mathfrak{g}$  contengono il radicale  $\mathfrak{r}$  di  $\mathfrak{g}$  ed esso è trasformato in sé da ogni elemento di  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ , possiamo limitarci a considerare il caso in cui  $\mathfrak{g}$  sia semisemplice.

Siano  $\mathfrak{b}$  e  $\mathfrak{b}'$  due sottoalgebre di Borel di  $\mathfrak{g}$ . Fissiamo un'algebra di Cartan  $\mathfrak{h}$  di  $\mathfrak{g}$  contenuta in  $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ . Sia  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  il sistema di radici di  $\mathfrak{h}$  in  $\mathfrak{g}$ . Allora, per due camere di Weyl  $C, C' \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$  risulta:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}^+(C)} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{b}' = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}^+(C')} \mathfrak{g}^\alpha.$$

L'elemento  $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$  che trasforma  $C$  in  $C'$  corrisponde a un automorfismo  $a_\sigma \in \mathbf{E}(\mathfrak{g})$  che lascia fissa  $\mathfrak{h}$  e trasforma  $\mathfrak{b}$  in  $\mathfrak{b}'$ .  $\square$

**Teorema 18.4.10.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo  $\mathbb{k}$ , algebricamente chiuso e di caratteristica zero. Allora il gruppo  $\mathbf{E}(\mathfrak{g})$  degli automorfismi elementari di  $\mathfrak{g}$  agisce transitivamente sulle sottoalgebre di Cartan di  $\mathfrak{g}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{h}'$  due sottoalgebre di Cartan di  $\mathfrak{g}$ . Possiamo allora costruire due sottoalgebre di Borel  $\mathfrak{b}$  e  $\mathfrak{b}'$  di  $\mathfrak{g}$  che contengano rispettivamente  $\mathfrak{h}$  ed  $\mathfrak{h}'$ . Sia  $\mathfrak{h}''$  una sottoalgebra di Cartan di  $\mathfrak{g}$  contenuta in  $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ . Poiché  $\mathfrak{h}$  ed  $\mathfrak{h}''$  sono sottoalgebre di Cartan dell'algebra risolubile  $\mathfrak{b}$ , esiste un automorfismo speciale  $a$

di  $\mathbf{S}(\mathfrak{b})$  tale che  $a(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}''$ . Analogamente, esiste un automorfismo speciale  $a'$  di  $\mathbf{S}(\mathfrak{b}')$  tale che  $a'(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}''$ . Poiché  $\mathbf{S}(\mathfrak{b})$  e  $\mathbf{S}(\mathfrak{b}')$  sono sottogruppi di  $\mathbf{E}(\mathfrak{g})$ , abbiamo

$$b = a^{-1} \circ a' \in \mathbf{E}(\mathfrak{g}) \quad \text{e} \quad b(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}.$$

□

**Osservazione 18.4.11.** Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  non algebricamente chiuso, due sottoalgebre di Cartan di  $\mathfrak{g}$  possono non essere coniugate. Consideriamo ad esempio l'algebra di Lie reale  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . Le due matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

generano due sottoalgebre di Cartan di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  che non sono coniugate da nessun automorfismo di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ .



## CAPITOLO XIX

### Forme reali

#### 19.1. Sistemi di Chevalley

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie semisemplice complessa,  $\mathfrak{h}$  una sua sottoalgebra di Cartan e  $\mathcal{R}$  il sistema di radici di  $\mathfrak{g}$  rispetto ad  $\mathfrak{h}$ .

Per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$  indichiamo con  $H_\alpha$  l'elemento di  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$  per cui  $\beta(H_\alpha) = (\beta|\alpha^\vee)$ , cioè  $[H_\alpha, X] = (\beta|\alpha^\vee)X$  se  $X \in \mathfrak{g}^\beta$ . Fissiamo poi  $X_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$  in modo che siano verificate le

$$(19.1.1) \quad [X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha, \quad [H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha, \quad [H_\alpha, X_{-\alpha}] = -2X_{-\alpha}$$

Osserviamo che, se  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ,  $\mathcal{R} = \{\pm\alpha\}$ , allora le

$$X_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

soddisfano le relazioni ((19.1.1)).

Definiamo i coefficienti  $N_{\alpha,\beta}$  mediante:

$$(19.1.2) \quad \begin{cases} [X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta} & \text{se } \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \mathcal{R}, \\ N_{\alpha,\beta} = 0 & \text{se } \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \beta \neq -\alpha \text{ e } \alpha + \beta \notin \mathcal{R}. \end{cases}$$

Chiaramente abbiamo  $N_{\alpha,\beta} = -N_{\beta,\alpha}$  per l'antisimmetria delle parentesi di Lie. Vale inoltre:

**Lemma 19.1.1.** *Se  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$  e  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , allora:*

$$(19.1.3) \quad \frac{N_{\alpha,\beta}}{\|\gamma\|^2} = \frac{N_{\beta,\gamma}}{\|\alpha\|^2} = \frac{N_{\gamma,\alpha}}{\|\beta\|^2}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Scriviamo l'identità di Jacobi per i vettori  $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} [[X_\alpha, X_\beta], X_\gamma] &= N_{\alpha,\beta}H_\gamma = [[X_\alpha, X_\gamma], X_\beta] + [X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] \\ &= -N_{\gamma,\alpha}H_\beta - N_{\beta,\gamma}H_\alpha. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che l'applicazione  $\eta \rightarrow \|\eta\|^2 H_\eta$  si estende a un'applicazione lineare di  $\mathfrak{h}^*$  su  $\mathfrak{h}$ . Quindi  $\|\gamma\|^2 H_\gamma = -\|\alpha\|^2 H_\alpha - \|\beta\|^2 H_\beta$ . Inoltre,  $H_\alpha$  e  $H_\beta$  sono linearmente indipendenti. Da questo segue la (19.1.3).  $\square$

**Lemma 19.1.2.** *Se  $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \mathcal{R}$  e  $\beta - q\alpha, \dots, \beta + p\alpha$  è l' $\alpha$ -stringa di  $\alpha$  per  $\beta$ , allora:*

$$(19.1.4) \quad \frac{\|\alpha + \beta\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{q+1}{p}.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo i vari casi possibili.

Abbiamo  $(\beta|\alpha^\vee) \in \{0, -1, -2, -3\}$ .

Se  $(\beta|\alpha^\vee) = 0$ , allora  $p = q$ . Poiché  $p + q \leq 3$ , abbiamo  $p = q = 1$ . Poiché  $\|\beta + \alpha\|^2 > \|\beta\|^2$ , la condizione che  $(\alpha + \beta|\beta^\vee) = 2$  ci dice che  $\|\beta + \alpha\|^2 = 2\|\beta\|^2$ , dimostrando la validità di (19.1.4) in questo caso.

Quando  $(\beta|\alpha^\vee) = -1$ , abbiamo  $k\|\beta\|^2 = \|\alpha\|^2$  se  $(\alpha|\beta^\vee) = k \in \{-1, -2, -3\}$ . Allora :

$$\|\alpha + \beta\|^2 = k\|\beta\|^2 + \|\beta\|^2 + 2(\alpha|\beta) = \|\beta\|^2$$

perché  $2(\alpha|\beta) = -k\|\beta\|^2$ . Poiché  $q - p = -1$ , abbiamo  $p = q + 1$  e ne deduciamo la (19.1.4).

Se  $(\beta|\alpha^\vee) = -2$ , allora  $\|\beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2$  e  $(\alpha|\beta^\vee) = -1$ . Quindi :

$$\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + \|\beta\|^2(\alpha|\beta^\vee) = \frac{1}{2}\|\beta\|^2.$$

Poiché  $q - p = -2$  e  $q = 0$ , otteniamo anche in questo caso la (19.1.4).

Consideriamo ora l'ultimo caso, in cui  $(\beta|\alpha^\vee) = -3$ . Abbiamo allora  $\|\beta\|^2 = 3\|\alpha\|^2$  e  $(\alpha|\beta^\vee) = -1$ . Quindi:

$$\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + \|\beta\|^2(\alpha|\beta^\vee) = \frac{1}{3}\|\beta\|^2.$$

Poiché  $q - p = -3$  e  $q = 0$ , otteniamo la (19.1.4).  $\square$

**Lemma 19.1.3.** Siano  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  e sia  $\beta - q\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta + p\alpha$ , con  $p, q$  interi non negativi, la  $\alpha$ -stringa per  $\beta$  in  $\mathcal{R}$ . Allora:

- (i)  $\kappa_g(X_\alpha, X_{-\alpha}) = -\frac{1}{2}\kappa_g(H_\alpha, H_\alpha)$
- (ii)  $N_{\alpha, \beta}N_{-\alpha, \alpha+\beta} = -p(q+1)$
- (iii)  $N_{\alpha, \beta}N_{-\alpha, -\beta} = (q+1)^2$ .

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo:

$$2\kappa_g(X_\alpha, X_{-\alpha}) = \kappa_g([H_\alpha, X_\alpha], X_{-\alpha}) = \kappa_g(H_\alpha, [X_\alpha, X_{-\alpha}]) = -\kappa_g(H_\alpha, H_\alpha),$$

da cui (i).

Consideriamo il sottospazio vettoriale  $V = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{\beta+h\alpha} = \sum_{h=-q}^p \mathfrak{g}^{\beta+h\alpha}$  di  $\mathfrak{g}$ . La restrizione a  $V$  dell'endomorfismo  $T = \text{ad}(H_\alpha)$  ha traccia nulla. Poiché  $T(X_{\beta+h\alpha}) = [H_\alpha, X_{\beta+h\alpha}] = ((\beta|\alpha^\vee) + 2h)X_{\beta+h\alpha}$  otteniamo che :

$$(p+q+1)(\beta|\alpha^\vee) + p(p+1) - q(q+1) = 0 \implies (\beta|\alpha^\vee) = q-p.$$

Abbiamo poi :

$$\begin{aligned} [X_{-\alpha}, [X_\alpha, X_\beta]] &= N_{-\alpha, \alpha+\beta}N_{\alpha, \beta}X_\beta \\ &= [H_\alpha, X_\beta] + [X_\alpha, [X_{-\alpha}, X_\beta]] \\ &= (\beta|\alpha^\vee)X_\beta + N_{\alpha, -\alpha+\beta}N_{-\alpha, \beta}X_\beta \end{aligned}$$

Dimostriamo la (ii) per induzione su  $q$ . Quando  $q = 0$ ,  $\beta - \alpha \notin \mathcal{R}$  e quindi  $N_{-\alpha, \beta} = 0$ ,  $(\beta|\alpha^\vee) = -p = -p(0+1)$  ci danno la (ii). Altrimenti, se  $\beta - \alpha \in \mathcal{R}$

osserviamo che la  $\alpha$ -stringa per  $\beta - \alpha$  è  $(\beta - \alpha) - (q - 1)\alpha, \dots, (\beta - \alpha) + (p + 1)\alpha$  e quindi, supponendo per ricorrenza che la (ii) valga per  $\alpha$  e  $(\beta - \alpha)$ , abbiamo:

$$N_{-\alpha, \alpha + \beta} N_{\alpha, \beta} = (q - p) - (p + 1)q = -p(q + 1).$$

Per le ((19.1.3)) e la (19.1.4) abbiamo:

$$N_{-\alpha, -\beta} = N_{\alpha + \beta, -\alpha} \frac{\|\alpha + \beta\|^2}{\|\beta\|^2} = -N_{-\alpha, \alpha + \beta} \frac{q + 1}{p}.$$

Quindi, utilizzando anche (i):

$$N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, -\beta} = -N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, \alpha + \beta} \frac{q + 1}{p} = p(q + 1) \frac{q + 1}{p} = (q + 1)^2.$$

La dimostrazione è completa.  $\square$

Si dice *Sistema di Chevalley* di  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  una famiglia  $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{R}}$  tale che:

- (I)  $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathcal{R}$
- (II)  $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathcal{R}$
- (III)  $\exists \Theta \in \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$  con  $\Theta(H) = -H \quad \forall H \in \mathfrak{h}$ ,  $\Theta(X_\alpha) = X_{-\alpha} \quad \forall \alpha \in \mathcal{R}$ .

**Teorema 19.1.4.** *Esistono sistemi di Chevalley di  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Dalla costruzione di algebre di Lie complesse associate a un sistema di radici ridotto ricaviamo il seguente fatto:

Siano  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  due basi di  $\mathcal{R}$ . Per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$  sia  $X_\alpha$  un elemento non nullo di  $\mathfrak{g}^\alpha$  e per ogni  $\alpha' \in \mathcal{B}'$  sia  $Y_{\alpha'}$  un elemento non nullo di  $\mathfrak{g}^{\alpha'}$ . Allora esiste uno ed un solo automorfismo  $\Phi$  di  $\mathfrak{g}$  tale che  $\Phi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$  e  $\Phi(\{X_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{B}\}) = \{Y_{\alpha'} \mid \alpha' \in \mathcal{B}'\}$ . Fissiamo quindi un sistema di vettori non nulli  $(Y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{R}}$  per cui sia soddisfatte le (I), (II). Sia  $\Theta \in \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$  tale che  $\Theta(Y_\alpha) = Y_{-\alpha}$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}$ . Necessariamente avremo anche  $\Theta(Y_{-\alpha}) = Y_\alpha$  e quindi  $\Theta$  è un'involuzione. Per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$  avremo  $\Theta(Y_\alpha) = t_\alpha Y_{-\alpha}$  con  $t_\alpha \in \mathbb{C}^*$  e  $t_\alpha t_{-\alpha} = 1$  perché  $\Theta$  è un'involuzione. Scegliamo per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$  un elemento  $u_\alpha \in \mathbb{C}^*$  con  $u_\alpha^2 = t_\alpha$  e  $u_{-\alpha} = u_\alpha^{-1}$ . Allora  $X_\alpha = u_\alpha Y_\alpha$  è un sistema di Chevalley per  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ .  $\square$

**Proposizione 19.1.5.** *Se  $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{R}}$  è un sistema di Chevalley per  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ , se  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  sono linearmente indipendenti e  $\beta - q\alpha, \dots, \beta + p\alpha$  è l' $\alpha$ -stringa di  $\alpha$  per  $\beta$ , allora:*

$$(19.1.5) \quad N_{\alpha, \beta} = N_{-\alpha, -\beta} = \pm(q + 1).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} N_{-\alpha, -\beta} X_{-\alpha, -\beta} &= [X_{-\alpha}, X_{-\beta}] = [\Theta(X_\alpha), \Theta(X_\beta)] \\ &= \Theta([X_\alpha, X_\beta]) = N_{\alpha, \beta} X_{-\alpha, -\beta} \end{aligned}$$

da cui  $N_{\alpha, \beta} = N_{-\alpha, -\beta}$ . Poiché  $N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, -\beta} = (q + 1)^2$ , otteniamo la tesi.  $\square$

### 19.2. Forma compatta e forma split

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie semisemplice complessa,  $\mathfrak{h}$  una sua sottoalgebra di Cartan e  $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{R}}$  un sistema di Chevalley di  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ .

**Proposizione 19.2.1.** *I due sottospazi reali di  $\mathfrak{g}$*

$$(19.2.1) \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \mathbb{R} X_\alpha$$

$$(19.2.2) \quad \mathfrak{u} = i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} (\mathbb{R}(X_\alpha + X_{-\alpha}) + i\mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha}))$$

sono sottoalgebra di Lie reali semisemplici di  $\mathfrak{g}$ . Abbiamo  $\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  e  $\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}$ . Le restrizioni a  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  e ad  $\mathfrak{u}$  della forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  sono a valori reali e coincidono con le forme di Killing di  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  e di  $\mathfrak{u}$ , rispettivamente. La forma di Killing è definita negativa su  $\mathfrak{u}$ . Se  $\tau$  è il coniugio definito su  $\mathfrak{g}$  dalla forma reale  $\mathfrak{u}$ , se cioè  $\tau(X + iY) = X - iY$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{u}$ , la forma Hermitiana:

$$(19.2.3) \quad \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \rightarrow -\kappa_{\mathfrak{g}}(X, \tau(Y)) \in \mathbb{C}$$

è un prodotto scalare Hermitiano su  $\mathfrak{g}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La prima affermazione segue dal fatto che i coefficienti  $N_{\alpha, \beta}$  rispetto al sistema di Chevalley  $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{R}}$  sono reali.

Se  $Y_1 = H_1 + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} c_1^\alpha X_\alpha$ ,  $Y_2 = H_2 + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} c_2^\alpha X_\alpha$ , allora:

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathfrak{g}}(Y_1, Y_2) &= \kappa_{\mathfrak{g}}(H_1, H_2) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} c_1^\alpha c_2^{-\alpha} \kappa_{\mathfrak{g}}(X_\alpha, X_{-\alpha}) \\ &= \kappa_{\mathfrak{g}}(H_1, H_2) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} c_1^\alpha c_2^{-\alpha} \kappa_{\mathfrak{g}}(H_\alpha, H_{-\alpha}). \end{aligned}$$

Abbiamo poi  $\tau(X_\alpha) = X_{-\alpha}$  e quindi si verificano facilmente le altre affermazioni della proposizione.  $\square$

**Definizione 19.2.2.** Una *forma reale* di  $\mathfrak{g}$  è una sua sottoalgebra di Lie reale  $\mathfrak{g}_0$  tale che  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\mathfrak{g}_0$ .

La  $\sigma = \sigma_{\mathfrak{g}_0} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , definita da  $\sigma(X + iY) = X - iY$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{g}_0$  è un automorfismo involutivo ed anti- $\mathbb{C}$ -lineare di  $\mathfrak{g}$ , che si dice *indotto* dalla forma reale  $\mathfrak{g}_0$ .

Una forma reale  $\mathfrak{g}_0$  di  $\mathfrak{g}$  si dice:

*split* se contiene una sottoalgebra di Cartan  $\mathfrak{h}_0$  con  $\text{ad}_{\mathfrak{g}_0}(H)$  diagonalizzabile per ogni  $H \in \mathfrak{h}_0$ ;

*compatta* se la forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}_0}$  è definita negativa.

Se  $\mathfrak{u}$  è una forma compatta di  $\mathfrak{g}$ , allora:

$$(Z_1|Z_2) = -\kappa_{\mathfrak{g}}(Z_1, \tau(Z_2)) \quad \text{per } Z_1, Z_2 \in \mathfrak{g}$$

è un prodotto scalare Hermitiano su  $\mathfrak{g}$ .

### 19.3. La decomposizione di Cartan

**Teorema 19.3.1.** *Sia  $\mathfrak{g}$  la complessificazione di un'algebra di Lie semisemplice reale  $\mathfrak{g}_0$  e  $\sigma$  il coniugio in  $\mathfrak{g}$  definito da  $\mathfrak{g}_0$ . Allora esiste una forma compatta  $u$  di  $\mathfrak{g}$  con  $\sigma(u) = u$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo una qualsiasi forma compatta  $u_0$  di  $\mathfrak{g}$  e sia  $\tau_0$  il coniugio di  $\mathfrak{g}$  definito da  $u_0$ . La composizione  $\nu = \sigma \circ \tau_0$  è un automorfismo dell'algebra di Lie complessa  $\mathfrak{g}$ , e lascia quindi invariata la sua forma di Killing. Indicando con  $(X|Y)$  il prodotto scalare Hermitiano  $(X, Y) = -\kappa_{\mathfrak{g}}(X, \tau_0(Y))$ , abbiamo allora :

$$\begin{aligned} (X|\nu(Y)) &= -\kappa_{\mathfrak{g}}(X, \tau_0 \circ \sigma \circ \tau_0(Y)) = -\kappa_{\mathfrak{g}}(X, \nu^{-1} \circ \tau_0(Y)) \\ &= -\kappa_{\mathfrak{g}}(\nu(X), \tau_0(Y)) = (\nu(X)|Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Quindi  $\nu$  è una trasformazione autoaggiunta per il prodotto scalare Hermitiano che abbiamo definito su  $\mathfrak{g}$ . Consideriamo allora la trasformazione autoaggiunta positiva  $p = \nu^2 = \nu \circ \nu^*$ . Essa ha autovalori reali positivi e  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda > 0} E_{\lambda}$ , ove  $E_{\lambda} = \{X \in \mathfrak{g} \mid p(X) = \lambda X\}$ . Abbiamo  $[E_{\lambda}, E_{\mu}] \subset E_{\lambda\mu}$  per ogni  $\lambda, \mu > 0$ , perché  $p$  è un automorfismo di  $\mathfrak{g}$ . Poiché  $p$  è una trasformazione Hermitiana definita positiva su  $\mathfrak{g}$ , per ogni  $t \in \mathbb{R}$  possiamo definire la sua potenza  $p^t$  come una trasformazione Hermitiana definita positiva, caratterizzata da  $p^t(X) = \lambda^t X$  se  $X \in E_{\lambda}$ , con  $\lambda, \lambda^t > 0$ . Essendo :

$$p^t([X, Y]) = (\lambda\mu)^t([X, Y]) = [\lambda^t X, \mu^t Y] = [p^t(X), p^t(Y)] \quad \text{se } X \in E_{\lambda}, Y \in E_{\mu},$$

anche  $p^t$  è un automorfismo di  $\mathfrak{g}$ . Consideriamo ora, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , l'automorfismo anti- $\mathbb{C}$ -lineare  $\tau_t = p^t \circ \tau_0 \circ p^{-t}$  di  $\mathfrak{g}$ . Per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , esso è il coniugio rispetto alla forma reale compatta  $u_t = p^t(u_0)$ . Da

$$\tau_0 \circ \nu \circ \tau_0^{-1} = \tau_0 \circ (\sigma \circ \tau_0) \circ \tau_0 = \tau_0 \circ \sigma = \nu^{-1}$$

otteniamo che  $\tau_0 \circ p \circ \tau_0 = p^{-1}$  e, in generale,  $\tau_0 \circ p^t \circ \tau_0 = p^{-t}$ . Quindi :

$$\begin{aligned} \sigma \circ \tau_t &= \sigma \circ p^t \circ \tau_0 \circ p^{-t} = \sigma \circ \tau_0 \circ (\tau_0 \circ p^t \circ \tau_0 \circ p^{-t}) = \nu \circ p^{-2t} \\ \tau_t \circ \sigma &= (\sigma \circ \tau_t)^{-1} = p^{2t} \circ \nu^{-1} = \nu^{-1} \circ p^{2t} \end{aligned}$$

perché  $\nu$  commuta con tutte le potenze reali di  $p$  in quanto  $\nu, p$  e  $p^t$  sono tutte diagonalizzabili rispetto ad una stessa base di  $\mathfrak{g}$ .

Poiché  $p = \nu^2$ , abbiamo  $\nu^{-1} \circ p^{1/2} = \nu \circ p^{-1/2}$ , e quindi  $\tau_{1/4} \circ \sigma = \sigma \circ \tau_{1/4}$ . Otteniamo perciò la tesi con  $u = p^{1/4}(u_0)$ .  $\square$

Osserviamo che la  $t \rightarrow p^t$  è un gruppo a un parametro di automorfismi di  $\mathfrak{g}$ . Abbiamo quindi  $p^t = \exp(\text{tad}_{\mathfrak{g}}(P))$  per un elemento  $P$  di  $\mathfrak{g}$ . Ricaviamo quindi dalla dimostrazione del teorema precedente :

**Proposizione 19.3.2.** *Se  $u_0, u_1$  sono due forme reali compatte della stessa algebra di Lie complessa semisemplice  $\mathfrak{g}$ , allora esiste un automorfismo interno  $\phi \in \text{Int}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$  tale che  $\phi(u_0) = u_1$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione del Teorema 19.3.1 ci dice che, data una forma reale  $g_0$ , luogo di punti fissi di un coniugio  $\sigma$  di  $\mathfrak{g}$  e una forma compatta  $u_0$  di  $\mathfrak{g}$ , possiamo trovare un automorfismo interno  $\psi \in \mathbf{Int}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$  tale che  $\psi(u_0) = u$  sia una forma compatta  $\sigma$ -invariante, cioè con  $\sigma(u) = u$ . Utilizziamo questo fatto nel caso speciale in cui  $g_0 = u_1$  sia anch'essa una forma compatta. Indichiamo con  $\tau_0$  e  $\tau_1 = \sigma$  i coniugi rispetto alle forme compatte  $u_0, u_1$ , rispettivamente e sia  $\psi \in \mathbf{Int}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$  tale che  $\tau_1(\psi(u_0)) = \psi(u_0)$ . Allora  $\psi^{-1} \circ \tau_1 \circ \psi$  è un automorfismo involutivo di  $\mathfrak{g}$ , con  $\psi^{-1} \circ \tau_1 \circ \psi(u_0) = u_0$ . Consideriamo la forma bilineare simmetrica :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(X, Y) &= -\kappa_{\mathfrak{g}}(X, \psi^{-1} \circ \tau_1 \circ \psi(Y)) \\ &= -\kappa_{\mathfrak{g}}(\psi(X), \tau_1(\psi(Y))). \end{aligned}$$

Essa è definita positiva su  $u_0$ . Poiché  $\psi^{-1} \circ \tau_1 \circ \psi$  è un'involuzione che trasforma  $u_0$  in sé,  $u_0$  si decompone nella somma diretta dell'autospazio relativo all'autovalore 1 e dell'autospazio relativo all'autovalore  $-1$ . Se  $\psi^{-1} \circ \tau_1 \circ \psi(X) = -X$  per un  $X \in u_0$ , otteniamo :

$$\begin{aligned} 0 &\geq \kappa_{\mathfrak{g}}(X, \psi^{-1} \circ \tau_1 \circ \psi(X)) \\ &= \kappa_{\mathfrak{g}}(X, -X) = -\kappa_{\mathfrak{g}}(X, \tau_0(X)) \geq 0. \end{aligned}$$

Quindi  $X = 0$ , e questo prova che  $\psi \circ \tau_1 \circ \psi^{-1}$ , essendo l'identità su  $u_0$ , è proprio uguale a  $\tau_0$ . Ne segue che  $\psi(u_0)$  è il luogo dei punti fissi di  $\tau_1$  ed è perciò uguale ad  $u_1$ .  $\square$

Sia  $\mathfrak{g}_0$  un'algebra di Lie semisemplice reale. Ricordiamo che una sottoalgebra  $\mathfrak{k}_0$  di  $\mathfrak{g}_0$  è *compatta*<sup>1</sup> se la restrizione a  $\mathfrak{k}_0$  della forma di Killing di  $\mathfrak{g}_0$  è definita negativa.

Un'*involuzione di Cartan* di un'algebra di Lie semisemplice reale  $\mathfrak{g}_0$  è un automorfismo involutivo  $\vartheta$  di  $\mathfrak{g}_0$  per cui :

$$(19.3.1) \quad (X|Y)_{\vartheta} = -\kappa_{\mathfrak{g}_0}(X, \vartheta(Y)) \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{g}_0$$

sia un prodotto scalare (definito positivo) su  $\mathfrak{g}_0$ .

Il luogo  $\mathfrak{k}_0$  dei punti fissi di un'involuzione di Cartan è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}_0$  su cui la forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}_0}$  è definita negativa. Indichiamo con  $\mathfrak{p}_0$  l'autospazio di  $\mathfrak{g}_0$  corrispondente all'autovalore  $-1$  di  $\vartheta$ . Poiché  $\vartheta$  è un automorfismo involutivo,  $\mathfrak{p}_0$  è l'ortogonale di  $\mathfrak{k}_0$  rispetto alla forma di Killing. In particolare:

- $\mathfrak{k}_0$  è una sottoalgebra di Lie compatta di  $\mathfrak{g}_0$  (in particolare è riduttiva);
- $\kappa_{\mathfrak{g}_0}$  è definita positiva su  $\mathfrak{p}_0$  e  $\text{ad}(\mathfrak{k}_0)$  opera su  $\mathfrak{p}_0$  come un'algebra di trasformazioni antisimmetriche rispetto al prodotto scalare definito su  $\mathfrak{p}_0$  dalla forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}_0}$ .

<sup>1</sup>Per il criterio di Cartan, un'algebra di Lie compatta  $\mathfrak{k}$ , cioè con  $\kappa_{\mathfrak{k}}$  definita negativa, è semisemplice. La compattezza di un'algebra di Lie semisemplice reale  $\mathfrak{k}$  è equivalente al fatto che il gruppo di Lie *lineare*  $\mathbf{Int}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{k})$  degli automorfismi interni di  $\mathfrak{k}$ , che ha algebra di Lie  $\mathfrak{k}$ , sia compatto. Più in generale, una sottoalgebra di Lie compatta  $\mathfrak{k}_0$  di  $\mathfrak{g}$  è riduttiva, ma non necessariamente compatta. È compatto il sottogruppo analitico di  $\mathbf{Int}(\mathfrak{g}_0)$  con algebra di Lie  $\text{ad}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{k}_0)$  e l'applicazione  $\mathfrak{k}_0 \ni X \rightarrow \text{ad}_{\mathfrak{g}_0}(X) \in \text{ad}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{k}_0)$  è un isomorfismo di algebre di Lie.

La decomposizione :

$$(19.3.2) \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$$

associata ad un'involuzione di Cartan si dice una *decomposizione di Cartan* di  $\mathfrak{g}_0$ .

Osserviamo che, poiché  $\kappa_{\mathfrak{g}_0}$  è definita positiva su  $\mathfrak{p}_0$ , la  $\mathfrak{k}_0$  è una sottoalgebra compatta massimale di  $\mathfrak{g}_0$ .

**Teorema 19.3.3.** *Se  $\mathfrak{g}$  è la complessificazione di un'algebra di Lie semisemplice reale  $\mathfrak{g}_0$  e  $u$  una forma reale compatta di  $\mathfrak{g}$  invariante rispetto al coniugio  $\sigma$  associato a  $\mathfrak{g}_0$ , allora  $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0 \cap u) \oplus (\mathfrak{g}_0 \cap iu)$  è una decomposizione di Cartan di  $\mathfrak{g}_0$ .*

*Viceversa, se (19.3.2) è una decomposizione di Cartan di  $\mathfrak{g}_0$ , allora  $u = \mathfrak{k}_0 \oplus i\mathfrak{p}_0$  è una forma reale compatta di  $\mathfrak{g}$ .*

*Date due decomposizioni di Cartan di  $\mathfrak{g}_0$ , vi è un automorfismo interno di  $\mathfrak{g}_0$  che le trasforma l'una nell'altra.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $\sigma$  il coniugio rispetto alla forma reale  $\mathfrak{g}_0$  e  $\tau$  quello rispetto ad una forma reale compatta  $u$  di  $\mathfrak{g}$  e supponiamo che  $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$ . Allora la restrizione  $\vartheta$  di  $\tau \circ \sigma$  a  $\mathfrak{g}_0$  è un'involuzione di Cartan. Infatti :

$$\kappa_{\mathfrak{g}_0}(X, \vartheta(Y)) = \kappa_{\mathfrak{g}}(X, \tau(Y)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}.$$

Viceversa, osserviamo che se (19.3.2) è una decomposizione di Cartan di  $\mathfrak{g}_0$ , allora  $u = \mathfrak{k}_0 \oplus i\mathfrak{p}$  è una forma reale di  $\mathfrak{g}$ . Il coniugio rispetto a  $u$  è  $\tau = \vartheta \circ \sigma = \sigma \circ \vartheta$ , dove si è indicato con lo stesso simbolo  $\vartheta$  l'estensione  $\mathbb{C}$ -lineare di  $\vartheta$  a  $\mathfrak{g}$ . Se  $X \in \mathfrak{k}_0$ ,  $Y \in \mathfrak{p}_0$  abbiamo :

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X + iY, \tau(X + iY)) = \kappa_{\mathfrak{g}_0}(X, X) - \kappa_{\mathfrak{g}_0}(Y, Y).$$

La forma Hermitiana  $\kappa_{\mathfrak{g}}(\cdot, \tau(\cdot))$  è definita positiva su  $\mathfrak{g}$ , essendo un'estensione di un prodotto scalare definito sulla forma reale  $u$  e quindi  $u$  è una forma compatta di  $\mathfrak{g}$ .

Siano ora  $\vartheta$  e  $\vartheta'$  due involuzioni di Cartan su  $\mathfrak{g}_0$ . Siano  $\mathfrak{k}_0 = \{X | \vartheta(X) = X\}$ ,  $\mathfrak{p}_0 = \{X | \vartheta(X) = -X\}$ ,  $\mathfrak{k}'_0 = \{X | \vartheta'(X) = X\}$  e  $\mathfrak{p}'_0 = \{X | \vartheta'(X) = -X\}$ . Indichiamo con  $(X|Y)_{\vartheta} = -\kappa_{\mathfrak{g}_0}(X, \vartheta(Y))$  il prodotto scalare su  $\mathfrak{g}_0$  associato a  $\vartheta$ . Se  $\nu_0 = \vartheta \circ \vartheta'$ , abbiamo :

$$(X|\nu_0(Y))_{\vartheta} = -\kappa_{\mathfrak{g}_0}(X, \vartheta'(Y)) = -\kappa_{\mathfrak{g}_0}(\vartheta'(X), Y) = (\nu_0(X)|Y)_{\vartheta}.$$

Questo dimostra che  $\nu_0$  è una trasformazione simmetrica rispetto al prodotto scalare  $(\cdot | \cdot)_{\vartheta}$  su  $\mathfrak{g}_0$ . Quindi  $p_0 = \nu_0^2$  è simmetrica e definita positiva. Possiamo quindi inserire  $p_0 = p_0^1$  in un gruppo a un parametro  $p_0^t = \exp(t \cdot [\text{ad}_{\mathfrak{g}_0}(P_0)])$  di automorfismi interni di  $\mathfrak{g}_0$ , tutti simmetrici e definiti positivi per  $(\cdot | \cdot)_{\vartheta}$ . Utilizzando gli argomenti della dimostrazione del Teorema 19.3.1, possiamo allora dimostrare che  $p_0^{1/4} \circ \vartheta' \circ p_0^{-1/4}$  commuta con  $\vartheta$ . Allora  $p_0^{1/4}(\mathfrak{k}'_0)$  è una sottoalgebra compatta di  $\mathfrak{g}_0$  invariante per  $\vartheta$ , ed il suo ortogonale  $p_0^{1/4}(\mathfrak{p}'_0)$  un sottospazio invariante per  $\vartheta$  su cui la forma di Killing è definita positiva. Ne segue che  $p_0^{1/4}(\mathfrak{k}'_0) = \mathfrak{k}_0$ ,  $p_0^{1/4}(\mathfrak{p}'_0) = \mathfrak{p}_0$  e quindi anche  $p_0^{1/4} \circ \vartheta' \circ p_0^{-1/4} = \vartheta$ .  $\square$

Osserviamo che vale la:

**Proposizione 19.3.4.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie semisemplice complessa. Indichiamo con  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$  l'algebra di Lie reale ottenuta da  $\mathfrak{g}$  per restrizione del campo degli scalari. Allora la decomposizione di Cartan (19.3.2) di  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$  è della forma*

$$(19.3.3) \quad \mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$$

ove  $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{u}$  è una forma reale compatta di  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{p}_0 = i\mathfrak{u}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti, se  $\mathfrak{u}$  è una forma reale compatta di  $\mathfrak{g}$ , la (19.3.3) è una decomposizione di Cartan di  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ , e tutte le decomposizioni di Cartan di  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$  sono coniugate ad essa da un automorfismo interno. Poiché gli automorfismi interni di  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$  trasformano forme reali compatte in forme reali compatte di  $\mathfrak{g}$ , otteniamo la tesi della proposizione.  $\square$

## 19.4. Le algebre semisemplici classiche

**19.4.1. Tipo  $A_\ell$ .** Sia  $n = \ell + 1$  e consideriamo l'algebra di Lie  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . La forma bilineare simmetrica

$$B(X, Y) = \text{traccia}(XY)$$

è non degenere su  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  perché  $B(X, X^*) > 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \setminus \{0\}$ . Quindi  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  è riduttiva. Il suo centro è costituito dalle matrici che sono multiple della matrice identica  $I_n$  e quindi  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  è l'ideale semisemplice di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ .

Definiamo, per ogni coppia di indici  $1 \leq i, j \leq n$ :

$E_{i,j}$  = matrice con coefficiente dell' $i$ -esima riga e  $j$ -esima colonna uguale a 1 e tutti gli altri coefficienti uguali a zero.

Posto  $H_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$  per  $1 \leq i \leq \ell = n - 1$ , le matrici

$$\{E_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{H_i \mid 1 \leq i \leq \ell\}$$
 formano una base di  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ .

Sia  $\mathfrak{h}$  il sottospazio di  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  generato da  $H_1, \dots, H_\ell$ . Indicando con  $e_i(H)$  l' $i$ -esimo elemento della diagonale di  $H \in \mathfrak{h}$ , abbiamo, per ogni  $1 \leq i, j \leq n$ :

$$\text{ad}(H)(E_{i,j}) = [H, E_{i,j}] = (e_i(H) - e_j(H))E_{i,j}.$$

Otteniamo perciò:

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})}(H, H) &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} (e_i(H) - e_j(H))^2 \\ &= 2n \cdot (\text{traccia}(H^2)) - 2(\text{traccia}(H))^2 = 2n \cdot B(H^2). \end{aligned}$$

Osserviamo che  $\mathfrak{h}$  è formato da tutte le matrici diagonali di  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . Se  $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  è un endomorfismo semisemplice, esiste una  $g \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  per cui  $H = g \circ X \circ g^{-1} \in \mathfrak{h}$ . Poiché  $\text{Ad}(g)$  è un automorfismo di  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , abbiamo allora:

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})}(X, X) &= \kappa_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})}(\text{Ad}(g)(X), \text{Ad}(g)(X)) = \kappa_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})}(H, H) \\ &= 2n \cdot \text{traccia}(H^2) = 2n \cdot \text{traccia}(X^2). \end{aligned}$$

Poiché le matrici semisemplici di  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  formano un sottoinsieme denso di  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , le due forme quadratiche  $\kappa_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})}(X, X)$  e  $2n \cdot \text{traccia}(X \circ X)$  sono uguali per ogni



Indichiamo con  $\mathfrak{h}$  il sottospazio delle matrici diagonali di  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ , che è generato da  $H_1, \dots, H_\ell$ . Abbiamo:

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)(F_{i,j}) &= [H, F_{i,j}] = [H, E_{i,j} - E_{n+1-j, n+1-i}] \\ &= (e_i(H) - e_j(H))E_{i,j} - (e_{n+1-j}(H) - e_{n+1-i}(H))E_{n+1-j, n+1-i}] \\ &= (e_i(H) - e_j(H))(E_{i,j} - E_{n+1-j, n+1-i}) = (e_i(H) - e_j(H))F_{i,j}. \end{aligned}$$

Risulta allora, per  $H \in \mathfrak{h}$ :

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})}(H, H) &= \sum_{i+j \leq n} (e_i(H) - e_j(H))^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (e_i(H) - e_j(H))^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (e_i(H) - e_{n+1-i}(H))^2 \\ &= n \sum_{i=1}^n (e_i(H))^2 - 2 \sum_{i=1}^n (e_i(H))^2 \\ &= (2\ell - 1) \sum_{i=1}^n (e_i(H))^2. \end{aligned}$$

Otteniamo allora

$$\kappa_{\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})}(H, H) = (2\ell - 1) \text{traccia}(H^2),$$

e quindi, poiché la formula vale allora, per il coniugio, per tutte le matrici diagonalizzabili di  $\mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C})$ , che formano un aperto denso, abbiamo infine:

$$(19.4.7) \quad \kappa_{\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})}(X, Y) = (2\ell - 1) \text{traccia}(X \circ Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C}).$$

Il sistema di radici  $\mathcal{R}$  associato a  $\mathfrak{h}$  è formato da:

$$(19.4.8) \quad \mathcal{R} = \{\pm e_i \mid i = 1, \dots, \ell\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq \ell\}$$

ove gli  $F_{i, \ell+1}$ , con  $i = 1, \dots, \ell$  e gli  $F_{\ell+1, i}$  sono autovettori che corrispondono alle radici  $\pm e_i$ , e gli  $F_{i, j}$ , con  $i + j \leq n$  ed  $i, j \neq \ell + 1$ , alle radici  $e_i - e_j$  (identificando  $e_i$  con  $-e_{n+1-i}$  per  $i = \ell + 1, \dots, n$ ). Definiamo un sistema di Chevalley in  $\mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C})$  ponendo:

$$\begin{cases} X_{e_i} = F_{i, \ell+1} & 1 \leq i \leq \ell \\ X_{-e_i} = -F_{\ell+1, i} & 1 \leq i \leq \ell \\ X_{e_i - e_j} = F_{i, j} & 1 \leq i < j \leq \ell \\ X_{e_i + e_j} = F_{i, \ell+1-j} & 1 \leq i < j \leq \ell \\ X_{-e_i + e_j} = -F_{j, i} & 1 \leq i < j \leq \ell \\ X_{-e_i - e_j} = -F_{\ell+1-i, \ell+1-j} & 1 \leq i < j \leq \ell. \end{cases}$$

Utilizzando questo sistema di Chevalley, otteniamo la forma compatta:

$$\mathfrak{u} = \{X \in \mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\} = \mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{su}(2\ell + 1).$$

Quest'algebra di Lie reale è isomorfa all'algebra di Lie delle matrici reali antisimmetriche:

$$\mathfrak{so}(2\ell + 1) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n + 1, \mathbb{R}) \mid X + {}^t X = 0\}.$$

A partire dal sistema di Chevalley sopra descritto, otteniamo la forma split. Essa è la sottoalgebra delle matrici reali di  $\mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C})$ :

$$(\mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C}))^{\mathbb{R}} = \mathfrak{so}(\ell, \ell + 1) = \{X \in \mathfrak{sl}(2\ell + 1, \mathbb{R}) \mid {}^tXS_{2\ell+1} + S_{2\ell+1}X = 0\}.$$

**19.4.3. Tipo  $C_\ell$ .** Consideriamo la matrice antisimmetrica  $(2\ell) \times (2\ell)$

$$J_\ell = \begin{pmatrix} & S_\ell \\ -S_\ell & \end{pmatrix}$$

e sia  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$  l'algebra di Lie delle matrici complesse:

$$(19.4.9) \quad \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}(2\ell, \mathbb{C}) \mid {}^tXJ_\ell + J_\ell X = 0\}.$$

Se  $X = (x_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 2\ell} \in \mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})$ , abbiamo

$$x_{i,j} = \begin{cases} -x_{2\ell-j+1, 2\ell-i+1} & \text{se } |i-j| < \ell, \\ x_{2\ell-j+1, 2\ell-i+1} & \text{se } |i-j| \geq \ell. \end{cases}$$

Possiamo quindi definire una base di  $\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})$  mediante

$$\begin{aligned} H_i &= E_{i,i} - E_{2\ell+1-i, 2\ell+1-i} & \text{per } 1 \leq i \leq \ell \\ F_{i,j} &= E_{i,j} - E_{2\ell+1-j, 2\ell+1-i} & \text{per } 1 \leq i, j \leq \ell \\ F_{i,j} &= E_{i,j} + E_{2\ell+1-j, 2\ell+1-i} & \text{per } 1 \leq i \leq \ell, \ell < j \leq 2\ell + 1 - i \\ F_{i,j} &= E_{i,j} + E_{2\ell+1-j, 2\ell+1-i} & \text{per } \ell < i \leq 2\ell, 1 \leq j \leq 2\ell + 1 - i. \end{aligned}$$

Indichiamo con  $\mathfrak{h}$  la sottoalgebra complessa abeliana di  $\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})$  generata da  $H_1, \dots, H_\ell$ . Essa contiene tutte le matrici diagonali di  $\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})$ . Se  $H \in \mathfrak{h}$ , abbiamo:

$$\text{ad}_{\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})}(H)(F_{i,j}) = \begin{cases} (e_i(H) - e_j(H))F_{i,j} & 1 \leq i \neq j \leq \ell \\ (e_i(H) + e_{2\ell+1-j}(H))F_{i,j} & 1 \leq i \leq \ell, \ell < j \leq 2\ell + 1 - i \\ -(e_{2\ell+1-i}(H) + e_j(H)) & \ell < i \leq 2\ell, 1 \leq j \leq 2\ell + 1 - i \end{cases}$$

Abbiamo perciò:

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})}(H, H) &= \sum_{i,j=1}^{\ell} (e_i(H) - e_j(H))^2 + 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq \ell} (e_i(H) + e_j(H))^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{\ell} ((e_i(H) - e_j(H))^2 + (e_i(H) + e_j(H))^2) + \sum_{i=1}^{\ell} (2e_i(H))^2 \\ &= (4\ell + 4) \sum_{i=1}^{\ell} (e_i(H))^2 = (2\ell + 2)\text{traccia}(H^2). \end{aligned}$$

Poiché ogni elemento regolare di  $\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})$  è coniugato a una matrice di  $\mathfrak{h}$ , otteniamo che le due forme quadratiche  $\kappa_{\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})}(H, H)$  e  $(2\ell + 2)\text{traccia}(H \circ H)$  coincidono su tutti gli elementi regolari di  $\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})$ , e quindi su tutto  $\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})$ , perché gli elementi regolari formano un aperto denso. Da questa osservazione ricaviamo:

$$(19.4.10) \quad \kappa_{\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})}(X, Y) = (2\ell + 2)\text{traccia}(X \circ Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C}).$$

Poiché  $X^* = \bar{X} \in \mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})$  se  $X \in \mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})$ , la forma di Killing è non degenera su  $\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})$  e quindi questa è un'algebra di Lie semisemplice (complessa) per il criterio di Cartan.

Osserviamo che  $\mathfrak{h}$  è un'algebra di Cartan di  $\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})$ . Il corrispondente sistema di radici è:

$$(19.4.11) \quad \mathcal{R} = \{\pm(e_i \pm e_j) \mid 1 \leq i < j \leq \ell\} \cup \{2e_i \mid 1 \leq i \leq \ell\}.$$

Le matrici reali di  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$  sono una sua *forma split*:

$$(19.4.12) \quad \mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{sl}(2\ell, \mathbb{R}) \mid {}^t X J_\ell + J_\ell X = 0\}.$$

La forma compatta è:

$$(19.4.13) \quad \mathfrak{sp}(\ell) = \mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{su}(2\ell).$$

**19.4.4. Tipo  $D_\ell$ .** Sia  $n = 2\ell \geq 8$  un numero pari e consideriamo l'algebra di Lie delle matrici complesse  $n \times n$  antisimmetriche. È conveniente identificare l'algebra di Lie delle matrici antisimmetriche a

$$(19.4.14) \quad \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \mid {}^t X S_n + S_n X = 0\}.$$

Abbiamo:

$$X = (x_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \iff x_{i,j} = -x_{n+1-j, n+1-i} \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq n.$$

Osserviamo che, se  $X \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ , anche  $X^* = \bar{X} \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ , e quindi la restrizione a  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$  di  $B(X, Y) = \text{traccia}(X \circ Y)$  è non degenera.

Con le notazioni introdotte sopra, definiamo le matrici:

$$\begin{aligned} H_i &= E_{i,i} - E_{n+1-i, n+1-i}, \quad i = 1, \dots, \ell, \\ F_{i,j} &= E_{i,j} - E_{n+1-j, n+1-i}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

Osserviamo che  $F_{i,j} = 0$  se  $i + j = n + 1$  e  $F_{n+1-j, n+1-i} = -F_{i,j}$ . Quindi gli  $H_i$ , con  $1 \leq i \leq \ell$  e gli  $F_{i,j}$ , con  $i + j \leq n = 2\ell$ , formano una base di  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ .

Indichiamo con  $\mathfrak{h}$  il sottospazio delle matrici diagonali di  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ , che è generato da  $H_1, \dots, H_\ell$ . Abbiamo:

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)(F_{i,j}) &= [H, F_{i,j}] = [H, E_{i,j} - E_{n+1-j, n+1-i}] \\ &= (e_i(H) - e_j(H))E_{i,j} - (e_{n+1-j}(H) - e_{n+1-i}(H))E_{n+1-j, n+1-i} \\ &= (e_i(H) - e_j(H))(E_{i,j} - E_{n+1-j, n+1-i}) = (e_i(H) - e_j(H))F_{i,j}. \end{aligned}$$

Risulta allora, per  $H \in \mathfrak{h}$ :

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})}(H, H) &= \sum_{i+j \leq n} (e_i(H) - e_j(H))^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (e_i(H) - e_j(H))^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (e_i(H) - e_{n+1-i}(H))^2 \\ &= n \sum_{i=1}^n (e_i(H))^2 - 2 \sum_{i=1}^n (e_i(H))^2 \end{aligned}$$

$$= (2\ell - 2) \sum_{i=1}^n (e_i(H))^2.$$

Otteniamo allora:

$$\kappa_{\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})}(H, H) = (2\ell - 2)\text{traccia}(H^2),$$

e quindi, poiché la formula vale allora, per il coniugio, per tutte le matrici diagonalizzabili di  $\mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C})$ , che formano un aperto denso, abbiamo infine :

$$(19.4.15) \quad \kappa_{\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})}(X, Y) = (2\ell - 2)\text{traccia}(X \circ Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{C}).$$

Il sistema di radici  $\mathcal{R}$  associato a  $\mathfrak{h}$  è formato da:

$$(19.4.16) \quad \mathcal{R} = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq \ell\}$$

ove gli  $F_{i,j}$ , con  $i + j \leq n$  sono associati alle radici  $e_i - e_j$  (identificando  $e_i$  con  $-e_{n+1-i}$  per  $i = \ell + 1, \dots, n$ ). Definiamo un sistema di Chevalley in  $\mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C})$  ponendo :

$$\begin{cases} X_{e_i - e_j} = F_{i,j} & 1 \leq i < j \leq \ell \\ X_{e_i + e_j} = F_{i, \ell+1-j} & 1 \leq i < j \leq \ell \\ X_{-e_i + e_j} = -F_{j,i} & 1 \leq i < j \leq \ell \\ X_{-e_i - e_j} = -F_{\ell+1-i, \ell+1-j} & 1 \leq i < j \leq \ell. \end{cases}$$

La forma compatta di  $\mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{C})$ , calcolata a partire da questo sistema di Chevalley, è

$$\mathfrak{u} = \{X \in \mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\} = \mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{su}(2\ell + 1).$$

Quest'algebra di Lie reale è isomorfa all'algebra di Lie delle matrici reali antisimmetriche:

$$\mathfrak{so}(2\ell) = \{X \in \mathfrak{sl}(2\ell + 1, \mathbb{R}) \mid X + {}^tX = 0\}.$$

A partire dal sistema di Chevalley sopra descritto, otteniamo la forma split. Essa è la sottoalgebra delle matrici reali di  $\mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{C})$ :

$$(\mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{C}))^{\mathbb{R}} = \mathfrak{so}(\ell, \ell) = \{X \in \mathfrak{sl}(2\ell, \mathbb{R}) \mid {}^tXS_{2\ell} + S_{2\ell}X = 0\}.$$



## Spazi simmetrici

### 20.1. Spazi affini localmente simmetrici

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$ , con una connessione affine definita dalla derivazione covariante  $\nabla$ . Fissiamo un punto  $p$  di  $M$  ed intorno  $V_0(p)$  di  $0$  in  $T_pM$ , ed  $U_p$  di  $p$  in  $M$  tali che l'esponenziale in  $p$  sia definito su  $V_0(p)$  e sia un diffeomorfismo di  $V_0(p)$  su  $U_p$ . Ricordiamo che l'esponenziale  $\exp_p : V_0(p) \rightarrow U_p$  è definito da  $\exp_p(X) = \phi_{p,X}(1)$ , se  $\phi_{p,X}(t)$  è la geodetica di punto iniziale  $p$  e velocità iniziale  $X \in T_pM$ . Possiamo supporre che  $V_0(p)$  sia simmetrico rispetto all'origine e definire quindi la *simmetria geodetica rispetto al punto  $p$*  mediante la corrispondenza :

$$(20.1.1) \quad U_p \ni q = \exp_p(X) \xrightarrow{s_p} q' = \exp_p(-X) \in U_p.$$

Osserviamo che  $s_p$  è un diffeomorfismo di  $U_p$ , con  $ds_p(p) = -I$  ( $I$  è qui l'identità su  $T_pM$ ) ed  $s_p^2 = s_p \circ s_p = \text{id}_{U_p}$ .

Diciamo che  $(M, \nabla)$  è una *varietà affine localmente simmetrica* se per ogni punto  $p$  di  $M$  esiste un intorno aperto  $U_p$  di  $p$  in  $M$  su cui la simmetria affine sia definita e sia una trasformazione affine.

Ricordiamo brevemente la definizione di trasformazione affine. Consideriamo in primo luogo il concetto di trasporto parallelo. Se  $(M, \nabla)$  è uno spazio affine ed  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ , con  $\alpha(0) = p_0$  e  $\alpha(1) = p_1$ , una curva differenziabile, per ogni vettore  $X_0 \in T_{p_0}M$  indichiamo con  $[\alpha]_*(X_0)$  il vettore  $X_1 \in T_{p_1}M$ , definito dal valore  $X_1 = X(1)$  del campo di vettori  $[0, 1] \ni t \rightarrow X(t) \in TM$  lungo  $\alpha$ , con valore iniziale  $X(0) = X_0$ , definito dal problema di Cauchy per il sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie :

$$\begin{cases} \frac{DX(t)}{dt} = \nabla_{\dot{\alpha}(t)}X(t) = 0, \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Se ora  $(N, \nabla')$  è un'altra varietà affine, un'applicazione differenziabile  $f : M \rightarrow N$  si dice *affine* se preserva il trasporto parallelo, se cioè, per ogni coppia di punti  $p_0, p_1$  di  $M$  che siano estremi di un cammino differenziabile  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ , per ogni  $X_0 \in T_{p_0}M$  risulta:

$$df(p_1)([\alpha]_*(X_0)) = [f \circ \alpha]_*(df(p_0)(X_0)).$$

Se  $f : M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo, esso definisce un'applicazione bigettiva  $\mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow f_*(X) \in \mathfrak{X}(N)$ . In questo caso, la  $f$  è una trasformazione affine se e soltanto se preserva la derivazione covariante, cioè se e soltanto se  $f_*(\nabla_X Y) = \nabla'_{f_*(X)} f_*(Y)$  per ogni coppia  $X, Y$  di campi di vettori di  $M$ .

**Teorema 20.1.1.** *Uno spazio affine  $(M, \nabla)$  è localmente simmetrico se e soltanto se il suo tensore di torsione  $T$  e il suo tensore di curvatura  $R$  soddisfano le equazioni :*

$$(20.1.2) \quad T = 0, \quad \nabla_X R = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $(M, \nabla)$  sia localmente simmetrica. In particolare, per ogni punto  $p \in M$ , il differenziale in  $p$  della simmetria rispetto al punto  $p$  è il differenziale di un'affinità. Preserva quindi torsione e curvatura. Ricordiamo che la torsione  $T$  è definita da:  $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . In un qualsiasi punto  $p$  avremo, applicando il differenziale  $ds_p = -I$ :

$$T(X_p, Y_p) = -(T(-X_p, -Y_p)) = -T(X_p, Y_p)$$

e quindi  $T(X_p, Y_p) = 0$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  ed ogni  $p \in M$ . Ciò dimostra che la torsione è nulla. Analogamente, se  $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$  e  $p \in M$ , otteniamo:

$$[(\nabla_X R)(Y, Z)T]_p = -[(\nabla_{-X} R)(-Y, -Z)(-T)]_p = -[(\nabla_X R)(Y, Z)T]_p$$

e quindi anche  $\nabla_X R = 0$ . □

Per concludere la dimostrazione, proveremo più in generale il:

**Lemma 20.1.2.** *Siano  $(M, \nabla)$  ed  $(M', \nabla')$  due spazi affini. Supponiamo che, dette  $T$  ed  $R$  torsione e curvatura di  $(M, \nabla)$  e  $T'$  ed  $R'$  quelle di  $(M', \nabla')$ , risulti:*

$$\nabla_X T = 0, \quad \nabla_{X'} T' = 0, \quad \nabla_X R = 0, \quad \nabla_{X'} R' = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall X' \in \mathfrak{X}(N).$$

*Siano  $p \in M$ ,  $q \in N$  due punti per cui esista un isomorfismo lineare  $L : T_p M \rightarrow T_q N$  tale che:*

$$\begin{cases} L(T(v_1, v_2)) = T'(L(v_1), L(v_2)), \\ L(R(v_1, v_2)v_3) = R'(L(v_1), L(v_2))L(v_3) \\ \forall v_1, v_2, v_3 \in T_p M. \end{cases}$$

*Allora esistono intorno aperti  $U_p$  di  $p$  in  $M$ ,  $W_q$  di  $q$  in  $N$  ed un diffeomorfismo affine  $f : U_p \rightarrow U_q$  con  $df(p) = L$ . Tale  $f$  è essenzialmente unica, è cioè univocamente determinata da  $L$  nella componente connessa di  $p$  dell'intorno aperto di  $p$  in  $M$  su cui è definita.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $U_p = \exp_p(V_0(p))$  un intorno normale di  $p$  in  $M$ . Siano  $X_1, \dots, X_m$  campi di vettori in  $U_p$  ottenuti mediante il trasporto parallelo, lungo le geodetiche uscenti da  $p$ , di una base  $X_1(p), \dots, X_m(p)$  di  $T_p M$ . L'ipotesi che curvatura e torsione abbiano differenziale covariante nullo ci dice che le componenti della torsione  $T$  e della curvatura  $R$ , calcolate rispetto ai campi  $X_1, \dots, X_m$ , sono costanti in  $U_p$ .

Siano ora  $X'_1, \dots, X'_m$  i campi di vettori, definiti in un intorno normale  $U'_{p'} = \exp_{p'}(V'_0(p'))$ , paralleli lungo le geodetiche uscenti da  $p'$ , con  $X'_j(p') = L(X_j(p))$ . Per l'ipotesi che torsione e curvatura abbiano differenziale covariante nullo, le componenti della torsione  $T'$  e della curvatura  $R'$ , calcolate rispetto ai campi  $X'_1, \dots, X'_m$ , sono costanti. Poiché tali componenti coincidono con quelle di  $T$  e di  $R$  in  $p'$ , esse coincidono, essendo costanti, su tutto  $U'_{p'}$ . Siano  $\Phi_p$  e  $\Phi_{p'}$  le applicazioni  $\Phi_p(t_1, \dots, t_m) = \exp_p(t_1 X_1(p) + \dots + t_m X_m(p))$  e  $\Phi_{p'}(t_1, \dots, t_m) = \exp_{p'}(t_1 X'_1(p') + \dots + t_m X'_m(p'))$ . A meno di restringere gli intorni normali  $U_p$  e  $U'_{p'}$ , posto  $A = \{\sum_{i=1}^m t_i^2 < r^2\} \subset \mathbb{R}^m$ , l'affinità locale cercata si può definire mediante il diagramma

commutativo :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi_p} & U_p \\ \Phi_{p'} \downarrow & \nearrow f & \\ U'_{p'} & & \end{array}$$

Il fatto che la  $f$  così costruita sia un'affinità, segue dall'unicità della soluzione delle equazioni di struttura<sup>1</sup>  $\square$

**Definizione 20.1.3.** Diciamo che una varietà Riemanniana  $(M, g)$  è localmente simmetrica se ogni punto  $p$  di  $M$  ammette un intorno normale in cui la simmetria geodetica (rispetto alla connessione di Levi-Civita) sia un'isometria locale.

**Teorema 20.1.4.** Una varietà Riemanniana  $(M, g)$  è localmente simmetrica se e soltanto se la sua curvatura sezionale è invariante rispetto al trasporto parallelo.

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $(M, g)$  è localmente simmetrica, allora il suo tensore di curvatura, e quindi a maggior ragione la sua curvatura sezionale, è invariante per trasporto parallelo. Il viceversa segue dalle proprietà algebriche del tensore di curvatura: se  $s_p$  è la simmetria geodetica rispetto al punto  $p$ , consideriamo il tensore  $B(X, Y, Z, T) = R(X, Y, Z, T) - R(s_p(X), s_p(Y), s_p(Z), s_p(T))$ , definito quando  $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(U_p)$  per un intorno normale simmetrico  $U_p$  di  $p \in M$ . Esso è antisimmetrico rispetto alla prima e alla seconda coppia di indici e simmetrico per lo scambio della prima con la seconda coppia di indici. Quindi esso si annulla identicamente perché, per l'ipotesi dell'invarianza rispetto alla simmetria geodetica della curvatura sezionale, abbiamo  $B(X, Y, X, Y) = 0$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(U_p)$ . Da questo si deduce l'invarianza di  $R$  rispetto al trasporto parallelo. Resta da verificare che le simmetrie geodetiche di una varietà Riemanniana, quando siano trasformazioni affini, sono anche isometrie. Questo è il contenuto del lemma seguente.  $\square$

**Lemma 20.1.5.** Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana connessa e sia  $\phi : M \rightarrow M$  un'affinità per la connessione di Levi-Civita. Se, per un punto  $p_0$  di  $M$ , il differenziale  $d\phi(p_0) : T_{p_0}M \rightarrow T_{\phi(p_0)}M$  è un'isometria di spazi Euclidei, allora  $\phi : M \rightarrow M$  è un'isometria.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $q$  un qualsiasi punto di  $M$  e sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  una curva differenziabile con  $\gamma(0) = q, \gamma(1) = p_0$ . Sia  $\tau : T_qM \rightarrow T_{p_0}M$  il trasporto parallelo lungo la curva  $\gamma$ . Se  $X, Y \in T_{p_0}M$ , abbiamo :

$$g_q(X, Y) = g_{p_0}(\tau(X), \tau(Y))$$

<sup>1</sup>Ricordiamo che le equazioni di struttura sono le:

$$\begin{cases} d\omega^i = -\omega_h^i \wedge \omega^h + \frac{1}{2}T_{j,h}^i \omega^j \wedge \omega^h \\ d\omega_j^i = -\omega_h^i \wedge \omega_j^h + \frac{1}{2}R_{j,h,k}^i \omega^h \wedge \omega^k \end{cases}$$

con  $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{i,j}^h X_h, T(X_i, X_j) = T_{i,j}^h X_h, R(X_h, X_k)X_j = R_{j,h,k}^i X_i, \omega^i(X_j) = \delta_j^i, \omega_j^i = \Gamma_{h,j}^i \omega^h$ . Le forme  $\omega^i$  ci consentono di calcolare le coordinate normali nell'intorno del punto  $p$ , quando i campi di vettori  $X_i$  siano scelti come nella dimostrazione del lemma.

perché il trasporto parallelo preserva il prodotto scalare,

$$= g_{\phi(p_0)}(d\phi(p_0)(\tau(X)), d\phi(p_0)(\tau(Y)))$$

per l'ipotesi che  $d\phi(p_0)$  sia un'isometria,

$$= g_{\phi(q)}(d\phi(q)(X), d\phi(q)(Y))$$

perché, essendo una trasformazione affine, la  $d\phi$  commuta con l'operazione di trasporto parallelo, trasporta cioè vettori paralleli lungo la curva  $\gamma$  in vettori paralleli lungo la curva  $\phi \circ \gamma$ .  $\square$

## 20.2. Alcuni risultati sui gruppi di trasformazioni

Premettiamo allo studio del gruppo  $\mathbf{O}(M, g)$  delle isometrie di una varietà Riemanniana  $(M, g)$  alcuni risultati generali sui gruppi di trasformazioni di una varietà differenziabile. Vale il

**Teorema 20.2.1.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile numerabile all'infinito e sia  $\mathbf{G}$  un sottogruppo del gruppo dei diffeomorfismi di  $M$  in sé. Sia  $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{X}(M)$  l'insieme di tutti i campi di vettori  $X$  di  $M$  che generano gruppi a un parametro di trasformazioni di  $\mathbf{G}$ . Se la sottoalgebra di Lie reale di  $\mathfrak{X}(M)$  generata da  $\mathfrak{G}$  ha dimensione finita, allora  $\mathfrak{G}$  è un'algebra di Lie e possiamo definire su  $\mathbf{G}$  una struttura di gruppo di Lie di trasformazioni di  $M$ , con algebra di Lie (isomorfa a)  $\mathfrak{G}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tX) \in \mathbf{G}$  il gruppo a un parametro di diffeomorfismi generato da  $X \in \mathfrak{G}$ . Sia  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  l'algebra di Lie generata da  $\mathfrak{G}$  ed indichiamo con  $\tilde{\mathbf{G}}$  il gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ . Per ogni  $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  possiamo considerare il gruppo locale a un parametro da esso generato: vi è un intorno aperto  $V_X$  di  $(\{0\} \times M)$  in  $(\mathbb{R} \times M)$ , in cui è definita un'applicazione differenziabile, che indicheremo con

$$V_X \ni (t, p) \rightarrow e^{tX}(p) \in M,$$

tale che:

$$(d/dt) [e^{tX}(p)] = X_{e^{tX}(p)} \quad \text{per ogni } (t, p) \in U_X.$$

Osserviamo che possiamo scegliere  $V_X = (\mathbb{R} \times M)$ , e risulta  $e^{tX} = \exp(tX)$ , se  $X \in \mathfrak{G} \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ .

Poiché abbiamo supposto che  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  sia un'algebra di Lie di dimensione finita, possiamo trovare un intorno aperto  $\mathcal{U}$  di  $(\{e\} \times M)$  in  $(\tilde{\mathbf{G}} \times M)$  tale che, se  $(g, p) \in \mathcal{U}$ , allora vi sono  $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  e  $t \in \mathbb{R}$  tali che  $(t, p) \in V_X$  e  $g = \text{Exp}(tX)$ . (Indichiamo qui con  $\text{Exp} : \mathfrak{L}(\mathfrak{G}) \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}$  l'esponenziale, definito sull'algebra di Lie  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ , a valori nel gruppo di Lie  $\tilde{\mathbf{G}}$ .)

Per dimostrare quest'affermazione, consideriamo un ricoprimento aperto localmente finito  $\{U_i\}$  di  $M$  mediante aperti relativamente compatti e un suo raffinamento  $\{U'_i\}$ . Introduciamo poi una norma sullo spazio vettoriale di dimensione finita  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ .

Per i teoremi di esistenza, unicità e dipendenza continua dai parametri, potremo allora determinare numeri reali positivi  $\epsilon_i$  tali che il problema di Cauchy per il sistema di equazioni differenziali ordinarie :

$$(*) \quad \begin{cases} X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G}), p \in U'_i, \phi(t, p, X) \in U_i \\ \frac{d\phi(t, p, X)}{dt} = X_{\phi(t, p, X)} \\ \phi(0, p, X) = p \end{cases}$$

abbia una ed una sola soluzione, definita per  $|t| < \epsilon_i$ , se  $\|X\| \leq 1$ . Potremo allora considerare  $\mathcal{U} = \bigcup_i (\{\text{Exp}(X) \mid \|X\| < \epsilon_i\} \times U'_i)$ .

Risulta allora definita un'azione locale di  $\tilde{\mathfrak{G}}$  su  $M$ , dalla :

$$\mathcal{U} \ni (\text{Exp}(tX), p) \rightarrow e^{tX}(p) \in M.$$

Osserviamo che quest'applicazione è ben definita per l'unicità della soluzione di (\*).

Per completare la dimostrazione, proviamo ora alcuni lemmi.  $\square$

**Lemma 20.2.2.** *Siano  $X, Y \in \mathfrak{G}$ . Allora  $Z = \text{Ad}(\text{Exp}(X))(Y) \in \mathfrak{G}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$e^{tZ}(p) = e^{tX} \circ e^{tY} \circ e^{-tX}(p) = \text{exp}(tX) \circ \text{exp}(tY) \circ \text{exp}(-tX)(p)$$

e quindi  $t \rightarrow e^{tZ}$  è un gruppo a un parametro di trasformazioni di  $\mathfrak{G}$  e  $Z \in \mathfrak{G}$ .  $\square$

**Lemma 20.2.3.**  *$\mathfrak{G}$  genera  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  come spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con  $V$  il sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  generato da  $\mathfrak{G}$ . Per il lemma precedente, abbiamo  $\text{Ad}(\text{exp}(\mathfrak{G}))(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G}$  e quindi, per linearità, abbiamo anche  $\text{Ad}(\text{exp}(\mathfrak{G}))(V) \subset V$ . Poiché  $\mathfrak{G}$  genera  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ , anche  $\text{Exp}(\mathfrak{G})$  genera  $\tilde{\mathfrak{G}}$ . Poiché l'insieme degli elementi  $g \in \tilde{\mathfrak{G}}$  per cui  $\text{Ad}(g)(V) \subset V$  è un sottogruppo di  $\tilde{\mathfrak{G}}$ , ne segue che  $\text{Ad}(\tilde{\mathfrak{G}})(V) \subset V$ . Otteniamo in particolare che  $\text{Ad}(\text{Exp}(V))(V) \subset V$ , che ci dà, differenziando,  $[V, V] \subset V$ . Quindi  $V$  è un'algebra di Lie e perciò coincide con  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ .  $\square$

**Lemma 20.2.4.**  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$ .

DIMOSTRAZIONE. Siano  $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{G}$  una base di  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  come spazio vettoriale. Allora l'applicazione :

$$t_1 X_1 + \dots + t_n X_n \rightarrow \text{Exp}(t_1 X_1) \cdots \text{Exp}(t_n X_n)$$

è un diffeomorfismo di un intorno  $V_0$  di 0 in  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  su un intorno  $W_\epsilon$  dell'identità  $e$  di  $\tilde{\mathfrak{G}}$ . Quindi, se  $Y \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ , possiamo trovare un  $\epsilon > 0$  e funzioni  $a_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $\sum_{i=1}^n a_i(t) X_i \in V_0$  e

$$\text{Exp}(tY) = \text{Exp}(a_1(t) X_1) \cdots \text{Exp}(a_n(t) X_n) \quad \text{se } |t| < \epsilon.$$

Questa uguaglianza ci dà la :

$$e^{tY} = \text{exp}(a_1(t) X_1) \circ \dots \circ \text{exp}(a_n(t) X_n) \quad \text{se } |t| < \epsilon.$$

Definendo  $e^{tY} = \left( e^{(t/N)Y} \right)^N$  se  $|t| < N\epsilon$ , otteniamo che  $Y \in \mathfrak{G}$ . Questo completa la dimostrazione del lemma.  $\square$

Sia ora  $\mathbf{G}^*$  il gruppo di diffeomorfismi di  $M$  generato da  $\exp(\mathfrak{G})$ . Poiché  $\mathbf{G}^*$  è generato dai sottogruppi a un parametro contenuti in  $\mathbf{G}$ , abbiamo  $\mathbf{G}^* \subset \mathbf{G}$ . Poiché per ogni  $g \in \mathbf{G}$  ed ogni sottogruppo a un parametro  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow a_t \in \mathbf{G}$  anche  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \text{ad}(g)(a_t) \in \mathbf{G}$  è ancora un sottogruppo a un parametro di  $\mathbf{G}$ , il sottogruppo  $\mathbf{G}^*$  è normale in  $\mathbf{G}$ . Inoltre, l'applicazione  $\text{ad}(g) : \mathbf{G}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$  è continua<sup>2</sup> per la topologia di gruppo di Lie di  $\mathbf{G}^*$ , perché trasforma sottogruppi a un parametro in sottogruppi a un parametro.

Dimostriamo ora il

**Lemma 20.2.5.** *Sia  $\mathbf{G}^*$  un sottogruppo normale di un gruppo  $\mathbf{G}$ . Se  $\mathbf{G}^*$  è un gruppo topologico e le applicazioni  $\text{ad}(g) : \mathbf{G}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$  sono continue per ogni  $g \in \mathbf{G}$ , allora vi è un'unica topologia di gruppo topologico su  $\mathbf{G}$  per cui  $\mathbf{G}^*$  sia aperto in  $\mathbf{G}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Definiamo su  $\mathbf{G}$  la topologia meno fine per cui sono aperti tutti gli insiemi  $L_g(A)$  con  $A$  aperto di  $\mathbf{G}^*$ . Si verifica facilmente che questa topologia è l'unica con le proprietà richieste nell'enunciato del lemma.  $\square$

**Osservazione 20.2.6.** In generale la topologia su  $\mathbf{G}$  è più fine della topologia compatta-aperta. Inoltre, non è detto che le componenti connesse di  $\mathbf{G}$ , con la topologia che abbiamo definito, formino un insieme di cardinalità al più numerabile. Possiamo ad esempio considerare l'azione sul gruppo additivo  $\mathbb{R}$ , che identifichiamo alla varietà  $M$ , di un qualsiasi suo sottogruppo  $\mathbf{G}$  totalmente sconnesso: in questo caso  $\mathfrak{G} = \{0\}$  e la costruzione che abbiamo fatto di dà su  $\mathbf{G}$  la topologia discreta.

Ricordiamo che un *parallelismo assoluto* su una varietà differenziabile  $M$  è una sezione  $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{F}(M))$  del fibrato dei suoi sistemi di riferimento. In modo equivalente, è il dato di  $m$  campi di vettori  $X_1, \dots, X_m$  che definiscono in ogni punto  $p \in M$  una base  $(X_1(p), \dots, X_m(p))$  di  $T_p M$ . Un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  definisce un diffeomorfismo di fibrati principali  $\hat{f} : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ . Se  $(M, \sigma)$  è la coppia formata da una varietà differenziabile  $M$  e da un parallelismo assoluto  $\sigma$  assegnato su  $M$ , chiameremo *automorfismi* di  $(M, \sigma)$  i diffeomorfismi  $f : M \rightarrow M$  tali che  $\hat{f} \circ \sigma = \sigma \circ f$ . Gli automorfismi di  $(M, \sigma)$  formano un gruppo, che denoteremo  $\text{Aut}(M, \sigma)$ .

**Teorema 20.2.7.** *Sia  $(M, \sigma)$  la coppia formata da una varietà differenziabile connessa  $M$  numerabile all'infinito e da un parallelismo assoluto  $\sigma$  su  $M$ . Allora  $\text{Aut}(M, \sigma)$  è un gruppo di Lie di trasformazioni con  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Aut}(M, \sigma) \leq \dim_{\mathbb{R}} M$ . Più precisamente, per ogni  $p \in M$ , l'applicazione*

$$(*) \quad \text{Aut}(M, \sigma) \ni g \rightarrow g(p) \in M$$

*è iniettiva e la sua immagine è una sottovarietà chiusa di  $M$ . Vi è un'unica struttura di gruppo di Lie su  $\text{Aut}(M, \sigma)$  per cui la (\*) sia un diffeomorfismo.*

<sup>2</sup> Un teorema di Chevalley ([Theory of Lie groups. Princeton Univ. Press, 1946], p.128) ci dice che, se  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{G}'$  sono due gruppi di Lie, un omomorfismo algebrico  $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}'$  è un omomorfismo di gruppi di Lie se e soltanto se trasforma sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{G}$  in sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{G}'$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\sigma(p) = (X_1(p), \dots, X_m(p))$  e sia  $\mathfrak{B}$  il sottospazio vettoriale reale di  $\mathfrak{X}(M)$  generato da  $X_1, \dots, X_m$ . Per definizione, le trasformazioni di  $\text{Aut}(M, \sigma)$  lasciano  $\mathfrak{B}$  invariante. In particolare gli elementi di  $\text{Aut}(M, \sigma)$  commutano con gli elementi dei sottogruppi a un parametro  $\phi_v(t)$  di diffeomorfismi di  $M$  generati dagli elementi  $v$  di  $\mathfrak{B}$ . Poniamo  $\tau_v = \phi_v(1)$ . Osserviamo che, per ogni punto  $p \in M$ ,  $\tau_v(q)$  è definita per  $v$  in un intorno di 0 in  $\mathfrak{B}$  e  $q$  in un intorno di  $p$  in  $M$ .  $\square$

**Lemma 20.2.8.** *Per ogni  $p \in M$  l'applicazione  $\text{Aut}(M, \sigma) \ni g \rightarrow g(p) \in M$  è iniettiva.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per ogni  $g \in \text{Aut}(M, \sigma)$  l'insieme  $F_g = \{q \in M \mid g(q) = p\}$  dei punti fissi di  $g$  è un sottoinsieme chiuso di  $M$ . Fissato un punto  $q \in M$ , al variare di  $v$  in un intorno di 0 in  $\mathfrak{B}$ , gli elementi  $\tau_v(q)$  sono definiti e formano un intorno di  $q$  in  $M$ . Poiché, come abbiamo osservato,  $g \circ \tau_v = \tau_v \circ g$ , otteniamo che  $F_g$  contiene un intorno di  $q$ . Dunque  $F_g$  risulta aperto e chiuso in  $M$  e quindi o è vuoto, o coincide con  $M$  per l'ipotesi che  $M$  sia connesso.  $\square$

Sia  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  ( $T > 0$ ) una curva differenziabile. Risultano allora determinate  $m$  funzioni scalari  $a_\gamma^i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^m a_\gamma^i(t) X_i(\gamma(t))$  per ogni  $t \in [0, T]$ . Due curve differenziabili  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, T] \rightarrow M$  si diranno *parallele nel parallelismo completo*  $\sigma$  se  $a_{\gamma_1}^i(t) = a_{\gamma_2}^i(t)$  per ogni  $t \in [0, T]$ . Osserviamo che, data una curva differenziabile  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  ed un punto  $q_0$ , vi è al più una curva differenziabile  $\gamma'$  parallela a  $\gamma$  ed uscente dal punto  $q_0$ ; esisterà poi comunque, per qualche  $0 < \epsilon \leq T$  sufficientemente piccolo, una  $\gamma' : [0, \epsilon] \rightarrow M$  uscente da  $p_0$  e parallela alla restrizione di  $\gamma$  a  $[0, \epsilon]$ .

**Lemma 20.2.9.** *Per ogni  $p_0 \in M$ , l'insieme  $\text{Aut}(M, \sigma)(p_0)$  è chiuso in  $M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\{a_k\}$  una successione di elementi di  $\text{Aut}(M, \sigma)$  tali che  $\{a_k(p_0)\}$  converga a un elemento  $q_0 \in M$ .

Dimostriamo che ogni curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  uscente dal punto  $p_0$  ammette una parallela  $\gamma' : [0, 1] \rightarrow M$  uscente da  $q_0$ .

A questo scopo, indichiamo con  $T$  l'estremo superiore dei numeri reali  $a > 0$  per cui la restrizione di  $\gamma$  a  $[0, a]$  ammette una parallela  $\gamma'_a$  con punto iniziale  $q_0$ . Vogliamo dimostrare che esiste la parallela  $\gamma'_T$ . A questo scopo, osserviamo che esistono le parallele  $\gamma'_{T'}$  per ogni  $0 < T' < T$  e che per ogni  $t$  con  $0 \leq t < T$ , abbiamo  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\gamma(t)) = \gamma'_{T'}(t)$  per  $0 \leq t \leq T' < T$ .

Fissiamo poi un intorno  $\mathfrak{B}_0$  di 0 in  $\mathfrak{B}$  e un intorno  $U$  di  $\gamma(T)$  in  $M$  tali che  $\tau_v(p)$  sia definita per  $v \in \mathfrak{B}_0$  e  $p \in U$ . Allora  $\tau_v$  è anche definita, per  $v \in \mathfrak{B}_0$ , su tutti gli insiemi  $a_k(U)$ . Sia  $t_0 < T$  tale che  $a_k(\gamma(t_0)) \in U$  per ogni  $k \gg 1$  e  $\gamma(T) = \tau_{v_0}(\gamma(t_0))$  per qualche  $v_0 \in \mathfrak{B}_0$ .

Possiamo allora definire  $\gamma'_T$  ponendo  $\gamma'_T(t) = \gamma'_{T'}(t)$  se  $0 \leq t \leq T' < T$  e  $\gamma'_T(T) = \tau_{v_0}(\gamma'_{T'}(t_0))$  se  $t_0 \leq T' < T$ .

Se fosse  $T < 1$ , potremmo prolungare  $\gamma'_T$  con una parallela a  $\gamma(t - T)$  uscente dal punto  $\gamma'_T(T)$ , contraddicendo la definizione di  $T$ . Quindi  $T = 1$  e questo dimostra l'esistenza della parallela. Poiché  $\gamma'(1) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\gamma(1))$ , l'estremo  $\gamma'(1)$  non dipende dalla scelta del cammino  $\gamma$ , ma soltanto dal suo punto finale  $\gamma(1)$ .

Dimostriamo in questo modo che  $\{a_k(q)\}$  converge per ogni  $q \in M$  e otteniamo quindi un'applicazione  $a : M \rightarrow M$  mediante  $a(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(q)$  per ogni  $q \in M$ . Poiché  $\tau_v(a(q)) = a(\tau_v(q))$  per ogni  $q \in M$ , la  $a$  è chiaramente differenziabile. Si può dimostrare che è invertibile, ripetendo i raginamenti appena svolti per la successione delle applicazioni inverse  $\{a_k^{-1}\}$ .  $\square$

Abbiamo facilmente:

**Lemma 20.2.10.** *Sia  $\mathfrak{l}$  l'algebra di Lie dei campi di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tali che  $[X, \mathfrak{X}] = \{0\}$ . Per ogni  $p \in M$ , l'applicazione  $\mathfrak{l} \ni X \rightarrow X(p) \in T_p M$  è iniettiva.*

**DIMOSTRAZIONE.** I generatori di sottogruppi a un parametro di  $\text{Aut}(M, \sigma)$  sono gli elementi di  $\mathfrak{l}$  che generano sottogruppi a un parametro di diffeomorfismi di  $M$ . Quindi, per il Teorema 20.2.1, il gruppo  $\text{Aut}(M, \sigma)$  è un gruppo di Lie, e l'applicazione  $\text{Aut}(M, \sigma) \ni a \rightarrow a(p) \in M$  definisce per ogni  $p \in M$  un diffeomorfismo di  $\text{Aut}(M, \sigma)$  con una sottovarietà differenziabile chiusa di  $M$ .  $\square$

Completiamo ora la dimostrazione del Teorema 20.2.7. L'insieme  $\mathfrak{G}$  dei campi di vettori  $X \in \mathfrak{l}$  che generano sottogruppi a un parametro di trasformazioni di  $M$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{l}$ , e quindi ha dimensione finita. Possiamo perciò applicare il Teorema 20.2.1 al gruppo  $\mathbf{G} = \text{Aut}(M, \sigma)$  e a  $\mathfrak{G}$ , e concludere che  $\mathbf{G}$  ha una struttura di gruppo di Lie con algebra di Lie  $\mathfrak{G}$ . Poiché l'azione  $\mathbf{G} \times M \rightarrow M$  è differenziabile, fissato un qualsiasi punto  $p_0 \in M$ , l'immersione differenziabile  $\mathbf{G} \ni g \rightarrow g(p_0) \in M$  è un diffeomorfismo di  $\mathbf{G}$  con una sottovarietà differenziabile chiusa di  $M$ .

Ricordiamo che vale il teorema<sup>3</sup>:

**Teorema 20.2.11** (Bochner-Montgomery). *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico localmente compatto e numerabile all'infinito di trasformazioni differenziabili di una varietà differenziabile paracompatta  $M$ . Allora  $\mathbf{G}$  è un gruppo di Lie.*

Ricordiamo ancora<sup>4</sup> il:

**Teorema 20.2.12** (Dantzig-van der Waerden). *Sia  $(E, d)$  uno spazio metrico localmente compatto. Sia  $\mathbf{Isom}(E, d)$  il gruppo delle isometrie di  $(M, E)$  e, per  $x \in E$ , indichiamo con  $\mathbf{Isom}_x(E, d)$  lo stabilizzatore di  $x$  in  $\mathbf{Isom}(E, d)$ . Consideriamo su  $\mathbf{Isom}(E, d)$  la topologia compatta-aperta. Allora  $\mathbf{Isom}(E, d)$  è localmente compatto e  $\mathbf{Isom}_x(E, d)$  è compatto per ogni  $x \in M$ . Se  $M$  è compatto, anche  $\mathbf{Isom}(E, d)$  è compatto.*

**Osservazione 20.2.13.** Ricordiamo ancora che, se  $(M, g)$  è una varietà Riemanniana e  $d$  è la distanza nella metrica corrispondente, allora le isometrie  $f : M \rightarrow M$

<sup>3</sup>S.Bochner, D.Montgomery *Locally compact groups of differentiable transformations*, Ann. of Math. **47** (1946), pp.639-657.

<sup>4</sup>D.Dantzig, B.L.van der Waerden *Über metrisch homogene Räume*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6** (1928) pp.374-376. Una dimostrazione completa si può trovare anche in: Kobayashi-Nomizu *Foundations of Differential Geometry*, New York: John Wiley & Sons, vol.1, 1963, alle pagine 46-50.

per la metrica  $d$  sono applicazioni differenziabili che preservano il tensore  $g$  della metrica. Indicheremo nel seguito con  $\mathbf{O}(M, g)$  il gruppo delle isometrie della varietà Riemanniana  $(M, g)$ , cioè:

$$\mathbf{O}(M, g) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, M) \mid f^*g = g\}.$$

Se  $d$  è la distanza su  $M$  definita dalla metrica  $g$ , allora  $\mathbf{Isom}(M, d) = \mathbf{O}(M, g)$ .

### 20.3. Automorfismi affini e isometrie

Per utilizzare i risultati del §20.2 nella discussione del gruppo delle affinità di una varietà affine  $(M, \nabla)$  e delle isometrie di una varietà Riemanniana  $(M, g)$ , è conveniente riformulare le nozioni di varietà affini e riemanniane nel contesto della teoria delle  $\mathbf{G}$ -strutture.

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$ . Indichiamo con:

$$\mathfrak{F}(M) \xrightarrow[\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})]{\pi} M$$

il fibrato principale dei sistemi di riferimento su  $M$ .

Gli elementi della fibra  $\mathfrak{F}_p(M) = \pi^{-1}(p)$  sono le basi  $(v_1, \dots, v_m)$  di  $T_pM$ . Il gruppo  $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$  opera a destra su  $\mathfrak{F}(M)$  mediante:

$$(v_1, \dots, v_m) \cdot a = \left( \sum_{i=1}^m a_1^i v_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_m^i v_i \right) \quad \text{se } a = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Se  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$  è una  $m$ -upla di campi di vettori che definiscono una base di  $T_pM$  in ogni punto  $p$  di un aperto  $U$  di  $M$ , allora l'applicazione:

$$U \times \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \ni (p, a) \rightarrow \sigma(p) \cdot a \in \pi^{-1}(U)$$

è un diffeomorfismo per la struttura differenziabile di  $\mathfrak{F}(M)$ .

In modo equivalente, possiamo definire la fibra  $\mathfrak{F}_p(M)$  sopra il punto  $p \in M$  come l'insieme di tutte le applicazioni lineari invertibili  $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow T_pM$ , identificando una base  $(v_1, \dots, v_m)$  di  $T_pM$  all'isomorfismo lineare  $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow T_pM$  che associa al vettore  $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$  della base canonica di  $\mathbb{R}^m$  il vettore  $v_i$  di  $T_pM$ . Definiamo allora in modo affatto naturale la *forma canonica*  $\theta \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m)$  mediante:

$$\theta(v) = \xi^{-1}(d\pi(v)) \quad \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \forall v \in T_\xi \mathfrak{F}(M).$$

Osserviamo che:

$$(R_a)^* \theta = a^{-1} \circ \theta \quad \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Infatti, se  $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$ , allora  $dR_a(v) \in T_{\xi \cdot a} \mathfrak{F}(M)$  e  $d\pi(dR_a(v)) = d\pi(v)$ . Quindi:

$$(R_a)^* \theta(v) = \theta(dR_a(v)) = (\xi \cdot a)^{-1}(d\pi(dR_a(v))) = a^{-1} \circ \xi^{-1}(d\pi(v)) = a^{-1} \circ \theta(v).$$

**Proposizione 20.3.1.** *Ogni diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  si solleva in modo unico ad un diffeomorfismo  $\hat{f} : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  che lascia  $\theta$  invariante. Viceversa, ogni automorfismo di  $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ -fibrato principale  $F : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  che lasci  $\theta$  invariante è il sollevamento di un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $f : M \rightarrow M$  un diffeomorfismo. Definiamo allora il suo sollevamento  $\hat{f}$  mediante :

$$\hat{f} : \mathfrak{F}(M) \ni \xi \rightarrow df(\pi(\xi)) \circ \xi \in \mathfrak{F}(M).$$

Abbiamo allora, se  $\xi \in \mathfrak{F}(M)$  e  $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$  :

$$\begin{aligned} \theta(d\hat{f}(v)) &= (df(\pi(\xi)) \circ \xi)^{-1} (d\pi(d\hat{f}(\xi)(v))) \\ &= (\xi^{-1} \circ (df(\pi(\xi)))^{-1}) (df(\pi(\xi)) \circ d\pi(v)) = \theta(v). \end{aligned}$$

Infatti, poiché  $\hat{f}$  preserva le fibre, abbiamo  $f \circ \pi = \pi \circ \hat{f}$  e quindi  $df \circ d\pi = d\pi \circ d\hat{f}$ .

Viceversa, se  $F : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  preserva le fibre e lascia  $\theta$  invariante, detto  $f : M \rightarrow M$  il diffeomorfismo definito da  $\pi \circ F = f \circ \pi$ , osserviamo che  $\Phi = \hat{f}^{-1} \circ F$  è un automorfismo differenziabile di  $\mathfrak{F}(M)$  che preserva la fibra, lascia  $\theta$  invariante e induce l'identità su  $M$ . Perciò abbiamo :

$$\begin{aligned} \xi^{-1}(d\pi(v)) &= \theta(v) = \Phi^*(\theta(v)) = \theta(d\Phi(v)) \\ &= (\Phi(\xi))^{-1} (d\pi(d\Phi(v))) = (\Phi(\xi))^{-1} (d\pi(v)) \\ &\quad \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \quad \forall v \in T_\xi \mathfrak{F}(M). \end{aligned}$$

Otteniamo dunque  $(\Phi(\xi))^{-1}(w) = \xi^{-1}(w)$  per ogni  $w \in T_{\pi(\xi)}M$ , e questo dimostra che  $\Phi$  è l'identità su  $\mathfrak{F}(M)$ .  $\square$

Per ogni  $A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ , definiamo il *campo di vettori fondamentale*  $A^* \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M))$  associato ad  $A$  come il generatore infinitesimale del gruppo a un parametro di diffeomorfismi  $\mathfrak{F}(M) \times \mathbb{R} \ni (\xi, t) \rightarrow \xi \cdot \exp(tA) \in \mathfrak{F}(M)$ .

Una *connessione affine* su  $M$  si può definire, oltre che per mezzo della derivazione covariante, mediante l'assegnazione di una *forma di connessione*, cioè di una forma differenziale  $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$  che goda delle proprietà :

- (1)  $\omega(A^*) = A \quad \forall A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$
- (2)  $R_a^* \omega = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega \quad \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ .

Un vettore  $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$  con  $\omega(v) = 0$  si dice *orizzontale*. Poiché  $\omega(\xi) : T_\xi \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$  ha rango  $m^2$  e  $\ker d\pi(\xi) \cap \ker \omega(\xi) = \{0\}$  per la proprietà (1), la forma di connessione  $\omega$  ci permette di decomporre lo spazio tangente a  $\mathfrak{F}(M)$  in un punto  $\xi$  nella somma diretta dei due sottospazi  $\mathfrak{V}_\xi(M) = \ker d\pi(\xi)$  dei *vettori verticali in  $\xi$*  e  $\mathfrak{H}_\xi(M)$  dei<sup>5</sup> *vettori orizzontali in  $\xi$* .

Poiché  $d\pi(\xi) : \mathfrak{H}_\xi(M) \rightarrow T_{\pi(\xi)}M$  è per ogni  $\xi \in \mathfrak{F}(M)$  un isomorfismo lineare, possiamo associare ad ogni campo di vettori  $X$  definito su un aperto  $U$  di  $M$  un campo di vettori orizzontale  $\tilde{X}$  su  $\pi^{-1}(U)$ , caratterizzato dalle :

$$\begin{cases} \omega(\tilde{X}) = 0 \\ d\pi(\tilde{X}) = X. \end{cases}$$

<sup>5</sup> Un modo equivalente di definire una connessione affine è quello di assegnare una distribuzione vettoriale  $\mathfrak{H}$  su  $\mathfrak{F}(M)$ , complementare della distribuzione verticale.

La derivazione covariante associata alla connessione affine è definita dalla formula:

$$(\dagger) \quad \nabla_X Y(\pi(\xi)) = \xi \circ \tilde{X}_\xi(\xi^{-1}(Y)) = \xi \circ \tilde{X}(\theta(\tilde{Y})) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall \xi \in \mathfrak{F}(M),$$

dove osserviamo che, fissato  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , la  $\xi \rightarrow \Psi_Y(\xi) = \xi^{-1}(Y(\pi(\xi)))$  è una funzione differenziabile su  $\mathfrak{F}(M)$  a valori in  $\mathbb{R}^m$ . Chiaramente:

$$\begin{cases} R_a^* \Psi_Y(\xi) = \Psi_Y(\xi \cdot a) = (\xi \cdot a)^{-1} Y(\pi(\xi \cdot a)) = a^{-1} \xi^{-1} Y(\pi(\xi)) = a^{-1} \Psi_Y(\xi) \\ \forall Y \in \mathfrak{X}(M), \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}), \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} R_a^*(\xi \circ \tilde{X}(\Psi_Y)) &= (\xi \circ a) \circ (R_{a*} \tilde{X})(\Psi_Y) = (\xi \circ a) \circ \tilde{X}(R_a^* \Psi_Y) \\ &= \xi \circ a \circ \tilde{X}(a^{-1} \Psi_Y) = \xi \circ a \circ a^{-1} \circ \tilde{X}(\Psi_Y) = \xi \circ \tilde{X}(\Psi_Y) \end{aligned}$$

mostra che la derivata covariante  $\nabla_X Y$  è ben definita dalla  $(\dagger)$ , perché il valore del secondo membro è costante quando  $\xi$  varia sulla fibra  $\mathfrak{F}_p(M)$  del punto  $p \in M$ .

Viceversa, si può dimostrare che, data di una derivazione covariante  $\nabla$ , vi è un'unica forma di connessione  $\omega$  per cui vale la  $(\dagger)$ .

Abbiamo infatti:

$$\xi \circ (X - [\omega(X)]^*)(\theta(\tilde{Y})) = \nabla_{d\pi(X)} Y \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M)), \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Quindi

$$(\ddagger) \quad [\omega(X)]^*(\theta(\tilde{Y})) = X(\theta(\tilde{Y})) - \xi^{-1} \nabla_{d\pi(X)} Y \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M)), \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$$

ci permette di calcolare  $\omega$  utilizzando la forma canonica  $\theta$  e la derivazione covariante.

**Teorema 20.3.2.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile, dotata di una connessione affine definita dalla forma di connessione  $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ . Un diffeomorfismo  $f: M \rightarrow M$  è un'affinità se e soltanto se il suo sollevamento  $\hat{f}$  lascia invariante la forma di connessione  $\omega$ .*

*Viceversa, un diffeomorfismo di fibrati principali  $F: \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  è il sollevamento di un'affinità se e soltanto se lascia invarianti la forma canonica  $\theta$  e la forma di connessione  $\omega$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Le  $(\dagger)$  e  $(\ddagger)$  ci dicono che le trasformazioni affini di  $M$  sono tutte e sole quelle il cui sollevamento lascia  $\omega$  invariante. L'ultima affermazione segue dal fatto che un diffeomorfismo di  $\mathfrak{F}(M)$  in sé è un sollevamento di un diffeomorfismo di  $M$  in sé se e soltanto se preserva le fibre e lascia invariante la forma canonica  $\theta$ .  $\square$

**Teorema 20.3.3.** *Il gruppo delle affinità di una varietà differenziabile  $M$ , dotata di una connessione affine, è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale a  $m(m+1)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$  la forma della connessione. Allora la forma

$$\theta \oplus \omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$$

definisce un parallelismo completo su  $\mathfrak{F}(M)$ . La tesi è allora conseguenza del Teorema 20.2.7.  $\square$

Sia  $\mathbf{G}$  un sottogruppo *chiuso* del gruppo lineare  $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ . Una  $\mathbf{G}$ -struttura su  $M$  è il dato di un fibrato principale  $\mathbf{P} @ \varpi > \mathbf{G} > M$  e di un'immersione differenziabile  $\iota : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathfrak{F}(M)$ , in modo che sia commutativo il diagramma :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} \times \mathbf{G} & \rightarrow & \mathfrak{F}(M) \times \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P} & \rightarrow & \mathfrak{F}(M) \\ \varpi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xlongequal{\quad} & M \end{array}$$

in cui la prime due frecce orizzontali sono definite dalle inclusioni  $\iota : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathfrak{F}(M)$  e  $\mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ .

Osserviamo che  $\mathbf{P}$  è una *sottovarietà chiusa* di  $\mathfrak{F}(M)$ . Infatti, fissata una sezione differenziabile  $\sigma$  di  $\mathbf{P}$ , definita in un aperto  $U$  di  $M$ , abbiamo  $\mathbf{P} \cap \pi^{-1}(U) = \{\xi \in \pi^{-1}(U) \mid \xi^{-1} \circ \sigma(\pi(\xi)) \in \mathbf{G}\}$  e l'applicazione  $\pi^{-1}(U) \ni \xi \rightarrow \xi^{-1} \circ \sigma(\pi(\xi)) \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$  è continua. Quindi  $\mathbf{P} \cap \pi^{-1}(U)$  è chiuso in  $\pi^{-1}(U)$  per l'ipotesi che  $\mathbf{G}$  fosse chiuso in  $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ . Poiché gli insiemi  $\pi^{-1}(U)$ , al variare di  $U$  tra gli aperti di trivializzazione di  $\mathbf{P}$ , formano un ricoprimento aperto di  $\mathfrak{F}(M)$ , otteniamo che  $\mathbf{P}$  è chiuso in  $\mathfrak{F}(M)$ .

Gli elementi  $X$  dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $\mathbf{G}$  definiscono campi di vettori su  $\mathbf{P}$  che sono la restrizione dei corrispondenti campi di vettori verticali  $X^*$  definiti su  $\mathfrak{F}(M)$ , e che indicheremo ancora con  $X^*$ . Una  $\mathbf{G}$ -connessione affine su  $M$  è il dato di una  $\mathbf{G}$ -struttura  $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$  su  $M$ , e di una forma differenziale  $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$  con le proprietà :

- (1)  $\omega'(A^*) = A \quad \forall A \in \mathfrak{g}$
- (2)  $R_a^* \omega' = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega' \quad \forall a \in \mathbf{G}$ .

Indichiamo con  $\mathfrak{H}' = \ker \omega' \subset \mathfrak{X}(\mathbf{P})$  la distribuzione orizzontale associata alla  $\mathbf{G}$ -connessione affine. Abbiamo :

$$dR_a(\mathfrak{H}'_\xi) = \mathfrak{H}'_{\xi \cdot a} \quad \forall \xi \in \mathbf{P}, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Possiamo quindi estendere la distribuzione orizzontale  $\mathfrak{H}'$  su  $\mathbf{P}$  a una distribuzione orizzontale  $\mathfrak{H}$  su  $\mathfrak{F}(M)$  ponendo

$$\mathfrak{H}_{\xi \cdot a} = dR_a(\mathfrak{H}'_\xi) \quad \text{se } \xi \in \mathbf{P}, a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Estendiamo così la  $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$  a una forma di connessione affine di Cartan  $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ , ponendo :

$$\omega(X) = A \quad \text{se } X \in T_\xi \mathfrak{F}(M) \text{ e } X = A_\xi^* + Y \text{ con } A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \text{ e } Y \in \mathfrak{H}_\xi.$$

Possiamo quindi definire in modo equivalente una  $\mathbf{G}$ -connessione affine mediante il dato di una forma di connessione affine  $\omega$  su  $\mathfrak{F}(M)$  tale che, per una  $\mathbf{G}$ -struttura

$\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ , detta  $\iota : \mathbf{P} \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  l'inclusione, risulti  $\iota^*\omega \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ , tale cioè che la sua restrizione a  $\mathbf{P}$  sia una forma a valori nell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $\mathbf{G}$ .

**Lemma 20.3.4.** *Siano  $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$  una  $\mathbf{G}$ -struttura,  $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$  una  $\mathbf{G}$ -connessione affine e  $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$  la sua estensione a  $\mathfrak{F}(M)$ . Sia  $f : M \rightarrow M$  un diffeomorfismo. Supponiamo che  $M$  sia connessa. Sono equivalenti:*

- (a)  $\hat{f}^*\omega = \omega$  ed esiste  $\xi_0 \in \mathbf{P}$  tale che  $\hat{f}(\xi_0) \in \mathbf{P}$ .
- (b)  $\hat{f}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$  e, detta  $\hat{f}^{\mathbf{G}} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$  la restrizione di  $\hat{f}$  a  $\mathbf{P}$ , abbiamo

$$(\hat{f}^{\mathbf{G}})^*\omega' = \omega'.$$

**DIMOSTRAZIONE.** (a)  $\implies$  (b). Sia  $\text{pr} : \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \rightarrow V = \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})/\mathfrak{g}$  la proiezione nel quoziente. Consideriamo la forma differenziale  $\text{pr} \circ \omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), V)$  e la corrispondente distribuzione vettoriale  $\mathfrak{D} = \ker(\text{pr} \circ \omega)$  in  $\mathfrak{F}(M)$ . Ricordiamo che una *varietà integrale* di  $\mathfrak{D}$  è una sottovarietà differenziabile  $N$  di  $\mathfrak{F}(M)$  con  $T_\xi N \subset \mathfrak{D}_\xi$  per ogni  $\xi \in N$ . Poiché  $\hat{f}$  lascia fissa la forma  $\omega$ , essa lascia fissa a maggior ragione la forma  $\text{pr} \circ \omega$  e trasforma quindi varietà integrali di  $\mathfrak{D}$  in varietà integrali di  $\mathfrak{G}$ . La tesi segue allora dal fatto che  $\mathbf{P}$  è una sottovarietà integrale massimale di  $\mathfrak{D}$ .

(b)  $\implies$  (a). Segue dal fatto che  $\hat{f}(\xi \cdot a) = \hat{f}^{\mathbf{G}}(\xi) \cdot a$  e  $\omega(\xi \cdot a) = R_a^*\omega'(\xi)$  se  $\xi \in \mathbf{P}$  e  $a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ .  $\square$

Un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  che soddisfi le condizioni equivalenti (a) e (b) del Lemma 20.3.4 si dice una trasformazione  $\mathbf{G}$ -affine, o una  $\mathbf{G}$ -affinità, di  $M$ .

Sia  $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$  una  $\mathbf{G}$  struttura su  $M$ . Indichiamo ancora con  $\theta$  la restrizione a  $\mathbf{P}$  della forma canonica di  $\mathfrak{F}(M)$ . La forma di connessione  $\omega'$  di una  $\mathbf{G}$ -connessione affine definisce un parallelismo completo, mediante la forma  $\theta \oplus \omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$ .

Per il Teorema 20.2.7 abbiamo :

**Corollario 20.3.5.** *Il gruppo delle trasformazioni  $\mathbf{G}$ -affini di  $M$ , per un'assegnata connessione affine  $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$  realtiva a una  $\mathbf{G}$ -struttura  $\mathbf{P} @ > \varpi > \mathbf{G} > M$ , è un gruppo di Lie di dimensione  $\leq \dim_{\mathbb{R}} M + \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{G}$ .*

**Corollario 20.3.6.** *Due trasformazioni  $\mathbf{G}$ -affini  $f, g$  di  $M$ , per un'assegnata connessione affine  $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$  realtiva a una  $\mathbf{G}$ -struttura  $\mathbf{P} @ > \varpi > \mathbf{G} > M$ , coincidono se sono uguali con i loro differenziali in un punto  $p_0 \in M$ .*

Una metrica Riemanniana  $g$  su  $M$  definisce una  $\mathbf{O}(m)$ -struttura  $\mathfrak{D}(M)$  su  $M$ , in cui gli elementi della fibra  $\mathfrak{D}_p(M)$  sono le basi ortonormali di  $T_p M$  rispetto al prodotto scalare  $g_p$ . Viceversa, una  $\mathbf{O}(m)$ -struttura su  $M$  definisce univocamente una metrica Riemanniana  $g$  su  $M$ .

Il Lemma 20.1.5 ci dice che le isometrie di  $(M, g)$  sono tutte e sole le trasformazioni affini  $f$  rispetto alla connessione di Levi-Civita per cui  $df(p_0) : T_{p_0} M \rightarrow T_{f(p_0)} M$  è un'isometria in qualche punto  $p_0 \in M$ .

La restrizione  $\omega'$  della forma  $\omega$  della connessione di Levi-Civita è una  $\mathbf{O}(m)$ -connessione affine.

Otteniamo perciò:

**Teorema 20.3.7.** *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana. Un'isometria di  $M$  è un automorfismo differenziabile  $f : M \rightarrow M$  il cui sollevamento è un'affinità per la connessione di Levi-Civita e per cui  $\hat{f}(\mathfrak{D}(M)) = \mathfrak{D}(M)$ .*

*Il gruppo delle isometrie  $\mathbf{O}(M, g)$  è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale di  $m(m+1)/2$ .*

*Lo stabilizzatore  $\mathbf{O}_p(M, g)$  di un punto  $p \in M$  nel gruppo  $\mathbf{O}(M, g)$  delle isometrie di  $(M, g)$  è un gruppo compatto.*

**DIMOSTRAZIONE.** Il teorema è una conseguenza delle osservazioni precedenti e del Corollario ???. Infatti  $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{o}(m) = m(m-1)/2$  e quindi  $\mathfrak{D}(M)$  è una varietà differenziabile di dimensione  $[m(m-1)/2] + m = m(m+1)/2$ .  $\square$

Citiamo a questo punto, senza dimostrazione<sup>6</sup>, il seguente:

**Teorema 20.3.8.** *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana di dimensione  $m$ . Se il suo gruppo delle isometrie  $\mathbf{O}(M, g)$  ha dimensione massima  $m(m+1)/2$ , allora  $(M, g)$  è isometrico a uno dei seguenti spazi a curvatura costante:*

- (a) Lo spazio Euclideo  $\mathbb{R}^m$ ;
- (b) La sfera  $m$ -dimensionale  $S^m$ ;
- (c) Lo spazio proiettivo  $m$ -dimensionale  $\mathbb{R}P^m$ ;
- (d) Lo spazio iperbolico semplicemente connesso  $m$ -dimensionale  $H^m$ .

Descriviamo brevemente un modello dello spazio iperbolico  $m$ -dimensionale  $H^m$ . Consideriamo l'ipersuperficie regolare di  $\mathbb{R}^{m+1}$ :

$$H^m = \left\{ x = (x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_0^2 = 1 + \sum_{i=1}^m x_i^2 \right\}$$

Abbiamo:

$$T_x H^m = \left\{ v = (v_0, v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_0 v_0 = \sum_{i=1}^m x_i v_i \right\}$$

e definiamo la metrica iperbolica  $g$  su  $H^m$  ponendo:

$$g_x(v, v) = c \cdot \left( -v_0^2 + \sum_{i=1}^m v_i^2 \right) \quad \forall x \in H^m, \forall v \in T_x H^m$$

per una costante  $c > 0$ . Osserviamo che  $H^m$  è l'orbita del punto  $(1, 0, \dots, 0)$  rispetto al gruppo  $\mathbf{O}(1, m)$  delle trasformazioni lineari di  $\mathbb{R}^{m+1}$  che preservano la forma bilineare simmetrica definita dalla matrice  $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ . Il gruppo  $\mathbf{O}(1, m)$  è il gruppo delle isometrie di  $H^m$ , che si identifica allo spazio omogeneo  $\mathbf{O}(1, m)/(\mathbf{O}(1) \times \mathbf{O}(m))$ , dove:

$$\mathbf{O}(1) \times \mathbf{O}(m) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{O}(m) \right\}$$

è lo stabilizzatore in  $\mathbf{O}(1, m)$  del punto  $(1, 0, \dots, 0)$ .

<sup>6</sup>Vedi ad esempio: [S.Kobayashi *Transformation groups in Differential Geometry*, New York, Springer 1972] a pag.46.

### 20.4. Spazi Riemanniani globalmente simmetrici

Sia  $(M, g)$  uno spazio Riemanniano. Diciamo che  $(M, g)$  è uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico se, per ogni punto  $p \in M$  esiste un'isometria involutiva  $s_p \in \mathbf{O}(M, g)$  che abbia  $p$  come punto fisso isolato.

Osserviamo che vale il seguente :

**Lemma 20.4.1.** *Sia  $(M, g)$  uno spazio Riemanniano e  $p \in M$ . Allora esiste al più un'isometria involutiva  $s_p$  che abbia  $p$  come punto fisso isolato. Se una tale  $s_p$  esiste, allora  $ds_p(p) = -\text{Id}$  su  $T_pM$  ed  $s_p$  coincide, in un intorno di  $p$ , con la simmetria geodetica rispetto alla connessione di Levi-Civita.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $s_p$  un'isometria involutiva di  $(M, g)$  con  $p$  come punto fisso isolato. Abbiamo  $(ds_p(p))^2 = \text{Id}$  su  $T_pM$  e quindi  $T_pM$  si decompone nella somma diretta dei sottospazi corrispondenti agli autovalori 1 e  $-1$  di  $(ds_p(p))$ . Se ci fosse un  $v \in T_pM \setminus \{0\}$  con  $ds_p(p)(v) = v$ , allora  $s_p$  lascerebbe fissi tutti i punti della geodetica uscente da  $p$  con vettore tangente  $v$  e quindi  $p$  non sarebbe punto fisso isolato. Perciò  $ds_p(p) = -\text{Id}$ . Poiché, essendo un'isometria,  $s_p$  trasforma geodetiche in geodetiche, essa è allora, in un intorno di  $p$ , la simmetria geodetica rispetto a  $p$ .  $\square$

**Lemma 20.4.2.** *Ogni spazio Riemanniano globalmente simmetrico è completo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $(M, g)$  uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico. Sia  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  una geodetica massimale. Se fosse ad esempio  $b < +\infty$ , fissato  $\epsilon$  con  $0 < 2\epsilon < b - a$ , posto  $p = \gamma(b - \epsilon)$ , la simmetria  $s_p$  ci permette di prolungare la geodetica  $\gamma$  a una geodetica  $\tilde{\gamma}$  definita su  $(a, 2b - a - 2\epsilon)$  :

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } a < t < b \\ s_p(\gamma(2b - 2\epsilon - t)) & \text{se } b \leq t < 2b - a - 2\epsilon, \end{cases}$$

contraddicendone la massimalità. Deve quindi essere  $b = +\infty$ , e con ragionamento analogo si dimostra che  $a = -\infty$ .  $\square$

Osserviamo che, se  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  è una geodetica massimale con  $\gamma(0) = p$ , allora  $s_p \circ \gamma(t) = \gamma(-t)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Da questo fatto ricaviamo subito che :

**Teorema 20.4.3.** *Il gruppo delle isometrie di uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico connesso è un gruppo transitivo di trasformazioni.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $(M, g)$  uno spazio Riemanniano connesso globalmente simmetrico. Indichiamo con  $d_g$  la distanza definita dalla metrica  $g$ . Siano  $p_0, p_1$  due qualsiasi punti di  $M$ . Poiché  $(M, g)$  è completo, esiste una geodetica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ , di lunghezza  $\ell(\gamma) = d_g(p_0, p_1)$ . Abbiamo allora  $p_1 = s_{\gamma(\frac{1}{2})}(p_0)$ . Infatti  $s_{\gamma(\frac{1}{2})}$  è la simmetria geodetica rispetto al punto  $\gamma(\frac{1}{2})$  e quindi trasforma la geodetica  $\gamma(t)$  nella geodetica  $\gamma(1 - t)$ .  $\square$

**Teorema 20.4.4.** *Sia  $(M, g)$  uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico, connesso. Indichiamo con  $\mathbf{G}$  la componente connessa dell'identità nel gruppo di*

Lie  $\mathbf{O}(M, g)$  delle isometrie di  $(M, g)$ . Fissiamo un punto  $p_0 \in M$  e sia  $\mathbf{K}$  lo stabilizzatore di  $p_0$  in  $\mathbf{G}$ .

- (i) Lo stabilizzatore  $\mathbf{K}$  di  $p_0$  in  $\mathbf{G}$  è un sottogruppo di Lie compatto di  $\mathbf{G}$  e il diagramma commutativo :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \longrightarrow & M \\ \downarrow & \nearrow f & \\ \mathbf{G}/\mathbf{K} & & \end{array}$$

in cui la freccia orizzontale è l'applicazione  $\pi: \mathbf{G} \ni a \rightarrow a(p_0) \in M$  e la freccia verticale la proiezione nel quoziente, definisce un diffeomorfismo  $f$  dello spazio omogeneo  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  su  $M$ .

- (ii) L'applicazione  $\sigma = \text{ad}(s_{p_0}): \mathbf{G} \ni a \rightarrow s_{p_0} \circ a \circ s_{p_0} \in \mathbf{G}$  è un automorfismo involutivo di  $\mathbf{G}$  tale che, detto  $\mathbf{K}_\sigma$  l'insieme dei punti fissi di  $\sigma$  e  $\mathbf{K}_\sigma^0$  la componente connessa dell'identità in  $\mathbf{K}_\sigma$ , risulta :

$$\mathbf{K}_\sigma^0 \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_\sigma.$$

Il gruppo  $\mathbf{K}$  non contiene sottogruppi normali non banali di  $\mathbf{G}$ .

- (iii) Siano  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{k}$  le algebre di Lie di  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{K}$ , rispettivamente. Allora

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(p_0)(X) = X\}$$

e, posto

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(p_0)(X) = -X\}$$

abbiamo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}.$$

Abbiamo poi  $d\pi(e)(\mathfrak{k}) = \{0\}$  e  $d\pi(e): \mathfrak{p} \rightarrow T_{p_0}M$  è un isomorfismo. Se  $X \in \mathfrak{p}$ , allora :

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tX)(p_0) \in M$$

è la geodetica uscente da  $p_0$  con velocità  $d\pi(e)(X)$ . Per ogni  $v \in T_{p_0}M$ , il vettore  $[d\exp(tX)](p_0)(v)$  è il traslato di  $v$  parallelamente lungo la geodetica.

**DIMOSTRAZIONE.** L'affermazione (i) è conseguenza del Teorema 20.3.7.

(ii) Per ogni  $k \in \mathbf{K}$ , le due isometrie  $k$  e  $\sigma(k) = \text{ad}(s_{p_0})(k) = (s_{p_0} \circ k \circ s_{p_0})$  di  $(M, g)$  coincidono con il loro differenziale in  $p_0$ . È quindi, per il Corollario 20.3.6,  $\sigma(k) = \text{ad}(s_{p_0})(k) = k$  per ogni  $k \in \mathbf{K}$ . In particolare,  $d\sigma(e)(\mathfrak{k}) = \text{Ad}(s_{p_0})(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$ , e  $d\sigma(e)$  è l'identità su  $\mathfrak{k}$ . D'altra parte, se  $X \in \mathfrak{g}$  è un punto fisso di  $d\sigma(e)$ , avremo anche :

$$s_{p_0} \circ \exp_{\mathbf{G}}(tX) \circ s_{p_0} = \text{ad}(s_{p_0})(\exp_{\mathbf{G}}(tX)) = \exp_{\mathbf{G}}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(s_{p_0})(X)) = \exp_{\mathbf{G}}(tX),$$

onde  $s_{p_0}(\exp_{\mathbf{G}}(tX)(p_0)) = \exp_{\mathbf{G}}(tX)(p_0)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e quindi  $\exp_{\mathbf{G}}(tX)(p_0) = p_0$ , perché  $p_0$  è un punto fisso isolato di  $s_{p_0}$ . Quindi  $\mathfrak{k}$  è proprio l'insieme dei punti fissi di  $d\sigma(e)$ . Poiché il gruppo delle isometrie  $\mathbf{O}(M, g)$  e  $\mathbf{G}$  operano su  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  in modo effettivo,  $\mathbf{K}$  non contiene sottogruppi normali non banali di  $\mathbf{G}$ .

(iii) Poiché  $d\sigma(e)$  è un'involuzione e  $\mathfrak{f}$  è il sottospazio dei suoi punti fissi, abbiamo la decomposizione  $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{p}$ .

Poiché  $d\pi(e)$  ha nucleo uguale a  $\mathfrak{f}$ , ne segue che la sua restrizione a  $\mathfrak{p}$  è un isomorfismo su  $T_{p_0}M$ .

Sia ora  $X \in \mathfrak{p}$  e sia  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  la geodetica uscente da  $p_0$  con velocità  $d\pi(e)(X)$ . Consideriamo, per ogni numero reale  $t$ , l'isometria  $u_t = s_{\gamma(t/2)} \circ s_{p_0}$ . Dico che  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow u_t \in \mathbf{O}(M, g)$  è un sottogruppo a un parametro di  $\mathbf{O}(M, g)$ . Infatti, se  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} u_{t_1} \circ u_{t_2}(p_0) &= u_{t_1} \circ s_{\gamma(t_2/2)}(p_0) = s_{\gamma(t_1/2)} \circ s_{p_0}(\gamma(t_2)) \\ &= s_{\gamma(t_1/2)}(\gamma(-t_2)) = \gamma(t_1 + t_2) \\ &= s_{\gamma([t_1+t_2]/2)}(p_0) = u_{t_1+t_2}(p_0). \end{aligned}$$

Inoltre,  $du_t : T_{\gamma(s)} \rightarrow T_{\gamma(t+s)}$  definisce, per ogni coppia di numeri reali  $t, s$ , il trasporto parallelo lungo la geodetica  $\gamma$ .

Per verificare questo fatto, osserviamo in primo luogo che, per ogni numero reale  $s$ , la  $-ds_{p_0}(\gamma(s))$  definisce il trasporto parallelo da  $T_{\gamma(s)}$  a  $T_{\gamma(-s)}$  lungo la geodetica  $\gamma$ . A questo scopo, indichiamo con  $\tau_{s_1, s_2}^\gamma : T_{\gamma(s_1)}M \rightarrow T_{\gamma(s_2)}M$  il trasporto parallelo da  $\gamma(s_1)$  a  $\gamma(s_2)$  lungo  $\gamma$ . Abbiamo allora un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_{p_0}M & \xrightarrow{\tau_{0,s}^\gamma} & T_{\gamma(s)}M \\ ds_{p_0}(p_0) \downarrow & & \downarrow ds_{p_0}(\gamma(s)) \\ T_{p_0}M & \xrightarrow{\tau_{0,-s}^\gamma} & T_{\gamma(-s)}M \end{array}$$

Da questa ricaviamo che

$$\begin{aligned} \tau_{0,-s} \circ ds_{p_0}(p_0) &= ds_{p_0}(\gamma(s)) \circ \tau_{s,0}^\gamma \quad \text{e, poiché } -ds_{p_0}(p_0) = I, \\ \tau_{0,-s}^\gamma &= -ds_{p_0}(\gamma(s)) \circ \tau_{s,0}^\gamma, \quad \text{da cui otteniamo:} \\ -ds_{p_0}(\gamma(s)) &= \tau_{0,-s}^\gamma \circ [\tau_{0,s}^\gamma]^{-1} = \tau_{0,-s}^\gamma \circ \tau_{s,0}^\gamma = \tau_{s,-s}^\gamma. \end{aligned}$$

Analogamente,  $-ds_{\gamma(s)}$  definisce, per ogni coppia di numeri reali  $s, t$ , il trasporto parallelo da  $T_{\gamma(t)}M$  a  $T_{\gamma(2s-t)}M$  lungo la geodetica  $\gamma$ . Quindi, per composizione,  $du_t = (-ds_{\gamma(t/2)}) \circ (-ds_{p_0})$  definisce il trasporto parallelo lungo  $\gamma$  da  $\gamma(s)$  a  $\gamma(t+s)$ . È perciò  $du_{t_1} \circ du_{t_2} = du_{t_1+t_2}$ , perché il trasporto parallelo da  $\gamma(s)$  a  $\gamma(s+t_1+t_2)$  si può ottenere componendo il trasporto parallelo da  $\gamma(s)$  a  $\gamma(s+t_2)$  con quello da  $\gamma(s+t_2)$  a  $\gamma(s+t_1+t_2)$ .

In particolare  $(u_{t_1} \circ u_{t_2})$  ed  $u_{t_1+t_2}$  coincidono con i loro differenziali in  $p_0$  ed, essendo isometrie, coincidono dappertutto:  $u_{t_1} \circ u_{t_2} = u_{t_1+t_2}$  e  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow u_t \in \mathbf{O}(M, g)$  è un gruppo a un parametro di isometrie. Possiamo quindi trovare  $Y \in \mathfrak{g}$  tale che  $u_t = \exp_{\mathbf{G}}(tY)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Risulta poi

$$\sigma \circ u_t = s_{p_0} \circ s_{\gamma(t/2)} = s_{\gamma(-t/2)} \circ s_{p_0} = u_{-t}.$$

Da questa ricaviamo che  $d\sigma(e)(Y) = -Y$ , quindi  $Y \in \mathfrak{p}$  e perciò  $Y = X$ .  $\square$

### 20.5. Coppie simmetriche e simmetriche Riemanniane

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie connesso ed  $\mathbf{H}$  un suo sottogruppo chiuso. La coppia  $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$  si dice una *coppia simmetrica* se esiste un automorfismo analitico involutivo  $\sigma : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  con

$$\mathbf{G}_\sigma^0 \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{G}_\sigma,$$

ove  $\mathbf{G}_\sigma = \{a \in \mathbf{G} \mid \sigma(a) = a\}$  e  $\mathbf{G}_\sigma^0$  è la componente connessa dell'identità di  $\mathbf{G}_\sigma$ .

Se  $\text{Ad}_g(\mathbf{H})$  è compatto<sup>7</sup> in  $\text{Ad}_g(\mathbf{G})$ , la coppia  $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$  si dice *simmetrica Riemanniana*.

**Teorema 20.5.1.** *Sia  $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$  una coppia simmetrica Riemanniana e sia  $M$  lo spazio omogeneo  $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$ . Siano  $\pi : \mathbf{G} \rightarrow M$  la proiezione naturale nel quoziente e  $\tau : \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(M)$  la rappresentazione di  $\mathbf{G}$  come gruppo di diffeomorfismi di  $M$ , indotta dalla traslazione a sinistra su  $M$ :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} \times \mathbf{G} & \xrightarrow{(a,b) \rightarrow (a,\pi(b))} & \mathbf{G} \times M \\ (a,b) \rightarrow ab \downarrow & & \downarrow (a,p) \rightarrow \tau(a)(p) \\ \mathbf{G} & \xrightarrow{a \rightarrow \pi(a)} & M. \end{array}$$

Sia  $\sigma$  un automorfismo analitico involutivo di  $\mathbf{G}$  tale che  $\mathbf{K}_\sigma^0 \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_\sigma$  (ove  $\mathbf{K}_\sigma$  è il sottogruppo dei punti fissi di  $\sigma$  e  $\mathbf{K}_\sigma^0$  la sua componente dell'identità). Allora esistono metriche Riemanniane  $\mathbf{G}$ -invarianti  $g$  su  $M$ . Rispetto a una qualsiasi metrica  $\mathbf{G}$ -invariante  $g$ , lo spazio  $(M, g)$  è globalmente simmetrico Riemanniano. Sia  $\mathfrak{o} = \pi(e)$  e sia  $s_{\mathfrak{o}}$  la corrispondente simmetrica geodetica. Essa soddisfa:

$$\begin{aligned} s_{\mathfrak{o}} \circ \pi &= \pi \circ \sigma \\ \tau(\sigma(a)) &= s_{\mathfrak{o}} \circ \tau(a) \circ s_{\mathfrak{o}} \quad \forall a \in \mathbf{G}. \end{aligned}$$

Osserviamo che, in particolare, la simmetria geodetica  $s_{\mathfrak{o}}$  è indipendente dalla scelta della metrica Riemanniana  $\mathbf{G}$ -invariante. In effetti, la connessione di Levi-Civita su  $M$  risulta indipendente dalla particolare scelta della metrica  $\mathbf{G}$ -invariante su  $M$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{k}$  le algebre di Lie di  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{K}$ , rispettivamente e poniamo  $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(e)(X) = -X\}$ . Allora  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ . Se  $X \in \mathfrak{p}$  e  $k \in \mathbf{K}$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} \sigma(\exp_{\mathbf{G}}(t\text{Ad}_g(k)(X))) &= \sigma(\text{ad}(k)(\exp_{\mathbf{G}}(tX))) = \text{ad}(k)(\exp_{\mathbf{G}}(-tX)) \\ &= \exp_{\mathbf{G}}(-t\text{Ad}_g(k)(X)), \end{aligned}$$

da cui otteniamo subito che  $d\sigma(e)(\text{Ad}_g(k)(X)) = -\text{Ad}_g(k)(X)$ . Quindi  $\mathfrak{p}$  è invariante rispetto ad  $\text{Ad}_g(\mathbf{K})$ . L'applicazione  $d\pi(e)$  manda  $\mathfrak{g}$  su  $T_{\text{pnt}}M$  ed ha come nucleo  $\mathfrak{k}$ . Se  $X \in \mathfrak{p}$ , abbiamo:

$$\pi(\exp_{\mathbf{G}}(\text{Ad}_g(k)(tX))) = \pi(\text{ad}(k)(\exp(tX))) = \tau(k)(\exp(tX)).$$

Differenziando quest'espressione per  $t = 0$ , otteniamo:

$$d\pi(e) \circ \text{Ad}_g(X) = d\tau(k) \circ d\pi(e)(X) \quad \forall k \in \mathbf{K} \quad \forall X \in \mathfrak{p}.$$

<sup>7</sup> Questo è vero in particolare se  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo compatto di  $\mathbf{G}$ .

Poiché  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(K)$  è compatto il  $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ , esiste un prodotto scalare  $\mathbf{b}$  su  $\mathfrak{p}$ , invariante rispetto alla restrizione a  $\mathfrak{p}$  di  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ . Allora  $g_{\text{pnt}} = \mathbf{b} \circ (d\pi(e)|_{\mathfrak{p}})^{-1}$  è un prodotto scalare su  $T_{\text{pnt}}M$ , invariante rispetto a  $\tau(k)$  per ogni  $k \in \mathbf{K}$ . Definiamo allora una metrica Riemanniana su  $M$  ponendo :

$$g_{\tau(g)(\text{pnt})}(d\tau(g)(v), d\tau(g)(w)) = g_{\text{pnt}}(v, w) \quad \forall g \in \mathbf{G}, \forall v, w \in T_{\text{pnt}}M.$$

Questa definizione è consistente perché  $\mathbf{b}$  è invariante rispetto ad  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ .

Viceversa, ogni metrica Riemanniana  $\mathbf{G}$ -invariante su  $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$  è di questa forma per qualche prodotto scalare invariante  $\mathbf{b}$  su  $\mathfrak{p}$ .

Definiamo ora la simmetria  $s_{\text{pnt}}$  di  $M$  mediante la condizione :

$$s_{\text{pnt}} \circ \pi = \pi \circ \sigma.$$

Chiaramente  $s_{\text{pnt}}$  è un diffeomorfismo involutivo di  $M$  in sé, con  $ds_{\text{pnt}}(\text{pnt}) = -\text{Id}$  su  $T_{\text{pnt}}M$ .

Dimostriamo che  $s_{\text{pnt}}$  è un'isometria. Sia  $p = \pi(a) = \tau(a)(\text{pnt}) \in M$ . Se  $X, Y \in T_pM$ , allora  $X_0 = d\tau(a^{-1})(p)(X), Y_0 = d\tau(a^{-1})(p)(Y) \in T_{\text{pnt}}M$ . Per ogni  $x \in \mathbf{G}$  abbiamo :

$$s_{\text{pnt}} \circ \tau(a)(\pi(x)) = s_{\text{pnt}}(\pi(ax)) = \pi(\sigma(ax)) = \pi(\sigma(a)\sigma(x)) = (\tau(\sigma(a)) \circ s_{\text{pnt}})(\pi(x)).$$

Quindi  $s_{\text{pnt}} \circ \tau(a) = \tau(\sigma(a)) \circ s_{\text{pnt}}$ . Ricaviamo :

$$\begin{aligned} g(ds_{\text{pnt}}(X), ds_{\text{pnt}}(Y)) &= g(ds_{\text{pnt}} \circ d\tau(a)(X_0), ds_{\text{pnt}} \circ d\tau(a)(Y_0)) \\ &= g(d\tau(\sigma(a)) \circ ds_{\text{pnt}}(X_0), d\tau(\sigma(a)) \circ ds_{\text{pnt}}(Y_0)) \\ &= g(ds_{\text{pnt}}(X_0), ds_{\text{pnt}}(Y_0)) = g(X_0, Y_0) = g(X, Y). \end{aligned}$$

Quindi  $s_{\text{pnt}}$  è un'isometria e, poiché  $s_{\text{pnt}}(\text{pnt}) = \text{pnt}$  e  $ds_{\text{pnt}}(\text{pnt}) = -\text{Id}$  su  $T_{\text{pnt}}M$ , coincide con la simmetria geodetica rispetto a  $\text{pnt}$ . Per un qualsiasi punto  $p = \pi(a)$ , la simmetria geodetica rispetto a  $p$  è l'isometria  $s_p = \tau(a) \circ s_{\text{pnt}} \circ \tau(a^{-1})$ . Questo dimostra che  $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$  è globalmente simmetrico.

La  $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \tau(a) \in \mathbf{O}(M, g)$  è un omomorfismo di gruppi di Lie. Il suo nucleo  $\mathbf{N}$  è un sottogruppo chiuso normale di  $\mathbf{G}$ , contenuto in  $\mathbf{K}$ . Se  $\mathbf{Z}$  è il centro di  $\mathbf{G}$ , i gruppi  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$  e  $\mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{Z})$  sono isomorfi. Poiché  $\mathbf{K} \cap \mathbf{Z} \subset \mathbf{N}$ , ne segue che  $\mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{N})$  è compatto. Chiaramente la  $(\mathbf{G}/\mathbf{N}, \mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{N}))$  è un'altra coppia simmetrica Riemanniana, che definisce lo stesso spazio simmetrico della coppia  $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ .  $\square$

**Teorema 20.5.2.** *Sia  $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$  una coppia simmetrica Riemanniana. Sia  $\mathfrak{k}$  l'algebra di Lie di  $\mathbf{K}$  e  $\mathfrak{z}$  quella del centro  $\mathbf{Z}$  di  $\mathbf{G}$ . Se  $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$ , allora esiste un unico automorfismo involutivo  $\sigma : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  tale che  $\mathbf{K}_{\sigma}^0 \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_{\sigma}$  (dove  $\mathbf{K}_{\sigma}$  è il sottogruppo dei punti fissi di  $\sigma$  e  $\mathbf{K}_{\sigma}^0$  la sua componente connessa dell'identità).*

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che il differenziale in  $e$  dell'involuzione  $\sigma$  cercata è l'identità su  $\mathfrak{k}$ , e l'opposto dell'identità su un sottospazio di  $\mathfrak{g}$  complementare di  $\mathfrak{k}$  in  $\mathfrak{g}$ , e trasforma in sé l'ortogonale  $\mathfrak{k}^{\perp}$  di  $\mathfrak{k}$  rispetto alla forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  di  $\mathfrak{g}$ .

Poiché  $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$ , la forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  è definita negativa su  $\mathfrak{k}$ . Infatti, poiché  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$  è un sottogruppo compatto, gli elementi  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ , per  $X \in \mathfrak{k}$ , si esprimono

come matrici antisimmetriche  $(a_{i,j}(X))$ , in una opportuna base<sup>8</sup> di  $\mathfrak{g}$ . Quindi, se  $X \in \mathfrak{k}$ :

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X, X) = - \sum_{i,j} [a_{i,j}]^2 \leq 0$$

e vale l'uguaglianza se e soltanto se  $a_{i,j}(X) = 0$  per ogni  $i, j$ , cioè se  $X \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{z}$ . Quindi  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}^\perp$ , dove  $\mathfrak{k}^\perp$  è l'ortogonale di  $\mathfrak{k}$  rispetto alla forma di Killing e  $d\sigma(e)$  è completamente determinato perché è l'identità su  $\mathfrak{k}$  e  $-\text{Id}$  su  $\mathfrak{k}^\perp$ . A sua volta  $d\sigma(e)$  determina completamente  $\sigma$ .  $\square$

Un'algebra di Lie ortogonale simmetrica è una coppia  $(\mathfrak{g}, \sigma)$ , formata da

- (1) un'algebra di Lie reale  $\mathfrak{g}$  di dimensione finita;
- (2) un automorfismo involutivo  $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  il cui insieme di punti fissi  $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = X\}$  sia compatto.

La coppia  $(\mathfrak{g}, \sigma)$  si dice *effettiva* se, detto  $\mathfrak{z}$  il centro di  $\mathfrak{g}$ , è

$$\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}.$$

Ricordiamo che il fatto che  $\mathfrak{k}$  sia immersa in modo compatto in  $\mathfrak{g}$  significa che la sottoalgebra  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$  di  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  genera un sottogruppo compatto del gruppo  $\text{Int}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$  degli automorfismi interni di  $\mathfrak{g}$ . Nel caso in cui la coppia  $(\mathfrak{g}, \sigma)$  sia effettiva, la condizione è equivalente al fatto che la forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  di  $\mathfrak{g}$  sia definita negativa su  $\mathfrak{k}$ .

Abbiamo osservato che, ad una coppia simmetrica Riemanniana  $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ , a cui sia associato un automorfismo involutivo  $\sigma$  di  $\mathbf{G}$ , è associata l'algebra di Lie ortogonale simmetrica  $(\mathfrak{g}, \sigma)$ , ove  $\mathfrak{g}$  è l'algebra di Lie di  $\mathbf{G}$  e  $\sigma = d\sigma(e)$ .

Sia  $(\mathfrak{g}, \sigma)$  un'algebra di Lie simmetrica ortogonale e sia  $\mathfrak{k}$  il luogo dei punti fissi di  $\sigma$ .

Una coppia  $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$  di gruppi di Lie associata a  $(\mathfrak{g}, \sigma)$  è una coppia formata da un gruppo di Lie connesso  $\mathbf{G}$  ed un suo sottogruppo chiuso  $\mathbf{K}$  con algebre di Lie uguali a  $\mathfrak{g}$  e a  $\mathfrak{k}$ , rispettivamente.

Abbiamo:

**Teorema 20.5.3.** *Sia  $(\mathfrak{g}, \sigma)$  un'algebra di Lie ortogonale simmetrica e sia  $\mathfrak{k}$  la sottoalgebra di Lie dei punti fissi di  $\sigma$ .*

(a) *Sia  $\tilde{\mathbf{G}}$  un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  e sia  $\tilde{\mathbf{K}}$  il suo sottogruppo analitico con algebra di Lie  $\mathfrak{k}$ . Allora  $\tilde{\mathbf{K}}$  è un sottogruppo chiuso di  $\tilde{\mathbf{G}}$  e  $(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}})$  è una coppia simmetrica Riemanniana. Lo spazio simmetrico  $\tilde{M} = \tilde{\mathbf{G}}/\tilde{\mathbf{K}}$  è semplicemente connesso.*

(b) *Se  $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$  è una qualsiasi coppia di gruppi di Lie associata a  $(\mathfrak{g}, \sigma)$ , allora  $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$  è uno spazio Riemanniano localmente simmetrico rispetto a qualsiasi metrica  $\mathbf{G}$ -invariante.*

(c)  *$\tilde{M}$  è il rivestimento universale di  $M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $\tilde{\mathbf{G}}$  è semplicemente connesso, l'involuzione  $\sigma$  di  $\mathfrak{g}$  definisce univocamente un automorfismo  $\tilde{\sigma}$  di  $\tilde{\mathbf{G}}$  con  $d\tilde{\sigma}(e) = \sigma$ . Il luogo  $\tilde{\mathbf{K}}_{\tilde{\sigma}}$  dei

<sup>8</sup>È sufficiente considerare una base ortonormale di  $\mathfrak{g}$  rispetto a un prodotto scalare invariante per  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ .

punti fissi di  $\tilde{\sigma}$  è chiuso in  $\mathbf{G}$  e quindi è tale anche la sua componente connessa dell'identità  $\tilde{\mathbf{K}}$ . Poiché  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\tilde{\mathbf{K}})$  è il sottogruppo analitico di  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  generato da  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f})$ , è compatto e quindi  $(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}})$  è una coppia Riemanniana simmetrica e  $\tilde{M} = \tilde{\mathbf{G}}/\tilde{\mathbf{K}}$  è uno spazio globalmente simmetrico Riemanniano rispetto a qualsiasi metrica  $\tilde{\mathbf{G}}$ -invariante su  $\tilde{M}$ , definita a partire da un prodotto scalare  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ -invariante su  $T_{\text{pnt}}\tilde{M}$ .

Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo di Lie con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathbf{K}$  un suo sottogruppo chiuso con algebra di Lie  $\mathbf{K}$ , il rivestimento  $\tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$  definisce per passaggio al quoziente il rivestimento universale  $\tilde{M} \rightarrow M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$ . La simmetrie geodetiche globali di  $\tilde{M}$  definiscono, per diffeomorfismi locali, simmetrie Riemanniane locale di  $M$ , rispetto a qualsiasi metrica  $\mathbf{G}$ -invariante di  $M$ .  $\square$

COMPLETIAMO ORA LA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.6. L'insieme  $\mathfrak{G}$  dei campi di vettori  $X \in \mathfrak{l}$  che generano sottogruppi a un parametro di trasformazioni di  $M$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{l}$ , e quindi ha dimensione finita. Possiamo perciò applicare il Teorema 2.1 al gruppo  $\mathbf{G} = \mathbf{Aut}(M, \sigma)$  e a  $\mathfrak{G}$ , e concludere che  $\mathbf{G}$  ha una struttura di gruppo di Lie con algebra di Lie  $\mathfrak{G}$ . Poiché l'azione  $\mathbf{G} \times M \rightarrow M$  è differenziabile, fissato un qualsiasi punto  $p_0 \in M$ , l'immersione differenziabile  $\mathbf{G} \ni g \rightarrow g(p_0) \in M$  è un diffeomorfismo di  $\mathbf{G}$  con una sottovarietà differenziabile chiusa di  $M$ .  $\square$

Ricordiamo che vale il teorema<sup>9</sup>:

**Teorema 20.5.4** (Bochner-Montgomery). *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico localmente compatto e numerabile all'infinito di trasformazioni differenziabili di una varietà differenziabile paracompatta  $M$ . Allora  $\mathbf{G}$  è un gruppo di Lie.*

## 20.6. Automorfismi affini e isometrie

Per discutere il gruppo degli automorfismi affini di una varietà differenziabile dotata di una connessione affine e quello delle isometrie di una varietà Riemanniana, cominciamo dalla discussione delle nozioni di connessione affine e di metrica Riemanniana nel contesto della teoria dei fibrati principali.

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$ . Indichiamo con:

$$\tilde{\mathfrak{F}}(M) \xrightarrow[\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})]{\pi} M$$

il fibrato principale dei sistemi di riferimento su  $M$ .

Gli elementi della fibra  $\tilde{\mathfrak{F}}_p(M) = \pi^{-1}(p)$  sono le basi  $(v_1, \dots, v_m)$  di  $T_p M$ . Il gruppo  $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$  opera a destra su  $\tilde{\mathfrak{F}}(M)$  mediante:

$$(v_1, \dots, v_m) \cdot a = \left( \sum_{i=1}^m a_1^i v_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_m^i v_i \right) \quad \text{se} \quad a = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

<sup>9</sup>S.Bochner, D.Montgomery *Locally compact groups of differentiable transformations*, Ann. of Math. **47** (1946), pp.639-657.

Se  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$  è una  $m$ -upla di campi di vettori che definiscono una base di  $T_p M$  in ogni punto  $p$  di un aperto  $U$  di  $M$ , allora l'applicazione:

$$U \times \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \ni (p, a) \rightarrow \sigma(p) \cdot a \in \pi^{-1}(U)$$

è un diffeomorfismo per la struttura differenziabile di  $\mathfrak{F}(M)$ .

In modo equivalente, possiamo definire la fibra  $\mathfrak{F}_p(M)$  sopra il punto  $p \in M$  come l'insieme di tutte le applicazioni lineari invertibili  $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$ , identificando una base  $(v_1, \dots, v_m)$  di  $T_p M$  all'isomorfismo lineare  $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$  che associa al vettore  $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$  della base canonica di  $\mathbb{R}^n$  il vettore  $v_i$  di  $T_p M$ .

Definiamo allora in modo affatto naturale la *forma canonica*  $\theta \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m)$  mediante:

$$\theta(v) = \xi^{-1}(d\pi(v)) \quad \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \forall v \in T_\xi \mathfrak{F}(M).$$

Osserviamo che:

$$(R_a)^* \theta = a^{-1} \circ \theta \quad \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Infatti, se  $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$ , allora  $dR_a(v) \in T_{\xi \cdot a} \mathfrak{F}(M)$  e  $d\pi(dR_a(v)) = d\pi(v)$ . Quindi:

$$(R_a)^* \theta(v) = \theta(dR_a(v)) = (\xi \cdot a)^{-1}(d\pi(dR_a(v))) = a^{-1} \circ \xi^{-1}(d\pi(v)) = a^{-1} \circ \theta(v).$$

**Proposizione 20.6.1.** *Ogni diffeomorfismo  $f: M \rightarrow M$  si solleva in modo unico ad un diffeomorfismo  $\hat{f}: \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  che lascia  $\theta$  invariante. Viceversa, ogni automorfismo di  $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ -fibrato principale  $F: \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  che lasci  $\theta$  invariante è il sollevamento di un diffeomorfismo  $f: M \rightarrow M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $f: M \rightarrow M$  un diffeomorfismo. Definiamo allora il suo sollevamento  $\hat{f}$  mediante:

$$\hat{f}: \mathfrak{F}(M) \ni \xi \rightarrow df(\pi(\xi)) \circ \xi \in \mathfrak{F}(M).$$

Abbiamo allora, se  $\xi \in \mathfrak{F}(M)$  e  $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$ :

$$\begin{aligned} \theta(d\hat{f}(v)) &= (df(\pi(\xi)) \circ \xi)^{-1}(d\pi(d\hat{f}(\xi)(v))) \\ &= (\xi^{-1} \circ (df(\pi(\xi)))^{-1})(df(\pi(\xi)) \circ d\pi(v)) = \theta(v). \end{aligned}$$

Infatti, poiché  $\hat{f}$  preserva le fibre, abbiamo  $f \circ \pi = \pi \circ \hat{f}$  e quindi  $df \circ d\pi = d\pi \circ d\hat{f}$ .

Viceversa, se  $F: \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  preserva le fibre e lascia  $\theta$  invariante, detta  $f: M \rightarrow M$  il diffeomorfismo definito da  $\pi \circ F = f \circ \pi$ , osserviamo che  $\Phi = \hat{f}^{-1} \circ F$  è un automorfismo differenziabile di  $\mathfrak{F}(M)$  che preserva la fibra, lascia  $\theta$  invariante e induce l'identità su  $M$ . Quindi:

$$\begin{aligned} \xi^{-1}(d\pi(v)) &= \theta(v) = \Phi^*(\theta(v)) = \theta(d\Phi(v)) \\ (\Phi(\xi))^{-1}(d\pi(d\Phi(v))) &= (\Phi(\xi))^{-1}(d\pi(v)) \\ \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \forall v \in T_\xi \mathfrak{F}(M). \end{aligned}$$

Otteniamo quindi  $(\Phi(\xi))^{-1}(w) = \xi^{-1}(w)$  per ogni  $w \in T_{\pi(\xi)} M$ , e questo dimostra che  $\Phi$  è l'identità su  $\mathfrak{F}(M)$ .  $\square$

Per ogni  $A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ , definiamo il *campo di vettori fondamentale*  $A^* \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M))$  associato ad  $A$  come il generatore infinitesimale del gruppo a un parametro di diffeomorfismi  $\mathfrak{F}(M) \times \mathbb{R} \ni (\xi, t) \rightarrow \xi \cdot \exp(tA) \in \mathfrak{F}(M)$ .

Una *connessione affine* su  $M$  si può definire, oltre che per mezzo della derivazione covariante, mediante l'assegnazione di una *forma di connessione*, cioè di una forma differenziale  $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$  che goda delle proprietà:

$$(1) \quad \omega(A^*) = A \quad \forall A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$$

$$(2) \quad R_a^* \omega = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega \quad \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Un vettore  $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$  con  $\omega(v) = 0$  si dice *orizzontale*. Poiché  $\omega(\xi) : T_\xi \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$  ha rango  $m^2$  e  $\ker d\pi(\xi) \cap \ker \omega(\xi) = \{0\}$  per la proprietà (1), la forma di connessione  $\omega$  ci permette di definire una decomposizione dello spazio tangente a  $\mathfrak{F}(M)$  in un punto  $\xi$  nella somma diretta dei due sottospazi  $\mathfrak{V}_\xi(M) = \ker d\pi(\xi)$  dei *vettori verticali in  $\xi$*  e  $\mathfrak{H}_\xi(M)$  dei *vettori orizzontali in  $\xi$* . Poiché  $d\pi(\xi) : \mathfrak{H}_\xi(M) \rightarrow T_{\pi(\xi)}M$  è per ogni  $\xi \in \mathfrak{F}(M)$  un isomorfismo lineare, possiamo associare ad ogni campo di vettori  $X$  definito su un aperto  $U$  di  $M$  un campo di vettori orizzontale  $\tilde{X}$  su  $\pi^{-1}(U)$  mediante:

$$\begin{cases} \omega(\tilde{X}) = 0 \\ d\pi(\tilde{X}) = X. \end{cases}$$

La derivazione covariante si può definire allora mediante la formula:

$$(\dagger) \quad \nabla_X Y = \xi \circ \tilde{X}_\xi (\xi^{-1}(Y)) = \xi \circ \tilde{X}(\theta(\tilde{Y})) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

dove osserviamo che, fissato  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , la  $\xi \rightarrow \Psi_Y(\xi) = \xi^{-1}(Y(\pi(\xi)))$  è una funzione differenziabile su  $\mathfrak{F}(M)$  a valori in  $\mathbb{R}^m$ . Chiaramente:

$$\begin{cases} R_a^* \Psi_Y(\xi) = \Psi_Y(\xi \cdot a) = (\xi \cdot a)^{-1} Y(\pi(\xi \cdot a)) = a^{-1} \xi^{-1} Y(\pi(\xi)) = a^{-1} \Psi_Y(\xi) \\ \forall Y \in \mathfrak{X}(M), \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}), \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} R_a^*(\xi \circ \tilde{X}(\Psi_Y)) &= (\xi \circ a) \circ (R_{a^*} \tilde{X})(\Psi_Y) = (\xi \circ a) \circ \tilde{X}(R_a^* \Psi_Y) \\ &= \xi \circ a \circ \tilde{X}(a^{-1} \Psi_Y) = \xi \circ a \circ a^{-1} \circ \tilde{X}(\Psi_Y) = \xi \circ \tilde{X}(\Psi_Y). \end{aligned}$$

mostra che la derivata covariante  $\nabla_X Y$  è ben definita dalla ( $\dagger$ ), perché il valore del secondo membro è costante quando  $\xi$  varia sulla fibra  $\mathfrak{F}_p(M)$  del punto  $p \in M$ .

Viceversa, si può dimostrare che, data di una derivazione covariante  $\nabla$ , vi è un'unica forma di connessione  $\omega$  per cui vale la ( $\dagger$ ).

Abbiamo infatti:

$$\xi \circ (X - [\omega(X)]^*)(\theta(Y)) = \nabla_{d\pi(X)} d\pi(Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M)).$$

Quindi:

$$(\ddagger) \quad [\omega(X)]^*(\theta(Y)) = X(\theta(Y)) - \xi^{-1} \nabla_{d\pi(X)} d\pi(Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M))$$

ci permette di calcolare  $\omega$  utilizzando la forma canonica  $\theta$  e la derivazione covariante.

**Teorema 20.6.2.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile, dotata di una connessione affine definita dalla forma di connessione  $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ . Un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  è un'affinità se e soltanto se il suo sollevamento  $\hat{f}$  lascia invariante la forma di connessione  $\omega$ .*

*Viceversa, un diffeomorfismo di fibrati principali  $F : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  è il sollevamento di un'affinità se e soltanto se lascia invarianti la forma canonica  $\theta$  e la forma di connessione  $\omega$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Le  $(\dagger)$  e  $(\ddagger)$  ci dicono che le trasformazioni affini di  $M$  sono tutte e sole quelle il cui sollevamento lascia  $\omega$  invariante. L'ultima affermazione segue dal fatto che un diffeomorfismo di  $\mathfrak{F}(M)$  in sé è un sollevamento di un diffeomorfismo di  $M$  in sé se e soltanto se preserva le fibre e lascia invariante la forma canonica  $\theta$ .  $\square$

**Teorema 20.6.3.** *Il gruppo delle affinità di una varietà differenziabile  $M$ , dotata di una connessione affine, è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale a  $m(m+1)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\omega$  la forma della connessione, la forma

$$\theta \oplus \omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$$

definisce un parallelismo completo su  $\mathfrak{F}(M)$ . La tesi è allora conseguenza del Teorema 2.6.  $\square$

Una  $\mathbf{G}$ -struttura su  $M$ , con  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$  è il dato di un fibrato principale  $\mathbf{P} \xrightarrow{\varpi} M$  e di un'immersione differenziabile  $\iota : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathfrak{F}(M)$ , in modo che sia commutativo il diagramma :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} \times \mathbf{G} & \longrightarrow & \mathfrak{F}(M) \times \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P} & \longrightarrow & \mathfrak{F}(M) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \varpi \\ M & \xlongequal{\quad} & M \end{array}$$

in cui le prime due frecce orizzontali sono definite dalle inclusioni  $\iota : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathfrak{F}(M)$  e  $\mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ .

In particolare, una metrica Riemanniana  $g$  su  $M$  definisce una  $\mathbf{O}(m)$ -struttura  $\mathfrak{D}(M)$  su  $M$ , in cui gli elementi della fibra  $\mathfrak{D}_p(M)$  sono le basi ortonormali di  $T_p M$  rispetto al prodotto scalare  $g_p$ .

Utilizzando il Lemma 1.4, otteniamo :

**Teorema 20.6.4.** *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana. Un'isometria di  $M$  è un automorfismo differenziabile  $f : M \rightarrow M$  il cui sollevamento è un'affinità per la connessione di Levi-Civita e per cui  $\hat{f}(\mathfrak{D}(M)) = \mathfrak{D}(M)$ .*

*Il gruppo delle isometrie  $\mathbf{O}(M, g)$  è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale di  $m(m+1)/2$ .*

DIMOSTRAZIONE. La restrizione della forma di connessione  $\omega$  a  $\mathfrak{D}(M)$  è una forma  $\omega_g$  a valori in  $\mathfrak{o}(m)$ . La  $\theta \oplus \omega_g$  definisce allora un parallelismo completo su  $\mathfrak{D}(M)$ , e i sollevamenti delle isometrie sono gli automorfismi di tale parallelismo completo. La tesi segue allora dal Teorema 2.6, tenuto conto che  $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{o}(m) = m(m-1)/2$  e quindi  $\mathfrak{D}(M)$  è una varietà differenziabile di dimensione  $[m(m-1)/2] + m = m(m+1)/2$ .  $\square$



## Complementi su connessioni e spazi omogenei

### 21.1. G-connessioni principali

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie, con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  e sia  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$  un fibrato principale con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ . Indichiamo con

$$\mathfrak{B}(\mathbf{P}) = \{X \in \mathfrak{X}(\mathbf{P}) \mid d\pi(\xi)(X_\xi) = 0, \forall \xi \in \mathbf{P}\}$$

la distribuzione verticale su  $\mathbf{P}$  e con

$$\mathbf{VP} = \bigcup_{\xi \in \mathbf{P}} \{X_\xi \mid X \in \mathfrak{B}(\mathbf{P})\} \subset \mathbf{TP}$$

il corrispondente sottofibrato del fibrato tangente di  $\mathbf{P}$ .

Ogni  $A \in \mathfrak{g}$  definisce un gruppo a un parametro di diffeomorfismi  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow R_{\exp(tA)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{P}, \mathbf{P})$  di  $\mathbf{P}$ . Il suo generatore infinitesimale  $A^* \in \mathfrak{X}(\mathbf{P})$  è il *campo di vettori fondamentale*  $A^* \in \mathfrak{B}(\mathbf{P})$  associato ad  $A \in \mathfrak{g}$ .

La corrispondenza  $\mathfrak{g} \ni A \rightarrow A^* \in \mathfrak{X}(\mathbf{P})$  è un omomorfismo di algebre di Lie. Vale infatti il:

**Lemma 21.1.1.** *Sia  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$  un fibrato principale con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$  su  $M$  e siano  $A, B \in \mathfrak{g}$ . Abbiamo:*

$$[A, B]^* = [A^*, B^*].$$

**DIMOSTRAZIONE.** Il campo fondamentale  $A^*$  è il generatore infinitesimale del gruppo a un parametro  $t \rightarrow R_{\exp(tA)}$  di diffeomorfismi di  $\mathbf{P}$ . Per la definizione di derivata di Lie abbiamo:

$$\begin{aligned} [A^*, B^*] &= L_{A^*}(B^*) = -\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} [B^* - dR_{\exp(tA)}(B^*)] \\ &= -\frac{d}{dt} \left[ dR_{\exp(tA)}(B^*_{\exp(-tA)}) \right]_{t=0} = -\frac{d}{dt} [\text{Ad}(\exp(-tA))(B)]^* \Big|_{t=0} = [A, B]^*. \end{aligned}$$

□

Una *connessione principale*  $\Gamma$  sul fibrato  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$  è il dato di una forma differenziale  $\omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$  (LA FORMA DI CARTAN) che goda delle proprietà:

- (1)  $\omega_{\mathbf{G}}(A^*) = A$ , per ogni  $A \in \mathfrak{g}$
- (2)  $R_a^* \omega_{\mathbf{G}} = \text{Ad}(a^{-1}) \omega_{\mathbf{G}}$  per ogni  $a \in \mathbf{G}$ ,  
cioè  $\omega_{\mathbf{G}}((R_a)_*(X)) = \text{Ad}(a^{-1})(\omega_{\mathbf{G}}(X))$  per ogni  $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{P})$ .

La  $\omega_G$  definisce in ogni punto  $\xi \in \mathbf{P}$  una proiezione :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{T}_\xi \mathbf{P} & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbf{V}_\xi \mathbf{P} \\ X_\xi & \longrightarrow & \omega_G(X_\xi) & \longrightarrow & [\omega_G(X_\xi)]_\xi^* \end{array}$$

La  $\omega_G$  definisce la *distribuzione orizzontale*

$$\ker \omega_G = \mathfrak{H}(\mathbf{P}) = \{X \in \mathfrak{X}(\mathbf{P}) \mid \omega_G(\xi)(X_\xi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbf{P}\} \subset \mathfrak{X}(\mathbf{P}).$$

Indichiamo con :

$$\mathfrak{H}\mathbf{P} = \bigcup_{\xi \in \mathbf{P}} \{X_\xi \mid X \in \mathfrak{H}(\mathbf{P})\} \subset \mathbf{TP}$$

il corrispondente sottofibrato del fibrato tangente di  $\mathbf{P}$ .

La *distribuzione orizzontale* di una  $\mathbf{G}$ -connessione affine  $\Gamma$  è caratterizzata dalle proprietà

$$(1') \quad \mathbf{T}_\xi \mathbf{P} = \mathbf{V}_\xi \mathbf{P} \oplus \mathfrak{H}_\xi \mathbf{P} \quad \forall \xi \in \mathbf{P}$$

$$(2') \quad (R_a)_* (\mathfrak{H}_\xi \mathbf{P}) = \mathfrak{H}_{\xi \cdot a} \mathbf{P} \quad \forall \xi \in \mathbf{P}, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Dato un sottofibrato  $\mathfrak{H}\mathbf{P}$  del fibrato tangente di  $\mathbf{P}$  che verifichi le (1') e (2'), possiamo definire una forma  $\omega_G \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$  mediante :

$$\omega_G(X_\xi) = A \quad \text{se} \quad \xi \in \mathbf{P}, X_\xi \in \mathbf{T}_\xi \mathbf{P}, A \in \mathfrak{g} \text{ e } X_\xi - A_\xi^* \in \mathfrak{H}_\xi \mathbf{P}.$$

Si verifica immediatamente che vale la:

**Proposizione 21.1.2.** *La  $\omega_G \longleftrightarrow \mathfrak{H}\mathbf{P} = \bigcup_\xi \ker \omega_G(\xi)$  definisce una corrispondenza biunivoca tra le connessioni principali  $\Gamma$  su  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$  e i sottofibrati  $\mathfrak{H}\mathbf{P}$  che soddisfano le condizioni (1') e (2').*  $\square$

**Proposizione 21.1.3** (estensione). *Sia  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$  un fibrato principale con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ ; sia  $\mathbf{G}'$  un sottogruppo di Lie di  $\mathbf{G}$ , con algebra di Lie  $\mathfrak{g}'$ , e sia  $\mathbf{P}' \xrightarrow{\pi'} M$  un sottofibrato principale di  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$ . Data una qualsiasi connessione principale  $\Gamma'$  su  $\mathbf{P}' \xrightarrow{\pi'} M$ , con forma di Cartan  $\omega_{G'} \in \Omega^1(\mathbf{P}', \mathfrak{g}')$ , esiste un'unica connessione principale  $\Gamma$  su  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$ , con forma di Cartan  $\omega_G$ , tale che, detta  $\iota : \mathbf{P}' \hookrightarrow \mathbf{P}$  l'inclusione, risulti  $\omega_{G'} = \iota^* \omega_G$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $\mathfrak{H}'\mathbf{P}'$  il fibrato orizzontale della connessione  $\Gamma'$ . L' applicazione  $\mathbf{P}' \times \mathbf{G} \ni (\xi, a) \rightarrow \xi \cdot a \in \mathbf{P}$  è surgettiva. Possiamo quindi definire il sottofibrato orizzontale  $\mathfrak{H}\mathbf{P}$  corrispondente alla connessione  $\Gamma$  ponendo  $\mathfrak{H}_{\xi \cdot a} = (R_a)_* (\mathfrak{H}'_\xi \mathbf{P}')$  per ogni  $\xi \in \mathbf{P}'$  ed ogni  $a \in \mathbf{G}$ . Chiaramente  $\mathfrak{H}\mathbf{P}$  verifica le condizioni (1') e (2') e definisce quindi una connessione principale su  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$ . Si verifica facilmente che la forma di Cartan della  $\Gamma'$  è il pullback della connessione di Cartan della  $\Gamma$ .  $\square$

Assegnata una connessione  $\Gamma$  sul fibrato principale  $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\pi} M$ , per ogni  $\xi \in \mathbf{P}$  l'applicazione  $\mathfrak{H}_\xi \mathbf{P} \ni X_\xi \rightarrow d\pi(\xi)(X_\xi) \in \mathbf{T}_{\pi(\xi)}M$  è un isomorfismo lineare. Indichiamo con  $\text{hrt}_\xi : \mathbf{T}_{\pi(\xi)}M \rightarrow \mathfrak{H}_\xi \mathbf{P}$  la sua inversa. Otteniamo così un'applicazione :

$$\text{hrt} : \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow \tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbf{P}) \quad \text{definita da} \quad \tilde{X}_\xi = \text{hrt}_\xi(X_{\pi(\xi)}).$$

Il campo di vettori  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbf{P})$  si dice il *rialzamento orizzontale* di  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ed è caratterizzato dalle proprietà :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \omega_{\mathbf{G}}(\tilde{X}) = 0 \\ (ii) \quad & d\pi(\tilde{X}) = X \end{aligned}$$

e queste due proprietà implicano che :

$$(iii) \quad (R_a)_*(\tilde{X}) = \tilde{X} \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

Si verifica facilmente che vale il seguente :

**Lemma 21.1.4.** *Le condizioni (i) e (iii) sono necessarie e sufficienti affinché un campo di vettori  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbf{P})$  sia il rialzamento orizzontale di un campo di vettori  $X$  in  $\mathfrak{X}(M)$ .*  $\square$

Il rialzamento orizzontale è un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare  $\text{hrt} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbf{P})$  che soddisfa :

$$\begin{aligned} (a) \quad & \widetilde{fX} = \pi^*(f)\tilde{X} \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall X \in \mathfrak{X}(M) \\ (b) \quad & d\pi([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

Osserviamo che, in generale, il commutatore di campi di vettori orizzontali può non essere orizzontale. Il commutatore del sollevamento orizzontale a  $\mathbf{P}$  di due campi di vettori su  $M$  è un campo di vettori invariante rispetto alle traslazioni a destra su  $\mathbf{P}$  definite dagli elementi di  $\mathbf{G}$ , soddisfa cioè la proprietà (iii), ma in generale non sarà orizzontale, non soddisferà cioè la (i).

## 21.2. Equazioni di gauge

Un *atlante di trivializzazione* del fibrato principale  $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\pi} M$  è il dato di un ricoprimento aperto  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  di  $M$  e, per ogni aperto del ricoprimento, di una sezione differenziabile  $\sigma_\alpha \in \mathcal{C}_\pi^\infty(U_\alpha, \mathbf{P}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{P}) \mid \pi \circ f(p) = p, \forall p \in U_\alpha\}$ . Per ogni indice  $\alpha$ , l'applicazione :

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \ni (p, a) \rightarrow \sigma(p) \cdot a \in \pi^{-1}(U_\alpha) \subset \mathbf{P}$$

è un diffeomorfismo.

Sia  $\Gamma$  una connessione principale su  $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\pi} M$  e sia  $\omega_{\mathbf{G}}$  la sua forma di Cartan. La decomposizione  $\mathbf{T}_{(p,a)}(U_\alpha \times \mathbf{G}) = \mathbf{T}_p M \oplus \mathbf{T}_a \mathbf{G}$  dà una decomposizione dello

spazio cotangente <sup>1</sup>

$$\mathbf{T}_{(p,a)}^*(U_\alpha \times \mathbf{G}) = (\mathbf{T}_a \mathbf{G})^0 \oplus (\mathbf{T}_p M)^0 \simeq \mathbf{T}_p^* M \oplus \mathbf{T}_a^* \mathbf{G}$$

permette di decomporre il pullback della forma di Cartan  $\omega_{\mathbf{G}}$  di  $\Gamma$  mediante  $\Psi_\alpha$  nella somma diretta di una forma  $\tilde{\omega}_\alpha(p, a) = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega_\alpha(p)$ , ove  $\omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$ , e di una forma differenziale su  $\mathbf{G}$ , che, per la condizione (1) nella definizione di  $\omega_{\mathbf{G}}$ , coincide con la forma di Maurer-Cartan  $\omega_{\mathbf{G}}$  del gruppo  $\mathbf{G}$ :

$$(*) \quad \Psi_\alpha^*(\omega_{\mathbf{G}}) = \tilde{\omega}_\alpha \oplus \omega_{\mathbf{G}}, \text{ ove } \omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega_{\mathbf{G}} \text{ e } \tilde{\omega}_\alpha(p, a) = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega_\alpha(p).$$

È chiaro dalle (\*) che, viceversa, la forma  $\omega_{\mathbf{G}}$  è completamente determinata dalle forme  $\omega_\alpha$  sugli aperti dell'atlante di trivializzazione.

Determiniamo quindi le condizioni di compatibilità per cui una collezione  $\{\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})\}$  di 1-forme, definite su un atlante di trivializzazione  $\{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$ , determinino una connessione principale  $\Gamma$  su  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$ .

Indichiamo con  $\psi_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, \mathbf{G})$  le funzioni di transizione dell'atlante di trivializzazione  $\{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$ :

$$\sigma_\beta(p) = \sigma_\alpha(p) \psi_{\alpha\beta}(p) \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

Consideriamo il pullback su  $U_\alpha \cap U_\beta$  della forma di Maurer-Cartan rispetto alla funzione di transizione:

$$(**) \quad \theta_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}^* \omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^1(U_\alpha \cap U_\beta, \mathfrak{g}).$$

**Lemma 21.2.1.** *Sia  $\{U_\alpha, \sigma_\alpha\}$  un atlante di trivializzazione di  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$ , con funzioni di transizione  $\{\psi_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta\}$ . Se  $\omega_{\mathbf{G}}$  è la forma di Cartan di una connessione principale  $\Gamma$  su  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$ , Le forme  $\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$  e  $\theta_{\alpha\beta} \in \Omega^1(U_\alpha \cap U_\beta, \mathfrak{g})$  definite da (\*) e (\*\*) soddisfano le relazioni di compatibilità:*

$$(\dagger) \quad \omega_\beta = \text{Ad}(\psi_{\alpha\beta}^{-1}) \omega_\alpha + \theta_{\alpha\beta} \quad \text{su } U_\alpha \cap U_\beta. \quad (\text{EQUAZIONI DI GAUGE})$$

*Viceversa, una famiglia  $\{\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})\}$  che soddisfi le relazioni di compatibilità (\dagger) definisce un'unica connessione principale  $\omega_{\mathbf{G}}$  su  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$  tale che  $\omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega_{\mathbf{G}}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo il diffeomorfismo

$$\Psi_{\alpha\beta} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{G} \ni (p, a) \rightarrow (p, \psi_{\alpha\beta} \cdot a) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{G}.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\tilde{\omega}_\alpha \oplus \omega_{\mathbf{G}}$  e  $\tilde{\omega}_\beta \oplus \omega_{\mathbf{G}}$  definiscano la stessa forma di connessione  $\omega_{\mathbf{G}}$  su  $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$  è che risulti  $\tilde{\omega}_\beta \oplus \omega_{\mathbf{G}} = \Psi_{\alpha\beta}^*(\tilde{\omega}_\alpha \oplus \omega_{\mathbf{G}})$ . Se  $X \in \mathbf{T}_p M$ , con  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ , e  $Y \in \mathbf{T}_a \mathbf{G}$ , con  $a \in \mathbf{G}$ , abbiamo:

$$d\Psi_{\alpha\beta}(X, Y) = (X, dL_{\psi_{\alpha\beta}}(Y) + dR_a(d\psi_{\alpha\beta}(p)(X))$$

<sup>1</sup>Dato un sottospazio vettoriale  $W$  di uno spazio vettoriale di dimensione finita  $V$ , indichiamo con  $W^0$  l'annullatore di  $W$  in  $V^*$ , cioè il sottospazio del duale  $V^*$  di  $V$  che consiste dei funzionali lineari su  $V$  che si annullano su  $W$ .

e quindi :

$$\begin{aligned}
\Psi_{\alpha,\beta}^*(\tilde{\omega}_\alpha \oplus \omega_{\mathbf{G}})(X, Y) &= (\tilde{\omega}_\alpha \oplus \omega_{\mathbf{G}})(p, \psi_{\alpha,\beta}(p)a)(d\Psi_{\alpha,\beta}(X, Y)) \\
&= \text{Ad}(a^{-1}\psi_{\alpha,\beta}^{-1}(p)) \circ \omega_\alpha(X) + \omega_{\mathbf{G}}(dL_{\psi_{\alpha,\beta}(p)}(Y)) \\
&\quad + \omega_{\mathbf{G}}(dR_a \circ d\psi_{\alpha,\beta}(p)(X)) \\
&= \text{Ad}(a^{-1}) \circ \text{Ad}(\psi_{\alpha,\beta}^{-1}) \circ \omega_\alpha(X) + \omega_{\mathbf{G}}(Y) \\
&\quad + \text{Ad}(a^{-1}) \circ \psi_{\alpha,\beta}^*(\omega_{\mathbf{G}})(X) \\
&= \text{Ad}(a^{-1}) \circ (\text{Ad}(\psi_{\alpha,\beta}^{-1}) \circ \omega_\alpha(X) + \theta_{\alpha,\beta}(X)) \\
&\quad + \omega_{\mathbf{G}}(Y)
\end{aligned}$$

Perciò le  $(\dagger)$  sono condizioni necessarie e sufficienti perché le forme  $\omega_\alpha$  rappresentino la connessione nella trivializzazione assegnata.  $\square$

**Teorema 21.2.2** (esistenza). *Ogni fibrato principale  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$  ammette una connessione principale.*

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo una trivializzazione locale  $\{U_\alpha, \sigma_\alpha\}$  e indichiamo con  $\Psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \ni (p, a) \rightarrow \sigma_\alpha(p) \cdot a \in \pi^{-1}(U_\alpha)$  i corrispondenti diffeomorfismi locali. Per ogni  $\alpha$  la  $(\Psi_\alpha^{-1})^*(\omega_{\mathbf{G}})$  è una forma  $\omega'_\alpha$  in  $\Omega^1(\pi^{-1}(U_\alpha), \mathfrak{g})$  che soddisfa  $R_a^*\omega'_\alpha = \text{Ad}(a^{-1})\omega'_\alpha$  e  $\omega'_\alpha(A^*) = A$  per ogni campo di vettori fondamentale  $A^*$  per  $A \in \mathfrak{g}$ . Fissiamo ora una partizione dell'unità  $\{\chi_\alpha\}$  su  $M$  subordinata al ricoprimento  $\{U_\alpha\}$  e definiamo  $\omega_{\mathbf{G}} = \sum_\alpha (\chi_\alpha \circ \pi) \cdot \omega'_\alpha$ , dove le forme  $(\chi_\alpha \circ \pi) \cdot \omega'_\alpha$  si intendono estese con la forma nulla fuori dell'aperto  $\pi^{-1}(U_\alpha)$ . Si verifica facilmente che la forma  $\omega_{\mathbf{G}}$  è la forma di Cartan di una connessione  $\Gamma$  su  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$ .  $\square$

### 21.3. Forme tensoriali e pseudotensoriali

Sia  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$  un fibrato principale con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ . Sia  $V$  uno spazio vettoriale e  $\rho$  una rappresentazione lineare di  $\mathbf{G}$  su  $V$ . Una  $r$ -forma pseudotensoriale su  $\mathbf{P}$  di tipo  $(\rho, V)$  è una  $r$ -forma alternata definita su  $\mathbf{P}$  e a valori in  $V$  tale che

$$R_a^*\phi = \rho(a^{-1}) \cdot \phi \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

La  $\phi$  si dice *tensoriale* se è anche *orizzontale*, cioè se è pseudotensoriale e inoltre  $\phi(X_1, \dots, X_r) = 0$  quando almeno uno dei vettori  $X_i$  sia verticale.

**Esempio 21.3.1.** Se  $\mathbf{G}$  è un sottogruppo chiuso del gruppo lineare  $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$  (dove  $m$  è la dimensione di  $M$ ) e  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$  è un sottofibrato principale del fibrato dei sistemi di riferimento  $\mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\pi} M$ , la restrizione  $\theta_{\mathbf{G}}$  a  $\mathbf{P}$  della forma canonica  $\theta(\xi) = \xi^{-1}d\pi(\xi) \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m)$  è una 1-forma tensoriale per la rappresentazione canonica di  $\mathbf{G}$  su  $\mathbb{R}^m$ , ottenuta considerando  $\mathbf{G}$  come sottogruppo del gruppo lineare  $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ .

**Esempio 21.3.2.** La forma di connessione  $\omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$  di una connessione principale  $\Gamma$  su  $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\pi} M$  è una 1-forma pseudotensoriale su  $\mathbf{P}$ , di tipo  $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$ .

Fissata una connessione principale  $\Gamma$  sul fibrato principale  $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\pi} M$ , e data una  $r$ -forma pseudotensoriale  $\phi \in \Omega^r(\mathbf{P}, V)$ , definiamo il suo *differenziale esterno covariante*  $D\phi \in \Omega^{r+1}(\mathbf{P}, V)$  mediante

$$(21.3.1) \quad \begin{cases} D\phi(X_0, X_1, \dots, X_r) = d\phi(\text{hor}(X_0), \text{hor}(X_1), \dots, \text{hor}(X_r)) \\ \forall \xi \in \mathbf{P}, \quad \forall X_0, X_1, \dots, X_r \in T_{\xi}\mathbf{P}. \end{cases}$$

**Teorema 21.3.3.** Sia  $\phi \in \Omega^r(\mathbf{P}, V)$  una  $r$ -forma pseudotensoriale di tipo  $(\rho, V)$ . Allora:

- (a)  $\phi \circ h$  è una  $r$ -forma tensoriale di tipo  $(\rho, V)$ ;
- (b)  $d\phi$  è una  $(r+1)$ -forma pseudotensoriale di tipo  $(\rho, V)$ ;
- (c)  $D\phi = (d\phi) \circ h$  è una  $(r+1)$ -forma tensoriale di tipo  $(\rho, V)$ .  $\square$

Data una forma pseudotensoriale  $\phi \in \Omega^r(\mathbf{P}, V)$ , di tipo  $(V, \rho)$ , indichiamo con  $\omega_{\mathbf{G}} \wedge_{\rho} \phi \in \Omega^{r+1}(\mathbf{P}, V)$  la forma:

$$(\dagger) \quad (\omega_{\mathbf{G}} \wedge_{\rho} \phi)(X_0, \dots, X_r) = \sum_{h=0}^r (-1)^h [d\rho_e(\omega_{\mathbf{G}}(X_h))] (\phi(X_0, \dots, \widehat{X}_h, \dots, X_r)).$$

Vale il seguente

**Lemma 21.3.4.** Sia  $\phi \in \Omega^r(\mathbf{P}, V)$  una  $r$ -forma tensoriale di tipo  $(V, \rho)$ . Allora:

$$(\ddagger) \quad D\phi = d\phi + \omega_{\mathbf{G}} \wedge_{\rho} \phi.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Basta dimostrare la

$$(*) \quad D\phi(X_0, \dots, X_r) = d\phi(X_0, \dots, X_r) + (\omega_{\mathbf{G}} \wedge_{\rho} \phi)(X_0, \dots, X_r)$$

quando i campi di vettori  $X_0, \dots, X_r$  sono o campi fondamentali associati ad elementi dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , oppure rialzamenti orizzontali di campi di vettori su  $M$ . La formula è banalmente vera quando gli  $X_i$  sono tutti orizzontali ed anche quando almeno due di essi siano campi fondamentali corrispondenti ad elementi di  $\mathfrak{g}$ .

Basterà dunque dimostrare che la formula (\*) è valida quando  $X_0 = A^*$  con  $A \in \mathfrak{g}$  è un campo fondamentale ed  $X_i = \tilde{Z}_i$  con  $Z_i \in \mathfrak{X}(M)$  sono rialzamenti orizzontali per  $1 \leq i \leq r$ . Abbiamo:

$$\begin{aligned} D\phi(A^*, \tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_r) &= 0 \\ d\phi(A^*, \tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_r) &= A^*(\phi(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_r)) \\ &= (L_{A^*}\phi)(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_r) + \sum_{i=1}^r \phi(\dots, [A^*, \tilde{Z}_i], \dots) \\ &= \left[ \frac{d}{dt} \right]_{t=0} R_{\exp(tA)}^*(\phi) (\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_r) \end{aligned}$$

(perché  $dR_a(\tilde{Z}_i) = \tilde{Z}_i$  per ogni  $a \in \mathbf{G}$  e quindi  $[A^*, \tilde{Z}_i] = 0$  per ogni  $A \in \mathfrak{g}$ )

$$\begin{aligned} &= \left[ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho(\exp(-tA)) \cdot \phi \right] (\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_r) \\ &= -d\rho(e)(A)(\phi(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_r)) \\ &= -\omega_{\mathbf{G}} \wedge_{\rho} \phi(A^*, \tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_r). \end{aligned}$$

Otteniamo perciò

$$D\phi(A^*, \tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_r) = 0 = [d\phi + \omega_{\mathbf{G}} \wedge_{\rho} \phi](A^*, \tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_r).$$

La dimostrazione è completa.  $\square$

Introduciamo per la rappresentazione canonica  $j : \mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$  di  $\mathbf{G}$  su  $\mathbb{R}^m$  e per la rappresentazione aggiunta  $\text{Ad} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$  le notazioni :

$\omega_{\mathbf{G}} \wedge \phi$  invece di  $\omega_{\mathbf{G}} \wedge_j \phi$  se  $\phi$  è una forma pseudotensoriale di tipo  $(\mathbb{R}^m, j)$  ;

$[\omega_{\mathbf{G}} \wedge \phi] = -[\phi \wedge \omega_{\mathbf{G}}]$  per  $(\omega_{\mathbf{G}} \wedge_{\text{Ad}} \phi)$  se  $\phi$  è pseudotensoriale di tipo  $(\mathfrak{g}, \text{Ad})$ .

Più in generale, se  $\phi \in \Omega^r(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ ,  $\psi \in \Omega^s(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$  sono forme pseudotensoriali di tipo  $(\mathfrak{g}, \text{Ad})$ , porremo, per ogni  $X_1, \dots, X_{r+s} \in \mathfrak{X}(\mathbf{P})$ :

$$[\phi \wedge \psi](X_1, \dots, X_{r+s}) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s} \\ 1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_r \leq r+s \\ 1 \leq \sigma_{r+1} < \dots < \sigma_{r+s} \leq r+s}} \varepsilon(\sigma) [\phi(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_r}), \psi(X_{\sigma_{r+1}}, \dots, X_{\sigma_{r+s}})],$$

dove le parentesi quadre nella sommatoria a secondo membro sono le parentesi di Lie nell'algebra  $\mathfrak{g}$ .

#### 21.4. Forma di curvatura ed equazioni di struttura

Sia  $\Gamma$  una connessione principale su un fibrato principale  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$  e sia  $\omega_{\mathbf{G}}$  la forma di Cartan della connessione.

La *forma di curvatura* della connessione  $\gamma$  è la 2-forma tensoriale di tipo  $(\mathfrak{g}, \text{Ad})$ :

$$\Omega_{\mathbf{G}} = D\omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^2(\mathbf{P}, \mathfrak{g}).$$

La forma di curvatura  $\Omega_{\mathbf{G}}$  è una 2-forma tensoriale di tipo  $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$ :

$$(a) \quad R_a^* \Omega_{\mathbf{G}} = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \Omega_{\mathbf{G}} \quad \forall a \in \mathbf{G}$$

$$(b) \quad \Omega_{\mathbf{G}}(X, Y) = 0 \quad \text{se } X \text{ oppure } Y \text{ è verticale.}$$

**Teorema 21.4.1.** *Le forma di curvatura soddisfa l'EQUAZIONE DI STRUTTURA:*

$$(A) \quad \Omega_{\mathbf{G}} = d\omega_{\mathbf{G}} + \frac{1}{2}[\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}].$$

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che

$$(*) \quad \Omega_{\mathbf{G}}(X, Y) = \left( d\omega_{\mathbf{G}} + \frac{1}{2}[\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}] \right)(X, Y)$$

quando  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{P})$  sono o campi di vettori fondamentali, oppure sollevamenti orizzontali di campi di vettori su  $M$ .

Distinguiamo i diversi casi.

Se  $X = A^*$ ,  $Y = B^*$  con  $A, B \in \mathfrak{g}$  sono entrambi campi di vettori fondamentali, allora  $\Omega_{\mathbf{G}}(X, Y) = 0$  e la (\*) si riduce a

$$d\omega_{\mathbf{G}}(A^*, B^*) = A^*(B) - B^*(A) - \omega_{\mathbf{G}}[A^*, B^*] = -[A, B] = \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega](A^*, B^*).$$

Siano ora  $X = A^*$  con  $A \in \mathfrak{g}$  e  $Y = \tilde{Z}$  con  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Ancora,  $\Omega_{\mathbf{G}}(X, Y) = \Omega_{\mathbf{G}}(A^*, \tilde{Z}) = 0$ . Poiché ora anche  $[\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}](X, Y) = [\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}](A^*, \tilde{Z}) = 0$ , in quanto  $\omega_{\mathbf{G}}(\tilde{Z}) = 0$ , la (\*) si riduce a:

$$d\omega_{\mathbf{G}}(A^*, \tilde{Z}) = A^*(0) - \tilde{Z}(A) - \omega_{\mathbf{G}}([A^*, \tilde{Z}]) = -\omega_{\mathbf{G}}([A^*, \tilde{Z}]) = 0,$$

in quanto  $[A^*, \tilde{Z}] = L_{A^*}(\tilde{Z}) = 0$  perché  $\tilde{Z}$  è invariante rispetto all'azione a destra di  $\mathbf{G}$ .

Infine, nel caso in cui  $X = \tilde{Z}_1$ ,  $Y = \tilde{Z}_2$ , con  $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M)$ , otteniamo l'uguaglianza desiderata osservando che  $[\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}](\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) = 0$  e  $D\omega_{\mathbf{G}}(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) = d\omega_{\mathbf{G}}(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2)$ .  $\square$

**Teorema 21.4.2** (identità di Bianchi). *La forma di curvatura  $\Omega_{\mathbf{G}}$  di una connessione principale  $\Gamma$  su  $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\pi} M$  soddisfa:*

$$D\Omega_{\mathbf{G}} = 0.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $\Omega_{\mathbf{G}} \in \mathcal{Q}^2(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$  è una 2-forma tensoriale di tipo  $(\mathfrak{g}, \text{Ad})$ , abbiamo per il Lemma 21.7.2 e per l'equazione di struttura:

$$\begin{aligned} D\Omega_{\mathbf{G}} &= d\Omega_{\mathbf{G}} + [\omega_{\mathbf{G}} \wedge \Omega_{\mathbf{G}}] \\ &= d(d\omega_{\mathbf{G}} + \frac{1}{2}[\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}]) + [\omega_{\mathbf{G}} \wedge \Omega_{\mathbf{G}}] \\ &= \frac{1}{2}([d\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}] - [\omega_{\mathbf{G}} \wedge d\omega_{\mathbf{G}}]) + [\omega_{\mathbf{G}} \wedge \Omega_{\mathbf{G}}] \\ &= \frac{1}{2}[\omega_{\mathbf{G}} \wedge [\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}]] = 0 \end{aligned}$$

per l'identità di Jacobi. Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\omega_{\mathbf{G}} \wedge [\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}]](X_1, X_2, X_3) &= [\omega_{\mathbf{G}}(X_1), [\omega_{\mathbf{G}}(X_2), \omega_{\mathbf{G}}(X_3)]] \\ &\quad - [\omega_{\mathbf{G}}(X_2), [\omega_{\mathbf{G}}(X_1), \omega_{\mathbf{G}}(X_3)]] + [\omega_{\mathbf{G}}(X_3), [\omega_{\mathbf{G}}(X_1), \omega_{\mathbf{G}}(X_2)]] = 0. \end{aligned}$$

(Osserviamo che quest'ultima uguaglianza segue anche dal fatto che  $D\Omega_{\mathbf{G}}$  è una 3-forma tensoriale e  $[\omega_{\mathbf{G}} \wedge [\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}]]$  si annulla sui campi di vettori orizzontali.)  $\square$

### 21.5. Connessioni principali e derivazione covariante

Sia  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$  un fibrato principale con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$  e sia  $(\rho, V)$  una rappresentazione lineare di  $\mathbf{G}$ . Scriveremo per semplicità  $a \cdot v$  invece che  $\rho(a)(v)$  per indicare l'azione dell'elemento  $a \in \mathbf{G}$  su  $v \in V$ .

Mostriamo innanzi tutto come alla rappresentazione lineare  $(\rho, V)$  si può far corrispondere in modo canonico un fibrato vettoriale  $\mathbf{E}_{\rho} \xrightarrow[\mathbf{V}]{\pi} M$  su  $M$  con fibra tipica  $V$ .

Facciamo agire a destra il gruppo  $\mathbf{G}$  sulla varietà prodotto  $\mathbf{P} \times V$  mediante :

$$\mathbf{P} \times V \times \mathbf{G} \ni (\xi, v; a) \rightarrow (\xi \cdot a, a^{-1} \cdot v) \in \mathbf{P} \times V$$

e definiamo  $\mathbf{E}_\rho$  come il quoziente di  $\mathbf{P} \times V$  rispetto a tale azione di  $\mathbf{G}$ :

$$(\xi_1, v_1) \sim (\xi_2, v_2) \Leftrightarrow \pi(\xi_1) = \pi(\xi_2) \quad \text{e} \quad v_2 = (\xi_1^{-1} \xi_2) \cdot v_1.$$

(Nota che se  $\pi(\xi_1) = \pi(\xi_2)$  vi è un'unico elemento  $a \in \mathbf{G}$ , che denotiamo con  $\xi_1^{-1} \xi_2$ , tale che  $\xi_1 \cdot a = \xi_2$ .) Indichiamo con  $\text{pr} : \mathbf{P} \times V \rightarrow \mathbf{E}_\rho$  la proiezione nel quoziente.

Per passaggio al quoziente otteniamo un'applicazione surgettiva  $\mathbf{E}_\rho \rightarrow M$ , che indicheremo ancora con  $\pi$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} \times V & \xrightarrow{\pi \times \text{id}} & M \times V \\ \text{pr} \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ \mathbf{E}_\rho & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

(abbiamo indicato con  $\text{pr}_1$  la proiezione sulla prima coordinata).

Si verifica facilmente che  $\mathbf{E}_\rho$  ha una struttura di fibrato vettoriale su  $M$ . Le trivializzazioni locali si ottengono nel modo seguente: se  $\sigma \in \mathcal{C}_\pi^\infty(U, \mathbf{P})$  è una sezione differenziabile del fibrato principale  $\mathbf{P}$  su un aperto  $U$  di  $M$ , l'applicazione :

$$U \times V \rightarrow \text{pr}(\sigma(x), v) \in \mathbf{E}_\rho$$

definisce una trivializzazione locale del fibrato vettoriale  $\mathbf{E}_\rho \xrightarrow{\pi} M$ . In particolare, per ogni  $\xi \in \mathbf{P}$  risulta definito un isomorfismo lineare :

$$V \ni v \longrightarrow \xi^{-1} \text{pr}(\xi, v) \in \mathbf{E}_\rho.$$

Possiamo associare a una  $r$ -forma differenziale  $\eta$  a valori su  $M$  a valori in  $\mathbf{E}_\rho$  una forma tensoriale  $\tilde{\eta}$ , di grado  $r$  e tipo  $(\rho, V)$  su  $\mathbf{P}$ , estendendo per linearità la corrispondenza:

$$(*) \quad \begin{aligned} s \otimes \alpha &\rightarrow (\xi^{-1} \circ s \circ (\pi(\xi))) \otimes \pi^* \alpha, \quad \xi \in \mathbf{P}, \\ \text{se } s &\in \mathcal{C}_\pi^\infty(M, \mathbf{E}_\rho), \quad \alpha \in \mathcal{Q}^r(M). \end{aligned}$$

Indichiamo con  $\mathcal{Q}_G^r(\mathbf{P}, V)$  lo spazio delle forme tensoriali di grado  $r$  e tipo  $(\rho, V)$  su  $\mathbf{P}$ . Abbiamo:

**Teorema 21.5.1.** *La (\*) definisce un isomorfismo lineare*

$$\mathcal{Q}^r(M, \mathbf{E}) \rightarrow \mathcal{Q}_G^r(\mathbf{P}, V). \quad \square$$

La differenziazione covariante  $\nabla$  (o connessione lineare) sul fibrato  $\mathbf{E}_\rho \xrightarrow{\pi} M$  definita dalla connessione principale  $\omega_G$  su  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$  è descritta dal diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^r(M, \mathbf{E}_\rho) & \xrightarrow{\nabla} & \Lambda^{r+1}(M, \mathbf{E}_\rho) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \Lambda_G^r(\mathbf{P}, V) & \xrightarrow{D} & \Lambda_G^{r+1}(\mathbf{P}, V) \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono gli isomorfismi del Teorema 21.5.1.

**Proposizione 21.5.2.** *Valgono le formule:*

$$\begin{aligned}\nabla(fs) &= s \otimes df + f \nabla s, & \forall f \in \mathcal{E}(M), \quad \forall s \in \mathcal{C}_\pi^\infty(M, \mathbf{E}_\rho), \\ \nabla(s \otimes \beta) &= s \otimes d\beta + \nabla s \otimes \beta & \forall s \in \mathcal{C}_\pi^\infty(M, \mathbf{E}_\rho), \quad \forall \beta \in \mathcal{O}^r(M).\end{aligned}$$

Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $s \in \mathcal{C}_\pi^\infty(M, \mathbf{E}_\rho)$ , indichiamo con  $\nabla_X s$  la sezione  $\nabla s(X)$  di  $\mathbf{E}_\rho$  (derivazione covariante di  $s$  rispetto ad  $X$ ).

**Lemma 21.5.3.** *Sia  $s \in \mathcal{C}_\pi^\infty(M, \mathbf{E}_\rho)$  e poniamo  $\tilde{s}(\xi) = \xi^{-1} s(\pi(\xi))$  per  $\xi \in \mathbf{P}$ . Otteniamo in questo modo una sezione in  $\mathcal{O}_\mathbf{G}^0(\mathbf{P}, V)$ . Sia  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e sia  $\tilde{X} = \text{hor}(X)$  il suo sollevamento orizzontale su  $\mathbf{P}$ . Allora:*

$$\widetilde{\nabla_X s} = \tilde{X} \tilde{s}, \quad \text{cioè:} \quad (\tilde{X} \tilde{s})(\xi) = \xi^{-1} \nabla_X s(\pi(\xi)) \quad \forall \xi \in \mathbf{P}. \quad \square$$

### 21.6. Forme di Christoffel

Consideriamo un fibrato principale  $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{} M$  e sia  $\mathbf{E}_\rho \xrightarrow[V]{} M$  il corrispondente fibrato vettoriale, associato ad una rappresentazione lineare  $(\rho, V)$  di  $\mathbf{G}$ . Fissiamo una trivializzazione  $\{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$  di  $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{} M$ , con funzioni di transizione  $\psi_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \in \mathcal{C}_\pi^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, \mathbf{G})$ . Utilizziamo le notazioni introdotte nei paragrafi precedenti. In particolare  $\omega_\mathbf{G} \in \mathcal{O}^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$  è la forma di Cartan di una connessione  $\Gamma$  su  $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{} M$  e poniamo:  $\omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega_\mathbf{G} \in \mathcal{O}(U_\alpha, \mathfrak{g})$ ,  $\theta_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}^* \omega_\mathbf{G} \in \mathcal{O}^1(U_\alpha \cap U_\beta, \mathfrak{g})$ .

Ad una  $f \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, V)$  possiamo far corrispondere la sezione  $\sigma_\alpha \cdot f \in \mathcal{C}_\pi^\infty(U_\alpha, \mathbf{E}_\rho)$  definita da:

$$\sigma_\alpha \cdot f(p) = \text{pr}(\sigma(p), f(p)) \quad \text{per } p \in U_\alpha.$$

Per calcolare il differenziale covariante di  $\sigma_\alpha \cdot f$ , utilizziamo le formule del paragrafo precedente. Poiché

$$\widetilde{\sigma_\alpha \cdot f}(\xi) = \rho(\xi^{-1} \sigma_\alpha(\pi(\xi)))(f(\pi(\xi))),$$

otteniamo:

$$\nabla_X (\widetilde{\sigma_\alpha \cdot f})(\xi) = \tilde{X} \left( \rho(\xi^{-1} \sigma_\alpha(\pi(\xi)))(f(\pi(\xi))) \right).$$

Indichiamo con  $\Psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$  la trivializzazione locale. Allora

$$\Psi_\alpha^* (\widetilde{\sigma_\alpha \cdot f})(p, x) = \rho(x^{-1})(f(p)) \quad \forall (p, x) \in U_\alpha \times \mathbf{G}.$$

Se poi  $X \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ , abbiamo  $d\Psi_\alpha^{-1}(\tilde{X}) = X - (\omega_\alpha(X))^*$ . Otteniamo perciò:

$$\begin{aligned}\nabla_X (\sigma_\alpha \cdot f)(p) &= d\Psi_\alpha^{-1}(\tilde{X})(p, e) \left[ \rho(x^{-1})(f) \right] \\ &= (X - (\omega_\alpha(X))^*)(p, e) \left[ \rho(x^{-1})(f) \right] \\ &= (Xf)(p) + d\rho(e)(\omega_\alpha(X))(f(p)).\end{aligned}$$

La forma  $d\rho(e) \circ \omega_\alpha$  è la *forma di Christoffel* della differenziazione covariante  $\nabla$  nella trivializzazione  $(U_\alpha, \sigma_\alpha)$ .

Abbiamo dimostrato la seguente:

**Proposizione 21.6.1.** Sia  $\Gamma$  una connessione principale su  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$  e sia  $\omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$  la sua forma di Cartan. Sia  $\{U_\alpha, \sigma_\alpha\}$  una trivializzazione locale del fibrato principale  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$  e consideriamo, per ogni indice  $\alpha$ , la forma  $\omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega_{\mathbf{G}}$ . Se  $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$  è una rappresentazione lineare di  $\mathbf{G}$  e  $f \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, V)$ , allora :

$$(*) \quad \nabla(\sigma_\alpha \cdot f) = \sigma_\alpha \otimes df + d\rho(e)(\omega_\alpha)(f).$$

### 21.7. Connessioni lineari

Consideriamo ora il caso particolare di una connessione principale definita su una  $\mathbf{G}$ -struttura, cioè quando  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$  e il fibrato principale  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$  è un sottofibrato del fibrato  $\mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\pi} M$  dei sistemi di riferimento su  $M$ . Come abbiamo osservato, una qualsiasi connessione  $\Gamma$  su  $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$  determina univocamente una connessione  $\tilde{\Gamma}$  su  $\mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\pi} M$ . Possiamo dunque, nello svolgere gli argomenti di questo paragrafo, supporre che la connessione  $\Gamma$  sia assegnata su  $\mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\pi} M$ . Indicheremo semplicemente con  $\omega$  la relativa forma di Cartan della connessione.

Una *connessione lineare* su  $M$  è una connessione principale  $\Gamma$  sul fibrato principale  $\mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\pi} M$  dei sistemi di riferimento di  $M$ .

Indichiamo con  $\theta \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}^m)$  la *forma canonica* su  $\mathbf{P}$ , definita da<sup>2</sup> :

$$\theta(X_\xi) = \xi^{-1}(d\pi(X_\xi)) \quad \forall \xi \in \mathbf{P}, \quad \forall X_\xi \in \mathbf{T}_\xi \mathbf{P}.$$

Assegnata una connessione lineare  $\Gamma$  su  $M$ , possiamo associare ad ogni vettore  $v \in \mathbb{R}^m$  il *campo di vettori orizzontali standard*  $\mathbf{B}(v)$  associato a  $v$  :

$$\mathbf{B}(v)(\xi) = \xi(v) \quad \forall \xi \in \mathbf{P}.$$

**Proposizione 21.7.1.** I campi di vettori orizzontali standard sono caratterizzati dalle seguenti proprietà (a) e (b) :

- (a)  $\theta(\mathbf{B}(v)) = v \quad \forall v \in \mathbb{R}^m$   
 (b)  $dR_a(\mathbf{B}(v)) = \mathbf{B}(a^{-1}(v)) \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \quad \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$

*inoltre :*

- (c)  $\mathbf{B}(v)(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbf{P} \text{ se } v \neq 0.$

**Lemma 21.7.2.** Sia assegnata una connessione lineare  $\Gamma$  su  $M$ . Se  $A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$  e  $v \in \mathbb{R}^m$ , allora :

$$[A^*, \mathbf{B}(v)] = \mathbf{B}(A(v)).$$

<sup>2</sup> ricordiamo che i punti di  $\mathbf{P}$  sono gli isomorfismi lineari  $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbf{T}_p M$ , con  $\pi(\xi) = p$ , al variare di  $p$  in  $M$ .

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo :

$$\begin{aligned} &= - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} dR_{\exp(tA)}(\mathbf{B}(v)) \\ &= - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{B}(\exp(-tA)(v)) \\ &= \mathbf{B}(A(v)) \end{aligned}$$

perché  $\mathbf{B} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbf{P})$  è un'applicazione lineare e quindi commuta con la derivazione.  $\square$

Indichiamo con  $\Omega \in \Omega^2(\mathbf{P}, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$  la forma di curvatura  $D\omega$  della connessione lineare  $\Gamma$ . Indichiamo ancora con  $\Theta$  la *forma di torsione* della curvatura  $\Gamma$ , che si definisce come il differenziale covariante della forma fondamentale  $\theta$  :

$$\Theta = D\theta = d\theta \circ \text{hrt} \in \Omega^2(\mathbf{P}, \mathbb{R}^m).$$

**Teorema 21.7.3** (equazioni di struttura). *Le forme di curvatura e di torsione di una connessione lineare  $\gamma$  su  $M$  soddisfano le EQUAZIONI DI STRUTTURA :*

$$\Theta = D\theta = d\theta + \omega \wedge \theta$$

$$\Omega = D\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega].$$

DIMOSTRAZIONE. La formula di struttura per la forma di torsione è conseguenza del Lemma 21.7.2, perché  $\theta$  è una forma tensoriale di tipo  $(\iota, \mathbb{R}^m)$ , dove  $\iota$  è la rappresentazione canonica di  $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ . L'equazione per la forma di curvatura è un caso particolare dell'equazione di struttura dimostrata nel Teorema 21.4.1.  $\square$