

**Lezioni di geometria differenziale**  
**(a.a. 2014/15)**

Mauro Nacinovich



## Indice

<b>Parte 1. Varietà, forme differenziali</b>	<b>11</b>
Capitolo I. Varietà topologiche e varietà differenziabili	13
I.1. Paracompattezza e partizione dell'unità	13
I.2. Varietà topologiche	14
I.3. Alcuni esempi	15
I.4. Varietà topologiche con bordo	17
I.5. Definizione di varietà differenziabile	18
I.6. Applicazioni differenziabili	19
I.7. Funzioni reali differenziabili e partizione dell'unità	20
I.8. Immersioni, sommersioni, diffeomorfismi	25
I.9. Prodotto cartesiano di varietà differenziabili	26
I.10. Sottovarietà differenziabili	27
I.11. Diffeomorfismi	30
I.12. Esistenza e unicità di strutture differenziali	31
Capitolo II. Campi di vettori e spazio tangente	33
II.1. Campi di vettori e curve integrali sulle varietà	33
II.2. Vettori tangenti e fibrato tangente	35
II.3. Differenziale di un'applicazione differenziabile	37
II.4. Alcune osservazioni sul teorema d'immersione di Whitney	37
II.5. Gruppi a un parametro di diffeomorfismi	38
II.6. Inclusioni isotope	40
II.7. Campi completi	41
II.8. Isotopie dello spazio ambiente	43
II.9. $k$ -celle differenziabili	45
Capitolo III. Fibrati vettoriali	47
III.1. Fibrati differenziabili	47
III.2. Fibrati vettoriali differenziabili	50
III.3. Morfismi e operazioni di fibrati vettoriali	51
III.4. Fibrati vettoriali e fibrato tangente	53
III.5. Norme differenziabili e strutture Euclidee	55
III.6. Classi di isomorfismo di fibrati vettoriali	55
III.7. Fibrati vettoriali sulle sfere	57
Capitolo IV. Forme differenziali negli spazi Euclidei	59

IV.1.	Forme differenziali in $\mathbb{R}^n$	59
IV.2.	Pull-back	60
IV.3.	Differenziale di una forma	60
IV.4.	Il complesso di de Rham	61
IV.5.	Coomologia di de Rham a supporti compatti	64
IV.6.	Il grado di un'applicazione propria di $\mathbb{R}^n$ in sé	67
IV.7.	Orientazione e sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ .	69
IV.8.	Integrazione sulle sottovarietà e formule di Stokes	71
Capitolo V.	Calcolo differenziale sulle varietà	77
V.1.	Fibrato cotangente e tensori	77
V.2.	Forme differenziali su una varietà	78
V.3.	Il lemma di Poincaré-Volterra sugli intorni contrattili	80
V.4.	Derivata di Lie di un tensore	80
V.5.	Distribuzioni vettoriali e teorema di Frobenius	83
Capitolo VI.	La coomologia di de Rham sulle varietà	87
VI.1.	Definizioni principali	87
VI.2.	Invarianza omotopica	88
VI.3.	Complessi differenziali	89
VI.4.	Le successioni di Mayer-Vietoris	93
VI.5.	La dualità di Poincaré	98
VI.6.	Grado di un'applicazione	100
VI.7.	La formula di Künnet	101
VI.8.	Duale di Poincaré in una sottovarietà orientata	103
VI.9.	La proprietà semi-locale	105
<b>Parte 2.</b>	<b>Gruppi e algebre di Lie</b>	<b>109</b>
Capitolo VII.	Gruppi e algebre di Lie	111
VII.1.	Nozioni fondamentali	111
VII.2.	Alcune osservazioni sull'applicazione esponenziale	115
VII.3.	Sottogruppi di Lie	116
VII.4.	La forma di Maurer-Cartan	117
VII.5.	Applicazioni a valori in un gruppo di Lie	120
VII.6.	Omomorfismi di gruppi ed algebre di Lie	121
VII.7.	Rappresentazioni lineari	122
VII.8.	Spazi omogenei	122
VII.9.	Gruppi di Lie di trasformazioni	125
VII.10.	La trasformata di Cayley	129
Capitolo VIII.	Strutture differenziali di alcuni gruppi lineari	133
VIII.1.	Connessione di alcuni gruppi di matrici	133
VIII.2.	Il rivestimento $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathbf{SO}^+(1, 2)$	134
VIII.3.	Il gruppo di Lorenz ed il gruppo delle rotazioni	135
VIII.4.	I quaternioni e i gruppi $\mathbf{SU}(2)$ , $\mathbf{SO}(3)$ , $\mathbf{SO}(4)$	138

VIII.5.	Gruppi $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$ , $\mathbf{SL}_{\mathbb{H}}(n)$ , $\mathbf{Sp}(n)$	141
VIII.6.	Il rivestimento $\mathbf{SL}_2(\mathbb{H}) \mapsto \mathbf{SO}^+(1, 5)$	144
VIII.7.	La rappresentazione aggiunta e i gruppi $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ , $\mathbf{Sp}(1, \mathbb{C})$ , $\mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$ , $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ , $\mathbf{SO}(1, 2)$	145
VIII.8.	La quadrica di $\mathbb{CP}^5$ ed alcuni omomorfismi di gruppi	148
Capitolo IX.	Varietà di Stiefel e di Grassmann	155
IX.1.	Varietà di Stiefel reali	155
IX.2.	Varietà di Grassmann	160
IX.3.	Varietà di Stiefel e di Grassmann complesse	162
IX.4.	Matrici di rango assegnato	164
IX.5.	Varietà dei sottospazi Lagrangiani reali	165
IX.6.	Varietà dei sottospazi Lagrangiani complessi	166
IX.7.	Varietà di sottospazi proiettivi di una quadrica proiettiva reale	167
IX.8.	Varietà di sottospazi proiettivi di una quadrica proiettiva complessa	168
IX.9.	Decomposizione di Cartan	169
Capitolo X.	Algebre di Clifford e Spinori	173
X.1.	Algebre reali associative unitarie	173
X.2.	Algebre di Clifford reali	178
X.3.	Algebra di Clifford di uno spazio vettoriale quadratico	184
X.4.	Involuzioni, anti-involuzioni e centro dell'algebra di Clifford	187
X.5.	Gruppi ortogonali e loro algebre di Lie	189
X.6.	Rappresentazione spinoriale dell'algebra ortogonale	191
X.7.	Il gruppo spinoriale	193
X.8.	Algebre di Clifford e gruppi spinoriali complessi	195
X.9.	Algebre di Clifford reali di segnatura $(p, q)$	199
X.10.	I gruppi spinoriali	201
X.11.	Rappresentazioni spinoriali	206
X.12.	Spinori di Dirac, Weyl, Majorana	211
Capitolo XI.	Ottonioni	213
XI.1.	Richiami sulle algebre	213
XI.2.	La costruzione di Cayley-Dickson	216
XI.3.	Un teorema di Hurwitz	219
XI.4.	Gli ottonioni	222
XI.5.	$\mathbf{G}_2$	223
<b>Parte 3.</b>	<b>Teoria delle connessioni</b>	<b>225</b>
Capitolo XII.	Fibrati principali	227
XII.1.	Prime definizioni	227
XII.2.	L'esempio degli spazi omogenei	229
XII.3.	Morfismi di fibrati principali	229
XII.4.	Classificazione dei fibrati principali	232
XII.5.	Il fibrato dei sistemi di riferimento	234

XII.6.	Jacobiano di un'applicazione differenziabile	235
XII.7.	Riduzione del gruppo strutturale e $\mathbf{G}$ -strutture	236
XII.8.	$\mathbf{G}$ -strutture su una varietà differenziabile	238
XII.9.	Fibrati vettoriali associati a rappresentazioni lineari	238
Capitolo XIII.	Connessioni principali	243
XIII.1.	La distribuzione verticale	243
XIII.2.	Il concetto di connessione principale	245
XIII.3.	Pullback di una connessione principale	247
XIII.4.	Il fibrato delle connessioni principali	247
XIII.5.	Automorfismi di una connessione principale	249
XIII.6.	Forme di Christoffel ed equazioni di gauge	249
XIII.7.	Sollevamento orizzontale di campi di vettori	252
XIII.8.	Sollevamento orizzontale di cammini e trasporto parallelo	253
XIII.9.	Il gruppo di olonomia	254
Capitolo XIV.	Differenziazione covariante e curvatura	257
XIV.1.	Differenziale di forme tensoriali e pseudotensoriali	257
XIV.2.	Differenziazione covariante di sezioni di fibrati vettoriali	258
XIV.3.	Espressione locale del differenziale covariante	260
XIV.4.	Forma di curvatura ed equazioni di struttura	261
XIV.5.	Connessioni piatte	262
XIV.6.	La famiglia delle connessioni principali	263
XIV.7.	Fibrato degli endomorfismi e rappresentazione aggiunta	263
XIV.8.	Tensore di curvatura	264
XIV.9.	Trasporto parallelo di vettori	265
XIV.10.	Differenziazione covariante secondo Koszul	267
XIV.11.	Il Teorema di Ambrose-Singer	268
XIV.12.	L'olonomia infinitesima	269
XIV.13.	Connessioni invarianti canoniche su spazi omogenei	270
XIV.14.	Connessioni invarianti	272
<b>Parte 4.</b>	<b>Varietà affini e Riemanniane</b>	<b>279</b>
Capitolo XV.	Varietà differenziabili affini e Riemanniane	281
XV.1.	Connessioni lineari	281
XV.2.	Forme di torsione e di curvatura	283
XV.3.	Derivazione covariante, torsione e curvatura	284
XV.4.	Interpretazione geometrica della torsione e della curvatura	288
XV.5.	Esistenza di connessioni simmetriche	289
XV.6.	Derivata covariante lungo una curva e parallelismo	291
XV.7.	Geodetiche	292
XV.8.	Metriche (pseudo-)Riemanniane e connessione di Levi-Civita	294
XV.9.	Esempi	297
XV.10.	Estensione della metrica ai fibrati tensoriali	300
XV.11.	Tensore di curvatura di una varietà pseudo-Riemanniana	301

XV.12. Connessioni principali su varietà dotate di una connessione lineare	302
Capitolo XVI. Connessioni lineari invarianti	305
XVI.1. Rappresentazione lineare d'isotropia	305
XVI.2. Connessioni lineari canoniche su spazi omogenei riduttivi	307
XVI.3. Connessioni lineari invarianti	310
XVI.4. Connessioni lineari invarianti su spazi riduttivi	313
XVI.5. Spazi affini simmetrici	318
Capitolo XVII. Applicazione esponenziale e campi di Jacobi	327
XVII.1. L'applicazione esponenziale	327
XVII.2. Intorni normali ed intorni convessi	328
XVII.3. Definizione dei campi di Jacobi	330
XVII.4. Campi di Jacobi su una varietà Riemanniana	333
XVII.5. Punti coniugati	336
Capitolo XVIII. Proprietà metriche delle varietà Riemanniane	339
XVIII.1. Geodetiche e distanza Riemanniana	339
XVIII.2. Il funzionale dell'energia	341
XVIII.3. Varietà di Riemann compatte	342
XVIII.4. Il teorema di Hopf-Rinow	343
XVIII.5. Varietà riemanniane complete	344
XVIII.6. Varietà Riemanniane con curvatura sezionale negativa	346
XVIII.7. Un teorema di Bochner	353
Capitolo XIX. Gruppi di trasformazioni	357
XIX.1. Il gruppo delle isometrie di uno spazio metrico	357
XIX.2. Un teorema di Bochner-Montgomery	360
XIX.3. Alcuni risultati sui gruppi di trasformazioni	364
XIX.4. Parallelismo assoluto	367
Capitolo XX. Trasformazioni e decomposizione di de Rham	371
XX.1. Applicazioni affini	371
XX.2. Sottovarietà affini	372
XX.3. Varietà totalmente geodetiche	373
XX.4. Trasformazioni affini	374
XX.5. Affinità infinitesime	376
XX.6. Isometrie di una varietà Riemanniana	378
XX.7. Campi di Killing	381
XX.8. Riducibilità	382
XX.9. Decomponibilità e teorema di de Rham	384
Capitolo XXI. Immersioni, isometrie, campi di Killing	389
XXI.1. Immersioni pseudo-Riemanniane	389
XXI.2. Proprietà algebriche del tensore di curvatura	395
XXI.3. La curvatura sezionale	398

Capitolo XXII. Operatori differenziali sulle varietà Riemanniane	401
XXII.1. Elemento di volume ed operatore di Hodge	401
XXII.2. Codifferenziale, operatore di Laplace-Beltrami, divergenza	402
XXII.3. Co-differenziazione covariante di forme differenziali	406
XXII.4. Divergenza di tensori simmetrici	408
XXII.5. L'operatore di Laplace-Beltrami	411
XXII.6. Il Laplaciano naturale	414
XXII.7. Il Laplaciano di Lichnerowicz	415
XXII.8. Laplaciano sulle forme differenziali alternate	417
Capitolo XXIII. Metriche invarianti	421
XXIII.1. Metriche pseudo-Riemanniane su spazi omogenei	421
XXIII.2. La connessione di Levi-Civita sugli spazi omogenei	422
Capitolo XXIV. Metriche di Einstein	425
XXIV.1. Proprietà del tensore di curvatura	425
XXIV.2. Curvatura sezionale	426
XXIV.3. Il tensore di Ricci	427
XXIV.4. Un Teorema di Myers	429
XXIV.5. Curvatura scalare	430
XXIV.6. Metriche di Einstein	431
Capitolo XXV. Spazi simmetrici	433
XXV.1. Spazi affini localmente simmetrici	433
XXV.2. Alcuni risultati sui gruppi di trasformazioni	436
XXV.3. Automorfismi affini e isometrie	441
XXV.4. Spazi Riemanniani globalmente simmetrici	447
XXV.5. Coppie simmetriche e simmetriche Riemanniane	450
<b>Appendice: Complementi di topologia generale</b>	<b>455</b>
Capitolo XXVI. Fibrati di Steenrod topologici	457
XXVI.1. Azione di gruppo	457
XXVI.2. Azioni continue	460
XXVI.3. Fibrati di Steenrod e fibrati principali	461
XXVI.4. Un Lemma di trivializzazione	463
XXVI.5. Richiami sui CW-compleksi	464
XXVI.6. Invarianza omotopica dei fibrati di Steenrod a base CW	465
XXVI.7. Fibrati universali	466
XXVI.8. Fibrati di Milnor	469
<b>Appendice: Gruppi classici</b>	<b>475</b>
Capitolo XXVII. Gruppi lineari e loro algebre di Lie	477
XXVII.1. Algebre di Lie	477
XXVII.2. Jacobiano dell'applicazione esponenziale	481
XXVII.3. Algebra di Lie di un gruppo lineare	485



XXVII.4.	Algebre di Lie dei gruppi lineari e dei gruppi lineari speciali	488
XXVII.5.	Endomorfismi semisemplici e decomposizione di Wedderburn	488
XXVII.6.	Matrici triangolari	490
XXVII.7.	Sottogruppi di Lie del gruppo lineare	492
Capitolo XXVIII.	Gruppi lineari compatti	497
XXVIII.1.	Proprietà topologiche di $U(n)$	497
XXVIII.2.	Il gruppo speciale unitario	499
XXVIII.3.	I gruppi $O(n)$ ed $SO(n)$	500
XXVIII.4.	L'omomorfismo canonico $SU(2) \rightarrow SO(3)$	502
XXVIII.5.	Il gruppo unitario simplettico $Sp(n)$	505
XXVIII.6.	Sfere e gruppi compatti	507
XXVIII.7.	Rivestimenti e gruppo degli spinori	509
Capitolo XXIX.	La lista di Cartan dei gruppi classici	511
XXIX.1.	Decomposizione di Cartan dei gruppi classici	511
XXIX.2.	Alcuni gruppi di matrici e le loro algebre di Lie	512
XXIX.3.	I gruppi $U(p, q)$ e $SU(p, q)$	514
XXIX.4.	I gruppi $Sp(n, \mathbb{C})$ e $SU^*(2n)$	515
XXIX.5.	I gruppi $SO(n, \mathbb{C})$ e $SO^*(2n)$	517
XXIX.6.	I gruppi $Sp(p, q; \mathbb{C})$	518
XXIX.7.	I gruppi $SO(p, q)$	518
Capitolo XXX.	Algebre di Lie	521
XXX.1.	Nozioni fondamentali	521
XXX.2.	Algebre di Lie lineari, derivazioni, rappresentazione aggiunta	522
XXX.3.	Rappresentazioni lineari	525
XXX.4.	Forme invarianti	527
XXX.5.	Automorfismi	528
XXX.6.	Algebre di Lie risolubili	530
XXX.7.	Algebre di Lie semisemplici	530
XXX.8.	Algebre di Lie nilpotenti	531
XXX.9.	Il teorema di Engel	531
XXX.10.	Il Teorema di Lie	533
XXX.11.	Il più grande ideale di nilpotenza di una rappresentazione	536
XXX.12.	Il radicale nilpotente e il nilradicale	537
XXX.13.	Automorfismi speciali	539
<b>Appendice: Complementi sulle connessioni</b>		<b>541</b>
Capitolo XXXI.	Espressioni in coordinate	543
XXXI.1.	Espressione in coordinate delle equazioni di struttura	543
XXXI.2.	Espressioni locali	545
XXXI.3.	Forme e simboli di Christoffel	548



## **Parte 1**

# **Varietà, forme differenziali**



## CAPITOLO I

# Varietà topologiche e varietà differenziabili

### I.1. Paracompattezza e partizione dell'unità

Sia  $X$  uno spazio topologico.

DEFINIZIONE I.1.1. Se  $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$  e  $\mathcal{V} = \{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$  sono due ricoprimenti di  $X$ , diciamo che  $\mathcal{V}$  è un *raffinamento* di  $\mathcal{U}$  se per ogni  $i \in I$  esiste un indice  $\alpha_i \in A$  tale che  $V_{\alpha_i} \subset U_i$ . Una funzione  $i \rightarrow \alpha_i$  con  $V_{\alpha_i} \subset U_i$  per ogni  $i \in I$  si dice una *funzione di raffinamento*.

Una famiglia  $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$  di sottoinsiemi di  $X$  si dice *localmente finita* se, per ogni punto  $x$  di  $X$ , esiste un intorno  $U_x$  di  $x$  in  $X$  tale che  $\{i \in I \mid A_i \cap U_x \neq \emptyset\}$  sia finito.

DEFINIZIONE I.1.2. Uno spazio topologico  $X$  si dice *paracompatto*<sup>1</sup> se verifica l'assioma di separazione di Hausdorff, e se ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento aperto localmente finito.

Ricordiamo, senza darne la dimostrazione<sup>2</sup>, le principali proprietà degli spazi paracompatti:

TEOREMA I.1.3. *Ogni spazio paracompatto è normale.*

Su uno spazio paracompatto  $X$  valgono cioè le due proprietà di separazione:

- (1) Se  $x \neq y$  sono due punti distinti di  $X$ , allora esistono due intorni aperti,  $U_x$  di  $x$  e  $U_y$  di  $y$ , tali che  $U_x \cap U_y = \emptyset$ ;
- (2) Se  $A, B$  sono due chiusi di  $X$  con  $A \cap B = \emptyset$ , allora esistono due aperti  $U, V$  di  $X$  tali che  $A \subset U, B \subset V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .

TEOREMA I.1.4. *Ogni sottospazio chiuso di uno spazio paracompatto è paracompatto.*

DEFINIZIONE I.1.5. Sia  $X$  uno spazio topologico ed  $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$  un suo ricoprimento aperto. Una *partizione continua dell'unità su  $X$  subordinata ad  $\mathcal{U}$*  è una famiglia  $\{\phi_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  di funzioni reali continue su  $X$  che godano delle seguenti proprietà:

$$(i) \quad \phi_i(x) \geq 0, \quad \forall x \in X, \quad \forall i \in I,$$

<sup>1</sup>Questo concetto fu introdotto nel 1944 da J. Dieudonné (*Une généralization des espaces compacts*, J. Math. Pures Appl. **23**, pp. 65-76).

<sup>2</sup>cf. Cap. 2-§11 di J.G.Hocking, G.S.Joung *Topology*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading, Massachusetts, 1961, oppure Cap IX-§4.3,4.4 di N.Bourbaki *General Topology* Hermann, Paris, 1966.

- (ii)  $\text{supp } \phi_i = \overline{\{x \in X \mid \phi_i(x) \neq 0\}} \subset U_i, \quad \forall i \in I,$
- (iii)  $\{\text{supp } \phi_i \mid i \in I\}$  è localmente finita,
- (iv)  $\sum_{i \in I} \phi_i(x) = 1, \quad \forall x \in X.$

Osserviamo che la somma in (iv) è ben definita perché, per la (iii), per ciascun punto  $x \in X$  vi è un intorno aperto  $U_x$  in cui solo un numero finito di addendi siano non nulli.

**TEOREMA I.1.6.** *Sia  $X$  uno spazio di Hausdorff. Sono equivalenti:*

- (A)  $X$  è paracompatto.  
 (B) Per ogni ricoprimento aperto  $\mathcal{U}$  di  $X$  esiste una partizione continua dell'unità su  $X$  subordinata ad  $\mathcal{U}$ .

**TEOREMA I.1.7.** *Sia  $X$  uno spazio di Hausdorff, localmente compatto.*

- (a) Se  $X$  è unione numerabile di compatti, allora  $X$  è paracompatto.  
 (b) Se  $X$  è connesso e paracompatto, allora  $X$  è unione numerabile di compatti.

**TEOREMA I.1.8.** *Ogni spazio di Hausdorff, localmente compatto e a base numerabile, è paracompatto.*

**TEOREMA I.1.9** (Stone<sup>3</sup>). *Ogni spazio topologico metrizzabile è paracompatto.*

## I.2. Varietà topologiche

**DEFINIZIONE I.2.1.** Uno spazio topologico  $M$  si dice *localmente euclideo di dimensione  $m$*  se ogni punto  $p$  di  $X$  ammette un intorno  $U$  omeomorfo ad  $\mathbb{R}^m$ .

Poiché ogni punto di  $\mathbb{R}^m$  ha un sistema fondamentale di intorni aperti che sono omeomorfi ad  $\mathbb{R}^m$ , dire che un punto  $p$  di  $M$  ammette un intorno omeomorfo ad  $\mathbb{R}^m$  è equivalente a dire che esso ammette un intorno omeomorfo ad un qualsiasi aperto di  $\mathbb{R}^m$ .

**OSSERVAZIONE I.2.2.** La *dimensione* locale di uno spazio topologico localmente Euclideo è un invariante topologico. Infatti Luitzen Egbertus Jan Brouwer<sup>4</sup> ha dimostrato che non esistono omeomorfismi tra aperti di  $\mathbb{R}^n$  e di  $\mathbb{R}^m$  se  $n \neq m$ .

**DEFINIZIONE I.2.3.** Una *carta locale di dimensione  $m$*  di  $M$  è il dato di un aperto  $U$  di  $M$ , di un aperto  $V$  di  $\mathbb{R}^m$ , e di un omeomorfismo  $\phi : U \rightarrow V$ .

Se  $0 \in V$  e  $p_0 \in U$  è il punto per cui  $\phi(p_0) = 0$ , chiameremo  $p_0$  il suo *centro*.

**DEFINIZIONE I.2.4.** Una *varietà topologica di dimensione  $m$*  è uno spazio topologico  $M$  paracompatto e localmente Euclideo di dimensione  $m$ .

<sup>3</sup>A.H.Stone, *Paracompactness and product spaces* in Bull.A.M.S. **54** (1948), pp. 977-982. Osserviamo che il prodotto di due spazi paracompatti può non essere paracompatto.

<sup>4</sup>Beweis der Invarianz des  $n$ -dimensionalen Gebiets, Mathematische Annalen **71** (1912), pp. 305-315

Per il Teorema I.1.8 la paracompattatezza si può descrivere in modo equivalente richiedendo che  $M$  sia di Hausdorff e che ogni sua componente connessa sia *numerabile all'infinito*. Ciò significa che, per ogni componente connessa  $M'$  di  $M$ , si può trovare una successione  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di sottoinsiemi compatti di  $M'$  tali che  $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$  per ogni intero  $n \geq 0$  ed  $M' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ .

DEFINIZIONE I.2.5. Siano  $M$  una varietà topologica di dimensione  $m$  ed  $U_i \xrightarrow{\phi_i} V_i$ , per  $i = 1, 2$ , due carte locali in  $M$ . Se  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , allora  $\phi_1(U_1 \cap U_2)$  e  $\phi_2(U_1 \cap U_2)$  sono aperti di  $\mathbb{R}^m$  e

$$(1.2.1) \quad \phi_{2,1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \ni x \rightarrow \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x) \in \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

un omeomorfismo tra aperti di  $\mathbb{R}^m$ , che si dice la *funzione di transizione* dalla carta  $U_1 \xrightarrow{\phi_1} V_1$  alla carta  $U_2 \xrightarrow{\phi_2} V_2$ .

DEFINIZIONE I.2.6. Un *atlante* di  $M$  è una famiglia  $\mathcal{A} = \{U_i \xrightarrow{\phi_i} V_i \subset \mathbb{R}^m\}_{i \in I}$  di carte locali in  $M$  tale che  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ . Poniamo:

$$(1.2.2) \quad V_{i,j} = \phi_j(U_i \cap U_j) \subset V_j \quad \text{e}$$

$$(1.2.3) \quad \phi_{i,j} : V_{i,j} \ni x \rightarrow \phi_i \circ \phi_j^{-1}(x) \in V_{j,i}.$$

Le  $(\phi_{i,j})$  così definite si dicono le *funzioni di transizione* dell'atlante  $\mathcal{A}$ .

Le funzioni di transizione soddisfano le relazioni di compatibilità

$$(1.2.4) \quad \phi_{i,i} = \text{id}_{U_i}, \quad \phi_{i,j} \circ \phi_{j,k}(x) = \phi_{i,k}(x), \quad \forall x \in \phi_k(U_i \cap U_j \cap U_k).$$

TEOREMA I.2.7. *Ogni varietà topologica è localmente compatta e metrizzabile.*

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue dal fatto che gli spazi Euclidei  $\mathbb{R}^m$  sono localmente compatti. Per quanto riguarda la seconda, basta osservare che ogni componente connessa di una varietà topologica è a base numerabile ed ogni spazio regolare a base numerabile è metrizzabile; se indichiamo con  $X_i$ ,  $i \in I$  le componenti connesse di  $X$  e con  $d_i : X_i \times X_i \rightarrow \mathbb{R}$  una distanza che definisce la topologia di  $X_i$ , possiamo definire la distanza in  $X$  ponendo

$$x, y \in X, \quad x \in X_i, y \in X_j \implies d(x, y) = \begin{cases} d_i(x, y) & \text{se } i = j, \\ 1 + d_i(x, y) & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

□

### I.3. Alcuni esempi

ESEMPIO I.3.1. Ogni sottoinsieme aperto  $X$  di  $\mathbb{R}^m$  è una varietà topologica di dimensione  $m$ .

ESEMPIO I.3.2. Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 1$ ), con  $\emptyset \neq A \neq \mathbb{R}^m$  e sia  $X$  il quoziente di  $\mathbb{R}^m \times \{0, 1\}$  che si ottiene identificando i punti  $(x, 0)$  ed  $(x, 1)$  se  $x \in A$ . Lo spazio topologico  $X$  è localmente Euclideo di dimensione  $m$ , ma non è una varietà topologica perché non è di Hausdorff: i punti  $(x, 0)$  ed  $(x, 1)$ , per  $x$  sulla frontiera  $\partial A$  di  $A$ , definiscono nel quoziente  $X$  elementi distinti che non ammettono intorni disgiunti.

ESEMPIO I.3.3. Su  $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$  consideriamo la relazione di equivalenza che identifica due punti  $(x, 0)$  ed  $(x, 1)$  se  $x \leq 0$ . Il quoziente  $X$  è uno spazio di Hausdorff, ma non è localmente Euclideo, perché il punto  $x_0$  di  $X$  corrispondente a  $\{(0, 0), (0, 1)\}$  non ha un intorno omeomorfo ad  $\mathbb{R}$ . Infatti, se  $U$  è un intorno aperto di  $x_0$  in  $X$ , allora  $U \setminus \{x_0\}$  ha almeno tre componenti connesse.

ESEMPIO I.3.4. Sia  $X$  lo spazio topologico ottenuto considerando su  $\mathbb{R}^2$  la topologia definita dall'ordine lessicografico:

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2, & \text{oppure} \\ x_1 = x_2 & \text{e } y_1 < y_2. \end{cases}$$

Ogni componente connessa di  $X$  è omeomorfa ad  $\mathbb{R}$  e quindi  $X$  è uno spazio localmente Euclideo di dimensione 1. La topologia dell'ordine lessicografico è indotta dalla distanza:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 \neq x_2 \\ \frac{|y_1 - y_2|}{1 + |y_1 - y_2|} & \text{se } x_1 = x_2. \end{cases}$$

Quindi  $X$ , essendo metrizzabile, è paracompatto e dunque una varietà topologica di dimensione 1.

ESEMPIO I.3.5. Sia  $X = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ , ed “<” un buon ordinamento su  $]0, 1[$ , rispetto al quale  $]0, 1[$  non ammetta massimo: in particolare per ogni  $t \in ]0, 1[$  vi è un elemento  $t' \in ]0, 1[$  (successivo di  $t$ ) con  $t < t'$  tale che  $\{s \in ]0, 1[ \mid t < s < t'\} = \emptyset$ .

Consideriamo su  $X$  la topologia dell'ordine relativa all'ordinamento totale:

$$(x, t) < (y, s) \Leftrightarrow \begin{cases} t < s & \text{oppure} \\ t = s & \text{e } x < y. \end{cases}$$

Chiaramente  $X$  è localmente euclideo di dimensione 1, è connesso e di Hausdorff, ma non è una varietà topologica perché non è paracompatto.

ESEMPIO I.3.6. La sfera  $S^m$  è una varietà topologica di dimensione  $m$ . Siano  $x_0, \dots, x_m$  le coordinate cartesiane di  $\mathbb{R}^{m+1}$  e scriviamo

$$S^m = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{i=0}^m x_i^2 = 1 \right\}.$$

Indichiamo poi con  $p : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$  la proiezione sulle ultime  $m$  coordinate

$$\mathbb{R}^{m+1} \ni x = (x_0, x_1, \dots, x_m) \xrightarrow{p} x' = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$

e siano

$$\phi_+ : U_+ = S^m \setminus \{-e_0\} \ni x \longrightarrow \frac{1}{1+x_0} x' \in \mathbb{R}^m,$$

$$\phi_- : U_- = S^m \setminus \{e_0\} \ni x \longrightarrow \frac{1}{1-x_0} x' \in \mathbb{R}^m.$$

le proiezioni stereografiche rispetto al polo sud  $-e_0$  ed al polo nord  $e_0$ , rispettivamente. Allora  $\mathcal{A} = \{(U_+, \phi_+), (U_-, \phi_-)\}$  è un atlante di  $S^m$ , formato da due carte locali di dimensione  $m$ . Le sue funzioni di transizione sono  $\phi_{+-} = \phi_{-+} : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \ni y \rightarrow y/|y|^2 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ .



ESEMPIO I.3.7. Lo spazio proiettivo reale di dimensione  $m$

$$\mathbb{R}P^m = (\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}) / \sim, \quad \text{ove } x \sim y \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}x,$$

è una varietà topologica di dimensione  $m$ . Indichiamo con  $[x_0, x_1, \dots, x_m]$  il punto di  $\mathbb{R}P^m$  che corrisponde al punto  $(x_0, x_1, \dots, x_m)$  di  $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ . Le  $x_0, \dots, x_m$  sono sue *coordinate omogenee*. Un atlante  $\mathcal{A}$  di  $\mathbb{R}P^m$  è descritto nelle coordinate omogenee dagli aperti

$$U_i = \{[x_0, x_1, \dots, x_m] \mid x_i \neq 0\} \quad \text{per } i = 0, 1, \dots, m,$$

e dagli omeomorfismi

$$\begin{aligned} \phi_i : U_i \ni [x_0, x_1, \dots, x_m] &\longrightarrow (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m, \\ \text{ove } y_j &= \begin{cases} x_{j-1}/x_i & \text{se } 1 \leq j \leq i, \\ x_j/x_i & \text{se } i < j \leq m. \end{cases} \end{aligned}$$

ESEMPIO I.3.8. Lo spazio proiettivo complesso di dimensione  $m$

$$\mathbb{C}P^m = (\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}) / \sim, \quad \text{ove } z \sim w \Leftrightarrow w \in \mathbb{C}z,$$

è una varietà topologica di dimensione  $2m$ . Indichiamo con  $[z_0, z_1, \dots, z_m]$  il punto di  $\mathbb{C}P^m$  che corrisponde al punto  $(z_0, z_1, \dots, z_m)$  di  $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ . Le  $z_0, \dots, z_m$  sono sue *coordinate omogenee*. Un atlante  $\mathcal{A}$  di  $\mathbb{C}P^m$  è descritto nelle coordinate omogenee dagli aperti

$$U_i = \{[z_0, z_1, \dots, z_m] \mid z_i \neq 0\} \quad \text{per } i = 0, 1, \dots, m,$$

e dagli omeomorfismi

$$\begin{aligned} \phi_i : U_i \ni [z_0, z_1, \dots, z_m] &\longrightarrow (w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{C}^m \simeq \mathbb{R}^{2m}, \\ \text{ove } w_j &= \begin{cases} z_{j-1}/z_i & \text{se } 1 \leq j \leq i, \\ z_j/z_i & \text{se } i < j \leq m. \end{cases} \end{aligned}$$

#### I.4. Varietà topologiche con bordo

DEFINIZIONE I.4.1. Una varietà topologica di dimensione  $m$  *con bordo* è uno spazio topologico paracompatto  $M$  in cui ogni punto ha un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}_+^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}$ .

La parte interna  $\overset{\circ}{M}$  di  $M$  è l'insieme dei punti di  $M$  che hanno un intorno omeomorfo ad  $\mathbb{R}^m$ .  $\overset{\circ}{M}$  è una varietà topologica di dimensione  $m$  ed un aperto denso di  $M$ .

L'insieme  $\partial M = M \setminus \overset{\circ}{M}$  è una varietà differenziabile di dimensione  $(m-1)$  che si dice il *bordo* di  $M$ .

Un omeomorfismo  $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}_+^m$  di un aperto  $U$  di  $M$  su un aperto  $\phi(U)$  di  $\mathbb{R}_+^m$  si dice una *carta locale* in  $M$ .

Una collezione  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$  di carte locali in  $M$  tali che  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$  si dice un *atlante* di  $M$ .

Le varietà topologiche definite in §1.2 sono varietà a bordo con il bordo vuoto. Per questo le chiameremo anche *varietà senza bordo*.

### I.5. Definizione di varietà differenziabile

DEFINIZIONE I.5.1. Sia  $M$  una varietà topologica di dimensione  $m$ . Un atlante  $\mathcal{A}$  di  $M$  si dice di classe  $\mathcal{C}^k$  (ove  $k$  è un intero non negativo, oppure  $\infty$  od  $\omega$ ) se le sue funzioni di transizione sono diffeomorfismi di classe  $\mathcal{C}^k$ .

Due atlanti  $\mathcal{A}$  ed  $\mathcal{A}'$  di classe  $\mathcal{C}^k$  di  $M$  si dicono  $\mathcal{C}^k$ -compatibili se  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  è ancora un atlante di classe  $\mathcal{C}^k$ .

Un atlante di classe  $\mathcal{C}^0$  è semplicemente un atlante e tutti gli atlanti di classe  $\mathcal{C}^0$  su  $M$  sono tra loro compatibili.

La relazione di compatibilità  $\mathcal{C}^k$  è una relazione di equivalenza nella famiglia degli atlanti di  $M$ .

Se  $\mathcal{A}$  è un atlante di classe  $\mathcal{C}^k$  su  $M$ , l'unione di tutti gli atlanti  $\mathcal{C}^k$ -compatibili con  $\mathcal{A}$  è ancora un atlante  $\mathcal{C}^k$  compatibile con  $\mathcal{A}$ ; esso è *massimale* nel senso che non è propriamente contenuto in nessun atlante di classe  $\mathcal{C}^k$  con esso compatibile.

ESEMPIO I.5.2. Un atlante formato da una sola carta è sempre di classe  $\mathcal{C}^\omega$ . Quindi i due atlanti  $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, x)\}$  e  $\mathcal{A}' = \{(\mathbb{R}, x^3)\}$  su  $\mathbb{R}$  sono atlanti di classe  $\mathcal{C}^\omega$  sulla varietà topologica  $\mathbb{R}$ . Essi sono compatibili di classe  $\mathcal{C}^0$ , ma non di classe  $\mathcal{C}^k$  per  $k \geq 1$ , perché la funzione di transizione  $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$  non è differenziabile in 0.

DEFINIZIONE I.5.3. Una *varietà differenziabile di dimensione  $m$*  è il dato di una varietà topologica  $M$  di dimensione  $m$  e di un suo atlante massimale  $\mathcal{A}$  di classe  $\mathcal{C}^k$ .

OSSERVAZIONE I.5.4. Una varietà differenziabile di classe  $\mathcal{C}^0$  è semplicemente una varietà topologica.

OSSERVAZIONE I.5.5. Non tutte le varietà topologiche (anche se di Hausdorff e paracompatte) ammettono un atlante differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  con  $k$  positivo. Un esempio di varietà topologica su cui non può essere definita una struttura differenziale è stato dato da MICHEL A. KERVAIRE<sup>5</sup> nel 1959.

HASSLER WHITNEY<sup>6</sup> ha dimostrato che ogni varietà differenziabile di classe  $\mathcal{C}^1$  paracompatta ammette un atlante di classe  $\mathcal{C}^\omega$ . Quando studiamo le proprietà *topologiche* di una varietà differenziabile  $M$  di classe  $\mathcal{C}^k$  con  $k \geq 1$ , potremo quindi supporre, senza perdere in generalità, che essa sia di classe  $\mathcal{C}^\omega$ , o di una qualsiasi classe  $\mathcal{C}^h$  con  $h \geq 1$  che sia utile nella discussione (vedi il §I.12).

Tutte le varietà differenziabili sono triangolabili, come è stato dimostrato da STEWART S. CAIRNS<sup>7</sup>, ma non tutte le varietà topologiche lo sono, come mostrato da LAURENCE C. SIEBENMANN<sup>8</sup>. Abbiamo quindi delle inclusioni proprie

Varietà topologiche  $\subsetneq$  Varietà triangolabili  $\subsetneq$  Varietà differenziabili.

<sup>5</sup> *A Manifold which does not admit any Differentiable Structure*, Commentarii Mathematici Helvetici, **34** (1960), pp. 257-270.

<sup>6</sup> *Differentiable Manifolds*, Annals of Mathematics **37** (3) (1936), pp. 645-680

<sup>7</sup> *On the triangulation of regular loci*, Ann. of Math. (2) **35** (1934), no. 3, 579-587.

<sup>8</sup> *Topological manifolds*. Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2, pp. 133-163. Gauthier-Villars, Paris, 1971

Infine, una varietà topologica triangolabile può avere due triangolazioni non equivalenti<sup>9</sup>.

Un atlante  $\mathcal{A}$  di classe  $\mathcal{C}^k$  su una varietà topologica  $M$  di dimensione  $m$  determina su  $M$  un'unica struttura di varietà differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$ . L'atlante massimale  $\tilde{\mathcal{A}}$  corrispondente è formato da tutti e soli gli omeomorfismi  $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbf{R}^m$  di un aperto  $U$  di  $M$  su un aperto  $V$  di  $\mathbf{R}^m$  tali che  $\{(U, \varphi)\} \cup \mathcal{A}$  sia ancora un atlante di classe  $\mathcal{C}^k$  (equivalente ad  $\mathcal{A}$ ). Ogni carta di tale atlante massimale si dice un *sistema di coordinate* (o *carta locale*) di classe  $\mathcal{C}^k$  di  $M$ .

Se  $(U, \phi)$  è una carta locale di classe  $\mathcal{C}^k$  con centro in  $p$  e  $\Psi : V \rightarrow V'$  è un diffeomorfismo di classe  $\mathcal{C}^k$  tra due intorni aperti di  $0$  in  $\mathbf{R}^m$ , con  $\Psi(0) = 0$ , allora anche  $(U \cap \phi^{-1}(V), \Psi \circ \phi)$  è una carta locale di classe  $\mathcal{C}^k$  con centro in  $p$ .

Un atlante di classe  $\mathcal{C}^k$  è anche di classe  $\mathcal{C}^h$  per ogni  $0 \leq h < k$ . Definisce quindi su  $M$  un'unica struttura di *varietà differenziabile di classe  $\mathcal{C}^h$* . In particolare, possiamo considerare una varietà differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  come varietà differenziabile di classe  $\mathcal{C}^h$  per ogni  $h \leq k$ .

ESEMPPIO I.5.6. Gli atlanti definiti nel paragrafo §I.2 per le varietà topologiche  $S^m, \mathbf{R}P^m, \mathbf{C}P^m$  sono tutti di classe  $\mathcal{C}^\omega$ .

LEMMA I.5.7. Sia  $M$  una varietà differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  (con  $0 \leq k \leq \omega$ ) ed  $A$  un aperto di  $M$ . Se  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$  è un atlante di classe  $\mathcal{C}^k$  su  $M$ , allora

$$\mathcal{A}_A = \{(U_i \cap A, \phi_i|_{U_i \cap A}) \mid i \in I, U_i \cap A \neq \emptyset\}$$

è un atlante di classe  $\mathcal{C}^k$  su  $A$ .

Quindi, su ogni aperto  $A$  di una varietà differenziabile  $M$  risulta definita un'unica struttura di varietà differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  tale che ogni carta locale di classe  $\mathcal{C}^k$  di  $A$  sia anche una carta locale di classe  $\mathcal{C}^k$  di  $M$ . Con la struttura differenziale così definita, diciamo che  $A$  è una *sottovarietà aperta* di  $M$ .

In modo del tutto analogo si possono definire le varietà differenziabili con bordo.

DEFINIZIONE I.5.8. Sia  $M$  una varietà topologica con bordo. Un atlante  $\mathcal{A}$  di  $M$  è di classe  $\mathcal{C}^k$  se le sue funzioni di transizione sono di classe  $\mathcal{C}^k$ . Due atlanti di classe  $\mathcal{C}^k$  sono equivalenti se la loro unione è ancora un atlante di classe  $\mathcal{C}^k$ . Una struttura differenziale di classe  $\mathcal{C}^k$  su  $M$  è il dato di una classe di equivalenza di atlanti  $\mathcal{C}^k$  su  $M$ .

## I.6. Applicazioni differenziabili

In questo paragrafo introduciamo la nozione di applicazione differenziabile tra varietà.

<sup>9</sup> ROBION C. KIRBY, LAURENCE C. SIEBENMANN: *Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations. With notes by John Milnor and Michael Atiyah*, Annals of Mathematics Studies, No. 88. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1977. vii+355 pp.

LEMMA I.6.1. Sia  $f : M \rightarrow N$  un'applicazione continua tra due varietà differenziabili di classe  $\mathcal{C}^k$  e sia  $p \in M$ . Sono equivalenti:

- (i) Possiamo trovare una carta locale  $(U, \varphi)$  in  $p$  ed una carta locale  $(V, \psi)$  in  $f(p)$  tali che

$$f(U) \subset V \quad e \quad \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^k(\varphi(U), \psi(V)).$$

- (ii) Per ogni carta locale  $(U, \varphi)$  in  $p$  e per ogni carta locale  $(V, \psi)$  in  $f(p)$

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^k(\varphi(U \cap f^{-1}(V)), \psi(V)).$$

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente (ii)  $\implies$  (i). L'implicazione opposta segue dal fatto che i cambiamenti di carte locali sono applicazioni di classe  $\mathcal{C}^k$  e la composizione di applicazioni di classe  $\mathcal{C}^k$  sono ancora applicazioni di classe  $\mathcal{C}^k$ .  $\square$

DEFINIZIONE I.6.2. Un'applicazione continua  $f : M \rightarrow N$  che soddisfi le condizioni equivalenti del lemma, si dice *differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  in  $p$* . Un'applicazione  $f$  si dice *differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  in  $M$*  se è tale in ogni punto di  $M$ .

L'insieme di tutte le applicazioni differenziabili di classe  $\mathcal{C}^k$  definite sulla varietà differenziabile  $M$ , a valori nella varietà differenziabile  $N$ , si indica con  $\mathcal{C}^k(M, N)$ .

Vale il seguente:

LEMMA I.6.3. Siano  $M, N$  varietà differenziabili di classe  $\mathcal{C}^k$  ( $0 \leq k \leq \omega$ ) ed  $f : M \rightarrow N$  un'applicazione. Sia  $\mathcal{U}$  un ricoprimento aperto di  $M$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché  $f$  sia differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  su  $M$  è che per ogni aperto  $U \in \mathcal{U}$  la restrizione  $f|_U : U \rightarrow N$  di  $f$  alla sottovarietà aperta  $U$  sia differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$ .

## I.7. Funzioni reali differenziabili e partizione dell'unità

Consideriamo sulla retta reale  $\mathbb{R}$  la struttura di varietà differenziabile di dimensione 1 definita dall'unica carta coordinata  $(\mathbb{R}, \text{id})$ . L'insieme  $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R})$  delle applicazioni differenziabili di classe  $\mathcal{C}^k$ , definite su una varietà differenziabile  $M$  di classe  $\mathcal{C}^k$  e a valori in  $\mathbb{R}$ , si indica semplicemente con  $\mathcal{C}^k(M)$ . Se  $k = \infty$ , scriveremo a volte  $\mathcal{E}(M)$  invece di  $\mathcal{C}^\infty(M)$  e se  $k = \omega$  (funzioni analitiche–reali), scriveremo a volte  $\mathcal{A}(M)$  invece di  $\mathcal{C}^\omega(M)$ .

TEOREMA I.7.1. Sia  $M$  una varietà differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$ , ( $0 \leq k \leq \omega$ ). L'insieme  $\mathcal{C}^k(M)$  delle funzioni reali di classe  $\mathcal{C}^k$  su  $M$  è un anello commutativo e unitario e un'algebra reale rispetto alle operazioni

- (1) di somma:

$$(f + g)(p) = f(p) + g(p) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^k(M), \quad \forall p \in M;$$

- (2) di prodotto:

$$(fg)(p) = f(p)g(p) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^k(M), \quad \forall p \in M;$$

(3) di prodotto per scalare:

$$(kf)(p) = kf(p) \quad \forall f \in \mathcal{C}^k(M), \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall p \in M.$$

**TEOREMA I.7.2** (di partizione dell'unità). *Sia  $M$  una varietà differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$ , ( $0 \leq k \leq \infty$ ), paracompatta. Sia  $\mathcal{U} = \{U_j \mid j \in J\}$  un ricoprimento aperto di  $M$ . Allora esiste una partizione dell'unità  $\{\phi_j\}_{j \in J}$ , subordinata<sup>10</sup> ad  $\mathcal{U}$ , mediante funzioni  $\phi_j$  di  $\mathcal{C}^k(M)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$  un raffinamento aperto localmente finito di  $\mathcal{U}$  mediante aperti coordinati  $(V_i, x_i)$  di  $M$ , con  $\bar{V}_i$  compatto, e sia  $\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in I\}$  un raffinamento di  $\mathcal{V}$ , con

$$W_i \subset \bar{W}_i \Subset V_i \Subset U_{j_i}$$

per un'opportuna funzione di raffinamento  $i \rightarrow j_i$ .

Per ogni  $i \in I$  fissiamo un aperto  $G_i$  con  $W_i \Subset G_i \Subset V_i$ . Per la Proposizione ?? del Capitolo ??, esiste per ogni  $i \in I$  una funzione  $g_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$  tale che

$$\begin{cases} 0 \leq g_i(y) \leq 1 & \forall y \in \mathbb{R}^m, \\ g_i(y) = 1 & \forall y \in x_i(\bar{W}_i), \\ g_i(y) = 0 & \forall y \notin x_i(G_i). \end{cases}$$

Le funzioni

$$h_i(p) = \begin{cases} g_i(x_i(p)) & \text{se } p \in V_i, \\ 0 & \text{se } p \notin G_i \end{cases}$$

sono allora di classe  $\mathcal{C}^k$  su  $M$ ; i loro supporti formano un ricoprimento localmente finito di  $M$  ed inoltre anche  $\{h_i^{-1}(1) \mid i \in I\}$  è un ricoprimento chiuso localmente finito di  $M$ . Ne segue che

$$h(p) = \sum_{i \in I} h_i(p), \quad p \in M$$

è una funzione reale di classe  $\mathcal{C}^k$ , che assume valori  $\geq 1$  su  $M$ . Quindi le

$$\psi_i(p) = \frac{h_i(p)}{h(p)}, \quad p \in M, \quad i \in I,$$

formano una partizione dell'unità di classe  $\mathcal{C}^k$  su  $M$ . Per ogni  $j \in J$  sia  $I_j$  l'insieme degli indici  $i \in I$  tali che  $j_i = j$ . Allora le

$$\phi_j(p) = \sum_{i \in I_j} \psi_i(p)$$

sono funzioni di classe  $\mathcal{C}^k$  che definiscono una partizione dell'unità su  $M$  subordinata ad  $\mathcal{U}$ .  $\square$

Come conseguenza dell'esistenza di partizioni dell'unità, otteniamo:

<sup>10</sup>Ricordiamo che questo significa che  $\{\text{supp } \phi_j\}_{j \in J}$  è un ricoprimento chiuso localmente finito di  $M$ , con  $\text{supp } \phi_i \subset U_i$  per ogni  $j \in J$  e che  $\sum_{i \in I} \phi_j(p) = 1$  per ogni  $p \in M$ .

**PROPOSIZIONE I.7.3.** *Sia  $F$  un chiuso di una varietà differenziabile  $M$ , di classe  $\mathcal{C}^k$  con  $0 \leq k \leq \infty$ , paracompatta. Se  $U$  è un intorno aperto di  $F$  in  $M$ , esiste una funzione  $f \in \mathcal{C}^k(M)$  tale che*

$$0 \leq f(p) \leq 1, \quad \forall p \in M, \quad f(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in F, \\ 0 & \text{se } p \notin U. \end{cases}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $M$  è normale, possiamo fissare un intorno aperto  $V$  di  $F$  in  $U$  la cui chiusura  $\bar{V}$  sia ancora contenuta in  $U$ . Consideriamo il ricoprimento aperto  $\{U, \bar{V}\}$ . Per il Teorema I.7.2 esiste una partizione dell'unità  $\{f, g\}$ , con  $f, g \in \mathcal{C}^k(M)$ ,  $\text{supp } f \subset U$ ,  $\text{supp } g \cap \bar{V} = \emptyset$ . La  $f$  è uguale ad 1 su  $V$  e quindi su  $F$  ed è nulla fuori da  $U$  e perciò soddisfa la tesi.  $\square$

**LEMMA I.7.4.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile, paracompatta e a base numerabile, di classe  $\mathcal{C}^k$  con  $0 \leq k \leq \infty$ . Se  $\{f_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$  è una successione di funzioni di classe  $\mathcal{C}^k$  in  $M$ , possiamo trovare una successione  $\{\epsilon_\nu\}$  di numeri positivi tali che la serie*

$$(1.7.1) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon_\nu f_\nu$$

*converga uniformemente sui compatti di  $M$  ad una funzione di classe  $\mathcal{C}^k$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo un atlante  $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i) \mid i \in I \subset \mathbb{N}\}$  di  $M$  con  $U_i \Subset M$  ed  $\{U_i\}_{i \in I}$  localmente finito, e sia  $\{V_i\}_{i \in I}$  un raffinamento di  $\{U_i\}$  con  $\bar{V}_i \Subset U_i$ . Scegliamo poi le  $\epsilon_\nu > 0$  in modo tale che

$$\sum_{j \leq \nu} \sum_{|\beta| \leq \min(k, \nu)} \sum_{i \in I, i \leq \nu} \sup_{x_i(\bar{V}_i)} \left| \frac{\partial^{|\beta|} f_j}{\partial x_\alpha^\beta} \right| < \frac{2^{-\nu}}{\epsilon_\nu}.$$

La scelta è possibile perché per ogni  $\nu$  il primo membro è una somma finita di estremi superiori di funzioni continue su sottoinsiemi compatti. Con questa scelta degli  $\epsilon_\nu$ , per ogni  $i \in I$  la serie  $\sum_{\nu} \epsilon_\nu f_\nu \circ x_i^{-1}$  di funzioni di  $\mathcal{C}^k(x_i(U_i))$  converge uniformemente con tutte le derivate fino all'ordine  $k$  (con tutte le derivate se  $k = \infty$ ) su tutti i compatti di  $x_i(U_i) \subset \mathbb{R}^m$ . Questo implica che la serie (1.7.1) converge, uniformemente sui compatti di  $M$ , a una funzione di classe  $\mathcal{C}^k$  su  $M$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE I.7.5.** L'enunciato del Lemma I.7.4 non è valido se  $k = \omega$ . Siano ad esempio  $M = \mathbb{R}$  ed  $\{f_\nu = (1 + \nu^2 x^2)^{-1}\}$ . Sia  $f = \sum_{\nu \geq 0} \epsilon_\nu (1 + \nu^2 x^2)^{-1}$  per una serie convergente con  $\epsilon_\nu > 0$  per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ . In particolare, la serie  $\sum_{\nu \geq 0} \epsilon_\nu$  è convergente e quindi la  $f$  definisce una funzione analitica su  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , che si estende a una funzione olomorfa nell'intorno  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid iz \notin \mathbb{Z}\}$  di  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  in  $\mathbb{C}$ , ed in esso coincide con la funzione  $F = \sum_{\nu \geq 0} \epsilon_\nu (1 + \nu^2 z^2)$ , meromorfa su  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  e con poli semplici nei punti  $\pm i/\nu$  per  $\nu \in \mathbb{Z}_+$ . Se  $f$  fosse analitica in 0, la sua serie di potenze con centro in 0 convergerebbe in un intorno  $V$  di 0 in  $\mathbb{C}$  ad una funzione olomorfa  $G$ . Poiché  $F = G$  su  $U \cap V$  per l'unicità della continuazione analitica, abbiamo ottenuto una contraddizione perché  $F$  ha una singolarità essenziale in 0.

**PROPOSIZIONE I.7.6.** *Se  $F$  è un chiuso di una varietà differenziabile  $M$ , paracompatta e a base numerabile, di classe  $\mathcal{C}^k$  con  $0 \leq k \leq \infty$ , allora esiste un'applicazione  $f \in \mathcal{C}^k(M)$  tale che  $0 \leq f(p) \leq 1$  per ogni  $p \in M$  ed  $f^{-1}(0) = F$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che  $M$ , essendo normale e a base numerabile è metrizzabile. Sia  $\text{dist} : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  una distanza su  $M$  e consideriamo gli intorni  $U_\nu = \{p \in M \mid \text{dist}(p, F) < 2^{-\nu}\}$ , al variare di  $\nu$  in  $\mathbb{N}$ , di  $F$  in  $M$ . Per la Proposizione I.7.3 esiste una funzione  $f_\nu \in \mathcal{C}^k(M)$  tale che

$$0 \leq f_\nu(p) \leq 1 \quad \forall p \in M, \quad K \subset f^{-1}(0), \quad \bigcup U_\nu \subset f^{-1}(1).$$

Per il Lemma I.7.4 Possiamo allora scegliere una successione  $\epsilon_\nu$  di numeri reali positivi tale che

$$f(p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon_\nu f_\nu(p)$$

converga ad una funzione di classe  $\mathcal{C}^k(M)$ . La  $f \in \mathcal{C}^k(M)$  così ottenuta ha allora le proprietà richieste.  $\square$

In modo analogo si può dimostrare la:

**PROPOSIZIONE I.7.7.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile, paracompatta e a base numerabile, di classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $0 \leq k \leq \infty$ . Se  $F_0$  ed  $F_1$  sono due chiusi disgiunti di  $M$ , allora esiste una  $f \in \mathcal{C}^k(M)$  tale che  $0 \leq f(p) \leq 1$  per ogni  $p \in M$  ed  $f^{-1}(0) = F_0$ ,  $f^{-1}(1) = F_1$ .*  $\square$

**OSSERVAZIONE I.7.8.** Il teorema di partizione dell'unità non vale nella classe  $\mathcal{C}^\omega$ : infatti una funzione analitica-reale che si annulli su un aperto di una varietà  $M$  si annulla sull'unione delle componenti connesse di  $M$  che lo intersecano. Per questo motivo, nonostante per il teorema di Whitney ogni varietà  $M$ , differenziabile di classe  $\mathcal{C}^1$  e paracompatta, ammetta un atlante compatibile di classe  $\mathcal{C}^\omega$ , è conveniente considerare strutture di classe  $\mathcal{C}^k$  con  $1 \leq k \leq \infty$ .

**DEFINIZIONE I.7.9.** Siano  $M$  ed  $N$  varietà differenziabili ed  $F$  un sottoinsieme chiuso di  $M$ . Sia  $0 \leq k \leq \omega$ . Un'applicazione continua  $f : F \rightarrow N$  si dice *differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  su  $F$*  se per ogni punto  $p \in F$  esiste un intorno aperto  $U_p$  di  $p$  in  $M$  ed una funzione  $\tilde{f} \in \mathcal{C}^k(U_p, N)$  tale che  $\tilde{f}|_{U_p \cap F} = f|_{U_p \cap F}$ .

Indichiamo con  $\mathcal{C}^k(F, N)$  l'insieme delle funzioni differenziabili di classe  $\mathcal{C}^k$  di  $F$  in  $N$ . Se  $N = \mathbb{R}$ , scriveremo  $\mathcal{C}^k(F)$  invece di  $\mathcal{C}^k(F, \mathbb{R})$ .

**PROPOSIZIONE I.7.10.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile paracompatta ed  $F$  un chiuso di  $M$ . Allora, per ogni  $f \in \mathcal{C}^k(F)$ , con  $0 \leq k \leq \infty$ , esiste una funzione  $\tilde{f} \in \mathcal{C}^k(M)$  tale che  $\tilde{f}|_F = f$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo un ricoprimento  $\{U_i\}_{i \in I}$  di  $F$  con aperti tali che per ogni  $i \in I$  esista una  $f_i \in \mathcal{C}^k(U_i)$  tale che  $f_i(p) = f(p)$  su  $U_i \cap F$ . Consideriamo una partizione dell'unità  $\{\phi_i\} \cup \{\psi\}$  subordinata al ricoprimento aperto  $\{U_i\} \cup \{\complement F\}$  di  $M$ . Per ogni  $i$  poniamo

$$\tilde{f}_i(p) = \begin{cases} \phi_i(p)f_i(p) & \text{se } p \in U_i, \\ 0 & \text{se } p \in \complement U_i. \end{cases}$$

Allora  $\tilde{f}_i \in \mathcal{C}^k(U_i)$  ed  $\tilde{f} = \sum_{i \in I} \tilde{f}_i \in \mathcal{C}^k(M)$  è il prolungamento di  $f$  cercato.  $\square$

**TEOREMA I.7.11** (di approssimazione). *Sia  $M$  una varietà differenziabile paracompatta,  $F$  un suo sottoinsieme chiuso ed  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  un'applicazione continua, la cui restrizione ad  $F$  sia di classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $0 \leq k \leq \infty$ . Allora per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un'applicazione  $g \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^m)$  tale che*

$$(1.7.2) \quad g(p) = f(p), \quad \forall p \in F,$$

$$(1.7.3) \quad |g(p) - f(p)| < \epsilon, \quad \forall p \in M.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per la proposizione I.7.10, applicata ad ogni componente di  $f$ , esiste una  $\tilde{f} \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^m)$  con  $\tilde{f}|_F = f|_F$ . Costruiamo un ricoprimento aperto di  $M$  nel modo seguente. Poniamo

$$U_0 = \{p \in M \mid |\tilde{f}(p) - f(p)| < \epsilon\}.$$

$U_0$  è un intorno aperto di  $F$  in  $M$ . Poi, per ogni punto  $p \in \mathbb{C}F$ , sia

$$U_p = \{q \in M \mid |f(p) - f(q)| < \epsilon\}.$$

Allora  $\mathcal{U} = \{U_0\} \cup \{U_p \mid p \in \mathbb{C}F\}$  è un ricoprimento di  $M$ . Sia  $\{\phi_0\} \cup \{\phi_p\}$  una partizione dell'unità di classe  $\mathcal{C}^k$  subordinata ad  $\mathcal{U}$ . Poniamo

$$\psi_0 = \begin{cases} \phi_0 \cdot \tilde{f} & \text{su } U_0, \\ 0 & \text{su } \mathbb{C}U_0, \end{cases} \quad \psi_p = \begin{cases} \phi_p \cdot f(p) & \text{su } U_p, \\ 0 & \text{su } \mathbb{C}U_p. \end{cases}$$

Allora  $\psi_0, \psi_p \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^m)$  e

$$g(p) = \psi_0(p) + \sum_{q \in \mathbb{C}F} \psi_q(p)$$

è un'applicazione in  $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^m)$  che soddisfa le (1.7.2), (1.7.3).  $\square$

**COROLLARIO I.7.12.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile connessa di classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $1 \leq k \leq \infty$ . Allora ogni coppia di punti di  $M$  può essere congiunta da una curva di classe  $\mathcal{C}^k$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo un qualsiasi punto  $p_0$  e sia  $N$  il sottoinsieme dei punti di  $M$  che possono essere congiunti a  $p_0$  da una curva di classe  $\mathcal{C}^k$ . Chiaramente  $p_0 \in N$  e quindi  $N$  è non vuoto. Per dimostrare che  $N = M$ , dobbiamo dimostrare che è aperto e chiuso. A questo scopo, basterà dimostrare che, dato un qualsiasi punto  $p_1 \in M$ , esiste un intorno  $U$  di  $p_1$  in  $M$  tale che, per ogni curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ , di classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $\gamma(1) = p_1$  ed ogni punto  $p_2$  di  $U$ , possiamo trovare una  $\tilde{\gamma} : [0, 2] \rightarrow U$  con  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$  per  $0 \leq t \leq 1$  e  $\tilde{\gamma}(2) = p_2$ .

Infatti, da questo segue che, se  $p_1 \in N$ , tutto l'intorno  $U$  è contenuto in  $N$  e dunque  $N$  è aperto. Se  $p_1 \in \bar{N}$ , l'intorno  $U$  di  $p_1$  contiene qualche punto di  $N$  e quindi  $p_1 \in N$  e ciò mostra che  $N$  è chiuso.

Scegliamo una carta locale  $(U, x)$ , con centro in  $p_1$  ed  $x(U) = \mathbb{R}^m$ . Sia  $\gamma \in \mathcal{C}^k([0, 1], U)$ , con  $\gamma(1) = p_1$ . Utilizzando la Proposizione I.7.10, possiamo supporre che  $x \circ \gamma$  sia la restrizione a  $[0, 1]$  di una funzione  $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ . Se  $p_2$  è un altro punto di  $U$ , sia  $x_2 = x(p_2)$  e  $g(t) = x_2(t - 1)$ . Sia poi  $\{\phi_1, \phi_2\}$  una partizione dell'unità su  $\mathbb{R}$ , subordinata al ricoprimento  $\{V_1 = \{t < 2\}, V_2 = \{t > 1\}\}$ . Allora



$\eta(t) = \phi_1(t)f(t) + \phi_2(t)g(t)$  definisce una funzione  $\eta \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ , con  $\eta(t) = f(t)$  se  $t \leq 1$  ed  $\eta(2) = x_2$ . Definiamo  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{C}^k([0, 2], U)$  ponendo

$$\tilde{\gamma}(t) = x^{-1}(\eta(t)), \quad \text{per } 0 \leq t \leq 2.$$

È  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$  per  $0 \leq t \leq 1$  e  $\tilde{\gamma}(2) = p_2$ . La dimostrazione è completa.  $\square$

**TEOREMA I.7.13 (interpolazione).** *Sia  $M$  una varietà differenziabile paracompatta di classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $1 \leq k \leq \infty$ , ed  $f_1, f_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni reali, con  $f_1$  semicontinua superiormente,  $f_2$  semicontinua inferiormente ed  $f_1(p) < f_2(p)$  per ogni  $p \in M$ . Allora esiste una funzione  $f \in \mathcal{C}^k(M)$  tale che  $f_1(p) < f(p) < f_2(p)$  per ogni  $p \in M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per ogni punto  $q \in M$ , l'insieme

$$A_q = \{p \in M \mid f_1(p) < f_2(q), f_2(p) > f_1(q)\}$$

è un intorno aperto di  $q$  in  $M$ . Fissiamo un intorno aperto relativamente compatto  $U_q$  di  $q$  in  $M$  con  $U_q \Subset A_q$ . Abbiamo

$$(1.7.4) \quad \mu_q = \sup_{p \in U_q} f_1(p) < \inf_{p \in U_q} f_2(p) = M_q.$$

Consideriamo il ricoprimento aperto  $\mathcal{U} = \{U_q \mid q \in M\}$  di  $M$  e sia  $\{\phi_q\}$  una partizione dell'unità di classe  $\mathcal{C}^k$  subordinata ad  $\mathcal{U}$ . Poniamo

$$(1.7.5) \quad f(p) = \sum_{q \in M} \frac{\mu_q + M_q}{2} \phi_q(p).$$

La  $f$  è una funzione di classe  $\mathcal{C}^k(M)$  che soddisfa le condizioni richieste. Infatti, per la (1.7.4), abbiamo

$$f_1(p)\phi_q(p) < \frac{\mu_q + M_q}{2}\phi_q(p) < f_2(p)\phi_q(p), \quad \text{se } p, q \in M \text{ e } \phi_q(p) > 0.$$

Da questo, sommando su  $q \in M$ , segue che la  $f$  definita da (1.7.5) soddisfa  $f_1(p) < f(p) < f_2(p)$  per ogni  $p \in M$ .  $\square$

### I.8. Immersioni, sommersioni, diffeomorfismi

Siano  $M$  ed  $N$  due varietà differenziabili, di dimensione  $m$  ed  $n$  rispettivamente, entrambe di classe  $\mathcal{C}^k$  con  $k \geq 1$ , ed  $f : M \rightarrow N$  un'applicazione differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$ . Fissiamo un punto  $p_0 \in M$  e sia  $q_0 = f(p_0)$  il punto corrispondente di  $N$ . Fissiamo un intorno coordinato  $(V, y)$  di  $N$  con centro in  $q_0$  e sia  $(U, x)$  un intorno coordinato in  $M$  con centro in  $p_0$  tale che  $f(U) \subset V$ . La funzione

$$(1.8.1) \quad \mathbb{R}^m \supset x(U) \ni x \rightarrow y(f(x^{-1})) \in y(V)$$

è di classe  $\mathcal{C}^k$  ed in particolare, essendo  $k \geq 1$ , possiamo considerare il suo Jacobiano in 0

$$(1.8.2) \quad \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1(f(x^{-1}))}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1(f(x^{-1}))}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^m(f(x^{-1}))}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^m(f(x^{-1}))}{\partial x^m} \end{pmatrix}_{x=0}.$$

La scelta di una diversa coppia di carte coordinate in  $p_0$  e  $q_0$  definisce uno Jacobiano che differisce da quello in (1.8.2) per la moltiplicazione a destra per una matrice di  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$  ed a sinistra per una matrice di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ . In particolare

LEMMA I.8.1. *Il rango della matrice Jacobiana (1.8.2) non dipende dalla scelta delle carte coordinate  $(U, x)$  in  $p_0$  e  $(V, y)$  in  $q_0$ .*

Possiamo dare quindi la seguente

DEFINIZIONE I.8.2. L'applicazione differenziabile  $f : M \rightarrow N$  di classe  $\mathcal{C}^k$  in  $p_0 \in M$  è in  $p_0$

- un'immersione differenziabile se la matrice Jacobiana (1.8.2) definisce una trasformazione lineare iniettiva, se cioè ha rango  $m$  uguale alla dimensione di  $M$ ;
- una sommersione differenziabile se la matrice Jacobiana (1.8.2) definisce un'applicazione lineare surgettiva, se cioè ha rango  $m$  uguale alla dimensione di  $N$ ;
- un diffeomorfismo locale se la matrice Jacobiana (1.8.2) definisce un isomorfismo lineare, se cioè  $n = m$  ed il determinante della matrice Jacobiana è diverso da zero.

Per il teorema delle funzioni implicite vale la

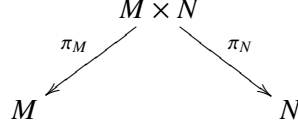
PROPOSIZIONE I.8.3. *Sia  $f : M \rightarrow N$  un'applicazione differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $k \geq 1$ , tra due varietà differenziabili  $M$  ed  $N$  di classe  $\mathcal{C}^k$  e di dimensioni  $m, n$ , rispettivamente. Sia  $p_0 \in M$  e  $q_0 = f(p_0)$ .*

- (1) *Se  $f$  è un'immersione differenziabile in  $p_0$ , allora  $m \leq n$  ed esiste un intorno aperto  $U$  di  $p_0$  in  $M$  tale che la  $f$  sia un'immersione differenziabile in ogni punto di  $U$  e che la restrizione  $f|_U : U \rightarrow N$  sia iniettiva. Esiste poi un intorno  $V$  di  $q_0$  in  $N$  ed un'applicazione  $g \in \mathcal{C}^k(V, U)$  tale che  $g \circ f(p) = p$  per ogni  $p \in U$ .*
- (2) *Se  $f$  è una sommersione differenziabile in  $p_0$ , allora  $m \geq n$ , e possiamo trovare intorni aperti  $U$  di  $p_0$  in  $M$  e  $V$  di  $q_0$  in  $N$  tali che  $f(U) = V$ , che la  $f$  sia una sommersione differenziabile in tutti i punti di  $U$ , che la sua restrizione ad  $U$  definisca un'applicazione aperta di  $U$  su  $V$  e che, inoltre, esista una  $g \in \mathcal{C}^k(V, U)$  tale che  $f \circ g(q) = q$  per ogni  $q \in V$ .*
- (3) *Se  $f$  è un diffeomorfismo locale in  $p_0$ , allora  $m = n$  ed  $f$  definisce un omeomorfismo di un intorno aperto  $U$  di  $p_0$  su un intorno aperto  $V$  di  $q_0$ , con omeomorfismo inverso  $(f|_U)^{-1} : V \rightarrow U$  di classe  $\mathcal{C}^k$ .*

## I.9. Prodotto cartesiano di varietà differenziabili

Se  $M$  ed  $N$  sono due varietà differenziabili di classe  $\mathcal{C}^k$  ( $0 \leq k \leq \omega$ ) di dimensione  $m$  ed  $n$  rispettivamente, possiamo definire sul prodotto cartesiano  $M \times N$  una ed una sola struttura di varietà differenziabile di dimensione  $m + n$ , che renda le

proiezioni sui singoli fattori



sommersioni differenziabili di classe  $\mathcal{C}^k$ . Un atlante per questa struttura si ottiene da atlanti  $\mathcal{A}_M = \{(U_i, x_i) \mid i \in I\}$  ed  $\mathcal{A}_N = \{(V_j, y_j) \mid j \in J\}$  di classe  $\mathcal{C}^k$  di  $M$  ed  $N$  rispettivamente, ponendo  $\mathcal{A}_{M \times N} = \{(U_i \times V_j, x_i \oplus y_j) \mid (i, j) \in I \times J\}$ , ove

$$x_i \oplus y_j : U_i \times V_j \ni (p, q) \longrightarrow (x_i(p), y_j(q)) \in x_i(U_i) \times y_j(V_j) \subset \mathbb{R}^{m+n}.$$

### I.10. Sottovarietà differenziabili

Supportremo in questo paragrafo che  $M$  sia un'assegnata varietà differenziabile, paracompatta, di dimensione  $m$  e di classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $1 \leq k \leq \omega$ .

DEFINIZIONE I.10.1. Diciamo che  $N$  è una sottovarietà di dimensione  $n$  e di classe  $\mathcal{C}^\ell$  di  $M$  se:

- (i)  $N$  è una varietà differenziabile di dimensione  $n$  e di classe  $\mathcal{C}^\ell$ ;
- (ii)  $N \subset M$  come insieme;
- (iii)  $\ell \leq k$  e l'inclusione  $\iota : N \hookrightarrow M$  è un'immersione differenziabile di classe  $\mathcal{C}^\ell$ .

LEMMA I.10.2. La topologia di una sottovarietà differenziabile è più fine della topologia di sottospazio topologico.

DIMOSTRAZIONE. Infatti la topologia di sottospazio su  $N$  è la meno fine tra quelle che rendono l'inclusione  $\iota : N \rightarrow M$  continua; poiché ogni applicazione differenziabile di classe  $\mathcal{C}^\ell$ , con  $k \geq 0$ , è in particolare continua, ne segue la tesi.  $\square$

ESEMPIO I.10.3. Consideriamo in  $\mathbb{R}^2$  il sottoinsieme  $N$  definito da

$$N = \left\{ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} (\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R} \right\} \cup S^1.$$

Esso è una sottovarietà differenziabile di dimensione 1 di  $\mathbb{R}^2$ . La sua topologia di sottovarietà differenziabile è *strettamente più fine* della topologia di sottospazio: infatti  $\left\{ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} (\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$  è chiuso nella topologia di sottovarietà differenziabile (essendo una componente connessa), mentre è denso e quindi non chiuso in  $N$  per la topologia di sottospazio.

ESEMPIO I.10.4. Consideriamo il toro  $\mathbf{T}^2 = S^1 \times S^1$ . Esso è una varietà differenziabile di classe  $\mathcal{C}^\omega$ , con l'atlante definito dalle applicazioni inverse delle immersioni topologiche:

$$(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)(s, t) \longrightarrow (\exp[i(s + \alpha)], \exp[i(t + \beta)]) \in S^1 \times S^1$$

al variare di  $\alpha, \beta$  in  $\mathbb{R}$ . Sia  $r$  un numero reale e siano

$$N_r = \left\{ (e^{it}, e^{irt}) \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad f_r : \mathbb{R} \ni t \rightarrow (e^{it}, e^{irt}) \in N_r.$$

Vi è un'unica struttura di varietà differenziabile su  $N_f$  per cui  $f_r$  sia un diffeomorfismo locale di classe  $\mathcal{C}^\omega$ . Con questa struttura differenziabile,  $N_f$  è una sottovarietà differenziabile di classe  $\mathcal{C}^\omega$  del toro  $T^2$ . Se  $r \in \mathbb{Q}$ , la  $N_r$  è compatta e la sua topologia di sottovarietà coincide con quella di sottospazio. Se  $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  è irrazionale, allora  $f_r$  è bigettiva,  $N_r$  è un sottospazio denso di  $T^2$  e la sua topologia di sottovarietà è strettamente più fine di quella di sottospazio topologico: in particolare come sottospazio topologico  $N_r$  non è localmente connesso.

Nel seguito, utilizzando il teorema di Whitney (vedi l'Osservazione I.5.5), supporremo per semplicità che  $M$  sia di classe  $\mathcal{C}^\omega$ .

**PROPOSIZIONE I.10.5.** *Sia  $N$  una sottovarietà differenziabile di dimensione  $n$  e classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $k \geq 1$ , di  $M$ . Per ogni punto  $p \in N$  esiste un intorno aperto  $V$  di  $p$  in  $N$  ed un aperto coordinato  $(U, z)$  di classe  $\mathcal{C}^k$  di  $p$  in  $M$  tali che:*

- (i)  $V = \{q \in U \mid z^i(q) = 0, \text{ per } i = n+1, \dots, m\}$ ;
- (ii)  $(V, (z^i)_{1 \leq i \leq n})$  sia una carta locale di classe  $\mathcal{C}^k$  di  $N$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo carte coordinate  $(V, y)$  in  $N$  ed  $(U, x)$  in  $M$ , con centro in  $p$ . Per ipotesi, l'inclusione di  $N$  in  $M$  definisce un'applicazione differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$

$$y(V) \ni y \rightarrow x = f(y) \in x(U), \quad \text{con } f(0) = 0,$$

la cui matrice Jacobiana  $\partial x / \partial y$  ha rango  $n$  in  $0$ . A meno di riordinare gli indici, possiamo supporre che

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}_{y=0} \neq 0.$$

Per il teorema dell'applicazione inversa, a meno di restringere l'intorno  $V$  di  $p$ ,  $(V, x')$ , con  $x' = (x_1, \dots, x_n)|_V$ , è ancora una carta locale su  $N$  con centro in  $p$ . Possiamo supporre che  $V \subset U$ . Le restrizioni di  $x_{n+1}, \dots, x_m$  a  $V$  sono funzioni di classe  $\mathcal{C}^k$  su  $V$  e si possono quindi esprimere come funzioni delle coordinate locali:

$$x_j = f_j(x_1, \dots, x_n), \quad n < j \leq m \text{ su } V.$$

Poniamo

$$\begin{cases} z_i = x_i, & 1 \leq i \leq n, \\ z_i = x_i - f_i(x_1, \dots, x_n), & n < i \leq m. \end{cases}$$

Allora

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\frac{\partial f_i}{\partial x_j} & I_{m-n} \end{pmatrix}$$

è invertibile e quindi le  $z_i$  definiscono una carta locale in un intorno  $U' \subset U$  di  $p$  in  $M$ , che verifica le (i) ed (ii).  $\square$

**COROLLARIO I.10.6.** *Sia  $N$  un sottoinsieme di  $M$  e  $k, n$  interi non negativi. Esiste al più, su  $N$ , una struttura di varietà differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  e di dimensione  $n$  per cui  $N$  sia una sottovarietà di classe  $\mathcal{C}^k$  di  $M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti, se esiste, la struttura differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  di  $N$  è definita da un atlante le cui carte coordinate sono della forma  $(U \cap N, (x^i)_{1 \leq i \leq n})$  al variare di  $(U, (x^i)_{1 \leq i \leq m})$  tra le carte locali di classe  $\mathcal{C}^k$  di  $M$  per cui  $x^{n+1}, \dots, x^m$  sono nulle su  $U \cap N$ .  $\square$

**DEFINIZIONE I.10.7.** Una sottovarietà differenziabile  $N$  di  $M$  si dice<sup>11</sup> *propria* se è un chiuso di  $M$ , *localmente chiusa* se è un sottospazio localmente chiuso di  $M$ .

Chiaramente

sottovarietà propria  $\implies$  sottovarietà localmente chiusa  $\implies$  sottovarietà.

Usando il teorema delle funzioni implicite, si dimostra la

**PROPOSIZIONE I.10.8.** Sia  $1 \leq k \leq \omega$ .

Un sottospazio topologico  $N$  di  $M$  è una sottovarietà propria di classe  $\mathcal{C}^k$  di  $M$  e di dimensione  $n$  se è verificata una delle due condizioni equivalenti:

- (a) Per ogni  $p \in M$  esiste una carta locale  $(U, x)$  di classe  $\mathcal{C}^k$  in  $M$ , con centro in  $p$ , tale che  $M \cap U$  sia connesso ed  $(U \cap M, x')$ , con  $x' = (x^1, \dots, x^m)$ , sia una carta locale in  $N$ ;
- (b) Per ogni  $p \in M$  esiste una carta locale  $(U, x)$  di classe  $\mathcal{C}^k$  in  $M$ , con centro in  $p$ , tale che  $M \cap U = \{p \in U \mid x^{n+1} = 0, \dots, x^m = 0\}$ .

Un sottospazio topologico  $N$  di  $M$  è una sottovarietà localmente chiusa di classe  $\mathcal{C}^k$  di  $M$  e di dimensione  $n$  se è verificata una delle due condizioni equivalenti:

- (a') Per ogni  $p \in N$  esiste una carta locale  $(U, x)$  di classe  $\mathcal{C}^k$  in  $M$ , con centro in  $p$ , tale che  $M \cap U$  sia connesso ed  $(U \cap M, x')$ , con  $x' = (x^1, \dots, x^m)$ , sia una carta locale in  $N$ ;
- (b') Per ogni  $p \in N$  esiste una carta locale  $(U, x)$  di classe  $\mathcal{C}^k$  in  $M$ , con centro in  $p$ , tale che  $M \cap U = \{p \in U \mid x^{n+1} = 0, \dots, x^m = 0\}$ .

Abbiamo poi:

**PROPOSIZIONE I.10.9.** Siano  $M, N$  due varietà differenziabili di classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $1 \leq k \leq \omega$ , ed  $f \in \mathcal{C}^k(M, N)$ . Se  $q$  è un valore regolare di  $f$ , se cioè  $q \in f(M)$  ed  $f$  è una sommersione in tutti i punti di  $f^{-1}(q)$ , allora  $f^{-1}(q)$  è una sottovarietà propria di  $M$ .

**PROPOSIZIONE I.10.10.** Siano  $M, N$  due varietà differenziabili di classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $1 \leq k \leq \omega$ , ed  $f \in \mathcal{C}^k(M, N)$ . Siano  $r$  un intero con  $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$ ,  $q \in f(M)$  e supponiamo che, per ogni  $p \in f^{-1}(q)$  ed ogni coppia di carte locali  $(U, x)$  con centro in  $p$  e  $(V, y)$  con centro in  $q$ , per cui  $f(U) \subset V$ , lo Jacobiano in 0 di  $y \circ f \circ x^{-1}$  abbia rango  $r$ . Allora  $f^{-1}(q)$  è una sottovarietà propria di  $M$ , di classe  $\mathcal{C}^k$  e di dimensione  $m - r$ .

<sup>11</sup>In inglese neat.

### I.11. Diffeomorfismi

DEFINIZIONE I.11.1. Un *diffeomorfismo* tra due varietà differenziabili  $M, N$  è un'applicazione bigettiva  $f : M \rightarrow N$  tale che sia  $f$  che la sua inversa  $f^{-1}$  siano differenziabili.

Osserviamo che l'insieme  $\mathbf{Diff}(M)$  dei diffeomorfismi di una varietà differenziabile  $M$  in sé è un gruppo rispetto al prodotto di composizione.

Premettiamo il seguente:

LEMMA I.11.2. Siano  $p, q \in \mathbb{R}^m$ . Fissato un numero reale  $R > \max\{|p|, |q|\}$ , possiamo trovare un diffeomorfismo  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  tale che:

$$(1.11.1) \quad \begin{cases} f(x) = x & \text{per } |x| > R \\ f(p) = q. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $v = (v^1, \dots, v^m) = q - p \in \mathbb{R}^m$  e indichiamo con  $\vec{v}$  il corrispondente campo di vettori a coefficienti costanti:

$$(1.11.2) \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Esso definisce il gruppo a un parametro di diffeomorfismi di  $\mathbb{R}^m$  delle traslazioni parallele a  $v$ :  $\tau_v(t)(x) = x + tv$ .

Fissiamo due numeri reali  $r_1, r_2$  con  $\max\{|p|, |q|\} < r_1 < r_2 < R$  ed una funzione  $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ , con

$$\begin{cases} \chi(x) = 1 & \text{se } |x| \leq r_1, \\ 0 < \chi(x) < 1 & \text{se } r_1 < |x| < r_2, \\ \chi(x) = 0 & \text{se } |x| \geq r_2 \end{cases}$$

e consideriamo il campo di vettori:

$$(1.11.3) \quad X = \chi(x)\vec{v} = \chi(x) \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Per il Teorema ?? del Capitolo ??, esso definisce un gruppo a un parametro di diffeomorfismi:

$$(1.11.4) \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \ni (t, x) \rightarrow \phi_t(x) \in \mathbb{R}^m$$

con:

$$(1.11.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi_t(x)}{\partial t} = \chi(\phi_t(x))\vec{v} & \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \\ \phi_0(x) = x & \forall x \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Abbiamo  $\phi_t(x) = x$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  se  $|x| \geq r_2$  e  $\phi_1(p) = p + v = q$ .  $\square$

Dimostriamo ora:

TEOREMA I.11.3. Se  $M$  è una varietà differenziabile connessa, allora il gruppo  $\mathbf{Diff}(M)$  dei diffeomorfismi di  $M$  opera transitivamente su  $M$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dobbiamo dimostrare che, per ogni coppia di punti  $p, q \in M$ , esiste un diffeomorfismo  $\phi \in \mathbf{Diff}(M)$  che trasforma il punto  $p$  nel punto  $q$ .

Fissiamo  $p \in M$  ed indichiamo con  $N$  l'insieme dei punti  $q$  di  $M$  per cui esiste un diffeomorfismo di  $M$  che trasforma  $p$  in  $q$ .

$N$  è aperto. Sia  $q = \gamma(p) \in N$ , con  $\gamma \in \mathbf{Diff}(M)$  e sia  $(U, x)$  una carta coordinata con centro in  $q$  ed  $x(U) = \mathbb{R}^m$ . Se  $q' \in U$  ed  $R$  un numero reale con  $0 \leq |x(q')| < R$ , per il Lemma I.11.2 possiamo trovare un diffeomorfismo  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  tale che  $F(0) = x(q')$  ed  $F(x) = x$  per  $|x| > R$ . Definiamo  $\phi \in \mathbf{Diff}(M)$  ponendo:

$$\phi(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \notin U \\ x^{-1} \circ F(x(y)) & \text{se } y \in U. \end{cases}$$

Questa formula definisce un diffeomorfismo di  $M$  che trasforma  $q$  in  $q'$ . Allora  $\phi \circ \gamma \in \mathbf{Diff}(M)$  e trasforma  $p$  in  $q'$ . Quindi  $U \subset N$  e questo dimostra che  $N$  è aperto.

$N$  è chiuso. Sia  $q$  un punto della chiusura di  $N$ . Scegliamo una carta coordinata  $(U, x)$  con centro in  $q$  come nella prima parte della dimostrazione. Se  $q' \in U \cap N$ , costruiamo  $F$  e  $\phi$  come nella prima parte della dimostrazione. Poiché  $q' \in N$ , possiamo trovare  $\gamma' \in \mathbf{Diff}(M)$  con  $\gamma'(p) = q'$ . Allora  $\phi^{-1} \circ \gamma' \in \mathbf{Diff}(M)$  e  $\phi^{-1} \circ \gamma'(p) = q$ . Ciò dimostra che  $N$  è anche chiuso.

Poiché  $N$  è sia aperto che chiuso ed  $M$  è connesso, ed inoltre  $p \in N \neq \emptyset$ , ne segue che  $N = M$ . La dimostrazione è completa.  $\square$

## I.12. Esistenza e unicità di strutture differenziali

Sia  $M$  una varietà topologica ed indichiamo con  $M', M''$  due varietà differenziabili di classi  $\mathcal{C}^{k'}$  e  $\mathcal{C}^{k''}$  rispettivamente, corrispondenti a due distinte strutture differenziali su  $M$ , definite da atlanti  $\mathcal{A}'$  ed  $\mathcal{A}''$ . Diremo che le due strutture differenziali sono equivalenti di classe  $\mathcal{C}^k$  se  $k \leq \min\{k', k''\}$  ed esiste un diffeomorfismo  $f : M' \rightarrow M''$  di classe  $\mathcal{C}^k$ .

Ad esempio, le  $M'$  ed  $M''$  ottenute considerando sulla retta reale  $\mathbb{R}$  le strutture  $\mathcal{C}^\omega$  definite dagli atlanti  $\mathcal{A}' = \{(\mathbb{R}, x)\}$  ed  $\mathcal{A}'' = \{(\mathbb{R}, x^3)\}$  sono  $\mathcal{C}^\omega$ -equivalenti, perché  $f(x) = x^3$  è un diffeomorfismo di  $M'$  su  $M''$ .

Su ogni varietà  $M$  di classe  $\mathcal{C}^1$ , per un teorema di Whitney<sup>12</sup> si può definire una struttura di classe  $\mathcal{C}^\omega$  compatibile. Inoltre le strutture compatibili di classe  $\mathcal{C}^k$ , per ogni  $k \geq 1$ , sono tutte tra loro equivalenti.

È stato dimostrato<sup>13</sup> che esistono delle varietà topologiche che non ammettono una struttura differenziale di classe  $\mathcal{C}^1$ .

<sup>12</sup>Hassler Whitney *Differentiable Manifolds*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 37, No. 3 (Jul., 1936), pp. 645-680.

<sup>13</sup>Michel A. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure* Comment. Math. Helv. 34 (1960), pp. 257-270.

L'esempio di Kervaire è una varietà topologica di dimensione dieci. Le varietà topologiche di dimensione due e tre ammettono una ed una sola struttura differenziale. Questo fatto è stato dimostrato da Johann Radon<sup>14</sup> per dimensione 1 e 2 e da Edwin E. Moise<sup>15</sup> in dimensione 3.

Per dimensioni superiori, la struttura differenziale, quando esista, non è univocamente determinata e si pone quindi il problema di determinare le diverse strutture differenziali su una varietà. Di solito la classificazione è fatta per varietà orientabili e diffeomorfismi che preservano l'orientazione.

Per tutte le varietà compatte di dimensione maggiore di quattro vi è un numero finito di strutture differenziabili non equivalenti. Su  $\mathbb{R}^m$  c'è un'unica struttura differenziale se  $n \neq 4$ , mentre per  $n = 4$  ve ne sono infinite<sup>16</sup> (quelle diverse dalla struttura standard sono gli  $\mathbb{R}^4$  esotici).

Per avere un'idea del numero di differenti strutture su una varietà compatta, riportiamo in una tabella il numero  $\nu_n$  delle strutture differenziabili non equivalenti sulle sfere  $S^m$  con  $n \leq 18$ . Nella prima riga riportiamo il valore di  $n$  e nella seconda il corrispondente  $\nu_n$ .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	1	?	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16

Quando ci siano più di una struttura differenziale sulla sfera  $S^m$ , le sfere con le strutture non equivalenti a quella standard si dicono *sfere esotiche*. Ci sono 27 sfere esotiche di dimensione sette, mentre non si conoscono sfere esotiche di dimensione inferiore. È aperto il problema delle strutture differenziabili sulla sfera di dimensione quattro. Non si sa se vi siano sfere esotiche, e quindi nemmeno se esse siano in numero finito o infinito. Il fatto che non ci siano sfere esotiche in dimensione quattro è noto come la *congettura di Poincaré generalizzata*.

Utilizzando la teoria dell'ostruzione, Robion Kirby e Laurent Siebenmann<sup>17</sup> hanno dimostrato che il numero di strutture differenziali non equivalenti su una varietà compatta di dimensione maggiore di quattro è finito. John Milnor, Michel Kervaire e Morris Hirsch hanno dimostrato<sup>18</sup> che tale numero è lo stesso per tutte e coincide quindi col numero delle strutture differenziali sulle sfere.

Quindi, se  $M$  è una varietà topologica di dimensione diversa da quattro, essa possiede al più un numero finito di strutture differenziali non equivalenti.

<sup>14</sup>Johann Karl August Radon (1887–1956), matematico austriaco.

<sup>15</sup>Edwin Evariste Moise (1918–1998), matematico americano. I suoi risultati sulle varietà di dimensione tre, ottenuti nell'articolo: *Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung*. Annals of Mathematics. Second Series, Vol. 56 pg 96-114 (1952), sono descritti nel libro: *Geometric topology in dimensions 2 and 3*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 47. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. x+262 pp.

<sup>16</sup>cf. M.Kreck *Exotische Strukturen auf 4-Mannigfaltigkeiten*. [Exotic structures on 4-manifolds] Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **88** (1986), no. 3, 124–145. I primi esempi sono di Robion Kirby e Michael Freedman.

<sup>17</sup>R.C. Kirby e L.C. Siebenmann, *Foundational Essays on Topological Manifolds. Smoothings, and Triangulations*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press (1977).

<sup>18</sup>vedi: T.Asselmeyer-Maluga e C.H. Brans *Exotic Smoothness in Physics*. World Scientific Singapore, 2007.



## CAPITOLO II

### Campi di vettori e spazio tangente

#### II.1. Campi di vettori e curve integrali sulle varietà

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$ , di classe  $\mathcal{C}^\infty$ , numerabile all'infinito. Denotiamo con  $\mathcal{E}(M)$  l'algebra reale ed anello commutativo unitario delle funzioni  $\mathcal{C}^\infty$ , a valori reali, definite su  $M$ .

DEFINIZIONE II.1.1. Un *campo di vettori* su  $M$  è una *derivazione* dell'algebra  $\mathcal{E}(M)$ , cioè un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare

$$X : \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M)$$

che soddisfi l'identità di Leibnitz:

$$(2.1.1) \quad X(fg) = gX(f) + fX(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{E}(M).$$

L'insieme  $\mathfrak{X}(M)$  dei campi di vettori su  $M$  è un  $\mathcal{E}(M)$ -modulo unitario a sinistra, con il prodotto definito da

$$(2.1.2) \quad (fX)(g) = f(X(g)), \quad \text{per } f, g \in \mathcal{E}(M), X \in \mathfrak{X}(M),$$

ed un'algebra di Lie reale con il prodotto di commutazione

$$(2.1.3) \quad [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{X}(M), f \in \mathcal{E}(M).$$

LEMMA II.1.2. *I campi di vettori*  $X \in \mathfrak{X}(M)$  *si annullano sulle funzioni costanti.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con  $c$ , per  $c \in \mathbb{R}$ , la funzione costante che vale  $c$  su  $M$ . Abbiamo:

$$X(c) = X(c \cdot 1) = c \cdot X(1) + 1 \cdot X(c) = 2 \cdot X(c)$$

e quindi  $X(c) = 0$ . □

LEMMA II.1.3. *Sia*  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . *Se*  $f \in \mathcal{E}(M)$  *ed*  $f(p) = 0$  *per tutti i punti*  $p$  *di un aperto*  $A$  *di*  $M$ , *allora*  $X(f)(p) = 0$  *per ogni*  $p \in A$ . *Abbiamo quindi:*

$$(2.1.4) \quad \text{supp}(X(f)) \subset \text{supp}(f) \quad \forall f \in \mathcal{E}(M), \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Fissato un punto  $p \in A$ , siano  $U$  e  $V$  due aperti di  $M$  con  $p \in U \Subset V \Subset A$ , e sia  $\phi$  una funzione di  $\mathcal{E}(M)$  uguale a 0 in  $\bar{U}$  ed uguale ad 1 su  $M \setminus V$ . Allora  $f = \phi f$  e quindi:

$$X(f)(p) = X(\phi f)(p) = \phi(p)X(f)(p) + f(p)X(\phi)(p) = 0.$$

□

Da questo lemma si ricava immediatamente:

LEMMA II.1.4. *Sia  $X$  un campo di vettori su  $M$ ; se  $f, g$  sono due funzioni di  $\mathcal{E}(M)$  che assumono gli stessi valori su tutti i punti di un aperto  $A$  di  $M$ , allora :*

$$X(f)(p) = X(g)(p) \quad \forall p \in A.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti  $f - g$  si annulla su  $A$  e quindi:

$$X(f)(p) - X(g)(p) = X(f - g)(p) = 0 \quad \forall p \in A.$$

□

COROLLARIO II.1.5. *Se  $A$  è un aperto di  $M$ , per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$  vi è uno ed un solo campo di vettori  $X|_A \in \mathfrak{X}(A)$  tale che  $X|_A f|_A = (Xf)|_A$  per ogni  $f \in \mathcal{E}(M)$ .*

□

Ad ogni carta locale  $(U, x)$  in  $M$  possiamo associare campi di vettori  $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m$  in  $\mathfrak{X}(U)$ , definiti da :

$$(2.1.5) \quad \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f = \frac{\partial[f \circ x^{-1}]}{\partial x^i} \circ x, \quad \forall f \in \mathcal{E}(U).$$

In una carta locale, un campo di vettori si rappresenta come un operatore differenziale alle derivate parziali, omogeneo del prim'ordine. Vale infatti il

LEMMA II.1.6. *Siano  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ed  $(U, x)$  una carta locale in  $M$ . Allora :*

$$(2.1.6) \quad X|_U = \sum_{i=1}^m X(x^i) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right).$$

DIMOSTRAZIONE. Data  $f \in \mathcal{E}(U)$ , sia  $f^* = f \circ x^{-1} \in \mathcal{E}(x(U))$ . Se  $x_0 \in x(U)$ , per ogni punto  $x$  di un intorno aperto  $V_{x_0} \subset x(U)$  di  $x_0$ , stellato rispetto ad  $x_0$  :

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f^*(x_0) + \int_0^1 \frac{df^*(x_0 + t(x - x_0))}{dt} dt \\ &= f^*(x_0) + \sum_{i=1}^m (x^i - x_0^i) f_i^*(x), \quad \text{con} \\ f_i^*(x) &= \int_0^1 \frac{\partial f^*}{\partial x^i}(x_0 + t(x - x_0)) dt \in \mathcal{E}(V_{x_0}). \end{aligned}$$

Con  $x_0 = x(p_0)$  abbiamo

$$f_i^*(x_0) = \frac{\partial f^*(x_0)}{\partial x^i} = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \right] (p_0)$$

e quindi :

$$\begin{aligned}
 [X|_U f](p_0) &= \left[ X \Big|_{v_{x_0}} f \right] (p_0) \\
 &= \left[ X \Big|_{v_{x_0}} f(p_0) \right] (p_0) + \left[ X \Big|_{v_{x_0}} \sum_{i=1}^m (x^i - x_0^i) f_i^* \circ x \right] (p_0) \\
 &= \sum_{i=1}^m f_i^*(x_0) \left[ X \Big|_{v_{x_0}} (x^i - x_0^i) \right] (p_0) \\
 &= \sum_{i=1}^m \left[ X(x^i) \right] (p_0) \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \right] (p_0). \quad \square
 \end{aligned}$$

DEFINIZIONE II.1.7. Dato un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ed un punto  $p \in M$ , indichiamo con  $X_p$  la derivazione :

$$(2.1.7) \quad \mathcal{E}(M) \ni f \rightarrow X_p f := (Xf)(p) \in \mathbb{R}$$

dell'algebra reale  $\mathcal{E}(M)$ . Diciamo anche che  $X_p$  è un *vettore tangente ad  $M$  nel punto  $p$* .

DEFINIZIONE II.1.8. Una curva  $\phi : (a, b) \rightarrow M$  di classe  $\mathcal{C}^1$  è una *curva integrale del campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$*  se :

$$(2.1.8) \quad \frac{d\phi \circ \phi(t)}{dt} = X_{\phi(t)} f, \quad \forall f \in \mathcal{E}(M), \quad \forall t \in (a, b).$$

Se  $(U, x)$  è una carta locale in  $M$  ed  $X = \sum_{i=1}^m a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$  in  $U$ , allora gli integrali  $\phi$  in  $U$  del campo di vettori  $X$  sono soluzioni  $x(t) = x(\phi(t))$  del sistema autonomo di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine :

$$(2.1.9) \quad \dot{x}^i = a^i(x) \quad \text{per } i = 1, \dots, m.$$

Dai teoremi di esistenza e unicità per sistemi di equazioni differenziali ordinarie abbiamo allora :

TEOREMA II.1.9. Siano  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo di vettori in  $M$  e  $p_0$  un punto di  $M$ . Esiste allora un'unica curva integrale  $\phi : (a, b) \rightarrow M$  di  $X$ , con  $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$ , con  $\phi(0) = p_0$ , tale che, se  $a > -\infty$ , allora  $\phi(t)$  non ha limite in  $M$  per  $t \rightarrow a$ ; se  $b < +\infty$ , allora  $\phi(t)$  non ha limite in  $M$  per  $t \rightarrow b$ .

## II.2. Vettori tangenti e fibrato tangente

DEFINIZIONE II.2.1. Fissato un punto  $p \in M$ , chiamiamo *vettore tangente ad  $M$  in  $p$*  un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare  $v : \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfi l'identità di Leibnitz :

$$(2.2.1) \quad v(fg) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{E}(M).$$

I vettori tangenti in un punto  $p \in M$  formano uno spazio vettoriale reale, che indicheremo con  $T_p M$ .

Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , o più in generale  $X \in \mathfrak{X}(U)$  per un intorno aperto  $U$  di  $p$  in  $M$ , allora  $X_p$  è un vettore tangente ad  $M$  in  $p$ .

TEOREMA II.2.2. Per ogni punto  $p \in M$  l'applicazione lineare

$$(2.2.2) \quad \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow X_p \in T_p M$$

è surgettiva.

Se  $M$  ha dimensione  $m$  ed  $(U, x)$  è una carta locale di  $M$  in  $p$ , allora i vettori tangenti

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p$$

formano una base di  $T_p M$ . □

DEFINIZIONE II.2.3. Indichiamo con  $TM$  l'unione disgiunta degli spazi vettoriali  $T_p M$ , al variare di  $p$  in  $M$  e con  $\pi : TM \rightarrow M$  l'applicazione che fa corrispondere al vettore tangente  $v \in T_p M$  il suo punto d'applicazione  $p$ . Possiamo definire su  $TM$  una struttura di varietà differenziabile nel modo seguente. Per ogni carta locale  $(U, x)$  di  $M$ , definiamo una carta locale  $(\pi^{-1}(U), x \times dx)$  di  $TM$  ponendo :

$$(2.2.3) \quad \begin{cases} \pi^{-1}(U) \ni v \longrightarrow (x(\pi(v)), v(x)) \in x(U) \times \mathbb{R}^m, \\ \text{con } v(x) = (v(x^1), \dots, v(x^m)) \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Se  $(V, y)$  è un'altra carta locale di  $M$ , per  $p \in U \cap V$  abbiamo :

$$(2.2.4) \quad v(y^i) = \sum_{h=1}^m v(x^h) \frac{\partial y^i}{\partial x^h},$$

cioè  $v(y) = (\partial y / \partial x) v(x)$ , ove  $\partial y / \partial x$  è la matrice Jacobiana del cambiamento di coordinate. Questa relazione si esprime anche dicendo che *le componenti di un vettore tangente sono covarianti rispetto ai cambiamenti di coordinate*.

Quindi, se  $y = \phi(x)$ , per  $x \in x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$  è la funzione di transizione delle due carte  $(U, x)$  e  $(V, y)$ , il cambiamento di coordinate dalla carta  $(\pi^{-1}U, x \times dx)$  alla carta  $(\pi^{-1}V, y \times dy)$  è  $(\phi \times d\phi)$ .

Abbiamo perciò :

PROPOSIZIONE II.2.4. Dato un atlante  $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i)\}$  di  $M$ , con funzioni di transizione<sup>1</sup>  $x_{i,j}$ , allora  $T\mathcal{A} = \{\pi^{-1}(U_i), x_i \times dx_i\}$  è un atlante di  $TM$ , con funzioni di transizione  $x_{i,j} \times dx_{i,j}$ .

Lo spazio tangente è un esempio di *fibrato differenziabile*.

DEFINIZIONE II.2.5. Un fibrato differenziabile è il dato  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$  di due varietà differenziabili  $B, E$  e di una sommersione differenziabile  $E \xrightarrow{\pi} B$ . La varietà  $E$  si dice lo *spazio totale*,  $B$  la *base* e  $\pi$  la *proiezione* del fibrato  $\xi$ .

Indichiamo con  $\Gamma_\pi(B, E)$ , od anche con  $\Gamma(B, E)$  quando non vi sia pericolo di confusione, lo spazio delle *sezioni differenziabili* di  $B$  in  $E$ , cioè l'insieme delle applicazioni  $s \in \mathcal{C}^\infty(B, E)$  che sono inverse destre della proiezione  $\pi$ :

$$(2.2.5) \quad \Gamma(B, E) = \{s \in \mathcal{C}^\infty(B, E) \mid \pi \circ s(p) = p, \forall p \in B\}.$$

<sup>1</sup>abbiamo cioè  $x_{i,j} = x_i \circ x_j^{-1}$  su  $x_j(U_j \cap U_i)$ .

### II.3. Differenziale di un'applicazione differenziabile

DEFINIZIONE II.3.1. Siano  $M$  ed  $N$  due variet  differenziabili ed  $f : M \rightarrow N$  un'applicazione di classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Essa induce un'applicazione (il *pullback di funzioni*):

$$(2.3.1) \quad f^* : \mathcal{E}(N) \ni \phi \rightarrow f^*(\phi) = \phi \circ f \in \mathcal{E}(M).$$

Il *differenziale* di  $f$  in un punto  $p \in M$ , che indicheremo con  $f_*(p)$  o con  $df(p)$ ,   l'applicazione

$$(2.3.2) \quad \begin{aligned} f_*(p) &= df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \quad \text{definita da:} \\ f_*(p)(v)(\phi) &= df_p(v)(\phi) = v(f^*(\phi)) = v(f \circ \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{E}(N). \end{aligned}$$

Se  $(U, x)$  e  $(V, y)$  sono carte locali in  $M$  ed  $N$  rispettivamente, con  $p \in U$  ed  $f(p) \in V$ , abbiamo :

$$(2.3.3) \quad f_*(p) \left( \sum_{i=1}^m v^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{f(p)}.$$

Possiamo definire in questo modo un'applicazione differenziabile :

$$(2.3.4) \quad f_* = df : TM \ni v \rightarrow df_{\pi(v)}(v) \in TN,$$

ove abbiamo indicato con  $\pi : TM \rightarrow M$  la proiezione canonica. La  $f_*$  (o  $df$ ) si dice il *differenziale* dell'applicazione  $f$ , o il suo *sollevamento* allo spazio tangente.

### II.4. Alcune osservazioni sul teorema d'immersione di Whitney

Diamo qui una dimostrazione del teorema d'immersione di Whitney utilizzando la nozione di variet  tangente di una variet  differenziabile.

Per semplicit  svolgeremo l'argomento per il caso di variet  compatte.

Sia  $M$  una variet  differenziabile compatta, di dimensione  $m$  e sia  $\mathcal{A} = \{(U_a, x_a) \mid 1 \leq a \leq k\}$  un suo atlante finito, con  $x_a(U_a) = \mathbb{R}^m$  e tale che, posto  $U'_a = \{p \in U_a \mid |x_a(p)| < 1\}$ , la famiglia  $\{U'_a \mid 1 \leq a \leq k\}$  sia ancora un ricoprimento di  $M$ .

Per ogni  $a$ , sia  $\psi_a \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$  una funzione uguale ad 1 su  $U'_a$  e nulla in un intorno di  $\complement U_a$ . Definiamo quindi le funzioni  $\tilde{x}_a : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  ponendo

$$\tilde{x}_a = \begin{cases} \psi_a x_a & \text{su } U_a, \\ 0 & \text{su } \complement U_a. \end{cases}$$

Allora

$$\psi : M \ni p \rightarrow ((\tilde{x}_a^i(p))_{\substack{1 \leq a \leq k \\ 1 \leq i \leq m}}, (\psi_a(p))_{1 \leq a \leq k}) \in \mathbb{R}^{k(m+1)}$$

  un diffeomorfismo di  $M$  su una sottovariet  compatta di  $\mathbb{R}^{km}$ . Abbiamo ottenuto cos  un'immersione di  $M$  in uno spazio Euclideo  $\mathbb{R}^\ell$  che   anche un diffeomorfismo con una sottovariet  differenziabile  $M_0$  di  $\mathbb{R}^\ell$ .

Identifichiamo lo spazio tangente  $TM_0$  ad un sottospazio del prodotto cartesiano  $M_0 \times \mathbb{R}^\ell$  ed indichiamo con  $\text{pr}_2 : TM_0 \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  l'applicazione che fa corrispondere alla coppia  $(p, v) \in TM_0 \subset M_0 \times \mathbb{R}^\ell$  il vettore  $v$ .

Sia  $v \in \mathbb{R}^\ell$  un vettore non nullo e  $\langle v \rangle$  il sottospazio vettoriale di dimensione 1 generato da  $v$ . Sia  $\pi_v : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^\ell / \langle v \rangle \simeq \mathbb{R}^{\ell-1}$  la proiezione nel quoziente. La condizione necessaria e sufficiente affinché  $\pi_v|_{M_0} : M_0 \rightarrow \mathbb{R}^{\ell-1}$  sia un'immersione differenziabile è che  $v \notin \text{pr}_2(TM_0)$ . Se  $2m < \ell$ , per il Lemma di Sard l'immagine di  $\text{pr}_2$  è di prima categoria e quindi la  $\pi_v \circ \psi$  è un'immersione differenziabile in uno spazio Euclideo di dimensione  $\ell - 1$ . Per ricorrenza, otteniamo un'immersione differenziabile di  $M$  in uno spazio Euclideo di dimensione  $\leq 2m$ .

Osserviamo poi che  $\pi_v : M_0 \rightarrow \mathbb{R}^\ell / \langle v \rangle$  è iniettiva se e soltanto se non vi sono due punti distinti  $p_1, p_2 \in M_0$  con  $p_2 - p_1 \in \langle v \rangle$ . Ciò equivale al fatto che  $v$  non appartenga all'immagine dell'applicazione

$$\{(p_1, p_2) \in M_0 \times M_0 \mid p_1 \neq p_2\} \times \mathbb{R} \ni (p_1, p_2, t) \rightarrow p_1 + t(p_2 - p_1) \in \mathbb{R}^\ell.$$

Questa è un'applicazione differenziabile di una varietà differenziabile di dimensione  $2m + 1$  in  $\mathbb{R}^\ell$ . Quindi, se  $2m + 1 < \ell$ , per il Lemma di Sard ha immagine di prima categoria e dunque potremo scegliere  $v \in \mathbb{R}^\ell \setminus \{0\}$  in modo che la  $\pi_v \circ \psi$  sia ancora un'immersione differenziabile iniettiva e quindi un diffeomorfismo di  $M$  con una sottovarietà di  $\mathbb{R}^{2\ell-1}$ . Per ricorrenza otteniamo un'immersione topologica iniettiva di  $M$  su una sottovarietà differenziabile di uno spazio Euclideo di dimensione  $\leq 2m + 1$ .

Nel caso in cui  $M$  non sia compatta, ma numerabile all'infinito, utilizziamo il ragionamento precedente per dimostrare che l'insieme  $\mathcal{F}_v$  delle applicazioni  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^{2m+1})$  la cui restrizione ad  $\text{int } K_v$  siano delle immersioni differenziabili iniettive è un aperto denso di seconda categoria. Allora  $\psi \in \bigcap_v \mathcal{F}_v$  dà un'immersione differenziabile iniettiva di  $M$  nello spazio Euclideo  $\mathbb{R}^{2m+1}$ . Per ottenere un'immersione propria, sarà sufficiente considerare una  $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$  con  $h(p) > v$  se  $p \in \bigcup K_v$  e la  $(\psi, h) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^{2m+2})$ . Potremo poi comporre quest'immersione con un'opportuna proiezione  $\pi_v$  rispetto a un vettore non nullo  $v \notin \langle e_{2m+2} \rangle$ , per ottenere un'immersione differenziabile di  $M$  in  $\mathbb{R}^{2m+1}$  che sia un diffeomorfismo con una sottovarietà propria di  $\mathbb{R}^{2m+1}$ .

## II.5. Gruppi a un parametro di diffeomorfismi

DEFINIZIONE II.5.1. Un *gruppo a un parametro di diffeomorfismi* di  $M$  è un'applicazione differenziabile

$$(2.5.1) \quad \Phi : M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \rightarrow \Phi(p, t) \in M$$

che goda delle proprietà:

- (i)  $\Phi(p, 0) = p \quad \forall p \in M$
- (ii)  $\Phi(p, t + s) = \Phi(\Phi(p, t), s) \quad \forall p \in M, \forall t, s \in \mathbb{R}$ .

DEFINIZIONE II.5.2. Chiamiamo *gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi* di  $M$  il dato di un intorno  $U^*$  di  $M \times \{0\}$  in  $M \times \mathbb{R}$  e di un'applicazione

$$(2.5.2) \quad \Phi : U^* \subset M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \rightarrow \Phi(p, t) \in M$$

che goda delle proprietà :

- (i)  $\Phi(p, 0) = p \quad \forall p \in M$
- (ii)  $\Phi(p, t + s) = \Phi(\Phi(p, t), s) \quad \text{se } (p, t + s) \text{ e } (\Phi(p, t), s) \in U^*$ .

Vale il :

**TEOREMA II.5.3.** *Ad un gruppo locale a un parametro  $\Phi : U^* \rightarrow M$  di diffeomorfismi di  $M$  corrisponde un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tale che*

$$(2.5.3) \quad (Xf)(p) = \left. \frac{df(\Phi(p, t))}{dt} \right|_{t=0} \quad \forall f \in \mathcal{E}(M), \quad \forall p \in M.$$

*Viceversa, dato un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  esiste un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di  $\Phi : U^* \rightarrow M$  di  $M$  per cui sia verificata la (2.5.3). Due gruppi a un parametro  $\Phi_1 : U_1^* \rightarrow M$  e  $\Phi_2 : U_2^* \rightarrow M$  per cui sia verificata (2.5.3) per lo stesso campo  $X$  coincidono su tutte le componenti connesse di  $U_1^* \cap U_2^*$  che intersecano  $M \times \{0\}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** L'esistenza e unicità di un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi associato ad un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  è conseguenza del teorema d'esistenza locale, unicità e dipendenza  $\mathcal{C}^\infty$  dai dati iniziali per il sistema di equazioni differenziali ordinarie (2.1.9). Il fatto che la soluzione generale del problema di Cauchy definisca un gruppo locale a un parametro è conseguenza del fatto che il sistema (2.1.9) è *autonomo*, che cioè le funzioni a secondo membro in (2.1.9) non dipendono dalla variabile  $t$  e quindi che, se  $t \rightarrow \Phi(p, t)$  è soluzione in un intervallo  $t \in (a, b)$ , con  $a < 0 < b$ , con dato iniziale  $\Phi(p, 0) = p$ , allora, per ogni  $t_0 \in (a, b)$  fissato,  $t \rightarrow \Phi(p, t + t_0)$  è soluzione nell'intervallo  $(a - t_0, b - t_0)$ , con dato iniziale  $\Phi(p, t_0)$ , e coincide quindi con  $\Phi(\Phi(p, t_0), t)$ .

Si verifica poi facilmente, utilizzando la formula di Leibnitz per la derivata del prodotto di funzioni reali di una variabile reale, che la (2.5.3) definisce un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .  $\square$

**Il caso delle varietà con bordo.** Possiamo estendere senza difficoltà la definizione dei campi di vettori anche al caso delle varietà a bordo.

**DEFINIZIONE II.5.4.** Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$ , con bordo,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $p_0 \in \partial M$ . Fissiamo una carta locale  $(U, x)$  con centro in  $p_0$

$$U \ni p \rightarrow x \in X(U) \subset \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^m \geq 0\}, \quad x(p_0) = 0.$$

Diciamo che  $X$  nel punto  $p_0$  è

diretto verso l'esterno se  $X_p x^m|_{x=0} < 0$ ,

tangente se  $X_p x^m|_{x=0} = 0$ ,

diretto verso l'interno se  $X_p x^m|_{x=0} > 0$ .

La definizione non dipende dalla scelta della carta locale, perché la componente  $\partial y^m / \partial x^m$  dello Jacobiano della funzione di transizione è positiva su  $U \cap V \cap \partial M$  per ogni coppia di carte locali  $(U, x)$  e  $(V, y)$  di  $M$ .

Abbiamo allora

PROPOSIZIONE II.5.5. *Sia  $M$  una varietà differenziabile con bordo ed  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo di vettori che non è tangente a  $\partial M$  in nessun punto. Esistono allora due funzioni continue non negative  $\delta, \varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}$  tali che*

$$\begin{cases} \delta(p) > 0, \varepsilon(p) > 0 & \text{se } p \in \text{int}(M), \\ \delta(p) > 0, \varepsilon(p) = 0 & \text{se } p \in \partial M \text{ ed } X_p \text{ è diretto all'esterno,} \\ \delta(p) = 0, \varepsilon(p) > 0 & \text{se } p \in \partial M \text{ ed } X_p \text{ è diretto all'interno,} \end{cases}$$

ed un'applicazione continua ed infinitamente differenziabile fino al bordo di  $U^*$  tale che

$$\Phi : U^* = \{(p, t) \in M \times \mathbb{R} \mid -\delta(p) \leq t \leq \varepsilon(p)\}$$

tale che

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(p, t)}{\partial t} &= X_{\Phi(p, t)}, \quad \forall (p, t) \in U^*, \\ \Phi(p, t + s) &= \Phi(\Phi(p, s), t), \quad \text{se } (p, s), (p, t + s), (\Phi(p, s), t) \in U^*. \quad \square \end{aligned}$$

## II.6. Inclusioni isotope

Definiamo in questo paragrafo una nozione di equivalenza di inclusioni differenziabili.

DEFINIZIONE II.6.1. Siano  $f_0, f_1 : M \rightarrow N$  due inclusioni differenziabili. Una isotopia tra  $f_0$  ed  $f_1$  è un'applicazione  $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N)$  tale che

- (a)  $F(x, 0) = f_0(x)$ ,  $F(x, 1) = f_1(x)$  per ogni  $x \in M$ ;
- (b)  $f_t = F(\cdot, t) \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  è un'inclusione differenziabile per ogni  $t \in [0, 1]$ .

La relazione di isotopia tra inclusioni differenziabili è una relazione d'equivalenza.

LEMMA II.6.2. *Per ogni isotopia  $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N)$  di inclusioni differenziabili l'applicazione*

$$(2.6.1) \quad \tilde{F} : M \times [0, 1] \ni (x, t) \longrightarrow (F(x, t), t) \in N \times [0, 1]$$

è un'inclusione differenziabile che preserva i livelli.

Viceversa, se  $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N \times [0, 1])$  è un'inclusione differenziabile che preserva i livelli, allora  $F(x, t) = \pi_N(\tilde{F}(x, t))$  è un'isotopia di inclusioni differenziabili.

DIMOSTRAZIONE. Fissando un'inclusione differenziabile propria  $\psi : N \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  e considerando le applicazioni  $\psi \circ F$  e  $\psi \circ G$  possiamo ricondurci al caso in cui  $N = \mathbb{R}^\ell$ . Fissata una carta locale  $(U, x)$  in  $M$ , poiché  $G(p, t) = (F(p, t), t)$ , lo Jacobiano di  $G$  è dato da

$$\frac{\partial G}{\partial(x, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

È chiaro quindi che  $G$  è un'immersione differenziabile se e soltanto se  $F_t$  è un'immersione differenziabile per ogni  $t \in [0, 1]$ . Inoltre,  $G$  è iniettiva se e soltanto se ciascuna delle  $F_t$ , per  $t \in [0, 1]$ , è iniettiva.  $\square$



OSSERVAZIONE II.6.3. Sia  $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  una funzione reale con

$$\begin{cases} \chi(t) = 0 & \text{se } t \leq 0, \\ 0 < \chi(t) < 1 & \text{se } 0 < t < 1, \\ \chi(t) = 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Possiamo prendere ad esempio

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0, \\ \exp\left(-\frac{1}{t} \exp\left(\frac{1}{t-1}\right)\right) & \text{se } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Se  $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N)$ , allora  $G(p, t) = F(p, \chi(t)) \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$  e  $G_t = F_0$  per  $t \leq 0$ ,  $G_t = F_1$  per  $t \geq 1$ . Potremo quindi nel seguito supporre che le isotopie siano definite per tutti i valori di  $t \in \mathbb{R}$ , e localmente costanti fuori dall'intervallo  $[0, 1]$ .

NOTAZIONE II.6.4. Se  $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$  indicheremo nel seguito con  $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$  l'applicazione

$$M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \longrightarrow \tilde{F}(p, t) = (F(p, t), t) \in N \times \mathbb{R}.$$

## II.7. Campi completi

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$ .

DEFINIZIONE II.7.1. Un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  si dice *completo* se per ogni  $x_0 \in M$  la soluzione del problema di Cauchy

$$(2.7.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = X_x, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

è definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

Vale il criterio

PROPOSIZIONE II.7.2. *Ogni campo di vettori a supporto compatto è completo.*

TEOREMA II.7.3. *Indichiamo con  $\text{pr} : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la proiezione sulla seconda coordinata. Ogni campo di vettori completo  $X$  su  $M \times \mathbb{R}$ , con  $d\text{pr}(X) = \partial/\partial t$  induce un'isotopia dell'identità su  $M$ .*

*Viceversa, se  $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, M)$  è un'isotopia dell'identità, allora  $d\tilde{F}(\partial/\partial t)$  è un campo di vettori completo su  $M \times \mathbb{R}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $X \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$  un campo completo e denotiamo con  $\Phi \in \mathcal{C}^\infty((M \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, M \times \mathbb{R})$  il flusso in  $M \times \mathbb{R}$  da esso definito. Scriviamo

$$\Phi(p, s; t) = (\phi(p, s; t), \tau(p, s; t)), \quad \text{con } \phi \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, M), \quad \tau \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Abbiamo

$$\phi(p, s; 0) = p, \quad \tau(p, s; 0) = s, \quad \forall p \in M, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Poiché  $X = (Y, \partial/\partial s)$  con  $Y \in \Gamma(M \times \mathbb{R}, TM)$ , è

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = 1,$$

che, tenuto conto dei dati iniziali, ci dà  $\tau(p, s; t) = s + t$ .

Posto

$$\tilde{F}(p, t) = \Phi(p, 0; t),$$

abbiamo

$$\tilde{F}(p, 0) = \Phi(p, 0; 0) = (p, 0).$$

La  $\tilde{F}$  è della forma

$$\tilde{F}(p, t) = (F(p, t), t), \quad \text{con} \quad F(p, t) = \phi(p, 0; t)$$

e quindi preserva i livelli. Osserviamo che l'applicazione

$$M \ni p \rightarrow \pi_M \circ \Phi(p, t; -t) \in M$$

inverte  $F_t : M \ni p \rightarrow F(p, t) \in M$ . Infatti

$$\Phi(F(p, t), t; -t) = \Phi(\Phi(p, 0; t), -t) = (p, 0), \quad \forall p \in M, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quindi, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_t : p \rightarrow F(p, t)$  è un automorfismo di  $M$ .

Viceversa, ad un'isotopia  $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, M)$  dell'identità possiamo associare il campo di vettori completo  $X = d\tilde{F}(\partial/\partial t)$  su  $M \times \mathbb{R}$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE II.7.4.** Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  è completo, allora  $(X, \partial/\partial t)$  è un campo completo in  $M \times \mathbb{R}$ .

**OSSERVAZIONE II.7.5.** Se  $X \in \Gamma(M \times \mathbb{R}, TM)$  ha supporto compatto, allora  $(X, \partial/\partial t)$  è un campo di vettori completo su  $M \times \mathbb{R}$ .

**ESEMPIO II.7.6.** Sia  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  un diffeomorfismo, con  $f(0) = 0$ . Possiamo scrivere  $f$  nella forma

$$f^i(x) = \sum_{j=1}^n a_j^i(x) x^j \quad \text{per} \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{con} \quad a_j^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n),$$

con

$$a_j^i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(tx) dt \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

La  $F(x, t) = t^{-1} f(tx)$  è un'isotopia tra il diffeomorfismo lineare

$$f_0(x) = \frac{\partial f(0)}{\partial x} x$$

ed  $f$ . Quindi ogni diffeomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  è isotopo ad un diffeomorfismo lineare. Infine, poiché  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  ha esattamente due componenti connesse per archi, possiamo concludere che ogni diffeomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  è isotopo o all'identità o alla simmetria rispetto ad un iperpiano.

Nel suo lavoro del 1936, H. Whitney dimostrò anche il

**TEOREMA II.7.7** (isotopia delle immersioni). *Se  $f_0, f_1 : M \rightarrow N$  sono due inclusioni differenziabili omo-topo di una varietà compatta  $m$ -dimensionale  $M$  in una varietà differenziabile  $N$  di dimensione  $n \geq 2m + 2$ , allora  $f_0$  ed  $f_1$  sono isotope come inclusioni differenziabili.*

**TRACCIA DELLA DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo un'omotopia  $F : M \times I \rightarrow N$  tra  $f_0$  ed  $f_1$ . Per l'Osservazione II.6.3, possiamo supporre che l'omotopia sia restrizione di una  $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ . Consideriamo allora la  $\tilde{F}(p, t) = (F(p, t), t)$ . Questa è un'applicazione in  $\mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$ . Poiché  $\dim(M \times \mathbb{R}) = m + 1$  e  $\dim(N \times \mathbb{R}) = n + 1 \geq 2m + 3 = 2(m + 1) + 1$ , possiamo approssimare  $\tilde{F}$  con un'inclusione differenziabile  $\tilde{G} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$ . Poiché  $M \times [0, 1]$  è compatto, se  $\tilde{G}$  è sufficientemente vicina ad  $\tilde{F}$  in  $\mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$ , possiamo, con un cambiamento di variabili, ottenere che  $\tilde{G}(p, t) = (G(p, t), t)$  per  $t$  in un intorno di  $[0, 1]$ . Inoltre, poiché inclusioni differenziabili di una varietà compatta che siano vicine sono isotope,  $G_0$  sarà isotopa ad  $f_0$  e  $G_1$  ad  $f_1$ . Poiché l'isotopia è una relazione d'equivalenza, anche  $f_0$  ed  $f_1$  sono isotope.  $\square$

**OSSERVAZIONE II.7.8.** Chiamiamo *nodo* in  $\mathbb{R}^n$  un'inclusione differenziabile di  $S^1$  in  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ). Sciogliere un nodo  $\nu : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  significa trovare un'isotopia di  $\nu$  con il nodo banale

$$S^1 \ni e^{i\theta} \longrightarrow (\cos \theta, \sin \theta, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Sappiamo che ci sono in  $\mathbb{R}^3$  nodi chiusi non scioglibili. Per il Teorema II.7.7 tutti i nodi chiusi in  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 4$  sono scioglibili.

In generale, possiamo considerare delle *catene di m nodi*, o *m-link*, cioè inclusioni differenziabili

$$\lambda : \underbrace{S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{m \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Sciogliere una catena  $\lambda$  di  $m$  nodi vuol dire trovare un'isotopia di  $\lambda$  con la catena banale

$$\underbrace{S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{m \text{ volte}} \ni (e^{it})_j \longrightarrow (\cos \theta, \sin \theta, j, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Per il Teorema II.7.7 tutte le catene di  $m$  nodi in uno spazio Euclideo  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 4$ , si possono sciogliere.

## II.8. Isotopie dello spazio ambiente

Due inclusioni differenziabili  $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  possono essere isotope senza che i complementi  $N \setminus f_0(M)$  ed  $N \setminus f_1(M)$  siano omeomorfi. Un semplice esempio è l'inclusione in  $\mathbb{R}^2$  di un segmento aperto e di una circonferenza privata di un punto. Introduciamo una nozione più restrittiva di isotopia:

**DEFINIZIONE II.8.1.** Un'*isotopia ambientale* tra due inclusioni differenziabili  $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  è una isotopia  $F \in \mathcal{C}^\infty(N \times [0, 1], N)$  di diffeomorfismi di  $N$  tale che

$$\begin{cases} F_0(q) = q, & \forall q \in N, \\ F_1(f_0(p), 1) = f_1(p), & \forall p \in M. \end{cases}$$

Diremo allora che  $f_0$  ed  $f_1$  sono *isotope nello spazio ambiente* o *ambientalmente isotope*.

In generale l'isotopia ambientale, che implica l'omeomorfismo dei complementi delle immagini, è più restrittiva dell'isotopia. Le due relazioni coincidono per le inclusioni differenziabili di varietà compatte. Vale infatti il seguente<sup>2</sup>:

**TEOREMA II.8.2 (R. Thom).** *Sia  $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N)$  un'isotopia di inclusioni differenziabili di una varietà  $M$  in una varietà  $N$ . Per ogni compatto  $K$  contenuto in  $M$  esiste un'isotopia dell'identità  $G \in \mathcal{C}^\infty(N \times I, N)$  su  $N$  tale che*

$$G(f_0(p), 1) = f_1(p), \quad \forall p \in K.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo supporre che  $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$  con  $F_t = f_0$  per  $t \leq 0$  ed  $F_t = f_1$  per  $t \geq 1$ . Definiamo  $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$  mediante

$$\tilde{F}(p, t) = (F(p, t), t) \in N \times \mathbb{R}, \quad \text{per } p \in M, \quad t \in \mathbb{R}.$$

L'immagine  $\tilde{M} = \tilde{F}(M \times \mathbb{R})$  è una sottovarietà differenziabile di  $N \times \mathbb{R}$ . Consideriamo il campo di vettori  $(X, \partial/\partial t) = d\tilde{F}(\partial/\partial t)$ , con  $X \in \Gamma(\tilde{M}, TN)$ , su  $\tilde{M}$ . Il supporto di  $X$  è contenuto in  $\tilde{F}(M \times [0, 1])$ . Possiamo trovare allora un campo di vettori  $(Y, \partial/\partial t) \in \mathfrak{X}(N \times \mathbb{R})$ , con

$$\begin{aligned} Y &\in \Gamma(N \times \mathbb{R}, TN), \quad \text{supp } Y \subseteq N \times \mathbb{R}, \\ Y &= X \quad \text{su } \tilde{F}(K \times [0, 1]). \end{aligned}$$

Il campo  $(Y, \partial/\partial t)$  è completo e quindi genera un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di  $N \times \mathbb{R}$  che preservano i livelli. Ad esso corrisponde quindi un'isotopia dello spazio ambiente che trasforma  $f_0$  in  $f_1$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE II.8.3.** Il teorema II.8.2 ci dice che inclusioni isotope di una varietà compatta sono ambientalmente isotope. Questo non è vero in generale per inclusioni di una varietà  $M$  non compatta.

Consideriamo ad esempio due nodi  $\nu_0, \nu_1 : S^1 \rightarrow S^3$  con  $\nu_0(-1) = \nu_1(-1) = (0, 0, 1)$ . Le loro restrizioni  $f_0, f_1 : S^1 \setminus \{-1\} \rightarrow S^3 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  sono isotope, ma possono non essere ambientalmente isotope.

**COROLLARIO II.8.4.** *Se  $M$  è una varietà connessa, per ogni coppia di punti  $p_0, p_1 \in M$  esiste un'isotopia  $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], M)$  dell'identità su  $M$  con  $F(p_0, 1) = p_1$ .*

**COROLLARIO II.8.5.** *Ogni inclusione differenziabile  $f \in \mathcal{C}^\infty(S^m, S^n)$ , con  $n \geq 2m+2$ , si estende ad una inclusione differenziabile  $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(D^{m+1}, S^n)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $n > m$ ,  $f$  è omotopa all'inclusione differenziabile standard

$$\iota : S^m \ni (x^0, \dots, x^m) \longrightarrow (x^0, \dots, x^m, 0, \dots, 0) \in S^n.$$

Questa si estende all'inclusione differenziabile

$$D^{m+1} \ni (x^0, \dots, x^m) \longrightarrow (x^0, \dots, x^m, \sqrt{1 - |x^0|^2 - \dots - |x^m|^2}, 0, \dots, 0) \in S^n.$$

Per il Teorema II.7.7,  $f$  e  $\iota$  sono isotope e per il Teorema II.8.2 lo sono con un'isotopia dello spazio ambiente. Ne segue che anche  $f$  si estende ad un'inclusione differenziabile di  $D^{m+1}$ .  $\square$

<sup>2</sup>RÉNÉ THOM: *La classification des immersions*, Sémin. Bourbaki **157**, 1957-58

### II.9. $k$ -celle differenziabili

In questo paragrafo esponiamo alcuni risultati<sup>3</sup> relativi alle applicazioni differenziabili di dischi.

Premettiamo un'osservazione sulle applicazioni differenziabili.

LEMMA II.9.1. *Siano  $M, N$  due varietà differenziabili, di dimensione  $m, n$ , rispettivamente, e sia  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$  un'applicazione differenziabile. Se  $K$  è un compatto di  $N$  tale che*

- (1)  $f|_K$  sia iniettiva;
- (2)  $df(q) : T_q N \rightarrow T_{\phi(q)} M$  sia iniettiva per ogni  $q \in K$ ,

*allora esiste un intorno aperto  $U$  di  $K$  in  $N$  tale che  $\phi|_U$  sia un'inclusione differenziabile.*

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando il teorema d'immersione di Whitney, possiamo ridurci al caso in cui  $M = \mathbb{R}^m$  ed  $N$  sia una sottovarietà propria di uno spazio Euclideo  $\mathbb{R}^\ell$ . In particolare, possiamo considerare l'aggiunta  $d\phi^*(q)$  dell'applicazione  $d\phi(q) : T_q N \rightarrow T_{\phi(q)} \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^\ell$ , rispetto al prodotto scalare canonico di  $\mathbb{R}^m$  e a quello indotto su  $T_q N$  dalla restrizione del prodotto scalare canonico di  $\mathbb{R}^\ell$ . La composta  $d\phi^*(q) \circ d\phi(q)$  è un endomorfismo iniettivo di  $T_q N$  ed abbiamo perciò, nella norma degli operatori,  $\inf_K \|d\phi^*(q) \circ d\phi(q)\|^2 = \mu > 0$ . Per continuità otteniamo che esiste un intorno relativamente compatto  $W$  di  $K$  in  $N$  tale che  $\|d\phi^*(q) \circ d\phi(q)\|^2 \geq (\mu/2) > 0$  per ogni  $q \in \bar{W}$ . Allora, applicando l'argomento del Lemma ?? del Capitolo ?? ad un numero finito di carte coordinate che ricoprono  $\bar{W}$ , otteniamo che esistono costanti positive  $\delta, c$  tali che

$$|\phi(q_1) - \phi(q_2)| \geq c|q_1 - q_2|, \quad \forall q_1, q_2 \in \bar{W} \quad \text{con } |q_1 - q_2| \leq \delta.$$

Questo segue dal fatto che la distanza Euclidea su ciascun sottoinsieme compatto di una carta coordinata è equivalente alla restrizione della distanza Euclidea su  $\mathbb{R}^\ell$ .

Consideriamo ora il compatto  $F = \{(q_1, q_2) \in \bar{W} \times \bar{W} \mid |q_1 - q_2| \geq \delta\}$ . La funzione reale

$$\gamma(q_1, q_2) = \frac{|\phi(q_1) - \phi(q_2)|}{|q_1 - q_2|}$$

è definita e continua su  $F$  ed è positiva nei punti di  $F \cap (K \times K)$ . Essa sarà allora ancora positiva in tutti i punti di un intorno  $A$  di  $F \cap (K \times K)$  in  $F$ . L'insieme

$U = K \cup \overbrace{(\pi_1(A) \cap \pi_2(A))}^\circ$  è un intorno aperto di  $K$  in  $N$ , tale che la restrizione ad  $U$  di  $\phi$  sia un'inclusione differenziabile.  $\square$

NOTAZIONE II.9.2. Se  $A$  è un qualsiasi sottoinsieme della varietà differenziabile  $N$ , indicheremo con  $\mathcal{C}^\infty(A, M)$  l'insieme di tutte le funzioni continue  $f : A \rightarrow M$  per cui esista un intorno aperto  $U$  di  $A$  in  $N$  ed un'applicazione differenziabile  $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(U, M)$  tale che  $\tilde{f}|_A = f$ .

DEFINIZIONE II.9.3. Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$  e  $k$  un intero con  $0 \leq k \leq m$ . Una  $k$ -cella differenziabile di  $M$  è un'inclusione differenziabile  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(D^k, M)$ .

<sup>3</sup>Richard S.Palais, *Extending diffeomorphisms*. Proc. Amer. Math. Soc. **11**, 1960 pp. 274-277

L'applicazione  $\phi$  è cioè un'inclusione topologica ed è la restrizione a  $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x| \leq 1\}$  di un'applicazione di classe  $\mathcal{C}^\infty$ , definita su un intorno aperto  $U$  di  $D^k$  in  $\mathbb{R}^k$ , ed a valori in  $M$ , con differenziale iniettivo in ogni punto di  $D^k$ .

Per il Lemma II.9.1 la  $\phi$  è la restrizione dell'inclusione differenziabile di un disco aperto  $B(r)$ , con  $r > 1$ , in  $M$ .

Vale il

**TEOREMA II.9.4** (estensione ad un' $n$ -cella). *Se  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(D^k, M)$  è una  $k$ -cella di  $M$ , con  $0 \leq k < m$ , ed  $U$  un intorno aperto di  $\phi(D^k)$  in  $M$ , allora esiste una  $n$ -cella  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(D^m, M)$ , con  $\psi|_{D^k} = \phi$  e  $\psi(D^m) \subset U$ .*

*Se  $M$  è orientata, possiamo scegliere  $\psi$  in modo che mantenga l'orientazione.*

**DIMOSTRAZIONE.** Il teorema è una conseguenza del Corollario III.6.4 del Capitolo III. □

Vale allora il

**TEOREMA II.9.5** (Transitività). *Se  $\phi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(D^k, M)$  sono due  $k$ -celle differenziabili di  $M$ , allora esiste un diffeomorfismo  $F \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$  tale che  $\psi = F \circ \phi$ .*

*Se  $M$  è orientata, e o  $k < m$ , oppure  $k = m$  e le due celle sono equi-orientate, allora possiamo scegliere il diffeomorfismo  $F$  in modo che mantenga l'orientazione.*

**OSSERVAZIONE II.9.6.** Il diffeomorfismo  $F$  del Teorema II.9.5 può essere scelto isotopo all'identità, in un'isotopia costante al di fuori di un compatto di  $M$ .

**TEOREMA II.9.7** (di estensione). *Se  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(D^k, M)$  è una  $k$ -cella differenziabile in  $M$  ed  $f$  un'inclusione differenziabile di un intorno di  $\phi(D^k)$  in  $M$ , allora esiste un diffeomorfismo  $F$  di  $M$  in sé, uguale ad  $f$  in un intorno di  $\phi(D^k)$ .*

*Se  $M$  è orientabile e  $\phi$  ed  $f$  preservano l'orientazione, allora si può ottenere una  $F$  che preservi l'orientazione e sia isotopa all'identità in un'isotopia costante al di fuori di un sottoinsieme compatto.*

## CAPITOLO III

### Fibrati vettoriali

#### III.1. Fibrati differenziabili

Il *fibrato tangente* è un esempio della struttura più generale di *fibrato vettoriale* che definiamo ed esaminiamo in questo paragrafo. A loro volta, i fibrati vettoriali sono particolari fibrati differenziabili localmente banali:

**DEFINIZIONE III.1.1.** Un fibrato differenziabile  $\xi$  è il dato di una varietà differenziabile  $E = E(\xi)$ , che si dice il suo *spazio totale*, di una varietà differenziabile  $B = B(\xi)$ , che si dice la sua *base*, e di una sommersione differenziabile  $\pi = \pi(\xi) : E \rightarrow B$ , che si dice la sua *proiezione sulla base*.

Per ogni punto  $p \in B$ , l'insieme  $E_p = E_p(\xi) = \pi^{-1}(p)$  è una sottovarietà differenziabile di  $E$ , che si dice la *fibra* di  $\xi$  su  $p$ .

**DEFINIZIONE III.1.2.** Diciamo che un fibrato differenziabile  $\xi$  è *localmente banale con fibra tipica*  $F$  se

- (a)  $F$  è una varietà differenziabile;
- (b) per ogni  $p \in B$  esistono un intorno aperto  $U$  di  $p$  in  $B$  ed una  $\phi_U \in \mathcal{C}^\infty(U, F)$  che renda commutativo il diagramma

$$(3.1.1) \quad \begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\pi \times \phi_U} & U \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_U \\ & U & \end{array}$$

Un diffeomorfismo  $\phi_U$  che renda commutativo il diagramma (3.1.1) si dice una *trivializzazione* di  $\xi$  su  $U$ .

Un *atlante di trivializzazione* di  $\xi$  è una collezione  $\mathcal{A} = \{(U_a, \phi_a) \mid a \in A\}$  formata da aperti  $U_a$  di  $B$  e da trivializzazioni locali

$$E|_{U_a} = \pi^{-1}(U_a) \ni q \longrightarrow (\pi(q), \phi_U(q)) \in U_a \times F,$$

con  $B = \bigcup_{a \in A} U_a$ .

A volte scriveremo  $E \xrightarrow{\pi} B$  per il fibrato differenziabile  $\xi$  con  $E(\xi) = E$ ,  $B(\xi) = B$  e  $\pi(\xi) = \pi$ . La notazione  $E \xrightarrow[F]{\pi} B$  significherà che, inoltre, il fibrato differenziabile  $\xi$  è localmente banale, con fibra tipica  $F$ .

**DEFINIZIONE III.1.3.** Una *sezione differenziabile* di  $\xi$  su un aperto  $U$  di  $B(\xi)$  è un'applicazione  $s \in \mathcal{C}^\infty(U, E(\xi))$  tale che  $\pi(\xi) \circ s(x) = x$  per ogni  $x \in U$ . L'insieme

di tutte le sezioni differenziabili di  $\xi$  su  $U$  si indica con

$$(3.1.2) \quad \Gamma_\xi(U, E) = \{s \in \mathcal{C}^\infty(U, E(\xi)) \mid \pi(\xi) \circ s(p) = p, \forall p \in U\}.$$

LEMMA III.1.4. *Sia  $\xi$  un fibrato differenziabile,  $\tau_0 \in E(\xi)$  e  $p_0 = \pi(\xi)(\tau_0)$ . Allora esistono un intorno aperto  $U$  di  $p_0$  in  $B(\xi)$  ed una sezione  $s \in \Gamma_\xi(U, E(\xi))$  con  $s(p_0) = \tau_0$ .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché  $\pi(\xi)$  è una sommersione differenziabile in tutti i punti di  $E(\xi)$ , la tesi segue dal teorema delle funzioni implicite (vedi la Proposizione I.8.3 del Capitolo I).  $\square$

PROPOSIZIONE III.1.5 (un criterio di banalità locale). *Siano  $E$  e  $B$  varietà differenziabili, con  $B$  connessa. Allora ogni sommersione differenziabile propria  $\pi : E \rightarrow B$  definisce un fibrato differenziabile localmente banale.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che il fatto che  $\pi$  sia propria significa che  $\pi$  è continua, chiusa, e che  $\pi^{-1}(K)$  è compatto in  $E$  per ogni compatto  $K$  di  $B$ .

Fissiamo un punto  $p_0 \in B$ . L'insieme  $E_{p_0} = \pi^{-1}(p_0)$  è una sottovarietà compatta di  $E$ . Essa è un retratto differenziabile d'intorno. Possiamo trovare cioè un intorno aperto  $W$  di  $E_{p_0}$  in  $E$  ed un'applicazione differenziabile  $r : W \rightarrow E_{p_0}$  con  $r(v) = v$  per ogni  $v \in E_{p_0}$ . Poiché  $\pi(E \setminus W)$  è un chiuso di  $B$  che non contiene  $p_0$ , possiamo supporre che  $W$  sia un aperto della forma  $W = \pi^{-1}(U_0)$ , per un intorno aperto  $U_0$  di  $p_0$  in  $B$ . Possiamo allora definire

$$\Phi : E_{U_0} = \pi^{-1}(U_0) \ni v \rightarrow (\pi(v), r(v)) \in U_0 \times E_{p_0}.$$

Poiché  $\pi$  è una sommersione differenziabile, la  $\Phi$  è un diffeomorfismo locale in tutti i punti  $v \in E_{p_0}$ . L'insieme dei punti di  $E_{U_0}$  in cui  $\Phi$  è un diffeomorfismo locale è un aperto. Quindi, a meno di sostituire ad  $U_0$  un intorno più piccolo di  $p_0$  in  $B$ , possiamo supporre che la  $\Phi$  sia un diffeomorfismo locale in tutti i punti di  $E_{U_0}$ .

Dico che esiste un intorno aperto  $U$  di  $p_0$  in  $U_0$  tale che

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \ni v \rightarrow \Phi(v) = (\pi(v), r(v)) \in U \times E_{p_0}$$

sia un diffeomorfismo.

Indichiamo con  $\text{pr}_2 : U_0 \times E_{p_0} \rightarrow E_{p_0}$  la proiezione sul secondo fattore. L'insieme dei punti  $p \in U_0$  tali che  $\text{pr}_2(\Phi(E_p)) = E_{p_0}$  è un intorno aperto di  $p_0$ . Possiamo quindi supporre, a meno di sostituire ad  $U_0$  un intorno più piccolo di  $p_0$ , che la  $\Phi$  sia un diffeomorfismo locale surgettivo.

Ci resta da verificare che, se  $U$  è sufficientemente piccolo, la  $\phi_U$  è anche iniettiva. A questo scopo osserviamo che, poiché  $\Phi$  è un diffeomorfismo locale, l'insieme  $Q = \{(v, w) \in E_{U_0} \times E_{U_0} \mid v \neq w, \Phi(v) = \Phi(w)\}$  è in  $E_{U_0} \times E_{U_0}$  un chiuso disgiunto da  $E_{p_0} \times E_{p_0}$ . Sia infatti  $\{U_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$  un sistema fondamentale di intorni relativamente compatti di  $p_0$  in  $U_0$ , con  $U_{\nu+1} \Subset U_\nu$  per ogni intero  $\nu \geq 0$ . Per la proprietà dell'intersezione finita, esisterà un indice  $\nu_1$  tale che  $\pi^{-1}(\bar{U}_{\nu_1}) \times \pi^{-1}(\bar{U}_{\nu_1})$  non intersechi  $Q$ .

Per completare la dimostrazione, basterà osservare che le fibre  $E_p = \pi^{-1}(p)$  sono tutte diffeomorfe tra loro. Ciò segue dalla connessione di  $B$  e dal fatto che dalla



prima parte della dimostrazione si ricava che, fissato un punto  $p_0 \in B$ , l'insieme dei  $p \in B$  per cui la fibra  $E_p$  è diffeomorfa ad  $E_{p_0}$  è aperto e chiuso in  $B$ .  $\square$

PROPOSIZIONE III.1.6. *Sia  $\xi$  un fibrato differenziabile ed  $M$  una sottovarietà differenziabile di  $B(\xi)$ . Definiamo*

$$(3.1.3) \quad E|_M = \pi(\xi)^{-1}(M), \quad \pi|_M : E|_M \ni \tau \rightarrow \pi(\xi)(\tau) \in M.$$

Allora  $\xi|_M = (E|_M \xrightarrow{\pi|_M} M)$  è un fibrato differenziabile con base  $M$ .  $\square$

DEFINIZIONE III.1.7. Il fibrato  $\xi|_M$  descritto nella Proposizione III.1.6 si dice la *restrizione ad  $M$*  del fibrato  $\xi$ .

PROPOSIZIONE III.1.8. *Se  $\xi$  e  $\zeta$  sono fibrati differenziabili, allora, posto*

$$E(\xi \times \zeta) = E(\xi) \times E(\zeta),$$

$$B(\xi \times \zeta) = B(\xi) \times B(\zeta),$$

$$\pi(\xi \times \zeta) : E(\xi \times \zeta) \ni (\alpha, \beta) \rightarrow (\pi(\xi)(\alpha), \pi(\zeta)(\beta)) \in B(\xi \times \zeta),$$

$\xi \times \zeta = (E(\xi \times \zeta) \xrightarrow{\pi(\xi \times \zeta)} B(\xi \times \zeta))$  è un fibrato differenziabile.

*Se  $\xi$  e  $\zeta$  sono localmente banali con fibre tipiche  $F(\xi)$  ed  $F(\zeta)$  rispettivamente, allora anche  $\xi \times \zeta$  è localmente banale, con fibra tipica  $F(\xi) \times F(\zeta)$ .*

DEFINIZIONE III.1.9. Il fibrato differenziabile  $\xi \times \zeta$  descritto nella Proposizione III.1.8 si dice *prodotto cartesiano* dei fibrati  $\xi$  e  $\zeta$ .

PROPOSIZIONE III.1.10 (pullback). *Sia  $\xi$  un fibrato differenziabile,  $M$  una varietà differenziabile ed  $f : M \rightarrow B(\xi)$  un'applicazione differenziabile. Poniamo*

$$E(f^*\xi) = \{(p, \tau) \in M \times E(\xi) \mid f(p) = \pi(\xi)(\tau)\},$$

$$\pi(f^*\xi) : E \ni (p, \tau) \longrightarrow p \in M.$$

Allora  $f^*\xi = (E(f^*\xi) \xrightarrow{\pi(f^*\xi)} M)$  è un fibrato differenziabile con base  $M$ .

*Se  $\xi$  è localmente banale con fibra tipica  $F$ , anche  $f^*\xi$  è localmente banale con fibra tipica  $F$ .*

DEFINIZIONE III.1.11. Il fibrato  $f^*\xi$  descritto nella Proposizione III.1.10 si dice *immagine inversa, o pullback*, di  $\xi$  mediante l'applicazione  $f$ .

DEFINIZIONE III.1.12. Siano  $\xi_1$  e  $\xi_2$  due fibrati differenziabili sulla stessa base  $B(\xi_1) = B(\xi_2) = M$ . Chiamiamo *somma di Whitney* dei fibrati  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , ed indichiamo con  $\xi_1 \oplus_M \xi_2$ , l'immagine inversa del fibrato  $\xi_1 \times \xi_2$  mediante l'immersione canonica  $\iota : M \ni p \rightarrow (p, p) \in M \times M$  di  $M$  nella diagonale di  $M \times M$ .

Abbiamo, in modo canonico,

$$E(\xi_1 \oplus_M \xi_2) \simeq \{(\tau_1, \tau_2) \in E(\xi_1) \times E(\xi_2) \mid \pi(\xi_1)(\tau_1) = \pi(\xi_2)(\tau_2)\},$$

$$\pi(\xi_1 \oplus_M \xi_2)(\tau_1, \tau_2) = \pi(\xi_1)(\tau_1) = \pi(\xi_2)(\tau_2), \quad \forall (\tau_1, \tau_2) \in E(\xi_1 \oplus_M \xi_2).$$

Osserviamo che, per le Proposizioni III.1.6, III.1.8, III.1.10, se  $\xi_1$  e  $\xi_2$  sono localmente banali con fibre tipiche  $F_1$  ed  $F_2$  rispettivamente, la loro somma di Whitney  $\xi_1 \oplus_M \xi_2$  è ancora localmente banale, con fibra tipica  $F_1 \times F_2$ .

DEFINIZIONE III.1.13. Siano  $\xi_1$  e  $\xi_2$  due fibrati differenziabili. Un morfismo di fibrati differenziabili  $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$  è il dato di una coppia di applicazioni differenziabili  $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$  e  $\phi : B(\xi_1) \rightarrow B(\xi_2)$  che rendano commutativo il diagramma

$$(3.1.4) \quad \begin{array}{ccc} E(\xi_1) & \xrightarrow{f} & E(\xi_2) \\ \pi(\xi_1) \downarrow & & \downarrow \pi(\xi_2) \\ B(\xi_1) & \xrightarrow{\phi} & B(\xi_2). \end{array}$$

Abbiamo

LEMMA III.1.14. *Siano  $\xi_1$  e  $\xi_2$  due fibrati differenziabili. Se  $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$  è un'applicazione differenziabile ed*

$$f(E(\xi_1)_p) \subset E(\xi_2)_{f(p)}, \quad \forall p \in B(\xi_1),$$

*allora esiste un unico morfismo di fibrati differenziabili  $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$  che induca  $f$  sugli spazi totali.*

DIMOSTRAZIONE. L'unicità è ovvia, in quanto la  $\phi$  si ottiene per passaggio al quoziente rispetto alle proiezioni sulle basi. Per dimostrare che  $\phi$  è differenziabile, basta osservare che, se  $s \in \Gamma_{\xi_1}(U, E(\xi_1))$  per un aperto  $U$  di  $B(\xi_1)$ , allora  $\phi|_U = \pi(\xi_2) \circ s$ , onde  $\phi$  è differenziabile su  $U$ .  $\square$

PROPOSIZIONE III.1.15. *Sia  $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$  un morfismo di fibrati differenziabili. Se  $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$  è un diffeomorfismo, anche  $\phi : B(\xi_1) \rightarrow B(\xi_2)$  è un diffeomorfismo, e la  $(f^{-1}, \phi^{-1}) : \xi_2 \rightarrow \xi_1$  è un morfismo di fibrati differenziabili.*

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente  $\phi$  è bigettiva. Se  $W$  è un aperto di  $B(\xi_2)$  ed  $s_2 \in \Gamma_{\xi_2}(W, E(\xi_2))$ , allora  $\phi^{-1}|_W = f^{-1} \circ s_2$  dimostra che  $\phi^{-1}$  è anche differenziabile.  $\square$

DEFINIZIONE III.1.16. Un *isomorfismo* di fibrati differenziabili è un morfismo  $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$  per cui  $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$  sia un diffeomorfismo.

Un isomorfismo di fibrati differenziabili  $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$  con  $B(\xi_1) = B(\xi_2) = M$  e  $\phi = \text{id}_M$  si dice un'*equivalenza*.

### III.2. Fibrati vettoriali differenziabili

DEFINIZIONE III.2.1. Un *fibrato vettoriale differenziabile di rango  $n$*  è il dato di un fibrato differenziabile  $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$  di rango  $n$  e di una struttura di spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  su ogni fibra  $E_x := \pi^{-1}(x)$ , compatibile con la struttura differenziabile. Ciò significa che le applicazioni

$$\begin{cases} E \oplus_M E \ni (v, w) \rightarrow v + w \in E, \\ \mathbb{R} \times E \ni (k, v) \rightarrow k \cdot v \in E \end{cases}$$

sono differenziabili.

PROPOSIZIONE III.2.2. *Ogni fibrato vettoriale differenziabile di rango  $n$  è localmente banale con fibra tipica  $\mathbb{R}^n$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$  un fibrato differenziabile vettoriale di rango  $n$ . Dato un punto  $p_0 \in B$ , fissiamo una  $\mathbb{R}$ -base  $e_1, \dots, e_n$  di  $E_{p_0}$ . Per il Lemma III.1.4 possiamo trovare un intorno aperto  $U$  di  $p_0$  in  $B$  e sezioni  $\eta_i \in \Gamma_\xi(U, E)$  con  $\eta_i(p_0) = e_i$  per  $i = 1, \dots, n$ . Per continuità, l'insieme  $U_0$  dei punti  $p$  di  $U$  in cui  $\eta_1(p), \dots, \eta_n(p)$  sono ancora linearmente indipendenti è un intorno aperto di  $p_0$  in  $B$ . Allora la

$$U_0 \times \mathbb{R}^n \ni (p; v^1, \dots, v^n) \longrightarrow \sum_{i=1}^n v^i \eta_i(p) \in \pi^{-1}(U_0)$$

è una trivializzazione locale differenziabile di  $\xi$  in un intorno aperto del punto  $p_0$ .  $\square$

Se  $V, W$  sono spazi vettoriali reali della stessa dimensione  $n$ , indichiamo con  $\text{Iso}_{\mathbb{R}}(V, W)$  l'insieme degli isomorfismi  $\mathbb{R}$ -lineari di  $V$  in  $W$ .

DEFINIZIONE III.2.3. Una *trivializzazione locale di un fibrato vettoriale differenziabile*  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$  è una trivializzazione locale

$$(3.2.1) \quad \phi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow E|_U$$

di  $\xi$  compatibile con la struttura lineare, che sia cioè lineare sulle fibre.

Potremo quindi scrivere<sup>1</sup>

$$(3.2.2) \quad \phi(p, v) = \phi(p)v, \quad \text{con } \sigma(p) \in \text{Iso}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, E_p) \quad \forall p \in U.$$

Un *atlante di trivializzazione* di un fibrato vettoriale differenziabile  $\xi$  è un atlante di trivializzazione di  $\xi$  in cui tutte le trivializzazioni locali siano compatibili con la struttura lineare.

Chiameremo *funzioni di transizione* dell'atlante di trivializzazione  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  del fibrato vettoriale differenziabile  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ , le applicazioni<sup>2</sup>  $g_{\alpha, \beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}))$ , definite da

$$(3.2.3) \quad g_{\alpha, \beta}(p) = \phi_\alpha(p)^{-1} \circ \phi_\beta(p), \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$$

si dicono le *funzioni di transizione* dell'atlante  $\mathcal{A}$ .

### III.3. Morfismi e operazioni di fibrati vettoriali

Siano  $\xi_1$  e  $\xi_2$  due fibrati vettoriali differenziabili.

DEFINIZIONE III.3.1. Un morfismo di fibrati differenziabili  $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$  si dice un *morfismo di fibrati vettoriali reali differenziabili* se è lineare sulle fibre, se cioè per ogni  $p \in B(\xi_1)$  l'applicazione  $E(\xi_1)_p \ni v \rightarrow f(v) \in E(\xi_2)_{\phi(p)}$  è lineare.

Se inoltre la  $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$  è un diffeomorfismo, allora anche  $(f^{-1}, \phi^{-1}) : \xi_2 \rightarrow \xi_1$  è un morfismo di fibrati vettoriali differenziabili.

In questo caso diremo che  $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$  è un *isomorfismo di fibrati vettoriali reali differenziabili*.

<sup>1</sup>Le  $p \rightarrow \phi(p)$  sono *sezioni* del fibrato vettoriale  $\xi \otimes_B \xi^*$ , che sarà definito nel paragrafo successivo.

<sup>2</sup>Osserviamo che  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  è un aperto di  $\mathbb{R}^{n^2}$ , e quindi una varietà differenziabile di dimensione  $n^2$ .

Se, ancora,  $B(\xi_1) = B(\xi_2) = M$  e  $\phi = \text{id}_M$ , diremo che la  $(f, \text{id}_M) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$  è un'equivalenza di fibrati vettoriali reali.

Dire che un fibrato differenziabile  $\xi$  di rango  $n$  è trivializzabile equivale dunque a dire che è isomorfo al fibrato differenziale triviale  $B(\xi) \times V$ , con  $V$  spazio vettoriale reale di dimensione  $n$ .

Le costruzioni dell'algebra lineare si estendono in modo naturale ai fibrati vettoriali.

**Fibrato duale.** Sia  $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$  un fibrato vettoriale reale di rango  $n$ . Sia

$$E^* = \bigsqcup_{p \in B} E_p^*$$

l'unione disgiunta dei duali degli spazi vettoriali  $E_p$ , al variare di  $p$  nella base  $B$ .

Indichiamo ancora con  $\pi : E^* \rightarrow B$  l'applicazione che associa il punto  $p \in B$  ad  $\eta \in E_p^* \subset E^*$ .

Se  $\mathcal{A} = \{(U_a, \psi_a) \mid a \in A\}$  è un atlante di trivializzazione per  $\xi$ , per ogni punto  $p \in U_a$  la

$$\psi_a(p) : \mathbb{R}^n \ni v \rightarrow \psi_a(p, v) \in E_p$$

è un isomorfismo lineare. La sua trasposta  $(\psi(p))^* : E_p^* \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$  è ancora un isomorfismo lineare.

Possiamo così definire su  $\xi^* = E^* \xrightarrow{\pi} B$  un'unica struttura di fibrato vettoriale differenziabile, per cui  $\mathcal{A}^* = \{(U_a, \psi_a^*) \mid a \in A\}$ , ove

$$\psi_a^* : U_a \times \mathbb{R}^n \ni (p, v^*) \rightarrow [(\psi_a(p))^*]^{-1} v^* \in E^*|_{U_a},$$

sia un atlante di trivializzazione.

**DEFINIZIONE III.3.2.** Dato un fibrato vettoriale differenziabile  $\xi$ , il fibrato vettoriale differenziabile  $\xi^*$  definito sopra si dice il *fibrato duale* di  $\xi$ .

**PROPOSIZIONE III.3.3.** Ogni fibrato vettoriale è equivalente al suo fibrato duale.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\xi$  un fibrato vettoriale di rango  $n$  ed  $\mathcal{A} = \{(U_a, \psi_a) \mid a \in A\}$  un suo atlante di trivializzazione. Sia  $\{\phi_a\}$  una partizione dell'unità subordinata ad  $\{U_a \mid a \in A\}$  con  $\phi_a \in \mathcal{C}^\infty(B(\xi))$  e  $\phi_a \geq 0$  su  $B(\xi)$ . Definiamo un prodotto scalare sulle fibre di  $\xi$  mediante

$$(v_1 | v_2) = \sum_{p \in U_a} \phi_a(p) \cdot (\text{pr}_{\mathbb{R}^n}(\psi_a(v_1)) | \text{pr}_{\mathbb{R}^n}(\psi_a(v_2)))_{\mathbb{R}^n},$$

$$\forall p \in B(\xi), \forall v_1, v_2 \in E(\xi)_p.$$

Il prodotto scalare definisce un isomorfismo (di Riesz)  $\rho_p : E_p \rightarrow E_p^*$  per ogni  $p \in M$ , che ci dà un'equivalenza  $(\rho, \text{id}_B) : \xi \rightarrow \xi^*$ .  $\square$

**DEFINIZIONE III.3.4.** Sia  $M$  una varietà differenziabile e  $TM \xrightarrow{\pi} M$  il suo fibrato tangente. Il fibrato duale  $T^*M \xrightarrow{\pi} M$  del fibrato tangente si dice il *fibrato cotangente* su  $M$ .

**Somma diretta.** Se  $\xi_1, \xi_2$  sono fibrati vettoriali, di ranghi  $n_1$  ed  $n_2$  rispettivamente, allora il prodotto  $\xi_1 \times \xi_2$  ha una struttura naturale di fibrato vettoriale di rango  $n_1 + n_2$ , con fibra sopra il punto  $(p_1, p_2) \in B(\xi_1) \times B(\xi_2)$  uguale allo spazio vettoriale somma diretta  $E(\xi_1)_{p_1} \oplus E(\xi_2)_{p_2}$ .

Se  $\xi_1$  e  $\xi_2$  hanno la stessa base  $B(\xi_1) = B(\xi_2) = M$ , allora la somma di Whitney  $\xi_1 \oplus_M \xi_2$  è un fibrato vettoriale differenziabile di rango  $n_1 + n_2$ .

**Prodotto tensoriale.** Dati due fibrati vettoriali differenziabili  $\xi_1, \xi_2$ , di ranghi  $n_1$  ed  $n_2$  rispettivamente, con basi  $B(\xi_1) = B_1$  e  $B(\xi_2) = B_2$ , definiamo il loro *prodotto tensoriale*  $\xi_1 \otimes \xi_2$  come il fibrato vettoriale differenziabile di rango  $n_1 n_2$  con base  $B_1 \times B_2$  e fibra su  $E(\xi_1)_{p_1} \otimes_{\mathbb{R}} E(\xi_2)_{p_2}$  sul punto  $(p_1, p_2) \in B_1 \times B_2$ . Se  $B_1 = B_2 = M$ , indichiamo con  $\xi \otimes_M \xi_2$  l'immagine inversa di  $\xi_1 \otimes \xi_2$  rispetto all'immersione  $p \rightarrow (p, p)$  di  $M$  nella diagonale di  $M \times M$ . Esso si dice *prodotto di Whitney* dei fibrati  $\xi_1$  e  $\xi_2$ .

**Fibrati tensoriali.** Le operazioni di somme dirette, prodotti tensoriali, somme e prodotti di Whitney di fibrati vettoriali differenziabili sono associative e commutative, a meno di equivalenze.

In particolare, fissati due interi non negativi  $r, s$  possiamo definire, a partire da un fibrato vettoriale reale  $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$  di rango  $n$ , un fibrato vettoriale differenziabile  $\tau^{r,s}(\xi)$  sulla stessa base  $B$ , di rango  $n(r + s)$ , con spazio totale

$$\mathcal{T}^{r,s}(E) = \bigsqcup_{p \in B} \underbrace{E_p \otimes \cdots \otimes E_p}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{E_p^* \otimes \cdots \otimes E_p^*}_{s \text{ volte}}$$

Possiamo descrivere la sua struttura di fibrato vettoriale differenziabile a partire da un atlante di trivializzazione  $\mathcal{A} = \{(U_a, \psi_a) \mid a \in A\}$  di  $\xi$ . L'atlante corrispondente  $\mathcal{T}^{r,s}\mathcal{A} = \{(U_a, \psi_a^{(r,s)}) \mid a \in A\}$  di  $\tau^{r,s}(\xi)$  consiste delle carte

$$U_a \times (\mathbb{R}^n)^{\otimes r} \otimes (\mathbb{R}^n)^{\otimes s} \ni (p, t, \sigma) \rightarrow (\psi_a(p))^{\otimes r} t \otimes ([\psi_a(p)^*]^{-1})^{\otimes s} \sigma \in \mathcal{T}^{r,s}(E)|_{U_a}.$$

Il fibrato vettoriale  $\tau^{r,s}(\xi)$  ha rango  $n(r + s)$  e si dice la *potenza tensoriale  $r$ -covariante ed  $s$ -controvariante* di  $\xi$ .

**DEFINIZIONE III.3.5.** Se  $M$  è una varietà differenziabile di dimensione  $m$ , il fibrato  $\tau^{r,s}(TM \xrightarrow{\pi} M)$  si indica con  $T^{r,s}M \xrightarrow{\pi} M$  e si dice il fibrato dei tensori  $r$ -covarianti ed  $s$ -controvarianti su  $M$ .

### III.4. Fibrati vettoriali e fibrato tangente

**DEFINIZIONE III.4.1.** Sia  $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$  un fibrato differenziabile. Il *fibrato verticale* su  $E$  è il nucleo del differenziale della proiezione sulla base:

$$(3.4.1) \quad VE = \{v \in TE \mid d\pi(v) = 0\}.$$

Supponiamo ora che  $E \xrightarrow{\pi} M$  sia un fibrato vettoriale. Possiamo identificare  $M$  alla sezione nulla di  $E$ , mediante l'applicazione

$$(3.4.2) \quad \iota : M \ni x \rightarrow 0_x \in E.$$

Abbiamo allora

PROPOSIZIONE III.4.2. *Ogni fibrato vettoriale  $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$  è equivalente al pullback su  $M$ , mediante l'inclusione (3.4.2), del suo fibrato verticale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $x \in M$  e  $v \in E$ . Associamo a  $v$  il vettore  $\vec{v} \in V_{0,x}E$  definito da

$$\vec{v}f = \frac{d}{dt}f(tv)|_{t=0}.$$

Otteniamo così un'applicazione  $E \rightarrow VE|_M = \iota^*(VE)$ , che si verifica facilmente essere un'equivalenza di fibrati vettoriali.  $\square$

PROPOSIZIONE III.4.3. *Se  $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$  è un fibrato vettoriale differenziabile, allora la restrizione di  $TE$  ad  $M$  (cioè il suo pullback mediante l'inclusione (3.4.2)) è equivalente alla somma diretta di  $TM$  e della restrizione ad  $M$  del fibrato verticale:*

$$(3.4.3) \quad TE|_M \simeq TM \oplus_M VE|_M. \quad \square$$

Utilizzando le proposizioni III.4.2 e III.4.3 ed il teorema d'immersione di Whitney otteniamo il

TEOREMA III.4.4. *Sia  $\xi_1 = E_1 \xrightarrow{\pi_1} M$  un fibrato vettoriale differenziabile. Possiamo allora trovare un fibrato vettoriale differenziabile  $\xi_2 = E_2 \xrightarrow{\pi_2} M$  sulla stessa base  $M$  tale che la somma di Whitney  $\xi_1 \oplus_M \xi_2$  sia equivalente ad un fibrato banale.*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema d'immersione di Whitney possiamo trovare un diffeomorfismo  $\Phi : E_1 \rightarrow Q \subset \mathbb{R}^\ell$  tra  $E_1$  ed una sottovarietà differenziabile propria  $Q$  di uno spazio Euclideo  $\mathbb{R}^\ell$ . Per ogni punto  $y \in Q$  identifichiamo lo spazio tangente  $T_yQ$  ad un sottospazio dello spazio Euclideo  $\mathbb{R}^\ell$ . Definiamo quindi il fibrato vettoriale  $NQ$  mediante

$$(3.4.4) \quad NQ = \{(y, w) \in Q \times \mathbb{R}^\ell \mid w \perp T_yQ\}.$$

In ogni punto  $y$  di  $Q$  abbiamo allora

$$T_y\mathbb{R}^\ell \simeq \mathbb{R}^\ell = T_yQ \oplus N_yQ.$$

D'altra parte, se  $x \in M$ , nel punto  $y = \Phi(x) \in \Phi(M) \subset Q$ , abbiamo

$$T_yQ = d\Phi(T_xM) \oplus \Phi(V_xE_1),$$

da cui ricaviamo che

$$\begin{aligned} \Phi^*(T\mathbb{R}^\ell|_{\Phi(M)}) &\simeq VE_1|_M \oplus_M TM \oplus_M (\Phi^*NQ|_{\Phi(M)}) \\ &\simeq E_1 \oplus_M (TM \oplus_M (\Phi^*NQ|_{\Phi(M)})). \end{aligned}$$

Poiché  $T\mathbb{R}^\ell \simeq \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$  è un fibrato banale, ed il pullback di un fibrato banale è ancora banale, questo completa la dimostrazione del teorema.  $\square$

### III.5. Norme differenziabili e strutture Euclidee

Sia  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$  un fibrato vettoriale. Indichiamo con  $0_E$  la sua sezione nulla.

DEFINIZIONE III.5.1. Una *norma differenziabile* su  $\xi$  è un'applicazione reale continua e non negativa  $\|\cdot\|_E \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$  che goda delle proprietà:

$$(3.5.1) \quad \|q\|_E > 0 \quad \text{se} \quad q \notin 0_E,$$

$$(3.5.2) \quad \|kq\|_E = |k| \|q\|_E \quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall q \in E,$$

$$(3.5.3) \quad \|q_1 + q_2\|_E \leq \|q_1\|_E + \|q_2\|_E, \quad \forall p \in B, \forall q_1, q_2 \in E_p, \quad \|\cdot\|_E^2 \in \mathcal{C}^\infty(E).$$

DEFINIZIONE III.5.2. Una *struttura Euclidea* su  $\xi$  è un'applicazione differenziabile

$$E \oplus_B E \ni (q_1, q_2) \longrightarrow (q_1|q_2)_E \in \mathbb{R}$$

bilineare simmetrica, definita positiva. Valgono cioè

$$(3.5.4) \quad (q_1, q_2)_E = (q_2|q_1)_E, \quad \forall (q_1, q_2) \in E \oplus_B E,$$

$$(3.5.5) \quad (q_1 + q_2, q_3)_E = (q_1|q_3)_E + (q_2|q_3)_E, \quad \forall p \in B, \forall q_1, q_2, q_3 \in E_p,$$

$$(3.5.6) \quad (kq_1|q_2)_E = k(q_1|q_2)_E, \quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall (q_1, q_2) \in E \oplus_B E,$$

$$(3.5.7) \quad (q|q)_E > 0 \quad \forall q \in E \setminus 0_E.$$

Osserviamo che, data una struttura Euclidea  $(|\cdot|)_E$  su  $\xi$ , la  $\|q\|_E = \sqrt{(q|q)_E} \geq 0$  è una norma differenziabile su  $\xi$ .

L'esistenza di norme differenziabili è garantita quindi dalla

PROPOSIZIONE III.5.3. *Ogni fibrato vettoriale  $\xi$  ammette una struttura Euclidea.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  un atlante di trivializzazione di  $\xi$ . Se  $\xi$  ha rango  $k$ , per ogni  $i$  la

$$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \ni q \longrightarrow (\pi(q), \phi_i(q)) \in U_i \times \mathbb{R}^k$$

è un'equivalenza di fibrati vettoriali. Se  $\{\chi_i\} \subset \mathcal{C}^\infty(B)$  è una partizione dell'unità su  $B$  subordinata al ricoprimento  $\{U_i\}_{i \in I}$ , la

$$(q_1|q_2)_E = \sum_{\pi(q_1) \in U_i} \chi_i(\pi(q_1)) (\phi_i(q_1)|\phi_i(q_2))_{\mathbb{R}^k}, \quad \forall (q_1, q_2) \in E \oplus_B E,$$

definisce una struttura Euclidea su  $\xi$ . □

DEFINIZIONE III.5.4. Una *struttura Euclidea* sul fibrato tangente di una varietà  $M$  si dice una *struttura Riemanniana* su  $M$ .

### III.6. Classi di isomorfismo di fibrati vettoriali

Ricordiamo che, se  $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$  è un fibrato vettoriale differenziabile di rango  $k$ , con base  $M$ , data un'altra varietà differenziabile  $N$  ed un'applicazione differenziabile  $f : N \rightarrow M$  di  $N$  nella base di  $\xi$ , il pullback  $f^*\xi$  è il fibrato differenziabile di rango  $k$  su  $N$ , con spazio totale  $f^*E$  e proiezione  $\pi_f$  definiti da

$$(3.6.1) \quad \begin{cases} f^*E := E(f^*\xi) = \{(x, v) \in N \times E \mid \pi(v) = f(x)\}, \\ \pi_f := \pi(f^*\xi)(x, v) = x, \quad \forall (x, v) \in E(f^*\xi). \end{cases}$$

Se abbiamo una composizione di applicazioni differenziabili

$$M'' \xrightarrow{g} M' \xrightarrow{f} M$$

ed un fibrato vettoriale  $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$  su  $M$ , allora

$$(f \circ g)^* \xi \equiv g^* f^* \xi$$

sono canonicamente equivalenti: infatti

$$E((f \circ g)^* \xi) = \{(x, v) \in M'' \times E \mid f(g(x)) = \pi(v)\},$$

$$E(g^* f^* \xi) = \{(x, (y, v)) \in M'' \times M' \times E \mid g(x) = y, f(y) = \pi(v)\}$$

e l'equivalenza è definita dall'applicazione  $(x, (y, v)) = (x, (f(x), v)) \rightarrow (x, v)$ .

Indichiamo con  $\text{Vec}_k(M)$  la collezione delle classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali di rango  $k$  sulla varietà  $M$ . Possiamo considerarlo come un insieme puntato, ove il punto base è costituito dalla classe d'equivalenza del fibrato banale  $M \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\pi_M} M$ . L'osservazione che abbiamo fatto sopra si può esprimere mediante la

**PROPOSIZIONE III.6.1.**  *$\text{Vec}_k(\cdot)$  è un funtore dalla categoria delle varietà ed applicazioni differenziabili alla categoria degli spazi puntati e delle applicazioni che preservano i punti base.*

Abbiamo la

**PROPOSIZIONE III.6.2** (proprietà d'omotopia dei fibrati vettoriali). *Siano  $M$  ed  $N$  varietà differenziabili, con  $M$  compatta. Se  $f_0, f_1 : M \rightarrow N$  sono due applicazioni differenziabili omotope e  $\xi = E \xrightarrow{\pi_N} N$  è un fibrato vettoriale su  $N$ , allora i fibrati  $f_0^* \xi$  ed  $f_1^* \xi$  sono isomorfi.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $F : M \times I \ni (x, t) \rightarrow f_t(x) \in N$  un'omotopia di classe  $\mathcal{C}^\infty$  tra  $f_0$  ed  $f_1$ . Indichiamo con  $\text{pr}_M : M \times I \ni (x, t) \rightarrow x \in M$  la proiezione sul primo fattore. Per dimostrare il teorema, sarà sufficiente verificare che, se per un  $t_0 \in [0, 1]$  il fibrato  $f_{t_0}^* \xi$  è isomorfo ad un fibrato vettoriale  $\zeta$  su  $M$ , ciò è ancora vero per tutti i fibrati  $f_t^* \xi$  con  $t \in [0, 1]$  e  $|t - t_0| < \epsilon$  per qualche  $\epsilon > 0$ .

Consideriamo sulla varietà compatta con bordo<sup>3</sup>  $M \times I$  i due fibrati vettoriali  $F^* \xi$  e  $\text{pr}_M^* \zeta$  e il fibrato principale  $\text{Iso}(F^* \xi, \text{pr}_M^* \zeta)$ , la cui fibra su  $(x, t)$  è l'insieme di tutti gli isomorfismi lineari  $\lambda_x : E(f_t^* \xi)_x \rightarrow E(\zeta)_x$ . Per ipotesi questo fibrato ha una sezione  $\sigma$  su  $M \times \{t_0\}$ . Il fibrato principale  $\text{Iso}(f^* E, p_M^* F)$  è un aperto del fibrato vettoriale

$$\eta = \text{Hom}(F^* \xi, \text{pr}_M^* \zeta) = (\text{pr}_M^* \zeta)^* \otimes_{M \times I} F^* \xi.$$

La sezione  $\sigma$  si estende a una sezione globale  $\tilde{\sigma}$  di  $\eta$  su  $M \times I$ . La  $\tilde{\sigma}$  sarà ancora una sezione di  $\text{Iso}(F^* \xi, \text{pr}_M^* \zeta)$  su un intorno aperto di  $M \times t_0$ . Per la compattezza di  $M$ , questo intorno conterrà  $M \times t$  per tutti i  $t \in [0, 1]$  con  $|t - t_0| < \epsilon$  per qualche  $\epsilon > 0$ .  $\square$

<sup>3</sup>Per evitare di utilizzare nella dimostrazione la varietà compatta a bordo  $M \times I$ , possiamo osservare che l'omotopia  $F = (f_t) : M \times I \rightarrow N$  si estende ad un'applicazione differenziabile  $\tilde{F} : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ , e ragionare sulla varietà differenziabile senza bordo  $M \times \mathbb{R}$ .



OSSERVAZIONE III.6.3. La proposizione vale anche senza l'ipotesi di compattezza su  $M$ . Ricordiamo che tutte le varietà che consideriamo supponiamo siano *paracompatte*.

COROLLARIO III.6.4. *Ogni fibrato vettoriale sopra una varietà contrattile è isomorfo al fibrato banale.*

ESEMPIO III.6.5.  $\text{Vec}_k(S^1)$  si può identificare alle classi di omotopia di applicazioni  $f : \{\pm 1\} \rightarrow \mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$  che mandano il punto 1 in  $I_k$ . Esso consiste quindi di due punti se  $k \geq 1$ . Nel caso  $k = 1$  i due fibrati corrispondono rispettivamente al cilindro (caso orientabile) e al nastro di Möbius (caso non orientabile).

### III.7. Fibrati vettoriali sulle sfere

Decomponiamo la sfera

$$S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{h=0}^n x_h^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

nell'unione di due celle chiuse:

$$S^n = D_+^n \cup D_-^n, \quad \text{con} \quad D_+^n = \{x \in S^n \mid x_0 \geq 0\}, \quad D_-^n = \{x \in S^n \mid x_0 \leq 0\}.$$

Sia

$$S^{n-1} = D_+^n \cap D_-^n = \{x \in S^n \mid x_0 = 0\}.$$

Data un'applicazione continua  $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$ , possiamo definire un fibrato vettoriale di rango  $r$  su  $S^n$  incollando i fibrati banali  $D_+^n \times \mathbb{R}^k$  e  $D_-^n \times \mathbb{R}^k$  mediante la funzione d'incollamento che associa ad  $(x, v) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^k \subset D_+^n \times \mathbb{R}^k$  l'elemento  $(x, f(x)v) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^k \subset D_-^n \times \mathbb{R}^k$ . La  $f$  è detta la funzione di *clutching*<sup>4</sup>. Si dimostra facilmente che

LEMMA III.7.1. *Siano  $f_0, f_1 : S^{n-1} \rightarrow \mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$  due funzioni di clutching. Se  $f_0$  ed  $f_1$  sono omotope, allora i fibrati vettoriali  $E_{f_0}$  ed  $E_{f_1}$  sono equivalenti. Abbiamo quindi un'applicazione naturale*

$$(3.7.1) \quad \pi(S^{n-1}, \mathbf{GL}(k, \mathbb{R})) \longrightarrow \text{Vec}_k(S^n).$$

Poiché  $D_+^n$  e  $D_-^n$  sono contrattili, i fibrati vettoriali con basi  $D_+^n$  e  $D_-^n$  sono banali. Da questa osservazione segue il

LEMMA III.7.2. *L'applicazione (3.7.1) è surgettiva.*

Lo studio dell'applicazione (3.7.1) è complicato dal fatto che il gruppo  $\mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$  ha due componenti connesse. È quindi conveniente considerare dapprima i fibrati vettoriali orientati.

Indichiamo con  $\text{Vec}_k^+(M)$  le classi di equivalenza di fibrati vettoriali orientati di rango  $k$  sulla varietà differenziabile  $M$ . Sia  $\mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})$  il gruppo degli endomorfismi lineari di  $\mathbb{R}^k$  con determinante positivo. Abbiamo allora

PROPOSIZIONE III.7.3. *L'applicazione  $\pi(S^{n-1}, \mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})) \rightarrow \text{Vec}_k^+(S^n)$  è bigettiva.*

<sup>4</sup>“clutch” è in inglese la frizione.

Per analizzare  $\text{Vec}_k(S^n)$ , introduciamo lo spazio  $\text{Vec}_k^0(S^n)$  che consiste delle classi di equivalenza di fibrati vettoriali di rango  $k$  su  $S^n$  che hanno un'orientazione assegnata sul punto  $e_1 \in S^{n-1} \subset S^n$ . Scegliendo le trivializzazioni su  $D_\pm^n$  che mantengono questa orientazione assegnata, le abbiamo fissate entrambe a meno di omotopia. Otteniamo così

LEMMA III.7.4. *Vi è una bigezione naturale*

$$\pi(S^{n-1}, e_1; \mathbf{GL}(k, \mathbb{R}), \mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})) \rightarrow \text{Vec}_k^0(S^n).$$

Se  $n \geq 2$ ,  $S^{n-1}$  è connesso ed abbiamo quindi:

LEMMA III.7.5. *Se  $n \geq 2$ , vi è una bigezione naturale*

$$\pi(S^{n-1}, \mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})) \rightarrow \text{Vec}_k^0(S^n).$$

Quindi l'applicazione naturale  $\text{Vec}_k^+(S^n) \rightarrow \text{Vec}_k^0(S^n)$  è una bigezione. Ne segue che

PROPOSIZIONE III.7.6. *Se  $n \geq 2$ , ogni fibrato vettoriale reale è orientabile, ed ha esattamente due orientazioni, che dipendono dalla scelta dell'orientazione su una singola fibra. L'applicazione (3.7.1) ha fibre che hanno al più due elementi. Hanno un solo elemento le fibre che corrispondono a fibrati vettoriali che ammettono un automorfismo che inverte l'orientazione delle fibre, due elementi altrimenti.*

OSSERVAZIONE III.7.7. Poiché  $\mathbf{SO}(k)$  è un retratto di deformazione di  $\mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})$ , abbiamo

$$\pi(S^{n-1}, \mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})) \simeq \pi(S^{n-1}, \mathbf{SO}(k)) \simeq \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(k)).$$

## CAPITOLO IV

### Forme differenziali negli spazi Euclidei

#### IV.1. Forme differenziali in $\mathbb{R}^n$

Indichiamo con  $\Lambda^q \mathbb{R}^n$  lo spazio vettoriale reale, di dimensione  $\binom{n}{q}$ , delle forme  $q$ -multilineari alternate su  $\mathbb{R}^n$ .

DEFINIZIONE IV.1.1. Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Le applicazioni  $\eta \in \mathcal{C}^\infty(A, \Lambda^q \mathbb{R}^n)$  si dicono *forme differenziali alternate, omogenee di grado  $q$  e con coefficienti di classe  $\mathcal{C}^\infty$  in  $A$* .

Useremo la notazione

$$(4.1.1) \quad \mathcal{Q}^q(A) := \mathcal{C}^\infty(A, \Lambda^q \mathbb{R}^n)$$

Indichiamo con  $dx^i$  la forma lineare su  $\mathbb{R}^n$  definita da:

$$(4.1.2) \quad dx^i(x) = x^i, \quad \forall x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Le forme:

$$(4.1.3) \quad dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} \quad \text{con} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$$

costituiscono una base di  $\Lambda^q \mathbb{R}^n$ . Una forma  $\eta \in \mathcal{Q}^q(A)$  si scrive in modo unico come:

$$(4.1.4) \quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} \eta_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}, \quad \text{con}$$

$$(4.1.5) \quad \eta_{i_1, \dots, i_q}(x) = \eta(x)(e_{i_1}, \dots, e_{i_q}) \in \mathcal{C}^\infty(A),$$

ove abbiamo indicato con  $e_1, \dots, e_n$  i vettori della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ .

DEFINIZIONE IV.1.2. L'algebra di Grassmann  $\mathcal{Q}^*(A)$  delle forme alternate di classe  $\mathcal{C}^\infty$  su  $A$  è la somma diretta

$$\mathcal{Q}^*(A) = \bigoplus_{q=0}^n \mathcal{Q}^q(A),$$

con il prodotto definito sulle forme omogenee da

$$\begin{aligned} & \eta' \wedge \eta''(x)(v_1, \dots, v_q) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_{q'} \leq q \\ 1 < \sigma_{q'+1} < \dots < \sigma_q \\ \sigma \in \mathcal{S}_q}} \varepsilon(\sigma) \eta'(x)(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_{q'}}) \eta''(x)(v_{\sigma_{q'+1}}, \dots, v_{\sigma_q}) \\ & \forall v_1, \dots, v_q \in \mathbb{R}^n, \quad \eta' \in \mathcal{Q}^{q',(k)}(A), \quad \eta'' \in \mathcal{Q}^{q'',(k)}(A), \quad q' + q'' = q. \end{aligned}$$

### IV.2. Pull-back

Se  $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$  è una funzione reale di classe  $\mathcal{C}^\infty$ , definita sull'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ , il suo differenziale è l'elemento di  $\Omega^1(A)$  definito da:

$$(4.2.1) \quad df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} dx^i.$$

Siano  $B$  un aperto di  $\mathbb{R}^m$ ,  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^n) \in \mathcal{C}^\infty(B, A)$ .

DEFINIZIONE IV.2.1. Il *pullback*, o *immagine inversa* di una forma differenziale  $\eta \in \Omega^q(A)$ , descritta da (4.1.4), è la forma differenziale  $\phi^*\eta \in \Omega^q(B)$  definita da:

$$(4.2.2) \quad \phi^*\eta = \sum_{i_1 \dots i_q} \eta_{i_1 \dots i_q}(\phi) d\phi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi^{i_q}.$$

Si verifica immediatamente che il pull-back di forme gode delle proprietà:

TEOREMA IV.2.2. (1)  $\phi^* : \Omega^q(A) \rightarrow \Omega^q(B)$  è un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare.

(2) Se  $\eta_1 \in \Omega^{q_1}(A)$  ed  $\eta_2 \in \Omega^{q_2}(A)$ , allora  $\eta_1 \wedge \eta_2 \in \Omega^{q_1+q_2}(A)$  e

$$\phi^*(\eta_1 \wedge \eta_2) = (\phi^*\eta_1) \wedge (\phi^*\eta_2).$$

(3) Se  $\psi : D \rightarrow B$  è un'applicazione di classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ , definita su un aperto  $D$  di  $\mathbb{R}^\ell$ , allora

$$(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*.$$

### IV.3. Differenziale di una forma

Estendiamo la definizione del differenziale dal caso delle funzioni a quello delle forme differenziali ponendo, per una  $\eta \in \Omega^{q,(k+1)}(A)$  descritta dalla (4.1.4):

$$(4.3.1) \quad \begin{aligned} d\eta(x) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} d\eta_{i_1 \dots i_q}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} \frac{\partial \eta_{i_1 \dots i_q}(x)}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}. \end{aligned}$$

Il differenziale delle forme differenziali è caratterizzato dal:

TEOREMA IV.3.1. Il differenziale è l'unica applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare

$$d : \Omega^*(A) \longrightarrow \Omega^*(A)$$

che goda delle seguenti proprietà:

(1) Per ogni intero  $q \geq 0$ , il differenziale definisce un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare:

$$(4.3.2) \quad d : \Omega^q(A) \rightarrow \Omega^{q+1}(A).$$

(2)  $d$  coincide con il differenziale definito sulle funzioni nel caso  $q = 0$ .

(3) Vale la formula del differenziale del prodotto:

$$\begin{aligned} d(\eta_1 \wedge \eta_2) &= d\eta_1 \wedge \eta_2 + (-1)^{q_1} \eta_1 \wedge d\eta_2 \\ &\quad \forall \eta_1 \in \Omega_{k+1}^{q_1}(A), \quad \forall \eta_2 \in \Omega_{k+1}^{q_2}(A) \end{aligned}$$

(4)  $d \circ d : \Omega^q(A) \rightarrow \Omega^{q+2}(A)$  è l'applicazione nulla, cioè

$$(4.3.3) \quad d \circ d = d^2 = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Il differenziale definito dalla (4.3.1) soddisfa la (3) per le proprietà del prodotto esterno e la regola di Leibnitz per la derivazione del prodotto di due funzioni. La (4.3.3) è allora conseguenza della:

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0,$$

valida per ogni funzione  $f \in \mathcal{C}^2(A, \mathbb{R})$ . Viceversa, se valgono le (1), (2), (3), (4) l'espressione del differenziale è data necessariamente dalla (4.3.1).  $\square$

#### IV.4. Il complesso di de Rham

Per ogni aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ , otteniamo un *complesso di operatori differenziali*:

$$(4.4.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega_{k+n}^0(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_{k+n-1}^1(A) & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \rightarrow & \Omega_{k+n-h}^h(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_{k+n-h-1}^{h+1}(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_{k+n-h-2}^{h+2}(A) \rightarrow \\ & & & & \dots & \xrightarrow{d} & \Omega_k^n(A) \rightarrow 0 \end{array}$$

DEFINIZIONE IV.4.1. Il complesso (4.4.1) si dice il *complesso di de Rham*<sup>1</sup> sull'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ .

Poniamo:

$$(4.4.2) \quad \mathcal{Z}^q(A) = \{\eta \in \Omega^q(A) \mid d\eta = 0\} \quad (\text{spazio delle } q\text{-forme chiuse}),$$

$$(4.4.3) \quad \mathcal{B}^q(A) = \{d\eta \mid \eta \in \Omega^{q-1}(A)\} \quad (\text{spazio delle } q\text{-forme esatte}),$$

$$(4.4.4) \quad H^q(A) = \mathcal{Z}^q(A) / \mathcal{B}^q(A) \quad (q\text{-esimo gruppo di coomologia di de Rham}).$$

Se  $\alpha \in \mathcal{Z}^q(A)$ , indicheremo con  $[\alpha]$  la corrispondente classe di coomologia in  $H^q(A)$ ,

Se  $q < 0$ , oppure  $q > n$ , porremo  $\mathcal{Z}^q(A) = 0$ ,  $\mathcal{B}^q(A) = 0$ ,  $H^q(A) = 0$ .

Dalla formula dei differenziali, otteniamo immediatamente il:

TEOREMA IV.4.2. Siano  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $B$  un aperto di  $\mathbb{R}^m$  e  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(B, A)$ . Il pullback commuta con i differenziali:

$$(4.4.5) \quad \phi^*(d\eta) = d\phi^*\eta, \quad \forall \eta \in \Omega^*(A)$$

e definisce quindi, per ogni intero  $q$ , un omomorfismo

$$(4.4.6) \quad [\phi^*] : H^q(A) \longrightarrow H^q(B).$$

<sup>1</sup> Georges de Rham, Matematico (Roche, Losanna, 1903 - Losanna 1990). Dal 1932 prof. all'univ. di Losanna e successivamente di Parigi (1943) e Ginevra (1953). Le sue ricerche riguardano soprattutto problemi di natura differenziale e topologica sulle varietà differenziabili. Nel 1931 dimostrò il famoso teorema che identifica i gruppi di coomologia ad invarianti topologici. I suoi risultati hanno aperto nuovi ed elevati settori di ricerca. Il suo lavoro è stato particolarmente importante per lo sviluppo della teoria dei fasci.

OSSERVAZIONE IV.4.3. Il Teorema IV.4.2 ci dice che la differenziazione è un'operazione invariante rispetto ai cambiamenti di carte locali e ci permetterà perciò di definire le forme differenziali e il differenziale di forme sulle varietà.

Dimostriamo alcuni risultati sui gruppi di coomologia del complesso di de Rham, da cui ricaveremo in particolare il Lemma di Poincaré-Volterra sull'aciclicità locale di (4.4.1).

LEMMA IV.4.4. *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $I$  un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  e*

$$\pi_A : A \times I \ni (x, t) \rightarrow x \in A$$

la proiezione canonica. Allora il pullback di forme induce un isomorfismo lineare

$$(4.4.7) \quad [\pi_A^*] : H^q(A) \longrightarrow H^q(A \times I).$$

In particolare

$$(4.4.8) \quad H^{n+1}(A \times I) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo  $t_0 \in I$  e consideriamo l'inclusione

$$J_{t_0} : A \ni x \longrightarrow (x, t_0) \in A \times I.$$

Poiché  $\pi_A \circ J_{t_0} = \text{id}_A$ , abbiamo

$$\text{id}_{H^q(A)} = [(\pi_A \circ J_{t_0})^*] = [J_{t_0}^* \circ \pi_A^*] = [J_{t_0}^*] \circ [\pi_A^*]$$

e quindi  $[\pi_A^*]$  è iniettiva.

Resta da dimostrare che  $[\pi_A^*]$  è anche surgettiva.

Indichiamo con  $d_x$  il differenziale in  $A$  e con  $d$  quello su  $A \times I$ . Scriviamo un elemento  $\alpha \in \Omega^q(A \times I)$  nella forma

$$\alpha = \alpha' + dt \wedge \alpha'', \quad \text{con } \alpha' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n), \quad \alpha'' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n).$$

Abbiamo allora

$$d\alpha = d_x \alpha + dt \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t} = d_x \alpha' + dt \wedge \left( \frac{\partial \alpha'}{\partial t} - d_x \alpha'' \right).$$

Osserviamo che  $\alpha \in \pi_A^*(\Omega^q(A))$  se e soltanto se

$$\alpha'' = 0, \quad \frac{\partial \alpha'}{\partial t} = 0.$$

Se  $\alpha \in \mathcal{L}^q(A \times I)$ , abbiamo

$$d_x \alpha' = 0, \quad \frac{\partial \alpha'}{\partial t} = d_x \alpha''.$$

Poniamo

$$\beta(x, t) = \int_{t_0}^t \alpha'' dt \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n) \subset \Omega^{q-1}(A \times I).$$

Allora

$$\alpha - d\beta = (\alpha' + dt \wedge \alpha'') - (d_x \beta + dt \wedge \frac{\partial \beta}{\partial t}) = \alpha' - d_x \beta \in \mathcal{L}^q(A \times I) \cap \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n).$$

La forma  $\gamma = \alpha' - d_x \beta$  è coomologa ad  $\alpha$  e soddisfa le equazioni

$$d_x \gamma = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} = 0.$$

In particolare,  $\gamma$  è il pullback mediante  $\pi_A^*$  di un elemento di  $\mathcal{L}^q(A)$ . La dimostrazione è completa.  $\square$

Ogni elemento  $\alpha \in \mathcal{Q}^{n+1}(A \times I) = \mathcal{L}^{n+1}(A \times I)$  è divisibile per  $dt$ , risulta cioè

$$\alpha = dt \wedge \alpha'', \quad \text{con } \alpha'' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^n(A)).$$

Allora

$$\beta = \int_{t_0}^t \alpha'' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^n(A)) \subset \mathcal{Q}^n(A \times I)$$

soddisfa l'equazione

$$d\beta = dt \wedge \frac{\partial \beta}{\partial t} = dt \wedge \alpha'' = \alpha.$$

Più in generale abbiamo:

PROPOSIZIONE IV.4.5. *Siano  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $I_1, \dots, I_k$  intervalli aperti di  $\mathbb{R}$ .*

Allora

$$H^q(A \times I_1 \times \dots \times I_k) = 0, \quad \forall q > n.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti, per il Lemma IV.4.4,  $H^q(A \times I_1 \times \dots \times I_k) \simeq H^q(A \times I_1 \times \dots \times I_{k-1}) \simeq \dots \simeq H^q(A \times I_1) \simeq H^q(A) = \{0\}$ .  $\square$

Dalla Proposizione IV.4.5 si ottiene facilmente il

TEOREMA IV.4.6. *Siano  $I_1, \dots, I_n$  intervalli aperti di  $\mathbb{R}$ . Allora*

$$(4.4.9) \quad H^q(I_1 \times \dots \times I_n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, \\ \{0\} & \text{se } q \neq 0. \end{cases}$$

In particolare, otteniamo il teorema di Poincaré<sup>2</sup> e Volterra<sup>3</sup> sull'aciclicità locale del complesso di de Rham.

<sup>2</sup> Jules Henri Poincaré (Nancy, 29 aprile 1854 - Parigi, 17 luglio 1912) è stato un matematico, un fisico teorico e un filosofo naturale francese. Poincaré viene considerato un enciclopedico e in matematica l'ultimo universalista, dal momento che eccelse in tutti i campi della disciplina attivi ai suoi giorni.

Come matematico e fisico, diede molti contributi originali alla matematica pura, alla matematica applicata, alla fisica matematica e alla meccanica celeste. A lui si deve la formulazione della congettura di Poincaré, uno dei più famosi problemi in matematica. Nelle sue ricerche sul problema dei tre corpi, Poincaré fu la prima persona a scoprire un sistema caotico deterministico, ponendo in tal modo le basi della moderna teoria del caos. Viene inoltre considerato come uno dei fondatori della topologia.

Poincaré introdusse il moderno principio di relatività e fu il primo a presentare le trasformazioni di Lorentz nella loro moderna forma simmetrica. Poincaré completò le trasformazioni concernenti la velocità relativistica e le trascrisse in una lettera a Lorentz nel 1905. Ottenne così la perfetta invarianza delle equazioni di Maxwell, un passo importante nella formulazione della teoria della relatività ristretta. Il gruppo di Poincaré usato in fisica e matematica deve a lui il suo nome.

<sup>3</sup>Vito Volterra (Ancona, 3 maggio 1860 - Roma, 11 ottobre 1940), matematico e fisico italiano. Fu uno dei principali fondatori dell'analisi funzionale e della connessa teoria delle equazioni integrali. Il suo nome noto soprattutto per i suoi contributi alla biologia matematica.

**TEOREMA IV.4.7 (Lemma di Poincaré-Volterra).** *Sia  $\eta \in \Omega^q(A)$  ( $k \geq 1$ ) una forma differenziale definita su un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ , che soddisfa*

$$(4.4.10) \quad d\eta = 0$$

*in un intorno aperto di un punto  $p$  di  $A$ . Se  $q = 0$ , allora  $f$  è costante in un intorno di  $p$  in  $A$ . Se  $q > 0$ , possiamo trovare un intorno aperto  $U$  di  $p$  in  $A$  ed una forma differenziale  $u \in \Omega^{(q-1)}(U)$  tale che:*

$$(4.4.11) \quad du = \eta \text{ in } U.$$

**DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA IV.4.7.** La tesi segue dal Teorema IV.4.6, perché ogni punto  $p \in A$  ha in  $A$  un intorno aperto della forma  $I_1 \times \cdots \times I_n$ , con  $I_1, \dots, I_n$  intervalli aperti in  $\mathbb{R}$ .  $\square$

### IV.5. Coomologia di de Rham a supporti compatti

Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $B$  è un aperto di  $A$ , possiamo definire la restrizione  $r_B^A \eta \in \Omega^q(B)$  di una forma  $\eta \in \Omega^*(A)$  come il pullback di  $\eta$  rispetto all'inclusione  $B \hookrightarrow A$ .

**DEFINIZIONE IV.5.1.** Il *supporto* di una forma differenziale  $\eta \in \Omega^*(A)$  è il complementare del più grande aperto di  $A$  su cui la restrizione di  $\eta$  sia nulla.

Indichiamo con  $\Omega_0^q(A)$  il sottospazio delle  $q$ -forme differenziali alternate, con coefficienti di classe  $\mathcal{C}^\infty$ , che hanno supporto compatto in  $A$ .

Poiché

$$(4.5.1) \quad \text{supp } d\eta \subset \text{supp } \eta, \quad \forall \eta \in \Omega^*(A),$$

il differenziale di una forma a supporto compatto ha ancora supporto compatto. Otteniamo perciò un sottocomplesso del complesso (4.4.1) restringendoci ai sottospazi  $\Omega_0^q(A)$  delle forme con supporto compatto in  $A$ .

$$(4.5.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_0^0(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^1(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^2(A) & \longrightarrow & \cdots \\ \cdots & \longrightarrow & \Omega_0^h(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^{h+1}(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^{h+2}(A) & \longrightarrow & \\ & & \cdots & \longrightarrow & \Omega_0^{n-1}(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^n(A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

**DEFINIZIONE IV.5.2.** Poniamo:

$$\mathcal{Z}_0^q(A) = \{\alpha \in \Omega_0^q(A) \mid d\alpha = 0\}, \quad (\text{spazio delle } q\text{-forme chiuse a supporto compatto}),$$

$$\mathcal{B}_0^q(A) = \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega_0^{q-1}(A)\}, \quad (\text{spazio delle } q\text{-forme esatte a supporto compatto}),$$

$$H_0^q(A) = \mathcal{Z}_0^q(A) / \mathcal{B}_0^q(A), \quad (q\text{-esimo gruppo di coomologia di de Rham a supporti compatti}).$$

Osserviamo che  $H_0^0(A) = 0$  se  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$  con  $n > 0$ , perché  $\mathcal{Z}_0^0(A) = 0$ , in quanto i suoi elementi sono funzioni localmente costanti con supporto compatto in  $A$ .



Sia  $A$  un qualsiasi aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $I$  un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  e  $\pi_A : A \times I \ni (x, t) \rightarrow x \in A$  la proiezione su  $A$ . Se  $\eta \in \Omega_0^q(A \times I)$ , scriviamo

$$(4.5.3) \quad \eta = \eta' + dt \wedge \eta'', \quad \text{con } \eta' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n), \quad \eta'' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n).$$

e definiamo

$$(4.5.4) \quad \pi_{A_*}(\eta) = \int_I \eta'' dt.$$

DEFINIZIONE IV.5.3. La forma  $\pi_{A_*}(\eta) \in \Omega_0^{q-1}(A)$  si dice ottenuta da  $\eta \in \Omega_0^q(A \times I)$  mediante *integrazione sulla fibra*.

LEMMA IV.5.4. *Siano  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  ed  $I$  un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ . L'integrazione sulla fibra anticommuta con i differenziali:*

$$(4.5.5) \quad d_x(\pi_{A_*}(\eta)) = -\pi_{A_*}(d\eta), \quad \forall \eta \in \Omega_0(A \times I).$$

DIMOSTRAZIONE. Con  $\eta$  definita dalla (4.5.3), abbiamo

$$d\eta = d_x \eta' + dt \wedge \left( \frac{\partial \eta'}{\partial t} - d_x \eta'' \right).$$

Quindi

$$\pi_{A_*}(d\eta) = \int_I \left( \frac{\partial \eta'}{\partial t} - d_x \eta'' \right) dt = - \int_I d_x \eta'' dt = -d_x \int_I \eta'' dt = -d_x \pi_{A_*}(\eta)$$

perché  $\int_I (\partial \eta' / \partial t) dt = 0$  per il teorema fondamentale del calcolo integrale.  $\square$

In particolare, per ogni intero non negativo  $q$  l'integrazione sulla fibra definisce un omomorfismo

$$(4.5.6) \quad [\pi_{A_*}] : H^{q+1}(A \times I) \longrightarrow H^q(A).$$

Vale il

LEMMA IV.5.5. *Siano  $A$  un qualsiasi aperto di  $\mathbb{R}^n$  ed  $I$  un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ . Allora per ogni intero non negativo  $q$ , la (4.5.6) è un isomorfismo.*

Utilizzeremo, nella dimostrazione, il seguente

LEMMA IV.5.6. *Sia  $I$  un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  e  $t_0 = \inf I$ . Se  $f(t)dt \in \Omega_0^1(I)$ , la*

$$(4.5.7) \quad u(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

*è l'unica soluzione dell'equazione  $du = f(t)dt$  che si annulli in un intorno destro di  $t_0$ . La  $u$  ha supporto compatto se, e soltanto se,*

$$(4.5.8) \quad \int_I f(t) dt = 0.$$

*La (4.5.8) è condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione  $u' = f$  ammetta in  $I$  una soluzione a supporto compatto.*

OSSERVAZIONE IV.5.7. Per il Lemma IV.5.5 l'applicazione

$$\mathcal{Z}_0^1(I) = \Omega_0^1(I) \ni f(t)dt \longrightarrow \int_I f(t)dt \in \mathbb{R}$$

è un funzionale lineare non nullo il cui nucleo è  $\mathcal{B}_0^1(I)$ . È perciò  $H_0^1(I) \simeq \mathbb{R}$ .

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA IV.5.5. Fissiamo una qualsiasi funzione  $\chi(t) \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$ , con

$$\int_I \chi(t)dt = 1,$$

e definiamo, per ogni intero non negativo  $q$ , l'applicazione

$$(4.5.9) \quad \chi^\sharp : \Omega_0^q(A) \ni \alpha \rightarrow \chi(t) \cdot dt \wedge \pi_A^* \alpha \in \Omega_0^{q+1}(A \times \mathbb{R}).$$

Abbiamo

$$(4.5.10) \quad \pi_{A_*}(\chi^\sharp \alpha) = \alpha, \quad d(\chi^\sharp \alpha) = \chi^\sharp(d\alpha), \quad \forall \alpha \in \Omega_0^q(A).$$

Quindi  $\chi^\sharp$  definisce per passaggio al quoziente un omomorfismo

$$[\chi^\sharp] : H_0^q(A) \longrightarrow H_0^{q+1}(A \times I).$$

Per (4.5.10) abbiamo

$$\text{id}_{H_0^q(A)} = [(\pi_{A_*} \circ \chi^\sharp)] = [\pi_{A_*}] \circ [\chi^\sharp],$$

Da cui segue subito immediatamente che la  $[\pi_{A_*}]$  è surgettiva. Resta da dimostrarne l'iniettività.

Sia  $q \geq 1$  ed  $\eta = \eta' + dt \wedge \eta'' \in \mathcal{Z}_0^q(A \times \mathbb{R})$ , con  $\eta' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n)$ ,  $\eta'' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n)$ . È

$$d_x \eta' = 0, \quad \frac{\partial \eta'}{\partial t} = d_x \eta''.$$

Osserviamo, in particolare, che, se  $\eta'' = 0$ , allora  $\eta = 0$ . Infatti in questo caso  $\eta'$ , essendo indipendente da  $t$  ed a supporto compatto, è nulla.

Supponiamo vi sia una forma  $\alpha \in \Omega_0^{q-2}(A)$  tale che

$$d\alpha = \pi_{A_*} \eta = \int_I \eta'' dt.$$

Sia

$$\beta = \eta - \chi^\sharp(d\alpha) = \eta - d(\chi^\sharp \alpha).$$

È  $[\beta] = [\eta]$  e, per la (4.5.10),

$$\pi_{A_*} \beta = 0.$$

Questo significa che, per

$$\beta = \beta' + dt \wedge \beta'', \quad \text{con} \quad \beta' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n), \quad \beta'' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n),$$

risulta

$$\int_I \beta'' dt = 0.$$

Perciò, se  $t_0 = \inf I$ ,

$$\gamma(x, t) = \int_{t_0}^t \beta''(x, s) ds$$

definisce una forma in  $\mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1}\mathbb{R}^n) \subset \Omega_0^{q-1}(A \times I)$  ed abbiamo

$$d\gamma = d_x\gamma + dt \wedge \frac{\partial\gamma}{\partial t} = d_x\gamma + dt \wedge \beta''.$$

Allora

$$\zeta = \beta - d\gamma \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^q\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{Z}_0^q(A \times I)$$

perciò, per quanto osservato in precedenza,  $\zeta = 0$  e quindi  $\beta = d\gamma$ . È dunque  $[\eta] = [\beta] = 0$ . La dimostrazione è completa.  $\square$

Otteniamo quindi

**PROPOSIZIONE IV.5.8.** *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e siano  $I_1, \dots, I_k$  intervalli aperti di  $\mathbb{R}$ . Allora, per ogni intero  $q \geq 0$ ,*

$$(4.5.11) \quad H_0^{q+k}(A \times I_1 \times \dots \times I_k) \simeq H_0^q(A).$$

Dalla Proposizione IV.5.8 e dall'Osservazione IV.5.7 otteniamo il

**TEOREMA IV.5.9.** *Siano  $I_1, \dots, I_n$  intervalli aperti di  $\mathbb{R}$ . Allora*

$$(4.5.12) \quad H_0^q(I_1 \times \dots \times I_n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = n, \\ 0 & \text{se } q \neq n. \end{cases}$$

Se  $\alpha \in \Omega_0^n(I_1 \times \dots \times I_n)$ , allora  $\alpha \in \mathcal{B}_0^n(I_1 \times \dots \times I_n)$  se, e soltanto se,

$$(4.5.13) \quad \int_{I_1 \times \dots \times I_n} \alpha = 0.$$

#### IV.6. Il grado di un'applicazione propria di $\mathbb{R}^n$ in sé

Siano  $A, B$  aperti di  $\mathbb{R}^n$  ed  $f : A \rightarrow B$  un'applicazione propria<sup>4</sup> di classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Poiché  $f$  è propria, il pullback di una forma a supporto compatto in  $A$  ha supporto compatto in  $B$  ed otteniamo quindi un'applicazione

$$f^* : \Omega_0^q(B) \rightarrow \Omega_0^q(A)$$

che commuta con in differenziale e definisce perciò, per passaggio al quoziente, un'applicazione

$$(4.6.1) \quad [f^*] : H_0^q(B) \rightarrow H_0^q(A).$$

Identifichiamo il gruppo di coomologia  $H_0^n(\mathbb{R}^n)$  con  $\mathbb{R}$  mediante il quoziente dell'applicazione

$$(4.6.2) \quad \mathcal{Z}_0^n(\mathbb{R}^n) \ni \alpha \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \alpha \in \mathbb{R}.$$

<sup>4</sup> Un'applicazione continua  $\phi : X \rightarrow Y$  tra due spazi topologici  $X, Y$  si dice propria se l'immagine inversa  $\phi^{-1}(K)$  di ogni compatto  $K$  di  $Y$  è un compatto di  $X$ . Ciò equivale al fatto che  $f$  sia continua, chiusa e che  $\phi^{-1}(y)$  sia compatto in  $X$  per ogni punto  $y$  di  $Y$ .

Se  $f$  è un'applicazione propria differenziabile di  $\mathbb{R}^n$  in sé, la  $[f^*]$  definisce un'applicazione lineare di  $\mathbb{R}$  in sé, quindi della forma  $t \rightarrow c \cdot t$  con  $c \in \mathbb{R}$ .

DEFINIZIONE IV.6.1. Si dice *grado* di un'applicazione propria differenziabile di  $\mathbb{R}^n$  in sé, e si indica con  $\deg(f)$ , il numero per cui risulta

$$(4.6.3) \quad [f^*][\alpha] = (\deg(f)) \cdot [\alpha], \quad \forall [\alpha] \in H_0^n(\mathbb{R}^n).$$

TEOREMA IV.6.2. Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un'applicazione differenziabile propria. Se  $y \in \mathbb{R}^n$  è un valore regolare di  $f$ , definiamo il grado di  $f$  in  $y$  come l'intero

$$(4.6.4) \quad \deg_y f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}(\det df(x)).$$

Allora

$$(4.6.5) \quad \deg_y f = \deg(f) \in \mathbb{Z}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus CV(f),$$

$$(4.6.6) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha = \deg(f) \int_{\mathbb{R}^n} \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathcal{Q}_0^n(\mathbb{R}^n).$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente dimostrare che, dato un qualsiasi valore regolare  $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus CV(f)$ , risulta

$$(4.6.7) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha = (\deg_{y_0} f) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathcal{Q}_0^n(\mathbb{R}^n).$$

L'insieme  $f^{-1}(y_0)$  è finito, perché è compatto e consiste di punti isolati. Sia  $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Per il teorema dell'applicazione inversa, possiamo trovare un intorno aperto connesso  $V$  di  $Y$  tale che  $f^{-1}(V)$  sia unione disgiunta di aperti  $U_1, \dots, U_k$ , con  $x_j \in U_j$  per  $j = 1, \dots, k$  e la restrizione di  $f$  ad  $U_j$  sia un diffeomorfismo di  $U_j$  su  $V$ . Fissiamo una forma  $\alpha_0 \in \mathcal{Q}_0^n(V)$ , con

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha_0 = \int_V \alpha_0 = 1.$$

Se  $\alpha \in \mathcal{Q}_0^n(\mathbb{R}^n)$ , la forma

$$\beta = \alpha - \left( \int_{\mathbb{R}^n} \alpha \right) \cdot \alpha_0$$

soddisfa

$$\int_{\mathbb{R}^n} \beta = 0,$$

quindi, per il Teorema IV.5.9, è  $\alpha = du$  per qualche  $u \in \mathcal{Q}_0^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha &= \int_{\mathbb{R}^n} \beta + \left( \int_{\mathbb{R}^n} \alpha \right) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} df^* u + \left( \int_{\mathbb{R}^n} \alpha \right) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0 \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} \alpha \right) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0. \end{aligned}$$

Basterà quindi dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0 = \deg_{y_0} f.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0 &= \sum_{j=1}^k \int_{U_j} f^* \alpha \\ &= \sum_{j=1}^k \text{sign}(\det df(x_j)) \int_{\mathbb{R}^n} \alpha_0 = \text{deg}_{y_0} f, \end{aligned}$$

per le formule di cambiamento di variabile nell'integrale multiplo.  $\square$

ESEMPIO IV.6.3. Per ogni intero positivo  $n$  l'applicazione  $f_n : \mathbb{R} \ni t \rightarrow t^n \in \mathbb{R}$  è propria. Osserviamo che 1 è un valore regolare di  $f_n$ , che viene assunto nel solo punto 1 se  $n$  è dispari, nei punti  $\pm 1$  se  $n$  è pari. Poiché  $\frac{d}{dt} f_n(t) = nt^{n-1}$ , il grado di  $f_n$  è 1 se  $n$  è dispari, 0 se  $n$  è pari.

Più in generale, si può verificare che una  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  è propria se e soltanto se  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \pm\infty$ . Il grado di  $f$  è 0 se  $f$  ha segno costante al di fuori di un intervallo limitato, 1 se  $tf(t)$  è positiva e  $-1$  se  $tf(t)$  è negativa fuori da un intervallo limitato.

ESEMPIO IV.6.4. Per ogni intero positivo  $n$ , l'applicazione

$$f_n : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \ni z \rightarrow z^n \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$$

è propria ed 1 è un suo valore regolare, immagine delle  $n$  radici  $n$ -esime dell'unità. Si verifica facilmente che lo Jacobiano di  $f_n$  ha determinante positivo in tutti i punti  $z \neq 0$  e quindi il grado di  $f_n(z) = z^n$  è  $n$ .

Per il Teorema grande di Picard, una funzione intera  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  è propria se e soltanto se è un polinomio di grado positivo. Se  $f \in \mathbb{C}[z]$ , il grado dell'applicazione  $z \rightarrow f(z)$  da esso definita è uguale al suo grado come polinomio. Infatti i valori regolari  $w$  di  $f$  sono quelli per cui l'equazione  $f(z) = w$  ha un numero di radici distinte uguale al grado di  $f$  e in ciascuna di esse il determinante dello Jacobiano della corrispondente applicazione in  $\mathbb{R}^2$  è positivo.

ESEMPIO IV.6.5. Calcoliamo il grado dell'applicazione  $f : \mathbb{C} \ni z \rightarrow z^3 - \bar{z} \in \mathbb{C}$ . Si verifica facilmente che  $f$  è propria e che 0 è un valore regolare di  $f$ . Abbiamo

$$f^{-1}(0) = \{0, \pm 1, \pm i\}.$$

Il differenziale di  $f$  è  $df = 3z^2 dz - d\bar{z}$ . Abbiamo, in forma matriciale

$$df(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad df(\pm 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad df(\pm i) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Il grado è quindi  $(-1) + 1 + 1 + 1 + 1 = 3$ . Osserviamo che  $df(z)$  ha determinante positivo se  $z$  è sufficientemente grande. Come conseguenza, esiste una costante  $c > 0$  tale che  $f^{-1}(w)$  contenga esattamente tre elementi se  $|w| > c$ .

### IV.7. Orientazione e sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ .

Sia  $M$  una varietà differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $k \geq 1$ . Un atlante  $\mathcal{A}$  di classe  $\mathcal{C}^k$  si dice *orientato* se i determinanti degli jacobiani delle sue funzioni di transizione sono positivi. Diremo che due atlanti orientati  $\mathcal{A}_1$  ed  $\mathcal{A}_2$  sono compatibili se la loro unione è ancora un atlante orientato. Una varietà differenziabile che

ammetta un atlante orientato si dice *orientabile*. La relazione di compatibilità è allora una relazione di equivalenza tra gli atlanti orientati su  $M$  che ne definiscono la struttura differenziabile. Se  $M$  è connessa e orientabile, ci sono esattamente due classi di equivalenza di atlanti orientati su  $M$ . La scelta di una delle due classi è una *orientazione* della varietà  $M$ . Nel caso di una varietà non connessa, un'orientazione di  $M$  sarà la scelta di una particolare orientazione su ciascuna delle sue componenti connesse.

OSSERVAZIONE IV.7.1. Non tutte le varietà sono orientabili. Ad esempio gli spazi proiettivi reali  $\mathbb{R}P^n$  sono orientabili se  $n$  è dispari, ma non se  $n$  è pari.

Consideriamo ora in particolare l'orientabilità di sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$ . Ricordiamo che una sottovarietà localmente chiusa di  $\mathbb{R}^n$ , di classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ) e di dimensione  $m$ , è un sottoinsieme  $S$  di  $\mathbb{R}^n$  tale che, per ogni punto  $p \in S$ , si possano trovare un intorno aperto  $U$  di  $p$  in  $\mathbb{R}^n$  ed  $n - m$  funzioni di classe  $\mathcal{C}^k$

$$f_i : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = m + 1, \dots, n$$

tali che

$$(4.7.1) \quad \begin{cases} S \cap U = \{x \in U \mid f_i(x) = 0 \quad i = m + 1, \dots, n\} \\ df_{m+1}(x) \wedge \dots \wedge df_n(x) \neq 0, \quad \forall x \in U. \end{cases}$$

Una *carta locale* su  $S$  è una *parametrizzazione*

$$(4.7.2) \quad \mathbb{R}^m \supset B^{\text{aperto}} \xrightarrow{\mathbf{r}} S \subset \mathbb{R}^n$$

di classe  $\mathcal{C}^k$ , cioè un'applicazione differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$ , definita su un aperto  $B$  di  $\mathbb{R}^m$ , a valori in  $\mathbb{R}^n$ , *non singolare*, cioè con Jacobiano di rango massimo  $m$  in ogni punto di  $B$ , e la cui immagine  $\mathbf{r}(B)$  sia contenuta in  $S$ . L'esistenza di un atlante ottenuto mediante parametrizzazioni è assicurata dal teorema delle funzioni implicite.

La scelta delle funzioni  $f_{m+1}, \dots, f_n$  determina un'orientazione su  $S \cap U$ : una parametrizzazione (4.7.2) con  $\mathbf{r}(B) \subset S \cap U$  sarà una carta ammissibile se

$$\det \left( \nabla f_{m+1}(\mathbf{r}), \dots, \nabla f_n(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^m} \right) > 0.$$

Torniamo al caso generale. Sia  $M$  una varietà di classe  $\mathcal{C}^k$  con  $k \geq 1$  e sia  $D$  un aperto di  $M$ . È allora possibile definire un'applicazione continua  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  che assuma valori negativi su  $D$  e positivi su  $M \setminus \bar{D}$ . Infatti  $M$  è uno spazio topologico regolare e a base numerabile e dunque metrizzabile. Se  $d$  è una distanza che definisce la topologia di  $M$ , e  $bD$  è la frontiera di  $D$ , basterà porre

$$f(x) = \begin{cases} -d(x, bD) & \text{se } x \in \bar{D} \\ d(x, bD) & \text{se } x \in M - D. \end{cases}$$

Diciamo che  $D$  è regolare di classe  $\mathcal{C}^k$  se è possibile scegliere una tale funzione  $f$  in modo che sia di classe  $\mathcal{C}^k$  in un intorno  $U$  di  $bD$  in  $M$  e non abbia punti critici su  $bD$ ; diciamo allora che la  $f$  *definisce*  $D$ . Se  $M$  è orientata, possiamo definire sulla frontiera di un suo aperto  $D$  di classe  $\mathcal{C}^k$  una struttura di varietà

orientata di dimensione  $n - 1$ . Se  $f$  è una funzione che definisce  $D$ , costruiamo un atlante orientato su  $bD$  nel modo seguente: ogni punto  $p$  di  $bD$  ammette un intorno coordinato  $(U, \phi)$ , compatibile con l'orientazione di  $M$ , della forma

$$\phi = (f, \phi^2, \dots, \phi^n).$$

Considereremo allora la

$$(bD \cap U, (\phi^2, \dots, \phi^n))$$

come una carta dell'atlante che definisce l'orientazione di  $bD$ . La frontiera di  $D$ , pensata come varietà orientata nel modo che abbiamo precisato, si indica con  $\partial D$  e si dice il bordo o la frontiera orientata di  $D$ .

Questa nozione è molto importante per la teoria dell'integrazione delle forme differenziali.

#### IV.8. Integrazione sulle sottovarietà e formule di Stokes

In questo paragrafo, dati un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  e due interi non negativi  $h, q$ , indicheremo con  $\Omega^{q,(h)}(A)$  lo spazio  $\mathcal{C}^h(A, \Lambda^q \mathbb{R}^n)$  delle forme differenziali alternate di grado  $q$ , con coefficienti differenziabili di classe  $\mathcal{C}^h$  in  $A$ .

Sia  $A$  un dominio di  $\mathbb{R}^n$ . Una  $n$ -forma continua  $\eta \in \Omega^{n,(0)}(A)$  si scrive nella forma

$$\eta = \eta_{1,\dots,n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

ove  $\eta_{1,\dots,n}$  è una funzione reale, continua in  $A$ . Se  $D$  è un sottoinsieme misurabile di  $A$  ed  $\eta_{1,\dots,n}$  è integrabile su  $D$ , possiamo definire

$$\int_D \eta = \int_D \eta_{1,\dots,n} dx.$$

Siano  $B$  un aperto di  $\mathbb{R}^q$ ,  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  ed  $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^1(B, A)$  un'inclusione differenziabile. La  $\mathbf{r}(B)$  è una *sottovarietà parametrica* di  $A \subset \mathbb{R}^n$  di dimensione  $q$ . Se  $\eta \in \Omega^{q,(0)}(A)$ , il suo pull-back  $\mathbf{r}^* \eta$  è una  $q$ -forma continua su  $B$ . Se  $D$  è un dominio misurabile di  $B$ , e  $\text{supp}(\mathbf{r}^* \eta) \cap \bar{D}$  un compatto contenuto in  $B$ , possiamo integrare su  $D$  la forma  $\mathbf{r}^* \eta$ , e porre:

$$\int_{\mathbf{r}(D)} \eta = \int_D \mathbf{r}^* \eta.$$

La formula di cambiamento di variabili negli integrali multipli ci dice che un cambiamento di parametrizzazione di  $\mathbf{r}(D)$  che non ne cambi l'orientazione, ottenuto cioè mediante un diffeomorfismo

$$z : B \rightarrow B' \quad \text{tra aperti } B', B \subset \mathbb{R}^q \quad \text{con} \quad \det \left( \frac{\partial z^i}{\partial y^j} \right)_{1 \leq i, j \leq q} > 0$$

non cambia il valore dell'integrale :

$$\int_{z(D)} (\mathbf{r} \circ z^{-1})^* \eta = \int_D \mathbf{r}^* \eta.$$

Possiamo quindi integrare una  $q$ -forma su sottoinsiemi compatti di sottovarietà orientate di dimensione  $q$ , usando l'additività dell'integrale e riducendoci, per

partizione dell'unità, a considerare soltanto il caso di varietà parametriche (carte locali).

Riconsideriamo ora il concetto di *bordo* di un dominio di  $\mathbb{R}^n$ . Supponiamo che  $D$  sia un aperto relativamente compatto di  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $d$  la distanza euclidea in  $\mathbb{R}^n$  e consideriamo la funzione continua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  negativa in  $D$  e positiva su  $\mathbb{R}^n - \bar{D}$ :

$$f(x) = \begin{cases} -d(x, bD) & \text{se } x \in \bar{D} \\ d(x, bD) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n - D. \end{cases}$$

Allora  $bD$  è di classe  $\mathcal{C}^k$  con  $k \geq 1$  in un punto  $p \in bD$  se e soltanto se la funzione  $f$  così definita è di classe  $\mathcal{C}^k$  in un intorno di  $p$  e  $\nabla f(p) \neq 0$ .

Se  $bD$  è di classe  $\mathcal{C}^k$  in un punto  $p$ , per il teorema delle funzioni implicite potremo trovare un intorno  $U$  di  $p$  in  $\mathbb{R}^n$  tale che  $bD \cap U$  sia una sottovarietà chiusa di classe  $\mathcal{C}^k$  e di dimensione  $n - 1$  dell'aperto  $U$ . L'orientazione di  $\partial D$  è definita dalle rappresentazioni parametriche

$$\mathbf{r} : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow U$$

con  $\mathbf{r}(V) = bD \cap U' \subset U$  che soddisfano la condizione:

$$\det \left( \nabla f(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^{n-1}} \right) > 0.$$

Se la frontiera di un un aperto relativamente compatto  $D$  è differenziabile in tutti i punti, indichiamo con  $\partial D$  la sua frontiera come sottovarietà differenziabile orientata di dimensione  $n - 1$ , con l'orientazione definita nel modo precisato sopra.

**TEOREMA IV.8.1 (Formula di Green).** *Sia  $D$  un aperto relativamente compatto con frontiera differenziabile e sia  $\eta \in \mathcal{Q}_1^{n-1}(A)$  una forma differenziale definita in un intorno aperto  $A$  di  $\bar{D}$ . Allora*

$$(4.8.1) \quad \int_{\partial D} \eta = \int_D d\eta.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $A$  un intorno aperto di  $\bar{D}$  ed  $\{U_i\}$  un ricoprimento aperto di  $A$ . Fissiamo una partizione dell'unità  $\{\chi_i\}$  di classe  $\mathcal{C}^\infty$ , subordinata ad  $\{U_i\}$ . Se  $\eta \in \mathcal{Q}_1^{n-1}(A)$ , per l'additività dell'integrale e del differenziale, è sufficiente dimostrare la (4.8.1) per ciascuna delle forme  $\eta_i = \chi_i \cdot \eta$ .

Basterà quindi dimostrare che, per ogni punto  $x_0 \in A$ , esiste un intorno aperto  $U_{x_0}$  di  $x_0$  in  $A$  tale che la (4.8.1) sia verificata se  $\eta$  ha supporto contenuto in  $U_{x_0}$ .

Se  $\eta$  ha supporto compatto contenuto in  $D$ , entrambi i termini della (4.8.1) sono nulli. In questo caso infatti il secondo membro è un integrale su un compatto  $[-R, R]^n \supset D$ . Per il teorema di Fubini, la verifica della formula si riduce all'integrazione per parti per funzioni di una variabile reale.

Sia  $x_0 \in \partial D$ . Per il teorema delle funzioni implicite, esiste un intorno  $U$  di  $x_0$  in cui sono definite coordinate  $y = y(x)$  con

$$U = \{|y^h| < 1 \mid 1 \leq h \leq n\}, \\ D \cap U = \{-1 < y^1 < 0, |y^h| < 1 \text{ per } 2 \leq h \leq n\}.$$



Se  $\eta$  ha supporto contenuto in  $U$ , Abbiamo allora

$$\int_D d\eta = \int_{y^{-1}(D \cap U)} y^*(d\eta).$$

Scriviamo

$$\eta = \sum_{h=1}^n (-1)^h \eta_h dy^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy^h} \wedge \cdots \wedge dy^n, \quad \text{con } \eta_h \in \mathcal{C}_0^\infty(y^{-1}(U)).$$

Allora

$$d\eta = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \eta_h}{\partial y^h} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_D d\eta &= \int_{D \cap U} d\eta = \int_{y^{-1}(D \cap U)} y^*(d\eta) = \int_{y^{-1}(D \cap U)} dy^* \eta \\ &= \iint_{[-1,1]^{n-1}} dy^2 \cdots dy^n \int_{-1}^0 \frac{\partial \eta_1}{\partial y^1} dy^1 \\ &\quad + \sum_{h=2}^n \int_{-1}^0 dy^1 \iint_{[-1,1]^{n-1}} \frac{\partial \eta_h}{\partial y^h} dy^2 \cdots dy^n \\ &= \iint_{[-1,1]^{n-1}} \eta_1(0, y^2, \dots, y^n) dy^2 \cdots dy^n = \int_{\partial D} \eta, \end{aligned}$$

perché

$$\int_{-1}^0 \frac{\partial \eta_1}{\partial y^1} dy^1 = \eta_1^{(i)}(0, y^2, \dots, y^n), \quad \int_{-1}^1 \frac{\partial \eta_h}{\partial y^h} dy^h = 0 \quad \text{per } 2 \leq h \leq n.$$

□

Sia ora  $S$  una sottovarietà differenziabile orientata di dimensione  $q$  e di classe  $\mathcal{C}^k$ , con  $k \geq 1$ , di un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ . Ciò significa che, per ogni punto  $p \in S$ , possiamo trovare un intorno  $U_p$  di  $p$  ed  $n - q$  funzioni differenziabili  $f_i$  per  $i = q + 1, \dots, n$  definite in  $U_p$  e tali che:

$$\begin{cases} S \cap U_p = \{x \in U_p \mid f_i(x) = 0, \forall i = q + 1, \dots, n\}, \\ df_{q+1}(x) \wedge \dots \wedge df_n(x) \neq 0, \quad \forall x \in S \cap U_p. \end{cases}$$

e inoltre l'orientazione di  $S$  è definita dall'atlante in cui sono carte ammissibili in  $S \cap U_p$  le parametrizzazioni:

$$\mathbf{r} : V \subset \mathbb{R}^q \rightarrow S \cap U_p \subset \mathbb{R}^n$$

per cui

$$\det \left( \nabla f_{q+1}(\mathbf{r}), \dots, \nabla f_n(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^q} \right) > 0.$$

Dato un aperto relativamente compatto  $D$  di  $S$ , diremo che la sua frontiera è di classe  $\mathcal{C}^k$  se possiamo trovare una funzione  $\phi$  di classe  $\mathcal{C}^k$  con:

$$\begin{cases} D = \{x \in S \mid \phi(x) < 0\} \\ d\phi(x) \wedge df_{q+1}(x) \wedge \dots \wedge df_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial D, \end{cases}$$

dove  $bD$  è la frontiera di  $D$  in  $S$  e le  $f_{q+1}, \dots, f_n$  definiscono l'orientazione di  $S$  in un intorno  $x$ . Su  $bD$  consideriamo allora l'orientazione definita dalle funzioni  $f_{q+1}, \dots, f_n, \phi$ . La sottovarietà  $bD$ , con questa orientazione, si dice il *bordo* di  $D$  e si indica con  $\partial D$ . Otteniamo allora, per la definizione di integrale di una  $q$ -forma su una sottovarietà orientata  $q$ -dimensionale e la formula di Green:

**TEOREMA IV.8.2 (Formula di Stokes).** *Sia  $D$  un dominio relativamente compatto con frontiera di classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ) di una sottovarietà orientata  $S$  di dimensione  $q$  di  $\mathbb{R}^n$  (con  $q \geq 1$ ). Sia  $\eta \in \Omega_1^{q-1}(U)$  per un intorno  $U$  di  $\bar{D}$  in  $\mathbb{R}^n$ . Allora:*

$$\int_{\partial D} \eta = \int_D d\eta.$$

**OSSERVAZIONE IV.8.3.** Le formule di Green e di Stokes si estendono al caso in cui la frontiera dell'aperto relativamente compatto  $D$  sia di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti, cioè  $D$  si possa ottenere mediante unioni e intersezioni finite di aperti con frontiera regolare di classe  $\mathcal{C}^1$ . In questo caso  $\partial D$  risulta un'unione finita di sottoinsiemi chiusi di sottovarietà orientate, due a due senza punti interni comuni e l'integrale sulla frontiera deve intendersi come la somma finita degli integrali effettuati su ciascuno di tali sottoinsiemi.

**OSSERVAZIONE IV.8.4.** Concludiamo con alcune osservazioni che collegano le formule di Green-Stokes al lemma di Poincaré-Volterra. Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $\eta \in \Omega_k^q(A)$ , ( $k, q \geq 1$ ) con

$$d\eta = 0 \text{ in } A.$$

Una tale forma si dice *chiusa*. Allora:

(i) L'integrale della  $\eta$  su sottovarietà compatte di  $A$  di dimensione  $q$  è invariante per omotopia e la sua definizione si può estendere fino a definire applicazioni:

$$\pi(S^q, A) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \pi_\ell(D^q, S^{q-1}; A) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ciò dipende dal fatto che le applicazioni continue  $S^n \rightarrow A$  si possono approssimare mediante applicazioni di classe  $\mathcal{C}^\infty$  e queste, per il lemma di Sard, hanno luogo di valori critici di misura  $q$ -dimensionale nulla.

(ii) Condizione necessaria e sufficiente affinché si possa trovare una forma  $u \in \Omega_{k+1}^{q-1}(A)$  tale che

$$du = \eta \text{ in } A$$

(in questo caso diciamo che  $\eta$  è *esatta* in  $A$ ) è che l'integrale di  $\eta$  su ogni sottovarietà compatta orientata di dimensione  $q$  di  $A$  sia 0.

**OSSERVAZIONE IV.8.5.** Sia  $A = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Consideriamo su  $A$  la forma chiusa

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Essa non è esatta in quanto il suo integrale su una qualsiasi circonferenza

$$[0, 2\pi] \ni t \rightarrow {}^t(R \cos t, R \sin t) \in A$$

( $R > 0$ ) è uguale a  $2\pi$ . L'integrale della forma  $d\theta$  su un laccetto in  $A$ , diviso per  $2\pi$  si dice l'*indice* del laccetto rispetto a 0 e l'annullarsi dell'indice del laccetto è

condizione necessaria e sufficiente affinché esso sia omotopo al laccetto costante. Intuitivamente l'indice rispetto a 0 di un laccetto in  $A$  misura quante volte esso si avvolge intorno all'origine. In generale, dato un laccetto in  $\mathbb{R}^2$ , è possibile definire l'indice del laccetto rispetto a qualsiasi punto di  $\mathbb{R}^2$  che non appartenga al laccetto, considerando le forme:

$$\frac{(x - x_0)dy - (y - y_0)dx}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Nel caso di laccetti semplici, l'indice rispetto al laccetto di ciascun punto che non sia nel suo supporto può assumere solo due valori tra i numeri  $0, 1, -1$ . I punti in cui l'indice è diverso da 0 formano un aperto limitato che ha il laccetto come frontiera (Teorema di Jordan).

L'indice rispetto a 0 della frontiera orientata di un dominio regolare connesso e semplicemente connesso che contenga 0 come suo punto interno è 1, mentre la somma degli indici dei laccetti che compongono la frontiera di un dominio regolare che non contenga 0 nella sua chiusura è uguale a 0.



## CAPITOLO V

### Calcolo differenziale sulle varietà

#### V.1. Fibrato cotangente e tensori

DEFINIZIONE V.1.1. Sia  $M$  una varietà differenziabile. Il fibrato duale  $T^*M$  del suo fibrato tangente  $TM$  si dice il suo *fibrato cotangente* ed i suoi elementi *vettori cotangenti* o *covettori* di  $M$ .

Se  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , per ogni  $p \in M$  l'applicazione  $T_p \ni v \rightarrow v(f) \in \mathbb{R}$  è un funzionale lineare su  $T_p M$  ed è dunque un elemento di  $T_p^* M$ . Associamo in questo modo ad ogni  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  una sezione differenziabile  $\widetilde{df}$  del fibrato  $T^*M$ , con

$$df(v) = \langle v, \widetilde{df}(\pi(v)) \rangle, \quad \forall v \in TM.$$

Nel seguito scriveremo per semplicità  $df$  invece di  $\widetilde{df}$ , identificando il differenziale di una funzione reale alla corrispondente sezione del fibrato cotangente.

Indichiamo con  $\mathfrak{X}^*(M)$  il  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo  $\Gamma(M, T^*M)$  delle sezioni differenziabili del fibrato  $T^*M$ .

Abbiamo un accoppiamento di dualità

$$(5.1.1) \quad \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \ni (X, \xi) \rightarrow \langle X, \xi \rangle \in \mathcal{C}^\infty(M),$$

definito da

$$\langle X, \xi \rangle(p) = [X(\xi)](p) = \xi_p(X_p) \quad \text{per ogni } p \in M.$$

DEFINIZIONE V.1.2. Indichiamo con  $\mathcal{T}^{r,s}(TM)$  la potenza tensoriale  $r$ -covariante ed  $s$ -controvariante di  $TM$ . Essa è un fibrato vettoriale con fibra  $[T_p M]^{\otimes r} \otimes [T_p^* M]^{\otimes s}$ . Indichiamo poi con  $\mathfrak{T}^{r,s}(M)$  lo spazio delle sue sezioni, che si dicono *tensori  $r$ -covarianti ed  $s$ -controvarianti*.

Per estensione dell'accoppiamento (5.1.1), possiamo far corrispondere ad una sezione  $\tau \in \Gamma(M, \mathcal{T}^{r,s}(TM))$  un'applicazione:

$$(5.1.2) \quad \tau : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{X}^*(M)}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{\mathfrak{X}(M) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ volte}} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

Si verifica senza difficoltà il seguente criterio:

PROPOSIZIONE V.1.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione  $\mathbb{R}$ -multilineare (5.1.2) sia associata ad un tensore è che sia  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare.*

## V.2. Forme differenziali su una varietà

Indichiamo con  $\Omega^q(M)$  lo spazio dei tensori alternati  $q$ -controvarianti su  $M$ . Per la Proposizione V.1.3 abbiamo il seguente criterio

**PROPOSIZIONE V.2.1.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile. Un'applicazione  $\mathbb{R}$ -multilineare*

$$\tau : (\mathfrak{X}(M))^q \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

*definisce un elemento di  $\Omega^q(M)$  se e soltanto se verifica le due condizioni:*

$$(5.2.1) \quad \tau(X_1, X_2, \dots, X_q) = 0 \quad \text{se } X_1, X_2, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M) \quad \text{ed} \\ \exists 1 \leq i < j \leq q \quad \text{con } X_i = X_j,$$

$$(5.2.2) \quad \tau(fX_1, X_2, \dots, X_q) = f \cdot \tau(X_1, \dots, X_q), \\ \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

La condizione (5.2.1) è equivalente a ciascuna delle

$$(5.2.3) \quad \tau(X_1, \dots, X_q) = 0 \quad \text{se } X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M) \\ \text{sono } \mathbb{R}\text{-linearmente dipendenti,}$$

$$(5.2.4) \quad \tau(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_q}) = \varepsilon(\sigma)\tau(X_1, \dots, X_q), \\ \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_q.$$

Dalle (5.2.1) ed (5.2.2) segue che

$$(5.2.5) \quad \tau(X_1, \dots, X_q)(p) = 0 \quad \text{se } X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), \quad p \in M \\ \text{ed } X_{1p}, \dots, X_{qp} \text{ sono } \mathbb{R}\text{-linearmente dipendenti in } T_pM.$$

**DEFINIZIONE V.2.2.** Gli elementi di  $\Omega^q(M)$  si chiamano *forme alternate di grado  $q$* , o  *$q$ -forme alternate*.

**DEFINIZIONE V.2.3.** Il *differenziale* della  $q$ -forma alternata  $\tau \in \Omega^q(M)$  è la  $(q+1)$ -forma alternata  $d\tau \in \Omega^{q+1}(M)$  definita da

$$(5.2.6) \quad d\tau(X_0, X_1, \dots, X_q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i X_i[\tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_q)] \\ + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \tau([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q) \\ \forall X_0, X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M).$$

Verifichiamo che la (5.2.6) definisce una  $(q+1)$ -forma alternata. Se, per due indici  $0 \leq r < s \leq q$ , è  $X_r = X_s = Y$ , si verifica facilmente che ciascuna delle due somme a secondo membro di (5.2.6) si annulla. Per dimostrare la  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilinearità, è allora sufficiente verificare che  $d\tau$  verifica anche la (5.2.2). Abbiamo

$$[fX_0, X_i] = f[X_0, X_i] - (X_i f)X_0.$$

Quindi

$$d\tau(fX_0, X_1, \dots, X_h) = f \sum_{i=0}^h (-1)^i (X_i) \tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^h (-1)^i (X_i f) \tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h) \\
& + f \sum_{0 \leq i < j \leq h} (-1)^{i+j} \tau([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_h) \\
& - \sum_{i=1}^h (-1)^i (X_i f) \tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h) \\
& = f d\tau(X_0, X_1, \dots, X_h), \\
& \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \quad \forall X_0, X_1, \dots, X_h \in \mathfrak{X}(M).
\end{aligned}$$

Se  $x^1, \dots, x^m$  sono coordinate locali, è

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

Quindi la definizione (5.2.6) coincide, nel caso in cui  $M$  sia un aperto di uno spazio Euclideo, con quella data in §IV.3 del Capitolo IV. Poiché, per calcolare il differenziale di una  $q$ -forma alternata  $\tau$  nell'intorno di un punto  $p \in M$  possiamo utilizzare nella (5.2.6) campi di vettori definiti soltanto in un intorno di  $p$ , otteniamo in particolare il

**TEOREMA V.2.4.** *Se  $M$  è una varietà differenziabile di dimensione  $m$ , il differenziale definisce un complesso di operatori differenziali del prim'ordine :*

$$\begin{aligned}
(5.2.7) \quad 0 & \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \longrightarrow \dots \\
& \dots \xrightarrow{d} \Omega^{m-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^m(M) \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

È  $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$  e, per ogni aperto connesso  $U$  di  $M$ , le funzioni  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$  con  $df = 0$  su  $U$  sono costanti su  $U$ .

Ogni punto  $p \in M$  ha un sistema fondamentale di intorni aperti  $U$  tali che, se  $1 \leq q \leq m$  e  $\tau \in \Omega^q(U)$  soddisfa  $d\tau = 0$  in  $U$ , allora esiste una  $\eta \in \Omega^{q-1}(U)$  tale che  $d\eta = \tau$  in  $U$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Il Teorema segue dal teorema analogo (Lemma di Poincaré-Volterra) dimostrato per le forme differenziali definite sugli aperti degli spazi Euclidei.  $\square$

**DEFINIZIONE V.2.5.** Poniamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^q(M) &= \{f \in \Omega^q(M) \mid df = 0\} && \text{(spazio delle } q\text{-forme chiuse su } M), \\
\mathcal{B}^q(M) &= \{df \mid f \in \Omega^{q-1}(M)\} && \text{(spazio delle } q\text{-forme esatte su } M), \\
H^q(M) &= \mathcal{Z}^q(M) / \mathcal{B}^q(M) && \text{(} q\text{-esimo gruppo di coomologia} \\
&&& \text{di de Rham di } M).
\end{aligned}$$

### V.3. Il lemma di Poincaré-Volterra sugli intorni contrattili

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$ . Un aperto  $U$  di  $M$  si dice *contrattile* se esiste un'omotopia  $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(U \times [0, 1], U)$ , di un'applicazione costante con l'identità.

Abbiamo:

TEOREMA V.3.1 (Poincaré-Volterra). *Se  $U$  è un aperto contrattile di  $M$ , allora*

$$H^q(U) = \{0\} \quad \text{per ogni } q \geq 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(U \times [0, 1], U)$  con

$$F_0(p) = p_0 \in U, \quad F_1(p) = p, \quad \forall p \in U.$$

Sia  $\alpha \in \Omega^q(U)$  una forma chiusa e poniamo

$$\Phi^*(\alpha) = \alpha_0 + dt \wedge \alpha_1,$$

con  $\alpha_0 \in \Gamma(U \times [0, 1], \Lambda^q T^*M)$ ,  $\alpha_1 \in \Gamma(U \times [0, 1], \Lambda^{q-1} T^*M)$ . Allora

$$d(\Phi^*(\alpha)) = \Phi^*(d\alpha) = 0 \implies (d_M \alpha_0 = 0, \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial t} = d_M \alpha_1),$$

dove abbiamo indicato con  $d_M$  la restrizione del differenziale su  $U \times [0, 1]$  ai vettori *orizzontali*, cioè a  $\ker dt$ . Definiamo:

$$\beta(t) = \int_0^t \alpha_1(s) ds.$$

Otteniamo allora, per differenziazione sotto il segno di integrale,

$$d_M \beta(t) = \int_0^t d_M \alpha_1(s) ds = \int_0^t \frac{\partial \alpha_0}{\partial t}(s) ds = \alpha_0(t),$$

perché  $\alpha_0(0) = 0$ . Con  $u = \beta(1) \in \Omega^{q-1}(U)$ , otteniamo  $du = \alpha_0(1) = \alpha$  in  $U$ .  $\square$

### V.4. Derivata di Lie di un tensore

Un diffeomorfismo  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  definisce isomorfismi:

$$(\psi^{-1})^* : \mathcal{C}^\infty(M) \ni f \rightarrow f_\psi = f \circ \psi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(N)$$

$$\psi_* : \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow X^\psi = \psi_*(X) \in \mathfrak{X}(N)$$

$$\text{ove } \psi_*(X)(q) = d\psi(X_{\psi^{-1}(q)}) \quad \forall q \in N$$

$$(\psi^{-1})^* : \mathfrak{X}^*(M) \ni \xi \rightarrow \xi_\psi \in \mathfrak{X}^*(N) \quad \text{ove } \xi_\psi(X^\psi) = \xi(X) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Questi isomorfismi si estendono agli isomorfismi degli spazi tensoriali:

$$\mathcal{T}^{r,s}(M) \ni \tau \rightarrow \tau^\psi \in \mathcal{T}^{r,s}(N),$$

definiti da:

$$\tau^\psi(\xi^1_\psi, \dots, \xi^r_\psi, X_1^\psi, \dots, X_s^\psi) = \tau(\xi^1, \dots, \xi^r, X_1, \dots, X_s)$$

$$\forall \xi^1, \dots, \xi^r \in \mathfrak{X}^*(M), \quad \forall X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M).$$



Sia  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\Phi_X = \Phi_X(t)$  il corrispondente gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di  $M$ .

Per ogni aperto  $U$  relativamente compatto in  $M$  esiste un  $\epsilon > 0$  tale che, per ogni  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,  $\Phi_X(p, t)$  sia definita per ogni  $p \in U$ . Quindi, per ogni  $\tau \in \mathcal{T}^{r,s}(M)$ , utilizzando il diffeomorfismo

$$\Phi_X(t)^{-1}(U) \ni p \rightarrow \Phi_X(p, t) \in U,$$

possiamo definire  $\tau_X(t) = \tau^{\Phi_X(\cdot, t)} \in \mathcal{T}^{r,s}(U)$ . Otteniamo pertanto un nuovo tensore  $L_X(\tau) \in \mathcal{T}^{r,s}(M)$ , ponendo :

$$(5.4.1) \quad L_X(\tau) = - \left. \frac{d\tau_X(t)}{dt} \right|_{t=0}.$$

DEFINIZIONE V.4.1. Il tensore  $L_X(\tau)$  è la *derivata di Lie del tensore  $\tau$  rispetto al campo di vettori  $X$* .

PROPOSIZIONE V.4.2. Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , allora  $L_X(Y) = [X, Y]$ .

DIMOSTRAZIONE. In una carta coordinata  $(U, x)$  siano  $X = \sum_{i=1}^m a^i \partial/\partial x^i$ ,  $Y_i = \sum b^i \partial/\partial x^i$ . Il gruppo locale a un parametro  $\Phi(t)$  è allora definito dalle equazioni :

$$\dot{\Phi}^i(x, t) = a^i(\Phi(x, t)) \quad i = 1, \dots, m.$$

Scriviamo  $\Psi(x, t)$  per l'inversa della  $\Phi(t)$ . Abbiamo cioè  $\Phi(\Psi(x, t), t) = x$  per ogni  $t$  e  $x$  nel dominio di definizione. Abbiamo allora:

$$Y(t) = \sum_{i,j=1}^m b^i(\Psi(x, t)) (\partial \Phi^j / \partial x^i)(\Psi(x, t)) (\partial / \partial x^j).$$

Otteniamo quindi:

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^m \left( \sum_{h=1}^m \frac{\partial b^i}{\partial x^h} \frac{\partial \Psi^h}{\partial t} \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} + b^i \left[ \frac{\partial^2 \Phi^j}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial \Psi^k}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi^j}{\partial x^i \partial t} \right] \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Da  $\Psi(\Phi(x, t), t) = x$ , abbiamo:

$$\frac{\partial \Psi^h}{\partial t} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \Psi^h}{\partial x^k} \frac{\partial \Phi^k}{\partial t} = 0.$$

Poiché  $\partial \Phi / \partial x$  e  $\partial \Psi / \partial x$  sono entrambi l'identità per  $t = 0$ , abbiamo :

$$\sum_{i,j,h=1}^m \left. \frac{\partial b^i}{\partial x^h} \frac{\partial \Psi^h}{\partial t} \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} \right|_{t=0} = - \sum_{h=1}^m a^h \frac{\partial b^j}{\partial x^h}.$$

Per  $t = 0$  è  $\partial^2 \Phi^j / \partial x^i \partial x^k = 0$ , mentre  $\partial^2 \Phi^j / \partial x^i \partial t = \partial a^j / \partial x^i$  ed otteniamo quindi la formula desiderata.  $\square$

Si verifica facilmente che :

PROPOSIZIONE V.4.3. Se  $f \in \mathcal{T}^{0,0}(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ , allora  $L_X f = Xf$  per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

DEFINIZIONE V.4.4. Dati numeri positivi  $h, k, r, s$  con  $h \leq r, k \leq s$ , definiamo sui tensori l'operazione di *contrazione degli indici*  $(h, k)$ :

$$\mathbf{c}_k^h : \mathcal{T}^{r,s}(M) \longrightarrow \mathcal{T}^{r-1,s-1}(M)$$

nel modo seguente: siano  $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}(M)$  campi di vettori che definiscono un sistema di riferimento su un aperto  $U$  di  $M$ , tali cioè che  $X_1(p), \dots, X_m(p) \in T_p M$  sia una base di  $T_p M$  per ogni  $p \in U$ . Definiamo il sistema di riferimento duale  $\xi^1, \dots, \xi^m \in \mathfrak{X}^*(U)$  mediante  $\langle X_i, \xi^j \rangle(p) = \delta_j^i$  (delta di Kronecker) per ogni  $p \in U$ . Allora, su  $U$ , poniamo:

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_k^h(\tau)(\eta^1, \dots, \eta^{r-1}, Y_1, \dots, Y_{s-1}) \\ &= \sum_{j=1}^m \tau(\eta^1, \dots, \eta^{k-1}, \underbrace{\xi^j}_{\hat{k}}, \eta^k, \dots, \eta^{r-1}, Y_1, \dots, Y_{h-1}, \underbrace{X_j}_{\hat{h}}, Y_h, \dots, Y_{s-1}) \\ & \quad \forall \eta^j \in \mathfrak{X}^*(M), Y_i \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

Si verifica che la contrazione è ben definita, che cioè non dipende dalla scelta del sistema di riferimento su  $U$ .

Abbiamo:

PROPOSIZIONE V.4.5. *La derivata di Lie commuta con le contrazioni.*

Utilizzando questa proposizione possiamo calcolare la derivata di Lie dei diversi tensori a partire dalla definizione della derivata di Lie dei campi di vettori. Ad esempio, se  $\alpha \in \Omega^1(M)$ , abbiamo:

$$(5.4.2) \quad L_X(\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha([X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

e, più in generale:

PROPOSIZIONE V.4.6. *Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\alpha \in \Omega^h(M)$ , allora:*

$$(5.4.3) \quad \begin{aligned} L_X(\alpha)(X_1, \dots, X_h) &= X(\alpha(X_1, \dots, X_h)) \\ &+ \sum_{i=1}^h (-1)^i \alpha([X, X_i], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h), \\ & \quad \forall X_1, \dots, X_h \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

DEFINIZIONE V.4.7. Dato un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , definiamo il *prodotto interno* rispetto ad  $X \in \mathfrak{X}(M)$  mediante:

$$\begin{aligned} \iota_X : \mathcal{T}^{r,s}(M) \ni \tau &\rightarrow \iota_X(\tau) \in \mathcal{T}^{r,s-1}(M) \\ \iota_X(\tau)(\xi^1, \dots, \xi^r, X_1, \dots, X_{s-1}) &= \tau(\xi^1, \dots, \xi^r, X, X_1, \dots, X_{s-1}) \\ \forall \xi^1, \dots, \xi^r \in \mathfrak{X}^*(M), \forall X_1, \dots, X_{s-1} &\in \mathfrak{X}(M) \end{aligned}$$

quando  $s \geq 1$ . Porremo  $\iota_X(\tau) = 0$  per ogni tensore 0-controvariante.

TEOREMA V.4.8. *Valgono le formule:*

$$(5.4.4) \quad L_X(\alpha) = d(\iota_X \alpha) + \iota_X(d\alpha) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall \alpha \in \Omega^h(X),$$

$$(5.4.5) \quad \begin{aligned} [L_X, \iota_Y](\tau) &= L_X(\iota_Y(\tau)) - \iota_Y(L_X(\tau)) \\ &= \iota_{[X, Y]}(\tau) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tau \in \mathcal{F}^{r, s}(M). \end{aligned}$$

### V.5. Distribuzioni vettoriali e teorema di Frobenius

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$ .

DEFINIZIONE V.5.1. Una *distribuzione vettoriale generalizzata* su  $M$  è un sotto- $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo  $\mathfrak{B}$  di  $\mathfrak{X}(M)$ .

Ciò significa che

$$fX + gY \in \mathfrak{B}, \quad \text{per ogni } X, Y \in \mathfrak{B} \text{ e per ogni } f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Per ogni  $p \in M$  poniamo

$$\mathfrak{B}_p = \{X_p \mid X \in \mathfrak{B}\} \subset T_p M.$$

La dimensione di  $\mathfrak{B}_p$ , come spazio vettoriale reale, è il *rango* di  $\mathfrak{B}$  in  $p$ .

DEFINIZIONE V.5.2. Una distribuzione vettoriale generalizzata  $\mathfrak{B}$  di rango costante si dice una *distribuzione vettoriale*.

In questo caso, gli elementi di  $\mathfrak{B}$  sono le sezioni di un sottofibrato vettoriale  $\xi_{\mathfrak{B}} = (W \xrightarrow{\pi} M)$  del fibrato tangente e, viceversa, se  $\xi = (W \xrightarrow{\pi} M)$  è un sottofibrato vettoriale del fibrato tangente, lo spazio  $\mathfrak{B} = \Gamma(M, W)$  delle sue sezioni è una distribuzione vettoriale su  $M$ .

Sia  $\Omega^*(M) = \bigoplus_{h=0}^m \Omega^h(M)$  l'algebra delle forme differenziali alternate su  $M$ . Indichiamo con  $\Omega^+(M) = \bigoplus_{h=1}^m \Omega^h(M)$  l'ideale delle forme di grado positivo, che non contengono cioè componenti di grado 0.

Associamo alla distribuzione vettoriale  $\mathfrak{B}$  il *sistema differenziale*:

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{B}} = \{\alpha \in \Omega^+(M) \mid \alpha|_{\mathfrak{B}} = 0\}.$$

Osserviamo che  $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$  è un *sotto- $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo graduato* ed un *ideale* di  $\Omega^*(M)$ , e che, come ideale, è generato dai suoi elementi di grado uno.

DEFINIZIONE V.5.3. Chiamiamo *sistema differenziale* su  $M$  un qualsiasi ideale  $\mathcal{I}$  di  $\Omega^*(M)$  contenuto in  $\Omega^+(M)$ .

Ad un sistema differenziale  $\mathcal{I}$  associamo la sua *distribuzione caratteristica*

$$(5.5.1) \quad \mathfrak{B}_{\mathcal{I}} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \iota_X(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}\}.$$

La relazione tra sistemi differenziali e distribuzioni vettoriali è descritta dal seguente:

LEMMA V.5.4. Sia  $\mathfrak{B}$  una distribuzione vettoriale ed  $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$  il sistema differenziale ad essa associato. Allora  $\mathfrak{B}$  è la distribuzione caratteristica di  $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$ .

Se  $\mathcal{I}$  è un sistema differenziale e  $\mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$  la sua distribuzione caratteristica, abbiamo l'inclusione

$$(5.5.2) \quad \mathcal{I} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{B}_{\mathcal{I}}}.$$

ESEMPIO V.5.5. Sia  $\mathcal{S}$  il sistema differenziale  $\Omega(\mathbb{R}^n) \wedge (dx^1 + dx^2 \wedge dx^3)$  in  $\mathbb{R}^m$ , con  $m \geq 3$ . Allora  $\mathfrak{B}_{\mathcal{S}} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \left[ \frac{\partial}{\partial x^4}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right]$  ed  $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}_{\mathcal{S}}}$  è l'ideale di  $\mathcal{O}^*(M)$  generato da  $dx^1, dx^2, dx^3$ .

DEFINIZIONE V.5.6. Sia  $\mathfrak{B}$  una distribuzione vettoriale su  $M$ .

Una sottovarietà  $N$  di  $M$  si dice una *sottovarietà integrale* di  $\mathfrak{B}$  se  $T_p N \subset \mathfrak{B}_p$  per ogni  $p \in N$ .

Una distribuzione vettoriale  $\mathfrak{B}$  si dice *totalmente integrabile* se per ogni punto  $p \in M$  esiste una sottovarietà integrale  $N$  di  $\mathfrak{B}$  con  $p \in N$  e  $T_p N = \mathfrak{B}_p$ .

Diciamo che  $\mathfrak{B}$  è *formalmente integrabile* se

$$(5.5.3) \quad [\mathfrak{B}, \mathfrak{B}] \subset \mathfrak{B}.$$

Abbiamo il

TEOREMA V.5.7 (Frobenius). *Sia  $\mathfrak{B}$  una distribuzione vettoriale di rango costante  $k$ . Sono allora equivalenti:*

- (i)  $\mathfrak{B}$  è *totalmente integrabile*;
- (ii)  $\mathfrak{B}$  è *formalmente integrabile*;
- (iii)  $d\mathcal{I}_{\mathfrak{B}} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$

DIMOSTRAZIONE. (ii)  $\implies$  (i). Sia  $p \in M$ . Poiché  $\mathfrak{B}_p$  ha rango  $k$ , possiamo fissare  $k$  campi vettoriali  $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{B}$  con  $X_{1p}, \dots, X_{kp}$  linearmente indipendenti in  $T_p M$ . Possiamo allora trovare una carta locale  $(U, x)$  per cui:

$$X_i = \sum_{j=1}^m a_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \text{con } a_i^j(0) = \delta_i^j \quad \text{per } 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m.$$

Consideriamo la matrice  $k \times k$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1k}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}(x) & a_{k2}(x) & \cdots & a_{kk}(x) \end{pmatrix}.$$

Poiché  $A(0) = I_k$ , a meno di restringere l'intorno  $U$  di  $p$ , possiamo supporre che  $A(x)$  sia invertibile in  $U$ . Sia  $B(x) = (b_i^j(x))$  la sua inversa. Allora i campi di vettori

$$Y_i = \sum_{j=1}^k b_i^j(x) X_j = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=k+1}^m c_i^h(x) \frac{\partial}{\partial x^h} \quad (i = 1, \dots, k)$$

generano  $\mathfrak{B}_q$  in ogni punto  $q \in U$ . La condizione (ii) implica che

$$[Y_i, Y_j]_q \in \langle Y_{1q}, \dots, Y_{kq} \rangle \quad \text{per ogni } q \in U.$$

Poiché i campi di vettori

$$Y_1, \dots, Y_k, \frac{\partial}{\partial x^{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$$

definiscono una base di  $T_q M$  in ogni punto  $q \in U$ , ed

$$[Y_i, Y_j]_q \in \left\langle \left[ \frac{\partial}{\partial x^{k+1}} \right]_q, \dots, \left[ \frac{\partial}{\partial x^m} \right]_q \right\rangle,$$

otteniamo che  $[Y_i, Y_j] = 0$  in  $U$  per ogni  $1 \leq i, j \leq k$ .

Dimostriamo ora il seguente

**LEMMA V.5.8.** *Siano  $Y_1, \dots, Y_k$  campi di vettori definiti e linearmente indipendenti in tutti i punti di un intorno aperto  $U$  di  $p \in M$ . Se  $[Y_i, Y_j] = 0$  in  $U$  per ogni  $1 \leq i < j \leq k$ , allora esiste una carta locale  $(U', y)$  con  $p \in U' \subset U$  per cui  $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$  in  $U'$  per  $i = 1, \dots, k$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo supporre che  $(U, x)$  sia una carta locale in  $p$ . Ragioniamo per induzione su  $k$ .

Sia  $k = 1$ . Possiamo supporre che  $Y_1|_p = \left[ \frac{\partial}{\partial x^1} \right]_p$ . Il campo di vettori  $Y_1$  definisce un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi  $x(U) \times \mathbb{R} \supset \tilde{U} \ni (x, t) \rightarrow \Phi(x, t) \in \mathbb{R}^m$ , ove  $\tilde{U}$  è un intorno di  $x(U) \times \{0\}$  in  $x(U) \times \mathbb{R}$ . Abbiamo  $\frac{\partial \Phi^1(x, t)}{\partial t} = 1$  per  $x = 0, t = 0$  e quindi, per il teorema delle funzioni implicite,  $x = \Phi(0, y^2, \dots, y^m; y^1)$  definisce coordinate in un intorno  $U'$  di  $p$  in  $U$ , per cui  $Y_1 = \frac{\partial}{\partial y^1}$ .

Sia ora  $k > 1$  e supponiamo che il lemma valga per un numero inferiore di campi di vettori linearmente indipendenti che commutano tra loro. Per la prima parte della dimostrazione, possiamo fissare coordinate locali  $(U, x)$  tali che:

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad Y_i = \sum_{j=1}^m a_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{per } 2 \leq j \leq k.$$

Poiché

$$[Y_1, Y_i] = \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_i^j(x)}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{per } 2 \leq j \leq k,$$

la condizione  $[Y_1, Y_i] = 0$  implica che i coefficienti  $a_i^j$  sono indipendenti da  $x^1$  in un intorno  $\{-\epsilon < x^1 < \epsilon\} \subset x(U)$ .

Poniamo  $Z_j = \sum_{i=2}^m a_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$  per  $2 \leq j \leq k$ . Allora  $[Z_i, Z_j] = 0$  per  $2 \leq i, j \leq k$ . Per l'ipotesi induttiva, possiamo trovare un cambiamento delle coordinate  $x^2, \dots, x^m$  per cui risulti  $Z_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$  per  $2 \leq j \leq k$ . Otteniamo perciò nelle nuove coordinate  $x^1, \dots, x^m$ :

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + a_i^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} \quad \text{per } 2 \leq i \leq k.$$

Da  $[Y_i, Y_j] = 0$  per ogni  $1 \leq i, j \leq k$  otteniamo allora che le  $a_i^1$  sono indipendenti da  $x^1$  e  $\partial a_i^1 / \partial x^j = \partial a_j^1 / \partial x^i$  per  $2 \leq i, j \leq k$ . Possiamo quindi trovare una funzione  $\phi$ , indipendente da  $x^1$ , tale che  $a_i^1 = \partial \phi / \partial x^i$  per  $2 \leq i \leq k$ . Nelle nuove variabili:

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + \phi(x^2, \dots, x^m) \\ y^i = x^i \end{cases} \quad \text{per } 2 \leq i \leq m$$

abbiamo  $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$  per  $1 \leq i \leq k$ .  $\square$

Completiamo ora la dimostrazione dell'implicazione (ii)  $\implies$  (i). Fissata una carta locale  $(U', y)$  con centro in  $p$  per cui  $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ , la

$$N = \{y^{k+1} = 0, \dots, y^m = 0\}$$

è una sottovarietà di  $M$ , contenuta in  $U'$ , contenente  $p$  e tale che  $T_q N = \mathfrak{B}_q$  per ogni  $q \in N$ .

(ii)  $\implies$  (iii) Se  $\alpha \in \Omega^1(M)$  si annulla su tutti i campi di  $\mathfrak{B}$ , abbiamo:

$$(*) \quad d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{B}$$

perché  $\alpha(Y) = 0$ ,  $\alpha(X) = 0$  ed anche  $\alpha([X, Y]) = 0$  perché  $[X, Y] \in \mathfrak{B}$ . Si ragiona in modo analogo per forme di grado maggiore di uno.

(iii)  $\implies$  (ii) Abbiamo  $\mathfrak{B} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \alpha(X) = 0, \forall \alpha \in \mathcal{I}_{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{X}^*(M)\}$ . L'implicazione è allora una facile conseguenza della (\*).

(ii)  $\implies$  (i) Segue dal fatto che il commutatore di due campi di vettori tangenti a una sottovarietà  $N$  in tutti i suoi punti è ancora tangente alla sottovarietà  $N$  in tutti i suoi punti.  $\square$

Osserviamo infine che vale la :

**PROPOSIZIONE V.5.9.** *Se  $\mathcal{I}$  è un sistema differenziale in  $M$  e  $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$ , allora  $\mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$  è formalmente integrabile.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $X \in \mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$  ed  $\alpha \in \mathcal{I}$ , allora :

$$L_X(\alpha) = d(\iota_X(\alpha)) + \iota_X(d\alpha) \in \mathcal{I}$$

per l'ipotesi che  $d\alpha \in d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$ . Poiché la derivata di Lie commuta con la contrazione, abbiamo, per  $X, Y \in \mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$  ed  $\alpha \in \mathcal{I}$  :

$$\iota_{[X, Y]}(\alpha) = \iota_{L_X(Y)}(\alpha) = L_X(\iota_Y(\alpha)) - \iota_Y(L_X(\alpha)) \in \mathcal{I}.$$

Questo vale per ogni  $\alpha \in \mathcal{I}$  e quindi anche  $[X, Y] \in \mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$ .  $\square$

CAPITOLO VI

**La coomologia di de Rham sulle varietà**

**VI.1. Definizioni principali**

DEFINIZIONE VI.1.1. I complessi di spazi vettoriali ed operatori differenziali

$$(6.1.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(M) \rightarrow \dots \\ \dots & \rightarrow & \Omega^{q-1}(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^q(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{q+1}(M) \rightarrow \dots \end{array}$$

$$(6.1.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega_c^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega_c^1(M) & \xrightarrow{d} & \Omega_c^2(M) \rightarrow \dots \\ \dots & \rightarrow & \Omega_c^{q-1}(M) & \xrightarrow{d} & \Omega_c^q(M) & \xrightarrow{d} & \Omega_c^{q+1}(M) \rightarrow \dots \end{array}$$

si dicono il *complesso di de Rham* ed il *complesso di de Rham pei supporti compatti*, rispettivamente. Poniamo

$$(6.1.3) \quad \mathcal{Z}^q(M) = \{\alpha \in \Omega^q(M) \mid d\alpha = 0\}, \quad (\text{cicli})$$

$$(6.1.4) \quad \mathcal{B}^q(M) = \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega^{q-1}(M)\}, \quad (\text{bordi})$$

$$(6.1.5) \quad \mathcal{Z}_c^q(M) = \{\alpha \in \Omega_c^q(M) \mid d\alpha = 0\}, \quad (\text{cicli a supporto compatto})$$

$$(6.1.6) \quad \mathcal{Z}_c^q(M) = \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega_c^{q-1}(M)\}, \quad (\text{bordi a supporto compatto}).$$

I quozienti

$$(6.1.7) \quad H^q(M) = \mathcal{Z}^q(M) / \mathcal{B}^q(M),$$

$$(6.1.8) \quad H_c^q(M) = \mathcal{Z}_c^q(M) / \mathcal{B}_c^q(M)$$

si dicono, rispettivamente, il *q-esimo gruppo di coomologia di de Rham* e il *q-esimo gruppo di coomologia di de Rham a supporti compatti*.

PROPOSIZIONE VI.1.2. *Sia M una varietà differenziabile di dimensione m e poniamo*

$$(6.1.9) \quad H^*(M) = \bigoplus_{q=0}^m H^q(M), \quad H_c^*(M) = \bigoplus_{q=0}^m H_c^q(M).$$

*Il prodotto esterno nell'algebra di Grassmann  $\Omega^*(M)$  definisce per passaggio al quoziente una struttura di algebra di Grassmann su  $H^*(M)$  ed  $H_c^*(M)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che

$$(d\alpha) \wedge \beta = d(\alpha \wedge \beta), \quad \forall \alpha \in \Omega^{q_1}(M), \quad \beta \in \mathcal{Z}^{q_2}(M).$$

Quindi

$$\mathcal{Z}^{q_1}(M) \wedge \mathcal{Z}^{q_2}(M) \subset \mathcal{Z}^{q_1+q_2}(M) \quad \text{e}$$

$$\mathcal{B}^{q_1}(M) \wedge \mathcal{L}^{q_2}(M) + \mathcal{L}^{q_1}(M) \wedge \mathcal{B}^{q_2}(M) \subset \mathcal{B}^{q_1+q_2}(M). \quad \square$$

Se  $\alpha \in \mathcal{L}^{q_1}(M)$ ,  $\beta \in \mathcal{L}^{q_2}$  ed  $[\alpha]$ ,  $[\beta]$  sono le classi di coomologia da esse definite, poniamo

$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta].$$

## VI.2. Invarianza omotopica

Siano  $M$ ,  $N$  varietà differenziabili ed  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  un'applicazione differenziabile. Si verifica facilmente che il pull-back e il differenziale sulle forme commutano. Quindi, per passaggio ai quozienti, la  $f$  definisce un'applicazione naturale

$$(6.2.1) \quad f^* : H^q(N) \rightarrow H^q(M)$$

ed anche, se  $f$  è propria, un'applicazione  $f^* : H_c^q(N) \rightarrow H_c^q(M)$ .

LEMMA VI.2.1. *Sia  $M$  una varietà differenziabile, sia  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$ , e consideriamo la proiezione  $p_M : M \times I \rightarrow M$  e, per ogni  $t \in I$ , la sezione  $s_t : M \ni x \rightarrow (x, t) \in M \times I$ . Allora per ogni intero  $q \geq 0$  ed ogni  $t \in I$ ,*

$$p_M^* : H^q(M) \rightarrow H^q(M \times I) \quad \text{ed} \quad s_t^* : H^q(M \times I) \rightarrow H^q(M)$$

sono isomorfismi, l'uno inverso dell'altro.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo  $s_t \circ \pi = \text{id}_M$  per ogni  $t \in I$ , e quindi anche  $\pi^* \circ s_t^*$  è l'identità in coomologia:

$$\begin{array}{ccc} H^q(M) & \xrightarrow{p_M^*} & H^q(M \times I) \\ & \searrow & \swarrow s_t^* \\ & H^q(M) & \end{array}$$

In particolare,  $s_t^* : H^q(M \times I) \rightarrow H^q(M)$  è surgettiva, e  $p_M^* : H^q(M) \rightarrow H^q(M \times I)$  è iniettiva.

Per ogni intero  $q \geq 1$  indichiamo con  $\Omega_M^q(M \times I)$  lo spazio delle  $q$ -forme su  $M \times I$  che sono localmente combinazioni lineari di elementi di  $p_M^*(\Omega^q(M))$ , con coefficienti in  $\mathcal{C}^\infty(M \times I)$ . Abbiamo

$$\Omega^q(M \times I) = \Omega_M^q(M \times I) \oplus \Omega_M^{q-1}(M \times I) \wedge dt.$$

Sia  $f \in \mathcal{L}^q(M \times I)$ . Scriviamo  $f = f^{(q)} + f^{(q-1)} \wedge dt$  con  $f^{(h)} \in \Omega_M^h(M \times I)$ . La condizione d'integrabilità  $df = 0$  ci dà

$$\begin{cases} d_M s_t^* f^{(h)} = 0 & \forall t \in I, \\ \frac{d}{dt} s_t^* f^{(q)} + (-1)^q d_M s_t^* f^{(q-1)} = 0 & \forall t \in I. \end{cases}$$

Fissato  $t_0 \in I$ , definiamo una forma  $g^{(q-1)} \in \Omega_M^{q-1}(M \times I)$  mediante

$$g^{(q-1)}(x, t) = p_M^* \left( \int_{t_0}^t s_\tau^* f^{(h-1)} d\tau \right)(x, t)$$



Allora  $\phi^{(q)} = f - d_{M \times I} g^{(q-1)} \in \mathcal{L}^q(M \times I) \cap \Omega_M^q(M \times I)$ . In particolare,  $\phi$  soddisfa

$$\frac{d}{dt} s_t^* \phi^{(q)} = 0,$$

onde  $s_t^* \phi^{(q)}$  è una forma  $\psi \in \Omega^q(M)$ , indipendente da  $t \in I$ , ed abbiamo  $\phi^{(q)} = p_M^* \psi$ . Inoltre

$$d_M \psi = d_M s_t^* \phi^{(q)} = s_t^* d_{M \times I} \phi^{(q)} = 0.$$

Questo dimostra che  $p_M^* : H^q(M) \rightarrow H^q(M \times I)$  è anche surgettiva, e completa quindi la dimostrazione.  $\square$

Abbiamo la

**PROPOSIZIONE VI.2.2.** *Due applicazioni differenziabili  $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  omotopie inducono la stessa applicazione in coomologia.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per ipotesi esiste un'applicazione differenziabile

$$F = (f_t) \in \mathcal{C}^\infty(M \times I, N), \quad \text{con } F(\cdot, 0) = f_0, \quad F(\cdot, 1) = f_1.$$

È  $f_t = F \circ s_t$  e quindi  $f_t^* = s_t^* \circ F^*$ . Per il Lemma VI.2.1, per ogni  $t \in [0, 1]$ ,  $s_t^*$  inverte  $p_M^*$ , ove  $p_M : M \times [0, 1] \rightarrow M$  è la proiezione sul primo fattore. Abbiamo perciò, in coomologia,  $f_0^* = (p_M^*)^{-1} \circ F^* = f_1^*$ .  $\square$

**COROLLARIO VI.2.3.** *Due varietà che abbiano lo stesso tipo d'omotopia hanno la stessa coomologia di de Rham.*

Ricordiamo, che, per varietà differenziabili, possiamo definire tutte le nozioni usuali dell'omotopia richiedendo che tutte le mappe considerate siano differenziabili. Ad esempio, nell'enunciato del corollario, il fatto che due varietà  $M$  ed  $N$  abbiano lo stesso tipo d'omotopia si può formulare nel modo seguente:

*Esistono applicazioni differenziabili  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ ,  $g \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$ ,  $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], M)$ ,  $G \in \mathcal{C}^\infty(N \times [0, 1], N)$ , tali che*

$$\begin{cases} F_0 = g \circ f, & G_0 = f \circ g, \\ F_1 = \text{id}_M, & G_1 = \text{id}_N. \end{cases}$$

### VI.3. Complessi differenziali

Ricordiamo qui alcuni fatti algebrici generali che ci saranno utili nel seguito.

**DEFINIZIONE VI.3.1.** Un *complesso differenziale* è il dato di uno spazio vettoriale  $\mathbf{C}$  su un campo  $\mathbb{k}$ , di una sua  $\mathbb{Z}$ -gradazione  $\mathbf{C} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathbf{C}^q$  e di un omomorfismo  $d_C : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ , omogeneo di grado 1, con  $d_C^2 = 0$ . Indichiamo il complesso mediante

$$(6.3.1) \quad \dots \rightarrow \mathbf{C}^{q-1} \xrightarrow{d_C} \mathbf{C}^q \xrightarrow{d_C} \mathbf{C}^{q+1} \rightarrow \dots$$

La *coomologia* di (6.3.1) è la somma diretta di spazi vettoriali:

$$(6.3.2) \quad H(\mathbf{C}, d_C) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^q(\mathbf{C}, d_C),$$

$$\text{ove } H^q(\mathbf{C}, d_C) = (\ker d_C \cap \mathbf{C}^q) / d_C(\mathbf{C}^{q-1}).$$

Lo spazio vettoriale  $H^q(\mathbf{C}, d_C)$  si dice anche il  $q$ -esimo gruppo di coomologia di (6.3.1).

Dati due complessi differenziali  $(\mathbf{A}, d_A)$  e  $(\mathbf{B}, d_B)$  sullo stesso campo  $\mathbb{k}$ , un'applicazione lineare  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  si dice un *omomorfismo di complessi* se

$$(6.3.3) \quad f(\mathbf{A}^q) \subset \mathbf{B}^q, \quad \forall q \in \mathbb{Z},$$

$$(6.3.4) \quad f \circ d_A = d_B \circ f.$$

Essa induce un'applicazione naturale

$$(6.3.5) \quad f_* : H^q(\mathbf{A}, d_A) \rightarrow H^q(\mathbf{B}, d_B),$$

che fa corrispondere alla classe  $[a_q]$  di  $a_q \in \ker d_A \cap \mathbf{A}^q$  la classe  $[f(a_q)]$  di  $f(a_q) \in \ker d_B \cap \mathbf{B}^q$ .

Una successione

$$(6.3.6) \quad \dots \rightarrow \mathbf{V}^{q-1} \xrightarrow{f_{q-1}} \mathbf{V}^q \xrightarrow{f_q} \mathbf{V}^{q+1} \rightarrow \dots$$

di  $\mathbb{k}$ -spazi vettoriali su di applicazioni  $\mathbb{k}$ -lineari si dice *esatta* se

$$(6.3.7) \quad f_{q-1}(\mathbf{V}^{q-1}) = \ker f_q, \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Una successione esatta della forma

$$(6.3.8) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{B} \xrightarrow{\beta} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

si dice una *successione esatta corta*.

Se  $(\mathbf{A}, d_A)$ ,  $(\mathbf{B}, d_B)$  e  $(\mathbf{C}, d_C)$  sono complessi differenziali di spazi vettoriali su  $\mathbb{k}$  e la (6.3.8) è una successione esatta corta di omomorfismi di complessi, possiamo definire delle applicazioni  $\mathbb{k}$ -lineari

$$(6.3.9) \quad \Delta_q : H^q(\mathbf{C}, d_C) \rightarrow H^{q+1}(\mathbf{A}, d_A)$$

nel modo seguente.

Sia  $c_q \in \mathbf{C}^q$  con  $d_C c_q = 0$ . Poiché  $\beta$  è surgettiva, esiste un elemento  $b_q \in \mathbf{B}^q$  tale che  $c_q = \beta(b_q)$ . Abbiamo

$$\beta(d_B b_q) = d_C \beta(b_q) = d_C c_q = 0$$

e quindi, per l'esattezza di (6.3.8) esiste uno ed un solo  $a_{q+1} \in \mathbf{A}^{q+1}$  tale che

$$\alpha(a_{q+1}) = d_B b_q.$$

Poiché

$$\alpha(d_A a_{q+1}) = d_B \alpha(a_{q+1}) = d_B^2 b_q = 0 \implies d_A a_{q+1} = 0$$

per l'esattezza di (6.3.8), l'elemento  $a_{q+1}$  definisce per passaggio al quoziente una classe  $[a_{q+1}] \in H^{q+1}(\mathbf{A}, d_A)$ .

Siano ora

$$\begin{aligned} c'_q &= c_q + d_C c_{q-1}, \quad \text{con } c_{q-1} \in \mathbf{C}^{q-1}, \\ b'_q &\in \mathbf{B}^q \quad \text{con } \beta(b'_q) = c'_q = c_q + d_C c_{q-1}, \\ a'_{q+1} &\in \mathbf{A}^{q+1} \quad \text{con } \alpha(a'_{q+1}) = d_B b'_q. \end{aligned}$$

Utilizzando ancora l'esattezza di (6.3.8), otteniamo

$$\begin{aligned}
 & \exists b_{q-1} \in \mathbf{B}^{q-1} \text{ tale che} \\
 \beta(b'_q - b_q) &= c'_q - c_q = d_C c_{q-1} = d_C \beta(b_{q-1}) = \beta(d_B b_{q-1}) \\
 \implies \exists a_q \in \mathbf{A}^q \text{ tale che } b'_q - b_q - d_B b_{q-1} &= \alpha(a_{q-1}) \\
 \implies \alpha(a'_{q+1} - a_{q+1}) &= d_B b'_{q+1} - d_B b_q \\
 &= d_B(b'_q - b_q - d_B b_{q-1}) \\
 &= d_B \alpha(a_q) = \alpha(d_A a_q) \\
 \implies a'_{q+1} - a_{q+1} &= d_A a_q.
 \end{aligned}$$

Quindi la  $\Delta_q$  risulta ben definita da

$$(6.3.10) \quad \Delta([c_q]) = [a_{q+1}].$$

Abbiamo il

**TEOREMA VI.3.2.** *Se (6.3.8) è una successione esatta lunga di complessi differenziali di spazi vettoriali su  $\mathbb{k}$ , allora abbiamo una successione esatta lunga*

$$(6.3.11) \quad \begin{array}{ccccccc}
 & & & & \dots & \longrightarrow & H^{q-1}(\mathbf{B}, d_B) & \xrightarrow{\beta_*} & H^{q-1}(\mathbf{C}, d_C) \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & \xrightarrow{\Delta_{q-1}} & H^q(\mathbf{A}, d_A) & \xrightarrow{\alpha_*} & H^q(\mathbf{B}, d_B) & \xrightarrow{\beta_*} & H^q(\mathbf{C}, d_C) \\
 & & & & & \xrightarrow{\Delta_q} & H^{q+1}(\mathbf{A}, d_A) & \longrightarrow & \dots & & 
 \end{array}$$

Nello studio dei gruppi di coomologia dei complessi, è spesso utile il seguente lemma algebrico:

**TEOREMA VI.3.3 (Lemma dei cinque).** *Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe e colonne esatte:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\
 \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\
 \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5 \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 0 & & 0 & & & & 0 & & 
 \end{array}$$

Abbiamo supposto cioè che  $\alpha_1$  sia surgettiva,  $\alpha_2$  e  $\alpha_4$  siano isomorfismi ed  $\alpha_5$  sia iniettiva. Allora  $\alpha_3$  è un isomorfismo.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo che  $\alpha_3$  è iniettiva. Sia  $a_3 \in \mathbf{A}_3$ , con  $\alpha_3(a_3) = 0$ . Abbiamo

$$\begin{aligned}
 \alpha_4(f_3(a_3)) &= g_3(\alpha_3(a_3)) = 0 \implies f_3(a_3) = 0 \implies \exists a_2 \in \mathbf{A}_2 \text{ t.c. } a_3 = f_2(a_2) \\
 \implies \alpha_3(f_2(a_2)) &= g_2(\alpha_2(a_2)) = 0 \implies \exists b_1 \in \mathbf{B}_1 \text{ t.c. } \alpha_2(a_2) = g_1(b_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \exists a_1 \in \mathbf{A}_1 \text{ t.c. } \alpha_1(a_1) = b_1, &\implies \alpha_2(a_2) = g_1(\alpha_1(a_1)) = \alpha_2(f_1(a_1)) \\ \implies a_2 = f_1(a_1) &\implies a_3 = f_2 \circ f_1(a_1) = 0. \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che  $\alpha_3$  è surgettiva. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \exists a_4 \in \mathbf{A}_4 \text{ t.c. } g_3(b_3) = \alpha_4(a_4) &\implies 0 = g_4 \circ g_3(b_3) = g_4 \circ \alpha_4(a_4) = \alpha_5 \circ f_4(a_4) \\ \implies f_4(a_4) = 0 &\implies \exists a_3 \in \mathbf{A}_3 \text{ t.c. } f_3(a_3) = a_4 \\ \implies g_3(b_3) = \alpha_4 \circ f_3(a_3) = g_3(\alpha_3(a_3)) &\implies g_3(b_3 - \alpha_3(a_3)) = 0 \\ \implies \exists b_2 \in \mathbf{B}_2 \text{ t.c. } g_2(b_2) = b_3 - \alpha_3(a_3) &\implies \exists a_2 \in \mathbf{A}_2 \text{ t.c. } \alpha_2(a_2) = b_2 \\ \implies b_3 - \alpha_3(a_3) = g_2 \circ \alpha_2(a_2) = \alpha_3(f_2(a_2)) &\implies b_3 = \alpha_3(a_3 + f_2(a_2)). \end{aligned}$$

□

Dalla dimostrazione segue che

**TEOREMA VI.3.4 (Lemmi dei quattro).** *Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe esatte:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Se  $\alpha_1$  è surgettiva ed  $\alpha_2, \alpha_4$  iniettive, allora  $\alpha_3$  è iniettiva.

Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & & & \downarrow \\ \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Se  $\alpha_5$  è iniettiva ed  $\alpha_2, \alpha_4$  surgettive, allora  $\alpha_3$  è surgettiva.

### VI.4. Le successioni di Mayer-Vietoris

La successione di Mayer-Vietoris<sup>1</sup> è uno degli strumenti fondamentali per il calcolo dei gruppi di coomologia. Essa è una conseguenza del Teorema VI.3.2 e del

LEMMA VI.4.1. *Siano  $A, B$  due aperti di una varietà  $M$ . Allora, per ogni intero  $q$ , la successione corta*

$$(6.4.1) \quad 0 \rightarrow \Omega^q(A \cup B) \xrightarrow{\alpha} \Omega^q(A) \oplus \Omega^q(B) \xrightarrow{\beta} \Omega^q(A \cap B) \rightarrow 0,$$

ove

$$(6.4.2) \quad \begin{cases} \alpha(f) = f|_A \oplus f|_B & \forall f \in \Omega^q(A \cup B), \\ \beta(g \oplus h) = g|_{A \cap B} - h|_{A \cap B} & \forall g \in \Omega^q(A), h \in \Omega^q(B), \end{cases}$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. L'iniettività di  $\alpha$  e il fatto che l'immagine di  $\alpha$  sia uguale al nucleo di  $\beta$  sono evidenti. La surgettività di  $\beta$  segue dall'esistenza di una partizione dell'unità su  $A \cup B$  subordinata al ricoprimento  $\{A, B\}$ . Se  $\phi_A, \phi_B \in \mathcal{C}^\infty(A \cup B)$  e  $\text{supp } \phi_A \subset A$ ,  $\text{supp } \phi_B \subset B$ , e  $\phi_A + \phi_B = 1$  su  $A \cup B$ , allora, data  $f \in \Omega^q(A \cap B)$ , possiamo definire

$$f_A = \begin{cases} \phi_B f & \text{su } A \cap B, \\ 0 & \text{su } A \setminus B, \end{cases}, \quad f_B = \begin{cases} -\phi_A f & \text{su } A \cap B, \\ 0 & \text{su } B \setminus A. \end{cases}$$

Allora  $f_A \in \Omega^q(A)$ ,  $f_B \in \Omega^q(B)$  ed  $f_A - f_B = f$  su  $A \cap B$ .  $\square$

Otteniamo quindi, per il Teorema VI.3.2, il

TEOREMA VI.4.2 (Mayer-Vietoris). *Se  $A, B$  sono due aperti di una varietà differenziabile  $M$  abbiamo una successione esatta lunga*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^{q-1}(A) \oplus H^{q-1}(B) & \longrightarrow & H^{q-1}(A \cap B) & & \\ \longrightarrow & H^q(A \cup B) & \longrightarrow & H^q(A) \oplus H^q(B) & \longrightarrow & H^q(A \cap B) & \\ \longrightarrow & H^{q+1}(A \cup B) & \longrightarrow & H^{q+1}(A) \oplus H^{q+1}(B) & \longrightarrow & \dots & \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Il risultato segue dal Teorema ???. L'applicazione  $\Delta_q$  si può descrivere nel modo seguente. Se  $f \in \mathcal{L}^q(A \cap B)$  ed  $f_A \in \Omega^q(A)$ ,  $f_B \in \Omega^q(B)$  sono forme tali che  $f = f_A - f_B$  su  $A \cap B$ , allora

$$(6.4.3) \quad g = \begin{cases} df_A & \text{su } A, \\ df_B & \text{su } B, \end{cases}$$

<sup>1</sup>Leopold Vietoris (Radkersburg, 4 giugno 1891 - Innsbruck, 9 aprile 2002), matematico austriaco. I suoi principali contributi sono nel campo della topologia e della storia della matematica.

Meinhard E. Mayer (nato nel 1929 in Romania), ha insegnato a partire dal 1966 presso l'Università della California ad Irvine. I suoi interessi principali sono stati i metodi geometrici delle teorie di gauge e le applicazioni delle ondelette alla turbolenza. Ha contribuito alla teoria dei bosoni-vettori ( $W$  e  $Z$  bosoni) e dell'unificazione elettro-debole, che sarebbe divenuta poi il modello standard.

definisce un elemento di  $\mathcal{Z}^{q+1}(A \cup B)$ , la cui classe di coomologia  $[g]$  in  $H^{q+1}(A \cup B)$  è l'immagine mediante  $\Delta_q$  della classe  $[f]$  di  $f$  in  $H^q(A \cap B)$ .  $\square$

ESEMPIO VI.4.3. Consideriamo la circonferenza  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Siano  $A = S^1 \setminus \{-i\}$ ,  $B = S^1 \setminus \{i\}$ . Allora  $A$  e  $B$  sono diffeomorfi ad  $\mathbb{R}$ ,  $A \cap B$  all'unione disgiunta di due copie di  $\mathbb{R}$ . Risulterà quindi:

$$H^q(A) \simeq H^q(B) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{se } q \neq 0, \end{cases} \quad H^q(A \cap B) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{se } q \neq 0. \end{cases}$$

Dalla successione di Mayer-Vietoris ricaviamo allora che  $H^q(S^1) = 0$  se  $q \neq 0, 1$ . Abbiamo poi

$$0 \longrightarrow H^0(S^1) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow H^1(S^1) \longrightarrow 0.$$

È  $H^0(S^1) \simeq \mathbb{R}$ , perché  $S^1$  è connesso per archi. Quindi la dimensione dello spazio vettoriale  $H^1(S^1)$  si ricava da

$$\begin{aligned} 0 &= \dim_{\mathbb{R}} H^0(S^1) - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 - \dim_{\mathbb{R}} H^1(S^1) \\ &= 1 - 2 + 2 - \dim_{\mathbb{R}} H^1(S^1). \end{aligned}$$

È perciò  $H^1(S^1) \simeq \mathbb{R}$ .

ESEMPIO VI.4.4. Consideriamo la sfera

$$S^n = \{x = (x^0, x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}, \quad n > 1.$$

Siano  $A = \{x \in S^n \mid x^0 > -1\}$ ,  $B = \{x \in S^n \mid x^0 < 1\}$ . Poiché  $A$  e  $B$  sono diffeomorfi ad  $\mathbb{R}^n$ , ed  $A \cap B$  è connesso, otteniamo dalla successione di Mayer-Vietoris gli isomorfismi

$$H^q(S^n) \simeq H^{q-1}(A \cap B), \quad \text{se } q \neq 0, 1,$$

e la successione esatta

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(S^n) \simeq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow H^0(A \cap B) \simeq \mathbb{R} \\ &\longrightarrow H^1(S^n) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Dalla successione esatta ricaviamo che  $H^1(S^n) = 0$  se  $n > 1$ . Infine,  $A \cap B$  si retrae per deformazione su  $S^{n-1} = \{x \in S^n \mid x^0 = 0\}$ . Vedremo che questo dà  $H^q(A \cap B) \simeq H^q(S^{n-1})$  per ogni  $q \in \mathbb{Z}$ . Ricaviamo così per ricorrenza, utilizzando l'esempio precedente, che

$$H^q(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, n, \\ 0 & \text{se } q \neq 0, n. \end{cases}$$

ESEMPIO VI.4.5. Sia  $\Sigma$  un iperpiano dello spazio proiettivo reale  $\mathbb{R}P^n$ . Possiamo supporre che  $\Sigma = \{x^0 = 0\}$ . Allora  $A = \{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 > 0\}$  è lo spazio totale di un intorno tubolare di  $\Sigma$  in  $\mathbb{R}P^n$ . Sia  $B = \mathbb{R}P^n \setminus \Sigma$ . Abbiamo allora

$$\begin{aligned} A &= \{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 > 0\} \simeq \mathbb{R}P^{n-1} \times \mathbb{R}, \\ B &= \{x_0 \neq 0\} \simeq \mathbb{R}^n, \\ A \cup B &= \mathbb{R}P^n, \end{aligned}$$

$$A \cap B \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Abbiamo le equivalenze omotopiche  $A \simeq \mathbb{R}P^{n-1}$ ,  $B \simeq \{0\}$ ,  $A \cap B \equiv S^{n-1}$ .

Abbiamo perciò la successione esatta in coomologia

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H^{q-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H^q(\mathbb{R}P^n) \longrightarrow H^q(\mathbb{R}P^{n-1}) \oplus H^q(\{0\}) \\ &\longrightarrow H^q(S^{n-1}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Per  $n = 2$  otteniamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^1(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^2(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow 0.$$

Poiché  $\mathbb{R}P^2$  è semplicemente connesso,  $H^1(\mathbb{R}P^2) = 0$  e quindi anche  $H^2(\mathbb{R}P^2) = 0$ .

Si dimostra allora per ricorrenza che

$$H^q(\mathbb{R}P^{2m+1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 2m+1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad H^q(\mathbb{R}P^{2m}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

**ESEMPIO VI.4.6.** Siano  $m, n$  interi con  $1 \leq m < n$  e sia  $\Sigma$  un  $m$ -piano di  $\mathbb{R}P^n$ . Sia  $M = \mathbb{R}P^n \setminus \Sigma$ . Scegliamo un  $(n-m-1)$ -piano  $\Sigma'$  di  $\mathbb{R}P^n$  con  $\Sigma \cap \Sigma' = \emptyset$ . Per ogni  $q \in M$ , l' $(m+1)$ -piano per  $q$  e  $\Sigma$  interseca  $\Sigma'$  in uno ed un solo punto  $p = \pi(q)$ . Poiché  $(q\Sigma) \setminus \Sigma \simeq \mathbb{R}^{m+1}$ , la  $\tau = (M \xrightarrow{\pi} \Sigma')$  definisce un intorno tubolare di  $\Sigma'$  in  $\mathbb{R}P^n$ , con spazio totale  $M$ . L' $(n-m-1)$ -piano  $\Sigma'$  è quindi un retratto di deformazione di  $M$ . Otteniamo perciò

$$H^q(\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^m) \simeq H^q(\mathbb{R}P^{n-m-1}), \quad \forall q > 0.$$

Ad esempio,

$$\begin{aligned} H^q(\mathbb{R}P^3 \setminus \mathbb{R}P^1) &= \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \\ H^q(\mathbb{R}P^5 \setminus \mathbb{R}P^1) &= \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 3, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \\ H^q(\mathbb{R}P^5 \setminus \mathbb{R}P^2) &= \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \\ H^q(\mathbb{R}P^5 \setminus \mathbb{R}P^3) &= \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned}$$

**ESEMPIO VI.4.7.** Consideriamo ora lo spazio proiettivo  $\mathbb{C}P^n$ . Sia  $\Sigma = \{z^0 = 0\}$  un suo iperpiano. Allora  $A = \{|z^1|^2 + \dots + |z^n|^2 > 0\}$  è lo spazio totale di un suo intorno tubolare in  $\mathbb{C}P^n$ . Poniamo  $B = \mathbb{C}P^n \setminus \Sigma$ . Allora

$$A = \{|z^1|^2 + \dots + |z^n|^2 > 0\} \simeq \mathbb{C}P^{n-1},$$

$$B = \mathbb{C}P^n \setminus \Sigma = \mathbb{C}^n \simeq \{0\},$$

$$A \cup B = \mathbb{C}P^n,$$

$$A \cap B = \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \simeq S^{2n-1},$$

ove  $\simeq$  indica equivalenza omotopica. Otteniamo allora la successione esatta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) & \longrightarrow & H^1(S^{2n-1}) \\ & & \longrightarrow & H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow H^{q-1}(S^{2n-1}) \\ & & \longrightarrow & H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) & \longrightarrow H^q(S^{2n-1}) \\ & & \longrightarrow & \dots & & & \end{array}$$

Otteniamo allora

$$H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \simeq H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}), \quad \forall q \leq 2n-2, \quad H^{2n-1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = 0, \quad H^{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \mathbb{R}.$$

Ricaviamo perciò, per ricorrenza,

$$H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 2, \dots, 2n, \\ 0 & \text{se } q = 1, 3, \dots, 2n-1. \end{cases}$$

ESEMPIO VI.4.8. Siano  $m, n$  due interi con  $1 \leq m < n$  e  $\Sigma$  un  $m$ -piano proiettivo complesso in  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . Se scegliamo un  $(n-m-1)$ -piano proiettivo complesso  $\Sigma'$  che non intersechi  $\Sigma$ , l'applicazione che fa corrispondere ad ogni punto  $q$  di  $M = \mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \Sigma$  l'unico punto  $p = \pi(q)$  di  $\Sigma'$  in cui l' $(m+1)$ -piano proiettivo complesso per  $\Sigma$  e  $q$  interseca  $\Sigma'$  definisce un intorno tubolare  $\tau = (M \xrightarrow{\pi} \Sigma')$  di  $\Sigma'$  in  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . Otteniamo perciò

$$H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{C}\mathbb{P}^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 2, \dots, 2(n-m-1), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESEMPIO VI.4.9. Siano  $M$  ed  $N$  due sottovarietà proprie connesse di  $\mathbb{R}^n$  che si intersechino in un punto  $p_0$ . Possiamo scegliere due loro intorni tubolari con spazi totali  $A$  e  $B$  la cui intersezione  $A \cap B$  sia un intorno contrattile di  $p_0$ . Dalla successione esatta di Mayer-Vietoris possiamo allora dedurre che

$$H^0(A \cap B) = \mathbb{R}, \quad H^q(A \cup B) = H^q(A) \oplus H^q(B), \quad \text{per ogni } q > 0.$$

ESEMPIO VI.4.10. Siano  $M$  una varietà connessa di dimensione  $m \geq 2$ ,  $p_0 \in M$  ed  $N = M \setminus \{p_0\}$ . Allora  $H^q(M) \simeq H^q(N)$  per ogni  $q \neq m, m-1$ . Infatti, se  $A$  è un intorno contrattile di  $p_0$  in  $M$ , l'intersezione  $A \cap N$  è omotopicamente equivalente alla sfera  $S^{m-1}$ . La successione di Mayer-Vietoris ci dà quindi l'isomorfismo desiderato se  $1 \leq q \leq m-2$ . Abbiamo poi la successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{m-1}(M) & \longrightarrow & H^{m-1}(N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \longrightarrow & H^m(M) & \longrightarrow & H^m(N) & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Una varietà connessa di dimensione  $m$  ha  $m$ -esimo gruppo di coomologia di de Rham uguale ad  $\mathbb{R}$  se compatta ed orientabile, uguale a 0 altrimenti. Avremo quindi  $H^{m-1}(M) \simeq H^{m-1}(N)$  se  $M$  è compatta e orientabile,  $H^{m-1}(N) \simeq H^{m-1}(M) \oplus \mathbb{R}$  altrimenti.

ESEMPIO VI.4.11. Siano  $M_1, M_2$  due varietà connesse di dimensione  $m$ . Allora

$$H^q(M_1 \# M_2) = H^q(M_1) \oplus H^q(M_2) \quad \text{se } q \neq m-1, m.$$



ESEMPIO VI.4.12. Introduciamo su  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  la relazione di equivalenza

$$x \sim y \iff y = 2^k x, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Allora  $M = (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) / \sim$  ha un'unica struttura di varietà differenziabile di dimensione  $n$  per cui la proiezione nel quoziente  $\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow M$  sia un diffeomorfismo locale. Per  $n = 1$  la  $M$  è diffeomorfa ad  $S^1$  e per  $n = 2$  al toro  $T^2 = S^1 \times S^1$ . Supponiamo quindi nel seguito che  $n \geq 3$ .

Possiamo ricoprire  $M$  con i due aperti

$$A = \pi(\{1 < |x| < 2\}), \quad B = \pi(\{\frac{3}{2} < |x| < 3\}).$$

Allora  $A$  e  $B$  sono omotopicamente equivalenti ad  $S^{n-1}$  ed  $A \cap B$  all'unione disgiunta di due copie di  $S^{n-1}$ . Otteniamo allora la successione esatta di Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ & & \longrightarrow & H^1(M) & \longrightarrow & 0 & \\ 0 & \longrightarrow & H^q(M) & \longrightarrow & 0 & \text{ per } 2 \leq q \leq m-2 & \\ 0 & \longrightarrow & H^{m-1}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ & & \longrightarrow & H^m(M) = \mathbb{R} & \longrightarrow & 0. & \end{array}$$

Otteniamo perciò

$$H^q(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 1, (m-1), m, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Costruiamo ora la successione esatta di Mayer-Vietoris per le forme a supporto compatto.

LEMMA VI.4.13. *Siano  $A, B$  due aperti della varietà differenziabile  $M$ . Allora, per ogni intero non negativo  $q$  abbiamo la successione esatta*

$$(6.4.4) \quad 0 \rightarrow \Omega_c^q(A \cap B) \xrightarrow{\alpha} \Omega_c^q(A) \oplus \Omega_c^q(B) \xrightarrow{\beta} \Omega_c^q(A \cup B) \rightarrow 0$$

ove

$$\begin{cases} \alpha(f) = f \oplus f & \forall f \in \Omega_c^q(A \cap B), \\ \beta(f \oplus g) = f - g & \forall f \in \Omega_c^q(A), g \in \Omega_c^q(A \cap B). \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. L'iniettività di  $\alpha$  e il fatto che l'immagine di  $\alpha$  sia il nucleo di  $\beta$  sono ovvii. La surgettività di  $\beta$  è conseguenza della partizione dell'unità. Se  $\phi_A, \phi_B \in \mathcal{C}^\infty(A \cup B)$  e  $\text{supp } \phi_A \subset A$ ,  $\text{supp } \phi_B \subset B$ , e  $\phi_A + \phi_B = 1$  su  $A \cup B$ , allora, data  $f \in \Omega_c^q(A \cup B)$ , possiamo definire

$$f_A = \phi_A f, \quad f_B = \phi_B f.$$

Allora  $f_A \in \Omega_c^q(A)$ ,  $f_B \in \Omega_c^q(B)$  ed  $f_A - f_B = f$  su  $A \cup B$ . □

Come conseguenza abbiamo

**TEOREMA VI.4.14** (Mayer-Vietoris per supporti compatti). *Siano  $A, B$  due aperti della varietà differenziabile  $M$ . Abbiamo allora una successione esatta lunga per la coomologia di de Rham a supporti compatti:*

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_c^{q-1}(A) \oplus H_c^{q-1}(B) & \longrightarrow & H_c^{q-1}(A \cup B) & & \\ \longrightarrow & H_c^q(A \cap B) & \longrightarrow & H_c^q(A) \oplus H_c^q(B) & \longrightarrow & H_c^q(A \cup B) & \\ \longrightarrow & H_c^{q+1}(A \cap B) & \longrightarrow & H_c^{q+1}(A) \oplus H_c^{q+1}(B) & \longrightarrow & \cdots & \end{array}$$

### VI.5. La dualità di Poincaré

**DEFINIZIONE VI.5.1.** Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$ . Un *buon ricoprimento* di  $M$  è un suo ricoprimento aperto  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  per cui ogni intersezione non vuota  $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$  sia diffeomorfa ad  $\mathbb{R}^m$ .

Introducendo una metrica Riemanniana su  $M$  e scegliendo intorni aperti convessi (vedi il Teorema XVII.2.5 del Capitolo XXI) possiamo dimostrare il

**TEOREMA VI.5.2.** *Ogni varietà differenziabile  $M$  ammette un buon ricoprimento. Ogni ricoprimento aperto di una varietà differenziabile  $M$  ammette un buon raffinamento.*

**TEOREMA VI.5.3.** *Se una varietà  $M$  ammette un buon ricoprimento finito, allora sia la sua coomologia di de Rham che la sua coomologia di de Rham coi supporti compatti hanno dimensione finita. Se inoltre  $M$  è una varietà differenziabile orientabile di dimensione  $m$ , la forma bilineare*

$$(6.5.1) \quad (f, g) \rightarrow \int_M f \wedge g, \quad \text{per } f \in \Omega^q(M), g \in \Omega_c^{m-q}(M)$$

*definisce per passaggio al quoziente un accoppiamento di dualità tra  $H^q(M)$  ed  $H_c^{m-q}(M)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Ragionando per induzione sulla cardinalità di un buon ricoprimento, ed utilizzando le successioni esatte di Mayer-Vietoris, si dimostra facilmente la finitezza dei gruppi di coomologia di de Rham, sia con supporti chiusi che con supporti compatti.

Supponiamo ora che  $M$  sia orientabile, in modo da poter definire senza ambiguità l'integrale su  $M$  delle  $n$ -forme. Se  $f$  e  $g$  sono chiuse, ed una delle due esatta, abbiamo

$$\int_M f \wedge g = 0.$$

Se infatti  $f = du$ , con  $u \in \Omega^{q-1}(M)$ , allora  $f \wedge g = d(u \wedge g)$ , con  $u \wedge g \in \Omega_c^{m-1}(M)$ , e quindi l'integrale (6.5.1) è nullo per la formula di Stokes. Se  $g = dv$  con  $v \in \Omega_c^{q-1}(M)$ , allora ancora  $w = (-1)^q f \wedge v \in \Omega_c^{m-1}(M)$  e l'integrale (6.5.1) è nullo per la formula di Stokes perché  $f \wedge g = dw$ .

Dimostriamo ora che (6.5.1) definisce un accoppiamento di dualità tra i gruppi di coomologia. Osserviamo che questo è vero se  $M = \mathbb{R}^m$ . Possiamo quindi ragionare per induzione, supponendolo vero per varietà  $M$  che ammettano un buon

ricoprimento che consista di al più un certo numero  $\ell \geq 1$  di aperti, e dimostrandolo quindi per varietà che ammettano un buon ricoprimento con  $\ell + 1$  aperti.

Siamo  $U, V$  due aperti di  $M$  e definiamo

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = H^q(U \cap V), & \mathbf{B}_1 = (H_c^{m-q}(U \cap V))^*, \\ \mathbf{A}_2 = H^q(U) \oplus H^q(V), & \mathbf{B}_2 = (H_c^{m-q}(U))^* \oplus (H_c^{m-q}(V))^*, \\ \mathbf{A}_3 = H^q(U \cup V), & \mathbf{B}_3 = (H_c^q(U \cup V))^*, \\ \mathbf{A}_4 = H^{q+1}(U \cap V), & \mathbf{B}_4 = (H_c^{m-q-1}(U \cap V))^*, \\ \mathbf{A}_5 = H^{q+1}(U) \oplus H^{q+1}(V), & \mathbf{B}_5 = (H_c^{m-q-1}(U))^* \oplus (H_c^{m-q-1}(V))^*, \end{cases}$$

ove  $V^*$  denota il duale dello spazio vettoriale di dimensione finita  $V$ . La (6.5.1) definisce le frecce verticali del diagramma commutativo a righe esatte

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5, \end{array}$$

ove le  $g_i$  sono ottenute per dualità da quelle della successione esatta di Mayer-Vietoris per i supporti compatti. Se  $M$  ammette un buon ricoprimento consistente di  $\ell + 1$  aperti  $U_0, U_1, \dots, U_\ell$  e scegliamo  $U = U_0, V = \bigcup_{j=1}^\ell U_j$ , allora  $U, V$  ed  $U \cap V$  ammettono buoni ricoprimenti con al più  $\ell$  aperti. Per l'ipotesi induttiva ne segue che  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$  sono isomorfismi e dunque, per il lemma dei cinque, anche  $\alpha_3$  è un isomorfismo, che identifica  $H^q(M) = H^q(U \cup V)$  al duale di  $H_c^{m-q}(M)$ .  $\square$

**COROLLARIO VI.5.4.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile orientabile che ammette un buon ricoprimento finito.*

*Sia  $\alpha \in \Omega^q(M)$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\alpha \in \mathcal{B}^q(M)$  è che*

$$(6.5.2) \quad \int_M \alpha \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{Z}_c^{m-q}(M).$$

*Sia  $\alpha \in \Omega_c^q(M)$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\alpha \in \mathcal{B}_c^q(M)$  è che*

$$(6.5.3) \quad \int_M \alpha \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{Z}^{m-q}(M).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $\alpha \in \Omega^q(M)$  soddisfi la (6.5.3). Abbiamo in particolare

$$\int_M (d\alpha) \wedge \theta = (-1)^{q+1} \int_M \alpha \wedge d\theta = 0, \quad \forall \theta \in \Omega_c^{m-q+1}(M),$$

e quindi  $\alpha \in \mathcal{Z}^q(M)$ . Se fosse  $[\alpha] \neq 0$  in  $H^q(M)$ , per il Teorema VI.5.3 potremmo trovare una  $\eta \in \mathcal{Z}_c^{m-q}(M)$  con

$$\int_M \alpha \wedge \eta \neq 0.$$

Quindi  $\alpha \in \mathcal{B}^q(M)$ . La dimostrazione nel caso delle forme a supporto compatto è analoga.  $\square$

In particolare abbiamo:

**TEOREMA VI.5.5.** *Se  $M$  è una varietà differenziabile compatta e orientabile di dimensione  $m$ , allora*

$$(6.5.4) \quad \dim_{\mathbb{R}} H^q(M) = \dim_{\mathbb{R}} H^{m-q}(M) < +\infty$$

e la (6.5.1) definisce un accoppiamento di dualità tra  $H^q(M)$  ed  $H^{m-q}(M)$ . In particolare, per una varietà differenziabile connessa, compatta ed orientabile di dimensione  $m$  è  $H^m(M) \simeq \mathbb{R}$ .

**OSSERVAZIONE VI.5.6.** L'enunciato non vale, in generale, nel caso di varietà non orientabili. Infatti, per uno spazio proiettivo reale di dimensione pari  $2m$  abbiamo

$$\mathbb{R} = H^0(\mathbb{R}P^{2m}) \neq H^{2m}(\mathbb{R}P^{2m}) = 0.$$

**ESEMPIO VI.5.7.** Sia  $M$  una superficie orientabile di genere  $g$ . Possiamo ottenere  $M$  da un poligono chiuso  $P$  di  $4g$  identificando a coppie i suoi lati secondo la formula  $\partial P = a_1 b_1^{-1} a_1 b_1^{-1} \cdots a_g b_g^{-1} a_g b_g^{-1}$ . Sia  $\pi : P \rightarrow M$  la proiezione nel quoziente. Utilizziamo un ricoprimento di  $M$  mediante i due aperti  $A = \pi(\mathring{P}) \simeq \mathbb{R}^2$ ,  $B = \pi(P \setminus \{p_0\})$  per un punto  $p_0 \in \mathring{P}$ . L'intersezione  $A \cap B$  è omotopicamente equivalente ad  $S^1$ . Per l'Esempio VI.4.9, poiché  $B$  si retrae su un bouquet di  $2g$  circonferenze, otteniamo che  $H^1(B) = \underbrace{H^1(S^1) \oplus \cdots \oplus H^1(S^1)}_{2g \text{ volte}} = \mathbb{R}^{2g}$ . Per Mayer-Vietoris

abbiamo allora la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{2g} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^2(M) \longrightarrow 0.$$

Per la dualità di Poincaré abbiamo  $H^2(M) \simeq H^0(M) = \mathbb{R}$  e quindi  $H^1(M) = \mathbb{R}^{2g}$ .

**OSSERVAZIONE VI.5.8.** I gruppi di coomologia  $H^q(M)$  hanno in generale, anche quando non siano di dimensione finita, una struttura naturale di spazi di Fréchet. Se  $M$  è orientabile, i gruppi  $H_c^{m-q}(M)$  sono ancora i loro duali topologici, con opportuna topologia di spazi vettoriali topologici. L'accoppiamento di dualità è sempre definito dalla (6.5.1).

## VI.6. Grado di un'applicazione

Dal Teorema VI.5.5 segue:

**TEOREMA VI.6.1.** *Siano  $M, N$  due varietà connesse, compatte, orientate, della stessa dimensione  $m$ . Se  $f : M \rightarrow N$  è un'applicazione differenziabile, esiste un numero intero  $k$  tale che*

$$(6.6.1) \quad \int_M f^* \phi = k \int_N \phi, \quad \forall \phi \in \Omega^m(N).$$

**DEFINIZIONE VI.6.2.** Il numero intero  $k$  nella formula (6.6.1) si dice il *grado* dell'applicazione  $f$  e si denota con  $\deg(f)$ .

Con una dimostrazione analoga a quella del Teorema IV.6.2 del Capitolo IV possiamo dimostrare

**TEOREMA VI.6.3.** *Siano  $M, N$  due varietà connesse, compatte, orientate, della stessa dimensione  $m$  ed  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ . Allora il grado di  $f$  è la somma algebrica delle segnature di  $df(p)$ , per  $p$  che varia nella controimmagine  $f^{-1}(q)$  di un valore regolare  $q \in N$  di  $f$ , ed è zero se  $f$  non è surgettiva.  $\square$*

**ESEMPIO VI.6.4.** Su  $S^1 = \{z = e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  la forma differenziale

$$\frac{1}{2\pi}d\theta = \frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{d\bar{z}}{\bar{z}}$$

definisce l'orientazione ed ha integrale 1.

Se  $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{D})$  ed  $f(z) \neq 0$  per  $z \in S^1$ , la

$$(6.6.2) \quad g : S^1 \ni z \longrightarrow \frac{f(z)}{|f(z)|} \in S^1$$

è un'applicazione di classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Per calcolarne l'indice, osserviamo che

$$(6.6.3) \quad \begin{aligned} g^*\left(\frac{1}{2\pi}d\theta\right) &= \frac{1}{2\pi i}d \log g = \frac{1}{2\pi i}(d \log f(z) - \frac{1}{2}d \log f(z)\bar{f}(z)) \\ &= \frac{1}{4\pi i}\left(\frac{f'(z)dz}{f(z)} - \frac{\bar{f}'(z)d\bar{z}}{\bar{f}(z)}\right). \end{aligned}$$

Otteniamo allora

$$(6.6.4) \quad \begin{aligned} \deg(g) &= \frac{1}{4\pi i} \int_S \left( \frac{f'(z)dz}{f(z)} - \frac{\bar{f}'(z)d\bar{z}}{\bar{f}(z)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f'(z)dz}{f(z)} = \sum_{z \in D} \nu_z(f), \end{aligned}$$

ove  $\nu_z(f)$  è la molteplicità di zero di  $f$  in  $z$ .

Più in generale se  $f \in \mathcal{M}(D) \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{D} \setminus f^{-1}(\infty))$  è una funzione meromorfa su  $D$ , che si prolunga ad una funzione  $\mathcal{C}^\infty$  in un intorno di  $S^1$ , e definiamo  $g$  mediante la (6.6.2), il grado di  $g$  è ancora definito dalla (6.6.4), ove  $\nu_z(f)$  indica l'intero per cui  $\zeta \rightarrow (\zeta - z)^{\nu_z(f)} f(\zeta)$  è definita, olomorfa e non nulla in un intorno di  $z$  in  $D$ , è cioè o l'ordine di zero o l'opposto dell'ordine di polo di  $f$  in  $z$ .

## VI.7. La formula di Künnet

**TEOREMA VI.7.1** (formula di Künnet). *Siano  $M$  ed  $N$  due varietà differenziabili, di dimensioni  $m$  ed  $n$ , rispettivamente. Supponiamo che  $M$  ammetta un buon ricoprimento finito<sup>2</sup>. Allora vale la formula di Künnet<sup>3</sup>*

$$(6.7.1) \quad \begin{cases} H^q(M \times N) \simeq \bigoplus_{j=0}^m H^j(M) \otimes H^{q-j}(N), \\ H_c^q(M \times N) \simeq \bigoplus_{j=0}^m H_c^j(M) \otimes H_c^{q-j}(N), \end{cases} \quad \text{per ogni } q \in \mathbb{N}.$$

<sup>2</sup>Il teorema vale anche sotto l'ipotesi meno restrittiva che i gruppi di coomologia di  $M$  siano di dimensione finita. Nel caso in cui né i gruppi di coomologia di de Rham di  $M$  né tutti quelli di  $N$  siano tutti di dimensione finita, la tesi vale ancora, purché i prodotti tensoriali nella formula di Künnet si intendano calcolati nel senso degli spazi vettoriali topologici.

<sup>3</sup>Otto Hermann Lorenz Künneth (Neustadt an der Haardt, 6 luglio 1892 – Erlangen, 7 maggio 1975) topologo algebrico tedesco.

DIMOSTRAZIONE. Siano

(6.7.2)

$$\begin{array}{ccc} & M \times N & \\ \pi_M \swarrow & & \searrow \pi_N \\ M & & N \end{array}$$

le proiezioni del prodotto  $M \times N$  sui singoli fattori, e sia  $\Omega^{q_1}(M) \otimes \Omega^{q_2}(N)$  il prodotto tensoriale algebrico di  $\Omega^{q_1}(M)$  ed  $\Omega^{q_2}(N)$ . I suoi elementi sono le somme finite

$$(6.7.3) \quad f = \sum_{j=1}^r \pi_M^*(g_j) \wedge \pi_N^*(h_j), \quad \text{con } g_j \in \Omega^{q_1}(M), h_j \in \Omega^{q_2}(N).$$

Abbiamo inclusioni naturali

$$\begin{aligned} \bigoplus_{q_1+q_2=q} \mathcal{L}^{q_1}(M) \otimes \mathcal{L}^{q_2}(N) &\hookrightarrow \mathcal{L}^q(M \times N), \\ \bigoplus_{q_1+q_2=q} \mathcal{B}^{q_1}(M) \otimes \mathcal{B}^{q_2}(N) &\hookrightarrow \mathcal{B}^q(M \times N), \end{aligned}$$

che definiscono applicazioni

$$(6.7.4) \quad \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}(M) \otimes H^{q_2}(N) \longrightarrow H^q(M \times N).$$

Fissiamo due aperti  $U, V$  di  $M$  e poniamo

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}(U \cap V) \otimes H^{q_2}(N), \\ \mathbf{A}_2 = \bigoplus_{q_1+q_2=q} (H^{q_1}(U) \oplus H^{q_1}(V)) \otimes H^{q_2}(N), \\ \mathbf{A}_3 = \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}(U \cup V) \otimes H^{q_2}(N), \\ \mathbf{A}_4 = \bigoplus_{q_1+q_2=q+1} H^{q_1}(U \cap V) \otimes H^{q_2}(N), \\ \mathbf{A}_5 = \bigoplus_{q_1+q_2=q+1} (H^{q_1}(U) \oplus H^{q_1}(V)) \otimes H^{q_2}(N), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = H^q((U \cap V) \times N), \\ \mathbf{B}_2 = H^q(U \times N) \oplus H^q(V \times N), \\ \mathbf{B}_3 = H^q((U \cup V) \times N), \\ \mathbf{B}_4 = H^{q+1}((U \cap V) \times N), \\ \mathbf{B}_5 = H^{q+1}(U) \oplus H^{q+1}(V \times N), \end{cases}$$

Per la successione esatta di Mayer-Vietoris, otteniamo un diagramma commutativo a righe esatte

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccccc} \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5, \end{array}$$

dove le  $\alpha_i$  sono definite dalle (6.7.4), sostituendo ad  $M$  le sottovarietà  $U, V, U \cap V$ . Dimostreremo quindi la formula di Künnet per induzione sul numero di aperti di

un buon ricoprimento di  $M$ . Infatti, con una dimostrazione analoga a quella del Lemma IV.4.4 del Capitolo IV, si dimostra che

$$H^q(\mathbb{R}^m \times N) \simeq H^q(N), \quad \forall q \in \mathbb{N},$$

e quindi la formula di Künnet vale quando  $M = \mathbb{R}^m$ . Supponiamo che essa valga per ogni varietà  $M$  che ammetta un buon ricoprimento con al più  $k$  aperti, per qualche  $k \geq 1$ . Se  $\{U_0, \dots, U_k\}$  è un buon ricoprimento di una varietà  $M$ , che consiste di  $k + 1$  aperti, consideriamo il diagramma (\*) con  $U = U_0$  e  $V = U_1 \cup \dots \cup U_k$ . Allora, per l'ipotesi induttiva,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$  sono isomorfismi. Per il lemma dei cinque anche  $\alpha_3$  è un isomorfismo.  $\square$

Con analoga dimostrazione otteniamo

**TEOREMA VI.7.2 (Leray-Hirsch).** *Sia  $E \xrightarrow{\pi} M$  un fibrato differenziabile, con fibra tipica  $F$ . Supponiamo che  $M$  abbia un buon ricoprimento finito e che per ogni intero non negativo  $q$  vi siano delle classi di coomologia  $e_1^q, \dots, e_{\nu_q}^q \in H^q(E)$  tali che il loro pull-back su ciascuna fibra  $\pi^{-1}(x)$ , per  $x \in M$ , sia una base di  $H^q(\pi^{-1}(x))$ . Allora vale la formula di Künneth:*

$$(6.7.5) \quad H^q(E) = \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}(M) \otimes H^{q_2}(F).$$

**ESEMPIO VI.7.3.** Sia  $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ volte}}$  il toro  $n$ -dimensionale. È  $T^n = T^{n-1} \times S^1$ .

Allora, per la formula di Künnet, abbiamo

$$H^q(T^n) = (H^q(T^{n-1}) \otimes \mathbb{R}) \oplus (H^{q-1}(T^{n-1}) \otimes \mathbb{R}) = H^{q-1}(T^{n-1}) \oplus H^q(T^{n-1}), \quad \forall q \geq 1.$$

Poiché  $\binom{n-1}{q} + \binom{n-1}{q-1} = \binom{n}{q}$ , otteniamo per ricorrenza

$$H^q(T^n) = \mathbb{R}^{\binom{n}{q}}, \quad \forall q = 0, 1, \dots, n.$$

### VI.8. Duale di Poincaré in una sottovarietà orientata

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$  ed  $S$  una sua sottovarietà propria orientata di dimensione  $k$ . Associamo ad  $S$  il funzionale lineare  $\mathbb{I}_S$ , definito sulle  $k$ -forme a supporto compatto da:

$$(6.8.1) \quad \mathbb{I}_S(f) = \int_S f, \quad \forall f \in \mathcal{Q}_c^k(M).$$

Per la formula di Stokes,  $\mathbb{I}_S(f) = 0$  se  $f \in \mathcal{D}_c^k(M)$ . Per passaggio al quoziente,  $\mathbb{I}_S$  definisce quindi un funzionale lineare su  $H_c^k(M)$ . Supponiamo che  $M$  sia orientata ed ammetta un buon ricoprimento finito. Allora vale la dualità di Poincaré e potremo dunque identificare  $\mathbb{I}_S$  ad un elemento di  $H^{m-k}(M)$ .

**DEFINIZIONE VI.8.1.** Sia  $M$  una varietà orientata ed  $S$  una sua sottovarietà propria orientata di dimensione  $k$ . Si dice *duale di Poincaré chiuso* di  $S$  una qualsiasi forma  $\eta_S \in \mathcal{L}^{m-k}(M)$ , tale che

$$(6.8.2) \quad \int_M f \wedge \eta_S = \int_S f, \quad \forall f \in \mathcal{L}_c^k(M).$$

La classe  $[\eta_S] \in H^{m-k}(M)$  è l'elemento che definisce  $\mathbb{I}_S$  nella dualità di Poincaré.

In modo analogo, se  $S$  è una sottovarietà compatta orientata di dimensione  $k$  di  $M$ , possiamo associare ad essa un funzionale definito sulle  $k$ -forme differenziali con supporti chiusi in  $M$ , mediante

$$(6.8.3) \quad \mathbb{I}_S(f) = \int_S f, \quad \forall f \in \mathcal{Q}^k(M).$$

Poiché  $\mathbb{I}_S(f) = 0$  se  $f \in \mathcal{B}^k(M)$ , la  $\mathbb{I}_S$  definisce in questo caso un funzionale lineare su  $H^k(M)$ . Per la dualità di Poincaré potremo trovare un unico elemento di  $H_c^{m-k}(M)$  tale che, se  $\eta_S \in \mathcal{L}_c^{m-k}(M)$  è un suo rappresentante, risulti

$$(6.8.4) \quad \int_M f \wedge \eta_S = \int_S f, \quad \forall f \in \mathcal{L}^k(M).$$

**DEFINIZIONE VI.8.2.** Sia  $M$  una varietà orientata ed  $S$  una sua sottovarietà compatta orientata di dimensione  $k$ . Una forma  $\eta_S \in \mathcal{L}_c^{m-k}(M)$  per cui valga la (6.8.4) si dice *duale di Poincaré compatto* di  $S$ . La sua classe  $[\eta_S] \in H_c^{m-k}(M)$  è l'elemento che definisce  $\mathbb{I}_S$  nella dualità di Poincaré.

**ESEMPIO VI.8.3.** Il duale di Poincaré chiuso di un punto in  $\mathbb{R}^n$  è 0, mentre il suo duale di Poincaré compatto è una qualsiasi forma a supporto compatto con integrale 1 su  $\mathbb{R}^n$ .

**ESEMPIO VI.8.4.** Sia  $S = \{(x, 0) \mid x > 0\} \subset M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

Introduciamo su  $M$  coordinate polari  $(r, \theta)$ . Il differenziale

$$d\theta = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$$

è ben definito su  $M$ .

Sia  $f = a(x, y)dx + b(x, y)dy \in \mathcal{Z}_c^1(M)$ . Scriviamola nella forma

$$f = \phi dr + \psi d\theta, \quad \text{con} \quad \phi = a \cos \theta + b \sin \theta, \quad \psi = -r(a \sin \theta - b \cos \theta).$$

Abbiamo

$$\iint_M f \wedge d\theta = \iint \phi dr \wedge d\theta = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} \phi(r, \theta) d\theta$$

Integrando per parti abbiamo

$$\int_0^{2\pi} \phi d\theta = 2\pi\phi(r, 0) - \int_0^{2\pi} \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta.$$

Utilizzando le condizioni d'integrabilità e scambiando l'ordine d'integrazione, otteniamo che

$$\int_0^{+\infty} dr \int_0^{2\pi} \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \theta d\theta \int_0^\infty \frac{\partial \psi}{\partial r} dr = 0.$$

Quindi

$$\iint_M f \wedge d\theta = 2\pi \int_0^\infty \phi(r, 0) dr = 2\pi \int_S f.$$



Quindi  $(2\pi)^{-1}d\theta$  è il duale di Poincaré chiuso di  $S = \{x > 0, y = 0\}$  in  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Osserviamo che, in particolare, se  $f = adx + bdy \in \mathcal{L}_c^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ , l'integrale

$$\int_{S_\theta} f, \quad \text{per } S_\theta = \{t(\cos \theta, \sin \theta) \mid t > 0\}$$

non dipende dalla scelta dell'angolo  $\theta$ .

ESEMPIO VI.8.5. Sia  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Il duale di Poincaré di  $S^1$  è la classe di  $\chi(r)dr$  per una qualsiasi funzione  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ , con  $\text{supp } \chi \subset \{r > 0\}$  ed  $\int_{\mathbb{R}} \chi dr = 1$ .

### VI.9. La proprietà semi-locale

In questo paragrafo studiamo la coomologia di de Rham su varietà differenziabili che possono non avere un buon ricoprimento finito. Dimostriamo innanzi tutto il seguente

LEMMA VI.9.1. *Sia  $M$  una varietà differenziabile connessa ed orientata, che ammette un buon ricoprimento finito. Sia  $q$  un intero con  $1 \leq q \leq n$  ed  $\eta_1, \dots, \eta_k \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(M)$  forme chiuse a supporto compatto tali che  $[\eta_1], \dots, [\eta_k]$  sia una base di  $H_c^{m-q+1}(M)$ .*

*Se  $\alpha \in \mathcal{B}^q(M)$ , allora esiste una soluzione  $\beta \in \mathcal{Q}^{q-1}$  di*

$$(6.9.1) \quad d\beta = \alpha, \quad \int_M \beta \wedge \eta_i = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq k.$$

*Se  $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{Q}^{q-1}$  sono soluzioni di (6.9.1), allora  $\beta_1 - \beta_2 \in \mathcal{B}^{q-2}(M)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\beta_0 \in \mathcal{Q}^{q-1}$  una soluzione di  $d\beta_0 = \alpha$  in  $M$ . Per la dualità di Poincaré, esiste una  $\beta_1 \in \mathcal{L}^{q-1}(M)$  tale che

$$\int_M \beta_1 \wedge \eta_i = \int_M \beta_0 \wedge \eta_i, \quad \text{per } 1 \leq i \leq k.$$

Allora  $\beta = \beta_0 - \beta_1$  soddisfa la (6.9.1).

Se  $\beta_1, \beta_2$  soddisfano la (6.9.1), allora  $\beta_1 - \beta_2 \in \mathcal{L}^{q-1}(M)$  soddisfa

$$\int_M (\beta_1 - \beta_2) \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(M).$$

Infatti,  $\eta \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(M)$  si può scrivere in modo unico nella forma  $\eta = d\theta + \sum_{i=1}^k c_i \eta_i$  con  $\theta \in \mathcal{Q}_c^{m-q}(M)$  e  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ . Abbiamo perciò

$$\begin{aligned} \int_M (\beta_1 - \beta_2) \wedge \eta &= \int_M (\beta_1 - \beta_2) \wedge d\theta + \sum_{i=1}^k c_i \int_M (\beta_1 - \beta_2) \wedge \eta_i \\ &= (-1)^{q-1} \int_M d((\beta_1 - \beta_2) \wedge \theta) = 0 \end{aligned}$$

per la formula di Stokes. Quindi, per il Corollario VI.5.4,  $\beta_1 - \beta_2 \in \mathcal{B}^q(M)$ .  $\square$

La coomologia di de Rham gode della proprietà semi-locale, che è descritta dalla seguente

PROPOSIZIONE VI.9.2. *Sia  $M$  una varietà differenziabile connessa, orientata e numerabile all'infinito. Fissiamo un intero  $q \geq 0$ .*

*Per  $\alpha \in \mathcal{L}^q(M)$  sono equivalenti:*

- (1)  $\alpha \in \mathcal{B}^q(M)$ ,
- (2)  $\int_M \alpha \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q}(M)$ ,
- (3)  $\forall U^{\text{aperto}} \Subset M, \quad \alpha|_U \in \mathcal{B}^q(U)$ .

DIMOSTRAZIONE. Per  $q = 0$ , una  $\alpha \in \mathcal{L}^0(M)$  è una funzione costante su  $M$  e le condizioni (1), (2), (3) equivalgono al fatto che  $\alpha = 0$ .

Osserviamo che chiaramente (1)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (2). Basterà quindi dimostrare l'implicazione (3)  $\Rightarrow$  (1) per  $1 \leq q \leq n$ .

Fissiamo un buon ricoprimento numerabile e localmente finito  $\{U_\nu\}_{\nu \geq 0}$  di  $M$ , formato da aperti relativamente compatti. Costruiamo una successione crescente di aperti  $\{V_\nu\}_{\nu \geq 0}$ , con  $V_\nu \Subset V_{\nu+1}$  ed  $M = \bigcup_\nu V_\nu$ , ciascuno dotato di un buon ricoprimento finito. A questo scopo possiamo definire per ricorrenza:

$$\begin{cases} V_0 = U_0, \\ V_{\nu+1} = \bigcup \{U_\mu \mid U_\mu \cap \bar{V}_\nu \neq \emptyset\}. \end{cases}$$

Il gruppo  $H_c^{m-q+1}(M)$  è unione delle immagini delle applicazioni

$$H_c^{m-q+1}(V_\nu) \rightarrow H_c^{m-q+1}(M)$$

definite dalle inclusioni  $V_\nu \hookrightarrow M$ . Quindi  $H_c^{m-q+1}(M)$ , come spazio vettoriale reale, ha una base al più numerabile. Costruiamo per ricorrenza una successione  $\{\eta_h\}_{h \geq 1} \subset \mathcal{L}_c^{m-q+1}(M)$  ed una successione di aperti  $\{W_\nu\}$  di  $M$  con le proprietà

- (1)  $([\eta_h])$  è una base di  $H_c^{m-q+1}(M)$ .
- (2)  $W_\nu \Subset W_{\nu+1}$  ed  $M = \bigcup_\nu W_\nu$ .
- (3) Ogni  $W_\nu$  ammette un buon ricoprimento finito.
- (4) Esiste una successione crescente  $h_\nu$  di interi positivi tali che  $\text{supp } \eta_h \subset W_\nu$  per  $h \leq h_\nu$  e l'immagine di  $H_c^{m-q+1}(W_\nu) \rightarrow H_c^{m-q+1}(W_{\nu+1})$  sia generata dalle classi di  $\eta_1, \dots, \eta_{h_\nu}$  in  $H_c^{m-q+1}(W_{\nu+1})$ .

Possiamo fissare  $W_0 = V_0$ . Per il Teorema VI.5.5,  $H_c^{m-q+1}(W_0)$  ha dimensione finita.

Costruiamo i rappresentanti di una base di  $H_c^{m-q+1}(W_0)$  scegliendo in primo luogo  $\eta_1, \dots, \eta_{h_0} \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(W_0)$  in modo tale che le loro classi di coomologia in  $H_c^{m-q+1}(M)$  generino l'immagine di  $H_c^{m-q+1}(W_0) \rightarrow H_c^{m-q+1}(M)$ .

Completiamo  $[\eta_1]_0, \dots, [\eta_{h_0}]_0 \in H_c^{m-q+1}(W_0)$  ad una base di  $H_c^{m-q+1}(W_0)$ , aggiungendo classi  $[\theta_1]_0, \dots, [\theta_k]_0 \in H_c^{m-q+1}(W_0)$ , con  $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(W_0)$ . Per ogni  $j = 1, \dots, k$  potremo allora trovare  $c_1, \dots, c_{h_0} \in \mathbb{R}$  e  $\zeta_j \in \mathcal{L}_c^{m-q}(M)$  tali che

$$\theta_j = d\zeta_j + \sum_{h=1}^{h_0} c_h \eta_h, \quad \text{per } j = 1, \dots, k.$$

Scegliamo allora  $W_1 = V_{\mu_1}$ , per un intero positivo  $\mu_1$  tale che

$$\bar{W}_0 \cup \bigcup_{j=1}^k \text{supp } \zeta_j \subset V_{\mu_1}.$$

Ripetendo questa costruzione otteniamo le successioni  $\{[\eta_h]\}$  e  $\{W_\nu\}$  desiderate.

Costruiamo ora, per ricorrenza, una successione  $\{\beta_\nu\}$ , con

- (1)  $\beta_\nu \in \Omega^{q-1}(W_\nu)$ ,  $d\beta_\nu = \alpha$ ,  $\int_{W_\nu} \beta_\nu \wedge \eta_j = 0$  per  $1 \leq j \leq h_\nu$ ,
- (2)  $\beta_{\nu+1}|_{W_{\nu-2}} = \beta_\nu|_{W_{\nu-2}}$  se  $\nu \geq 2$ .

Per il Lemma VI.9.1 possiamo trovare  $\beta_0$  e  $\beta_1$  che soddisfino (1). Supponiamo di aver costruito  $\beta_0, \dots, \beta_\nu$ , con  $\nu \geq 1$ , che soddisfino (1) e (2). Poiché  $W_{\nu+1} \Subset M$ , per l'ipotesi (3) ed il Lemma VI.9.1 possiamo trovare una soluzione  $\gamma \in \Omega^{q-1}(W_{\nu+1})$  di

$$d\gamma = \alpha \text{ in } W_{\nu+1}, \quad \int_{W_{\nu+1}} \gamma \wedge \eta_j = 0 \text{ se } j \leq h_{\nu+1}.$$

Dico che  $\gamma - \beta_\nu$  soddisfa

$$\int_{W_{\nu-1}} (\gamma - \beta_\nu) \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(W_{\nu-1}).$$

Infatti questa equazione è equivalente a

$$\int_{W_{\nu-1}} (\gamma - \beta_\nu) \wedge \eta_j = 0, \quad \forall j \leq h_{\nu-1}.$$

Possiamo quindi trovare  $\zeta \in \Omega^{q-2}(W_{\nu-1})$  tale che  $d\zeta = \gamma - \beta_\nu$ . Con  $\tilde{\zeta} \in \Omega^{q-2}(M)$  con  $\tilde{\zeta}|_{W_{\nu-2}} = \zeta|_{W_{\nu-2}}$ , poniamo allora  $\beta_{\nu+1} = \gamma - d\tilde{\zeta}$ .

Definiamo infine  $\beta \in \Omega^{q-1}(M)$  mediante

$$\beta|_{W_\nu} = \beta_{\nu+2}|_{W_\nu} \quad \text{per } \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Abbiamo  $d\beta = \alpha \in \mathcal{B}^q(M)$ . Ciò completa la dimostrazione.  $\square$

Come conseguenza di questo teorema, abbiamo

**TEOREMA VI.9.3.** *Se  $M$  è una varietà orientata numerabile all'infinito, allora*

$$(6.9.2) \quad H^q(M) \simeq (H_c^{m-q}(M))^*.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Abbiamo osservato, nella dimostrazione del teorema precedente, che  $H_c^{m-q}(M)$  ammette una base numerabile. Ripetendo la costruzione nella dimostrazione del lemma precedente, otteniamo una successione  $\{W_\nu\}$  di aperti di  $M$  ed una successione  $\{\eta_h\} \subset \mathcal{L}_c^{m-q}(M)$  con le proprietà:

- (1) ogni  $W_\nu$  ammette un buon ricoprimento finito,
- (2)  $W_\nu \Subset W_{\nu+1}$ ,  $\bigcup W_\nu = M$ ,
- (3) per una successione non decrescente  $\{h_\nu\}$  abbiamo  $\text{supp } \eta_h \subset W_\nu$  per  $h \leq h_\nu$  e l'immagine di  $H_c^{m-q}(W_\nu) \rightarrow H_c^{m-q}(W_{\nu+1})$  è generata dalle classi di  $\eta_h$  per  $h \leq h_\nu$ .

Sia  $\{c_h\}$  una successione di numeri reali. Dico che è possibile determinare una successione  $\{\alpha_\nu \in \mathcal{L}(W_\nu)\}$  tale che

$$\int_{W_\nu} \alpha_\nu \wedge \eta_h = c_h, \quad \text{per } h \leq h_\nu, \quad \alpha_{\nu+1}|_{W_{\nu-2}} = \alpha_\nu|_{W_{\nu-2}} \text{ per } \nu \geq 2.$$

Poiché i  $W_\nu$  ammettono un buon ricoprimento finito, per la dualità di Poincaré possiamo trovare  $\{\beta_\nu \in \mathcal{L}(W_\nu)\}$  tali che

$$\int_{W_\nu} \beta_\nu \wedge \eta_h = c_h, \text{ per } h \leq h_\nu.$$

Possiamo quindi scegliere  $\alpha_0 = \beta_0$ ,  $\alpha_1 = \beta_1$ . Supponiamo di aver costruito  $\alpha_0, \dots, \alpha_\nu$ , per qualche  $\nu \geq 1$ , in modo che sia soddisfatta la

$$\alpha_\mu|_{W_{\mu-2}} = \alpha_{\mu+1}|_{W_{\mu-2}}, \text{ se } 2 \leq \mu \leq \nu.$$

Abbiamo allora

$$\int_{W_{\nu-1}} (\beta_{\nu+1} - \alpha_\nu) \wedge \eta_h = 0, \text{ per } h \leq h_\nu.$$

Questo implica che

$$\int_{W_{\nu-1}} (\beta_{\nu+1} - \alpha_\nu) \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q}(W_{\nu-1})$$

e quindi esiste una  $\phi \in \Omega^{q-1}(W_{\nu-1})$  tale che  $\beta_{\nu+1}|_{W_{\nu-1}} - \alpha_\nu|_{W_{\nu-1}} = d\phi$ . Se  $\psi \in \Omega^{q-1}(W_{\nu+1})$  è uguale a  $\phi$  su  $W_{\nu-2}$ , possiamo definire  $\alpha_{\nu+1} = \beta_{\nu+1} - d\psi$ . Otteniamo quindi per ricorrenza la successione delle  $\{\beta_\nu\}$  e potremo allora definire  $\beta \in \mathcal{L}^q(M)$  ponendo  $\beta|_{W_\nu} = \beta_{\nu+2}|_{W_\nu}$  per ogni  $\nu \geq 0$ . La classe di coomologia definita da  $\beta$  è l'elemento del duale di  $H_c^{m-q}(M)$  che vale  $c_h$  sull'elemento  $[\eta_h]$  della base di  $H_c^{m-q}(M)$ . Ciò completa la dimostrazione.  $\square$

## **Parte 2**

# **Gruppi e algebre di Lie**



## Gruppi e algebre di Lie

### VII.1. Nozioni fondamentali

DEFINIZIONE VII.1.1. Un'algebra di Lie<sup>1</sup>  $\mathfrak{g}$  su un campo  $\mathbb{k}$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{k}$  su cui è assegnato un prodotto bilineare  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$  tale che

- (1)  $[X, X] = 0, \forall X \in \mathfrak{g},$  (antisimmetria),  
 (2)  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  (identità di Jacobi).

DEFINIZIONE VII.1.2. Un *gruppo di Lie* è un gruppo  $\mathbf{G}$  su cui è fissata una struttura di varietà differenziabile per cui l'operazione di gruppo  $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (a, b) \rightarrow ab^{-1} \in \mathbf{G}$  sia differenziabile.

Poiché  $\mathbf{G}$  è localmente connesso, la componente connessa dell'identità  $\mathbf{G}^0$  di  $\mathbf{G}$  è connessa per archi ed è un sottogruppo normale aperto e chiuso in  $\mathbf{G}$ .

$\mathbf{G}^0$  è numerabile all'infinito e quindi condizione necessaria e sufficiente affinché lo sia anche  $\mathbf{G}$  è che il quoziente  $\mathbf{G}/\mathbf{G}^0$  sia al più numerabile.

Per ogni elemento  $a$  di  $\mathbf{G}$ ,

$$\begin{aligned} \text{le traslazioni a sinistra :} & \quad L_a : \mathbf{G} \ni g \rightarrow ag \in \mathbf{G}, \\ \text{le traslazioni a destra :} & \quad R_a : \mathbf{G} \ni g \rightarrow ga \in \mathbf{G}, \\ \text{gli automorfismi interni :} & \quad \text{ad}(a) : \mathbf{G} \ni g \rightarrow aga^{-1} \in \mathbf{G}, \end{aligned}$$

sono diffeomorfismi di  $\mathbf{G}$  in sé.

A volte scriveremo per semplicità

$$aX \text{ per } L_{a*}(X) \text{ ed } Xa \text{ per } R_{a*}(X), \text{ se } a \in \mathbf{G}, X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G}).$$

DEFINIZIONE VII.1.3. Un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$  si dice *invariante a sinistra* se  $aX = L_{a*}(X) = X$ , per ogni  $a \in \mathbf{G}$ .

PROPOSIZIONE VII.1.4. I campi di vettori invarianti a sinistra formano una sottoalgebra di Lie reale  $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$  di  $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$ . L'applicazione

$$(7.1.1) \quad T_e \mathbf{G} \ni X_e \rightarrow \{X_a = L_{a*}(X_e) \mid a \in \mathbf{G}\} \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$$

è un isomorfismo lineare. □

DEFINIZIONE VII.1.5. Indichiamo con  $\mathfrak{g}$ , e chiamiamo *algebra di Lie* di  $\mathbf{G}$ , lo spazio vettoriale  $T_e \mathbf{G}$ , con la struttura di algebra di Lie reale che rende (7.1.1) un isomorfismo di algebre di Lie.

<sup>1</sup>Vedi il Capitolo XXX.

NOTAZIONE VII.1.6. Denoteremo con  $X^* \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$  il campo di vettori invariante a sinistra corrispondente all'elemento  $X$  di  $\mathfrak{g}$ .

PROPOSIZIONE VII.1.7. *Il campo  $X^* \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$  genera un gruppo a un parametro  $\phi_X(t)$  di diffeomorfismi di  $\mathbf{G}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $X \in \mathfrak{g}$ . Se  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{G})$  è una curva integrale di  $X^*$ , abbiamo  $\dot{\gamma} = \gamma \cdot X$ . Il flusso  $\phi_X(a, t)$  di  $X^*$  soddisfa quindi la

$$\phi_X(a, t) = ab^{-1}\phi_X(b, t) \quad \forall a, b \in \mathbf{G},$$

ed, a priori, per  $|t|$  sufficientemente piccolo. Questa formula ci permette di estendere la definizione di  $\phi_X(a, t)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Se infatti  $\phi_X(e, t)$  è definita per  $|t| < \epsilon$ , dalla

$$\phi_X(a, t + s) = \phi_X(\phi_X(a, t), s) = \phi_X(a, t)\phi_X(e, s)$$

ricaviamo che la  $\phi_X(a, t)$  definita su un intervallo  $(t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$ , si può estendere all'intervallo  $(t_1 - \epsilon, t_2 + \epsilon)$  ponendo

$$\phi_X(a, t) = \phi_X(a, t')\phi_X(e, t''), \quad \text{se } t' \in (t_1, t_2), \quad |t''| < \epsilon, \quad t = t' + t''. \quad \square$$

DEFINIZIONE VII.1.8. L'applicazione

$$(7.1.2) \quad \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \exp(X) = \phi_X(e, 1) \in \mathbf{G}$$

si dice l'*applicazione esponenziale* di  $\mathbf{G}$ .

Poiché

$$(7.1.3) \quad \exp((t_1 + t_2)X) = \exp(t_1X)\exp(t_2X) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

l'insieme  $\{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}$  è un sottogruppo abeliano di  $\mathbf{G}$ .

DEFINIZIONE VII.1.9.  $\{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}$  si dice *il sottogruppo a un parametro di  $\mathbf{G}$  generato da  $X \in \mathfrak{g}$* .

PROPOSIZIONE VII.1.10. *Il gruppo a un parametro di diffeomorfismi di  $\mathbf{G}$  generato dal campo di vettori invariante a sinistra  $X^* \in \mathfrak{g}$  associato ad  $X \in \mathfrak{g}$  è descritto dalla*

$$(7.1.4) \quad \mathbf{G} \times \mathbb{R} \ni (a, t) \longrightarrow \phi_X(a, t) = a \cdot \exp(tX) \in \mathbf{G}. \quad \square$$

PROPOSIZIONE VII.1.11 (coordinate di prima specie). *L'applicazione esponenziale definisce un diffeomorfismo di un intorno aperto di 0 in  $\mathfrak{g}$  su un intorno aperto di  $e$  in  $\mathbf{G}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, il differenziale in 0 dell'applicazione esponenziale è l'identità e quindi la tesi è conseguenza del teorema dell'applicazione inversa.  $\square$

ESEMPIO VII.1.12. Il gruppo delle matrici reali  $n \times n$  invertibili  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  è un gruppo di Lie, di dimensione  $n^2$ . La sua algebra di Lie  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali  $n \times n$  e l'esponenziale coincide con quello definito per le matrici :

$$(7.1.5) \quad \exp(X) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} X^h.$$



Il suo sottogruppo  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$  delle matrici con determinante 1 è anch'esso un gruppo di Lie. Ha dimensione  $(n^2 - 1)$  e la sua algebra di Lie  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$  è formata dalle matrici reali con traccia nulla.

ESEMPIO VII.1.13. Il gruppo delle matrici complesse  $n \times n$  invertibili  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  è un gruppo di Lie di dimensione  $2n^2$ . La sua algebra di Lie  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  consiste di tutte le matrici complesse  $n \times n$ . L'esponenziale anche in questo caso coincide con l'esponenziale di matrici.

Il suo sottogruppo normale

$$(7.1.6) \quad \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det a = 1\}$$

è un gruppo di Lie di dimensione  $2n^2 - 1$ , con algebra di Lie

$$(7.1.7) \quad \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}.$$

ESEMPIO VII.1.14. Il gruppo ortogonale

$$(7.1.8) \quad \mathbf{O}(n) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t a = a^{-1}\}$$

è un gruppo di Lie compatto di dimensione  $\frac{n(n-1)}{2}$ . La sua algebra di Lie

$$(7.1.9) \quad \mathfrak{o}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid A + {}^t A = 0\}$$

consiste delle matrici reali antisimmetriche.

Il suo sottogruppo normale

$$(7.1.10) \quad \mathbf{SO}(n) = \{a \in \mathbf{O}(n) \mid \det a = 1\}$$

ha indice due in  $\mathbf{O}(n)$  ed  $\mathbf{O}(n)$  ed  $\mathbf{SO}(n)$  hanno la stessa algebra di Lie  $\mathfrak{o}(n)$ .

Se  $n \geq 3$ , il gruppo fondamentale di  $\mathbf{SO}(n)$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ . Il suo rivestimento fondamentale, a due fogli, è un gruppo di Lie compatto, che si indica con  $\mathbf{Spin}(n)$  e si dice *gruppo di spin*.

ESEMPIO VII.1.15. Il *gruppo unitario* è il gruppo

$$(7.1.11) \quad \mathbf{U}(n) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid a^* = a^{-1}\}$$

è un gruppo di Lie compatto di dimensione  $n^2$ , con algebra di Lie

$$(7.1.12) \quad \mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid A + A^* = 0\}.$$

Il *gruppo speciale unitario*

$$(7.1.13) \quad \mathbf{SU}(n) = \{a \in \mathbf{U}(n) \mid \det a = 1\}$$

è un suo sottogruppo di Lie normale, di dimensione  $n^2 - 1$ , con algebra di Lie

$$(7.1.14) \quad \mathfrak{su}(n) = \{A \in \mathfrak{u}(n) \mid \operatorname{tr} A = 0\}.$$

Abbiamo un isomorfismo di gruppi di Lie  $\mathbf{SU}(2) \simeq \mathbf{Spin}(3)$ .

ESEMPIO VII.1.16. Indichiamo con  $J_n$  la matrice  $(2n) \times (2n)$

$$(7.1.15) \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Il gruppo

$$(7.1.16) \quad \mathbf{Sp}(n) = \{a \in \mathbf{U}(2n) \mid a^\dagger J_n a = J_n\}$$

si dice il *gruppo simplettico compatto*, o *simplettico unitario*, o *simplettico ortogonale*. Ha dimensione  $n(2n + 1)$  ed algebra di Lie

$$(7.1.17) \quad \mathfrak{sp}(n) = \{A \in \mathfrak{u}(2n) \mid AJ_n + J_n \bar{A} = 0\}.$$

### VII.1.1. La rappresentazione aggiunta.

PROPOSIZIONE VII.1.17. *Per ogni  $a \in \mathbf{G}$ , il differenziale nell'identità  $\text{Ad}(a)$  dell'automorfismo  $\text{ad}(a)$  di  $\mathbf{G}$  definisce un automorfismo dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Siano  $X \in \mathfrak{g}$  ed  $a \in \mathbf{G}$ . Abbiamo, con le notazioni introdotte in precedenza per i differenziali delle traslazioni a destra ed a sinistra,

$$[\text{ad}_a]_*(X_x^*) = aX^*a^{-1} = axXa^{-1} = axa^{-1}(aXa^{-1}) = [\text{ad}(a)(X)]_{\text{ad}(a)(x)}^*.$$

Questo dimostra che i campi  $X^*$  ed  $(\text{Ad}(a)(X))^*$  sono  $\text{ad}(a)$ -correlati e perciò

$$[(\text{ad}(a))_*X^*, (\text{ad}(a))_*Y^*] = (\text{ad}(a))_*([X^*, Y^*]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Qundi il diffeomorfismo  $\text{ad}(a)$  definisce un automorfismo dell'algebra di Lie  $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$ . La tesi segue perché, per definizione,  $[X^*, Y^*] = [X, Y]^*$ .  $\square$

Indichiamo con  $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$  il gruppo

$$(7.1.18) \quad \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{\lambda \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \mid [\lambda(X), \lambda(Y)] = \lambda([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}\}.$$

degli automorfismi dell'algebra di Lie reale  $\mathfrak{g}$ .

Si verifica immediatamente che

PROPOSIZIONE VII.1.18. *L'applicazione  $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{Ad}(a) \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$  è un omomorfismo di gruppi.*  $\square$

DEFINIZIONE VII.1.19. L'omomorfismo  $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{Ad}(a) \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$  si dice la *rappresentazione aggiunta di  $\mathbf{G}$* .

**VII.1.2. Campi di vettori invarianti a destra.** Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie.

DEFINIZIONE VII.1.20. Un campo di vettori  $X_* \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$  si dice *invariante a destra* se  $dR_a(X_*) = X_*$  per ogni  $a \in \mathbf{G}$ .

Ad ogni elemento  $X$  dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $\mathbf{G}$  associamo l'unico campo di vettori invariante a destra  $X_*$  che assume il valore  $X$  in  $e$ :  $X_{*x} = dR_x(X) = Xx$ . In questo modo abbiamo definito una corrispondenza lineare biunivoca

$$(7.1.19) \quad \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow X_* = \{x \rightarrow dR_x(X)\} \in \mathfrak{R}(\mathbf{G})$$

di  $\mathfrak{g}$  con lo spazio  $\mathfrak{R}(\mathbf{G})$  dei campi di vettori invarianti a destra su  $\mathbf{G}$ . Abbiamo

PROPOSIZIONE VII.1.21.  $\mathfrak{R}(\mathbf{G})$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$  e l'applicazione (7.1.19) è un antiisomorfismo di algebre di Lie.

DIMOSTRAZIONE. Poiché le traslazioni a destra sono diffeomorfismi di  $\mathbf{G}$ , è

$$[R_a(\underline{X}), R_a(\underline{Y})] = R_a([\underline{X}, \underline{Y}]), \quad \text{per ogni } a \in \mathbf{G} \text{ ed } \underline{X}, \underline{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbf{G}).$$

Da questo segue immediatamente che  $\mathfrak{R}(\mathbf{G})$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$ .

L'involuzione  $J : \mathbf{G} \ni x \rightarrow x^{-1} \in \mathbf{G}$  di  $\mathbf{G}$  è un diffeomorfismo che trasforma campi di vettori invarianti a sinistra in campi di vettori invarianti a destra, con  $dJ :$

$\mathfrak{L}(\mathbf{G}) \ni X^* \longrightarrow -X_* \in \mathfrak{R}(\mathbf{G})$ , se  $X^*$  ed  $X_*$  sono i campi di vettori, rispettivamente invariante a sinistra e a destra, associati allo stesso elemento  $X \in \mathfrak{g}$ . In particolare, abbiamo

$$[X_*, Y_*] = -[X, Y]_*, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

□

### VII.2. Alcune osservazioni sull'applicazione esponenziale

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . L'immagine dell'applicazione esponenziale  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{G}$  non è in generale surgettiva sulla sua componente connessa dell'identità  $\mathbf{G}^0$ .

ESEMPIO VII.2.1. *L'immagine di  $\exp : \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$  non è surgettiva sulla sua componente connessa dell'identità  $\mathbf{G}^0 = \{x \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det x > 0\}$ .*

Sia  $x \in \mathbf{G}^0$ . Consideriamo dapprima il caso in cui  $x$  sia diagonalizzabile. A meno di coniugio possiamo supporre che  $x = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  con  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ . Se  $X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$  è

$$(7.2.1) \quad \exp(X) = k_1 X + k_2 I_2, \quad \text{con } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

In particolare, se  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , allora  $k_1 \neq 0$  e la matrice  $X$  è quindi diagonale. Poiché gli autovalori dell'esponenziale di una matrice  $X$  diagonalizzabile sono gli esponenziali degli autovalori di  $X$ , ne segue che  $x \in \exp(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}))$  se e soltanto se  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ . Analogamente, se  $x$  ha un autovalore reale con molteplicità algebrica due e molteplicità geometrica uno, possiamo supporre a meno di coniugio che  $x$  abbia la forma

$$x = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Allora per la (7.2.1) anche  $X$  deve essere una matrice triangolare superiore e quindi  $x$  appartiene all'immagine dell'esponenziale se e soltanto se  $\lambda > 0$ .

Resta da considerare il caso in cui  $x$  abbia due autovalori complessi coniugati  $\lambda, \bar{\lambda}$ , oppure sia diagonalizzabile con un autovalore  $\lambda$  reale e negativo con molteplicità due. Se scriviamo  $\lambda = \rho e^{i\theta}$ , con  $\rho > 0$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , allora la  $x$  è coniugata ad una matrice della forma

$$x = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} = \exp \left[ \log \rho \begin{pmatrix} & -\theta \\ \theta & \end{pmatrix} \right].$$

In conclusione:  $\exp(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}))$  è l'insieme delle matrici reali  $2 \times 2$  con determinante positivo che non hanno un autovalore reale negativo con molteplicità geometrica uno.

Questo esempio mostra che, in generale, l'immagine dell'applicazione esponenziale può non essere né aperta né chiusa.

Ci sono due classi importanti di gruppi di Lie per cui l'esponenziale è surgettivo. Abbiamo:

TEOREMA VII.2.2. *Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo di Lie connesso e compatto, con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , allora  $\exp(\mathfrak{g}) = \mathbf{G}$ .*

DEFINIZIONE VII.2.3. Chiamiamo *unipotente* un sottogruppo di Lie  $\mathbf{G}$  del gruppo lineare  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  i cui elementi siano tutti unipotenti. Gli elementi  $x$  di  $\mathbf{G}$  hanno cioè tutti polinomio caratteristico  $(\lambda - 1)^n$ .

TEOREMA VII.2.4. Se  $\mathbf{G}$  è unipotente, allora  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{G}$  è un diffeomorfismo.

OSSERVAZIONE VII.2.5. I gruppi unipotenti sono particolari gruppi *nilpotenti*. Ricordiamo che un gruppo  $\mathbf{G}$  si dice nilpotente se, per ogni  $a \in \mathbf{G}$  l'applicazione di commutazione  $c_a : \mathbf{G} \ni x \rightarrow [a, x] = axa^{-1}x^{-1}$  ha un'iterata banale. Se esiste cioè un intero  $k$  tale che  $c_a^k(x) = e$  per ogni  $a, x \in \mathbf{G}$ . Si verifica che questa condizione equivale al fatto che  $\mathbf{G}$  ammetta una serie di composizione

$$1 = \mathbf{G}_0 < \mathbf{G}_1 < \cdots < \mathbf{G}_n = \mathbf{G}, \quad \text{con} \quad [\mathbf{G}, \mathbf{G}_k] \subset \mathbf{G}_{k-1}, \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

### VII.3. Sottogruppi di Lie

DEFINIZIONE VII.3.1. Un sottogruppo  $\mathbf{H}$  di  $\mathbf{G}$  è un suo *sottogruppo di Lie* se è anche una sottovarietà differenziabile di  $\mathbf{G}$ , e con tale struttura differenziabile è un gruppo di Lie.

L'algebra di Lie  $\mathfrak{h}$  di un sottogruppo di Lie  $\mathbf{H}$  di  $\mathbf{G}$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}$ . Infatti i campi di vettori invarianti a sinistra su  $\mathbf{H}$  sono restrizioni ad  $\mathbf{H}$  di campi di vettori invarianti a sinistra di  $\mathbf{G}$ .

Viceversa, per ogni sottoalgebra di Lie  $\mathfrak{h}$  di  $\mathbf{G}$  il sottogruppo  $\mathbf{H}$  di  $\mathbf{G}$  generato da  $\exp(\mathfrak{h})$  è un sottogruppo di Lie connesso di  $\mathbf{G}$ . Questo è conseguenza del fatto che i campi di vettori invarianti a sinistra corrispondenti agli elementi di  $\mathfrak{h}$  generano una distribuzione vettoriale di rango costante formalmente (e quindi totalmente) integrabile in  $\mathbf{G}$ .

Ogni omomorfismo differenziabile  $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$  di gruppi di Lie determina un omomorfismo  $d\phi(e) : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  delle loro algebre di Lie. Il viceversa non è sempre vero; lo è quando  $\mathbf{G}_1$  è semplicemente connesso.

In particolare, la  $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{ad}(a) \in \text{Aut}(\mathbf{G})$  definisce un'applicazione  $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{Ad}(a) \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ , che si dice la *rappresentazione lineare aggiunta* di  $\mathbf{G}$ .

Vale il

TEOREMA VII.3.2. Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie, con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ .

(1) Se  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo di Lie di  $\mathbf{G}$ , la sua algebra di Lie è

$$(7.3.1) \quad \mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp(tX) \in \mathbf{H}, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

(2) Ogni sottogruppo chiuso  $\mathbf{H}$  di  $\mathbf{G}$  è un suo sottogruppo di Lie.

ESEMPPIO VII.3.3 (Gruppi lineari). Un *gruppo lineare* è un sottogruppo chiuso di un gruppo  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ .

Per il *teorema di Ado*<sup>2</sup>, ogni algebra di Lie su un campo  $\mathbb{k}$  è isomorfa ad una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ .

<sup>2</sup>Matrix representations of Lie algebras, Usp. Mat. Nauk 2 (1947), pp. 159-173.

Per un teorema di Djokovic<sup>3</sup>, ogni algebra di Lie reale è l'algebra di Lie di un gruppo lineare.

Tutti i gruppi di Lie compatti sono isomorfi a gruppi lineari.

Si può definire sul rivestimento universale  $\widetilde{\mathbf{G}}$  di un gruppo di Lie connesso una struttura di gruppo di Lie per cui la proiezione canonica  $\widetilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$  sia un omomorfismo di gruppi di Lie.

I rivestimenti universali  $\widetilde{\mathbf{SL}}(n, \mathbb{R})$  dei gruppi di Lie  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$  sono gruppi di Lie che non sono isomorfi a gruppi lineari.

#### VII.4. La forma di Maurer-Cartan

**VII.4.1. Forme differenziali a valori vettoriali.** Siano  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione finita ed  $M$  una varietà differenziabile. Indichiamo con  $\mathcal{Q}^h(M, V)$  lo spazio delle forme differenziali alternate di grado  $h$  a valori in  $V$ . Esse sono le applicazioni  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineari alternate :

$$\alpha: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{h \text{ volte}} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, V).$$

Ad esse si estende in modo naturale la definizione del differenziale. Naturalmente, se  $V$  non ha una struttura di algebra reale, non ha senso considerare il prodotto esterno di due forme a valori in  $V$ . Nel caso in cui  $V$  sia un'algebra, possiamo estendere la definizione del prodotto esterno in modo che, sulle forme di grado zero, coincida puntualmente con il prodotto definito in  $V$ . In particolare, nel caso delle algebre di Lie, possiamo dare la seguente definizione.

**DEFINIZIONE VII.4.1.** Se  $V = \mathfrak{a}$  è un'algebra di Lie reale, il *prodotto esterno* di due forme differenziali  $\alpha \in \mathcal{Q}^p(M, \mathfrak{a})$ ,  $\beta \in \mathcal{Q}^q(M, \mathfrak{a})$ , è la forma  $[\alpha \wedge \beta] \in \mathcal{Q}^{p+q}(M, \mathfrak{a})$  definita da:

$$[\alpha \wedge \beta](X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q} \\ 1 \leq \sigma_1 < \cdots < \sigma_p \leq p+q \\ 1 \leq \sigma_{p+1} < \cdots < \sigma_{p+q} \leq p+q}} \varepsilon(\sigma) [\alpha(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_p}), \beta(X_{\sigma_{p+1}}, \dots, X_{\sigma_{p+q}})].$$

Il prodotto si estende poi per bilinearità a tutto  $\mathcal{Q}^*(M, \mathfrak{a})$ .

In particolare, se  $\alpha$  e  $\beta$  sono 1-forme a valori in  $\mathfrak{a}$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} [\alpha \wedge \beta](X, Y) &= [\alpha(X), \beta(Y)] - [\alpha(Y), \beta(X)], \\ [\alpha \wedge \alpha](X, Y) &= 2[\alpha(X), \alpha(Y)], \end{aligned} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

**VII.4.2. Forme differenziali invarianti.** Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ .

**DEFINIZIONE VII.4.2.** Una forma differenziale  $\omega \in \mathcal{Q}^*(\mathbf{G})$  si dice *invariante a sinistra* se  $L_a^* \omega = \omega$  per ogni  $a \in \mathbf{G}$ .

<sup>3</sup>A closure theorem for analytic subgroups of a real Lie group, Can.Math. Bull. **19** (1976), pp. 435-439.

Per una forma  $\omega \in \Omega^1(\mathbf{G})$  di grado uno essere invariante a sinistra è equivalente al fatto che, per ogni campo di vettori  $X \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$  invariante a sinistra su  $\mathbf{G}$ , la funzione  $\omega(X)$  sia costante. Analogamente, una forma omogenea  $\alpha \in \Omega^q(\mathbf{G})$  è invariante a sinistra se, e soltanto se, per ogni scelta di  $X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$ , la funzione  $\alpha(X_1, \dots, X_q)$  è costante.

### VII.4.3. La forma di Maurer-Cartan.

TEOREMA VII.4.3. Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . L'applicazione

$$(7.4.1) \quad \mathbf{G} \times \mathfrak{g} \ni (a, X) \longrightarrow aX \in T\mathbf{G}$$

è un diffeomorfismo. In particolare, i gruppi di Lie sono varietà differenziabili parallelizzabili ed  $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$  è il  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{G})$ -modulo generato da  $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$ .

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione inversa della (7.4.1) è la

$$T\mathbf{G} \ni v \rightarrow (\pi(v), \pi(v)^{-1} \cdot v) \in \mathbf{G} \times \mathfrak{g},$$

ove  $\pi : T\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  è la proiezione canonica del fibrato tangente sulla base.  $\square$

PROPOSIZIONE VII.4.4. L'applicazione

$$(7.4.2) \quad \omega_{\mathbf{G}} : T\mathbf{G} \ni v \longrightarrow \pi(v)^{-1} \cdot v \in \mathfrak{g}$$

è una forma differenziale invariante a sinistra a valori in  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

Essa è caratterizzata dall'equazione

$$(7.4.3) \quad \omega_{\mathbf{G}}(X_a^*) = X, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall a \in \mathbf{G}.$$

DEFINIZIONE VII.4.5. La  $\omega_{\mathbf{G}}$  si dice la *forma di Maurer<sup>4</sup>-Cartan* del gruppo  $\mathbf{G}$ .

PROPOSIZIONE VII.4.6. La forma di Maurer-Cartan  $\omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^1(\mathbf{G}, \mathfrak{g})$  di Lie  $\mathbf{G}$  è invariante a sinistra e soddisfa l'**equazione di Maurer-Cartan**

$$(7.4.4) \quad d\omega_{\mathbf{G}} + \frac{1}{2} [\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}] = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Allora :

$$\begin{aligned} d\omega_{\mathbf{G}}(X^*, Y^*) &= X^* \omega_{\mathbf{G}}(Y^*) - Y^* \omega_{\mathbf{G}}(X^*) - \omega_{\mathbf{G}}([X^*, Y^*]) \\ &= -[\omega_{\mathbf{G}}(X^*), \omega_{\mathbf{G}}(Y^*)] = -\frac{1}{2} [\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}](X^*, Y^*). \end{aligned}$$

Poiché  $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$  genera  $\mathfrak{X}(M)$  come  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{G})$ -modulo, otteniamo la tesi.  $\square$

LEMMA VII.4.7. (1) La forma di Maurer-Cartan  $\omega_{\mathbf{G}}$  di  $\mathbf{G}$  soddisfa:

$$(7.4.5) \quad R_a^* \omega_{\mathbf{G}} = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega_{\mathbf{G}}.$$

(2) Ogni forma differenziale  $\eta \in \Omega^1(\mathbf{G}, V)$ , invariante a sinistra su  $\mathbf{G}$  è della forma  $\eta = T \circ \omega_{\mathbf{G}}$ , per un'applicazione lineare  $T : \mathfrak{g} \rightarrow V$ .

<sup>4</sup>Ludwig Maurer (1859-1927) matematico tedesco, professore all'Università di Tübingen, ha contribuito allo studio dei gruppi di matrici.

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché le traslazioni a destra e a sinistra commutano, il traslato a destra di un campo di vettori invariante a sinistra è ancora invariante a sinistra. Quindi, se  $X \in \mathfrak{g}$  ed  $a \in \mathbf{G}$ , il campo  $R_{a*}X^*$  è ancora invariante a sinistra. Esso è il campo  $Y^*$  corrispondente ad  $L_{a^{-1}*}R_{a*}X^* = \text{ad}(a^{-1})_*(X^*) = [\text{Ad}(a^{-1})(X)]^* = \text{Ad}(a^{-1})(\omega_{\mathbf{G}}(X^*))$ . Questo dimostra la (7.4.5).

Se  $\eta \in \Omega^1(\mathbf{G}, V)$  è invariante a sinistra, abbiamo  $\eta = T \circ \omega_{\mathbf{G}}$  con

$$T = \eta(e) : \mathfrak{g} = T_e\mathbf{G} \rightarrow V. \quad \square$$

**ESEMPIO VII.4.8.** Consideriamo  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  come un aperto dello spazio Euclideo  $\mathbb{R}^{n \times n}$  delle matrici reali  $n \times n$ , che possiamo ancora identificare con la sua algebra di Lie  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ . Utilizzando la (7.4.1), rappresentiamo il suo spazio tangente  $T\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  come il prodotto cartesiano  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ . In particolare,  $\mathfrak{X}(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}))$  si identifica allo spazio  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}))$ . Poiché la traslazione a sinistra  $R_a$  è la restrizione a  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  della moltiplicazione a sinistra per la matrice  $a$ , che è un'applicazione lineare, il suo differenziale coincide in ogni punto con la moltiplicazione a sinistra per  $a$ . In particolare, i campi di vettori invarianti a sinistra corrispondono alle applicazioni

$$\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \ni x \longrightarrow xA \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$$

al variare di  $A$  in  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ . In questo sistema di coordinate, la forma di Maurer-Cartan di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  è la

$$\omega_{\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})} = x^{-1}dx.$$

In modo analogo, i campi di vettori invarianti a destra su  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  si scrivono nella forma

$$\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \ni x \longrightarrow Ax \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$$

al variare di  $A$  in  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ .

La forma che associa ad ogni vettore  $v$  tangente in  $x$  il valore  $A$  in  $e$  del campo di vettori invariante a destra  $*A$  con  $*A_x = v$  è dato da

$$dx \circ x^{-1} = \text{ad}(x) \circ \omega_{\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})}.$$

La discussione nell'Esempio VII.4.8 giustifica la

**NOTAZIONE VII.4.9.** Se  $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{G})$  è un arco differenziabile nel gruppo di Lie  $\mathbf{G}$ , poniamo

$$\alpha^{-1}(t)\dot{\alpha}(t) = \omega_{\mathbf{G}}(\dot{\alpha}(t)), \quad \dot{\alpha}(t)\alpha^{-1}(t) = \text{ad}(\alpha(t))\omega_{\mathbf{G}}(\dot{\alpha}(t)).$$

Concludiamo questo paragrafo con una costruzione che generalizza l'esponenziale.

**PROPOSIZIONE VII.4.10.** Siano  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie, con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ .

Sia  $I$  un connesso di  $\mathbb{R}$ ,  $t_0 \in I$ ,  $x_0 \in \mathbf{G}$  ed  $X \in \mathcal{C}^k(I, \mathfrak{g})$ , con  $k \geq 0$ . Allora sono univocamente determinati  $a, b \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbf{G})$  tali che

$$(7.4.6) \quad \begin{cases} a(t_0) = x_0, \\ a^{-1}(t)\dot{a}(t) = X(t) \quad \forall t \in I, \end{cases}$$

$$(7.4.7) \quad \begin{cases} b(t_0) = x_0, \\ \dot{b}(t)b^{-1}(t) = X(t) \quad \forall t \in I. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. la soluzione delle (7.4.6), (7.4.7) sono rispettivamente

$$\alpha(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t X(\tau)d\tau\right)x_0 \quad \text{e} \quad \beta(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t X(\tau)d\tau\right).$$

□

### VII.5. Applicazioni a valori in un gruppo di Lie

Siano  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie, con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , ed  $M$  una varietà differenziabile di classe  $\mathcal{C}^\infty$ , di dimensione  $m$ .

DEFINIZIONE VII.5.1. La *derivata di Darboux* di  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$  è il pullback  $\omega_f = f^*\omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$  della forma di Maurer-Cartan di  $\mathbf{G}$ .

La  $f$  si dice un *integrale*, o una *primitiva* di  $\omega_f$ , o *mappa dei periodi* associata ad  $\omega_f$ .

PROPOSIZIONE VII.5.2. Se  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$  ed  $\omega_{f_1} = \omega_{f_2}$ , allora esiste un elemento  $a \in \mathbf{G}$  tale che  $f_1(p) = af_2(p)$  per ogni  $p \in M$ .

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'applicazione  $\phi : M \ni p \rightarrow f_1(p)[f_2(p)]^{-1} \in \mathbf{G}$ . Poiché  $\phi f_2 = f_1$ , abbiamo

$$d\phi = (df_1)[f_2]^{-1} - \phi(df_2)[f_2]^{-1} = (df_1)[f_2]^{-1} - f_1[f_2]^{-1}(df_2)[f_2]^{-1}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \omega_\phi &= \phi^{-1}d\phi = f_2[f_1]^{-1}((df_1)[f_2]^{-1} - f_1[f_2]^{-1}(df_2)[f_2]^{-1}) \\ &= f_2([f_1]^{-1}df_1 - [f_2]^{-1}df_2)[f_2]^{-1} = \text{ad}(f_2)(\omega_{f_1} - \omega_{f_2}) = 0. \end{aligned}$$

Questa relazione implica che  $d\phi = 0$ , e quindi  $f_1[f_2]^{-1} = \text{costante} = a \in \mathbf{G}$ . □

La derivata di Darboux  $\omega = \omega_f$  di una  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$  soddisfa l'equazione di struttura

$$(7.5.1) \quad d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] = 0.$$

Viceversa, abbiamo

TEOREMA VII.5.3. Supponiamo che  $M$  sia connessa e semplicemente connessa. Fissiamo un punto  $p_0 \in M$  ed un elemento  $a_0$  di  $\mathbf{G}$ . Se  $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$  soddisfa (7.5.1), allora esiste una ed una sola  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$  tale che

$$(7.5.2) \quad \omega_f = \omega \quad \text{ed} \quad f(p_0) = a_0.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la varietà prodotto  $M \times \mathbf{G}$ . Siano  $\pi_M : M \times \mathbf{G} \rightarrow M$   $\pi_{\mathbf{G}} : M \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  le proiezioni sui singoli fattori. Consideriamo su  $M \times \mathbf{G}$  la forma  $\alpha = \pi_M^*\omega - \pi_{\mathbf{G}}^*\omega_{\mathbf{G}}$ . Dico che  $\ker \alpha$  è una distribuzione di rango  $m$  totalmente integrabile. Infatti, se  $p \in M$  ed  $x \in \mathbf{G}$ , l'applicazione che fa corrispondere a  $v \in T_pM$  il vettore  $(v, L_{x*}\omega(v)) \in T_{(p,x)}(M \times \mathbf{G}) = T_pM \oplus T_x\mathbf{G}$  è un'applicazione



lineare e bigettiva da  $T_p M$  a  $\ker \alpha_{(p,x)}$ . Se poi  $X, Y$  sono campi di vettori su  $M \times \mathbf{G}$  con coefficienti in  $\ker \alpha$ , allora

$$\begin{aligned} \alpha([X, Y]) &= -d\alpha(X, Y) = -d(\pi_M^* \omega - \pi_{\mathbf{G}}^* \omega_{\mathbf{G}})(X, Y) = \pi_{\mathbf{G}}^*(d\omega_{\mathbf{G}}) - \pi_M^*(d\omega)(X, Y) \\ &= [\omega_{\mathbf{G}}(d\pi_{\mathbf{G}}(X)), \omega_{\mathbf{G}}(d\pi_{\mathbf{G}}(Y))] - [\omega(d\pi_M(X)), \omega(d\pi_M(Y))] = 0 \end{aligned}$$

perché  $\omega_{\mathbf{G}}(d\pi_{\mathbf{G}}(X)) = \omega(d\pi_M(X))$  ed  $\omega_{\mathbf{G}}(d\pi_{\mathbf{G}}(Y)) = \omega(d\pi_M(Y))$ , in quanto  $X$  ed  $Y$  hanno valori in  $\ker \alpha$ .

Per il teorema di Frobenius vi è una ed una sola varietà integrale  $N$  di  $\ker \alpha$  che passa per il punto  $(p_0, a_0)$ . La restrizione ad  $N$  della  $\pi_M$  è un diffeomorfismo locale. Esso è surgettivo per la Proposizione VII.4.10: infatti essa ci dice ogni cammino in  $M$ , di punto iniziale  $p_0$ , si rialza ad un cammino in  $N$  di punto iniziale  $(p_0, a_0)$ . Poiché abbiamo supposto che  $M$  fosse connessa, la  $N \ni (p, x) \rightarrow p \in M$  è surgettiva e quindi un rivestimento. Se  $M$  è anche semplicemente connessa, il rivestimento è ad un solo foglio e quindi il grafico di un'applicazione  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$ . Per costruzione abbiamo allora  $\omega_f = \omega$ .  $\square$

## VII.6. Omomorfismi di gruppi ed algebre di Lie

Siano  $\mathfrak{g}_1$  e  $\mathfrak{g}_2$  due algebre di Lie sullo stesso campo  $\mathbb{k}$ .

DEFINIZIONE VII.6.1. Un omomorfismo  $\Phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  è un'applicazione  $\mathbb{k}$ -lineare tale che

$$\Phi([X_1, X_2]) = [\Phi(X_1), \Phi(X_2)], \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1.$$

Siano  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$  due gruppi di Lie, con algebre di Lie  $\mathfrak{g}_1$  e  $\mathfrak{g}_2$ , rispettivamente.

DEFINIZIONE VII.6.2. Un omomorfismo di gruppi di Lie  $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$  è un'applicazione differenziabile di classe  $\mathcal{C}^\omega$  tale che

$$\phi(x_1^{-1}x_2) = [\phi(x_1)]^{-1}\phi(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}_1.$$

PROPOSIZIONE VII.6.3. (1) Se  $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$  è un omomorfismo di gruppi di Lie, allora  $\Phi = d\phi(e_{\mathbf{G}_1}) : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  è un omomorfismo di algebre di Lie reali.

(2) Se  $\mathbf{G}_1$  è connesso, due omomorfismi di gruppi di Lie  $\phi_1, \phi_2 : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$  con  $d\phi_1(e_{\mathbf{G}_1}) = d\phi_2(e_{\mathbf{G}_1})$  sono uguali.

(3) Se  $\mathbf{G}_1$  è connesso e semplicemente connesso, ad ogni omomorfismo di algebre di Lie  $\Phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  corrisponde uno ed un solo omomorfismo di gruppi di Lie  $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$  con  $d\phi(e_{\mathbf{G}_1}) = \Phi$ .

DIMOSTRAZIONE. (1). Per ogni  $X \in \mathfrak{g}_1$ , i campi di vettori invarianti a sinistra  $X^*$  su  $\mathbf{G}_1$  e  $[\Phi(X)]^*$  su  $\mathbf{G}_2$  sono  $\phi$ -correlati. Da questo segue che

$$[[\Phi(X_1)]^*, [\Phi(X_2)]^*] = [\Phi([X_1, X_2])]^*, \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1,$$

perché  $[[\Phi(X_1)]^*, [\Phi(X_2)]^*]$  e  $[\Phi([X_1, X_2])]^*$  sono  $\phi$ -correlati ad  $[X_1^*, X_2^*]$  ed  $[X_1, X_2]^*$ , rispettivamente. Ne segue che  $\Phi$  è un omomorfismo di algebre di Lie.

(2). Per (1) è  $\phi_1(\exp(X)) = \exp(\Phi(X)) = \phi_2(X)$  per ogni  $X \in \mathfrak{g}_1$ . In particolare,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  coincidono su un intorno aperto di  $e_{\mathbf{G}_1}$  in  $\mathbf{G}_1$ . Quindi  $\{x \in \mathbf{G}_1 \mid$

$\phi_1(x) = \phi_2(x)$  è un sottogruppo di  $\mathbf{G}_1$  che contiene un intorno aperto di  $e_{\mathbf{G}_1}$  e quindi coincide con  $\mathbf{G}_1$ , perché avevamo supposto che  $\mathbf{G}_1$  fosse connesso.

(3). Consideriamo il gruppo di Lie prodotto diretto  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$ , con algebra di Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ . Il sottospazio  $\mathfrak{h} = \{(X, \Phi(X)) \mid X \in \mathfrak{g}_1\}$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}$  e quindi genera un sottogruppo di Lie analitico  $\mathbf{H}$  di  $\mathbf{G}$ . La restrizione ad  $\mathbf{H}$  della proiezione canonica  $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}_1$  è un omomorfismo di gruppi di Lie il cui nucleo ha algebra di Lie  $\{0\}$ . È quindi un rivestimento, e perciò un diffeomorfismo, in quanto avevamo supposto che  $\mathbf{G}_1$  fosse semplicemente connesso.  $\square$

### VII.7. Rappresentazioni lineari

Siano  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie, e  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{k}$ , con  $\mathbb{k}$  uguale ad  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

DEFINIZIONE VII.7.1. Una *rappresentazione lineare* di  $\mathbf{G}$  è un omomorfismo di gruppi di Lie  $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V)$ .

Una rappresentazione lineare  $(\rho, V)$  è quindi un'applicazione  $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V))$  tale che

$$\rho(x_1^{-1}x_2) = [\rho(x_1)]^{-1} \circ \rho(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}.$$

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  e  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{k}$ .

DEFINIZIONE VII.7.2. Una *rappresentazione lineare* di  $\mathfrak{g}$  su  $V$  è un omomorfismo di algebre di Lie  $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ .

Ciò significa che  $\rho_*$  è  $\mathbb{k}$ -lineare e che

$$\rho_*([X, Y]) = [\rho_*(X), \rho_*(Y)] = \rho_*(X) \circ \rho_*(Y) - \rho_*(Y) \circ \rho_*(X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Dalla Proposizione VII.6.3 abbiamo:

PROPOSIZIONE VII.7.3. Se  $(\rho, V)$  è una rappresentazione lineare di dimensione finita di  $\mathbf{G}$ , allora  $\rho_* = d\rho(e_{\mathbf{G}}) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  è una rappresentazione lineare di  $\mathfrak{g}$ .

### VII.8. Spazi omogenei

Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo ed  $\mathbf{H}$  un suo sottogruppo, indichiamo con  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  l'insieme delle sue classi laterali sinistre, definito dalla relazione d'equivalenza

$$a \sim b \iff a\mathbf{H} = b\mathbf{H} \iff a^{-1}b \in \mathbf{H}.$$

Il gruppo  $\mathbf{G}$  agisce su  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  mediante le *traslazioni a sinistra*

$$\ell_a : \mathbf{G}/\mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}, \quad \text{con} \quad \ell_a(\pi(b)) = \pi(ab), \quad \forall a, b \in \mathbf{G}.$$

Il nucleo d'infedeltà dell'azione di  $\mathbf{G}$  su  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  è il più grande sottogruppo normale di  $\mathbf{G}$  contenuto in  $\mathbf{H}$ , cioè  $\mathbf{N} = \bigcap_{a \in \mathbf{G}} a\mathbf{H}a^{-1}$ . L'azione è quindi fedele se  $\mathbf{H}$  non contiene sottogruppi normali di  $\mathbf{G}$  diversi da  $\{e\}$ . Osserviamo che il gruppo quoziente  $\mathbf{G}/\mathbf{N}$  agisce in modo fedele su  $\mathbf{G}/\mathbf{H} \simeq (\mathbf{G}/\mathbf{N})/(\mathbf{H}/\mathbf{N})$ .

Supponiamo che  $\mathbf{G}$  sia un gruppo topologico e consideriamo su  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  la topologia quoziente. Le traslazioni a sinistra definiscono allora omeomorfismi di  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  in sé.

**PROPOSIZIONE VII.8.1.** *Sia  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo di un gruppo topologico  $\mathbf{G}$ . La proiezione nel quoziente  $\pi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}$  è un'applicazione aperta.*

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti, se  $U$  è un aperto di  $\mathbf{G}$ , allora

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in U} g\mathbf{H} = \bigcup_{h \in \mathbf{H}} Uh$$

è aperto perché unione di aperti.  $\square$

**TEOREMA VII.8.2.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico ed  $\mathbf{H}$  un suo sottogruppo. Il quoziente  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  è uno spazio regolare se, e soltanto se,  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{G}$ .*

*In particolare,  $\mathbf{G}$  è uno spazio regolare se e soltanto se è uno spazio<sup>5</sup>  $T_1$  e ciò equivale al fatto che  $\{e\}$  sia un chiuso di  $\mathbf{G}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico  $\mathbf{G}$ , allora tutte le sue classi laterali sinistre sono chiusi di  $\mathbf{G}$  e quindi  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  è uno spazio topologico  $T_1$ . Viceversa, se  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  è  $T_1$ , allora  $\mathbf{H} = \pi^{-1}(\pi(e))$  è chiuso.

Supponiamo dunque che  $\mathbf{H}$  sia chiuso. Siano  $F$  un chiuso di  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  ed  $x_0$  un elemento di  $\mathbf{G}$  con  $\pi(x_0) \notin F$ . Poiché  $\mathbf{G}$  è un gruppo topologico, l'applicazione

$$\lambda : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (x, y) \longrightarrow x^{-1}y \in \mathbf{G}$$

è continua. Il chiuso  $\pi^{-1}(F)$  di  $\mathbf{G}$  non contiene  $x_0 = \lambda(e, x_0)$ . Possiamo perciò trovare intorno aperti  $U_e$  di  $e$  ed  $U_0$  di  $x_0$  in  $\mathbf{G}$  tali che

$$x_1^{-1}x_2 \notin \pi^{-1}(F) \quad \text{per ogni} \quad x_1 \in U_e, x_2 \in U_0.$$

Consideriamo gli insiemi:

$$\tilde{U}_0 = \pi^{-1}(\pi(U_0)) = \bigcup_{x \in \mathbf{H}} U_0x, \quad \text{e} \quad \tilde{V} = \bigcup_{\pi(x) \in F} U_e x = \bigcup_{x \in U_e} \pi^{-1}(xF).$$

Sia  $\tilde{U}$  che  $\tilde{V}$  sono aperti saturi. Il primo è un intorno di  $x_0$ , il secondo di  $\pi^{-1}(F)$ .

Dimostriamo che  $\tilde{U}_0 \cap \tilde{V} = \emptyset$ . Se così non fosse, potremmo trovare  $x_1 \in U_0$ ,  $x_2 \in \mathbf{H}$ ,  $x_3 \in U_e$ ,  $x_4 \in \pi^{-1}(F)$  tali che  $x_1x_2 = x_3x_4$ . Da questa relazione troviamo  $x_3^{-1}x_1 = x_4x_2^{-1} \in \pi^{-1}(F)$ , che contraddice la scelta di  $U_e$  ed  $U_0$ .

Ciò dimostra che  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  soddisfa l'assioma  $T_3$  e quindi è regolare.  $\square$

Consideriamo ora la situazione in cui  $\mathbf{G}$  sia un gruppo di Lie.

**TEOREMA VII.8.3.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie ed  $\mathbf{H}$  un suo sottogruppo chiuso. Vi è allora sul quoziente  $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$  un'unica struttura di varietà differenziabile per cui  $\xi = (\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M)$ , ove  $\pi$  è la proiezione sul quoziente, sia un fibrato differenziabile localmente banale, con fibra tipica  $\mathbf{H}$ . Inoltre,  $\mathbf{G}$  opera su  $M$  mediante diffeomorfismi.*

<sup>5</sup>Uno spazio topologico  $X$  soddisfa l'assioma di separazione  $T_1$  se tutti i suoi sottoinsiemi finiti sono chiusi; soddisfa l'assioma di separazione  $T_3$  se dati un punto  $a$  di  $X$  ed un chiuso  $A$  di  $X$  che non contenga  $a$ , esistono aperti disgiunti  $U$  e  $V$  con  $a \in U$  ed  $A \subset V$ ; è regolare se soddisfa entrambi gli assiomi  $T_1$  e  $T_3$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per il Teorema VII.8.2,  $M$  è uno spazio di Hausdorff e la proiezione  $\pi : \mathbf{G} \rightarrow M$  aperta.

Per il Teorema VII.3.2,  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo di Lie di  $\mathbf{G}$ . Siano  $\mathfrak{g}$  l'algebra di Lie di  $\mathbf{G}$  ed  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  quella di  $\mathbf{H}$ .

Scegliamo un complemento lineare  $\mathfrak{m}$  di  $\mathfrak{h}$  in  $\mathfrak{g}$ , di modo che

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}.$$

L'applicazione

$$f : \mathfrak{m} \times \mathbf{H} \ni (X, x) \longrightarrow \exp(X) \cdot x \in \mathbf{G}$$

è differenziabile di classe  $\mathcal{C}^\omega$ . Lo spazio tangente di  $\mathfrak{m} \times \mathbf{H}$  in  $(0, e_{\mathbf{H}})$  è  $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$  e  $df(0, e_{\mathbf{H}})$  è l'identità su  $\mathfrak{g}$ .

Per il teorema delle funzioni implicite esistono allora intorno aperti  $N'_0$  di 0 in  $\mathfrak{m}$ ,  $V'$  di  $e_{\mathbf{H}}$  in  $\mathbf{H}$ , ed  $U'$  di  $e_{\mathbf{G}}$  in  $\mathbf{G}$  tali che la restrizione di  $f$  ad  $N'_0 \times V'$  sia un diffeomorfismo su un intorno aperto  $U'$  di  $e_{\mathbf{G}}$  in  $\mathbf{G}$ .

Poiché  $\mathbf{H}$  è chiuso, possiamo scegliere gli intorni  $U', V', N'_0$  sufficientemente piccoli in modo che risulti

$$V' = U' \cap \mathbf{H}, \quad \exp(N'_0) \cap \mathbf{H} = f(N'_0 \times \{e_{\mathbf{H}}\}) \cap \mathbf{H} = \{e_{\mathbf{G}}\}.$$

A questo punto scegliamo intorni  $N_0 \subset N'_0$  di 0 in  $\mathfrak{m}$  e  $V \subset V'$  di  $e$  in  $\mathbf{H}$  in modo che, con  $U = f(N_0 \times V)$ , sia  $U^2 \cup U^{-2} \subset U'$  e sia  $W = \pi(U) \subset M$ .

Dico che allora

$$f_0 : N_0 \times \mathbf{H} \ni (X, x) \longrightarrow f(X, x) = \exp(X)x \in \pi^{-1}(W) \quad \text{è un diffeomorfismo.}$$

Infatti, poiché le traslazioni a destra mediante elementi di  $\mathbf{H}$  sono diffeomorfismi, e la  $f_0$  commuta con le traslazioni a destra mediante elementi di  $\mathbf{H}$ , essendo per costruzione un diffeomorfismo locale su  $N_0 \times V$ , lo è anche in tutti i punti di  $N_0 \times \mathbf{H}$ .

Basta quindi verificare che sia bigettiva. Poiché  $\pi^{-1}(W) = \bigcup_{x \in \mathbf{H}} Ux$ , la  $f$  è senz'altro surgettiva. Mostriamo che è anche iniettiva. Siano  $X_1, X_2 \in N_0$  ed  $x_1, x_2 \in \mathbf{H}$  tali che  $\exp(X_1)x_1 = \exp(X_2)x_2$ . Abbiamo allora  $\exp(-X_2)\exp(X_1) = x_1x_2^{-1}$ . Poiché abbiamo supposto che  $U^2 \cup U^{-2} \subset U'$ , abbiamo  $x_2x_1^{-1} = \exp(-X_2)\exp(X_1) \in U' \cap \mathbf{H} = V'$ , perché  $\exp(X_1), \exp(X_2) \in U$  ed  $x_1x_2^{-1} \in \mathbf{H}$ . Quindi  $\exp(X_1) = \exp(X_2)(x_2x_1^{-1})$  con  $X_1, X_2 \in N_0$ ,  $x_2x_1^{-1} \in V'$ . Poiché  $f : N'_0 \times V' \rightarrow U'$  è un diffeomorfismo, ricaviamo che  $X_1 = X_2$  ed  $x_2x_1^{-1} = e_{\mathbf{H}}$ , cioè  $x_1 = x_2$ .

Per ogni  $a \in \mathbf{G}$  l'applicazione

$$\gamma_a : N_0 \ni X \longrightarrow \pi(a \exp(X)) \in a(W) = W_a$$

è un omeomorfismo di  $N_0$  su un aperto  $W_a$  di  $M$ . Le  $\zeta_a = \gamma_a^{-1}$  sono le carte locali di un atlante di classe  $\mathcal{C}^\omega$  su  $M$ . Infatti

$$\begin{aligned} \zeta_a \circ \zeta_b^{-1}(X) &= \zeta_a \circ \gamma_b(X) = \text{pr}_{\mathfrak{m}} \circ f_0^{-1}(a^{-1}b \exp(X)), \\ \forall X \in \zeta_a(W_a \cap W_b) &= \{X \mid a^{-1}b \exp(X) \in U\}. \end{aligned}$$

Osserviamo infine che le

$$W_a \times \mathbf{H} \ni (p, y) \rightarrow a \exp(\zeta_a(p))y \in \pi^{-1}(W_a), \quad a \in \mathbf{G},$$

definiscono un atlante di trivializzazioni locali per il fibrato differenziabile  $\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M$ .  $\square$

DEFINIZIONE VII.8.4. Con la struttura differenziale descritta dal Teorema VII.8.3, chiamiamo  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  lo spazio omogeneo del gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  con stabilizzatore  $\mathbf{H}$ .

### VII.9. Gruppi di Lie di trasformazioni

Per generalità sulle azioni di gruppo insiemistiche e topologiche rimandiamo al §XXVI.1. In questo paragrafo ci occuperemo soltanto di azioni differenziabili di gruppi di Lie.

Siano  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie ed  $M$  una varietà differenziabile.

DEFINIZIONE VII.9.1. Un'azione differenziabile a sinistra di  $\mathbf{G}$  su  $M$  è un'applicazione differenziabile

$$(7.9.1) \quad \mathbf{G} \times M \ni (x, p) \longrightarrow xp \in M \text{ tale che } \begin{cases} e_{\mathbf{G}}p = p, \\ x_1(x_2p) = (x_1x_2)p, \\ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}, \forall p \in M. \end{cases}$$

Gli elementi  $a$  di  $\mathbf{G}$  definiscono diffeomorfismi di  $M$  in sé

$$\ell_a : M \ni p \longrightarrow ap \in M \quad (\text{TRASLAZIONI A SINISTRA}).$$

DEFINIZIONE VII.9.2. L'azione (7.9.1) si dice

- *effettiva* se  $\ell_a = \text{id}_M \iff a = e_{\mathbf{G}}$ ;
- *libera* se le  $\ell_a$  con  $a \neq e_{\mathbf{G}}$  non hanno punti fissi;
- *transitiva* se per ogni coppia di punti  $p_1, p_2$  di  $M$  esiste un  $a \in \mathbf{G}$  tale che  $ap_1 = p_2$ .

DEFINIZIONE VII.9.3. Sia  $p_0 \in M$ .

Il sottogruppo  $\mathbf{G}_{p_0} = \{x \in \mathbf{G} \mid xp_0 = p_0\}$  si dice lo *stabilizzatore* di  $p_0$  in  $\mathbf{G}$ .

Il sottoinsieme  $\mathbf{G}(p_0) = \{xp_0 \mid x \in \mathbf{G}\}$  si dice l'*orbita* di  $\mathbf{G}$  in  $M$  per  $p_0$ .

Lo stabilizzatore  $\mathbf{G}_{p_0}$  è un sottogruppo chiuso e quindi un sottogruppo di Lie di  $\mathbf{G}$ . Indicheremo con  $\mathfrak{g}_{p_0}$  la sua algebra di Lie.

Ad ogni elemento  $X$  dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $\mathbf{G}$  associamo il gruppo a un parametro

$$\mathbb{R} \times M \ni (t, p) \longrightarrow \exp(tX)p \in M$$

di diffeomorfismi di  $M$ . Indichiamo con  $X_{\star}$  il suo generatore infinitesimale. La curva  $\gamma(t) = \exp(tX)p$  è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X_{\star\gamma(t)}, \\ \gamma(0) = p. \end{cases}$$

LEMMA VII.9.4. È  $X_{\star p} = 0$  se e soltanto se  $X$  appartiene all'algebra di Lie  $\mathfrak{g}_p$  dello stabilizzatore  $\mathbf{G}_p$  di  $p$  in  $\mathbf{G}$ .

DIMOSTRAZIONE. Infatti  $X_{\star p} = 0$  se e soltanto se  $\exp(tX) \in \mathbf{G}_p$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e l'affermazione è quindi conseguenza della caratterizzazione dell'algebra di Lie di un sottogruppo di Lie del Teorema VII.3.2.  $\square$

**PROPOSIZIONE VII.9.5.** *I campi di vettori  $X_\star$  formano una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{X}(M)$ . L'applicazione  $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_\star \in \mathfrak{X}(M)$  è un anti-omomorfismo di algebre di Lie. Abbiamo cioè*

$$[X, Y]_\star = -[X_\star, Y_\star], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Per ogni  $p_0 \in M$ , il differenziale nell'identità dell'applicazione

$$\lambda_{p_0} : \mathbf{G} \ni x \rightarrow xp_0 \in M$$

associa ad  $X \in \mathfrak{g}$  il valore in  $p_0$  del campo  $X_\star$ . Il campo  $X_\star$  è  $\lambda_{p_0}$ -correlato al campo di vettori invariante a destra  $X_*$  associato all'elemento  $X$  di  $\mathfrak{g}$ .

L'algebra di Lie  $\mathfrak{g}_{p_0}$  di  $\mathbf{G}_{p_0}$  è il nucleo del differenziale  $d\lambda_{p_0}(e_{\mathbf{G}}) : \mathfrak{g} \rightarrow T_{p_0}M$ .

**DIMOSTRAZIONE.** L'applicazione  $\lambda_{p_0}$  trasforma il semigruppato a un parametro  $\mathbb{R} \times \mathbf{G} \ni (t, x) \rightarrow \exp(tX)x$  nel semigruppato a un parametro  $\mathbb{R} \times \mathbf{M} \ni (t, p) \rightarrow \exp(tX)p$  e quindi il generatore infinitesimale  $X_*$  del primo, nel generatore infinitesimale  $X_\star$  del secondo. In particolare, i campi di vettori  $X_*$  ed  $X_\star$  sono  $\lambda_{p_0}$  correlati. Da questa osservazione seguono tutte le affermazioni della proposizione.  $\square$

**OSSERVAZIONE VII.9.6.** Se  $M = \mathbf{G}$  ed (7.9.1) è la moltiplicazione del gruppo, allora  $X_\star = X_*$  è il campo di vettori invariante a destra associato ad  $X \in \mathfrak{g}$ .

**COROLLARIO VII.9.7.** Se (7.9.1) è effettiva, allora l'applicazione  $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_\star \in \mathfrak{X}(M)$  è iniettiva.

Se (7.9.1) è libera, allora l'applicazione  $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_{\star p} \in T_pM$  è iniettiva per ogni  $p \in M$ .

**DEFINIZIONE VII.9.8.** I campi  $X_\star$  si dicono *trasformazioni  $\mathbf{G}$ -infinitesime* di  $M$ .

**TEOREMA VII.9.9.** Sia (7.9.1) un'azione differenziabile a sinistra di  $\mathbf{G}$  su  $M$ . Fissiamo un punto  $p_0$  di  $M$  e siano  $\mathbf{G}_{p_0}$  lo stabilizzatore di  $p_0$  in  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{G}(p_0)$  l'orbita di  $\mathbf{G}$  per il punto  $p_0$ . Allora  $\mathbf{G}(p_0)$  una sottovarietà analitica di  $M$ , e l'applicazione  $f$ , definita dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \xrightarrow{\lambda_{p_0}} & \mathbf{G}(p_0) \\ \pi \downarrow & \nearrow f & \\ \mathbf{G}/\mathbf{G}_{p_0} & & \end{array}$$

un diffeomorfismo  $\mathbf{G}$ -equivariante (commuta cioè con le traslazioni a sinistra per elementi di  $\mathbf{G}$ ) di classe  $\mathcal{C}^\omega$  dello spazio omogeneo  $\mathbf{G}/\mathbf{G}_{p_0}$  su  $\mathbf{G}(p_0)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dalla Proposizione VII.9.5 e dalla descrizione della struttura differenziale di  $\mathbf{G}/\mathbf{G}_{p_0}$  data dal Teorema VII.8.3, segue che il quoziente iniettivo di  $\lambda_{p_0}$  è un'immersione differenziabile  $\mathbf{G}$ -equivariante di classe  $\mathcal{C}^\omega$ . Da questo fatto, seguono le affermazioni del Teorema.  $\square$

**COROLLARIO VII.9.10.** Se l'azione (7.9.1) è transitiva,  $M$  è diffeomorfa, in modo  $\mathbf{G}$ -equivariante, a uno spazio omogeneo di  $\mathbf{G}$ .  $\square$

ESEMPIO VII.9.11. L'applicazione  $\pi : \mathbf{SO}(n+1) \ni a \rightarrow ae_0 \in S^n$ , ove  $e_0$  è un vettore di lunghezza unitaria in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , definisce un diffeomorfismo  $\mathbf{SO}(n+1)$ -equivariante tra la sfera  $S^n$  e lo spazio omogeneo  $\mathbf{SO}(n+1)/\mathbf{SO}(n)$ .

ESEMPIO VII.9.12. Sia  $n$  un intero positivo. Il gruppo  $\mathbf{T}^+(n, \mathbb{R})$  delle matrici diagonali superiori con determinante diverso da zero è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ . Lo spazio omogeneo  $F = \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})/\mathbf{T}^+(n, \mathbb{R})$  è una varietà differenziabile compatta di dimensione  $n(n-1)/2$ , che si dice *varietà bandiera reale completa* e che è diffeomorfo al sottospazio di  $\mathbb{G}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathbb{G}_{n,n-1}(\mathbb{R})$  che consiste delle  $(n-1)$ -uple  $(\ell_1, \dots, \ell_m, \dots, \ell_{n-1})$  di sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^n$  con  $\{0\} \subsetneq \ell_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \ell_m \subsetneq \cdots \subsetneq \ell_{n-1} \subsetneq \mathbb{R}^n$ .

OSSERVAZIONE VII.9.13. In generale, se un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  opera transitivamente su un insieme  $M$ , possiamo definire su  $M$  un'unica struttura di varietà  $\mathcal{C}^\omega$  per cui l'azione di  $\mathbf{G}$  su  $M$  sia differenziabile.

ESEMPIO VII.9.14. Fissiamo una forma bilineare alternata non degenere  $\omega$  su  $\mathbb{C}^{2n}$  e sia  $M$  il sottoinsieme della Grassmanniana  $\mathbb{G}_{2n,n}(\mathbb{C})$  formato dai sottospazi Lagrangiani di  $\mathbb{C}^{2n}$ , cioè dai  $p \in \mathbb{G}_{2n,n}(\mathbb{C})$  tali che  $\omega(z, w) = 0$  per ogni  $z, w \in p$ . Dico che  $p$  è una varietà connessa e compatta.

Identifichiamo  $\mathbb{C}^{2n}$  con lo spazio  $\mathbb{H}^n$  delle  $n$ -uple di quaternioni, facendo corrispondere ad  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  l'elemento  $x + jy$ . Ricordiamo che  $\overline{x + jy} = \bar{x} - jy$ . Possiamo scegliere le coordinate in modo che il prodotto scalare standard su  $\mathbb{H}^n$  sia definito da

$$\begin{aligned} (q_1|q_2)_{\mathbb{H}} &= (x_2^* - jy_2^\dagger)(x_1 + jy_1) = x_2^*x_1 + y_2^*y_1 + j(x_2^\dagger y_1 - y_2^\dagger x_1) \\ &= (q_1|q_2)_{\mathbb{C}^n} + j\omega(q_1, q_2), \end{aligned}$$

$$\text{ove } q_1 = x_1 + jy_1, q_2 = x_2 + iy_2, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}^n.$$

Ragionando come nell'esempio precedente, possiamo identificare gli  $n$ -piani Lagrangiani agli  $n$ -piani complessi generati da una base ortonormale di  $\mathbb{H}^n$ . Quindi il gruppo  $\mathbf{Sp}(n)$  opera transitivamente su  $M$ . Lo stabilizzatore di  $p_0 = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{C}}$  in  $\mathbf{Sp}(n)$  è il gruppo unitario  $\mathbf{U}(n)$ . Quindi  $M \simeq \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{U}(n)$  è una varietà connessa e compatta di dimensione  $n(2n+1) - n^2 = n(n+1)$ . Osserviamo che  $M$  ha dimensione pari ed in effetti è una varietà complessa compatta di dimensione  $n(n+1)/2$ .

In modo del tutto analogo possiamo definire e discutere il concetto di azione differenziabile a destra. Siano  $P$  è una varietà differenziabile e  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie.

DEFINIZIONE VII.9.15. Un'azione differenziabile a destra di  $\mathbf{G}$  su  $P$  è un'applicazione differenziabile

$$(7.9.2) \quad P \times \mathbf{G} \ni (\sigma, x) \longrightarrow \sigma x \in P \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} \sigma e_{\mathbf{G}} = \sigma, \\ (\sigma x_1)x_2 = \sigma(x_1 x_2), \\ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}, \forall \sigma \in P. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE VII.9.16. Se (7.9.1) è un'azione differenziabile a sinistra, la  $M \times \mathbf{G} \ni (p, x) \rightarrow x^{-1}p \in M$  è un'azione differenziabile a destra su  $M$  e, viceversa,

se (7.9.2) è un'azione differenziabile a destra, la  $\mathbf{G} \times P \ni (x, \sigma) \rightarrow \sigma x^{-1} \in P$  è un'azione differenziabile a sinistra su  $P$ .

Sarà comunque conveniente nel seguito considerare i due tipi di azione in modo distinto. L'azione a sinistra sarà spesso transitiva ed effettiva e coinciderà con le traslazioni a sinistra su uno spazio omogeneo. L'azione a destra sarà di solito libera ed effettiva, ed agirà tipicamente in modo transitivo sulle fibre di un fibrato differenziabile. L'esempio tipico è quello degli spazi omogenei  $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$  e dell'azione a sinistra di  $\mathbf{G}$  come gruppo di traslazioni sulla base  $M$  del fibrato  $\xi = (\pi : \mathbf{G} \rightarrow M)$  e di  $\mathbf{H}$  a destra su  $\mathbf{G}$ , pensato come spazio totale di  $\xi$ .

Fissata un'azione a destra (7.9.2), ad ogni elemento  $X$  dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $\mathbf{G}$  associamo il generatore infinitesimale  $X^*$  del gruppo a un parametro di trasformazioni

$$(7.9.3) \quad P \times \mathbb{R} \ni (\sigma, t) \longrightarrow \sigma \exp(tX) \in P.$$

La curva  $\gamma(t) = \sigma \exp(tX)$  è la soluzione del problema di Cauchy

$$(7.9.4) \quad \begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}^*, & t \in \mathbb{R}, \\ \gamma(0) = \sigma. \end{cases}$$

In particolare,  $X^*$  si annulla in un punto  $\sigma \in P$  se e soltanto se  $X$  appartiene all'algebra di Lie dello stabilizzatore  $\mathbf{G}_\sigma$  di  $\sigma$  in  $\mathbf{G}$ .

OSSERVAZIONE VII.9.17. Se  $P = \mathbf{G}$  e (7.9.2) la moltiplicazione del gruppo, allora  $X^* = X^*$  è il campo di vettori invariane a destra associato ad  $X \in \mathfrak{g}$ .

Fissata  $\sigma \in P$ , consideriamo l'applicazione differenziabile

$$(7.9.5) \quad \ell_\sigma : \mathbf{G} \ni x \longrightarrow \sigma x \in P.$$

Come nel caso delle azioni a sinistra, abbiamo

PROPOSIZIONE VII.9.18. Sia (7.9.2) un'azione differenziabile a destra. Allora

- (1)  $X_\sigma^* = d\ell_\sigma(e)(X)$ ,  $\forall \sigma \in P$ ,  $\forall X \in \mathfrak{g}$ ;
- (2)  $\ker d\ell_\sigma(e)$  è l'algebra di Lie dello stabilizzatore di  $\sigma$  in  $\mathbf{G}$ . □

Gli elementi  $a$  di  $\mathbf{G}$  definiscono diffeomorfismi di  $M$  in sé

$$r_a : P \ni \sigma \longrightarrow \sigma a \in P \quad (\text{TRASLAZIONI A DESTRA}).$$

DEFINIZIONE VII.9.19. L'azione (7.9.2) si dice

- *effettiva* se  $r_a = \text{id}_P \iff a = e_{\mathbf{G}}$ ;
- *libera* se le  $r_a$  con  $a \neq e_{\mathbf{G}}$  non hanno punti fissi;
- *transitiva* se per ogni coppia di punti  $\sigma_1, \sigma_2$  di  $P$  esiste un  $a \in \mathbf{G}$  tale che  $\sigma_1 a = \sigma_2$ .

Dalla Proposizione VII.9.18 otteniamo immediatamente

COROLLARIO VII.9.20. Se l'azione (7.9.2) è libera, allora, per ogni  $\sigma \in P$ , l'applicazione  $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_\sigma^* \in T_\sigma P$  è iniettiva. □



### VII.10. La trasformata di Cayley

Sia  $\mathbb{C}^{n \times n}$  lo spazio delle matrici complesse  $n \times n$ . Indichiamo con

$$(7.10.1) \quad \mathbb{U}_e = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det(I + X) \neq 0\}$$

l'aperto di  $\mathbb{C}^{n \times n} \simeq \mathbb{C}^{n^2}$  delle matrici complesse che non hanno autovalore  $-1$ .

DEFINIZIONE VII.10.1. La *trasformata di Cayley* di una matrice  $X \in \mathbb{U}_e$  è la matrice

$$(7.10.2) \quad \mathbf{c}(X) = (I + X)^{-1}(I - X).$$

Vale il

TEOREMA VII.10.2. *La trasformata di Cayley (7.10.2) definisce un'involuzione differenziabile di classe  $\mathcal{C}^\omega$  di  $\mathbb{U}_e$  in sé. La trasformata di Cayley di una matrice  $X \in \mathbb{U}_e$  è reale se e soltanto se  $X$  è reale.*

DIMOSTRAZIONE. La  $\mathbf{c}$  è una funzione razionale, e quindi differenziabile di classe  $\mathcal{C}^\omega$ , sul suo dominio di definizione. Verifichiamo che l'immagine di  $\mathbf{c}$  è ancora contenuta in  $\mathbb{U}_e$ . Abbiamo<sup>6</sup> infatti, se  $v \in \mathbb{C}^n$ ,

$$v + \mathbf{c}(X)v = 0 \iff (I + X)v + (I - X)v = 2v = 0 \iff v = 0.$$

Possiamo quindi definire l'iterata  $\mathbf{c}^2$  di  $\mathbf{c}$ , ed abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^2(X) &= (I + (I + X)^{-1}(I - X))^{-1}(I - (I + X)^{-1}(I - X)) \\ &= ((I + X) + (I - X))^{-1}((I + X) - (I - X)) = X, \quad \forall X \in \mathbb{U}_e. \end{aligned}$$

Chiaramente  $\mathbf{c}$  si restringe ad un'involuzione di  $\mathbb{U}_e \cap \mathbb{R}^{n \times n}$ .  $\square$

Come vedremo nel seguito, la trasformata di Cayley è uno strumento molto utile nello studio della struttura dei gruppi di matrici, perché ci permette, in molti casi, di definire atlanti *razionali*.

Definiamo alcuni gruppi di matrici.

Sia  $H$  una matrice complessa  $n \times n$  non singolare. Poniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_H(\mathbb{C}) &= \{a \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid a^\dagger H a = H\}, & \mathfrak{o}_H(\mathbb{C}) &= \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^\dagger H + HX = 0\}, \\ \mathbf{O}_H(\mathbb{R}) &= \{a \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid a^\dagger H a = H\}, & \mathfrak{o}_H(\mathbb{R}) &= \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^\dagger H + HX = 0\}, \\ \mathbf{U}_H &= \{a \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid a^* H a = H\}, & \mathfrak{u}_H &= \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^* H + HX = 0\}. \end{aligned}$$

Essendo sottogruppi chiusi del gruppo lineare  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ , i gruppi  $\mathbf{O}_H(\mathbb{C})$ ,  $\mathbf{O}_H(\mathbb{R})$  ed  $\mathbf{U}_H$  sono gruppi di Lie e si verifica facilmente che  $\mathfrak{o}_H(\mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{o}_H(\mathbb{R})$  ed  $\mathfrak{u}_H$  sono le corrispondenti algebre di Lie.

Abbiamo

<sup>6</sup>Possiamo anche osservare che gli autovalori di  $\mathbf{c}(X)$  sono i  $\mu = (1 + \lambda)^{-1}(1 - \lambda)$ , al variare di  $\lambda$  tra gli autovalori di  $X$  e  $(1 + \lambda)^{-1}(1 - \lambda) \neq -1$  se  $\lambda$  è un numero complesso  $\neq -1$ . Osserviamo che  $\lambda \mapsto \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$  è l'involuzione di Moebius di  $\mathbb{CP}^1$  che scambia  $-1$  ed  $\infty$ .

PROPOSIZIONE VII.10.3. *La trasformata di Cayley definisce omeomorfismi*

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_e \cap \mathbf{O}_H(\mathbb{C}) &\xleftrightarrow{\mathbf{c}} \mathbb{U}_e \cap \mathfrak{o}_H(\mathbb{C}), \\ \mathbb{U}_e \cap \mathbf{O}_H(\mathbb{R}) &\xleftrightarrow{\mathbf{c}} \mathbb{U}_e \cap \mathfrak{o}_H(\mathbb{R}), \\ \mathbb{U}_e \cap \mathbf{U}_H &\xleftrightarrow{\mathbf{c}} \mathbb{U}_e \cap \mathfrak{u}_H.\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $a \in \mathbb{U}_e$  ed  $X = \mathbf{c}(a)$ , abbiamo

$$\begin{aligned}X^\dagger H + HX = 0 &\iff (I - a^\dagger)H(I + a) + (I + a^\dagger)H(I - a) = 0 \\ &\iff (H - a^\dagger H + Ha - a^\dagger Ha) + (H + a^\dagger H - Ha - a^\dagger Ha) = 0 \\ &\iff H - a^\dagger Ha = 0\end{aligned}$$

Da queste equivalenze ricaviamo il primo isomorfismo. Il secondo segue dal fatto che la trasformata di Cayley trasforma matrici reali in matrici reali.

Analogamente se  $a \in \mathbb{U}_e$  ed  $X = \mathbf{c}(a)$ , abbiamo

$$\begin{aligned}X^* H + HX = 0 &\iff (I - a^*)H(I + a) + (I + a^*)H(I - a) = 0 \\ &\iff (H - a^* H + Ha - a^* Ha) + (H + a^* H - Ha - a^* Ha) = 0 \\ &\iff H - a^* Ha = 0,\end{aligned}$$

e quindi  $a \in \mathbf{U}_H$  se e soltanto se  $X \in \mathfrak{u}_H$ .  $\square$

Gli insiemi  $\mathfrak{o}_H(\mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{o}_H(\mathbb{R})$  ed  $\mathfrak{u}_H$  sono spazi vettoriali di dimensione finita. La trasformata di Cayley ci permette quindi di definire diffeomorfismi razionali tra intorno dell'identità nei gruppi  $\mathbf{O}_H(\mathbb{C})$ ,  $\mathbf{O}_H(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{U}_H$  ed aperti di spazi vettoriali reali.

Abbiamo

TEOREMA VII.10.4. *Sia  $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matrice invertibile e sia  $\mathbf{G}$  uno dei gruppi  $\mathbf{O}_H(\mathbb{C})$ ,  $\mathbf{O}_H(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{U}_H$ . Indichiamo con  $\mathfrak{g}$  la corrispondente algebra di Lie  $\mathfrak{o}_H(\mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{o}_H(\mathbb{R})$ ,  $\mathfrak{u}_H$ , rispettivamente. Con la topologia di sottospazio di  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , il gruppo  $\mathbf{G}$  è una varietà topologica ed ammette un'unica struttura differenziale di classe  $\mathcal{C}^\omega$  per cui:*

- (1)  $\mathbf{c} : \mathbb{U}_e \cap \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{U}_e \cap \mathfrak{g}$  è una carta locale con centro in  $I$ ;
- (2) per ogni  $a \in \mathbf{G}$  la traslazione a sinistra  $\mathbf{G} \ni x \rightarrow ax \in \mathbf{G}$  è un diffeomorfismo di classe  $\mathcal{C}^\omega$ .

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione VII.10.3 l'insieme  $\mathbb{U}_e \cap \mathbf{G}$ , che è un intorno aperto di  $I$  in  $\mathbf{G}$  per la topologia di sottospazio, è omeomorfo ad un aperto dello spazio vettoriale reale  $\mathfrak{g}$ . Poiché le traslazioni a sinistra  $L_a : \mathbb{C}^{n \times n} \ni x \rightarrow ax \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mediante gli elementi  $a$  di  $\mathbf{G}$  sono omeomorfismi, ogni punto  $a$  di  $\mathbf{G}$  ha un intorno  $U_a = a \cdot (\mathbb{U}_e \cap \mathbf{G})$  omeomorfo ad un aperto di  $\mathfrak{g}$ . Consideriamo il corrispondente atlante  $\mathcal{A} = \{(U_a, X_a) \mid a \in \mathbf{G}_H(\mathbb{k})\}$ , con  $X_a(x) = \mathbf{c}(a^{-1}x)$  per  $x \in U_a$ . Esso definisce su  $\mathbf{G}_H(\mathbb{k})$  una struttura differenziale di classe  $\mathcal{C}^\omega$  per cui valgono le condizioni (1) e (2). Infatti le funzioni di transizione

$$\psi_{a,b} : \mathbf{c}(U_a \cap U_b) \ni X \rightarrow \mathbf{c}(b^{-1}a \cdot \mathbf{c}(X)) \in \mathbf{c}(U_a \cap U_b)$$

sono analitiche reali.  $\square$

OSSERVAZIONE VII.10.5. Le  $\psi_{a,b}$  sono funzioni *razionali*: si possono esprimere cioè come rapporti di polinomi nei coefficienti delle matrici  $X$ .

Ricordiamo le definizioni di alcuni gruppi classici e delle loro algebre di Lie. Indichiamo con  $I$  la matrice identità in  $\mathbb{C}^{n \times n}$  e con  $J$  la matrice antisimmetrica non degenere

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}.$$

$\mathbf{O}(n) = \{a \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid a^\dagger a = I\}$	(gruppo ortogonale),
$\mathbf{SO}(n) = \{a \in \mathbf{O}(n) \mid \det(a) = 1\}$	(gruppo speciale ortogonale),
$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^\dagger + X = 0\}$	(algebra delle matrici antisimmetriche reali),
$\mathbf{O}(n, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid a^\dagger a = I\}$	(gruppo ortogonale complesso),
$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{O}(n, \mathbb{C}) \mid \det(a) = 1\}$	(gruppo speciale ortogonale complesso),
$\mathfrak{o}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^\dagger + X = 0\}$	(algebra delle matrici antisimmetriche complesse)
$\mathbf{U}(n) = \{a \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid a^* a = I\}$	(gruppo unitario),
$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^* + X = 0\}$	(algebra delle matrici anti-hermitiane),
$\mathbf{SU}(n) = \{a \in \mathbf{U}(n) \mid \det(a) = 1\}$	(gruppo speciale unitario)
$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \text{traccia}(X) = 0\}$	(algebra delle matrici anti-hermitiane a traccia nulla)
$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} \mid a^\dagger J a = J\}$ ,	(gruppo simplettico complesso),
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} \mid X^\dagger J + JX = 0\}$ ,	(algebra simplettica complessa)
$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid a^\dagger J a = J\}$ ,	(gruppo simplettico reale),
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid X^\dagger J + JX = 0\}$ ,	(algebra simplettica reale)
$\mathbf{Sp}(n) = \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n)$	(gruppo unitario quaternionico)
$\mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(2n)$	(algebra anti-hermitiana quaternionica).

Il gruppo unitario quaternionico si chiama anche *iper-unitario*.

L'intersezione di  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$  con il gruppo ortogonale  $\mathbf{O}(2n)$  dà un gruppo isomorfo ad  $\mathbf{SU}(n)$  (la  $J$  definisce una struttura complessa su  $\mathbb{R}^{2n}$ ).

Dal Teorema VII.10.4 ricaviamo immediatamente

TEOREMA VII.10.6.

$\mathbf{SO}(n)$  è una varietà di classe  $\mathcal{C}^\omega$  e dimensione  $n(n-1)/2$ .

$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$  è una varietà di classe  $\mathcal{C}^\omega$  e dimensione  $n(n-1)$ .

$\mathbf{U}(n)$  è una varietà di classe  $\mathcal{C}^\omega$  e dimensione  $n^2$ .

$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$  è una varietà di classe  $\mathcal{C}^\omega$  e dimensione  $2n(2n+1)$ .

$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$  è una varietà di classe  $\mathcal{C}^\omega$  e dimensione  $n(2n+1)$ .

$\mathbf{Sp}(n)$  è una varietà di classe  $\mathcal{C}^\omega$  e dimensione  $n(2n+1)$ .

OSSERVAZIONE VII.10.7. Tutti i gruppi nel Teorema VII.10.6 sono connessi. I gruppi  $\mathbf{O}(n)$  ed  $\mathbf{O}(n, \mathbb{C})$  sono formati ciascuno da due componenti connesse, omeomorfe ad  $\mathbf{SO}(n)$  ed  $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ , rispettivamente. I gruppi  $\mathbf{SO}(n)$ ,  $\mathbf{O}(n)$ ,  $\mathbf{U}(n)$ ,  $\mathbf{Sp}(n)$  sono compatti. I gruppi  $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ ,  $\mathbf{O}(n, \mathbb{C})$ ,  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ ,  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$  non sono compatti.

OSSERVAZIONE VII.10.8. Le matrici antisimmetriche reali e le matrici anti-hermitiane hanno autovalori puramente immaginari. Quindi la trasformata di Cayley è definita su tutte le algebre di Lie  $\mathfrak{o}(n)$ ,  $\mathfrak{u}(n)$ ,  $\mathfrak{sp}(n)$ .

Oltre ai gruppi di Lie reali e complessi descritti sopra, ricordiamo le definizioni di alcuni gruppi reali non compatti. Sia

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix},$$

ove abbiamo indicato con  $I_k$  la matrice identità  $k \times k$ . Poniamo allora

$$\mathbf{O}(p, q) = \{a \in \mathbb{R}^{(p+q) \times (p+q)} \mid a^\dagger I_{p,q} a = I_{p,q}\} \quad (\text{gruppo ortogonale di segnatura } (p, q)),$$

$$\mathbf{SO}(p, q) = \mathbf{O}(p, q) \cap \mathbf{SL}_{p+q}(\mathbb{R}) \quad (\text{gruppo speciale ortogonale di segnatura } (p, q)),$$

$$\mathbf{U}(p, q) = \{a \in \mathbf{GL}_{p+q}(\mathbb{C}) \mid a^* I_{p,q} a = I_{p,q}\} \quad (\text{gruppo unitario di segnatura } (p, q)),$$

$$\mathbf{SU}(p, q) = \mathbf{U}(p, q) \cap \mathbf{SL}_{p+q}(\mathbb{C}) \quad (\text{gruppo speciale unitario di segnatura } (p, q)).$$

## Strutture differenziali di alcuni gruppi lineari

Dedichiamo questo capitolo ad alcuni esempi di gruppi lineari, discutendo alcune interessanti relazioni tra gruppi di dimensione bassa.

### VIII.1. Connessione di alcuni gruppi di matrici

Per dimostrare la connessione di alcuni gruppi lineari, possiamo utilizzare un semplice lemma sulle fibrazioni.

Ricordiamo che un'applicazione continua  $f : E \rightarrow F$  tra due spazi topologici si dice *decomponibile* se è surgettiva ed il suo quoziente iniettivo è un omeomorfismo.

**LEMMA VIII.1.1.** *Sia  $f : E \rightarrow F$  un'applicazione continua decomponibile. Se  $F$  è connesso e  $\pi^{-1}(y)$  è connesso per ogni  $y$  in  $F$ , allora anche  $E$  è connesso.*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo per assurdo che  $E$  sia unione di due aperti non vuoti e disgiunti  $A$  e  $B$ . Per ogni  $x \in A$ , il sottoinsieme  $\pi^{-1}(\pi(x))$ , essendo connesso, deve essere tutto contenuto in  $A$ . Quindi  $A = \pi^{-1}(\pi(A))$ . Analogamente  $B = \pi^{-1}(\pi(B))$  e quindi  $\pi(A)$  e  $\pi(B)$  sarebbero aperti non vuoti e disgiunti di  $F$ , contraddicendo l'ipotesi che  $F$  fosse connesso.  $\square$

Da questo ricaviamo

**PROPOSIZIONE VIII.1.2.** *I gruppi  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ ,  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ ,  $\mathbf{SO}^+(p, q)$ ,  $\mathbf{SU}(p, q)$ ,  $\mathbf{U}(p, q)$ ,  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ ,  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ ,  $\mathbf{Sp}(n)$  sono tutti connessi.*

**DIMOSTRAZIONE.** Diamo la dimostrazione per il gruppo  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ . La dimostrazione negli altri casi è analoga.

Per ricorrenza su  $n$ :  $\mathbf{SL}_1(\mathbb{R}) = \{1\}$  contiene solo l'identità ed è quindi connesso. Sia  $n > 1$ . L'applicazione  $\pi : \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , che associa alla matrice  $a$  la sua prima colonna, è decomponibile perché aperta. Poiché  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$  agisce transitivamente su  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , le immagini inverse dei punti di  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  sono tutte omeomorfe tra loro ed omeomorfe a

$$\pi^{-1}(e_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & w^t \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid w \in \mathbb{R}^{n-1}, b \in \mathbf{SL}_{n-1}(\mathbb{R}) \right\} \simeq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbf{SL}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Poiché  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  è connesso, per il Lemma VIII.1.1 il gruppo  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$  è connesso se lo è  $\mathbf{SL}_{n-1}(\mathbb{R})$ . La tesi segue per ricorrenza.  $\square$

### VIII.2. Il rivestimento $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathbf{SO}^+(1, 2)$

Le rappresentazioni spinoriali di  $\mathbf{SO}^+(1, 2)$ ,  $\mathbf{SO}^+(1, 3)$ ,  $\mathbf{SO}^+(1, 5)$ ,  $\mathbf{SO}^+(1, 9)$  si ottengono, al variare dell'algebra di divisione normata  $\mathbb{k}$ , facendo agire il gruppo  $\mathbf{SL}_2(\mathbb{k})$  sullo spazio  $\mathfrak{p}_2(\mathbb{k})$  delle matrici Hermitiane simmetriche di ordine due con coefficienti in  $\mathbb{k}$ . I quattro casi possibili<sup>1</sup> per  $\mathbb{k}$  sono  $\mathbb{R}$  (reali),  $\mathbb{C}$  (complessi),  $\mathbb{H}$  (quaternioni di Hamilton),  $\mathbb{O}$  (ottonioni o ottave di Cayley) e ciascuno corrisponde ad uno dei gruppi sopra elencati. Il punto centrale è definire la metrica Lorentziana per mezzo del determinante ed osservare che, sebbene  $\mathbb{H}$  ed  $\mathbb{O}$  non siano commutative ( $\mathbb{O}$  non è nemmeno associativa), il determinante è tuttavia ben definito per le matrici  $2 \times 2$  Hermitiane simmetriche con coefficienti in  $\mathbb{k}$ .

Consideriamo in questo paragrafo il caso  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ .

Sia  $\mathfrak{p}_2(\mathbb{R})$  lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche reali di ordine due. Il determinante

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = ac - b^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

è su  $\mathfrak{p}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$  una forma quadratica di segnatura  $(1, 2)$ , che definisce su di esso la struttura di uno spazio di Minkowski di dimensione tre. I suoi vettori di tipo tempo sono le matrici simmetriche con determinante positivo, unione dei due coni convessi

$$C^+ = \{X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{R}) \mid \det(X) > 0, \operatorname{tr}(X) > 0\}, \quad C^- = \{X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{R}) \mid \det(X) > 0, \operatorname{tr}(X) < 0\},$$

ed il gruppo  $\mathbf{O}(1, 2)$  delle trasformazioni lineari di  $\mathfrak{p}_2(\mathbb{R})$  che lasciano invariante la forma del determinante ha i sottogruppi normali

$$\begin{aligned} \mathbf{SO}(1, 2) &= \{\psi \in \mathbf{O}(1, 2) \mid \det(\psi) = 1\} && \text{di indice 2,} \\ \mathbf{O}^+(1, 2) &= \{\psi \in \mathbf{O}(1, 2) \mid \psi(C^+) = C^+\} && \text{di indice 2,} \\ \mathbf{SO}^+(1, 2) &= \mathbf{SO}(1, 2) \cap \mathbf{O}^+(1, 2) && \text{di indice 4.} \end{aligned}$$

Il gruppo  $\mathbf{O}(1, 2)$  ha quattro componenti connesse ed  $\mathbf{SO}^+(1, 2)$  è la componente connessa dell'identità.

Il sottospazio  $\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{R})$  delle matrici reali simmetriche  $2 \times 2$  con traccia nulla ha dimensione due e su di esso il determinante definisce una forma definita negativa e quindi una struttura Euclidea. Ogni trasformazione lineare ortogonale di  $\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{R})$  si estende in modo unico ad una trasformazione di  $\mathbf{O}^+(1, 2)$  che lascia fissa la matrice  $\sigma_0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Le trasformazioni  $\psi \in \mathbf{O}(1, 2)$  che lasciano fissa  $\sigma_0$  sono quelle che preservano la traccia. È allora:

$$\mathbf{O}(2) \simeq \{\psi \in \mathbf{O}^+(1, 2) \mid \operatorname{tr}(\psi(X)) = \operatorname{tr}(X), \forall X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{R})\}.$$

PROPOSIZIONE VIII.2.1. Ogni  $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$  definisce un'applicazione

$$(8.2.1) \quad \phi_a : \mathfrak{p}_2(\mathbb{R}) \ni X \longrightarrow aXa^* \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{R})$$

<sup>1</sup>La classificazione delle algebre di divisione normate fu ottenuta da Adolph Hurwitz, *Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen*, Nachr. Ges. Wiss., Göttingen (1898), pp. 309-316.

che appartiene ad  $\mathbf{SO}^+(1, 2)$ .

La corrispondenza  $a \mapsto \phi_a$  definisce un epimorfismo di gruppi

$$(8.2.2) \quad \phi : \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \ni a \longrightarrow \phi_a \in \mathbf{SO}^+(1, 2),$$

che è un rivestimento differenziabile a due fogli.

**DIMOSTRAZIONE.** La  $aXa^*$  è simmetrica per ogni  $X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{R})$  ed  $a \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ . Quindi  $\phi_a \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{p}_2(\mathbb{R}))$ . Per il teorema di Binet,  $\phi_a \in \mathbf{O}(1, 2)$  e  $\phi$  è a valori in  $\mathbf{SO}^+(1, 2)$  perché  $\phi$  è continua ed  $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$  connesso.

Verifichiamo che  $\phi$  è surgettiva. Fissiamo la base ortonormale

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

di  $\mathfrak{p}_2(\mathbb{R})$ . Sia  $\psi \in \mathbf{SO}^+(1, 2)$ . La  $\sigma'_0 = \psi(\sigma_0)$  è una matrice di determinante uno e traccia positiva. Ha quindi due autovalori positivi, uno reciproco dell'altro, ed esiste quindi una matrice  $u_0 \in \mathbf{SO}(2)$  tale che

$$\phi_{u_0}(\sigma'_0) = u_0 \sigma'_0 u_0^* = u_0 \sigma'_0 u_0^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda > 0.$$

È allora

$$a_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & \\ & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} u_0 \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \phi_{a_0}(\sigma'_0) = \sigma_0.$$

Allora  $\psi_0 = \phi_{a_0} \circ \psi \in \mathbf{SO}^+(1, 2)$  e  $\phi_{a_0}(\psi(\sigma_i)) = \sigma'_i$ , per  $i = 0, 1, 2$ , con  $\sigma''_0 = \sigma_0$ . La  $\psi_0$  lascia fissa  $\sigma_0$  e quindi conserva le tracce. In particolare  $\sigma''_1$  ha traccia nulla e determinante  $-1$  e  $\sigma''_2$  si ottiene ruotando  $\sigma''_1$  sul piano  $\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{R})$  di  $\pi/2$ . Risulta quindi determinata una  $a_1 \in \mathbf{SO}(2)$  tale che

$$\phi_{a_1}(\sigma''_1) = a_1 \sigma''_1 a_1^* = a_1 \sigma''_1 a_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \phi_{a_1}(\sigma''_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

È perciò  $\text{Id}_{\mathfrak{p}_2(\mathbb{R})} = \phi_{a_1} \circ \phi_{a_0} \circ \psi = \phi_{a_1 a_0} \circ \psi$ . Quindi  $\psi = \phi_{a_0^{-1} a_1^{-1}}$  e ciò prova che  $\phi$  è surgettiva.

Se  $\phi_a = \text{Id}_{\mathfrak{p}_2(\mathbb{R})}$ , allora da  $\phi_a(\sigma_0) = \sigma_0$  ricaviamo che  $a \in \mathbf{SO}(2)$ . Poi, da  $\phi_a(\sigma_1) = a \sigma_1 a^* = a \sigma_1 a^{-1}$  deduciamo che  $a$  è diagonale e quindi uguale a  $\pm \text{Id}_2$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE VIII.2.2.** La restrizione della (8.2.2) ad  $\mathbf{SO}(2)$  dà un epimorfismo

$$\mathbf{SO}_2 \ni a \longrightarrow \{\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{R}) \ni X \rightarrow aXa^* \in \mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{R})\} \in \mathbf{SO}(2)$$

che è un rivestimento differenziabile a due fogli di  $\mathbf{SO}(2) \simeq S^1$ .

### VIII.3. Il gruppo di Lorenz ed il gruppo delle rotazioni

Indichiamo con  $\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$  lo spazio vettoriale delle matrici complesse  $2 \times 2$  Hermitiane simmetriche: è uno spazio vettoriale reale di dimensione quattro, su cui il determinante

$$\det \begin{pmatrix} x & z \\ \bar{z} & y \end{pmatrix} = xy - |z|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C},$$

definisce una forma quadratica di segnatura  $(1, 3)$ . Possiamo quindi identificare lo spazio di Minkowski di dimensione quattro con lo spazio vettoriale  $\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$ , in cui la forma quadratica fondamentale è data dal determinante. Il gruppo  $\mathbf{O}(1, 3)$  delle trasformazioni reali ortogonali rispetto a una forma simmetrica di segnatura  $(1, 3)$  si identifica così al gruppo delle  $\phi \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{p}_2(\mathbb{C}))$  tali che  $\det(\phi(X)) = \det(X)$  per ogni  $X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$ .

Ricordiamo che il determinante di un elemento di  $\mathbf{O}(1, 3)$  è uguale a  $\pm 1$ . Gli elementi con determinante 1 formano un sottogruppo normale di indice due, che si denota con  $\mathbf{SO}(1, 3)$ . I vettori di tipo tempo formano un cono aperto

$$C = \{X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{C}) \mid \det X > 0\}.$$

Gli  $X$  di  $C$  hanno le componenti sulla diagonale non nulle e dello stesso segno. Quindi  $C$  è unione di due componenti connesse

$$C = C^+ \cup C^-, \quad \text{con } C^+ = \{X \in C \mid \text{tr}(X) > 0\}, \quad C^- = \{X \in C \mid \text{tr}(X) < 0\}$$

ed un elemento  $\phi$  di  $\mathbf{O}(1, 3)$  o preserva o scambia tra loro  $C^+$  e  $C^-$ . Abbiamo quindi un altro sottogruppo di indice due

$$\mathbf{O}^+(1, 3) = \{\phi \in \mathbf{O}(1, 3) \mid \phi(C^+) = C^+, \phi(C^-) = C^-\}.$$

L'intersezione

$$\mathbf{SO}^+(1, 3) = \mathbf{SO}(1, 3) \cap \mathbf{O}^+(1, 3)$$

è la componente connessa dell'identità di  $\mathbf{O}(1, 3)$  ed è un sottogruppo normale di  $\mathbf{O}(1, 3)$  di indice quattro.

Il gruppo  $\mathbf{SO}^+(1, 3)$  è il gruppo di Lorentz che definisce la simmetria della relatività ristretta.

Lo spazio Euclideo  $\mathbb{R}^3$  si può identificare al sottospazio  $\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{C})$  delle matrici Hermitiane simmetriche a traccia nulla. La restrizione a  $\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{C})$  della forma fondamentale è l'opposto della norma Euclidea usuale. Questo ci permette di identificare il gruppo  $\mathbf{O}(3)$  delle trasformazioni ortogonali di  $\mathbb{R}^3$  al sottogruppo di  $\mathbf{O}(1, 3)$  delle trasformazioni che conservano al tempo stesso il determinante e la traccia:

$$\mathbf{O}(3) = \{\phi \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})) \mid \det(\phi(X)) = \det(X), \text{tr}(\phi(X)) = \text{tr}(X), \forall X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{C})\}.$$

PROPOSIZIONE VIII.3.1. *Ogni  $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$  definisce un'applicazione*

$$(8.3.1) \quad \phi_a : \mathfrak{p}_2(\mathbb{C}) \ni X \longrightarrow \phi_a(X) = aXa^* \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{C}) \quad \text{con} \quad \phi_a \in \mathbf{SO}^+(1, 3).$$

*La corrispondenza*

$$(8.3.2) \quad \phi : \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \ni a \longrightarrow \phi_a \in \mathbf{SO}^+(1, 3)$$

*è un epimorfismo di gruppi con nucleo  $\{\pm I\}$  ed un rivestimento differenziabile a due fogli.*

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che  $\phi_a$  sia una trasformazione di  $\mathbf{O}(1, 3)$  è conseguenza del teorema di Binet. Poiché  $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$  è connesso ed  $a \mapsto \phi_a$  continua, l'immagine  $\phi(\mathbf{SL}_2(\mathbb{C}))$  è contenuta nella sua componente connessa dell'identità  $\mathbf{SO}^+(1, 3)$ .



Dimostriamo ora che (8.3.2) è surgettiva. A questo scopo fissiamo la base ortonormale di  $\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$  formata dalle matrici

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Siano  $\psi \in \mathbf{SO}^+(1, 3)$  e  $\sigma'_i = \psi(\sigma_i)$ , per  $i = 0, 1, 2, 3$ . Basterà dimostrare che possiamo trovare  $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$  tale che  $\phi_a(\sigma'_i) = \sigma_i$  per  $i = 0, 1, 2, 3$ . La matrice  $\sigma'_0$  ha determinante uno e traccia positiva ed è diagonalizzabile in una base ortonormale di  $\mathbb{C}^2$ . Possiamo quindi trovare un numero reale positivo  $\lambda$  ed un  $u_0 \in \mathbf{SU}(2)$  tale che

$$u_0 \sigma'_0 u_0^* = u_0 \sigma'_0 u_0^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\sigma_0 = \phi_{a_0}(\sigma'_0) \quad \text{con} \quad a_0 = \begin{pmatrix} \lambda^{-1/2} & \\ & \lambda^{1/2} \end{pmatrix} u_0 \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}).$$

I  $\phi_{a_0}(\sigma'_i) = \sigma''_i$  formano una nuova base ortonormale di  $\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$ , con  $\sigma''_0 = \sigma_0$ . In particolare,  $\sigma''_1$  ha determinante  $-1$  e traccia nulla: è quindi Hermitiana simmetrica con autovalori  $1, -1$  e perciò possiamo trovare una  $a_1 \in \mathbf{SU}(2)$  tale che

$$\phi_{a_1}(\sigma''_1) = a_1 \sigma''_1 a_1^* = a_1 \sigma''_1 a_1^{-1} = \sigma_1.$$

I  $\sigma'''_i = \phi_{a_1} \circ \phi_{a_0}(\sigma'_i) = \phi_{a_1 a_0}(\sigma'_i)$ , per  $i = 0, 1, 2, 3$  formano una base ortonormale di  $\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$  con  $\sigma'''_0 = \sigma_0$  e  $\sigma'''_1 = \sigma_1$ . Poiché  $\phi_{a_1 a_0} \circ \psi \in \mathbf{SO}^+(1, 3)$  e lascia fissi  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$ , è una rotazione di  $\pi/2$  nel piano euclideo formato dalle matrici Hermitiane simmetriche con la diagonale nulla. Abbiamo allora

$$\sigma'''_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \bar{\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma'''_3 = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha \\ -i\bar{\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1.$$

Se  $\beta$  è una radice quadrata di  $\alpha$ , allora

$$a_2 = \begin{pmatrix} \bar{\beta} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \phi_{a_2}(\sigma_0) &= \sigma_0, & \phi_{a_2}(\sigma_1) &= \sigma_1, \\ \phi_{a_2}(\sigma'''_2) &= \sigma_2, & \phi_{a_2}(\sigma'''_3) &= \sigma_3. \end{aligned}$$

Otteniamo così che  $\phi_a(\sigma'_i) = \sigma_i$  per  $i = 0, 1, 2, 3$  se  $a = a_2 a_1 a_0$ ; quindi  $\psi = \phi_{a^{-1}}$  e ciò completa la dimostrazione del fatto che (8.3.2) sia surgettiva.

Sia ora  $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$  tale che  $\phi_a$  sia l'identità. Da  $\phi_a(\sigma_0) = \sigma_0$  abbiamo che  $aa^* = \sigma_0 \text{Id}$  e quindi  $a \in \mathbf{SU}(2)$ . Da  $\phi_a(\sigma_1) = \sigma_1$  ricaviamo allora che  $a$  commuta con  $\sigma_1$  ed è quindi diagonale. Da  $\phi_a(\sigma_2) = \sigma_2$  otteniamo infine che gli elementi sulla diagonale di  $a$  hanno quadrato uguale ad 1 e perciò  $a = \pm \text{Id}$ .  $\square$

Per la caratterizzazione di  $\mathbf{SO}(3)$  come il sottogruppo di  $\mathbf{SO}^+(1, 3)$  delle trasformazioni che preservano la traccia (con la notazione introdotta nella dimostrazione della Proposizione VIII.3.1 sono le  $\psi \in \mathbf{SO}^+(1, 3)$  che lasciano fissa  $\sigma_0$ ), otteniamo il

**COROLLARIO VIII.3.2.** *L'applicazione*  
(8.3.3)

$$\phi : \mathbf{SU}(2) \ni a \longrightarrow \phi_a \in \mathbf{SO}(3), \quad \text{definita da} \quad \phi(X) = aXa^*, \quad \forall X \in \mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{C}),$$

è un epimorfismo di gruppi, con nucleo  $\{\pm \text{Id}\}$  ed un rivestimento differenziabile a due fogli.  $\square$

#### VIII.4. I quaternioni e i gruppi $\text{SU}(2)$ , $\text{SO}(3)$ , $\text{SO}(4)$

Indichiamo con  $\mathbb{H}$  il corpo<sup>2</sup> (non commutativo) dei quaternioni. Ricordiamo la rappresentazione matriciale

$$(8.4.1) \quad \mathbb{H} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\},$$

in cui la base canonica dei quaternioni puramente immaginari è data da

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

con le regole di prodotto

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

La matrice

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è l'identità in  $\mathbb{H}$ . Gli elementi  $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  formano una base di  $\mathbb{H}$  come spazio vettoriale reale. I numeri complessi si possono identificare al sottocorpo

$$\mathbb{C} = \{a + \mathbf{i}b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

di  $\mathbb{H}$ , ed  $\mathbb{H}$  è uno spazio vettoriale complesso, per la moltiplicazione a sinistra per gli elementi di  $\mathbb{C}$ , con base  $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{j}$ .

Utilizzando la (8.4.1), il coniugato sui quaternioni corrisponde all'aggiunta (coniugata trasposta) della matrice corrispondente e il piano complesso  $\mathbb{C}$  si identifica con il sottoinsieme delle matrici diagonali

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C},$$

di  $\mathbb{H}$ . In questo modo, l'isomorfismo di  $\mathbb{C}^2$  su  $\mathbb{H}$  fa corrispondere a  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$  il quaternionone di matrice  $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$ .

Nella rappresentazione matriciale (8.4.1), il coniugato di un quaternionone corrisponde all'aggiunta (coniugata trasposta) della matrice associata.

Hamilton identificava lo spazio Euclideo  $\mathbb{R}^3$  a quello dei quaternioni puramente immaginari. L'opposto della parte reale del prodotto di due quaternioni immaginari è il prodotto scalare e la parte immaginaria il prodotto vettore dei due vettori corrispondenti.

Il prodotto di quaternioni ci permette di definire una struttura di gruppo sulla sfera  $S^3$ : essa si identifica al gruppo moltiplicativo dei quaternioni  $q$  con  $q\bar{q} = 1$ . Osserviamo ancora che  $q\bar{q}$  è il determinante della matrice che rappresenta  $q$  nella (8.4.1).

<sup>2</sup>I quaternioni si caratterizzano come l'unica algebra di divisione reale associativa e normata non commutativa.

Un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare  $A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  è  $\mathbb{C}$ -lineare se commuta con la moltiplicazione a sinistra per numeri complessi. A questo scopo basta verificare che  $A \circ (\mathbf{i} \cdot) = \mathbf{i} \cdot A$ . Se  $A$  è  $\mathbb{C}$ -lineare, allora la corrispondenza tra  $\mathbb{C}^2$  ed  $\mathbb{H}$  ci permette di definire un'applicazione  $\mathbb{C}$ -lineare  $A_{\mathbb{C}}$  di  $\mathbb{C}^2$  in sé, che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{A} & \mathbb{H} \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{A_{\mathbb{C}}} & \mathbb{C}^2. \end{array}$$

In questo caso,  $\det(A) = |\det(A_{\mathbb{C}})|^2$ .

Dati due quaternioni  $a, b \in \mathbb{H}$ , definiamo l'applicazione

$$(8.4.2) \quad \rho_{a,b} : \mathbb{H} \ni x \longrightarrow \rho_{a,b}(x) = axb \in \mathbb{H}.$$

LEMMA VIII.4.1. *Per ogni scelta di  $a, b \in \mathbb{H}$  l'applicazione  $\rho_{a,b}$  definita da (8.4.2) è  $\mathbb{R}$ -lineare. La  $\rho_{a,b}$  è  $\mathbb{C}$ -lineare se e soltanto se  $a \in \mathbb{C}$ .*

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue dal fatto che  $\mathbb{H}$  è un'algebra reale e quindi la moltiplicazione per un quaternioni, sia a destra che a sinistra, è  $\mathbb{R}$ -lineare. La moltiplicazione a destra è sempre  $\mathbb{C}$ -lineare. La moltiplicazione a sinistra per il quaternioni  $a$  lo è se e solo se  $a$  commuta con  $\mathbf{i}$ , cioè se la matrice che lo rappresenta commuta con  $\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}$ , e quindi è diagonale. Poiché i numeri complessi sono i quaternioni rappresentati da matrici diagonali, questo conclude la dimostrazione.  $\square$

Utilizziamo le  $\rho_{a,b}$  per descrivere le relazioni tra i quaternioni ed i gruppi  $SO(3)$ ,  $SO(4)$ ,  $SU(2)$ ,  $U(2)$  e le loro estensioni conformi.

PROPOSIZIONE VIII.4.2. *Siano  $\rho_{a,b}$  le trasformazioni definite da (8.4.2). Allora*

- (1) *Per ogni  $a \in \mathbb{H}$ , l'applicazione  $\rho_{a,\bar{a}}$  trasforma quaternioni puramente immaginari in quaternioni puramente immaginari e definisce quindi una trasformazione lineare  $R_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Se  $a \neq 0$ , la  $R_a$  è un'applicazione conforme con determinante positivo, di ragione  $|a|^2$ . Le corrispondenze*

$$(8.4.3) \quad S^3 \ni a \rightarrow R_a \in SO(3) \quad \text{ed} \quad \mathbb{H} \setminus \{0\} \ni a \rightarrow R_a \in CSO(3)$$

*sono omomorfismi di gruppi continui e surgettivi con nucleo  $\{\pm \mathbf{1}\}$ , ed in particolare rivestimenti a due fogli.*

- (2) *Per ogni  $a \in S^3$  la trasformazione*

$$(8.4.4) \quad \sigma_a : \mathbb{H} \ni x \longrightarrow -\rho_{a,a}(\bar{x}) = -a\bar{x}a \in \mathbb{H}$$

*è la simmetria ortogonale di  $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$  di vettore  $a$ .*

- (3) *Per ogni  $a, b \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  l'applicazione  $\rho_{a,b}$ , come applicazione di  $\mathbb{R}^4$  in sé, è conforme e a determinante positivo, di ragione  $|ab|$ . Le applicazioni*

$$(8.4.5) \quad S^3 \times S^3 \ni a, b \rightarrow \rho_{a,\bar{b}} \in SO(4) \quad \text{ed} \quad S^3 \times \mathbb{H} \ni a, b \rightarrow \rho_{a,\bar{b}} \in CSO(4)$$

*sono omomorfismi di gruppi continui e surgettivi con nucleo  $\{\pm(\mathbf{1}, \mathbf{1})\}$  ed in particolare rivestimenti a due fogli.*

(4) Per ogni  $\tau \in S^1 \subset \mathbb{C}$  ed  $a \in S^3$  l'applicazione  $\rho_{\tau,a}$  è  $\mathbb{C}$ -lineare e definisce una trasformazione unitaria di  $\mathbb{C}^2$ . L'applicazione

$$(8.4.6) \quad S^1 \times S^3 \ni (\tau, a) \rightarrow \rho_{\tau,a^{-1}} \in \mathbf{U}(2)$$

è un omomorfismo continuo e surgettivo, con nucleo  $\{\pm(\mathbf{1}, \mathbf{1})\}$  ed un rivestimento a due fogli.

(5) Per ogni  $a \in S^3$  l'applicazione  $\rho_{1,a}(x) = xa$  è un'isometria di  $\mathbb{C}^2$  con determinante 1. L'applicazione

$$(8.4.7) \quad S^3 \ni a \rightarrow \rho_{1,a} \in \mathbf{SU}(2)$$

è un isomorfismo di gruppi ed un omeomorfismo.

**DIMOSTRAZIONE.** Verifichiamo la (2). Se  $a \in S^3$ , è  $|-a\bar{x}a| = |a|^2|x| = |x|$  per ogni  $x \in \mathbb{H}$ , e quindi la  $\sigma_a$  è un'isometria di  $\mathbb{R}^4$ . Il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^4$  di due elementi  $x, a \in \mathbb{H}$  è  $(x|a) = \operatorname{Re}(\bar{x}a)$ . Quindi  $x \perp a$  se e soltanto se  $\bar{x}a$  è un immaginario puro, cioè se  $\bar{a}x = \bar{x}a = -\bar{x}a$ . Abbiamo quindi

$$\sigma_a(a) = -a\bar{a}a = -a, \quad \text{e} \quad \sigma_a(x) = -a\bar{x}a = a\bar{x}x = x, \quad \text{se } x \perp a.$$

Quindi  $\sigma_a$  è la simmetria vettoriale di vettore  $a$ .

Poiché ogni elemento di  $\mathbf{SO}(4)$  è prodotto di un numero pari di simmetrie vettoriali, dalla (2) segue che il primo degli omomorfismi (8.4.5) è surgettivo. Se  $a, b \in S^3$  e  $\rho_{a,\bar{b}}$  è l'identità, da  $\rho_{a,\bar{b}}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$  ricaviamo che  $a\bar{b} = \mathbf{1}$ , cioè  $a = b$ . Da  $\rho_{a,\bar{a}}(x) = x$  per ogni  $x \in \mathbb{H}$  ricaviamo allora che  $ax = xa$  per ogni  $x \in \mathbb{H}$ , e quindi  $a$  è reale e perciò uguale a  $\pm 1$ . Se  $b \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ , scriviamo  $\rho_{a,\bar{b}} = |b|\rho_{a, \frac{b}{|b|}}$  e quindi anche le affermazioni fatte per il gruppo conforme seguono immediatamente. Questo completa la dimostrazione di (3).

Le trasformazioni di  $\mathbf{SO}(3)$  si identificano alle trasformazioni di  $\mathbf{SO}(4)$  che lasciano fisso  $\mathbf{1}$ . Sono cioè del tipo  $\rho_a = \rho_{a,\bar{a}}$  e, con le ovvie osservazioni per il caso delle trasformazioni conformi, ne segue quindi (1).

Le (4) e (5) seguono dal fatto che la  $\rho_{a,b}$  è  $\mathbb{C}$ -lineare se e soltanto se  $a \in \mathbb{C}$  e, in questo caso  $\det([\rho_{a,b}]_{\mathbb{C}}) = a^2$ .  $\square$

**COROLLARIO VIII.4.3.** Abbiamo i seguenti diffeomorfismi di classe  $\mathcal{C}^\omega$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{SO}(3) &\simeq \mathbb{RP}^3, & \mathbf{SO}(4) &\simeq S^3 \times \mathbb{RP}^3, \\ \mathbf{SU}(2) &\simeq S^3, & \mathbf{U}(2) &\simeq S^1 \times S^3. \end{aligned}$$

Osserviamo infine:

**PROPOSIZIONE VIII.4.4.** Il gruppo degli automorfismi di  $\mathbb{H}$  è isomorfo ad  $\mathbf{SO}(3)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Un automorfismo  $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  è un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare che soddisfa

$$\phi(q_1q_2) = \phi(q_1)\phi(q_2).$$

In particolare  $\phi(1) = 1$  e  $\phi$  è l'identità sui quaternioni reali. Poiché i quaternioni immaginari sono quelli il cui quadrato è un numero reale negativo, la  $\phi$  trasforma anche quaternioni immaginari in quaternioni immaginari. Da  $\bar{q} = q^{-1} \cdot \|q\|^2$ , ricaviamo poi che  $\overline{\phi(q)} = \phi(\bar{q})$  per ogni  $q \in \mathbb{H}$ . Questo ci dice che  $\|\phi(q)\| = \|q\|$  per

ogni  $q \in \mathbb{H}$  e quindi la  $\phi$  definisce una isometria lineare di  $\mathbb{H}$  che lascia fisso  $\mathbf{1}$  e dunque un elemento di  $\mathbf{SO}(3)$ . Viceversa, se  $a$  è un quaternionione di modulo 1, la  $\rho_{a,\bar{a}}$  è un automorfismo di  $\mathbb{H}$ :

$$(aq_1\bar{a})(aq_2\bar{a}) = aq_1(\bar{a}a)q_2\bar{a} = a(q_1q_2)\bar{a}.$$

Poiché l'omomorfismo  $S^3 \ni a \mapsto \rho_{a,\bar{a}} \in \mathbf{SO}(3)$  è surgettivo, tutti gli elementi di  $\mathbf{SO}(3)$  definiscono automorfismi di  $\mathbb{H}$ .  $\square$

### VIII.5. Gruppi $GL_n(\mathbb{H})$ , $SL_{\mathbb{H}}(n)$ , $Sp(n)$

Esaminiamo qualche nozione di algebra lineare sul corpo non commutativo dei quaternioni. Siano  $m, n$  interi positivi.

LEMMA VIII.5.1. *Ogni applicazione  $T : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^m$  che sia  $\mathbb{H}$ -lineare a destra, tale cioè che*

$$T(v \cdot q) = T(v) \cdot q, \quad \forall v \in \mathbb{H}^n, \forall q \in \mathbb{H},$$

*determina univocamente una matrice  $Q_T = (q_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{H}^{m \times n}$  a coefficienti in  $\mathbb{H}$  tale che*

$$(*) \quad T(v) = Q_T v \quad (\text{prodotto righe per colonne di matrici}).$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché le proiezioni di  $\mathbb{H}^m$  sulle singole coordinate sono applicazioni  $\mathbb{H}$ -lineari a destra (e a sinistra) possiamo ricondurre la discussione al caso  $m = 1$ . Sia  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{H}^n$  il vettore che ha componente  $i$ -esima uguale a  $\mathbf{1}$  e le altre uguali a zero. Allora otteniamo (\*) ponendo  $q_i = A(\mathbf{e}_i) \in \mathbb{H}$  e  $Q_T = (q_1, \dots, q_n)$ .  $\square$

OSSERVAZIONE VIII.5.2. In modo del tutto analogo si può dimostrare che anche le trasformazioni  $\mathbb{H}$ -lineari a sinistra si possono rappresentare con matrici. Per tener conto della non commutatività dei quaternioni, si può convenire di considerare i vettori colonna come elementi di uno spazio vettoriale a destra e quelli riga di uno spazio vettoriale a sinistra su  $\mathbb{H}$ .

Le definizioni che daremo dei gruppi lineari sui quaternioni caratterizzano gli stessi gruppi sia se si considerano applicazioni  $\mathbb{H}$ -lineari a sinistra che a destra.

Identifichiamo il campo dei numeri complessi alla sottoalgebra reale unitaria di  $\mathbb{H}$  generata dall'unità immaginaria  $\mathbf{i}$  ed  $\mathbb{H}^n$  a  $\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}_z \oplus \mathbb{C}_w$  mediante l'isomorfismo<sup>3</sup>

$$(8.5.1) \quad \phi : \mathbb{C}^{2n} \ni \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \longrightarrow \phi \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = z + \mathbf{j} \cdot w \in \mathbb{H}^n.$$

Ad ogni matrice  $X \in \mathbb{H}^{m \times n}$  corrisponde allora una matrice  $\hat{X} \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$ , che rende commutativo il diagramma

$$(8.5.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \xrightarrow{X} & \mathbb{H}^m \\ \phi \uparrow & & \uparrow \phi \\ \mathbb{C}^{2n} & \xrightarrow{\hat{X}} & \mathbb{C}^{2m}. \end{array}$$

<sup>3</sup>In questa corrispondenza alla coppia  $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$  in  $\mathbb{C}^2$  corrisponde il quaternionione di matrice  $\begin{pmatrix} z & \bar{w} \\ -w & \bar{z} \end{pmatrix}$ .

Introduciamo le matrici

$$(8.5.3) \quad \mathbf{j}_n = \begin{pmatrix} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \end{pmatrix}.$$

Si verifica

LEMMA VIII.5.3. Sia  $Y \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché  $Y = \hat{X}$  per qualche  $X \in \mathbb{H}^{m \times n}$  è che

$$(8.5.4) \quad Y\mathbf{j}_n = \mathbf{j}_m\bar{Y}.$$

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo una matrice  $X \in \mathbb{H}^{m \times n}$  nella forma  $X = A + \mathbf{j} \cdot B$  con  $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Se  $v, w \in \mathbb{C}^n$ , abbiamo

$$X \cdot (v + \mathbf{j} \cdot w) = (A + \mathbf{j} \cdot B)(v + \mathbf{j} \cdot w) = (Av - \bar{B}w) + \mathbf{j} \cdot (Bv + \bar{A}w).$$

Quindi

$$\hat{X} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}.$$

Osserviamo infine che

$$\{Y \in \mathbb{C}^{2m \times 2n} \mid Y\mathbf{j}_n = \mathbf{j}_m\bar{Y}\} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \mid A, B \in \mathbb{C}^{m \times n} \right\}.$$

Questo completa la dimostrazione.  $\square$

DEFINIZIONE VIII.5.4. Una matrice  $Y \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$  si dice di tipo quaternionico se soddisfa (8.5.4).

Vale il

- LEMMA VIII.5.5. (1) Una matrice  $Y \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$  è di tipo quaternionico se e soltanto se lo sono la sua coniugata, la sua aggiunta, la sua trasposta.  
 (2) Se  $Y \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$  e  $Z \in \mathbb{C}^{2n \times 2k}$  sono di tipo quaternionico, anche  $YZ \in \mathbb{C}^{2m \times 2k}$  è di tipo quaternionico.  
 (3) Sia  $a \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$  una matrice invertibile. Allora  $a$  è di tipo quaternionico se e soltanto se lo è  $a^{-1}$ .

DIMOSTRAZIONE. Il punto (1) segue dal fatto che le  $\mathbf{J}_k$  (con  $k$  intero positivo) sono delle antiinvoluzioni ( $\mathbf{J}_k^2 = -\text{Id}_{2k}$ ) reali ( $\bar{\mathbf{J}}_k = \mathbf{J}_k$ ) antisimmetriche ( $\mathbf{J}_k^t = -\mathbf{J}_k$ ). La verifica di (2) e (3) è anch'essa immediata.  $\square$

In particolare gli endomorfismi di tipo quaternionico formano una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C})$  e quelli invertibili un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ .

DEFINIZIONE VIII.5.6. Indichiamo con  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$  il gruppo delle matrici di  $\mathbb{H}^{n \times n}$  per cui la corrispondente matrice complessa  $\hat{A} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$  è invertibile.

Indichiamo con  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{H})$  l'algebra di Lie delle matrici di  $\mathbb{H}^{n \times n}$ .

Indichiamo con  $\mathbf{U}^*(2n)$  il gruppo di matrici complesse corrispondente:

$$(8.5.5) \quad \mathbf{U}^*(2n) = \{a \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \mid a\mathbf{j}_n = \mathbf{j}_n\bar{a}\}$$

e con

$$(8.5.6) \quad \mathfrak{u}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C}) \mid X\mathbf{j}_n = \mathbf{j}_n\bar{X}\}$$

la sua algebra di Lie. Indichiamo con  $\mathbf{SU}^*(2n)$  il sottogruppo di  $\mathbf{U}^*(2n)$  delle matrici con determinante 1:

$$(8.5.7) \quad \mathbf{SU}^*(2n) = \mathbf{U}^*(2n) \cap \mathbf{SL}_{2n}(\mathbb{C})$$

e con

$$(8.5.8) \quad \mathfrak{su}^*(2n) = \mathfrak{u}^*(2n) \cap \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C})$$

la sua algebra di Lie.

**LEMMA VIII.5.7.** *Per ogni  $v \in \mathbb{C}^{2n} \setminus \{0\}$  i vettori  $v$  e  $j_n \bar{v}$  sono linearmente indipendenti.*

**DIMOSTRAZIONE.** È conseguenza del fatto che la  $\mathbb{C}^{2n} \ni v \rightarrow j_n \bar{v}$  è un'antiinvoluzione anti- $\mathbb{C}$ -lineare di  $\mathbb{C}^{2n}$ .  $\square$

**LEMMA VIII.5.8.** *Sia  $X \in \mathfrak{u}^*(2n)$ . Allora*

- (1) *Se  $\lambda$  è un autovalore di  $X$  con autovettore  $\lambda$ , allora  $\bar{\lambda}$  è autovalore di  $X$  con autovettore  $j_n \bar{v}$ ;*
- (2) *possiamo trovare  $a \in \mathbf{SU}^*(2n)$  tale che*

$$(8.5.9) \quad aXa^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda & * \\ & \bar{\Lambda} \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

*sia in forma triangolare.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $v \in \mathbb{C}^{2n}$  un autovettore corrispondente ad un autovalore  $\lambda$  di  $X \in \mathfrak{u}^*(2n)$ . Allora

$$X(j_n \bar{v}) = j_n \bar{X} \bar{v} = j_n \bar{\lambda} \bar{v} = \bar{\lambda} (j_n \bar{v}).$$

Questo dimostra (1).

La (2) si ottiene dimostrando per ricorrenza che possiamo trovare vettori  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^{2n}$  e numeri complessi  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tali che  $v_1, j_n \bar{v}_1, \dots, v_n, j_n \bar{v}_n$  sia una base di  $\mathbb{C}^{2n}$  con  $Xv_1 = \lambda_1 v_1$  ed  $Xv_i - \lambda_i v_i \in \langle v_1, j_n \bar{v}_1, \dots, v_{i-1}, j_n \bar{v}_{i-1} \rangle$  se  $1 < i \leq n$ . Ciò si ottiene a partire da (1), considerando, per  $i > 1$  l'elemento  $X_i \in \mathfrak{u}^*(2n - 2i)$  definito da  $X$  su  $\mathbb{C}^{2n-2i} \simeq \mathbb{C}^{2n} / \langle v_1, j_n \bar{v}_1, \dots, v_{i-1}, j_n \bar{v}_{i-1} \rangle$ .  $\square$

Otteniamo allora

**PROPOSIZIONE VIII.5.9.** *Se  $X \in \mathfrak{u}^*(2n)$ , allora  $\text{tr}(X) \in \mathbb{R}$  e  $\det(X) \geq 0$ .*

**DEFINIZIONE VIII.5.10.** Definiamo i seguenti gruppi lineari ed algebre di Lie reali:

$\mathbf{SL}_n(\mathbb{H}) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{H}) \mid \hat{a} \in \mathbf{SL}_{2n}(\mathbb{C})\}$  (gruppo lineare speciale quaternionico),

$\mathbf{Sp}_n = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{H}) \mid \hat{a} \in \mathbf{U}(2n)\}$  (gruppo simplettico compatto),

$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{H}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{H}) \mid \text{tr}(\hat{X}) = 0\}$  (matrici quaternioniche a traccia nulla),

$\mathfrak{sp}_n = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{H}) \cap \mathfrak{su}_{2n}(\mathbb{C})$  (matrici anti-Hermitiane quaternioniche).

Si verifica che

PROPOSIZIONE VIII.5.11.

$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{H})$  è l'algebra di Lie di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$ ,

$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{H})$  è l'algebra di Lie di  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{H})$ ,

$\mathfrak{sp}_n$  è l'algebra di Lie di  $\mathbf{Sp}_n$ .  $\square$

### VIII.6. Il rivestimento $\mathbf{SL}_2(\mathbb{H}) \mapsto \mathbf{SO}^+(1, 5)$

Sia  $\mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$  lo spazio delle matrici Hermitiane  $2 \times 2$  a coefficienti quaternioni. È

$$\mathfrak{p}_2(\mathbb{H}) = \left\{ X = \begin{pmatrix} \lambda_X & q_X \\ \bar{q}_X & \mu_X \end{pmatrix} \mid \lambda_X, \mu_X \in \mathbb{R}, q_X \in \mathbb{H} \right\} \simeq \mathbb{R}^6.$$

Data una matrice  $X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$ , il suo *determinante quaternionico*

$$\det_{\mathbb{H}}(X) = \lambda_X \mu_X - q_X \bar{q}_X \in \mathbb{R}$$

definisce una forma quadratica reale di segnatura  $(1, 5)$  su  $\mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$ . Indichiamo con  $\mathbf{SO}(1, 5)$  il gruppo delle trasformazioni lineari di  $\mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$  che preservano il determinante quaternionico e con  $\mathbf{SO}^+(1, 5)$  la sua componente connessa dell'identità.

PROPOSIZIONE VIII.6.1. Ogni  $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$  definisce un'applicazione lineare

$$(8.6.1) \quad T_a : \mathfrak{p}_2(\mathbb{H}) \ni X \rightarrow aXa^* \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$$

che preserva il determinante quaternionico ed appartiene ad  $\mathbf{SO}^+(1, 5)$ .

L'applicazione

$$(8.6.2) \quad \mathbf{SL}_2(\mathbb{H}) \ni a \rightarrow T_a \in \mathbf{SO}^+(1, 5)$$

è un epimorfismo con nucleo  $\{\pm I\}$  ed un rivestimento a due fogli differenziabile.

Poiché  $\mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$  è semplicemente connesso, la (8.6.2) è il rivestimento universale di  $\mathbf{SO}^+(1, 5)$ .

DIMOSTRAZIONE. Per ogni  $X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{H})$ , indichiamo con  $\hat{X}$  la corrispondente matrice di  $\mathfrak{gl}_4(\mathbb{C})$  ottenuta sostituendo a ciascun coefficiente quaternione la matrice complessa  $2 \times 2$  che lo rappresenta. La corrispondenza  $X \leftrightarrow \hat{X}$  è un isomorfismo dei corrispondenti anelli associativi. Abbiamo inoltre

$$\det_{\mathbb{C}}(X) = \det(\hat{X}) = \det_{\mathbb{H}}^2(X), \quad \forall X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H}).$$

Se  $a, X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{H})$ , abbiamo

$$(8.6.3) \quad \widehat{aXa^*} = \hat{a}\hat{X}\hat{a}^*.$$

Poiché  $\hat{a} \in \mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$  se  $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$ , otteniamo allora che

$$\det_{\mathbb{C}}(aXa^*) = \det_{\mathbb{C}}(X), \quad \forall X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H}), \quad \forall a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H}).$$

Per verificare che

$$(*) \quad \det_{\mathbb{H}}(aXa^*) = \det_{\mathbb{H}}(X), \quad \forall X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H}), \quad \forall a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H}),$$

osserviamo in primo luogo che dall'identità precedente segue che i due membri di quest'uguaglianza sono o uguali od opposti. Sull'aperto delle coppie  $(a, X)$  con



$a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$  ed  $X$  definita positiva, deve valere l'uguaglianza perché vale per  $X = \text{Id}$  e le matrici definite positive di  $\mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$  formano un aperto convesso su cui  $\det_{\mathbb{H}}$  è sempre positivo. Poiché  $(*)$  è algebrica ed è verificata su un aperto, è valida per tutte le coppie  $(a, X) \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H}) \times \mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$ .

Questo dimostra che  $T_a \in \mathbf{O}(1, 5)$  se  $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$ . Poiché  $\mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$  è connesso e  $a \mapsto T_a$  continua, le  $T_a$  appartengono ad  $\mathbf{SO}^+(1, 5)$ .

Per dimostrare la surgettività, osserviamo che una  $X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$  si può diagonalizzare utilizzando una matrice di  $\mathbf{Sp}(2)$ . Esiste cioè una  $a_1 \in \mathbf{Sp}(2) \subset \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$  tale che

$$a_1 X a_1^* = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$$

con  $\lambda, \mu$  autovalori reali. A questo punto si dimostra che, se  $\phi \in \mathbf{SO}^+(1, 5)$ , fissata la base

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} & i \\ -i & \end{pmatrix}, \sigma_4 = \begin{pmatrix} & j \\ -j & \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} & k \\ -k & \end{pmatrix},$$

e posto  $\sigma'_i = \phi(\sigma_i)$ , è possibile trovare  $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$  tale che  $T_a(\sigma'_i) = \sigma_i$  per  $i = 0, \dots, 5$ . Allora  $\phi = T_{a^{-1}}$  mostra che  $a \mapsto T_a$  è surgettiva. Si verifica poi facilmente che il nucleo di  $T$  è  $\{\pm \text{Id}\}$ .  $\square$

### VIII.7. La rappresentazione aggiunta e i gruppi $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ , $\mathbf{Sp}(1, \mathbb{C})$ , $\mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$ , $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ , $\mathbf{SO}(1, 2)$

Sia  $e_1, e_2$  la base canonica di  $\mathbb{C}^2$ . Definiamo una forma alternata non degenera su  $\mathbb{C}^2$  ponendo

$$(8.7.1) \quad v \wedge w = \omega(v, w) \cdot e_1 \wedge e_2, \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^2.$$

Il gruppo  $\mathbf{Sp}(1, \mathbb{C})$  consiste delle trasformazioni lineari di  $\mathbb{C}^2$  che lasciano invariata la forma (8.7.1) e dunque coincide con  $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ .

**Rappresentazione aggiunta di  $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ .** Un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  su  $\mathbb{k}$  è *riduttiva* se ammette una rappresentazione lineare<sup>4</sup> fedele<sup>5</sup>  $\lambda : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$  rispetto alla quale la relativa forma invariante

$$(8.7.2) \quad \kappa(X, Y) = \text{tr}(\lambda(X)\lambda(Y))$$

è non degenera. L'*invarianza* significa che

$$\kappa([X, Y], Z) = -\kappa(Y, [X, Y]), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g},$$

cioè che le  $\text{ad}(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  sono trasformazioni *antisimmetriche* rispetto a  $\kappa$ . Se  $\mathfrak{g}$  è l'algebra di Lie di un gruppo  $\mathbf{G}$ , allora, attraverso la rappresentazione aggiunta,  $\mathbf{G}$  agisce su  $\mathfrak{g}$  come un gruppo di trasformazioni  $\kappa$ -ortogonali. In generale, l'immagine di  $\mathbf{G}$  è un sottogruppo proprio del gruppo ortogonale.

Consideriamo qui un caso interessante in cui i due gruppi hanno la stessa dimensione.

<sup>4</sup>Ciò significa che  $\lambda([X, Y]) = \lambda(X) \circ \lambda(Y) - \lambda(Y) \circ \lambda(X)$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .

<sup>5</sup>Ciò è iniettiva.

La rappresentazione aggiunta di  $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$  su  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  è surgettiva sulle isometrie di  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  rispetto alla forma di Killing.

Consideriamo, sullo spazio  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$  delle matrici complesse  $2 \times 2$  la forma bilineare simmetrica

$$(8.7.3) \quad \text{tr}(AB) = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}b_{ji}, \quad \forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Il sottospazio  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  delle matrici di  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$  con traccia nulla ha dimensione tre. Una base di  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  consiste delle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed in tale base la matrice associata alla restrizione  $\kappa$  di (8.7.3) ad  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché  $\kappa$  è simmetrica non degenera, le trasformazioni lineari di  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  che la lasciano invariante formano un gruppo che si può identificare al gruppo ortogonale complesso  $\mathbf{O}(3, \mathbb{C})$ .

Per ogni  $a \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ , l'applicazione<sup>6</sup>

$$\text{Ad}(a) : \mathbb{C}^{2 \times 2} \ni X \rightarrow aXa^{-1} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

è un isomorfismo dell'anello degli endomorfismi lineari di  $\mathbb{C}^2$  e preserva le tracce. Trasforma quindi  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  in sé e preserva la forma  $\kappa$ .

Abbiamo

PROPOSIZIONE VIII.7.1. *L'applicazione*

$$(8.7.4) \quad \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \ni a \longrightarrow \text{Ad}(a) \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$$

è un epimorfismo di gruppi con nucleo  $\{\pm I\}$ .

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo, per ogni  $a, b, c \in \mathbb{C}$ ,

$$\kappa \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = 2(a^2 + bc) = -2 \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Quindi una trasformazione  $\mathbb{C}$ -lineare  $T$  di  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  che preservi la forma  $\kappa$  preserva sia la traccia che il determinante delle matrici di  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  e quindi i loro autovalori. A meno di comporre la  $T$  con una opportuna  $\text{Ad}(a)$ , con  $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ , possiamo quindi supporre che  $T$  lasci fissa la matrice  $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  e quindi il suo  $\kappa$ -ortogonale

$$H = \Omega^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

<sup>6</sup>La corrispondenza che associa ad ogni  $a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  la trasformazione lineare  $\text{Ad}(a) \in \mathbf{GL}_{n \times n}(\mathbb{C})$  definita da  $\text{Ad}(a)(X) = aXa^{-1}$  per  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$  si dice la *rappresentazione aggiunta* di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ . Il nucleo della rappresentazione aggiunta è costituito dai multipli dell'identità in  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  e il luogo dei punti fissi di  $\text{Ad}$  dai multipli dell'identità in  $\mathbb{C}^{n \times n}$ .

Inoltre, poiché  $H$  è un piano iperbolico, la  $\tau$  o lascia invarianti o scambia tra loro le sue due rette isotrope

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Se  $T \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$  allora lascia invarianti ciascuna delle due rette isotrope ed è quindi della forma

$$T \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \mu b & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Da

$$2ab = \kappa \left( \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \right) = \kappa \left( \begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \mu b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \lambda b & 0 \end{pmatrix} \right) = 2\lambda\mu ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

segue che  $0 \neq \mu = \lambda^{-1}$ . Se  $\eta$  è un numero complesso con  $\eta^2 = \lambda$ , abbiamo allora

$$T = \text{Ad} \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Questo dimostra che la (8.7.4) è un omomorfismo surgettivo e, considerando il caso in cui  $\lambda = \mu = 1$ , che il suo nucleo è  $\{\pm I\}$ .  $\square$

Restringendoci alle matrici a coefficienti reali, otteniamo un risultato analogo a quello del §VIII.2.

**PROPOSIZIONE VIII.7.2.** *L'applicazione*

$$(8.7.5) \quad \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \ni a \longrightarrow \text{Ad}(a) \in \mathbf{SO}^+(1, 2)$$

*definisce un omomorfismo surgettivo e un rivestimento differenziabile a due fogli sulla componente connessa  $\mathbf{SO}^+(1, 2)$  dell'identità di  $\mathbf{SO}(1, 2)$ , con nucleo  $\{\pm I\}$ .*

$\square$

**OSSERVAZIONE VIII.7.3.** Sia  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  una matrice reale simmetrica di segnatura  $(1, 2)$ . Allora  $\mathbf{SO}(1, 2) \simeq \mathbf{SO}_B(\mathbb{R})$ . Gli elementi di  $\mathbf{SO}_B(\mathbb{R})$  trasformano in sé il cono  $C = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid xBx^\dagger > 0\}$ . Esso è formato da due componenti connesse, che possiamo indicare con  $C_+$  e  $C_-$ . La componente connessa dell'identità di  $\mathbf{SO}_B(\mathbb{R})$  consiste delle trasformazioni  $x$  per cui  $x(C_+) = C_+$  ed  $x(C_-) = C_-$ .

Le due componenti connesse si possono evidenziare anche utilizzando la decomposizione di Cartan (Teorema IX.9.5). Infatti, posto  $B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -I_2 & \end{pmatrix}$ , il sottogruppo  $\mathbf{SO}(1, 2) \cap \mathbf{U}(3)$  di  $\mathbf{SO}(1, 2)$ , è un suo sottogruppo compatto massimale, e quindi un suo retratto di deformazione, e consiste delle matrici

$$\begin{pmatrix} \epsilon & \\ & a \end{pmatrix} \quad \text{con } \epsilon = \pm 1, a \in \mathbf{O}(2) \quad \text{e} \quad \det a = \epsilon.$$

### VIII.8. La quadrica di $\mathbb{C}P^5$ ed alcuni omomorfismi di gruppi

Consideriamo lo spazio vettoriale complesso  $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ , di dimensione 6, dei due-vettori complessi alternati. Sia  $e_1, e_2, e_3, e_4$  la base canonica di  $\mathbb{C}^4$ . Definiamo una forma bilineare e simmetrica su  $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$  ponendo

$$(8.8.1) \quad \alpha \wedge \beta = \langle \alpha | \beta \rangle \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4).$$

Nella base canonica

$$(8.8.2) \quad e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_4 \wedge e_2, e_3 \wedge e_4$$

di  $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$  la matrice associata alla forma  $\mathfrak{b} = \langle \cdot | \cdot \rangle$  è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare,  $\mathfrak{b}$  è non degenere.

La utilizzeremo per rappresentare i due-piani per l'origine di  $\mathbb{C}^4$  come punti della quadrica proiettiva complessa. Ricordiamo che i tensori di  $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$  hanno rango pari. L'elemento nullo ha rango 0, gli elementi di rango due sono tutti e soli quelli che si possono scrivere nella forma  $v_1 \wedge v_2$  con  $v_1$  e  $v_2$  linearmente indipendenti, mentre quelli di rango sono della forma  $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$  per una base  $v_1, v_2, v_3, v_4$  di  $\mathbb{C}^4$ .

LEMMA VIII.8.1. *Sia  $0 \neq \alpha \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ . Allora*

- (1)  $\alpha$  è isotropo, cioè  $\langle \alpha | \alpha \rangle = 0$ , se e soltanto se  $\alpha$  ha rango due;
- (2)  $\alpha$  è anisotropo, cioè  $\langle \alpha | \alpha \rangle \neq 0$ , se e soltanto se  $\alpha$  ha rango quattro;
- (3) se  $\alpha = v_1 \wedge v_2$  e  $\beta = w_1 \wedge w_2$  sono due elementi di rango due linearmente indipendenti in  $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ , allora  $\langle \alpha | \beta \rangle = 0$  se e soltanto se i piani  $\langle v_1, v_2 \rangle$  e  $\langle w_1, w_2 \rangle$  hanno una retta in comune.  $\square$

Un due-piano di  $\mathbb{C}^4$  si identifica, a meno di un fattore complesso, ad un elemento di rango due di  $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ . Quindi, come conseguenza del Lemma VIII.8.1, possiamo enunciare il

COROLLARIO VIII.8.2. *La Grassmanniana  $\mathbb{G}_{4,2}(\mathbb{C})$  dei due-piani di  $\mathbb{C}^4$  si può identificare alla quadrica proiettiva complessa non degenere di  $\mathbb{C}P^5$ .  $\square$*

La grassmanniana  $\mathbb{G}_{4,2}(\mathbb{C})$  si può considerare in questo modo come una sotto-varietà analitica compatta, di dimensione reale 8, di  $\mathbb{C}P^5$ .

Le trasformazioni  $\mathbb{C}$ -lineari di  $\Lambda^2(\mathbb{C}^4) \simeq \mathbb{C}^6$  che preservano la  $\mathfrak{b}$  formano il gruppo ortogonale complesso  $\mathbf{O}(6, \mathbb{C})$ . I suoi elementi hanno determinante  $\pm 1$ . Quelli di determinante 1 costituiscono il sottogruppo normale  $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$ , di indice due in  $\mathbf{O}(6, \mathbb{C})$ .

Considereremo inoltre il gruppo  $\mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$  delle trasformazioni *conformi* di  $\mathbb{C}^6$ , che trasformano  $\mathfrak{b}$  in un suo multiplo per uno scalare diverso da zero. I suoi elementi sono multipli complessi di quelli di  $\mathbf{O}(6, \mathbb{C})$  ed anch'esso, come  $\mathbf{O}(6, \mathbb{C})$ , ha

due componenti connesse: la componente dell'identità  $\mathbf{CSO}(6, \mathbb{C})$  è il sottogruppo dei multipli complessi non nulli delle trasformazioni di  $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$ .

PROPOSIZIONE VIII.8.3. *Per ogni  $a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$ , l'applicazione  $\mathbb{C}$ -lineare*

$$(8.8.3) \quad \lambda(a) : \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{C}^4), \text{ t.c. } \lambda(a)(v_1 \wedge v_2) = a(v_1) \wedge a(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}^4$$

soddisfa

$$(8.8.4) \quad \langle \lambda(a)(\alpha) \mid \lambda(a)(\beta) \rangle = \det(a) \langle \alpha \mid \beta \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$$

ed è quindi conforme rispetto a  $\mathfrak{b}$ .

La  $\lambda$  definisce un epimorfismo di gruppi di Lie

$$(8.8.5) \quad \lambda : \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{CSO}(6, \mathbb{C}),$$

con nucleo  $\{\pm I\}$ . Per restrizione, dà un epimorfismo, con nucleo  $\{\pm I\}$ ,

$$(8.8.6) \quad \mathbf{SL}_4(\mathbb{C}) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{SO}(6, \mathbb{C}).$$

DIMOSTRAZIONE. La (8.8.4) ed il fatto che  $\lambda : \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$  sia un omomorfismo di gruppi seguono dalle proprietà del determinante. Poiché  $\mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$  è connesso e  $\lambda$  continua, l'immagine di (8.8.5) è contenuta in  $\mathbf{CSO}(6, \mathbb{C})$ . Dimostriamo ora che tale omomorfismo è surgettivo.

Sia  $\tau \in \mathbf{CSO}(6, \mathbb{C})$ . Componendo  $\tau$  con l'immagine  $\lambda(\delta)$  di una matrice diagonale  $\delta$  di  $\mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$ , possiamo ricondurci al caso in cui  $\tau \in \mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$ , cioè a dimostrare la surgettività di (8.8.6).

Le immagini mediante  $\tau \in \mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$  di  $e_1 \wedge e_2$  ed  $e_3 \wedge e_4$  sono due bivettori isotropi di  $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ . È quindi  $\tau(e_1 \wedge e_2) = v_1 \wedge v_2$  e  $\tau(e_3 \wedge e_4) = v_3 \wedge v_4$  per una base  $v_1, v_2, v_3, v_4$  di  $\mathbb{C}^4$  con  $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_4 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ . Osserviamo ancora che i bivettori  $\tau(e_1 \wedge e_3)$  e  $\tau(e_4 \wedge e_2)$  definiscono piani che hanno intersezioni di dimensione uno con ciascuno dei piani dei bivettori  $v_1 \wedge v_2$  e  $v_3 \wedge v_4$ . Possiamo allora scegliere i  $v_i$  in modo tale che

$$v_1 \wedge \tau(e_1 \wedge e_3) = 0, \quad v_2 \wedge \tau(e_4 \wedge e_2) = 0, \quad v_3 \wedge \tau(e_1 \wedge e_3) = 0, \quad v_4 \wedge \tau(e_4 \wedge e_2) = 0.$$

Sia  $a \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4)$  l'endomorfismo lineare che trasforma  $e_i$  in  $v_i$ , per  $i = 1, 2, 3, 4$ . Dico che  $a \in \mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$ . Infatti Poiché

$$\begin{aligned} \det(a)e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 &= a(e_1) \wedge a(e_2) \wedge a(e_3) \wedge a(e_4) = (v_1 \wedge v_2) \wedge (v_3 \wedge v_4) \\ &= \langle \tau(e_1 \wedge e_2) \mid \tau(e_3 \wedge e_4) \rangle e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \end{aligned}$$

e quindi  $\det(a) = 1$ . La  $\tau' = \lambda(a^{-1}) \circ \tau \in \mathbf{SO}(4, \mathbb{C})$  ha allora la proprietà che

$$\tau'(e_1 \wedge e_2) = e_1 \wedge e_2, \quad \tau'(e_1 \wedge e_3) = e_1 \wedge e_3, \quad \tau'(e_4 \wedge e_2) = e_4 \wedge e_2, \quad \tau'(e_3 \wedge e_4) = e_3 \wedge e_4.$$

La  $\tau'$  trasforma allora in sé il piano iperbolico  $\langle e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \rangle$ , ortogonale al sottospazio anisotropo di dimensione quattro  $\langle e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_4 \wedge e_2, e_3 \wedge e_4 \rangle$ . Poiché la  $\tau'$  è un elemento del gruppo speciale ortogonale, è una *rotazione* del piano iperbolico  $\langle e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \rangle$ . Ha quindi i vettori isotropi come autovettori ed è perciò della forma

$$\tau'(e_1 \wedge e_4) = k e_1 \wedge e_4, \quad \tau'(e_2 \wedge e_3) = k^{-1} e_2 \wedge e_3,$$

per un numero complesso  $k \neq 0$ . Indichiamo con  $\sqrt{k}$  una delle due radici complesse di  $k$ . Allora, con

$$b = \text{diag} \left( \sqrt{k}, \frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{\sqrt{k}}, \sqrt{k} \right) \in \mathbf{SL}_4(\mathbb{C}),$$

abbiamo  $\lambda(b) \circ \tau' = \text{Id}$ . Quindi  $\tau = \lambda(a) \circ \lambda(b^{-1}) = \lambda(ab^{-1})$  e questo completa la dimostrazione della surgettività di (8.8.5) e (8.8.6).

Calcoliamo infine il nucleo della (8.8.5). Sia  $a \in \ker \lambda$ . Poiché la  $\lambda(a)$  trasforma in sé i bivettori  $e_i \wedge e_j$  per  $1 \leq i < j \leq 4$ , ne ricaviamo facilmente che  $e_1, e_2, e_3, e_4$  sono autovettori di  $a$ . Sia  $a(e_i) = k_i e_i$ . Abbiamo allora

$$k_i k_j = 1, \quad \forall 1 \leq i, j \leq 4.$$

Quindi i  $k_i$  sono tutti uguali tra loro, ed uguali o a  $+1$ , cioè  $a = \text{Id}$ , o a  $-1$ , cioè  $a = -\text{Id}$ . La dimostrazione è completa.  $\square$

**OSSERVAZIONE VIII.8.4.**  $\mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$  e  $\mathbf{CSO}(6, \mathbb{C})$  sono varietà analitiche connesse di dimensione reale 32 e la (8.8.5) un rivestimento differenziabile a due fogli.

$\mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$  ed  $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$  sono varietà analitiche connesse di dimensione reale 30 e la (8.8.6) un rivestimento differenziabile a due fogli. Poiché  $\mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$  è semplicemente connessa, è il rivestimento universale di  $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$ , che ha gruppo fondamentale  $\mathbb{Z}_2$ .

La restrizione di  $\mathfrak{h}$  al sottospazio reale  $\Lambda^2(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{R}^6$  è non degenere di segnatura (3, 3). Il gruppo delle trasformazioni  $\mathbb{R}$ -lineari che la lasciano invariante è quindi il gruppo ortogonale reale di segnatura (3, 3) ed otteniamo perciò

**PROPOSIZIONE VIII.8.5.** *L'applicazione*

$$(8.8.7) \quad \mathbf{SL}_4(\mathbb{R}) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{SO}(3, 3)$$

è un epimorfismo di  $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$  sulla componente connessa  $\mathbf{SO}^+(3, 3)$  dell'identità di  $\mathbf{SO}(3, 3)$ , con nucleo  $\{\pm I\}$  ed un suo rivestimento differenziabile a due fogli.  $\square$

**OSSERVAZIONE VIII.8.6.** Il gruppo  $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$  è connesso, ma non semplicemente connesso (per la decomposizione di Cartan,  $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$  è diffeomorfo al prodotto topologico di  $\mathbb{R}^9$  ed  $\mathbf{SO}(4)$ , ed ha quindi gruppo fondamentale  $\mathbb{Z}_2$ ). Il gruppo  $\mathbf{SO}(3, 3)$  ha due componenti connesse.  $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$  ed  $\mathbf{SO}(3, 3)$  sono varietà analitiche di dimensione reale 15.

Introduciamo su  $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$  un'involuzione anti- $\mathbb{C}$ -lineare  $\star$ , definendola, sugli elementi della base (8.8.2), mediante

$$\begin{aligned} \star e_1 \wedge e_2 &= e_3 \wedge e_4, & \star e_1 \wedge e_3 &= e_4 \wedge e_2, & \star e_1 \wedge e_4 &= e_2 \wedge e_3, \\ \star e_2 \wedge e_3 &= e_1 \wedge e_4, & \star e_4 \wedge e_2 &= e_1 \wedge e_3, & \star e_3 \wedge e_4 &= e_1 \wedge e_2. \end{aligned}$$

Sugli elementi della base canonica la matrice associata alla forma Hermitiana simmetrica

$$(8.8.8) \quad h(\alpha, \beta) = (\alpha | \beta) = \langle \alpha | \star \beta \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$$

è la matrice identità.

**LEMMA VIII.8.7.** *Il gruppo delle trasformazioni  $\mathbb{C}$ -lineari di  $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$  che preservano sia la forma simmetrica  $\mathfrak{b}$  che la forma Hermitiana simmetrica  $\mathfrak{h}$  è isomorfo al gruppo ortogonale  $\mathbf{O}(6)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Il sottospazio

$$V = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \mid \star\alpha = \alpha\}$$

è una forma reale<sup>7</sup> di  $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ . Le restrizioni a  $V$  di  $\mathfrak{b}$  ed  $\mathfrak{h}$  coincidono e definiscono un prodotto scalare su  $V$ . Se  $\tau$  è una trasformazione  $\mathbb{C}$ -lineare di  $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$  che preserva sia  $\mathfrak{b}$  che  $\mathfrak{h}$ , abbiamo

$$\langle \tau(\alpha) \mid \tau(\star\beta) \rangle = \langle \alpha \mid \star\beta \rangle = (\alpha \mid \beta) = (\tau(\alpha) \mid \tau(\beta)) = \langle \tau(\alpha) \mid \star\tau(\beta) \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4).$$

Questo implica che  $\star\tau = \tau\star$  e quindi che  $\tau(V) = V$ , e la restrizione di  $\tau$  a  $V$  definisce un elemento di  $\mathbf{O}(6)$ . Viceversa, una trasformazione ortogonale su  $V$  si estende in modo unico ad una trasformazione  $\mathbb{C}$ -lineare su  $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ , che preserva sia  $\mathfrak{b}$  che  $\mathfrak{h}$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE VIII.8.8.** *Per restrizione, la trasformazione  $\lambda$  in (8.8.5), definisce epimorfismi di gruppi di Lie*

$$(8.8.9) \quad \{a \in \mathbf{U}(4) \mid \det(a) = \pm 1\} \xrightarrow{\lambda} \mathbf{O}(6),$$

$$(8.8.10) \quad \mathbf{SU}(4) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{SO}(6),$$

con nucleo  $\{\pm I\}$  e rivestimenti differenziabili a due fogli.

**DIMOSTRAZIONE.** È sufficiente verificare che, se  $a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$  e  $\lambda(a)$  preserva sia  $\mathfrak{b}$  che  $\mathfrak{h}$ , allora  $a \in \mathbf{U}(4)$  e ha determinante  $\pm 1$ . Il fatto che  $\det(a) = \pm 1$  segue dalla (8.8.4). Inoltre, poiché  $\lambda(a)$  commuta con l'operatore  $\star$ , la  $a$  trasforma due-piani ortogonali in due-piani ortogonali di  $\mathbb{C}^4$ . Da questo ricaviamo che è una trasformazione  $\mathbb{C}$ -lineare di  $\mathbb{C}^4$  che preserva l'ortogonalità e quindi conforme per il prodotto scalare Hermitiano di  $\mathbb{C}^4$ . Avendo determinante  $\pm 1$  è allora unitaria.  $\square$

**OSSERVAZIONE VIII.8.9.**  $\mathbf{SU}(4)$  ed  $\mathbf{SO}(6)$  sono varietà differenziabili analitiche reali connesse e compatte di dimensione 15. Il gruppo  $\mathbf{SU}(4)$  è semplicemente connesso e la (8.8.10) il rivestimento universale, a due fogli, di  $\mathbf{SO}(6)$ .

Fissiamo ora una forma alternata non degenere  $\omega \in \Lambda^2([\mathbb{C}^4]^*)$ . Possiamo ad esempio scegliere la forma a coefficienti reali

$$(8.8.11) \quad \omega = dx^1 \wedge dx^3 + dx^2 \wedge dx^4,$$

dove abbiamo indicato con  $dx^1, dx^2, dx^3, dx^4$  la duale della base canonica  $e_1, e_2, e_3, e_4$  di  $\mathbb{C}^4$ .

Ricordiamo che il gruppo simplettico complesso  $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$  si può identificare al gruppo delle trasformazioni  $\mathbb{C}$ -lineari di  $\mathbb{C}^4$  che preservano  $\omega$ :

$$\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \mid \omega(a(v_1), a(v_2)) = \omega(v_1, v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}^4\}.$$

<sup>7</sup>Una forma reale  $V$  di uno spazio complesso  $W$  è un suo sottospazio vettoriale reale tale che  $V \cap iV = \{0\}$  e  $W = V \oplus iV$ .

La  $\omega$  definisce una forma lineare su  $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ . In particolare,

$$(8.8.12) \quad W = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \mid \omega(\alpha) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale complesso, di dimensione cinque, di  $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ , e

$$(8.8.13) \quad e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4$$

una sua base. La restrizione di  $\mathfrak{b}$  a  $W$  ha in questa base matrice associata

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ed è quindi non degenere. Ciò segue anche dal fatto che  $W$  è l'ortogonale, rispetto a  $\mathfrak{b}$ , di  $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$ , che è anisotropo (vedi il Lemma VIII.8.1).

Le trasformazioni  $\mathbb{C}$ -lineari di  $W$  che preservano  $\mathfrak{b}$  formano quindi il gruppo ortogonale complesso  $\mathbf{O}(5, \mathbb{C})$ . Ogni trasformazione  $\tau \in \mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$  si estende in modo unico ad una trasformazione  $\tilde{\tau} \in \mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$ , che coincide con  $\tau$  su  $W$  e lascia fisso l'elemento  $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$ . D'altra parte, una  $a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$  definisce una  $\lambda(a)$  che fissa  $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$  se e soltanto se appartiene al sottogruppo  $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$ . Otteniamo perciò

LEMMA VIII.8.10. *L'applicazione*

$$(8.8.14) \quad \mathbf{Sp}(2, \mathbb{C}) \ni a \longrightarrow \lambda(a)|_W \in \mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$$

è un epimorfismo con nucleo  $\{\pm I\}$  ed un rivestimento differenziabile a due fogli.  $\square$

OSSERVAZIONE VIII.8.11.  $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$  e  $\mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$  sono varietà analitiche connesse di dimensione reale 20;  $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$  è semplicemente connesso e la (8.8.14) è il rivestimento universale di  $\mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$ .

La restrizione della forma bilineare simmetrica  $\mathfrak{b}$  al sottospazio reale

$$W_{\mathbb{R}} = W \cap \Lambda^2(\mathbb{R}^4) = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4) \mid \omega(\alpha) = 0\}$$

è non degenere ed ha segnatura  $(3, 2)$ . Poiché il gruppo delle trasformazioni che preservano una forma bilineare simmetrica di segnatura  $(3, 2)$  è il gruppo ortogonale  $\mathbf{O}(2, 3)$ , otteniamo

PROPOSIZIONE VIII.8.12. *La restrizione dell'applicazione  $\lambda$  in (8.8.5) definisce un omomorfismo di gruppi*

$$(8.8.15) \quad \mathbf{Sp}(2, \mathbb{R}) \ni a \longrightarrow \lambda(a)|_{W_{\mathbb{R}}} \in \mathbf{SO}(2, 3),$$

surgettivo sulla componente connessa  $\mathbf{SO}^+(2, 3)$  dell'identità di  $\mathbf{SO}(2, 3)$ , con nucleo  $\{\pm I\}$  ed un suo rivestimento differenziabile a due fogli.  $\square$

OSSERVAZIONE VIII.8.13.  $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{R})$  ed  $\mathbf{SO}(2, 3)$  sono varietà analitiche di dimensione reale 10.  $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{R})$  è connesso e semplicemente connesso,  $\mathbf{SO}(2, 3)$  consiste di due componenti connesse e la (8.8.15) si abbrevia al rivestimento universale di  $\mathbf{SO}^+(2, 3)$ .



L'involutione anti- $\mathbb{C}$ -lineare  $\star$  lascia invariante il sottospazio  $W$  e trasforma l'elemento  $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$  nel suo opposto. In particolare, gli elementi di  $W$  che sono lasciati fissi da  $\star$  formano un sottospazio vettoriale reale  $L_{\mathbb{R}}$  di dimensione cinque su cui la  $\mathfrak{h}$  definisce un prodotto scalare Euclideo. Otteniamo perciò:

PROPOSIZIONE VIII.8.14. *La restrizione dell'applicazione  $\lambda$  in (8.8.5) definisce un epimorfismo di gruppi*

$$(8.8.16) \quad \mathbf{Sp}(2) \ni a \longrightarrow \lambda(a)|_{L_{\mathbb{R}}} \in \mathbf{SO}(5),$$

con nucleo  $\{\pm I\}$  ed un rivestimento differenziabile a due fogli.  $\square$

OSSERVAZIONE VIII.8.15.  $\mathbf{Sp}(2)$  e  $\mathbf{SO}(5)$  sono varietà analitiche connesse e compatte di dimensione reale 10.  $\mathbf{Sp}(2)$  è semplicemente connessa e la (8.8.16) è il rivestimento universale, differenziabile e a due fogli, di  $\mathbf{SO}(5)$ .

In questo paragrafo abbiamo dimostrato i seguenti rivestimenti a due fogli:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{SL}_4(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{SO}(6, \mathbb{C}), & \mathbf{SL}_4(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SO}^+(3, 3), & \mathbf{SU}(4) \longrightarrow \mathbf{SO}(6), \\ \mathbf{Sp}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{SO}(5, \mathbb{C}), & \mathbf{Sp}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SO}^+(2, 3), & \mathbf{Sp}(2) \longrightarrow \mathbf{SO}(5). \end{array}$$

In ciascuna delle due righe, il primo è la *forma complessa*, il secondo la *forma split* ed il terzo la *forma compatta* dell'omomorfismo.



## Varietà di Stiefel e di Grassmann

### IX.1. Varietà di Stiefel reali

**DEFINIZIONE IX.1.1.** La *varietà di Stiefel reale*  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$  è l'insieme degli  $m$ -riferimenti ortogonali di  $\mathbb{R}^n$ . I suoi punti sono cioè le  $m$ -uple  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$  di vettori ortonormali di  $\mathbb{R}^n$ .

Identificando  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$  alla matrice  $n \times m$  con colonne  $v_1, \dots, v_m$  otteniamo un'immersione naturale di  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$  nello spazio Euclideo  $\mathbb{R}^{nm}$ . Consideriamo su  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$  la topologia di sottospazio.

La varietà di Stiefel  $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{R})$  è la sfera  $(n-1)$ -dimensionale  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ; è poi  $\mathbb{V}_{n,n-1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbf{SO}(n)$ ,  $\mathbb{V}_{n,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbf{O}(n)$ . Le varietà di Stiefel reali generalizzano quindi, allo stesso tempo, le sfere, i gruppi ortogonali ed i gruppi speciali ortogonali.

**TEOREMA IX.1.2.** La *varietà di Stiefel*  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$  è una *varietà analitica compatta di dimensione*  $\frac{m(2n-m-1)}{2}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Abbiamo già considerato i casi  $m = 1$ ,  $m = n - 1$ ,  $m = n$ . Supporremo quindi nella discussione che segue che  $1 < m \leq n - 2$ .

Poiché

$$\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}(n \times m, \mathbb{R}) \mid A^\dagger A = I_m\},$$

ed abbiamo l'inclusione naturale

$$\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) \subset \underbrace{S^{n-1} \times \dots \times S^{n-1}}_{m \text{ volte}} \subset \mathbb{R}^{nm},$$

il sottospazio  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$  di  $\mathbb{R}^{nm}$  è compatto perché chiuso e limitato.

Descriviamo ora un atlante di carte locali di  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ .

Definiamo in primo luogo una carta locale con centro in  $e = (e_1, \dots, e_m)$ , dove abbiamo indicato con  $e_1, \dots, e_n$  la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $U_e$  l'aperto formato dalle matrici  $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$  tali che

$$(9.1.1) \quad \det \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_j^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^j & \dots & v_j^j \end{pmatrix} > 0, \quad \text{per } 1 \leq j \leq m.$$

Vogliamo dimostrare che l'applicazione  $x_e : U_e \rightarrow B^{n-1} \times \dots \times B^{n-j} \times \dots \times B^{n-m}$  definita da

$$x_e(v) = (v_1^2, \dots, v_1^n; \dots; v_j^{j+1}, \dots, v_j^n; \dots; v_m^{m+1}, \dots, v_m^n).$$

è un omeomorfismo. La  $x_e$  è senz'altro ben definita, continua ed aperta. Sarà quindi sufficiente dimostrare che la  $x_e$  è bigettiva. A questo scopo dimostriamo per ricorrenza su  $k = 1, \dots, m$  che

$$(P_k) \left\{ \begin{array}{l} \forall (w_1, \dots, w_k) \in B^{n-1} \times \dots \times B^{n-k}, \exists!(u_1, \dots, u_k) \in \bar{B}^1 \times \dots \times \bar{B}^k \text{ tali che} \\ \left( \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \dots & u_k \\ w_1 & w_2 & \dots & w_k \end{array} \right) \in \mathbb{V}_{n,k} \text{ e } \det \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_j^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_i^j & \dots & v_j^j \end{pmatrix} > 0 \text{ per } 1 \leq j \leq k. \end{array} \right.$$

Per  $k = 1$  abbiamo

$$v_1^1 = \sqrt{1 - \sum_{i=2}^n |v_1^i|^2}.$$

Supponiamo ora  $k \geq 1$  e che valga la  $(P_k)$ . Abbiamo quindi già ottenuto i vettori  $v_1, \dots, v_k$  e la condizione che la diseuguaglianza in (9.1.1) valga per  $j = k$ , ci dice che  $v_1, \dots, v_k, e_{k+1}, \dots, e_n$  è una base di  $\mathbb{R}^n$ . Utilizzando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt possiamo ottenere in modo unico una base ortonormale  $a = (a_1, \dots, a_m)$  ponendo

$$\begin{cases} a_i = v_i & \text{se } 1 \leq i \leq k, \\ a_i = \lambda_i \left( e_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_j^i a_j \right) & \text{con } \lambda_i > 0, \text{ se } k < i \leq n. \end{cases}$$

Qui  $a_j^i = (e_i | a_j)$  sono le componenti  $i$ -esime del vettore  $a_j$ . I vettori  $a_i$  con  $i > k$  sono definiti per ricorrenza, in quanto la definizione di ciascuno di essi utilizza i vettori precedenti, e i loro coefficienti dipendono analiticamente dai coefficienti  $v_h^j$  per  $1 \leq h \leq k$  e  $h < j \leq n$ .

Osserviamo ora che

$$a^{-1}(v_1, \dots, v_{k+1}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \xi_1^{k+1} & \dots & \xi_k^{k+1} & \xi_{k+1}^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_k^n & \xi_{k+1}^n \end{pmatrix}$$

I coefficienti  $\xi_h^j$  di questa matrice, ad eccezione del coefficiente  $\xi_{k+1}^{k+1}$ , sono funzioni algebriche dei  $v_h^j$  per  $1 \leq h \leq k+1$  ed  $h < k \leq n$ . Se vogliamo che la matrice  $v$  soddisfi la diseuguaglianza in (9.1.1) per  $j = k+1$  occorre scegliere

$$\xi_{k+1}^{k+1} = \sqrt{1 - \sum_{j=k+2}^n |w_{k+1}^j|^2}.$$

Otteniamo allora i coefficienti di  $v_{k+1}$  moltiplicando  $a^{-1}(v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$  a sinistra per  $a$ . Questo dimostra  $(P_{k+1})$  e quindi per ricorrenza la  $(P_k)$  vale per tutti gli interi  $k$  con  $1 \leq k \leq m$ .

Otteniamo un atlante analitico reale  $\mathcal{A} = \{(U_a, x_a) \mid a \in \mathbf{O}(n)\}$  su  $\mathbb{V}_{m,n}(\mathbb{R})$  ponendo  $U_a = a \cdot U_e$  ed  $x_a(v) = x_e(a^{-1}v)$  per  $v = (v_1, \dots, v_m) \in U_a$ .

In particolare

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) = \sum_{h=1}^m (n-h) = nm - \frac{m(m+1)}{2}.$$

□

Il gruppo speciale ortogonale  $\mathbf{SO}(n)$  opera transitivamente sulle varietà di Stiefel  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$  per ogni  $1 \leq m \leq n-1$ . Lo stabilizzatore di un punto è isomorfo al gruppo  $\mathbf{SO}(n-m)$ . Quindi:

PROPOSIZIONE IX.1.3. *Sia  $1 \leq m < n$ . La varietà di Stiefel  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$  è connessa per archi ed è omeomorfa allo spazio omogeneo  $\mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-m)$ . Abbiamo la successione esatta di omotopia<sup>1</sup>*

$$(9.1.2) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{SO}(n-m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{SO}(n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(n-m)) & \longrightarrow & \cdots & \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n-m)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ & & \longrightarrow & 0. & & & \end{array}$$

Siano  $k, m, n$  interi con  $1 \leq k < m < n$ . L'applicazione

$$(9.1.3) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica  $\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{R})$ . Otteniamo quindi una successione esatta in omotopia

$$(9.1.4) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) \\ \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) \\ \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \cdots & & & \end{array}$$

Otteniamo perciò la

PROPOSIZIONE IX.1.4. *Se  $1 \leq m < n$ , la varietà di Stiefel reale  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ , è  $(n-m-1)$ -connessa e*

$$(9.1.5) \quad \pi_{n-m}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n-m \text{ è pari, o } m=1, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } n-m \text{ è dispari ed } m \geq 2. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per ricorrenza su  $m \geq 1$ . Poiché, come abbiamo osservato in precedenza,  $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{R}) = S^{n-1}$ , la tesi è vera se  $m=1$ . Supponiamo allora che  $m > 1$  e che la tesi sia vera per le varietà di Stiefel reali  $\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})$  con  $1 \leq k < m$ . Consideriamo la successione esatta (9.1.4) con  $k=m-1$ . Se  $h < n-m$ , allora  $\pi_h(\mathbb{V}_{n-m+1,1}(\mathbb{R})) = \pi_h(S^{n-m}) = 0$ , e  $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m-1}(\mathbb{R})) = 0$  per l'ipotesi induttiva. Quindi anche  $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) = 0$ .

Dimostriamo ora la (9.1.5). Sappiamo che essa vale per  $m=1$ .

<sup>1</sup>Per semplicità in questa, e nelle altre successioni esatte in questo paragrafo ometteremo di indicare il punto base.

Esaminiamo a parte il caso  $m = 2$ . Per  $m = 2$ ,  $k = 1$  ed  $h = n - 2$ , la (9.1.4) dà:

$$(9.1.6) \quad \mathbb{Z} = \pi_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\Delta_*} \mathbb{Z} = \pi_{n-2}(S^{n-2}) \longrightarrow \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n,2}) \longrightarrow 0.$$

Per calcolare l'applicazione  $\Delta_*$  in (9.1.6), consideriamo il diagramma commutativo di fibrazioni

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{SO}(n-1) & \longrightarrow & \mathbf{SO}(n) & \longrightarrow & S^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{V}_{n-1,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S^{n-1}. \end{array}$$

Otteniamo allora un diagramma commutativo

$$(9.1.7) \quad \begin{array}{ccccc} \pi_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\Delta_*} & \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n-1)) & \longrightarrow & \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n)) \\ \parallel & & \downarrow p_* & & \downarrow \\ \pi_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\Delta_*} & \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n-1,1}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{R})). \end{array}$$

Prima di procedere nella dimostrazione della proposizione, premettiamo alcuni risultati relativi al gruppo ortogonale.

LEMMA IX.1.5. Consideriamo l'applicazione  $F : S^n \times S^n \rightarrow S^n$  definita da

$$(9.1.8) \quad F : S^n \times S^n \ni (x, y) \rightarrow F(x, y) = y - 2(x|y)x \in S^n.$$

Per ogni  $x \in S^n$ , la  $S^n \ni y \rightarrow F(x, y) \in S^n$  ha grado  $(-1)$ .

Per ogni  $y \in S^n$ , la  $S^n \ni x \rightarrow F(x, y) \in S^n$  ha grado  $1 - (-1)^n$ , cioè 2 se  $n$  è dispari e 0 se  $n$  è pari.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $e_0, e_1, \dots, e_n$  la base canonica di  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Fissato  $x = e_1$ , la  $y \rightarrow F(e_1, y)$  è la sospensione della

$$S^1 \ni (x_0, x_1) \rightarrow (x_0, -x_1) \in S^1,$$

che possiamo anche scrivere, mediante l'inclusione  $S^1 \subset \mathbb{C}$ , come

$$S^1 \ni z \rightarrow \bar{z} = z^{-1} \in S^1.$$

Quindi la  $y \rightarrow F(e_1, y)$  ha grado  $(-1)$  e perciò tutte le  $y \rightarrow f_x(y) = F(x, y)$  hanno grado  $(-1)$ .

Per dimostrare che le  $x \rightarrow \psi_y(x) = F(x, y)$  hanno grado  $1 - (-1)^n$ , poiché  $S^n$  è connesso per archi, possiamo limitarci a considerare il caso speciale in cui  $y = -e_n$ . Scriviamo per semplicità  $\psi = \psi_{-e_n}$ . Consideriamo quindi l'applicazione

$$S^n \ni x = (x_n, \dots, x_1) \rightarrow \psi(x) = (2x_n x_0, \dots, 2x_n x_{n-1}, 2x_n^2 - 1) = (2x_n) \cdot x - e_n \in S^n.$$

Abbiamo  $\psi(x) = \psi(-x)$ . Quindi, se  $a : S^n \ni x \rightarrow -x \in S^n$  è l'applicazione antipodale,  $\psi = \psi \circ a$ . Poiché il grado della mappa antipodale è  $(-1)^{n+1}$ , da

$$\deg(\psi) = \deg(\psi \circ a) = \deg(\psi) \cdot (-1)^{n+1}$$

otteniamo che  $\deg(\psi) = 0$  se  $n$  è pari.

Consideriamo ora il caso in cui  $n$  sia dispari. Osserviamo che  $\psi(S^{n-1}) = \{-e_0\}$ . Possiamo quindi definire due applicazioni

$$\psi_+(x) \begin{cases} \psi(x) & \text{se } x \in S_+^n, \\ -e_0 & \text{se } x \in S_-^n, \end{cases}, \quad \psi_-(x) \begin{cases} -e_0 & \text{se } x \in S_+^n, \\ \psi(x) & \text{se } x \in S_-^n. \end{cases}$$

L'elemento definito da  $\psi$  in  $\pi_n(S^n, e_0)$  è la somma delle classi di omotopia di  $\psi_+$  e  $\psi_-$ . Poiché  $\psi_- = \psi_+ \circ a$ , abbiamo  $\deg(\psi_-) = \deg(\psi_+)$ , perché la mappa antipodale ha grado 1. Quindi  $\deg(\psi) = 2 \deg(\psi_+)$ . Osserviamo ora che  $\psi_+(x) \neq -x$  per ogni  $x \in S^n$ . Quindi

$$S^n \times I \ni (x, t) \rightarrow \Psi_+(x, t) = \frac{(1-t)\psi_+(x) + tx}{|(1-t)\psi_+(x) + tx|} \in S^n$$

è un'omotopia di  $\psi_+$  con l'identità. Ciò dimostra che  $\psi_+$  ha grado 1, e quindi  $\psi$  ha grado 2.  $\square$

La matrice della simmetria  $\sigma_x$  rispetto al vettore  $x = (x_0, \dots, x_n) \in S^n$  è la

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 - 2x_0^2 & -2x_0x_1 & \dots & -2x_0x_n \\ -2x_0x_1 & 1 - 2x_1^2 & \dots & -2x_1x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2x_0x_n & -2x_1x_n & \dots & 1 - 2x_n^2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di  $\sigma_x$  è  $(-1)$ . Definiamo  $\phi_n : S^n \rightarrow \mathbf{SO}(n+1)$  mediante

$$\phi_n : S^n \ni x \rightarrow \sigma_x \circ \sigma_{e_0}.$$

La restrizione di  $\phi_n$  alla semisfera superiore  $S_+^{n+1} = S^n \cap \{x_n \geq 0\}$  trasforma la coppia  $(S_+^n, S^{n-1})$  nella coppia  $(\mathbf{SO}(n+1), \mathbf{SO}(n))$ . Consideriamo l'applicazione  $p : \mathbf{SO}(n+1) \ni g \rightarrow g(e_n) \in S^n$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} p(\phi(x)) &= \phi(x)(e_n) = \sigma_x \circ \sigma_{e_0}(e_n) \\ &= \sigma_x(e_0) = -\psi_+(x) \quad \forall x \in S_+^n. \end{aligned}$$

Possiamo quindi considerare l'estensione di  $p \circ \phi$  che si ottiene mandando tutta la semisfera  $S_-^n$  nel punto  $e_n$ . L'applicazione che si ottiene è la  $a \circ \psi_+$ , ed ha quindi, poiché  $\psi_+$  ha grado 1, grado uguale a  $(-1)^{n+1}$ . Osserviamo infine che la restrizione di  $\phi_n$  all'equatore è la  $\phi_{n-1}$ .

Questa applicazione ci permette di descrivere, nella successione esatta

$$\mathbb{Z} = \pi_n(S^n) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(n)) \xrightarrow{\iota_*} \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(n+1)) \longrightarrow 0$$

il nucleo della  $\iota_*$ . Abbiamo infatti

**PROPOSIZIONE IX.1.6.** *Il nucleo di  $\iota_*$  è il sottogruppo ciclico generato da  $\alpha = \Delta_*(\text{id}_{S^n})$ . L'applicazione  $\phi_{n-1} : S^{n-1} \rightarrow \mathbf{SO}(n)$  rappresenta l'elemento  $(-1)^{n+1}\alpha$ .*

Utilizziamo ora il diagramma commutativo (9.1.7). Poiché l'immagine  $p_* \circ \Delta_*$  della classe di  $\text{id}_{S^{n-1}}$  è 0 o  $2[\text{id}_{S^{n-2}}]$  a seconda che  $n$  sia dispari o pari, otteniamo la (9.1.5).  $\square$

### IX.2. Varietà di Grassmann

Indichiamo con  $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$  l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione  $m$  di  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $\mathbb{M}(n \times m, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{nm}$  lo spazio vettoriale delle matrici reali  $n \times m$ , ed indichiamo con  $\mathbb{M}(n \times m, m, \mathbb{R})$  l'aperto delle matrici di rango  $m$  di  $\mathbb{M}(n \times m, \mathbb{R})$ . Abbiamo una bigezione di  $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$  sul quoziente

$$\mathbb{M}(n \times m, m, \mathbb{R}) / \sim, \quad \text{ove } X \sim Y \Leftrightarrow \exists a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \text{ tale che } X = Ya.$$

Questo ci permette di definire la topologia di  $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ .

**PROPOSIZIONE IX.2.1.** *Il quoziente  $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$  è uno spazio topologico di Hausdorff, connesso e compatto.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per verificare che  $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$  è connesso e compatto, basta osservare che è uno spazio omogeneo per l'azione transitiva del gruppo speciale ortogonale  $\mathbf{SO}(n)$ . Lo stabilizzatore di un punto è isomorfo al sottogruppo chiuso  $\mathbf{S}(\mathbf{O}(m) \times \mathbf{O}(n-m))$  e quindi  $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$  è di Hausdorff.  $\square$

**LEMMA IX.2.2.** *Sia  $\mathcal{B} \simeq \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  l'insieme delle basi di  $\mathbb{R}^n$ .*

*Se  $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \mathcal{B}$ , indichiamo con  $\pi_{\vec{\epsilon}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  la proiezione che associa a  $v = \sum_{i=1}^n v^i \epsilon_i$  l'elemento  $(v^1, \dots, v^m) \in \mathbb{R}^m$ .*

*L'insieme*

$$U_{\vec{\epsilon}} = \{p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \mid \pi_{\vec{\epsilon}}(p) = \mathbb{R}^m\}$$

*è aperto in  $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$  e l'applicazione*

$$\phi_{\vec{\epsilon}} : \mathbb{M}(m \times (n-m), \mathbb{R}) \longrightarrow U_{\vec{\epsilon}}$$

*che associa alla matrice  $(x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ m < j \leq n}}$  l' $m$ -piano*

$$\left\langle \epsilon_1 + \sum_{j=m+1}^n x_{1,j} \epsilon_j, \dots, \epsilon_m + \sum_{j=m+1}^n x_{m,j} \epsilon_j \right\rangle$$

*è un omeomorfismo di  $\mathbb{M}(m \times (n-m), \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{m(n-m)}$  su  $U_{\vec{\epsilon}}$ .*

Abbiamo perciò

**PROPOSIZIONE IX.2.3.** *Il quoziente  $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$  è una varietà topologica connessa e compatta di dimensione  $m(n-m)$ .*

**PROPOSIZIONE IX.2.4.** *Se  $\vec{\epsilon} \in \mathcal{B}$ , indichiamo con  $x_{\vec{\epsilon}} : U_{\vec{\epsilon}} \rightarrow \mathbb{M}(m \times (n-m), \mathbb{R})$  l'inversa di  $\phi_{\vec{\epsilon}}$ . La famiglia  $\mathcal{A} = \{U_{\vec{\epsilon}}, x_{\vec{\epsilon}}\}_{\vec{\epsilon} \in \mathcal{B}}$  è un atlante analitico di  $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ , in cui le funzioni di transizione sono razionali.*

**DEFINIZIONE IX.2.5.**  $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ , con la struttura di varietà analitica reale definita dall'atlante  $\{U_{\vec{\epsilon}}, x_{\vec{\epsilon}}\}$ , si dice la *varietà di Grassmann degli  $m$ -piani di  $\mathbb{R}^n$ .*

Osserviamo che  $\mathbb{G}_{n,1} \simeq \mathbb{R}P^{n-1}$  e quindi le varietà di Grassmann reali costituiscono una classe di varietà che comprende gli spazi proiettivi reali.

**OSSERVAZIONE IX.2.6.** Otteniamo un atlante di  $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$  facendo variare  $\vec{\epsilon}$  tra gli elementi della forma  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})$  con  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ ,  $1 \leq i_{m+1} < \dots < i_n \leq n$ , ottenendo così un atlante di cardinalità finita  $\binom{n}{m}$ .



PROPOSIZIONE IX.2.7. *Fissato un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^n$ , l'applicazione*

$$(9.2.1) \quad \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \ni p \rightarrow p^\perp \in \mathbb{G}_{n,n-m}(\mathbb{R})$$

*che associa ad ogni  $m$ -piano  $p$  l' $(n-m)$ -piano ad esso ortogonale è un diffeomorfismo.<sup>2</sup>*

Nello studio dell'omotopia delle varietà di Grassmann potremo quindi supporre nel seguito che  $n \geq 2m$ .

Consideriamo l'applicazione naturale

$$(9.2.2) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$$

che associa ad un sistema  $\vec{v} \in \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$  di  $m$  vettori ortonormali il sottospazio  $p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$  da essi generato. La (9.2.2) è una fibrazione localmente banale con fibra omeomorfa al gruppo  $\mathbf{O}(m)$ . Abbiamo quindi la successione esatta:

$$(9.2.3) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{O}(m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) & \\ & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{O}(m)) & \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

LEMMA IX.2.8. *Per ogni intero non negativo  $h$  ed ogni coppia d'interi positivi  $m, k$ , con  $m \leq k$ , le applicazioni  $\iota_* : \pi_h(\mathbf{O}(m)) \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R}))$  hanno immagine nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Rappresentiamo  $\mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R})$  come lo spazio delle matrici reali  $M$  di tipo  $(k+m) \times m$  tali che  ${}^t M M = I_m$ . Allora l'inclusione  $\iota : \mathbf{O}(m) \hookrightarrow \mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R})$  identifica  $\mathbf{O}(m)$  al sottospazio delle matrici

$$M_g = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } g \in \mathbf{O}(m).$$

L'omotopia  $F : \mathbf{O}(m) \times I \rightarrow \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$  definita da

$$F(g, t) = \begin{pmatrix} g \cos^2(t\pi/2) + I_m \sin^2(t\pi/2) \\ (g^* - I_m) \sin(t\pi/2) \cos(t\pi/2) \\ 0_{n-2m,m} \end{pmatrix}$$

definisce una retrazione di deformazione di  $\mathbf{O}(m)$  sul punto base di  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ . Da questo segue la tesi.  $\square$

In particolare, dalla successione esatta di Serre otteniamo le successioni esatte corte:

$$(9.2.4) \quad 0 \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{O}(m)) \rightarrow 0.$$

Abbiamo perciò, tenuto conto dell'omeomorfismo (9.2.1),

TEOREMA IX.2.9. *Siano  $1 \leq m < n$  e  $v = \min\{m, n-m\}$ . Per ogni  $h \geq 1$  abbiamo*

$$(9.2.5) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \pi_h(\mathbb{V}_{n,v}(\mathbb{R})) \oplus \pi_{h-1}(\mathbf{O}(v)).$$

<sup>2</sup>Per  $m = 1$ , l'applicazione è una polarità proiettiva rispetto ad una quadrica senza punti reali.

In particolare, poiché  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$  è semplicemente connesso per  $n-m > 1$ , otteniamo che

$$(9.2.6) \quad \pi_1(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2 \quad \forall n \geq 3 \quad \text{e} \quad 1 \leq m < n$$

ed inoltre

$$(9.2.7) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } 2 \leq h < n-v, \\ \mathbb{Z} \oplus \pi_{n-v-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } h = n-v \text{ è pari o } v = 1, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \pi_{n-v-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } h = n-v \text{ è dispari e } v \geq 3. \end{cases}$$

Se  $n' > n$ , abbiamo un'inclusione naturale

$$(9.2.8) \quad \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R}).$$

PROPOSIZIONE IX.2.10. *L'applicazione  $\pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \rightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R}))$  indotta dalla (9.2.8) è un isomorfismo per ogni  $h < \min\{m, n-m\}$  ed ogni  $n' > n$ .*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se  $h < n-m$ , e consideriamo la partizione cellulare di  $\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R})$  data dalle celle di Schubert, lo scheletro  $h+1$ -dimensionale di  $\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R})$  è contenuto in  $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ .  $\square$

### IX.3. Varietà di Stiefel e di Grassmann complesse

In modo analogo definiamo le varietà di Stiefel e di Grassmann complesse.

DEFINIZIONE IX.3.1. *La varietà di Stiefel complessa  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$  è costituita dalle  $m$ -uple di vettori ortonormali di  $\mathbb{C}^n$ .*

Possiamo identificare  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$  all'insieme delle matrici complesse  $Z$ , di tipo  $n \times m$ , che soddisfano  $Z^*Z = I_m$ . Osserviamo che  $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{C}) \simeq S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ , che  $\mathbb{V}_{n,n}(\mathbb{C}) \simeq \mathbf{U}(n)$  e che  $\mathbb{V}_{n-1}(\mathbb{C}) \simeq \mathbf{SU}(n)$ . Le varietà di Stiefel complesse generalizzano quindi le sfere di dimensione dispari e i gruppi unitari.

Abbiamo:

PROPOSIZIONE IX.3.2. *Per ogni  $0 \leq m < n$ , la varietà di Stiefel  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$  è una varietà analitica di Hausdorff, di dimensione reale  $m(2n-m)$ , compatta e connessa per archi. Essa è omeomorfa allo spazio omogeneo  $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-m)$ .*

DIMOSTRAZIONE.  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$  è uno spazio topologico di Hausdorff compatto perché è un sottoinsieme chiuso e limitato di  $\mathbb{C}^{nm}$ . Possiamo definire la sua struttura differenziale descrivendo una carta locale con centro in un punto  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$ . Completiamo  $v_1, \dots, v_m$  ad una base ortonormale  $(v_1, \dots, v_n)$  di  $\mathbb{C}^n$ . Assegnamo numeri complessi  $z_{h,j}$  per  $1 \leq j < h \leq n$  e numeri reali  $y_j$  per  $j = 1, \dots, m$ , tali che  $y_j^2 + \sum_{h=j+1}^n |z_{h,j}|^2 < 1$  per ogni  $j = 1, \dots, m$ . Risulteranno allora univocamente determinati numeri complessi  $z_{h,j}$ , per  $1 \leq h \leq j \leq m$  tali che  $\text{Im}(z_{j,j}) = y_j$ ,  $\text{Re}(z_{j,j}) > 0$  e detta  $Z$  la matrice  $Z = (z_{h,j})_{\substack{1 \leq h \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ , sia  $Z^*Z = I_m$ . I numeri reali  $y_j$  e le parti reali e immaginarie degli  $z_{h,j}$  con  $1 \leq j < h \leq n$  sono le coordinate di una carta locale con centro in  $\vec{v}$ . La dimensione della varietà è quindi

$$\sum_{j=1}^m [2(n-j) + 1] = m(2n+1) - m(m+1) = 2nm - m^2 = m(2n-m).$$

Chiaramente il gruppo speciale unitario  $\mathbf{SU}(n)$  opera transitivamente su  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ , con isotropia  $\mathbf{SU}(n-m)$ . Quindi  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$  è omeomorfo al quoziente  $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-m)$  e perciò compatto e connesso per archi.  $\square$

**PROPOSIZIONE IX.3.3.** *La varietà di Stiefel complessa  $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$  è  $(2n-2m)$ -connessa e  $\pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Fissato un intero  $k$  con  $1 \leq k < m$ , l'applicazione

$$(9.3.1) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C}).$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica  $\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})$ . Otteniamo quindi una successione esatta

$$(9.3.2) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \dots & \end{array}$$

Ragioniamo per ricorrenza su  $m \geq 1$ . Per  $m = 1$ ,  $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{C}) = S^{2n-1}$ , e sappiamo che la sfera di dimensione  $(2n-1)$  è  $(2n-2)$ -connessa. Supponiamo ora che  $m > 1$  e che, per ogni  $r$  con  $1 \leq r < m$  la varietà di Stiefel complessa  $\mathbb{V}_{n,r}(\mathbb{C})$  sia  $(2n-2r)$ -connessa. Utilizziamo la successione esatta (9.3.2) con  $k = 1$ . Poiché per l'ipotesi induttiva  $\mathbb{V}_{n-1,m-1}(\mathbb{C})$  è  $(2n-2m)$ -connesso e  $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{C}) = S^{2n-1}$  è  $(2n-2)$ -connesso, otteniamo che  $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}))$  è  $(2n-2)$ -connesso.

Utilizziamo ancora la successione esatta (9.3.2) con  $k = (m-1)$  ed  $h = 2n-2m$ . Poiché  $\mathbb{V}_{n,m-1}(\mathbb{C})$  è  $(2n-2m+2)$ -connessa, otteniamo l'isomorfismo

$$\pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) \simeq \pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n-m+1,1}(\mathbb{C})) = \pi_{2n-2m+1}(S^{2n-2m-1}) = \mathbb{Z}.$$

$\square$

L'applicazione

$$(9.3.3) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow \langle v_1, \dots, v_m \rangle \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica  $\mathbf{U}(m)$ . Otteniamo quindi una successione esatta d'omotopia

$$(9.3.4) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{U}(m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{U}(m)) & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) & \longrightarrow \dots \end{array}$$

Con una dimostrazione analoga a quella del Lemma IX.2.8 otteniamo

**LEMMA IX.3.4.** *Se  $1 \leq m < 2m \leq n$ , allora l'applicazione  $\pi_h(\mathbf{U}(m)) \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}))$  in (9.3.4) ha immagine nulla.*

Questo dà, per ogni intero  $h \geq 1$  e per  $1 \leq m < 2m \leq n$ , le successioni esatte corte

$$(9.3.5) \quad 0 \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{U}(m)) \rightarrow 0.$$

Otteniamo perciò il

TEOREMA IX.3.5. Sia  $\nu = \min\{m, n - m\}$ . Allora, per ogni  $1 \leq m < n$  ed  $h \geq 1$

$$(9.3.6) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \pi_h(\mathbb{V}_{n,\nu}(\mathbb{C})) \oplus \pi_{h-1}(\mathbf{U}(\nu)).$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $2m \leq n$ , la tesi segue dalla (9.3.5). Per completare la dimostrazione, è sufficiente utilizzare l'omeomorfismo

$$(9.3.7) \quad \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni p \rightarrow p^\perp \in \mathbb{G}_{n,n-m}(\mathbb{C}),$$

dove  $p^\perp$  è l' $(n-m)$ -piano ortogonale a  $p$ , rispetto ad un prodotto scalare Hermitiano in  $\mathbb{C}^n$ .  $\square$

Otteniamo in particolare

$$(9.3.8) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \begin{cases} \pi_{h-1}(\mathbf{U}(\nu)) & \text{se } 1 \leq h \leq 2n - 2\nu, \\ \mathbb{Z} \oplus \pi_{2n-2\nu}(\mathbf{U}(\nu)) & \text{se } h = 2n - 2\nu, \end{cases}$$

e quindi  $\pi_1(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = 0$  e  $\pi_2(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$  per ogni  $1 \leq m < n$ .

#### IX.4. Matrici di rango assegnato

Il gruppo prodotto  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  opera sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^{m \times n}$  delle matrici reali  $m \times n$  mediante diffeomorfismi di classe  $\mathcal{C}^\omega$ :

$$(9.4.1) \quad \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{m \times n} \ni (a, b, X) \rightarrow aXb^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Le orbite di questa azione sono i sottospazi

$$\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \text{rank}(X) = k\}, \quad 0 \leq k \leq \min\{m, n\}.$$

PROPOSIZIONE IX.4.1. Per ogni  $k = 0, \dots, \min\{m, n\}$  il sottospazio  $\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R})$  di  $\mathbb{R}^{m \times n}$  è una sottovarietà di classe  $\mathcal{C}^\omega$  e dimensione  $k(n + m - k)$ .

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo le matrici di  $\mathbb{R}^{m \times n}$  come matrici a blocchi

$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ X_1^2 & X_2^2 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} X_1^1 \in \mathbb{R}^{k \times k}, X_2^1 \in \mathbb{R}^{(m-k) \times k}, \\ X_2^1 \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}, X_1^2 \in \mathbb{R}^{(m-k) \times (n-k)}. \end{cases}$$

L'insieme

$$U_{I_m, I_n} = \{X \in \mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R}) \mid \det X_1^1 > 0\}$$

è un intorno aperto di  $X_0 = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  in  $\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R})$ . Definiamo una carta locale in  $U_{I_m, I_n}$  mediante

$$\phi_{I_m \times I_n} : U_{X_0} \ni X \rightarrow (X_1^1, X_2^1, X_1^2) \in \mathbf{GL}_k^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{k \times (n-k)} \times \mathbb{R}^{(m-k) \times k},$$

ove abbiamo indicato con  $\mathbf{GL}_k^+(\mathbb{R})$  l'aperto delle matrici reali in  $\mathbb{R}^{k \times k}$  che hanno determinante positivo.

Il fatto che questa sia una carta locale si può verificare osservando che l'applicazione

$$(X_1^1, x_2^1, X_1^2) \rightarrow \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ X_1^2 & X_1^2 [X_1^1]^{-1} X_2^1 \end{pmatrix}$$

è l'inversa di  $\phi_{I_m \times I_n}$ .

Se  $(a, b) \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ , la coppia che consiste dell'aperto  $U_{a,b} = aU_{I_m, I_n}b$  e dell'omeomorfismo  $\phi_{a,b}(X) = \phi_{I_m, I_n}(a^{-1}Xb^{-1})$  è una carta locale in  $\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R})$ , e  $\mathcal{A} = \{(U_{a,b}, \phi_{a,b}) \mid (a, b) \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})\}$  è un atlante di classe  $\mathcal{C}^\omega$  di  $\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R})$ . Poiché  $\mathbf{GL}_k^+(\mathbb{R})$  è un aperto di  $\mathbb{R}^{k \times k}$ , la dimensione di  $\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R})$  è  $k^2 + k(n-k) + (m-k)k = k(m+n-k)$ .  $\square$

### IX.5. Varietà dei sottospazi Lagrangiani reali

Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione pari  $2n$  ed  $\omega \in \Lambda^2 V^*$  una forma bilineare alternata non degenera su  $V$ .

DEFINIZIONE IX.5.1. Un sottospazio  $W$  di  $V$  è *totalmente isotropo* se  $\omega(w_1, w_2) = 0$  per ogni  $w_1, w_2 \in W$ .

Un sottospazio totalmente isotropo massimale, cioè di dimensione  $n$ , si dice *Lagrangiano*.

Sia  $W_0$  un sottospazio Lagrangiano di  $V$ . Una base  $e_1, \dots, e_n$  di  $W_0$  si completa ad una base  $e_1, \dots, e_{2n}$  di  $V$  con

$$(9.5.1) \quad \omega(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j - i = n, \\ -1 & \text{se } i - j = n, \\ 0 & \text{se } |i - j| \neq n. \end{cases}$$

Un sottospazio Lagrangiano  $W$  trasversale al sottospazio Lagrangiano  $\langle e_{n+1}, \dots, e_{2n} \rangle$  ammette una base  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  con

$$\varepsilon_j = e_j + \sum_{i=n+1}^{2n} x_{ij} e_i, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Nella base  $e_1, \dots, e_{2n}$  la matrice associata ad  $\omega$  è

$$(9.5.2) \quad \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

La condizione che  $W$  sia Lagrangiana si esprime, in termini della matrice  $\begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix}$  che esprime i vettori  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  nella base  $e_1, \dots, e_{2n}$ , mediante

$$(I, X^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix} = X - X^\dagger = 0.$$

Quindi  $X$  è una matrice simmetrica  $n \times n$ .

Indichiamo con  $\text{Simm}_n$  lo spazio vettoriale reale di dimensione  $\frac{n(n+1)}{2}$  delle matrici simmetriche reali  $n \times n$ . Le inverse delle applicazioni

$$\text{Simm}_n \ni X = (x_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

↓

$$\langle e_j + \sum_{i=n+1}^{2n} x_{ij} e_{n+i}, 1 \leq j \leq n \rangle \in \{W \in M \mid W \pitchfork \langle e_{n+1}, \dots, e_{2n} \rangle\},$$

al variare di  $e_1, \dots, e_{2n}$  nell'insieme delle basi di  $V$  in cui la matrice associata ad  $\omega$  abbia la forma (9.5.2), definiscono un atlante analitico e quindi una struttura di varietà analitica di dimensione  $\frac{n(n+1)}{2}$  su  $M$ .

Se  $g$  è un prodotto scalare su  $V$ , risulta definita un'applicazione lineare  $J \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$  tale che

$$(9.5.3) \quad \omega(v, w) = g(Jv, w), \quad \forall v, w \in V.$$

Un prodotto scalare  $g$  su  $V$  è *compatibile* con  $\omega$  se  $J$  è un'anti-involuzione di  $V$ , se cioè  $J^2 = -I$ .

Ad esempio, se  $e_1, \dots, e_{2n}$  è una base di  $V$  per cui valga la (9.5.1), il prodotto scalare definito da

$$(9.5.4) \quad g(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

è compatibile con  $\omega$ .

In questo caso la  $J$  definisce su  $V$  la struttura di uno spazio vettoriale complesso di dimensione  $n$  e la

$$(9.5.5) \quad (v|w) = g(v, w) + i\omega(v, w)$$

definisce un prodotto scalare Hermitiano. Abbiamo:

$$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \omega(a(v), a(w)) = \omega(v, w), \quad \forall v, w \in V\},$$

$$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) \cap \mathbf{O}(2n) = \{a \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) \mid g(a(v), a(w)) = g(v, w), \quad \forall v, w \in V\} \simeq \mathbf{U}(n).$$

Il gruppo  $\mathbf{U}(n)$  opera transitivamente su  $M$ . In particolare  $M$  è connesso e compatto. Lo stabilizzatore di un sottospazio Lagrangiano è il gruppo ortogonale  $\mathbf{O}(n)$  ed abbiamo quindi una fibrazione naturale

$$(9.5.6) \quad \pi : \mathbf{U}(n) \longrightarrow M \simeq \mathbf{U}(n)/\mathbf{O}(n) \quad \text{con fibra } \mathbf{O}(n).$$

Otteniamo la successione esatta di omotopia

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{O}(n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{U}(n)) & \longrightarrow & \pi_h(M) \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & & \cdots & & \end{array}$$

da cui si possono calcolare i gruppi di omotopia di  $M$  a partire da quelli dei gruppi unitari e del gruppo ortogonale. In particolare, per quanto riguarda il gruppo fondamentale, dal momento che  $\mathbf{U}(n)$  ed  $M$  sono connessi, ed  $\mathbf{O}(n)$  ha due componenti connesse, abbiamo una successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(\mathbf{O}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{U}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(M) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0, \\ \simeq \mathbb{Z}_2 & & \simeq \mathbb{Z} & & & & \end{array}$$

da cui ricaviamo che  $\pi_1(M) \simeq \mathbb{Z}$ .

### IX.6. Varietà dei sottospazi Lagrangiani complessi

Fissiamo una forma bilineare alternata non degenera  $\omega$  su  $\mathbb{C}^{2n}$  e sia  $M$  il sottoinsieme della Grassmanniana  $\mathbb{G}_{2n,n}(\mathbb{C})$  formato dai sottospazi Lagrangiani di  $\mathbb{C}^{2n}$ , cioè dai  $p \in \mathbb{G}_{2n,n}(\mathbb{C})$  tali che  $\omega(z, w) = 0$  per ogni  $z, w \in p$ . Dico che  $p$  è una varietà connessa e compatta.

Identifichiamo  $\mathbb{C}^{2n}$  con lo spazio  $\mathbb{H}^n$  delle  $n$ -uple di quaternioni, facendo corrispondere ad  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  l'elemento  $x + jy$ . Ricordiamo che è  $\overline{x + jy} = \bar{x} - jy$ . Possiamo

scegliere le coordinate in modo che il prodotto scalare standard su  $\mathbb{H}^n$  sia definito da

$$\begin{aligned}(q_1|q_2)_{\mathbb{H}} &= (x_2^* - jy_2^\dagger)(x_1 + jy_1) = x_2^*x_1 + y_2^*y_1 + j(x_2^\dagger y_1 - y_2^\dagger x_1) \\ &= (q_1|q_2)_{\mathbb{C}^n} + j\omega(q_1, q_2), \\ \text{ove } q_1 &= x_1 + jy_1, q_2 = x_2 + iy_2, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}^n.\end{aligned}$$

Ragionando come nell'esempio precedente, possiamo identificare gli  $n$ -piani Lagrangiani agli  $n$ -piani complessi generati da una base ortonormale di  $\mathbb{H}^n$ . Quindi il gruppo  $\mathbf{Sp}(n)$  opera transitivamente su  $M$ . Lo stabilizzatore di  $p_0 = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{C}}$  in  $\mathbf{Sp}(n)$  è il gruppo unitario  $\mathbf{U}(n)$ . Quindi  $M \simeq \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{U}(n)$  è una varietà connessa e compatta di dimensione  $n(2n+1) - n^2 = n(n+1)$ . Osserviamo che  $M$  ha dimensione pari ed in effetti è una varietà complessa compatta di dimensione  $n(n+1)/2$ .

### IX.7. Varietà di sottospazi proiettivi di una quadrica proiettiva reale

Sia  $b$  una forma bilineare simmetrica in  $\mathbb{R}^n$ , di segnatura  $(\nu, n - \nu)$ , con  $2\nu \leq n$ . La quadrica proiettiva  $Q \subset \mathbb{RP}^{n-1}$ , definita dall'equazione omogenea  $b(x, x) = 0$ , ha indice di Witt  $(\nu-1)$ , contiene cioè sottospazi proiettivi di dimensione  $(\nu-1)$ . Per ogni intero  $h$  con  $1 \leq h \leq \nu$ , indichiamo con  $M_h$  l'insieme dei sottospazi proiettivi di dimensione  $(h-1)$  contenuti in  $Q$ , ovvero dei sottospazi lineari di dimensione  $h$  totalmente isotropi rispetto alla forma  $b$ . Per il teorema d'estensione di Witt, il gruppo  $\mathbf{O}(\nu, n-\nu)$  opera transitivamente su  $M_h$ , che è quindi uno spazio omogeneo.

Per calcolare la dimensione di  $M_h$ , scegliamo una base di  $\mathbb{R}^n$  in cui la matrice associata a  $b$  sia

$$B = \begin{pmatrix} & & I_\nu \\ & I_{n-2\nu} & \\ I_\nu & & \end{pmatrix}.$$

L'algebra di Lie di  $\mathfrak{o}(\nu, n-\nu)$  si rappresenta in queste coordinate come l'algebra delle matrici

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & -x_{2,3}^\dagger & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & -x_{2,1}^\dagger & -x_{1,1}^\dagger \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} x_{1,1} \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}, x_{1,3}, x_{3,1} \in \mathfrak{o}(\nu), \\ x_{2,2} \in \mathfrak{o}(n-2\nu), x_{2,1}, x_{2,3} \in \mathbb{R}^{(n-2\nu) \times \nu}. \end{cases}$$

Il punto  $p_0 = \langle e_1, \dots, e_h \rangle$  appartiene ad  $M_h$ . L'algebra di Lie dello stabilizzatore di  $p_0$  è caratterizzata dal fatto che le prime  $h$  colonne delle matrici  $x_{2,1}$  ed  $x_{3,1}$  sono nulle e sono nulli gli elementi delle prime  $h$  righe ed ultime  $\nu-h$  colonne delle  $x_{1,1}$ . Poiché  $x_{3,1}$  è antisimmetrica, queste sono  $h(\nu-h) + h(n-2\nu) + h\nu - \frac{h(h+1)}{2}$  condizioni indipendenti. Questo numero è lo stesso della dimensione di  $M_h$ . Abbiamo perciò

$$\dim M_h = h(n-h) - \frac{h(h+1)}{2} = \frac{h(2n-3h-1)}{2}.$$

Essendo un sottospazio chiuso della grassmanniana  $\mathbb{G}_{n,h}$ , la varietà  $M_h$  è compatta. Verifichiamo che essa è anche uno spazio omogeneo del gruppo compatto  $\mathbf{O}(\nu) \times \mathbf{O}(n-\nu)$ . A questo scopo è più conveniente scegliere le coordinate in  $\mathbb{R}^n$  in modo

che la matrice associata a  $b$  sia

$$B' = \begin{pmatrix} I_v & \\ & -I_{n-v} \end{pmatrix}.$$

Scriviamo i vettori  $u$  di  $\mathbb{R}^n$  come somme  $u = v + w$ , dove  $v \in \mathbb{R}_v^v = \langle e_1, \dots, e_v \rangle$ ,  $w \in \mathbb{R}_w^{n-v} = \langle e_{v+1}, \dots, e_n \rangle$ . Sia  $p \in M_h$  e sia  $u_1 = v_1 + w_1, \dots, u_h = v_h + w_h$  una base di  $p$ . I vettori  $v_1, \dots, v_h$  sono linearmente indipendenti in  $\mathbb{R}_v^v$  ed i vettori  $w_1, \dots, w_h$  linearmente indipendenti in  $\mathbb{R}_w^{n-v}$ . Se scegliamo i  $v_1, \dots, v_h$  in modo che formino un sistema ortonormale in  $\mathbb{R}_v^v$ , da

$$0 = b(v_i + w_i, v_j + w_j) = (v_i | v_j) - (w_i | w_j) \quad (\text{prodotti scalari standard in } \mathbb{R}^n),$$

anche i  $w_1, \dots, w_h$  formano un sistema ortonormale in  $\mathbb{R}_w^{n-v}$ . Viceversa, se  $v_1, \dots, v_h$  e  $w_1, \dots, w_h$  sono due sistemi ortonormali in  $\mathbb{R}_v^v$  ed  $\mathbb{R}_w^{n-v}$  rispettivamente, allora  $p = \langle v_1 + w_1, \dots, v_h + w_h \rangle$  è un punto di  $M_h$ . Quindi il gruppo  $\mathbf{SO}(v) \times \mathbf{O}(n-v)$ , ed anche il suo sottogruppo  $\mathbf{SO}(v) \times \mathbf{SO}(n-v)$  se  $2h < v$ , opera transitivamente su  $M_h$ . Lo stabilizzatore di  $p_0 = \langle e_1 + e_{v+1}, \dots, e_h + e_{v+h} \rangle$  è  $\mathbf{SO}(h) \times \mathbf{SO}(v-h) \times \mathbf{O}(n-v-h)$  in  $\mathbf{SO}(v) \times \mathbf{O}(n-v)$ , e  $\mathbf{SO}(h) \times \mathbf{SO}(v-h) \times \mathbf{SO}(n-v-h)$  in  $\mathbf{SO}(v) \times \mathbf{SO}(n-v)$  se  $2h < v$ . In particolare,  $M_h$  è connessa se  $2h < n$ , ha due componenti connesse se  $2h = n$ .

### IX.8. Varietà di sottospazi proiettivi di una quadrica proiettiva complessa

Sia  $Q$  una quadrica non degenere di  $\mathbb{P}^n$ . Per ogni intero non negativo  $h$  con  $2h + 1 \leq n$ , la grassmanniana  $M_h$  degli  $h$ -piani proiettivi contenuti in  $Q$  ha una struttura naturale di varietà analitica compatta. Inoltre,  $M_h$  è connessa se  $2h + 1 < n$ , ha due componenti connesse se  $2h + 1 = n$ .

Possiamo supporre che la quadrica sia descritta in coordinate omogenee da  $Q = \{z^\dagger z = 0\}$ . Osserviamo che  $M_0 = Q$ . Per il teorema di cancellazione di Witt, il gruppo  $\mathbf{O}(n+1, \mathbb{C}) = \{x \in \mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) \mid x^\dagger x = I\}$  opera transitivamente su  $M_h$ , che quindi è una varietà analitica. Per dimostrare che  $M_h$  è compatta, verifichiamo che la forma compatta  $\mathbf{O}(n+1)$  di  $\mathbf{O}(n+1, \mathbb{C})$  opera transitivamente su  $M_h$ .

Un punto di  $M$  è rappresentato da un  $(h+1)$ -piano  $p$  di  $\mathbb{C}^{n+1}$  totalmente isotropo rispetto alla forma  $b(z, w) = z^\dagger w$ . È  $p \cap \mathbb{R}^{n+1} = 0$ , perché tutti i vettori reali sono anisotropi. Dico che  $p$  ammette una base  $u_0 + iv_0, u_1 + iv_1, \dots, u_h + iv_h$ , ove  $u_0, u_1, \dots, u_h, v_0, v_1, \dots, v_h$  è un sistema ortonormale di  $(2h+2)$  vettori di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , rispetto al prodotto scalare Euclideo standard.

Fissiamo infatti un elemento non nullo  $z_0 = u_0 + iv_0$  di  $p$ , con  $u_0, v_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Abbiamo  $\|u_0\|^2 = \|v_0\|^2 > 0$  e  $(u_0 | v_0) = 0$  (norme e prodotti scalari canonici in  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). Riscalando, possiamo supporre che  $\|u_0\| = \|v_0\| = 1$ . Supponiamo per ricorrenza che  $0 \leq k < h$ , ed abbiamo trovato un sistema ortonormale di  $(2k+2)$  vettori  $u_0, \dots, u_k, v_0, \dots, v_k$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$  con  $u_0 + iv_0, \dots, u_k + iv_k \in p$ . La condizione che  $p$  sia totalmente isotropo ci dice che  $\langle u_0, \dots, u_k \rangle^\perp \cap p = \langle u_0, \dots, u_k, v_0, \dots, v_k \rangle^\perp \cap p$ , ove abbiamo indicato con  $\perp$  la perpendicolarità in  $\mathbb{C}^{n+1}$  rispetto alla forma bilineare simmetrica  $b$ . Poiché  $\langle u_0, \dots, u_k \rangle$  è totalmente anisotropo, l'intersezione  $\langle u_0, \dots, u_k \rangle^\perp \cap p$  ha dimensione  $h - k > 0$  e contiene quindi un vettore  $z_{k+1} = u_{k+1} + iv_{k+1} \neq 0$ , con  $u_{k+1}, v_{k+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ . È  $(u_{k+1} | v_{k+1}) = 0$  e riscalando possiamo



supporre che  $\|u_{k+1}\| = \|v_{k+1}\| = 1$ . Per costruzione  $u_0, \dots, u_{k+1}, v_0, \dots, v_{k+1}$  è un sistema ortonormale di  $(2k+4)$  vettori reali. Questo dimostra l'affermazione.

Quindi, ogni sottospazio  $p$  di  $M_h$  ha una base della forma  $z_0 = u_0 + iv_0, u_1 + iv_1, \dots, u_h + iv_h$ , con  $u_i, v_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ , e tali che  $u_0, u_1, \dots, u_h, v_0, v_1, \dots, v_h$  sia un sistema ortonormale di vettori di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Viceversa, se  $u_0, u_1, \dots, u_h, v_0, v_1, \dots, v_h$  è un sistema ortonormale in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , l' $(h+1)$ -piano  $\langle u_0 + iv_0, u_1 + iv_1, \dots, u_h + iv_h \rangle$  definisce un punto  $p$  di  $M_h$ . Perciò il gruppo  $\mathbf{O}(n+1)$  delle trasformazioni ortogonali di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , e se  $2h+1 < n$  anche il suo sottogruppo  $\mathbf{SO}(n+1)$ , opera transitivamente su  $M$ . Poiché  $\mathbf{O}(n+1)$  è compatto,  $M_h$  è compatta e, poiché  $\mathbf{SO}(n+1)$  è connesso,  $M_h$  è connessa se  $2h+1 < n$ . Ogni  $(h+1)$ -piano  $p \in M_h$  ha un'unica struttura complessa  $J$  espressa, rispetto alla base reale  $u_0, \dots, v_h$  da  $Ju_j = -v_j$  per  $j = 0, \dots, h$  e le trasformazioni di  $\mathbf{O}(n+1)$  che lasciano fisso  $p$  sono quelle che si restringono ad una trasformazione  $J$ -lineare, e quindi a un elemento di  $\mathbf{U}(h+1)$ , su  $p$ . Poiché queste trasformazioni ortogonali trasformano in sé  $[(p \oplus \bar{p}) \cap \mathbb{R}^{n+1}]^\perp$ , otteniamo

$$\begin{aligned} M_{(n+1)/2} &\simeq \mathbf{O}(2m)/\mathbf{U}(m) && \text{se } n = 2m - 1, h = m - 1, \\ M_h &\simeq \mathbf{SO}(n+1)/(\mathbf{U}(h+1) \times \mathbf{SO}(n-2h-1)) && \text{se } 2h+1 < n. \end{aligned}$$

Possiamo utilizzare queste rappresentazioni per calcolare la dimensione reale  $m_h$  della varietà  $M_h$ . È

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{R}} M_{(n+1)/2} = (n^2 - 1)/2 & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ \dim_{\mathbb{R}} M_h = (h+1)(2n - 3h - 2) & \text{se } 2h < n + 1. \end{cases}$$

Osserviamo che le dimensioni sono pari. In effetti, le varietà  $M_h$  sono varietà differenziabili *complesse*.

### IX.9. Decomposizione di Cartan

Indichiamo con  $\mathfrak{p}(n)$  lo spazio vettoriale delle matrici Hermitiane simmetriche in  $\mathbb{C}^{n \times n}$  e con  $\mathbf{P}(n)$  il sottoinsieme di quelle definite positive.

LEMMA IX.9.1.  $\mathbf{P}(n)$  è una sottovarietà reale analitica di dimensione  $n^2$  di  $\mathbb{C}^{n \times n}$ . L'esponenziale di matrici definisce un diffeomorfismo

$$(9.9.1) \quad \mathfrak{p}(n) \ni A \longrightarrow \exp(A) \in \mathbf{P}(n).$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $a \in \mathbf{P}(n)$ , allora la matrice  $(1-t)I_n + ta$  è anch'essa definita positiva, e quindi in particolare invertibile, per ogni  $t \in [0, 1]$ . Possiamo quindi definire

$$(9.9.2) \quad \log a = (a - I_n) \cdot \int_0^1 [(1-t)I_n + ta]^{-1} dt, \quad \forall a \in \mathbf{P}(n).$$

Poiché l'aggiunzione commuta con l'integrale e l'operazione d'inversione di una matrice, otteniamo che  $\log$  è un'applicazione a valori in  $\mathfrak{p}(n)$ . Se  $A \in \mathfrak{p}(n)$ , possiamo diagonalizzarla mediante una  $a \in \mathbf{U}(n)$ . Avremo cioè

$$aAa^* = aAa^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Otteniamo allora

$$\log(\exp(A)) = a^{-1} \left( \int_0^1 \text{diag} \left( \frac{e^{\lambda_1} - 1}{(1-t) + t \exp \lambda_1}, \dots, \frac{e^{\lambda_n} - 1}{(1-t) + t \exp \lambda_n} \right) dt \right) a = A.$$

In modo analogo si verifica che  $\exp(\log(a)) = a$  per ogni  $a \in \mathbf{P}(n)$ . La (9.9.1) è una carta globale su  $\mathbf{P}(n)$  che definisce la sua struttura di varietà differenziabile e quindi è anche un diffeomorfismo di  $\mathfrak{p}(n)$  su  $\mathbf{P}(n)$ .  $\square$

**TEOREMA IX.9.2** (decomposizione di Cartan per il gruppo lineare). *Ogni elemento  $x \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  si decompone in modo unico nel prodotto*

$$(9.9.3) \quad x = x_k x_p, \quad \text{con } x_k \in \mathbf{U}(n), x_p \in \mathbf{P}(n).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $x_p = \sqrt{x^* x} = \exp(\frac{1}{2} \log(x^* x)) \in \mathbf{P}(n)$ . È  $x_p = x_p^*$  ed  $x_p^2 = x^* x$ . Posto  $x_k = x x_p^{-1}$ , abbiamo

$$x_k x_k^* = x x_p^{-1} x_p^{-1} x^* = x x_p^{-2} x^* = x (x^* x)^{-1} x^* = x x^{-1} x^{*-1} x^* = I_n$$

e quindi  $x_k \in \mathbf{U}(n)$ . L'unicità della decomposizione segue dall'unicità della radice quadrata in  $\mathbf{P}(n)$ .  $\square$

**COROLLARIO IX.9.3.** *L'applicazione*

$$(9.9.4) \quad \mathbf{U}(n) \times \mathfrak{p}(n) \ni (x, X) \longrightarrow x \exp(X) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

*è un diffeomorfismo.*  $\square$

**DEFINIZIONE IX.9.4.** Un sottogruppo  $\mathbf{G}$  del gruppo lineare  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  si dice *pseudoalgebrico* se può essere definito mediante un sistema di equazioni:

$$(*) \quad \mathbf{G} = \{x \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid f_1(x, x^*) = 0, \dots, f_N(x, x^*) = 0\}$$

dove  $f_1, \dots, f_N$  sono polinomi a coefficienti reali delle parti reali e immaginarie dei coefficienti di  $x$ .

I sottogruppi pseudoalgebrici sono ovviamente chiusi.

**TEOREMA IX.9.5** (decomposizione di Cartan). *Sia  $\mathbf{G}$  un sottogruppo semialgebrico di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ . Se*

$$(9.9.5) \quad x^* \in \mathbf{G}, \quad \forall x \in \mathbf{G},$$

*allora ogni elemento  $x \in \mathbf{G}$  si decompone in modo unico come un prodotto*

$$(9.9.6) \quad x = x_k x_p, \quad \text{con } x_k \in \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{G}, x_p \in \mathbf{P}(n) \cap \mathbf{G}.$$

**COROLLARIO IX.9.6.** *Sia  $\mathbf{G}$  un sottogruppo pseudoalgebrico di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ , con algebra di Lie  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . Se vale (9.9.5), allora l'applicazione*

$$(9.9.7) \quad (\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)) \ni (x, X) \longrightarrow x \exp(X) \in \mathbf{G},$$

*è un diffeomorfismo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per il Teorema IX.9.5, ogni elemento  $x \in \mathbf{G}$  si scrive in modo unico come

$$x = x_k x_p \quad \text{con} \quad x_k \in \mathbf{U}(n), \quad x_p \in \mathbf{P}(n),$$

e, per (9.9.5),  $x_p^2 = x^* x \in \mathbf{G}$ .

Per il Lemma IX.9.1 vi è un unico elemento  $A \in \mathfrak{p}(n)$  tale che  $x_p = \exp(A)$ . Diagonalizziamo  $A$  mediante una matrice  $a \in \mathbf{U}(n)$ . Sia cioè

$$a A a^* = a A a^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \text{con} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Il gruppo  $\text{ad}(a)(\mathbf{G})$  è ancora pseudoalgebrico in  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  e quindi le matrici diagonali reali di  $\text{ad}(a)(\mathbf{G})$  formano un sottogruppo pseudoalgebrico  $\mathbf{Q}$  di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ . Possiamo perciò trovare un insieme finito di polinomi  $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  tali che la matrice diagonale reale  $\text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , con  $\xi_1 \cdots \xi_n \neq 0$ , appartenga a  $\mathbf{Q}$  se e soltanto se

$$f_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0 \quad \text{per} \quad j = 1, \dots, N.$$

Abbiamo allora, poiché  $x_p^{2k} = (x^* x)^k \in \mathbf{G}$  per ogni intero  $k$ , la

$$(9.9.8) \quad f_j(e^{2k\lambda_1}, e^{2k\lambda_2}, \dots, e^{2k\lambda_n}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Per concludere la dimostrazione, utilizziamo il seguente

**LEMMA IX.9.7.** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione esponenziale-polinomiale della forma:*

$$(9.9.9) \quad f(t) = \sum_{j=1}^N c_j e^{b_j t} \quad t \in \mathbb{R}$$

con  $c_j, b_j \in \mathbb{R}$  e  $b_i \neq b_j$  se  $i \neq j$ . Se  $f$  si annulla per ogni  $t \in \mathbb{Z}$ , allora  $f$  si annulla per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Poniamo  $\exp(b_j) = \xi_j$ . Se  $f(t) = 0$  per i valori interi  $t = 0, 1, \dots, N-1$ , otteniamo in particolare che

$$(9.9.10) \quad (c_1, \dots, c_N) V(\xi_1, \dots, \xi_N) = 0,$$

ove  $V(\xi_1, \dots, \xi_N)$  è la matrice di Vandermonde

$$V(\xi_1, \dots, \xi_N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_N \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{N-1} & \xi_2^{N-1} & \dots & \xi_N^{N-1} \end{pmatrix}.$$

Il determinante<sup>3</sup> della matrice di Vandermonde è

$$\det V(\xi_1, \dots, \xi_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\xi_j - \xi_i),$$

<sup>3</sup>Per dimostrare questa formula, ragioniamo per ricorrenza su  $N$ . La formula del determinante di Vandermonde è facilmente verificata nel caso  $N = 2$ . Supponiamo quindi  $N > 2$  e la formula vera per determinanti di Vandermonde di ordine  $N-1$ . Sottraendo alla  $j+1$ -esima riga  $\xi_1$  volte la

e quindi diverso da zero perché gli  $\xi_1, \dots, \xi_N$  sono tra loro distinti. La (9.9.10) implica dunque che  $c_1 = \dots = c_N = 0$ .  $\square$

Concludiamo ora la dimostrazione del Teorema XXIX.1.2. Per il Lemma IX.9.7 appena dimostrato, dalla (9.9.8) otteniamo che

$$f_j(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, N.$$

Quindi  $\exp(2t(aAa^*)) \in \mathbf{Q}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e ciò mostra che  $A \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)$ . Allora  $x_p \in \mathbf{G}$  e perciò  $x_k = xx_p^{-1} \in \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ .

L'applicazione (9.9.7) è continua e bigettiva, ed è un omeomorfismo perché anche la sua inversa

$$\mathbf{G} \ni x \longrightarrow (x(x^*x)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} \log(x^*x)) \in (\mathbf{U}(n) \cap \mathbf{G}) \times (\mathfrak{p}(n) \cap \mathfrak{g})$$

è continua. Le due applicazioni sono analitiche reali perché restrizioni di diffeomorfismi analitici.  $\square$

**OSSERVAZIONE IX.9.8.** Un gruppo di Lie lineare  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  semialgebrico e chiuso rispetto all'aggiunzione ha quindi una retrazione di deformazione sul suo sottogruppo compatto  $\mathbf{U}(n) \cap \mathbf{G}$ . È in effetti un fibrato vettoriale differenziabile banale con base  $\mathbf{U}(n) \cap \mathbf{G}$ .

Nel Capitolo XXIX diamo la lista di Cartan dei gruppi classici e ricaviamo le loro decomposizioni di Cartan.

**ESEMPIO IX.9.9.** Se  $\mathbf{G}$  è un sottogruppo semialgebrico e chiuso rispetto all'aggiunzione di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ , allora  $\mathbf{K} \cap \mathbf{U}(n)$  è il suo sottogruppo compatto massimale e lo spazio omogeneo  $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$  si dice uno spazio Riemanniano simmetrico *di tipo non compatto*. Per la decomposizione di Cartan,  $M$  è diffeomorfo ad uno spazio Euclideo. È possibile definire su  $M$  una metrica per cui il gruppo  $\mathbf{G}$  sia un gruppo di isometrie di  $M$  ed il gruppo delle isometrie di  $M$  abbia la stessa componente connessa dell'identità di  $\mathbf{G}$ .

Nei paragrafi precedenti abbiamo dato esempi di spazi omogenei su cui è possibile definire una struttura di spazio Riemanniano simmetrico compatto.

$j$ -esima, per  $j = 1, \dots, N - 1$ , otteniamo:

$$\det V(\xi_1, \dots, \xi_N) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \xi_2 - \xi_1 & \xi_3 - \xi_1 & \dots & \xi_N - \xi_1 \\ 0 & \xi_2(\xi_2 - \xi_1) & \xi_3(\xi_3 - \xi_1) & \dots & \xi_N(\xi_N - \xi_1) \\ 0 & \xi_2^2(\xi_2 - \xi_1) & \xi_3^2(\xi_3 - \xi_1) & \dots & \xi_N^2(\xi_N - \xi_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \xi_2^{N-2}(\xi_2 - \xi_1) & \xi_3^{N-2}(\xi_3 - \xi_1) & \dots & \xi_N^{N-2}(\xi_N - \xi_1) \end{pmatrix}.$$

Raccogliendo il fattore  $(\xi_j - \xi_1)$  nella  $j$ -esima colonna, per  $j = 2, \dots, N$ , si ottiene

$$\det V(\xi_1, \dots, \xi_N) = (\xi_2 - \xi_1) \cdot \dots \cdot (\xi_N - \xi_1) \cdot \det V(\xi_2, \dots, \xi_N)$$

da cui la formula desiderata segue per l'ipotesi di ricorrenza.

## Algebre di Clifford e Spinori

### X.1. Algebre reali associative unitarie

Raccogliamo in questo paragrafo alcuni risultati generali sulle algebre associative unitarie che utilizzeremo per descrivere le algebre di Clifford.

In questo paragrafo indicheremo con  $\mathbb{A}$  un'algebra associativa e unitaria su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero.

**$\mathbb{Z}_2$ -gradazioni.** Ricordiamo che una  $\mathbb{Z}_2$ -gradazione di  $\mathbb{A}$  è una decomposizione di  $\mathbb{A}$  in somma diretta di sottospazi vettoriali

$$(10.1.1) \quad \mathbb{A} = \mathbb{A}^0 \oplus \mathbb{A}^1, \quad \text{con } ab \in \begin{cases} \mathbb{A}^0 & \text{se } a, b \in \mathbb{A}^0 \text{ o } a, b \in \mathbb{A}^1, \\ \mathbb{A}^1 & \text{se } a \in \mathbb{A}^i, b \in \mathbb{A}^j \text{ con } 0 \leq i \neq j \leq 1. \end{cases}$$

In particolare,  $\mathbb{A}^0$  è una sottoalgebra di  $\mathbb{A}$  ed  $\mathbb{A}^1$  un  $\mathbb{A}^0$ -modulo.

Data una  $\mathbb{Z}_2$ -gradazione (10.1.1) di  $\mathbb{A}$ , l'applicazione

$$\lambda : \mathbb{A} = \mathbb{A}^0 \oplus \mathbb{A}^1 \ni a_0 + a_1 \longrightarrow a_0 - a_1 \in \mathbb{A} \quad (a_0 \in \mathbb{A}^0, a_1 \in \mathbb{A}^1)$$

è un *automorfismo* di  $\mathbb{A}$  con  $\lambda^2 = I$  (l'identità di  $\mathbb{A}$ ). Viceversa, ogni *involuzione*  $\lambda$  dell'algebra  $\mathbb{A}$  ne definisce una  $\mathbb{Z}_2$  gradazione, con

$$\mathbb{A}_\lambda^0 = \{a \in \mathbb{A} \mid \lambda(a) = a\}, \quad \mathbb{A}_\lambda^1 = \{a \in \mathbb{A} \mid \lambda(a) = -a\}.$$

Se  $\tau$  è un elemento di  $\mathbb{A}$  per cui  $\tau^2$  sia un elemento invertibile del centro di  $\mathbb{A}$ , allora l'applicazione  $\text{ad}(\tau) : \mathbb{A} \ni a \rightarrow \tau a \tau^{-1} \in \mathbb{A}$  è un'involuzione di  $\mathbb{A}$ , che si dice *interna*.

**DEFINIZIONE X.1.1.** Una  $\mathbb{Z}_2$ -gradazione di un'algebra associativa unitaria  $\mathbb{A}$  si dice *interna* se è associata ad un'involuzione  $\text{ad}(\tau)$  per un elemento invertibile  $\tau$  del centro di  $\mathbb{A}$ . Altrimenti si dice *esterna*.

Per semplicità, indicheremo i sottospazi associati all'involuzione interna  $\text{ad}(\tau)$  con  $\mathbb{A}_\tau^i$  invece che con  $\mathbb{A}_{\text{ad}(\tau)}^i$ .

Un automorfismo di  $\mathbb{A}$  trasforma  $\mathbb{Z}_2$ -gradazioni in  $\mathbb{Z}_2$  gradazioni. Se  $\psi \in \mathbf{Aut}(\mathbb{A})$ , abbiamo  $\psi(\mathbb{A}_\lambda^i) = \mathbb{A}_{\psi \circ \lambda \circ \psi^{-1}}^i$ .

**DEFINIZIONE X.1.2.** Due  $\mathbb{Z}_2$ -gradazioni di  $\mathbb{A}$  sono *equivalenti* se le involuzioni che le definiscono sono coniugate mediante un automorfismo dell'algebra.

Poiché  $\psi \circ \text{ad}(\tau) \circ \psi^{-1} = \text{ad}(\psi(\tau))$ , una  $\mathbb{Z}_2$ -gradazione equivalente a una gradazione interna è interna.

**Algebre di matrici.** Sia  $\mathbb{A}$  è un'algebra associativa unitaria, con identità 1. Indichiamo con  $\mathbb{A}(n)$  l'algebra associativa unitaria delle matrici  $n \times n$  a coefficienti in  $\mathbb{A}$ , con l'operazione di prodotto righe per colonne di matrici.

Saremo nel seguito particolarmente interessati al caso  $n = 2$ .

LEMMA X.1.3.  $\mathbb{A}(2)$  ammette una  $\mathbb{Z}_2$ -gradazione  $\mathbb{A}(2) = \mathbb{A}^0(2) \oplus \mathbb{A}^1(2)$ , con  $\mathbb{A}^0(2)$  isomorfa ad  $\mathbb{A} \oplus \mathbb{A}$ .

DIMOSTRAZIONE. Poniamo

$$(10.1.2) \quad \mathbb{A}^0(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{A} \right\}, \quad \mathbb{A}^1(2) = \left\{ \begin{pmatrix} & a \\ b & \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{A} \right\}.$$

Si verifica immediatamente che questi sono i sottospazi di una  $\mathbb{Z}_2$ -gradazione di  $\mathbb{A}(2)$  con le proprietà desiderate.  $\square$

DEFINIZIONE X.1.4. Chiamiamo *standard* la gradazione  $\mathbb{A}(2) = \mathbb{A}^0(2) \oplus \mathbb{A}^1(2)$  di  $\mathbb{A}(2)$  in (10.1.2).

LEMMA X.1.5. Se  $\mathbb{A} = \mathbb{A}^0 \oplus \mathbb{A}^1$  è un'algebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduata, l'applicazione

$$(10.1.3) \quad \psi : \mathbb{A} = \mathbb{A}^0 \oplus \mathbb{A}^1 \ni a_0 + a_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}(2) \quad (a_0 \in \mathbb{A}^0, a_1 \in \mathbb{A}^1)$$

è un omomorfismo di algebre graduate che identifica  $\mathbb{A}$  ad una sottoalgebra graduata di  $\mathbb{A}(2)$ .  $\square$

### Somma diretta di un'algebra con se stessa.

LEMMA X.1.6. La somma diretta  $\mathbb{A} \oplus \mathbb{A}$  di due copie di un'algebra associativa unitaria  $\mathbb{A}$  ammette una  $\mathbb{Z}_2$ -gradazione con  $(\mathbb{A} \oplus \mathbb{A})^0$  isomorfa ad  $\mathbb{A}$ .

DIMOSTRAZIONE. Basta porre

$$(10.1.4) \quad (\mathbb{A} \oplus \mathbb{A})^0 = \Delta_{\mathbb{A}} = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{A}\} \quad \text{e} \quad (\mathbb{A} \oplus \mathbb{A})^1 = \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{A}\}.$$

La verifica che questa sia una  $\mathbb{Z}_2$ -gradazione con le proprietà desiderate è immediata.  $\square$

LEMMA X.1.7. La corrispondenza

$$(10.1.5) \quad (a, b) \longleftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$$

è un omomorfismo di algebre graduate da  $\mathbb{A} \oplus \mathbb{A}$  in  $\mathbb{A}(2)$  che identifica la somma diretta alla sottoalgebra delle matrici bi-simmetriche di  $\mathbb{A}(2)$ .  $\square$

**Estensione di un'algebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduata.** Possiamo utilizzare l'isomorfismo del Lemma X.1.5 per definire in modo canonico il *prolungamento di  $\mathbb{A}$  mediante l'aggiunta di una radice di  $-1$* . Infatti

$$J_2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \in \mathbb{A}(2) \setminus \psi(\mathbb{A})$$

e  $J_2^2 = -I_2$ .

Definiamo sull'algebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduata  $\mathbb{A} = \mathbb{A}^0 \oplus \mathbb{A}^1$  il *coniugio*

$$\overline{a_0 + a_1} = a_0 - a_1, \quad \forall a_0 \in \mathbb{A}^0, a_1 \in \mathbb{A}^1.$$

Abbiamo allora

PROPOSIZIONE X.1.8. *L'immagine  $\psi(\mathbb{A})$  in  $\mathbb{A}(2)$  e  $J_2$  generano la sottoalgebra graduata di  $\mathbb{A}(2)$*

$$(10.1.6) \quad \mathbb{M}(\mathbb{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ -\bar{\eta} & \bar{\xi} \end{pmatrix} \mid \xi, \eta \in \mathbb{A} \right\},$$

con  $\mathbb{M}^0(\mathbb{A}) \simeq \mathbb{A}$  e  $\mathbb{M}^1(\mathbb{A}) = J_2 \mathbb{M}^0(\mathbb{A})$ . □

LEMMA X.1.9. È

$$(10.1.7) \quad \mathbb{M}(\mathbb{A} \oplus \mathbb{A}) \simeq \mathbb{A}(2).$$

DIMOSTRAZIONE. Gli elementi di  $\mathbb{M}(\mathbb{A} \oplus \mathbb{A})$  sono le matrici

$$\begin{pmatrix} (\xi_{1,1}, \eta_{1,1}) & (\xi_{1,2}, \eta_{1,2}) \\ (\xi_{2,1}, \eta_{2,1}) & (\xi_{2,2}, \eta_{2,2}) \end{pmatrix} \text{ con } \begin{cases} \xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \xi_{2,1}, \xi_{2,2}, \eta_{1,1}, \eta_{1,2}, \eta_{2,1}, \eta_{2,2} \in \mathbb{A}, \\ \xi_{1,1} + \xi_{2,2} = \eta_{1,1} + \eta_{2,2}, \\ \xi_{1,1} - \xi_{2,2} = \eta_{2,2} - \eta_{1,1}, \\ \xi_{1,2} - \xi_{2,1} = \eta_{1,2} - \eta_{2,1}, \\ \xi_{1,2} + \xi_{2,1} = -(\eta_{1,2} + \eta_{2,1}). \end{cases}$$

L'applicazione

$$\mathbb{M}(\mathbb{A} \oplus \mathbb{A}) \ni \begin{pmatrix} (\xi_{1,1}, \eta_{1,1}) & (\xi_{1,2}, \eta_{1,2}) \\ (\xi_{2,1}, \eta_{2,1}) & (\xi_{2,2}, \eta_{2,2}) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} \\ \xi_{2,1} & \xi_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{A}(2)$$

è un omomorfismo bigettivo e quindi un isomorfismo. □

**Prodotto tensoriale di algebre.** Se  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  sono due algebre associative unitarie sullo stesso campo  $\mathbb{k}$ , il loro prodotto tensoriale  $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$  è un'algebra associativa unitaria su  $\mathbb{k}$ , con il prodotto caratterizzato da

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2), \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{A}, \forall b_1, b_2 \in \mathbb{B}.$$

LEMMA X.1.10. *Valgono gli isomorfismi*

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \quad \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{C}(2), \quad \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}(4).$$

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni (z, w) \rightarrow (zw, \bar{z}w) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  è  $\mathbb{R}$ -bilineare e quindi si prolunga ad un'applicazione lineare  $\phi : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ . Essa è chiaramente un omomorfismo di algebre. Poiché

$$\phi(1 \otimes 1) = (1, 1), \quad \phi(1 \otimes i) = (i, i), \quad \phi(i \otimes 1) = (i, -i), \quad \phi(i \otimes i) = (-1, 1),$$

l'applicazione è un isomorfismo lineare e quindi un isomorfismo di algebre.

Consideriamo l'applicazione  $\mathbb{R}$ -bilineare

$$\mathbb{C} \times \mathbb{H} \ni \left( a, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \right) \longrightarrow \begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(2).$$

Essa si estende ad un isomorfismo del prodotto tensoriale  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$  su  $\mathbb{C}(2)$ .

Identifichiamo  $\mathbb{R}^4$  ad  $\mathbb{H}$  e consideriamo l'applicazione

$$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \ni (q_1, q_2) \longrightarrow \{\mathbb{H} \ni x \rightarrow q_1 x \bar{q}_2 \in \mathbb{H}\} \in \mathbb{R}(4).$$

Poiché  $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$ , questa applicazione realizza l'isomorfismo desiderato.  $\square$

### Centro di un'algebra.

DEFINIZIONE X.1.11. Si dice *centro* di un'algebra  $\mathbb{A}$  l'insieme

$$\mathbf{Z}(\mathbb{A}) = \{a \in \mathbb{A} \mid ax = xa, \forall x \in \mathbb{A}\}.$$

Se  $\mathbb{A}$  è un'algebra associativa unitaria su  $\mathbb{k}$ , il suo centro è una sottoalgebra unitaria e commutativa, che contiene  $\mathbb{k}$ .

DEFINIZIONE X.1.12.  $\mathbb{A}$  si dice *centrale* se  $\mathbf{Z}(\mathbb{A}) = \mathbb{k}$ .

ESEMPIO X.1.13. Per ogni  $n$  le algebre  $\mathbb{R}(n)$  ed  $\mathbb{H}(n)$  sono centrali su  $\mathbb{R}$ . L'algebra  $\mathbb{C}(n)$  è centrale su  $\mathbb{C}$ , ma non su  $\mathbb{R}$ .

### Semplicità.

DEFINIZIONE X.1.14. Un'algebra  $\mathbb{A}$  è *semplice* se non contiene ideali bilateri non banali.

Ricordiamo che una *rappresentazione lineare* di  $\mathbb{A}$  è un omomorfismo di  $\mathbb{A}$  nell'algebra associativa unitaria  $\mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V)$  degli endomorfismi  $\mathbb{k}$ -lineari di uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{k}$ .

Il nucleo di una rappresentazione lineare  $\rho : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V)$  è un ideale bilatero  $\ker \rho$  di  $\mathbb{A}$ . Se  $\ker \rho = \{0\}$ , diciamo che la rappresentazione è *fedele*.

La moltiplicazione a sinistra per un elemento di  $\mathbb{A}$  definisce una rappresentazione di  $\mathbb{A}$  su se stessa come spazio vettoriale. Se  $\mathbb{A}$  è unitaria, questa rappresentazione è fedele e ci permette di identificare  $\mathbb{A}$  ad una sottoalgebra di  $\mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V)$ .

Una rappresentazione lineare  $\rho : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V)$  è *irriducibile* se  $V$  non contiene sottospazi  $\mathbb{A}$ -invarianti non banali.

PROPOSIZIONE X.1.15. *Un'algebra associativa unitaria di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica 0 è semplice se e soltanto se ammette una rappresentazione lineare fedele irriducibile di dimensione finita.*

*Le rappresentazioni fedeli e irriducibili di un'algebra associativa unitaria semplice e di dimensione finita su un campo di caratteristica zero sono tutte isomorfe tra loro.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che  $\mathbb{A}$  ammetta una rappresentazione lineare fedele ed irriducibile  $\rho : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V)$ . Sia  $\mathbb{B} \neq \{0\}$  un ideale bilatero di  $\mathbb{A}$ . I sotto- $\mathbb{B}$ -moduli di  $V$  sono anche sotto- $\mathbb{A}$ -moduli. Poiché per ipotesi la rappresentazione è fedele,  $\ker \mathbb{B} = \{v \in V \mid \rho(b)(v) = 0, \forall b \in \mathbb{B}\} \neq V$ . Quindi, essendo un sotto- $\mathbb{A}$ -modulo irriducibile di  $V$ , deve essere  $\ker \mathbb{B} = \{0\}$ .

Poiché  $\mathbb{k}$  ha caratteristica zero, da questo ricaviamo che  $\mathbb{B}$  contiene un elemento  $b_0$  per cui  $\rho(b_0)$  è invertibile. Abbiamo  $[\rho(b_0)] \in \mathbb{k}[\rho(b_0)]$ : possiamo trovare cioè un polinomio  $P \in \mathbb{k}[\lambda]$  tale che  $P(\rho(b_0)) = (\rho(b_0))^{-1}$ . Poiché  $\rho$  è fedele, questo



significa che  $P(b_0) \in \mathbb{A}$  è un'inversa di  $b_0$  in  $\mathbb{A}$ . Allora  $1 = P(b_0)b_0 \in \mathbb{B}$  e quindi  $\mathbb{B} = \mathbb{A}$ . Ciò dimostra che  $\mathbb{A}$  è semplice.

Supponiamo viceversa che  $\mathbb{A}$  sia semplice e sia  $V$  un sottospazio vettoriale di minima dimensione positiva<sup>1</sup> di  $\mathbb{A}$  tale che  $\mathbb{A}V \subset V$ . La rappresentazione di  $\mathbb{A}$  su  $V$  è irriducibile ed è fedele perché il suo nucleo d'infedeltà è un ideale bilatero proprio di  $\mathbb{A}$ .

Supponiamo ora che  $\rho : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V)$  e  $\tau : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(W)$  siano due rappresentazioni fedeli e irriducibili di  $\mathbb{A}$ . Fissiamo  $e_0 \in V$  ed  $\epsilon_0 \in W$  e sia  $Z = \{(a(e_0), a(\epsilon_0)) \mid a \in \mathbb{A}\} \subset V \oplus W$ . L'insieme  $Z$  è un sottospazio vettoriale di  $V \oplus W$  ed un suo sotto- $\mathbb{A}$ -modulo. Sia  $G$  un sotto- $\mathbb{A}$ -modulo diverso da  $\{0\}$  ed irriducibile di  $Z$ . La proiezione sulla prima coordinata  $Z \ni (v, w) \rightarrow v \in V$  commuta con l'azione di  $\mathbb{A}$ . Quindi il suo nucleo è un sotto- $\mathbb{A}$ -modulo di  $G$  e la sua immagine un sotto- $\mathbb{A}$ -modulo di  $V$ . Per l'irriducibilità la proiezione è un isomorfismo. Analogamente lo è la proiezione  $G \ni (v, w) \rightarrow w \in W$  e quindi  $G$  è il grafico di un isomorfismo di  $\mathbb{A}$ -moduli tra  $V$  e  $W$ .  $\square$

DEFINIZIONE X.1.16. Chiamiamo *commutante* di un  $\mathbb{A}$ -modulo  $V$  l'algebra associativa unitaria

$$(10.1.8) \quad \mathbb{F} = \{\lambda \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V) \mid \lambda \circ \rho(a) = \rho(a) \circ \lambda, \forall a \in \mathbb{A}\}.$$

LEMMA X.1.17 (Schur). *Il commutante di un  $\mathbb{A}$ -modulo irriducibile è un'algebra di divisione.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\mathbb{F}$  il commutante di  $V$ , definito da (10.1.8). Per ogni  $\lambda \in \mathbb{F}$ ,  $\ker \lambda$  e  $\lambda(V)$  sono sotto- $\mathbb{A}$ -moduli di  $V$  e dunque, l'ipotesi di irriducibilità, uguali a  $V$  o a  $\{0\}$ ; perciò gli elementi non nulli di  $\mathbb{F}$  sono invertibili.  $\square$

TEOREMA X.1.18. *Ogni algebra associativa unitaria semplice di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero è isomorfa ad un'algebra di matrici  $\mathbb{F}(n)$ , ove  $\mathbb{F}$  è il commutante di una sua rappresentazione irriducibile.*

DIMOSTRAZIONE. Siano  $V$  un ideale a sinistra non nullo e minimale di  $\mathbb{A}$  ed  $\mathbb{F}$  l'algebra di divisione degli endomorfismi di  $V$  che commutano con l'azione di  $\mathbb{A}$ . Poiché  $\mathbb{F}$  è un'algebra di divisione,  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{F}$ . Essendo fedele, la moltiplicazione a sinistra per gli elementi di  $\mathbb{A}$  definisce un monomorfismo  $\psi : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{F}}(V)$ . Osserviamo che è univocamente determinata un'applicazione  $\lambda : V \rightarrow \mathbb{F}$  tale che

$$vw = \lambda(w)(v), \quad \forall v, w \in V.$$

Infatti, la moltiplicazione a destra per  $w$  commuta con l'azione a sinistra di  $\mathbb{A}$  su  $V$  e definisce quindi un elemento  $\lambda(w)$  di  $\mathbb{F}$ . Lo spazio  $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$  è in modo naturale un  $\mathbb{A}$ -modulo per l'azione  $V^* \times \mathbb{A} \ni (\xi, a) \rightarrow \xi \circ \psi(a) \in V^*$ . Poiché  $\mathbb{A}$  è semplice,  $V^*$  non contiene sottomoduli irriducibili perché ha la stessa dimensione di  $V$ . Questo dimostra che  $\psi(\mathbb{A})$  contiene tutti gli elementi della forma  $v \otimes \xi$  per  $\xi \in V^*$ . Poiché questi generano  $\mathcal{E}nd_{\mathbb{F}}(V)$  come spazio vettoriale a sinistra su  $\mathbb{F}$ , otteniamo che  $\psi(\mathbb{A}) = \mathcal{E}nd_{\mathbb{F}}(V)$ .  $\square$

<sup>1</sup>Nota che  $V$  è un ideale a sinistra, ma in generale non bilatero, di  $\mathbb{A}$ .

Le algebre di divisione reali sono<sup>2</sup>  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ , mentre  $\mathbb{C}$  è l'unica algebra di divisione complessa. Otteniamo perciò

**TEOREMA X.1.19.** *Ogni  $\mathbb{C}$ -algebra associativa unitaria semplice di dimensione finita è isomorfa a  $\mathbb{C}(n)$  per qualche intero  $n \geq 1$ .*

*Ogni  $\mathbb{R}$ -algebra associativa unitaria semplice di dimensione finita è isomorfa, per qualche intero positivo  $n$ , ad una delle algebre  $\mathbb{R}(n), \mathbb{C}(n), \mathbb{H}(n)$ .  $\square$*

### Centro.

**DEFINIZIONE X.1.20.** Il *centro* dell'algebra  $\mathbb{A}$  è la sua sotto-algebra commutativa

$$\mathcal{Z}(\mathbb{A}) = \{a \in \mathbb{A} \mid ab = ba, \forall b \in \mathbb{A}\}.$$

**DEFINIZIONE X.1.21.** Un'algebra associativa unitaria su  $\mathbb{k}$  si dice *centrale* se il suo centro è  $\mathbb{k}$ .

Le algebre  $\mathbb{R}(n)$  ed  $\mathbb{H}(n)$  sono centrali su  $\mathbb{R}$ ; l'algebra  $\mathbb{C}(n)$  è centrale su  $\mathbb{C}$ , ma non come algebra reale.

### Gruppo delle unità.

**LEMMA X.1.22.** *Se  $\mathbb{A}$  è un'algebra associativa e unitaria di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  ed  $a \in \mathbb{A}$  sono equivalenti*

- (1)  *$a$  ammette un'inversa sinistra;*
- (2)  *$a$  ammette un'inversa destra;*
- (3) *esiste un unico elemento  $a^{-1}$  in  $\mathbb{A}$  tale che  $a^{-1}a = a \cdot a^{-1} = 1$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** (1)  $\Rightarrow$  (2). Se  $a$  ammette un'inversa sinistra, l'applicazione  $\mathbb{A} \ni x \rightarrow a \cdot x \in \mathbb{A}$  è surgettiva e quindi un isomorfismo lineare. In particolare  $a$  ammette un'inversa destra. In modo analogo si verifica che (2)  $\Rightarrow$  (1). Se  $ab = 1$  e  $ca = 1$ , la proprietà associativa dà  $c = c(ab) = (ca)b = b$  e questo dimostra che (3) è equivalente ad (1) e (2).  $\square$

**DEFINIZIONE X.1.23.** L'insieme  $\mathbf{U}(\mathbb{A})$  degli elementi invertibili di un'algebra associativa unitaria  $\mathbb{A}$  si dice *il gruppo delle unità di  $\mathbb{A}$* .

## X.2. Algebre di Clifford reali

Le algebre di Clifford reali furono introdotte da William K. Clifford<sup>3</sup> come una generalizzazione dei quaternioni. Queste algebre hanno importanti applicazioni in geometria e in fisica teorica.

Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale, su cui è stato fissato un prodotto scalare,  $V \times V \ni (v_1, v_2) \rightarrow (v_1|v_2) \in \mathbb{R}$ , con norma  $\|v\| = \sqrt{(v|v)} \geq 0$ .

<sup>2</sup> Ferdinand Georg Frobenius, *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **84**, (1878), 1-63 (Crelle's Journal). Reprinted in *Gesammelte Abhandlungen* Band I, pp.343-405.

<sup>3</sup> *Applications of Grassmann's extensive algebra*, Amer. Jour. Math. **1** (1878), pp. 350-358.

DEFINIZIONE X.2.1. L'algebra di Clifford  $\mathcal{C}\ell(V)$  è l'algebra associativa unitaria reale generata da  $V$ , modulo le relazioni

$$(10.2.1) \quad v^2 + \|v\|^2 = 0, \quad \forall v \in V.$$

In modo equivalente, possiamo definire  $\mathcal{C}\ell(V)$  come il quoziente dell'algebra tensoriale  $\mathbf{T}(V)$  rispetto all'ideale bilatero generato dagli elementi  $v \otimes v + \|v\|^2$ , al variare di  $v$  in  $V$ .

Osserviamo che, per le formule di polarizzazione, la (10.2.1) è equivalente a

$$(10.2.2) \quad v_1 v_2 + v_2 v_1 + 2(v_1 | v_2) = 0, \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

OSSERVAZIONE X.2.2. Se sostituissimo alla (10.2.1) le relazioni  $v^2 = 0$ , otterremmo l'algebra di Grassmann dei tensori alternati. Più in generale, potremmo considerare le relazioni  $v^2 + b(v, v) = 0$  per una qualsiasi forma bilineare simmetrica su  $V$ , ottenendo una collezione di strutture che comprenda sia le algebre di Grassmann che quelle di Clifford. In fisica, questa relazione si esprime dicendo che le algebre di Clifford sono una *quantizzazione* di quelle di Grassmann.

Se  $V$  ha dimensione finita  $n$ , gli elementi  $e_1, \dots, e_n$  di una sua base ortonormale verificano le relazioni

$$(10.2.3) \quad e_i^2 = -1, \quad e_i e_j = -e_j e_i \quad \text{se } 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Quindi  $\mathcal{C}\ell(V)$  è l'algebra associativa unitaria generata su  $\mathbb{R}$  da  $n$  unità immaginarie  $e_1, \dots, e_n$  che *anti-commutano* tra loro.

Le algebre di Clifford reali sono caratterizzate dalla *proprietà universale*:

TEOREMA X.2.3. Un'algebra reale associativa e unitaria  $\mathbb{A}$  è isomorfa all'algebra di Clifford  $\mathcal{C}\ell(V)$  e soltanto se possiamo trovare un'applicazione lineare e iniettiva  $\iota : V \rightarrow \mathbb{A}$  con la proprietà:

Per ogni algebra associativa unitaria  $\mathbb{B}$  ed ogni applicazione lineare  $\phi : V \rightarrow \mathbb{B}$  tale che  $[\phi(v)]^2 = -\|v\|^2 \mathbf{1}_{\mathbb{B}}$  per ogni  $v \in V$ , vi è un unico omomorfismo di algebre associative unitarie reali  $\tilde{\phi} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  tale che  $\tilde{\phi} \circ \iota = \phi$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\mathbb{B}$  un'algebra reale, associativa e unitaria e  $\phi : V \rightarrow \mathbb{B}$  un'applicazione lineare. Per la proprietà universale del prodotto tensoriale,  $\phi$  definisce un omomorfismo di algebre associative e unarie reali  $\Phi : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathbb{B}$ . Il nucleo di  $\Phi$  è un ideale bilatero di  $\mathbf{T}(V)$ . Se  $\ker \Phi$  contiene tutti gli elementi  $v \otimes v + \|v\|^2$ , allora  $\Phi$  definisce per passaggio al quoziente un omomorfismo di  $\mathcal{C}\ell(V)$  in  $\mathbb{B}$ .

Supponiamo ora che  $\mathbb{A}$  sia un'algebra reale associativa e unitaria che goda della proprietà universale. Possiamo allora definire omomorfismi  $\alpha : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{C}\ell(V)$  con  $\alpha(\iota(v)) = v$  per ogni  $v \in V$ , utilizzando la proprietà universale, e  $\beta : \mathcal{C}\ell(V) \rightarrow \mathbb{A}$  con  $\beta(v) = \iota(v)$  per la prima parte della dimostrazione. Poiché  $\alpha \circ \beta : \mathcal{C}\ell(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell(V)$  è l'identità,  $\alpha$  è inversa sinistra di  $\beta$ . La  $\beta \circ \alpha : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  è un omomorfismo di algebre con  $\beta \circ \alpha \circ \iota = \iota$  su  $V$ . Poiché l'identità ha questa proprietà, per l'unicità è  $\beta \circ \alpha = \text{id}_{\mathbb{A}}$  e quindi  $\alpha$  è anche inversa destra di  $\beta$ . Ciò dimostra che le due algebre sono equivalenti.  $\square$

Abbiamo immediatamente il

COROLLARIO X.2.4. *Se  $W$  è un sottospazio di  $V$ , l'inclusione  $W \subset V \subset \mathcal{C}\ell(V)$  si estende ad un monomorfismo di algebre  $\mathcal{C}\ell(W) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(V)$ .  $\square$*

L'algebra tensoriale  $\mathbf{T}(V)$  è  $\mathbb{Z}$ -graduata. Poiché gli elementi  $v \otimes v - \|v\|^2$  che generano il nucleo della proiezione  $\pi : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell(V)$  sono somme di termini di grado pari, l'algebra  $\mathcal{C}\ell(V)$  è  $\mathbb{Z}_2$ -graduata. Poniamo

$$(10.2.4) \quad \mathcal{C}\ell(V) = \mathcal{C}\ell^0(V) \oplus \mathcal{C}\ell^1(V), \quad \text{con } \mathcal{C}\ell^i(V) = \pi \left( \bigoplus_{h=0}^{\infty} \mathbf{T}^{i+2h}(V) \right).$$

Gli elementi di grado pari formano una sottoalgebra  $\mathcal{C}\ell^0(V)$  di  $\mathcal{C}\ell(V)$ .

PROPOSIZIONE X.2.5. *È  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(V) = 2^{\dim_{\mathbb{R}} V}$ . Se  $W$  è un iperpiano di  $V$ , allora  $\mathcal{C}\ell^0(V) \simeq \mathcal{C}\ell(W)$  e  $\mathcal{C}\ell(V)$  è isomorfa, come algebra graduata, ad*

$$\mathbb{M}(\mathcal{C}\ell(W)) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ -\bar{\eta} & \bar{\xi} \end{pmatrix} \mid \xi, \eta \in \mathcal{C}\ell(W) \right\},$$

con il coniugio su  $\mathcal{C}\ell(W)$  definito da

$$\overline{\xi_0 + \xi_1} = \xi_0 - \xi_1, \quad \forall \xi_0 \in \mathcal{C}\ell^0(W), \forall \xi_1 \in \mathcal{C}\ell^1(W).$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una base ortonormale  $e_1, \dots, e_{n-1}, e_n$  di  $V$  con  $e_n$  ortogonale a  $W$ . Posto  $\epsilon_1 = e_1 e_n, \dots, \epsilon_{n-1} = e_{n-1} e_n$ , abbiamo

$$\epsilon_i^2 = -1, \quad \epsilon_i \epsilon_j = -\epsilon_j \epsilon_i, \quad \forall 1 \neq i \leq j \leq n-1.$$

Quindi la sottoalgebra di  $\mathcal{C}\ell(V)$  generata da  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}$  è l'algebra di Clifford di uno spazio Euclideo di dimensione  $n-1$ . Essa coincide con  $\mathcal{C}\ell^0(V)$  perché ogni monomio di grado pari  $e_{i_1} \cdots e_{i_{2h}}$  di  $\mathcal{C}\ell(V)$ , con  $1 \leq i_1, \dots, i_{2h} \leq n$ , è anche un monomio in  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}$ . L'isomorfismo di  $\mathcal{C}\ell(W)$  su  $\mathcal{C}\ell^0(V)$  è il prolungamento canonico dell'applicazione lineare

$$\psi : W \ni w \longrightarrow w e_n \in \mathcal{C}\ell(V).$$

Poiché l'applicazione  $\mathcal{C}\ell(V) \ni \xi \rightarrow \xi e_n \in \mathcal{C}\ell(V)$  è un'involuzione lineare che scambia  $\mathcal{C}\ell^0(V)$  e  $\mathcal{C}\ell^1(V)$ , abbiamo  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell^1(V) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell^0(V) = \dim \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(W)$ . Quindi,  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(V) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(W)$ . Poiché  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^0) = \mathbb{R}$ , ne segue per ricorrenza che  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(V) = 2^{\dim_{\mathbb{R}} V}$ .

L'applicazione lineare (indichiamo con  $\mathbf{1}_W$  l'identità di  $\mathcal{C}\ell(W)$ )

$$\phi : V = W \oplus \mathbb{R} e_n \ni w + t e_n \longrightarrow \begin{pmatrix} w + t \mathbf{1}_W \\ w - t \mathbf{1}_W \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(\mathcal{C}\ell(W))$$

soddisfa la condizione  $(\phi(w + t e_n))^2 = -(\|w\|^2 + t^2) \mathbf{I}_2$  e quindi si prolunga in modo unico, per la proprietà universale, ad un omomorfismo  $\tilde{\phi}$  di  $\mathcal{C}\ell(V)$  in  $\mathbb{M}(\mathcal{C}\ell(W))$ . Si verifica facilmente che la  $\tilde{\phi}$  è surgettiva, e quindi un isomorfismo di algebre perché  $\mathcal{C}\ell(V)$  e  $\mathbb{M}(\mathcal{C}\ell(W))$  hanno la stessa dimensione.  $\square$

**X.2.1. Classificazione delle algebre di Clifford reali.** È utile introdurre preliminarmente qualche notazione. Se  $e_1, \dots, e_n$  è una base ortonormale assegnata in  $\mathbb{R}^n$ , indichiamo con

$$(10.2.5) \quad \eta_n = e_1 \cdots e_n \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$$

lo pseudoscalare corrispondente all'elemento di volume unitario. Vale allora

$$\eta_n^2 = (-1)^{n(n+1)/2} = \begin{cases} 1, & \text{se } n \equiv 0, 3 \pmod{4}, \\ -1, & \text{se } n \equiv 1, 2 \pmod{4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v\eta_n + \eta_n v = 0, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ v\eta_n - \eta_n v = 0, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

**TEOREMA X.2.6.** *Valgono i seguenti isomorfismi di algebre*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^0) &\simeq \mathbb{R}, \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^1) &\simeq \mathbb{C}, \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2) &\simeq \mathbb{H}, \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^3) &\simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) &\simeq \mathbb{H}(2), \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^5) &\simeq \mathbb{C}(4), \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6) &\simeq \mathbb{R}(8), \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^7) &\simeq \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8), \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) &\simeq \mathbb{R}(16). \end{aligned}$$

**DIMOSTRAZIONE.** 0. Se  $V = \{0\}$ , l'algebra di Clifford  $\mathcal{C}\ell(\{0\})$  è il campo  $\mathbb{R}$ .

1. Consideriamo l'applicazione  $\phi_1 : \mathbb{R} \ni x \rightarrow ix \in \mathbb{C}$ .

Poiché  $(\phi_1(x))^2 = -x^2$ , la  $\phi$  si estende ad un omomorfismo di algebre reali associative unitarie  $\tilde{\phi}_1 : \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^1) \rightarrow \mathbb{C}$ . La  $\tilde{\phi}_1$  è surgettiva, perché l'immagine contiene 1 ed  $i$ , ed è quindi un isomorfismo perché  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^1)$  e  $\mathbb{C}$  hanno la stessa dimensione reale 2.

2. Definiamo l'applicazione

$$\phi_2 : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longrightarrow xi + yj \in \mathbb{H},$$

ove  $i, j, k$  sono tre unità immaginarie che anti-commutano tra loro in  $\mathbb{H}$ .

Poiché  $(\phi_2(x, y))^2 = -(x^2 + y^2)$ , la  $\phi_2$  si estende a un omomorfismo di algebre reali associative unitarie  $\tilde{\phi}_2 : \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{H}$ . Poiché 1,  $i, j, k$  appartengono all'immagine di  $\tilde{\phi}_2$ , la  $\tilde{\phi}_2$  è surgettiva e quindi è un isomorfismo perché  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2)$  ed  $\mathbb{H}$  hanno la stessa dimensione 4.

3. Identifichiamo  $\mathbb{R}^3$  allo spazio  $V$  dei quaternioni puramente immaginari e consideriamo l'applicazione lineare

$$V \ni v \longrightarrow (v, -v) \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}.$$

Poiché  $(\phi_3(v))^2 = -\|v\|^2(1, 1)$ , per la proprietà universale la  $\phi_3$  si estende ad un omomorfismo  $\tilde{\phi}_3 : \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ . Si verifica facilmente che la  $\tilde{\phi}$  è surgettiva, ed è quindi un isomorfismo perché  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^3)$  ed  $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$  hanno entrambe dimensione 8.

4. Identifichiamo  $\mathbb{R}^4$  ad  $\mathbb{H}$  e consideriamo l'applicazione

$$\phi_4 : \mathbb{H} \ni q \longrightarrow \begin{pmatrix} & q \\ -\bar{q} & \end{pmatrix} \in \mathbb{H}(2).$$

Poiché

$$(10.2.6) \quad \begin{pmatrix} & q \\ -\bar{q} & \end{pmatrix}^2 = -\|q\|^2 \mathbf{1}_2,$$

per la proprietà universale l'applicazione lineare  $\phi_4$  si estende ad un omomorfismo  $\tilde{\phi}_4 : \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{H}(2)$ . Si verifica facilmente che  $\tilde{\phi}_4$  è surgettivo e quindi un isomorfismo perché le due algebre hanno entrambe dimensione 16.

5. Sia  $e_1, e_2, e_3, e_4$  una base ortonormale di  $\mathbb{R}^4$ . Con  $\eta_4$  definita da (10.2.5), definiamo l'applicazione

$$\phi_5 : \mathbb{R}^5 = \mathbb{R}_t^1 \oplus \mathbb{R}^4 \ni (t, v) \longrightarrow it \otimes \eta_4 + 1 \otimes v \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4).$$

Poiché  $\eta_4^2 = \mathbf{1}_4$  ed anticommute coi vettori di  $\mathbb{R}^4$ , otteniamo che

$$(\phi_5(t, v))^2 = -(t^2 + \|v\|^2) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}_4, \quad \forall (t, v) \in \mathbb{R}^5.$$

La  $\phi_5$  si prolunga quindi in modo unico ad un omomorfismo di  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^5)$  nel prodotto tensoriale  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$ . Si verifica facilmente che l'omomorfismo è surgettivo e quindi un isomorfismo perché le due algebre hanno la stessa dimensione 32. Osserviamo infine che, poiché  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$  è isomorfa  $\mathbb{H}(2)$ , che è una forma reale di  $\mathbb{C}(4)$ , è  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2) \simeq \mathbb{C}(4)$ .

6. Consideriamo il prodotto tensoriale  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2)$ . Poiché  $\eta_4 \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$  ha quadrato  $\mathbf{1}_4$  ed anticommute coi vettori, l'applicazione lineare

$$\phi_6 : \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}_v^2 \oplus \mathbb{R}_w^4 \ni (v, w) \longrightarrow v \otimes \eta_4 + \mathbf{1}_2 \otimes w \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$$

soddisfa

$$(\phi_6(v, w))^2 = v^2 \otimes \mathbf{1}_2 + v \otimes (\eta_4 w) + v \otimes (w \eta_4) + \mathbf{1}_2 \otimes w^2 = -(\|v\|^2 + \|w\|^2)(\mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_6).$$

Per la proprietà universale la  $\phi_6$  si estende ad un omomorfismo  $\tilde{\phi}_6$  di  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6)$  in  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$ . Poiché esso è surgettivo e le due algebre hanno la stessa dimensione  $2^6 = 2^2 2^4 = 64$ , la  $\tilde{\phi}_6$  è un isomorfismo di algebre. Osserviamo infine che  $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2) \simeq (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H})(2) \simeq (\mathbb{R}(4))(2) \simeq \mathbb{R}(8)$ .

7. Sia  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$  una base ortonormale di  $\mathbb{R}^6$  ed  $\eta_6 = e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6$  l'elemento di volume di  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6)$ . Abbiamo:

$$\eta_6^2 = -\mathbf{1}_6, \quad \eta_6 v + v \eta_6 = 0, \quad (t\eta_6 + v)^2 = -(t^2 + \|v\|^2) \mathbf{1}_6, \quad \forall v \in \mathbb{R}^6, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Usiamo l'identificazione

$$\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6) \oplus \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6) \right\}$$

data dalla corrispondenza

$$(\alpha, \beta) \longleftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha - \beta \\ \alpha - \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix}.$$

Definiamo l'applicazione lineare

$$\phi_7 : \mathbb{R}^7 = \mathbb{R}_t^1 \oplus \mathbb{R}^6 \ni (t, v) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & t\eta_6 + v \\ t\eta_6 + v & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6) \oplus \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6).$$

Poiché

$$(\phi_7(t, v))^2 = -(t^2 - \|v\|^2) \begin{pmatrix} \mathbf{1}_6 & \\ & \mathbf{1}_6 \end{pmatrix}, \quad \forall (t, v) \in \mathbb{R}^7,$$

per la proprietà universale la  $\phi_7$  si estende ad un omomorfismo  $\tilde{\phi}_7$  di  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^7)$  nella somma diretta  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6) \oplus \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6)$  di due copie di  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6)$ . La  $\tilde{\phi}_7$  è surgettiva e quindi un isomorfismo di algebre perché le due algebre hanno la stessa dimensione  $2^7 = 2 \cdot 2^6 = 128$ .

8. Sia  $e_1, e_2, e_3, e_4$  una base ortonormale di  $\mathbb{R}^4$  ed  $\eta_4 = e_1 e_2 e_3 e_4$  l'elemento di volume di  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$ . Abbiamo

$$\eta_4^2 = \mathbf{1}_4, \quad \eta_4 v + v \eta_4 = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^4.$$

Definiamo l'applicazione lineare

$$\phi_8 : \mathbb{R}^8 = \mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^4 \ni (v, w) \longrightarrow v \otimes \eta_4 + \mathbf{1}_4 \otimes w \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4).$$

Poiché

$$\begin{aligned} (\phi_8(v, w))^2 &= (v \otimes \eta_4 + \mathbf{1}_4 \otimes w)^2 = v^2 \otimes \eta_4^2 + v \otimes (w \eta_4 + \eta_4 w) + \mathbf{1}_4 \otimes w^2 \\ &= -(\|v\|^2 + \|w\|^2) \mathbf{1}_4 \otimes \mathbf{1}_4, \end{aligned}$$

per la proprietà universale la  $\phi_8$  si estende ad un omomorfismo  $\tilde{\phi}_8$  di  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8)$  nel prodotto tensoriale  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$ , che è surgettivo e quindi un isomorfismo perché le due algebre hanno la stessa dimensione  $2^8 = 2^4 2^4 = 256$ . Osserviamo infine che

$$\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{H}(2) \otimes \mathbb{H}(2) \simeq (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H})(2) \simeq (\mathbb{R}(8))(2) \simeq \mathbb{R}(16).$$

Questo completa la dimostrazione.  $\square$

**Periodicità.** Vale il

**TEOREMA X.2.7.** Per ogni intero non negativo  $n$  è  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n+8}) \simeq \mathbb{R}(16) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $e_1, \dots, e_8$  una base ortonormale di  $\mathbb{R}^8$  ed

$$\eta = e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8 \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8).$$

Definiamo l'applicazione

$$(10.2.7) \quad \phi : \mathbb{R}^8 \oplus \mathbb{R}^n \ni (w, v) \longrightarrow w \otimes \mathbf{1}_n + \eta \otimes v \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n),$$

ove abbiamo indicato con  $\mathbf{1}_n$  l'identità di  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$ . Abbiamo, in  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8)$ ,

$$(10.2.8) \quad \eta^2 = \mathbf{1}_8, \quad \eta w = -w \eta, \quad \forall w \in \mathbb{R}^8.$$

Da queste segue che

$$\begin{aligned} (\phi(w, v))^2 &= w^2 \otimes \mathbf{1}_n + (w\eta) \otimes v + (\eta w) \otimes \mathbf{1}_n + \eta^2 \otimes v^2 \\ &= -\|w\|^2 \mathbf{1}_8 \otimes \mathbf{1}_n + (w\eta + \eta w) \otimes v - \|v\|^2 \mathbf{1}_8 \otimes \mathbf{1}_n \\ &= -(\|w\|^2 + \|v\|^2) \mathbf{1}_{n+8}. \end{aligned}$$

La  $\phi$  si estende quindi, per la proprietà universale, ad un omomorfismo

$$(10.2.9) \quad \tilde{\phi} : \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n+8}) \rightarrow \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}(16) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n).$$

L'immagine di  $\tilde{\phi}$  è una sottoalgebra di  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$  che contiene  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes \mathbf{1}_n$  ed  $\eta \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$ . Poiché  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes \mathbf{1}_n$  ed  $\eta \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$  generano l'algebra prodotto tensoriale  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$ , ne segue che  $\tilde{\phi}$  è surgettiva e quindi un isomorfismo, perché le due algebre hanno la stessa dimensione  $2^{n+8}$ .  $\square$

### X.3. Algebra di Clifford di uno spazio vettoriale quadratico

Possiamo generalizzare la costruzione del §X.2, associando un'algebra di Clifford ad un qualsiasi spazio vettoriale *quadratico*. Supporremo per semplicità che il campo  $\mathbb{k}$  degli scalari abbia caratteristica zero.

Siano  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $m$  su  $\mathbb{k}$  e  $\mathbf{T}(V) = \bigoplus_{h=0}^{\infty} \mathbf{T}^h(V)$  la sua algebra tensoriale. Le *potenze tensoriali*  $\mathbf{T}^h(V)$  sono definite per ricorrenza ponendo  $\mathbf{T}^0(V) = \mathbb{k}$ ,  $\mathbf{T}^1(V) = V$  e  $\mathbf{T}^{h+1}(V) = V \otimes \mathbf{T}^h(V)$  per  $h \geq 1$ . Ricordiamo che  $\mathbf{T}(V)$  è  $\mathbb{Z}_+$ -graduata ed è caratterizzata dalla proprietà universale:

**PROPOSIZIONE X.3.1.**  $\mathbf{T}(V)$  è un'algebra associativa unitaria su  $\mathbb{k}$  che contiene  $V$  come sottospazio vettoriale ed ogni applicazione lineare  $\phi$  di  $V$  in un'algebra associativa unitaria  $\mathbf{A}$  si estende in modo unico ad un omomorfismo di algebre associative unitarie  $\tilde{\phi} : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathbf{A}$ .  $\square$

Una *forma quadratica*  $q$  su  $V$  è una

$$(10.3.1) \quad q : V \rightarrow \mathbb{k} \text{ tale che } b : V \times V \ni (v_1, v_2) \rightarrow q(v_1 + v_2) - q(v_1) - q(v_2) \in \mathbb{k}$$

sia  $\mathbb{k}$ -bilineare. Diciamo che  $q$  è non degenera se lo è  $b$ , se cioè per ogni  $v_1 \in V$  possiamo trovare un  $v_2 \in V$  tale che  $q(v_1 + v_2) \neq q(v_2)$ .

**DEFINIZIONE X.3.2.** Uno *spazio vettoriale quadratico* su  $\mathbb{k}$  è la coppia  $(V, q)$  di uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{k}$  e di una forma quadratica non degenera<sup>4</sup> su  $V$ .

**NOTAZIONE X.3.3.** Sia  $\mathbf{J}_q$  l'ideale bilatero di  $\mathbf{T}(V)$  generato dagli elementi della forma  $v \otimes v + q(v)$ , al variare di  $v$  in  $V$ .

**DEFINIZIONE X.3.4.** L'algebra di Clifford  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  dello spazio ortogonale  $(V, q)$  è il quoziente  $\mathbf{T}(V)/\mathbf{J}_q$  dell'algebra tensoriale  $\mathbf{T}(V)$ , rispetto all'ideale bilatero  $\mathbf{J}_q$ .

Poiché  $\mathbf{T}(V)$  è associativa e unitaria, anche  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  è associativa e unitaria.

Indichiamo con

$$\pi : \mathbf{T}(V) \longrightarrow \mathcal{C}\ell_q(V) = \mathbf{T}(V)/\mathbf{J}_q$$

la proiezione nel quoziente.

<sup>4</sup>Molte delle proprietà generali valgono anche senza l'ipotesi che  $q$  sia non degenera.



La composizione

$$V \hookrightarrow \mathbf{T}(V) \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}\ell_q(V)$$

è iniettiva e ci permette di considerare  $V$  come un sottospazio di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$ .

Come nel caso degli spazi euclidei, abbiamo:

**PROPOSIZIONE X.3.5** (proprietà universale). È  $V \subset \mathcal{C}\ell_q(V)$  ed ogni applicazione lineare  $\phi : V \rightarrow \mathbb{A}$  di  $V$  in un'algebra associativa unitaria  $\mathbb{A}$ , tale che  $\phi(v)^2 = -q(v) \cdot 1_{\mathbb{A}}$ , si estende in modo unico ad un omomorfismo  $\tilde{\phi} : \mathcal{C}\ell_q(V) \rightarrow \mathbb{A}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Un'applicazione lineare  $\phi : V \rightarrow \mathbb{A}$  di  $V$  in un'algebra associativa unitaria si estende in modo unico ad un omomorfismo  $\hat{\phi} : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathbb{A}$ . La condizione che  $[\phi(v)]^2 = -q(v) \cdot 1_{\mathbb{A}}$  per ogni  $v \in V$  ci dice che  $\mathbf{J}_q$  è contenuto nel nucleo di  $\hat{\phi}$ , che definisce quindi per passaggio al quoziente un omomorfismo  $\tilde{\phi}$  di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  in  $\mathbb{A}$ .  $\square$

**NOTAZIONE X.3.6.** Se  $v_1, \dots, v_k \in V$ , indichiamo con  $v_1 \cdots v_k$  l'immagine mediante  $\pi$  di  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$  in  $\mathcal{C}\ell_q(V)$ . In generale, indichiamo con  $\xi \cdot \eta$ , o semplicemente con  $\xi\eta$ , il prodotto di  $\xi, \eta \in \mathcal{C}\ell_q(V)$ .

Utilizzando la polarizzazione, si ricava immediatamente la *formula di anticommutazione*<sup>5</sup>

$$(10.3.2) \quad v_1 v_2 + v_2 v_1 + b(v_1, v_2) = 0, \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

In particolare,  $v_1 v_2 = -v_2 v_1$  se  $v_1$  e  $v_2$  sono  $b$ -ortogonali.

**PROPOSIZIONE X.3.7.** L'algebra di Clifford  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  è  $\mathbb{Z}_2$ -graduata, mediante

$$(10.3.3) \quad \mathcal{C}\ell_q(V) = \mathcal{C}\ell_q^0(V) \oplus \mathcal{C}\ell_q^1(V), \quad \text{con} \quad \mathcal{C}\ell_q^i(V) = \pi \left( \bigoplus_{h=0}^{\infty} \mathbf{T}^{2h+i}(V) \right).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo su  $\mathbf{T}(V)$  la  $\mathbb{Z}_2$ -gradazione indotta dalla  $\mathbb{Z}_+$ -gradazione. L'ideale  $\mathbf{J}_q$  è  $\mathbb{Z}_2$ -graduato, perché ammette un sistema di generatori di grado pari. Il quoziente  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  risulta allora anch'esso  $\mathbb{Z}_2$ -graduato.  $\square$

**Somma diretta di  $\mathbb{k}$ -spazi vettoriali ortogonali.** Se  $(V, q_V)$  e  $(W, q_W)$  sono due spazi vettoriali quadratici sullo stesso campo  $\mathbb{k}$ , indichiamo con  $q_{V \oplus W}$  la forma quadratica

$$q_{V \oplus W}((v, w)) = q_V(v) + q_W(w), \quad \forall v \in V, w \in W.$$

La coppia  $(V \oplus W, q_{V \oplus W})$  è ancora uno spazio vettoriale quadratico.

### Basi e inclusioni delle algebre di Clifford.

**PROPOSIZIONE X.3.8.** Siano  $(V, b_V)$  e  $(W, b_W)$  due spazi vettoriali quadratici su  $\mathbb{k}$ . Ogni isometria  $\phi : (W, q_W) \rightarrow (V, q_V)$  si prolunga in modo unico ad un omomorfismo  $\tilde{\phi} : \mathcal{C}\ell_{q_W}(W) \rightarrow \mathcal{C}\ell_{q_V}(V)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Identificando  $W$  ad un sottospazio di  $V$ , otteniamo un'inclusione  $\mathbf{T}(W) \hookrightarrow \mathbf{T}(V)$ . Quest'inclusione defisce per passaggio ai quozienti un'inclusione  $\mathcal{C}\ell_{q_W}(W) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{q_V}(V)$ , perché  $\mathbf{J}_{q_V} \cap \mathbf{T}(W) = \mathbf{J}_{q_W}$ .  $\square$

<sup>5</sup>Questa è infatti conseguenza della  $(v_1 + v_2)(v_1 + v_2) + q(v_1 + v_2) = 0$ .

NOTAZIONE X.3.9. Se  $e_1, \dots, e_m$  è una base di  $V$  ed  $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$  una  $k$ -upla di interi con  $1 \leq i_h \leq m$ , indicheremo con  $e_I$  l'elemento  $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$  di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$ . Porremo ancora  $e_\emptyset = 1$ .

TEOREMA X.3.10. Se  $\dim V = m$ , allora  $\dim \mathcal{C}\ell_q(V) = 2^m$ .

Se  $e_1, \dots, e_m$  è una base di  $V$ , allora gli  $e_I$  con  $I = \emptyset$ , ed  $I = (i_1, \dots, i_k)$  con  $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$  formano una base di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\Lambda^*V \subset \mathbf{T}(V)$  l'algebra di Grassmann dei tensori alternati. Poiché  $\Lambda^*V \cap \mathbf{J}_q = \{0\}$ , la restrizione a  $\Lambda^*V$  della proiezione  $\pi : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell_q(V)$  è iniettiva. Si verifica facilmente, utilizzando la formula di anticommutazione (10.3.2), che  $\pi : \Lambda^*V \rightarrow \mathcal{C}\ell_q(V)$  è anche surgettiva e quindi un isomorfismo lineare.  $\square$

Sia  $W$  un sottospazio anisotropo di  $V$ . La Proposizione X.3.8 ci permette di identificare l'algebra di Clifford di  $(W, q|_W)$ , che indichiamo per semplicità con  $\mathcal{C}\ell_q(W)$ , ad una sottoalgebra di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$ . Abbiamo in particolare

PROPOSIZIONE X.3.11. Se  $e_1$  è un vettore anisotropo di  $(V, q)$  e  $W = e_1^\perp$ , allora

$$(10.3.4) \quad \mathcal{C}\ell_q(V) = \mathcal{C}\ell_q(W) \oplus e_1 \mathcal{C}\ell_q(W).$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza del Teorema X.3.10, perché  $\Lambda^*V = \Lambda^*W \oplus (e_1 \wedge \Lambda^*W)$ .  $\square$

**X.3.1. Pseudo-scalari.** Poiché abbiamo supposto  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero,  $\Lambda^*V$  si identifica al sottospazio dei tensori alternati di  $\mathbf{T}(V)$ , e l'*alternatore*, definito, sui tensori di rango uno, da

$$(10.3.5) \quad \varepsilon(v_1 \otimes \cdots \otimes v_q) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_q = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_q} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma_q},$$

$$\forall v_1, \dots, v_q \in V,$$

è una proiezione

$$(10.3.6) \quad \varepsilon : \mathbf{T}(V) \longrightarrow \Lambda^*(V).$$

Sia  $(V, q)$  uno spazio vettoriale quadratico di dimensione  $m$  su  $\mathbb{k}$ .

DEFINIZIONE X.3.12. Chiamiamo *pseudo-scalari* le immagini, mediante la proiezione  $\pi : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell_q(V)$ , degli elementi di  $\Lambda^m V$ .

LEMMA X.3.13. Se  $e_1, \dots, e_m$  una base ortogonale di  $(V, q)$ , allora gli pseudo-scalari sono tutti e soli i multipli di  $e_1 \cdots e_m$ .

DIMOSTRAZIONE. Poiché  $e_1, \dots, e_m$  anti-commutano tra loro, è

$$e_{\sigma_1} \cdots e_{\sigma_m} = \varepsilon(\sigma) e_1 \cdots e_m, \quad \forall \sigma \in \mathbf{S}_m.$$

Siano  $v_1, \dots, v_m$  vettori di  $V$  e  $v_i = \sum_{j=1}^m c_{i,j} e_j$ . Abbiamo

$$\pi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_m} \sum_{1 \leq \tau_i \leq m} \varepsilon(\sigma) c_{\sigma_1, \tau_1} \cdots c_{\sigma_m, \tau_m} e_{\tau_1} \cdots e_{\tau_m}.$$

Per  $\tau_1, \dots, \tau_m$  fissati, la somma

$$\sum_{\sigma \in \mathbf{S}_m} \varepsilon(\sigma) c_{\sigma_1, \tau_1} \cdots c_{\sigma_m, \tau_m}$$

è il determinante della matrice che ha come colonne i vettori  $(c_{1,\tau_i}, \dots, c_{m,\tau_i})^\dagger \in \mathbb{k}^m$ . Sono quindi nulli tutti i termini della sommatoria in cui due indici  $\tau_i$  siano uguali. Otteniamo perciò

$$\begin{aligned} \pi(v_1 \wedge \dots \wedge v_m) &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_m} \varepsilon(\sigma) c_{\sigma_1, \tau_1} \cdots c_{\sigma_m, \tau_m} e_{\tau_1} \cdots e_{\tau_m} \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_m} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\tau) c_{\sigma_1, \tau_1} \cdots c_{\sigma_m, \tau_m} e_1 \cdots e_m \\ &= \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \varepsilon(\sigma) c_{1, \sigma_1} \cdots c_{m, \sigma_m} \right) e_1 \cdots e_m. \end{aligned}$$

Osserviamo che il coefficiente è il determinante della matrice che esprime le  $v_1, \dots, v_m$  come combinazioni lineari degli elementi della base  $e_1, \dots, e_m$ .  $\square$

**COROLLARIO X.3.14.** *L'insieme degli pseudo-scalari di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  è*

$$\{v_1 \cdots v_m \mid v_1, \dots, v_m \in V, b(v_i, v_j) = 0, \forall 1 \leq i < j \leq m\}. \quad \square$$

Per la proprietà universale, ogni isomorfismo  $a \in \mathbf{O}_q(V)$  si estende ad un isomorfismo  $\tilde{a}$  di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$ , che lascia fissi gli scalari e trasforma in sé il sottospazio  $V$ . Per quanto abbiamo visto nella dimostrazione del Lemma X.3.13, la  $\tilde{a}$  lascia invariati o cambia di segno gli pseudo-scalari, a seconda che il suo determinante sia uguale ad uno o a meno uno. Questa proprietà spiega il nome di *pseudo-scalari*: come gli scalari formano un sottospazio di dimensione uno di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$ , e quindi si parametrizzano con gli elementi di  $\mathbb{k}$ , ma il loro segno dipende dalla scelta del riferimento e quindi non sono *veri scalari*.

Si verifica facilmente:

**LEMMA X.3.15.** *Sia  $e_1, \dots, e_m$  una base ortogonale di  $(V, q)$  con  $q(e_i) = c_i$  e definiamo*

$$\eta = e_1 \cdots e_m.$$

Allora

$$\eta^2 = (-1)^{\binom{m}{2}} c_1 \cdots c_m \in \mathbb{k}.$$

*Gli pseudoscalari appartengono al centro di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  se e soltanto se  $V$  ha dimensione dispari.*  $\square$

#### X.4. Involuzioni, anti-involuzioni e centro dell'algebra di Clifford

Sulle algebre di Clifford sono definite alcune involuzioni canoniche.

Per la proprietà universale, ogni simmetria  $b$ -ortogonale di  $V$  si estende in modo unico ad un'involuzione di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$ . In particolare, indicheremo con  $\alpha$  l'involuzione corrispondente alla simmetria rispetto all'origine  $V \ni v \rightarrow -v \in V$ .

**DEFINIZIONE X.4.1.** L'involuzione  $\alpha$  di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  è definita da

$$(10.4.1) \quad \alpha(\xi) = (-1)^i \xi, \quad \forall \xi \in \mathcal{C}\ell_b^i(V), \quad i = 0, 1.$$

**LEMMA X.4.2.** *Per ogni  $v \in V$  anisotropo, abbiamo*

$$(10.4.2) \quad v\xi = \alpha(\xi)v, \quad \forall v \in V, \forall \xi \in \mathcal{C}\ell_q(v^\perp). \quad \square$$

Utilizzando il lemma, otteniamo:

TEOREMA X.4.3. *Il centro di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  è*

- (1)  $\mathbb{K}$  se  $V$  ha dimensione pari,
- (2) la somma diretta degli scalari e degli pseudo-scalari se  $V$  ha dimensione dispari.

DIMOSTRAZIONE. Un elemento  $\xi$  appartiene al centro di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  se e soltanto se commuta con tutti gli elementi  $e_1, \dots, e_m$  di una base ortogonale di  $(V, q)$ . Scriviamo  $\xi = \xi'_i + e_i \xi''_i$  con  $\xi'_i, \xi''_i \in \mathcal{C}\ell_q(e_i^\perp)$ . Abbiamo allora

$$e_i \xi = e_i \xi'_i + e_i^2 \xi''_i = \alpha(\xi'_i) e_i + e_i \alpha(\xi''_i) e_i, \quad \xi e_i = \xi'_i e_i + e_i \xi''_i e_i.$$

Da queste relazioni segue che  $\xi'_i, \xi''_i \in \mathcal{C}\ell_q^0(W) \subset \mathcal{C}\ell_q^0(V)$ , che cioè il numero di fattori  $e_j$  con indice diverso da un qualsiasi indice  $i$  assegnato in ogni monomio  $k_I e_I$  non nullo nella decomposizione  $\xi = \sum k_I e_I$  deve essere pari. Ciò è possibile solo se  $\xi$  è uno scalare, oppure la somma di uno scalare e di uno pseudoscalare quando la dimensione di  $V$  sia dispari.  $\square$

LEMMA X.4.4. *Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\xi \in \mathcal{C}\ell_q(V)$  soddisfi*

$$(10.4.3) \quad \xi v = v \alpha(\xi), \quad \forall v \in V$$

*è che  $\xi$  sia uno scalare, cioè che  $\xi \in \mathbb{K}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo come nella dimostrazione del Teorema X.4.3. A partire da una base ortogonale  $e_1, \dots, e_n$ , scriviamo un elemento  $\xi$  che soddisfi (10.4.3) nella forma  $\xi = \xi'_i + e_i \xi''_i$ , con  $\xi'_i, \xi''_i \in \mathcal{C}\ell_q(e_i^\perp)$ . Allora

$$e_i \xi = \alpha(\xi'_i) e_i + q(e_i) \xi''_i, \quad \alpha(\xi) e_i = \alpha(\xi'_i) e_i - q(e_i) \alpha(\xi''_i).$$

Quindi  $\xi''_i = 0$  per ogni  $i$  e questo implica che si annullino tutti i coefficienti  $k_I$  con  $I \neq \emptyset$  nella decomposizione  $\xi = \sum k_I e_I$  di  $\xi$  come combinazione lineare degli elementi di una base canonica, cioè che  $\xi \in \mathbb{K}$ .  $\square$

L'applicazione lineare  $\tilde{\beta} : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathbf{T}(V)$ , definita sui tensori di rango uno da

$$\tilde{\beta}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_k \otimes \cdots \otimes v_1, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall v_1, \dots, v_k \in V,$$

è un'anti-involuzione di  $\mathbf{T}(V)$ , che lascia invariante l'ideale  $\mathbf{J}_q$ .

DEFINIZIONE X.4.5. Indichiamo con  $\beta : \mathcal{C}\ell_q(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell_q(V)$  l'anti-involuzione di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  ottenuta da  $\tilde{\beta}$  per passaggio al quoziente e con  $\gamma$  la composizione  $\gamma = \alpha \circ \beta$ .

LEMMA X.4.6. *L'involuzione  $\alpha$  e le anti-involuzioni  $\beta$  e  $\gamma$  commutano tutte tra loro.*  $\square$

Le involuzioni  $\alpha, \beta, \gamma$  ci permettono di decomporre  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  nella somma diretta dei sottospazi formati dagli elementi che sono lasciati fissi e di quelli che sono trasformati nei loro opposti. La  $\mathbb{Z}_2$ -gradazione  $\mathcal{C}\ell_q(V) = \mathcal{C}\ell_q^0(V) \oplus \mathcal{C}\ell_q^1(V)$  è la decomposizione associata ad  $\alpha$ . La permutazione che scambia  $i$  con  $k+1-i$ , per  $1 \leq i \leq k$ , è prodotto di  $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$  permutazioni ed ha perciò segnatura  $(-1)^{k(k-1)/2}$ . Otteniamo perciò, per  $\beta$  e  $\gamma$ ,

LEMMA X.4.7. *Abbiamo*

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_q^{\beta,+}(V) &= \{\xi \in \mathcal{O}_q(V) \mid \beta(\xi) = \xi\} = \pi\left(\sum_{h \geq 0} (\Lambda^{4h}V \oplus \Lambda^{4h+1}V)\right), \\ \mathcal{O}_q^{\beta,-}(V) &= \{\xi \in \mathcal{O}_q(V) \mid \beta(\xi) = -\xi\} = \pi\left(\sum_{h \geq 0} (\Lambda^{4h+2}V \oplus \Lambda^{4h+3}V)\right), \\ \mathcal{O}_q^{\gamma,+}(V) &= \{\xi \in \mathcal{O}_q(V) \mid \gamma(\xi) = \xi\} = \pi\left(\sum_{h \geq 0} (\Lambda^{4h}V \oplus \Lambda^{4h+3}V)\right), \\ \mathcal{O}_q^{\gamma,-}(V) &= \{\xi \in \mathcal{O}_q(V) \mid \gamma(\xi) = -\xi\} = \pi\left(\sum_{h \geq 0} (\Lambda^{4h+1}V \oplus \Lambda^{4h+2}V)\right).\end{aligned}$$

Se  $e_1, \dots, e_m$  è una base ortonormale di  $V$ , ed  $e_I$  la corrispondente base di  $\mathcal{O}_q(V)$ , abbiamo

$$(10.4.4) \quad \begin{cases} \beta(1) = 1, & \gamma(1) = 1, & \beta(e_i) = e_i, & \gamma(e_i) = -e_i, & \forall i, \\ \beta(e_I) = (-1)^{\binom{h}{2}} e_I, & \gamma(e_I) = (-1)^{\binom{h+1}{2}} e_I, & \forall I = (i_1, \dots, i_h), & h \geq 2. \end{cases}$$

ESEMPIO X.4.8. Le  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  sono descritte, per  $\mathcal{O}(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ , dalle tabelle

$$\begin{array}{c|c|c} & 1 & i \\ \hline \alpha & 1 & -i \\ \hline \beta & 1 & i \\ \hline \gamma & 1 & -i \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & i & j & k \\ \hline \alpha & 1 & -i & -j & k \\ \hline \beta & 1 & i & j & -k \\ \hline \gamma & 1 & -i & -j & -k \end{array} .$$

### X.5. Gruppi ortogonali e loro algebre di Lie

Dato uno spazio ortogonale  $(V, q)$  di dimensione finita  $m$  su  $\mathbb{k}$ , indichiamo con

$$\mathbf{O}_q(V) = \{x \in \mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V) \mid q(xv) = q(v), \forall v \in V\},$$

$$\mathbf{SO}_q(V) = \{x \in \mathbf{O}_q(V) \mid \det(x) = 1\},$$

$$\mathfrak{so}_q(V) = \{X \in \mathfrak{sl}_{\mathbb{k}}(V) \mid b(Xv, v) = 0, \forall v \in V\}$$

i relativi gruppi ortogonale e speciale ortogonale e la loro algebra di Lie, formata dalle matrici  $b$ -antisimmetriche.

Se  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  e la forma  $b$  è indefinita,  $\mathbf{O}_q(V)$  ha quattro componenti connesse. Supponiamo  $b$  abbia segnatura  $(p, q)$ , con  $pq > 0$ . Distinguiamo i vettori non nulli  $V$  di  $V$  in *positivi*, *negativi*, *isotropi* a seconda che  $q(v)$  sia positivo, negativo, nullo.

Scegliamo una base ortonormale  $e_1, \dots, e_m$  di  $V$ , con  $q$  definita positiva su  $V_+ = \langle e_1, \dots, e_p \rangle$  e definita negativa su  $V_- = \langle e_{p+1}, \dots, e_m \rangle$ . Se  $a \in \mathbf{O}_q(V)$ , allora  $b$  è definita positiva su  $a(V_+)$  e definita negativa su  $a(V_-)$ . In particolare,  $V_- \cap a(V_+) = \{0\}$  e  $V_+ \cap a(V_-) = \{0\}$  e quindi

$$a(e_1) \wedge \dots \wedge a(e_p) \wedge e_{p+1} \wedge \dots \wedge e_m \neq 0, \quad \text{ed} \quad e_1 \wedge \dots \wedge e_p \wedge a(e_{p+1}) \wedge \dots \wedge a(e_m) \neq 0.$$

Siano

$$\mathbf{O}_q^+(V) = \{a \in \mathbf{O}_q(V) \mid (a(e_1) \wedge \dots \wedge a(e_p) \wedge e_{p+1} \wedge \dots \wedge e_m) / (e_1 \wedge \dots \wedge e_m) > 0\},$$

$$\mathbf{O}_q^-(V) = \{a \in \mathbf{O}_q(V) \mid (e_1 \wedge \dots \wedge e_p \wedge a(e_{p+1}) \wedge \dots \wedge a(e_m)) / (e_1 \wedge \dots \wedge e_m) > 0\}.$$

Se rappresentiamo l'elemento  $a$  di  $\mathbf{O}_q(V)$  come una matrice nella base  $e_1, \dots, e_m$ , i minori  $D_+(a)$  formati dalle prime  $p$  righe e colonne e  $D_-(a)$  dalle ultime  $q$  righe e

colonne hanno entrambi determinate diverso da zero. Le  $a$  di  $\mathbf{O}_q^+(V)$  hanno  $D_+(a) > 0$ , quelle di  $\mathbf{O}_q^-(V)$  hanno  $D_-(a) > 0$ .

Ciascuno dei sottogruppi  $\mathbf{SO}_q(V)$ ,  $\mathbf{O}_q^+(V)$ ,  $\mathbf{O}_q^-(V)$  ha indice due in  $\mathbf{O}_q(V)$ . La componente connessa  $\mathbf{SO}_q^+(V)$  dell'identità di  $\mathbf{O}_q(V)$  è l'intersezione di una coppia qualsiasi di questi sottogruppi:

$$\mathbf{SO}_q^+(V) = \mathbf{O}_q^+(V) \cap \mathbf{SO}_q(V) = \mathbf{SO}_q^-(V) = \mathbf{O}_q^-(V) \cap \mathbf{SO}_q(V) = \mathbf{O}_q^+(V) \cap \mathbf{O}_q^-(V).$$

DEFINIZIONE X.5.1. Se  $v_0 \in V$  è un vettore anisotropo, l'applicazione

$$s_{v_0} : V \ni v \longrightarrow v - \frac{b(v, v_0)}{q(v_0)} v_0 \in V$$

appartiene ad  $\mathbf{O}_q(V) \setminus \mathbf{SO}_q(V)$  e si dice *simmetria rispetto al vettore  $V$* .

OSSERVAZIONE X.5.2. Se  $b$  è reale indefinita e  $v_0$  positivo (resp. negativo), allora  $s_{v_0} \in \mathbf{O}_q^-(V) \setminus \mathbf{SO}_q(V)$  (resp.  $s_{v_0} \in \mathbf{O}_q^+(V) \setminus \mathbf{SO}_q(V)$ ).

PROPOSIZIONE X.5.3 (Cartan). *Ogni trasformazione ortogonale è prodotto di al più  $m$  simmetrie rispetto a vettori anisotropi. (L'identità si considera, convenzionalmente, prodotto di 0 simmetrie vettoriali.)*

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per ricorrenza sulla dimensione  $m$  di  $V$ . Se  $m = 1$  il gruppo  $\mathbf{O}_q(V)$  contiene soltanto l'identità e la simmetria rispetto ad un vettore non nullo e quindi la tesi è banalmente verificata. Supponiamo  $m > 1$  e la tesi vera per spazi quadratici di dimensione minore di  $m$ . Sia  $a \in \mathbf{O}_q(V)$ . Se  $a$  fissa un vettore anisotropo  $v_0$ , la  $a$  si restringe ad una trasformazione ortogonale di  $v_0^\perp$ , che per l'ipotesi induttiva è prodotto di al più  $m-1$  simmetrie rispetto a vettori anisotropi di  $v_0^\perp$ . Queste si estendono a simmetrie vettoriali di  $V$  che lasciano fisso il vettore  $v_0$  e la cui composizione dà  $a$ .

Se  $a$  non fissa nessun vettore anisotropo, ma vi è un vettore anisotropo  $v_0$  tale che  $w_0 = v_0 - a(v_0)$  sia ancora anisotropo, allora  $s_{w_0}$ , lasciando fisso  $v_0 + a(v_0)$  e trasformando  $w_0$  in  $-w_0$ , scambia tra loro  $v_0$  ed  $a(v_0)$ . Quindi  $s_{w_0} \circ a$  lascia fisso il vettore anisotropo  $v_0$  ed è quindi, per la discussione precedente, prodotto di al più  $m-1$  simmetrie rispetto a vettori anisotropi. Quindi  $a = s_{w_0} \circ s_{w_0} \circ a$  è prodotto di al più  $m$  simmetrie rispetto a vettori anisotropi.

Rimane da considerare il caso in cui  $a$  non lasci fisso nessun vettore anisotropo e  $v - a(v)$  sia isotropo per ogni vettore anisotropo  $v$ . Poiché i vettori anisotropi sono un aperto di Zariski di  $V$ , ne segue che  $v - a(v)$  è isotropo per ogni  $v \in V$  e quindi  $W = \{v - a(v) \mid v \in V\}$  è un sottospazio totalmente isotropo di  $V$ . Per ipotesi anche  $W' = \{v \in W \mid a(v) = v\}$  è totalmente isotropo ed ha dimensione complementare a quella di  $W$ . Ne segue che  $V$  ha dimensione pari, diciamo  $m = 2n$ , e  $W, W'$  sono sottospazi isotropi massimali, di dimensione  $n$ . Abbiamo poi  $W \subset W'^\perp = W'$ , perché

$$\begin{aligned} b(a(v) - v, w) &= b(a(v), w) - b(v, w) = b(a(v), w) - b(a(v), a(w)) \\ &= b(a(v), w) - b(a(v), w) = 0, \quad \text{se } a(w) = w. \end{aligned}$$

Quindi  $W$  e  $W'$ , che hanno la stessa dimensione e sono contenuti l'uno nell'altro, coincidono. Ne segue che  $a$  ha polinomio minimo  $(\lambda - 1)^2$  e quindi, in particolare, determinante 1.

Se  $v_0$  è un qualsiasi vettore anisotropo,  $s_{v_0} \circ a$  ha allora determinante  $(-1)$  e, per la discussione precedente, deve essere prodotto di al più  $2n$  simmetrie rispetto a vettori anisotropi. Le simmetrie non possono essere  $2n$ , ma al più  $(2n-1)$ , perché il prodotto di un numero pari di simmetrie avrebbe determinante  $(+1)$ . Da questo segue che  $a$  è prodotto di al più  $m = 2n$  simmetrie vettoriali.  $\square$

PROPOSIZIONE X.5.4. *Sia  $v$  un vettore anisotropo di  $(V, q)$ . Allora*

$$(10.5.1) \quad \tilde{s}_v : \mathcal{C}\ell_q(V) \ni \xi \rightarrow v\xi v \in \mathcal{C}\ell_q(V)$$

*è un'applicazione lineare invertibile di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  in sé tale che*

$$(10.5.2) \quad \tilde{s}_v(w) = q(v) \cdot s_v(w), \quad \forall w \in V.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo  $\tilde{s}_v^2(\xi) = q^2(v)\xi$  per ogni  $\xi \in \mathcal{C}\ell_q(V)$  e quindi  $\tilde{s}_v$  è invertibile. Sia  $e_1, \dots, e_m$  una base ortogonale di  $(V, q)$  con  $e_1 = v$ . Allora

$$\tilde{s}_v(v) = v^3 = -q(v)v, \quad \tilde{s}_v(e_j) = ve_jv = -v^2e_j = q(v)e_j.$$

Questo dimostra la (10.5.2).  $\square$

In particolare, quando  $q(v) = \pm 1$ , la  $\tilde{s}_v$  è o la simmetria rispetto al vettore  $v$  o la simmetria rispetto all'origine nel piano ortogonale a  $v$ .

## X.6. Rappresentazione spinoriale dell'algebra ortogonale

Sia  $(V, q)$  uno spazio vettoriale quadratico di dimensione finita  $m$  sul campo  $\mathbb{k}$ , che supponiamo di caratteristica zero.

Essendo non degenere, la forma bilineare associata  $b$  definisce un isomorfismo  $b : V^* \rightarrow V$ , che associa ad ogni forma lineare  $\xi$  su  $V$  l'unico vettore  $b_\xi \in V$  tale che

$$\xi(v) = b(b_\xi, v), \quad \text{per ogni } v \in V.$$

L'applicazione bilineare

$$V \times V^* \ni (v, \xi) \longrightarrow v \otimes b_\xi \in \mathbf{T}^2(V)$$

definisce un isomorfismo lineare

$$b^b = (1 \otimes b) : V \otimes V^* \simeq \text{End}_{\mathbb{k}}(V) \ni X \longrightarrow X^b \in \mathbf{T}^2(V).$$

LEMMA X.6.1. *È  $b^b(\mathfrak{so}_q(V)) = \Lambda^2 V$  e l'inversa di  $b^b$  definisce un isomorfismo lineare  $\phi : \Lambda^2 V \rightarrow \mathfrak{so}_q(V)$  tale che*

$$(10.6.1) \quad \phi(v_1 \wedge v_2)(v) = \phi_{v_1, v_2}(v) = b(v, v_2)v_1 - b(v, v_1)v_2, \quad \forall v, v_1, v_2 \in V.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissati  $v_1, v_2 \in V$ , abbiamo

$$b(\phi_{v_1, v_2}(v), v) = b(b(v, v_2)v_1 - b(v, v_1)v_2, v) = b(v, v_2)b(v_1, v) - b(v, v_1)b(v_2, v) = 0, \quad \forall v \in V,$$

e quindi la  $\phi_{v_1, v_2}$  definita dalla (10.6.1) è una rotazione infinitesima.

La  $V \times V \ni (v_1, v_2) \rightarrow \phi_{v_1, v_2} \in \mathfrak{so}_q(V)$  è bilineare alternata e quindi si estende in modo unico ad un'applicazione lineare  $\phi : \Lambda^2 V \rightarrow \mathfrak{so}_q(V)$ .

Poiché  $\phi_{v_1, v_2}^b = v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1 = v_1 \wedge v_2$ , la restrizione di  $b^b$  ad  $\mathfrak{so}_q(V)$  inverte  $\phi$ , che quindi è un isomorfismo lineare.  $\square$

**DEFINIZIONE X.6.2.** Chiamiamo la  $\phi_{v_1, v_2}$  definita dalla (10.6.1) *rotazione piana infinitesima di bi-vettore*  $v_1 \wedge v_2$ .

Se  $\mathbb{A}$  è un'algebra associativa, allora per ogni  $\xi_0 \in \mathbb{A}$  l'applicazione lineare  $D_{\xi_0} \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$  definita da

$$D_{\xi_0}(\xi) = [\xi_0, \xi] = \xi_0 \xi - \xi \xi_0, \quad \forall \xi \in \mathbb{A},$$

è una derivazione di  $\mathbb{A}$ .

Gli elementi  $D_{\xi}$  si dicono *derivazioni interne* di  $\mathbb{A}$ ; l'applicazione  $D : \mathbb{A} \ni \xi \rightarrow D_{\xi} \in \text{Der}(\mathbb{A})$  è un omomorfismo di algebre di Lie di  $\mathfrak{L}(\mathbb{A})$  in  $\text{Der}(\mathbb{A})$ , che ha come nucleo il centro  $Z(\mathbb{A})$  di  $\mathbb{A}$  e la cui immagine  $\text{Int}(\mathbb{A})$  è un ideale di  $\text{Der}(\mathbb{A})$ .

Sia  $\mathfrak{L}(\mathcal{C}\ell_q(V))$  l'algebra di Lie che si ottiene considerando sull'algebra associativa unitaria  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  il prodotto di commutazione

$$(10.6.2) \quad [\xi_1, \xi_2] = \xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{C}\ell_q(V).$$

Abbiamo un omomorfismo naturale di algebre di Lie

$$(10.6.3) \quad \mathfrak{L}(\mathcal{C}\ell_q(V)) \ni \xi \rightarrow D_{\xi} \in \text{Int}(\mathcal{C}\ell_q(V)) \subset \text{Der}(\mathcal{C}\ell_q(V)),$$

che ha come nucleo il centro  $Z(\mathcal{C}\ell_q(V))$  di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$ .

**LEMMA X.6.3.** *Il sottospazio vettoriale  $\mathfrak{g}_q$  di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  generato dagli elementi  $[v_1, v_2]$ , al variare di  $v_1, v_2$  in  $V$ , è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{L}(\mathcal{C}\ell_q(V))$ . L'applicazione<sup>6</sup>*

$$(10.6.4) \quad \rho : \mathfrak{so}_q(V) \simeq \Lambda^2 V \ni X \rightarrow \frac{1}{2} \pi(T) \in \mathfrak{g}_q \subset \mathfrak{L}(\mathcal{C}\ell_q(V))$$

è un isomorfismo di algebre di Lie, tale che

$$(10.6.5) \quad D_{\rho(T)}(v) = T(v), \quad \forall T \in \mathfrak{so}_q(V), \quad \forall v \in V.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $v_1, v_2 \in V \subset \mathcal{C}\ell_q(V)$ , è

$$(10.6.6) \quad \frac{1}{2}[v_1, v_2] = v_1 v_2 + \frac{1}{2}b(v_1, v_2) = -v_2 v_1 + \frac{1}{2}b(v_1, v_2).$$

Quindi, se  $v$  è un altro elemento di  $V$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}[v_1, v_2], v\right] &= [v_1 v_2, v] = v_1 v_2 v - v v_1 v_2 = -v_1(v v_2 + b(v, v_2)) + (v_1 v + b(v, v_1))v_2 \\ &= b(v_1, v)v_2 - b(v_2, v)v_1 = \phi_{v_1, v_2}(v). \end{aligned}$$

Poiché gli elementi di  $\mathfrak{so}_q(V)$  sono combinazioni lineari delle  $\phi_{v_1, v_2}$  e la  $\rho$  è lineare, questo dimostra la (10.6.5). Poiché  $V$  genera  $\mathcal{C}\ell_q(V)$ , una derivazione di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  è completamente determinata dalla sua restrizione a  $V$ . L'applicazione (10.6.4) è quindi un isomorfismo di  $\mathfrak{so}_q(V)$  su una sottoalgebra di derivazioni interne di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$ , che possiamo a sua volta identificare ad una sottoalgebra  $\mathfrak{g}$  di

<sup>6</sup> $\pi$  è la proiezione canonica  $\mathbf{T}(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell_q(V) = \mathbf{T}(V)/\mathbf{J}_q$ .



$\mathfrak{L}(\mathcal{C}\ell_q(V))$ , perché, essendo contenuta in  $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$  e non contenendo scalari non nulli, è trasversale al centro di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$ .  $\square$

LEMMA X.6.4. *Sia  $\xi \in \mathcal{C}\ell_q(V)$ . Se  $[\xi, v] \in V, \forall v \in V$ , allora  $\xi \in \mathfrak{g} \oplus Z(\mathcal{C}\ell_q(V))$ , ove abbiamo indicato con  $Z(\mathcal{C}\ell_q(V))$  il centro dell'algebra di Clifford.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\xi$  un elemento di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  tale che  $D_\xi(V) = [\xi, V] \subset V$ . Abbiamo allora, per ogni  $v \in V$ ,

$$-b(D_\xi(v), v) = [\xi, v]v + v[\xi, v] = \xi v^2 - v\xi v + v\xi v - v^2\xi = 0$$

perché  $v^2 = -q(v) \in \mathbb{k}$  commuta con  $\xi$ . Questo dimostra che la restrizione di  $D_\xi$  a  $V$  è un elemento di  $\mathfrak{so}_q(V)$  e quindi, per il Lemma X.6.3, possiamo trovare  $\xi_0 \in \mathfrak{g}$  tale che  $D_\xi$  e  $D_{\xi_0}$  coincidano su  $V$ . Questo implica che  $\xi - \xi_0$  appartenga al centro di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$ .  $\square$

Poiché il centro di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  è formato dai soli scalari se la dimensione di  $V$  è pari, e dagli scalari e gli pseudoscalari quando la dimensione di  $V$  è dispari, otteniamo la seguente caratterizzazione:

PROPOSIZIONE X.6.5. *L'algebra di Lie  $\mathfrak{g}_q$  è*

$$(10.6.7) \quad \mathfrak{g}_q = \{\xi \in \mathcal{C}\ell_q^0(V) \mid [\xi, V] \subset V, \xi + \beta(\xi) = 0\}.$$

Ogni elemento  $\xi \in \mathcal{C}\ell_q(V)$  definisce per moltiplicazione a sinistra un endomorfismo

$$(10.6.8) \quad L_\xi : \mathcal{C}\ell_q^0(V) \ni \eta \longrightarrow \xi\eta \in \mathcal{C}\ell_q(V).$$

Possiamo allora caratterizzare gli elementi della sottoalgebra di Lie  $\mathfrak{g}$  mediante

LEMMA X.6.6. *La sottoalgebra di Lie  $\mathfrak{g}_q = \pi(\Lambda^2 V)$  di  $\mathfrak{L}(\mathcal{C}\ell_q(V))$  è*

$$(10.6.9) \quad \mathfrak{g}_q = \{\xi \in \mathcal{C}\ell_q^0(V) \mid [\xi, V] \subset V, \text{traccia}(L_\xi) = 0\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma X.6, gli elementi di  $\{\xi \in \mathcal{C}\ell_q^0(V) \mid [\xi, V] \subset V\}$  si scrivono come somme  $\xi = \xi_0 + k_0$  con  $k_0 \in \mathbb{k}$  e  $\xi_0 \in \mathfrak{g}$  combinazione lineare di elementi della forma  $[v, w]$  con  $v, w \in V$ . Poiché  $L_{[v, w]} = [L_v, L_w]$ , è  $\text{traccia}(L_{[v, w]}) = 0$  per ogni  $v, w \in V$  e quindi  $\text{traccia}(L_{\xi_0}) = 0$ . Poiché  $\text{traccia}(L_{k_0}) = k_0 2^m$ , l'elemento  $\xi$  appartiene a  $\mathfrak{g}$  se e soltanto se  $\text{traccia}(\xi) = 0$ .  $\square$

## X.7. Il gruppo spinoriale

Gli elementi invertibili di un'algebra associativa unitaria  $\mathbb{A}$  formano un gruppo, che denotiamo con  $\mathbf{G}(\mathbb{A})$  e chiamiamo il *gruppo moltiplicativo* di  $\mathbb{A}$ .

Se l'algebra  $\mathbb{A}$  ha dimensione finita, tutti gli elementi che non sono divisori di zero sono invertibili. Infatti, dire che  $\xi$  non è un divisore (sinistro) di zero equivale al fatto che  $\ker L_\xi = \{0\}$ , e quindi che  $L_\xi$  sia un isomorfismo lineare di  $\mathbb{A}$ . In particolare, vi è un elemento  $\eta \in \mathbb{A}$  per cui  $\xi\eta = 1$ . Allora  $\xi(\eta\xi - 1) = 0$  e quindi anche  $\eta\xi = 1$  ed  $\eta$  è sia inversa destra che sinistra.

Sia

$$(10.7.1) \quad \mathbf{G}_V = \{\xi \in \mathbf{G}(\mathcal{C}\ell_q(V)) \mid \alpha(\xi)V\xi^{-1} = V\}.$$

PROPOSIZIONE X.7.1. Per ogni  $\xi \in \mathbf{G}_V$ , l'applicazione

$$(10.7.2) \quad \rho_\xi : V \ni v \longrightarrow \alpha(\xi)v\xi^{-1} \in V$$

è *b*-ortogonale. La

$$(10.7.3) \quad \rho : \mathbf{G}_V \ni \xi \longrightarrow \rho_\xi \in \mathbf{O}_q(V)$$

è un omomorfismo surgettivo di gruppi con nucleo  $\mathbb{k}^* = \{k \in \mathbb{k} \mid k \neq 0\}$ .

DIMOSTRAZIONE. Poiché  $\alpha$  è un automorfismo involutivo di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$ , abbiamo

$$\rho_\xi(v) = -\alpha(\rho_\xi(v)) = -\alpha(\alpha(\xi)v\xi^{-1}) = -\xi\alpha(v)\alpha(\xi^{-1}) = \xi v \alpha(\xi^{-1}).$$

Otteniamo perciò

$$\begin{aligned} q(\rho_\xi(v)) &= q(\alpha(\xi)v\xi^{-1}) = -(\alpha(\xi)v\xi^{-1})(\alpha(\xi)v\xi^{-1}) = -(\alpha(\xi)v\xi^{-1})(\xi v \alpha(\xi^{-1})) \\ &= -\alpha(\xi)v^2\alpha(\xi^{-1}) = q(v)\alpha(\xi)\alpha(\xi^{-1}) = q(v), \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Questo dimostra che  $\rho_\xi \in \mathbf{O}_q(V)$ .

La  $\rho$  è chiaramente un omomorfismo di gruppi. Se  $\xi \in \ker \rho$ , abbiamo

$$\alpha(\xi)v\xi^{-1} = v \implies \alpha(\xi)v = v\xi, \quad \forall v \in V,$$

e questo, per il Lemma X.4.4, implica che  $\xi$  sia uno scalare. Quindi  $\ker \rho = \mathbb{k}^*$ .

Infine, osserviamo che, se  $v$  è un vettore anisotropo di  $V$ , allora è un elemento invertibile di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  con inversa  $(-v/q(v))$ . Allora

$$\rho_v(w) = \alpha(v)wv^{-1} = -vwv^{-1} = (wv + b(w, v))v^{-1} = w - \frac{b(w, v)}{q(v)}v = s_v(w)$$

è la simmetria di vettore  $v$  in  $\mathbf{O}_q(V)$ . Poiché le simmetrie rispetto a vettori anisotropi generano  $\mathbf{O}_q(V)$  (vedi la Proposizione X.5.3), l'omomorfismo  $\rho$  è surgettivo.  $\square$

Dalla caratterizzazione delle simmetrie vettoriali nella dimostrazione della Proposizione X.7.1 ricaviamo

COROLLARIO X.7.2. I vettori anisotropi di  $V$  generano il gruppo  $\mathbf{G}_V$ . È  $\mathbf{G}_V = \mathbf{G}_V^0 \cup \mathbf{G}_V^1$ , con  $\mathbf{G}_V^i = \mathbf{G}_V \cap \mathcal{C}\ell_q^i(V)$ , per  $i = 0, 1$ . Gli elementi di grado pari formano un sottogruppo normale  $\mathbf{G}_V^0$  di indice due di  $\mathbf{G}_V$ , e  $\rho(\mathbf{G}_V^0) = \mathbf{SO}_q(V)$ .

DIMOSTRAZIONE. Se  $\xi \in \mathbf{G}_V$ , per la Proposizione X.5.3 possiamo trovare vettori anisotropi  $v_1, \dots, v_\ell$  (con  $\ell \leq m$ ) tali che  $\rho(\xi) = \rho(v_1 \cdots v_\ell)$ . Dalla Proposizione X.7.1 segue che  $\xi = (kv_1) \cdots v_\ell$ , con  $k \in \mathbb{k}^*$ . Questo dimostra che i vettori anisotropi generano  $\mathbf{G}_V$ . Le altre affermazioni seguono facilmente.  $\square$

In particolare, abbiamo le due successioni esatte

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{k}^* & \longrightarrow & \mathbf{G}_V & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{O}_q(V) \longrightarrow 0, \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{k}^* & \longrightarrow & \mathbf{G}_V^0 & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{SO}_q(V) \longrightarrow 0. \end{array}$$

### X.8. Algebre di Clifford e gruppi spinoriali complessi

Le algebre di Clifford degli spazi ortogonali complessi si possono rappresentare mediante gli endomorfismi delle algebre di Grassmann dei loro sottospazi isotropi massimali. Distinguiamo i casi di dimensione pari e dispari<sup>7</sup>.

**TEOREMA X.8.1.** *Se  $(V, q)$  è uno spazio ortogonale complesso di dimensione pari e  $W$  un suo sottospazio totalmente isotropo massimale, allora*

$$(10.8.1) \quad \mathcal{C}\ell_q(V) \simeq \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché abbiamo supposto che la dimensione  $m$  di  $V$  sia pari, diciamo uguale a  $2n$ , un sottospazio totalmente isotropo massimale  $W$  di  $V$  ha dimensione  $n$  ed ammette un complemento lineare  $W'$ , totalmente isotropo, anch'esso di dimensione  $n$ . La  $W \times W' \ni (w, w') \rightarrow b(w, w') \in \mathbb{C}$  stabilisce tra  $W$  e  $W'$  un accoppiamento di dualità. Indichiamo con  $\theta_{w'}$  la forma  $\theta_{w'}(w) = b(w, w')$  in  $W^*$  corrispondente a  $w' \in W'$ . Per costruire l'isomorfismo (10.8.1), consideriamo le applicazioni

$$\lambda_w : \Lambda^*W \ni \alpha \rightarrow w \wedge \alpha \in \Lambda^*W, \quad \delta_{w'} : \Lambda^*W \ni \alpha \rightarrow \theta_{w'} \lrcorner \alpha \in \Lambda^*W, \quad w \in W, \quad w' \in W'.$$

Ricordiamo che, se  $\theta \in W^*$  è un funzionale lineare su  $W$ , la  $\theta \lrcorner$  indica il *prodotto interno* per  $\theta$ : è cioè la restrizione a  $\Lambda^*W$  della derivazione di grado  $(-1)$  dell'algebra tensoriale di  $W$ , definita da

$$\theta \lrcorner 1 = 0, \quad \theta \lrcorner w = \theta(w), \quad \forall w \in W,$$

e che  $\lambda_w^2 = 0$ ,  $\delta_{w'}^2 = 0$ .

Definiamo un'applicazione lineare di  $V$  nell'algebra associativa degli endomorfismi dell'algebra di Grassmann di  $W$ , ponendo

$$\gamma : V \ni v \longrightarrow (\lambda_w - 2\delta_{w'}) \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^2W), \quad \text{ove } v = w + w' \text{ con } w \in W, \quad w' \in W'.$$

È

$$(\gamma(v))^2 = -2(\lambda_w \delta_{w'} + \delta_{w'} \lambda_w) = -b(v, v) I_{\Lambda^*W}.$$

Infatti, questa uguaglianza si riduce a  $\delta_{w'}^2 = 0$  quando  $w = 0$  e a  $\lambda_w^2 = 0$  quando  $w' = 0$ .

Se  $w \neq 0$ , possiamo fissare una base  $e_1, \dots, e_n$  di  $W$  con  $e_1 = w$ . Se  $W_1$  è il sottospazio di  $W$  generato da  $e_2, \dots, e_n$ , abbiamo  $\Lambda^*W = \Lambda^*W_1 \oplus e_1 \wedge \Lambda^*W_1$ .

Se  $b(w, w') = b(e_1, w') = 0$ , abbiamo

$$\begin{aligned} (\lambda_w \delta_{w'} + \delta_{w'} \lambda_w) \xi &= e_1 \wedge (\theta_{w'} \lrcorner \xi) + \theta_{w'} \lrcorner (e_1 \wedge \xi) = e_1 \wedge (\theta_{w'} \lrcorner \xi) - e_1 \wedge (\theta_{w'} \lrcorner \xi) = 0, \\ (\lambda_w \delta_{w'} + \delta_{w'} \lambda_w)(e_1 \wedge \xi) &= \lambda_w \delta_{w'}(e_1 \wedge \xi) = -\lambda_w(e_1 \wedge \theta_{w'} \lrcorner \xi) = -e_1 \wedge e_1 \wedge \theta_{w'} \lrcorner \xi = 0, \\ &\forall \xi \in \Lambda^*W_1, \end{aligned}$$

cioè  $(\gamma(v))^2 = 0$ .

<sup>7</sup>Corrispondono rispettivamente alle algebre di Lie semplici di tipo  $D$  e  $B$  nella classificazione di Cartan.

Se  $\hat{b}(w, w') \neq 0$ , possiamo fissare una base  $e_1, \dots, e_n$  di  $W$  con  $w = e_1$  e  $\hat{b}(w', e_i) = 0$  se  $2 \leq i \leq n$ . Indichiamo con  $W_1$  il sottospazio di  $W$  generato da  $e_2, \dots, e_n$ . È  $\Lambda^* W = \Lambda^* W_1 \oplus (e_1 \wedge \Lambda^* W_1)$ . Poiché  $\delta_{w'}(\Lambda^* W_1) = \{0\}$ , otteniamo

$$\delta_{w'}(\xi) = 0, \quad \delta_{w'}(e_1 \wedge \xi) = \hat{b}(w, w')\xi, \quad \lambda_w(\xi) = e_1 \wedge \xi, \quad \lambda_w(e_1 \wedge \xi) = 0, \quad \forall \xi \in \Lambda^* W_1.$$

Quindi, per ogni  $\xi \in \Lambda^* W_1$ , abbiamo:

$$[\gamma(v)]^2(\xi) = 2(\lambda_w - \delta_{w'})(e_1 \wedge \xi) = -2\hat{b}(w, w')\xi = -\hat{b}(v, v)\xi,$$

$$[\gamma(v)]^2(e_1 \wedge \xi) = -2(\lambda_w - \delta_{w'})[\hat{b}(w, w')\xi] = -2\hat{b}(w, w')e_1 \wedge \xi = -\hat{b}(v, v)[e_1 \wedge \xi].$$

Si verifica facilmente che le  $\lambda_w$  e le  $\delta_{w'}$  generano l'algebra associativa unitaria degli endomorfismi di  $\Lambda^* W$ . Quindi l'estensione  $\tilde{\gamma} : \mathcal{C}\ell_q(V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^* W)$  è surgettiva ed un isomorfismo perché le due algebre hanno la stessa dimensione.  $\square$

**DEFINIZIONE X.8.2.** Sia  $(V, q)$  uno spazio ortogonale complesso di dimensione pari e  $W$  un suo sottospazio isotropo massimale.

Chiamiamo gli elementi di  $\Lambda^* W$  *spinori* di  $(V, q)$  e l'isomorfismo

$$\zeta_W : \mathcal{C}\ell_q(V) \xrightarrow{\cong} \text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^* W)$$

una *rappresentazione spinoriale* dell'algebra di Clifford di  $(V, q)$ .

**TEOREMA X.8.3.** Sia  $(V, q)$  uno spazio ortogonale complesso di dimensione dispari e  $V = W \oplus W' \oplus U$  una decomposizione di  $V$  nella somma diretta di due sottospazi isotropi massimali e di una retta anisotropa ad essi ortogonale. Abbiamo allora un isomorfismo

$$(10.8.2) \quad \mathcal{C}\ell_q(V) \simeq \text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^* W) \oplus \text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^* W').$$

**DIMOSTRAZIONE.** La  $W \times W' \ni (w, w') \rightarrow \hat{b}(w, w')$  è un accoppiamento di dualità, che ci permette di associare ad ogni  $w \in W$  il funzionale  $\theta'_w(w') = \hat{b}(w, w')$  su  $W'$  e ad ogni  $w' \in W'$  il funzionale  $\theta_w(w) = \hat{b}(w, w')$  su  $W$ .

Ai vettori  $w \in W$  e  $w' \in W'$  associamo le applicazioni lineari

$$\begin{aligned} \lambda_w : \Lambda^* W &\xrightarrow{w \wedge} \Lambda^* W, & \delta_{w'} : \Lambda^* W' &\xrightarrow{\theta_{w'} \downarrow} \Lambda^* W, \\ \lambda'_{w'} : \Lambda^* W' &\xrightarrow{w' \wedge} \Lambda^* W', & \delta'_w : \Lambda^* W &\xrightarrow{\theta_w \downarrow} \Lambda^* W'. \end{aligned}$$

Ricordiamo che le  $\delta_{w'}$ ,  $\delta'_w$  sono restrizioni a  $\Lambda^* W$  e  $\Lambda^* W'$  delle derivazioni di grado  $(-1)$  delle algebre tensoriali di  $W$  e di  $W'$ , definite da

$$\delta_{w'}(w) = \hat{b}(w', w), \quad \delta'_w(w') = \hat{b}(w, w'), \quad \forall w \in W, w' \in W'.$$

Fissiamo  $e_0 \in U$  con  $\hat{b}(e_0, e_0) = -1$  e per ogni  $u \in U$  siano

$$\tau_u \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^* W), \quad \tau'_u \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^* W')$$

le applicazioni lineari definite, sugli elementi omogenei, da

$$\tau_u(\xi) = (-1)^q \hat{b}(u, e_0)\xi, \quad \tau'_u(\xi') = (-1)^{q'} \hat{b}(u, e_0)\xi', \quad \text{se } \xi \in \Lambda^q W, \xi' \in \Lambda^{q'} W'.$$

Poniamo

$$\gamma : V \ni v \rightarrow (\lambda_w - 2\delta_{w'} + \tau_u) \oplus (\lambda'_{w'} - 2\delta'_w + \tau'_u) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^* W) \oplus \text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^* W'),$$

$$v = w + w' + u, \quad w \in W, \quad w' \in W', \quad u \in U.$$

Poiché  $\tau_u$  anti-commuta con  $\lambda_w$  e  $\delta_{w'}$ , e  $\tau'_u$  con  $\lambda'_{w'}$  e  $\delta'_w$ , abbiamo, utilizzando l'argomento della dimostrazione precedente,

$$[\gamma(v)]^2 = -b(v, v)(I_{\Lambda^*W} \oplus I_{\Lambda^*W'}), \quad \forall v \in V.$$

Per la proprietà universale delle algebre di Clifford, la  $\gamma$  si estende ad un omomorfismo  $\tilde{\gamma}$  di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  nella somma diretta  $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W) \oplus \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W')$ .

Sia  $e_0, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_n$  una base di  $V$  ( $m = \dim_{\mathbb{C}} V = 2n + 1$ ) con  $e_0 \in U$ ,  $e_1, \dots, e_n$  base di  $W$ ,  $e'_1, \dots, e'_n$  base di  $W'$  e

$$b(e_0, e_0) = -1, \quad b(e_0, e_i) = 0, \quad b(e_0, e'_i) = 0, \quad b(e_i, e_j) = 0, \quad b(e'_i, e'_j) = 0, \quad b(e_i, e'_j) = \delta_{i,j}, \\ \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

I vettori

$$(10.8.3) \quad e_0, (e_1 - \frac{1}{2}e'_1), i(e_1 + \frac{1}{2}e'_1), \dots, (e_n - \frac{1}{2}e'_n), i(e_n + \frac{1}{2}e'_n)$$

formano una base ortogonale di  $(V, q)$  i cui elementi hanno tutti quadrato  $-1$ . Definiamo lo pseudoscalare

$$\eta = ie_0(e_1 + \frac{1}{2}e'_1)(e_1 - \frac{1}{2}e'_1) \cdots (e_n + \frac{1}{2}e'_n)(e_n - \frac{1}{2}e'_n) \in \mathcal{C}\ell_q^-(V).$$

È  $\eta^2 = 1$ . Quindi  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  si decompone nella somma diretta degli autospazi

$$\mathcal{C}\ell_q^+(V) = \{\xi \in \mathcal{C}\ell_q(V) \mid \eta \cdot \xi = \xi\}, \quad \text{e} \quad \mathcal{C}\ell_q^-(V) = \{\xi \in \mathcal{C}\ell_q(V) \mid \eta \cdot \xi = -\xi\},$$

che sono ideali bilateri, perché, essendo  $\dim_{\mathbb{C}} V$  dispari, gli pseudoscalari stanno nel centro di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$ .

Ad  $\eta$  corrispondono su  $\Lambda^*W$  e  $\Lambda^*W'$  gli endomorfismi

$$2^{-n}\tau_{e_0} \circ (\delta_{e'_1}\lambda_{e_1} - \lambda'_{e'_1}\delta'_{e_1}) \circ \cdots \circ (\delta_{e'_n}\lambda_{e_n} - \lambda'_{e'_n}\delta'_{e_n}) = I_{\Lambda^*W}, \\ 2^{-n}\tau_{e_0} \circ (\lambda'_{e'_1}\delta'_{e_1} - \delta_{e_1}\lambda_{e'_1}) \circ \cdots \circ (\lambda'_{e'_n}\delta'_{e_n} - \delta_{e_n}\lambda_{e'_n}) = -I_{\Lambda^*W'}.$$

Gli ideali  $\mathcal{C}\ell_q^{\mp}(V)$  sono i nuclei degli omomorfismi

$$(10.8.4) \quad \zeta_W : \mathcal{C}\ell_q(V) \rightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W) \quad \text{e} \quad \zeta_{W'} : \mathcal{C}\ell_q(V) \rightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W')$$

di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  su  $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W)$  e su  $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W')$ , ottenuti componendo  $\tilde{\gamma}$  con le proiezioni. Infatti, per la discussione del caso della dimensione pari, sono surgettivi. Poiché  $\mathcal{C}\ell_q^-(V) \subset \ker \zeta_W$ ,  $\mathcal{C}\ell_q^+(V) \subset \ker \zeta_{W'}$ , i due sottospazi coincidono perché hanno la stessa dimensione. Questo completa la dimostrazione dell'isomorfismo.  $\square$

**DEFINIZIONE X.8.4.** Sia  $(V, q)$  uno spazio ortogonale complesso di dimensione dispari e  $W, W'$  due suoi sottospazi totalmente isotropi massimali con  $W \cap W' = \{0\}$ .

Gli elementi di  $\Lambda^*W \oplus \Lambda^*W'$  si dicono spinori di  $(V, q)$  e l'isomorfismo  $\zeta_W \oplus \zeta_{W'}$  di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  su  $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W) \oplus \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W')$  una *rappresentazione spinoriale* della sua algebra di Clifford.

OSSERVAZIONE X.8.5. In particolare,  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  è *semplice centrale* se e soltanto se  $V$  ha dimensione pari, mentre, quando  $V$  ha dimensione dispari,  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  si decompone nella somma diretta di due ideali bilateri, ciascuno semplice centrale, che sono autospazi per la moltiplicazione per gli pseudoscalari.

PROPOSIZIONE X.8.6. Se  $V'$  è un iperpiano anisotropo dello spazio ortogonale complesso  $(V, q)$ , allora  $\mathcal{C}\ell_q^0(V) \simeq \mathcal{C}\ell_{b'}(V')$ , ove  $b' = b|_{V'}$ .

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo in  $V'^\perp$  un vettore  $e_0$  con  $b(e_0, e_0) = 1$ . I vettori di  $V'$  anti-commutano in  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  con  $e_0$  e quindi l'applicazione

$$\psi : V' \ni v' \rightarrow e_0 v' \in \mathcal{C}\ell_b^0(V)$$

soddisfa

$$(e_0 v')^2 = e_0 v' e_0 v' = -e_0^2 [v']^2 = [v']^2 = -b'(v', v'), \quad \forall v' \in V'.$$

Per la proprietà universale  $\psi$  si estende ad un omomorfismo  $\tilde{\psi} : \mathcal{C}\ell_{b'}(V') \rightarrow \mathcal{C}\ell_b^0(V)$ . Chiaramente  $\mathcal{C}\ell_q(V) = \tilde{\psi}(\mathcal{C}\ell_{b'}(V')) + e_0 \cdot \tilde{\psi}(\mathcal{C}\ell_{b'}(V'))$ , e quindi l'immagine di  $\tilde{\psi}$  coincide con  $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$  e, poiché le due algebre hanno la stessa dimensione, è un isomorfismo.  $\square$

NOTAZIONE X.8.7. Se  $V$  ha dimensione dispari e  $V = W \oplus W' \oplus U$  una decomposizione di  $(V, q)$  nella somma diretta di due spazi isotropi massimali  $W, W'$  e di una retta  $U$  ortogonale a  $W \oplus W'$ , definiamo gli spazi di *spinori*

$$(10.8.5) \quad S = \Lambda^* W, \quad S' = \Lambda^* W'.$$

Se  $V$  ha dimensione pari  $2n$  e  $V = W \oplus W'$  una decomposizione di  $(V, q)$  nella somma diretta di due spazi isotropi massimali  $W, W'$  definiamo gli spazi di *spinori*

$$(10.8.6) \quad S = \Lambda^* W, \quad S^+ = \sum_{h=0}^n \Lambda^{2h} W, \quad S^- = \sum_{h=0}^{n-1} \Lambda^{2h+1} W.$$

Gli elementi di  $S^+$  si dicono *destrorsi* o con *chiralità positiva*, quelli di  $S^-$  *sinistrorsi* o con *chiralità negativa*.

*Spinori di Pauli.* Se  $V$  ha dimensione dispari, la rappresentazione  $S$  è irriducibile. I vettori di  $S$  sono noti in fisica come *spinori di Pauli* e le matrici di  $\text{End}_{\mathbb{C}}(S)$  corrispondenti a una base ortonormale di  $V$  *matrici di Pauli*. L'azione di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  su  $S$ , come abbiamo visto non è fedele (lo è quella di  $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$ ), ma lo è la somma diretta delle rappresentazioni  $S$  ed  $S'$ , che si dice *rappresentazione di Cartan*.

*Spinori di Dirac.* Se  $V$  ha dimensione pari, gli elementi di  $S$  si dicono *spinori di Dirac*. Su di essi la rappresentazione di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$  è irriducibile, mentre quella di  $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$  si decompone nella somma diretta delle due rappresentazioni irriducibili  $S^+$  ed  $S^-$ , caratterizzate dalla segnatura dello pseudoscalare  $\eta$ , (operatore di *chiralità*). Gli elementi di  $S_+$  od  $S_-$  sono gli *spinori di Weyl*, o *chirali*<sup>8</sup>.

<sup>8</sup>In greco  $\chi \in \rho$  significa *mano*. Un oggetto *chirale* non coincide con la sua immagine speculare.

**X.8.1. Rappresentazione spinoriale dell'algebra ortogonale.** Nel caso complesso, possiamo precisare i risultati del § X.6 con la seguente:

- PROPOSIZIONE X.8.8. (1) Se  $V$  ha dimensione dispari e  $W$  è un sottospazio isotropo massimale di  $(V, q)$ , allora la  $\zeta_W \circ \rho : \mathfrak{so}_q(V) \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(S)$  definisce una rappresentazione irriducibile di  $\mathfrak{so}_q(V)$  su  $S = \Lambda^* W$ .
- (2) Se  $V$  ha dimensione pari  $2m$  e  $W$  un sottospazio isotropo massimale di  $(V, q)$ , allora la  $\zeta_W \circ \rho$  si decompone nella somma diretta di due rappresentazioni irriducibili, rispettivamente su

$$S^+ = \sum_{h=0}^m \Lambda^{2h} W \quad \text{ed} \quad S^- = \sum_{h=0}^{m-1} \Lambda^{2h+1} W.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario ??, le rappresentazioni lineari di  $\mathfrak{so}_q(V)$  si estendono a rappresentazioni lineari di  $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$ , e sono quindi irriducibili quando lo sono le corrispondenti rappresentazioni di  $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$ .  $\square$

### X.9. Algebre di Clifford reali di segnatura $(p, q)$

Possiamo generalizzare le algebre di Clifford considerando su uno spazio vettoriale reale  $V$  una forma quadratica non degenera di segnatura  $(p, q)$ . Indichiamo con  $\mathbb{R}^{p,q}$  lo spazio vettoriale reale  $\mathbb{R}^{p+q}$  su cui abbiamo fissato una forma bilineare simmetrica di segnatura  $(p, q)$ .

DEFINIZIONE X.9.1. L'algebra di Clifford  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$  è l'algebra reale associativa ed unitaria generata da  $\mathbb{R}^{p+q}$ , modulo le relazioni

$$(10.9.1) \quad (v+w)^2 + \|v\|^2 - \|w\|^2 = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p, \quad \forall w \in \mathbb{R}^q.$$

$\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$  è l'algebra associativa unitaria generata da  $p+q$  elementi

$$(10.9.2) \quad \begin{cases} e_1, \dots, e_p, \epsilon_1, \dots, \epsilon_q, & \text{tali che} \\ e_i^2 = -1, \quad \epsilon_j^2 = 1, \\ e_i e_j = -e_j e_i, \quad \epsilon_i \epsilon_j = -\epsilon_j \epsilon_i, \quad e_i \epsilon_j = -\epsilon_j e_i. \end{cases}$$

La complessificazione di  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$  è l'algebra complessa  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{C}^{p+q})$ . In particolare, la struttura di  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$  dipende dalla natura dello pseudo-scalare

$$(10.9.3) \quad \eta_{p,q} = e_1 \cdots e_p \epsilon_1 \cdots \epsilon_q.$$

Esso appartiene al centro di  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$  se e soltanto se  $p+q$  è dispari e, in questo caso, determina la decomposizione di  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$  nella somma di due ideali bilateri se e soltanto se ha quadrato 1.

Abbiamo

$$(10.9.4) \quad \eta_{p,q}^2 = (-1)^{\frac{1}{2}(p+q)(p+q-1)+p} = \begin{cases} +1 & \text{se } q-p \equiv 0, 1 \pmod{4}, \\ -1 & \text{se } q-p \equiv 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Infatti, posto  $q-p=r$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(p+q)(p+q-1)+p &= \frac{1}{2}(2p+r)(2p+r-1)+p \\ &= \frac{1}{2}(4p^2+4pr+r^2-2p-r)+p \equiv \frac{1}{2}r(r-1) \pmod{2}. \end{aligned}$$

La classificazione completa delle algebre di Clifford reali è data dalla seguente tabella, in cui nella prima colonna è riportata la classe di equivalenza di  $q - p$  modulo 8, nella seconda il segno più o meno a seconda che  $\eta_{p,q}^2$  sia l'identità di  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$  o la sua opposta e nella terza l'algebra, o somma diretta di algebre di matrici, equivalente.

TEOREMA X.9.2.

$q - p \pmod 8$	$\eta_{p,q}^2/\mathbf{1}_{p,q}$	$\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}) \quad (p+q=n)$
0	+	$\mathbb{R}(2^{n/2})$
1	+	$\mathbb{R}(2^{(n-1)/2}) \oplus \mathbb{R}(2^{(n-1)/2})$
2	-	$\mathbb{R}(2^{n/2})$
3	-	$\mathbb{C}(2^{(n-1)/2})$
4	+	$\mathbb{H}(2^{(n-2)/2})$
5	+	$\mathbb{H}(2^{(n-3)/2}) \oplus \mathbb{H}(2^{(n-3)/2})$
6	-	$\mathbb{H}(2^{(n-2)/2})$
7	-	$\mathbb{C}(2^{(n-1)/2})$

Infatti, quando  $n = p+q$  è pari, la complessificazione  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{C}^n)$  ed anche  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$  è semplice centrale e quindi isomorfa ad un'algebra di matrici reali o quaternioniche.

Quando  $n$  è dispari,  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$  è la somma di due algebre reali centrali semplici quando  $\eta_{p,q}^2 = \mathbf{1}_{p,q}$ , perché le  $P_{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_{p,q} \pm \eta_{p,q})$  sono in questo caso omomorfismi idempotenti, ed è isomorfa ad un'algebra centrale semplice complessa nel caso in cui  $\eta_{p,q}^2 = -\mathbf{1}_{p,q}$ .

Per completare la dimostrazione del teorema di classificazione, possiamo utilizzare il seguente

LEMMA X.9.3. *Valgono i seguenti isomorfismi:*

$$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{q+2,p}), \quad \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{q,p+2}) \simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p+1,q+1}).$$

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con  $\mathbb{R}^{2,0}$  un sottospazio di dimensione due di quaternioni immaginari, e con  $\mathbb{R}^{1,1}$  ed  $\mathbb{R}^{0,2}$  i sottospazi

$$\mathbb{R}^{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} t & t+s \\ t-s & \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathbb{R}^{0,2} = \left\{ \begin{pmatrix} t & s \\ s & -t \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

di  $\mathbb{R}^2$ . Essi ci permettono di identificare  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{1,1})$  e  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,2})$  all'algebra  $\mathbb{R}(2)$  delle matrici reali  $2 \times 2$ . Osserviamo che, con questa identificazione,

$$\eta_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta_{0,2} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

Consideriamo le applicazioni lineari

$$\begin{aligned} \phi_{q+2,p} : \mathbb{R}^{p+q+2} \simeq \mathbb{R}^{2,0} \oplus \mathbb{R}^{p,q} \ni (w, v) &\longrightarrow w \otimes \mathbf{1}_{p,q} + \eta_{2,0} \otimes v \in \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}), \\ \phi_{q,p+2} : \mathbb{R}^{p+q+2} \simeq \mathbb{R}^{0,2} \oplus \mathbb{R}^{p,q} \ni (w, v) &\longrightarrow w \otimes \mathbf{1}_{p,q} + \eta_{0,2} \otimes v \in \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}), \\ \phi_{p+1,q+1} : \mathbb{R}^{p+q+2} \simeq \mathbb{R}^{0,2} \oplus \mathbb{R}^{p,q} \ni (w, v) &\longrightarrow w \otimes \mathbf{1}_{p,q} + \eta_{1,1} \otimes v \in \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}). \end{aligned}$$



Ricordiamo che  $\eta_{i,j}$  anti-commuta con gli elementi di  $\mathbb{R}^{i,j}$  e che  $\eta_{i,j}^2 = (-1)^{ij} \mathbf{1}_{i,j}$  se  $0 \leq i, j \leq 2$  ed  $i + j = 2$ .

Si verifica che  $(\phi_{h,k}(w \oplus v, w \oplus v))^2 = b_{h,k}(w \oplus v, w \oplus v) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$  e che le  $\phi_{h,k}$  si estendono quindi agli isomorfismi delle algebre di Clifford dell'enunciato.  $\square$

**DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA X.9.2.** Se  $q = 0$ , l'enunciato è conseguenza dei Teoremi X.2.6 e X.2.7. Consideriamo poi il caso in cui  $p = 0$ . È  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,1}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,2}) \simeq \mathbb{R}(2)$  e  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,q}) \simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{q-2,0})$  se  $q > 2$ . Questo dà gli isomorfismi della tabella per  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,q})$ . Il caso generale si può ora dimostrare per induzione su  $q$ . Abbiamo già osservato che l'enunciato è valido per  $q = 0$ . Se è valido per un  $q \geq 0$  fissato, utilizziamo il fatto che per le considerazioni precedenti  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,q+1})$  è ancora dato dalla tabella, mentre  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q+1}) \simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p-1,q})$  se  $p \geq 1$ . La tesi segue allora per ricorrenza dagli isomorfismi:

$$\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2^m) \simeq \mathbb{R}(2^{m+1}), \quad \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}(2^m) \simeq \mathbb{C}(2^{m+1}), \quad \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2^m) \simeq \mathbb{H}(2^{m+1}),$$

che esprimono il fatto che il prodotto tensoriale per  $\mathbb{R}(2)$  preserva la classe di Brauer di un'algebra centrale semplice<sup>9</sup>.  $\square$

Un caso particolarmente importante per le applicazioni fisiche è quello delle algebre  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n,1})$  che si dicono anche di tipo *spazio-tempo*. Ricordando che  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n,1}) \simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n-1,0})$  se  $n \geq 1$ , otteniamo

**PROPOSIZIONE X.9.4.** *Valgono gli isomorfismi:*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,1}) &\simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{1,1}) &\simeq \mathbb{R}(2), \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{2,1}) &\simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^1) \simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}(2), \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{3,1}) &\simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{H}(2), \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{4,1}) &\simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) \simeq \mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2), \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{5,1}) &\simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2) \simeq \mathbb{H}(4), \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{6,1}) &\simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}(4) \simeq \mathbb{C}(8), \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{7,1}) &\simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(8) \simeq \mathbb{R}(16), \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{8,1}) &\simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)) \simeq \mathbb{R}(16) \oplus \mathbb{R}(16), \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n+8,1}) &\simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n,1}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16) \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

## X.10. I gruppi spinoriali

In questo paragrafo  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita  $m$  sul campo  $\mathbb{k}$  ( $= \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) e  $b$  una forma  $\mathbb{k}$ -bilinare simmetrica non degenera su  $V$ . Scriveremo per semplicità  $\mathcal{C}\ell(V)$  invece che  $\mathcal{C}\ell_q(V)$ .

<sup>9</sup>C. T. C. Wall, *Graded Brauer groups*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **213** (1964), pp. 187-199.

LEMMA X.10.1. *L'insieme  $\mathcal{C}\ell_*(V)$  degli elementi invertibili di  $\mathcal{C}\ell(V)$  è un gruppo di Lie di dimensione  $2^m$ .*

DIMOSTRAZIONE. Infatti<sup>10</sup>,  $\mathcal{C}\ell_*(V)$  è l'immagine inversa di  $\mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(\mathcal{C}\ell(V))$  mediante l'applicazione lineare  $L : \mathcal{C}\ell(V) \rightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(\mathcal{C}\ell(V))$  che fa corrispondere a  $\xi \in \mathcal{C}\ell(V)$  la moltiplicazione a sinistra  $L(\xi) : \mathcal{C}\ell(V) = \eta \rightarrow \xi\eta \in \mathcal{C}\ell(V)$ .  $\square$

Siano  $\beta, \gamma$  le anti-involuzioni definite in §X.4.

DEFINIZIONE X.10.2. I gruppi pinoriale  $\mathbf{Pin}(V)$  e spinoriale  $\mathbf{Spin}(V)$  sono definiti in modo diverso a seconda che il campo  $\mathbb{k}$  sia  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

Se  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ , definiamo

$$(10.10.1) \quad \mathbf{Pin}(V) = \{\xi \in \mathcal{C}\ell(V) \mid \xi \cdot \beta(\xi) = \pm 1, \xi \cdot V \cdot \beta(\xi) \subset V\},$$

$$(10.10.2) \quad \mathbf{Spin}(V) = \mathbf{Pin}(V) \cap \mathcal{C}\ell^0(V).$$

Se  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ , poniamo

$$(10.10.3) \quad \mathbf{Pin}(V) = \{\xi \in \mathcal{C}\ell(V) \mid \xi \cdot \beta(\xi) = 1, \xi \cdot V \cdot \beta(\xi) \subset V\},$$

$$(10.10.4) \quad \mathbf{Spin}(V) = \mathbf{Pin}(V) \cap \mathcal{C}\ell^0(V).$$

Indichiamo poi con  $\mathbf{Spin}^0(V)$  la componente connessa dell'identità di  $\mathbf{Spin}(V)$ .

Si verifica immediatamente:

PROPOSIZIONE X.10.3.  $\mathbf{Pin}(V)$  e  $\mathbf{Spin}(V)$  sono sottogruppi chiusi di  $\mathcal{C}\ell_*(V)$ .  $\square$

ESEMPIO X.10.4. Abbiamo  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} w & z \\ z & w \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$  e  $\beta$  è l'identità. Quindi  $\mathbf{Pin}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & \\ & \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \epsilon \\ \epsilon & \end{pmatrix} \mid \epsilon = \pm 1, \pm i \right\}$ ,  $\mathbf{Spin}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & \\ & \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \epsilon \\ \epsilon & \end{pmatrix} \mid \epsilon = \pm 1, \pm i \right\}$ ,  $\mathbf{Spin}^0(\mathbb{C}) = \{I_2\}$ .

È poi  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}(2)$ , con  $\mathbb{C}^2$  identificato allo spazio vettoriale delle matrici anti-diagonali. Allora  $\beta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$  scambia tra loro i coefficienti della diagonale principale. Otteniamo quindi

$$\mathbf{Pin}(\mathbb{C}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & \\ & z^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & z \\ z^{-1} & \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\},$$

$$\mathbf{Spin}(\mathbb{C}^2) = \mathbf{Spin}^0(\mathbb{C}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & \\ & z^{-1} \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}.$$

Consideriamo ora i gruppi pinoriali e spinoriali associati a spazi ortogonali reali di dimensione uno e due. Abbiamo (si veda la classificazione in §X.9):

$$\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{1,0}) \simeq \mathbb{C} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad \beta = \text{Id},$$

<sup>10</sup>Ricordiamo che, poiché  $\mathcal{C}\ell(V)$  è associativa, unitaria e di dimensione finita, i suoi elementi che ammettono un'inversa destra sono invertibili.

$$\mathbf{Pin}(\mathbb{R}^{1,0}) = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & \\ & \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \epsilon \\ -\epsilon & \end{pmatrix} \mid \epsilon = \pm 1 \right\},$$

$$\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{1,0}) = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & \\ & \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \epsilon \\ -\epsilon & \end{pmatrix} \mid \epsilon = \pm 1 \right\}, \quad \mathbf{Spin}^0(\mathbb{C}) = \{I_2\}.$$

$$\mathcal{E}l(\mathbb{R}^{0,1}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad \beta = \text{Id},$$

$$\mathbf{Pin}(\mathbb{R}^{1,0}) = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & \\ & \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \epsilon \\ \epsilon & \end{pmatrix} \mid \epsilon = \pm 1 \right\},$$

$$\mathbf{Spin}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & \\ & \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \epsilon \\ \epsilon & \end{pmatrix} \mid \epsilon = \pm 1 \right\}, \quad \mathbf{Spin}^0(\mathbb{C}) = \{I_2\}.$$

$$\mathcal{E}l(\mathbb{R}^{2,0}) = \mathbb{H} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}, \quad \beta \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z} & w \\ -\bar{w} & z \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Pin}(\mathbb{R}^{2,0}) = \left\{ \begin{pmatrix} z & \\ & \bar{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & z \\ -\bar{z} & \end{pmatrix} \mid |z| = 1 \right\},$$

$$\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{2,0}) = \mathbf{Spin}^0(\mathbb{R}^{2,0}) \left\{ \begin{pmatrix} z & \\ & \bar{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & z \\ -\bar{z} & \end{pmatrix} \mid |z| = 1 \right\}.$$

$$\mathcal{E}l(\mathbb{R}^{1,1}) \simeq \mathbb{R}(2), \quad \beta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Pin}(\mathbb{R}^{1,1}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & \pm a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a \\ \pm a^{-1} & \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

$$\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{1,1}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & \pm a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a \\ \pm a^{-1} & \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

$$\mathbf{Spin}^0(\mathbb{R}^{1,1}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a \\ a^{-1} & \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

$$\mathcal{E}l(\mathbb{R}^{0,2}) \simeq \mathbb{R}(2), \quad \beta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Pin}(\mathbb{R}^{0,2}) = \mathbf{O}(2),$$

$$\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{0,2}) = \mathbf{Spin}^0(\mathbb{R}^{0,2}) = \mathbf{SO}(2).$$

Ricordiamo che, se  $w$  è un vettore anisotropo di  $(V, q)$ , la *simmetria* di vettore  $w$  è l'applicazione

$$s_v : V \ni v \longrightarrow v - 2 \frac{\hat{b}(v, w)}{\hat{b}w, w} w \in V.$$

LEMMA X.10.5. *Se  $w \in V$  è anisotropo, allora*

$$(10.10.5) \quad wvw = \hat{b}(w, w)s_w(v), \quad \forall v \in V.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$0 = w(vw + wv + 2\hat{b}(v, w)) = wvw - \hat{b}(w, w)v + 2\hat{b}(v, w)w, \quad \forall v \in V,$$

da cui segue la (10.10.5).  $\square$

OSSERVAZIONE X.10.6. Se  $v$  è  $b$ -isotropo, allora  $wvw = -2b(v, w)w$ ,  $\forall v \in V$ .

OSSERVAZIONE X.10.7. Se  $e_1, \dots, e_m$  è una base ortonormale di  $(V, q)$ , allora per lo pseudoscalare  $\eta = e_1 \dots e_m$  risulta

$$(10.10.6) \quad \eta v \beta(\eta) = -v, \quad \forall v \in V.$$

TEOREMA X.10.8. Sia  $(V, q)$ , con  $\dim_{\mathbb{k}} V \geq 2$ .

(a) Per ogni  $\xi \in \mathbf{Pin}(V)$  l'applicazione

$$(10.10.7) \quad \rho(\xi) : V \ni v \longrightarrow \xi \cdot v \cdot \beta(\xi) \in V$$

è una trasformazione di  $\mathbf{O}_b(V)$ .

(b) La

$$(10.10.8) \quad \rho : \mathbf{Pin}(V) \longrightarrow \rho(\xi) \in \mathbf{O}_b(V)$$

è un epimorfismo di gruppi con nucleo  $\{\pm 1\}$  ed un rivestimento a due fogli.

(c) Gli elementi di  $\mathbf{Pin}(V)$  sono  $\pm 1$  ed i prodotti di un numero finito di vettori  $v \in V$  con  $v^2 = \pm 1$ .

(d) Il sottogruppo  $\mathbf{Spin}(V)$  è un sottogruppo normale di indice due in  $\mathbf{Pin}(V)$  e  $\rho(\mathbf{Spin}(V)) = \mathbf{SO}_q(V)$ . L'applicazione

$$(10.10.9) \quad \rho : \mathbf{Spin}(V) \longrightarrow \mathbf{SO}_q(V)$$

è un rivestimento a due fogli.

(e) Se  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ , oppure se  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  e  $b$  è definita, allora  $\mathbf{Spin}^0(V) = \mathbf{Spin}(V)$ .

(f) Se  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  e la forma  $b$  ha indice di Witt positivo, allora  $\mathbf{Spin}^0(V)$  è la componente connessa dell'identità di  $\mathbf{Pin}(V)$  ed è un sottogruppo di indice due in  $\mathbf{Spin}(V)$  e di indice 4 in  $\mathbf{Pin}(V)$ .

(g) L'algebra di Lie di  $\mathbf{Pin}(V)$ ,  $\mathbf{Spin}(V)$ ,  $\mathbf{Spin}^0(V)$  è isomorfa all'algebra di Lie  $\mathfrak{so}_q(V)$ .

DIMOSTRAZIONE. I casi con  $\dim_{\mathbb{k}} V \leq 2$  sono già stati discussi nell'Esempio X.10.4. Supporremo quindi nel seguito della dimostrazione che  $\dim_{\mathbb{k}} V \geq 3$ .

(a). Sia  $\xi \in \mathbf{Pin}(V)$  e  $\xi \beta(\xi) = \beta(\xi) \xi = \epsilon_{\xi} \in \{\pm 1\}$ . Se  $v \in V$ , allora

$$\begin{aligned} b(\rho(\xi)(v), \rho(\xi)(v)) &= -(\xi v \beta(\xi))^2 = -\xi v \beta(\xi) \xi v \beta(\xi) = -\epsilon_{\xi} \xi v^2 \beta(\xi) \\ &= \epsilon_{\xi} \xi \cdot b(v, v) \cdot \beta(\xi) = \epsilon_{\xi}^2 b(v, v) = b(v, v). \end{aligned}$$

Questo dimostra che  $\rho(\xi) \in \mathbf{O}_q(V)$ .

(b). Per il Lemma X.10.5, la  $\rho(\mathbf{Pin}(V))$  contiene tutte le simmetrie rispetto a vettori anisotropi di  $V$ . Poiché esse generano  $\mathbf{O}_q(V)$ , la  $\rho$  è un epimorfismo.

Sia  $\xi \in \ker \rho$ . Allora  $\xi v \beta(\xi) = v$  per ogni  $v \in V$ . Poiché  $\beta(\xi) = \epsilon_{\xi} \xi^{-1}$ , questo significa che  $\xi v = \epsilon_{\xi} v \xi$  per ogni  $v \in V$ . Questo implica che  $\xi$  sia o uno scalare, o uno pseudoscalare. Per l'Osservazione X.10.7 è  $\rho(\pm \eta) = -I_V$ . Quindi  $\ker \rho = \{\pm 1\}$ . (c). È conseguenza di (b) e del Lemma X.10.5.

(d). Per (c) gli elementi di  $\mathbf{Spin}(V)$  sono i prodotti di un numero pari di vettori  $v \in V$  con  $v^2 = \pm 1$ . Da questo segue che  $\mathbf{Spin}(V)$  è un sottogruppo normale

di  $\mathbf{Pin}(V)$  e che, se  $v_0$  è un vettore di  $V$  con  $v_0^2 = \pm 1$ , allora  $\mathbf{Pin}(V)$  è l'unione disgiunta  $\mathbf{Spin}(V) \dot{\cup} (v_0 \cdot \mathbf{Spin}(V))$ . Se  $v \in V$ , la  $\rho(v)$  è la simmetria di vettore  $v$ . Gli elementi di  $\rho(\mathbf{Spin}(V))$  sono perciò i prodotti di un numero pari di simmetrie, cioè gli elementi di  $\mathbf{SO}_b(V)$ .

(e). Se  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ , oppure  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  e  $b$  è definita, allora il gruppo  $\mathbf{O}_b(V)$  ha due componenti connesse e  $\mathbf{Spin}(V)$  è un rivestimento a due fogli di  $\mathbf{SO}_b(V)$ . Per verificare che  $\mathbf{Spin}(V)$  è connesso basta allora dimostrare che esiste un arco continuo in  $\mathbf{Spin}(V)$  che connette 1 a  $(-1)$ . A questo fine, fissiamo due vettori ortonormali  $e_1, e_2 \in V$ . Allora  $(e_1(e_1 \cos t + e_2 \sin t))^2 \in \mathbf{Spin}(V)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  ed è uguale ad 1 per  $t = 0$  ed a  $(-1)$  per  $t = \pi/2$ .

(f). Supponiamo che spinoriali  $b$  abbia indice di Witt positivo e che  $m \geq 3$ . In questo caso  $\mathbf{O}_b(V)$  ha quattro componenti connesse e per verificare che  $\mathbf{Spin}^0(V)$  è il rivestimento a due fogli di  $\mathbf{SO}_b^+(V)$ , è sufficiente verificare che  $(-1)$  appartiene a  $\mathbf{Spin}^0(V)$ . A questo scopo basta fissare due elementi  $e_1, e_2 \in V$  con  $e_1^2 = e_2^2 = \pm 1$  ed osservare che  $(e_1(e_1 \cos t + e_2 \sin t))^2 \in \mathbf{Spin}^0(V)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  ed è uguale ad 1 per  $t = 0$  ed a  $(-1)$  per  $t = \pi/2$ .

(g). Questo segue dal fatto che (10.10.8) è un rivestimento a due fogli di  $\mathbf{O}_b(V)$  e quindi l'applicazione tra le relative algebre di Lie è un isomorfismo.  $\square$

DEFINIZIONE X.10.9. Le

$$(10.10.10) \quad \rho : \mathbf{Pin}(V) \rightarrow \mathbf{O}_q(V) \quad \text{e} \quad \rho : \mathbf{Spin}(V) \rightarrow \mathbf{SO}_q(V)$$

si dicono le *rappresentazioni vettoriali* di  $\mathbf{Pin}(V)$  e  $\mathbf{Spin}(V)$ , rispettivamente.

Abbiamo

PROPOSIZIONE X.10.10. *Le rappresentazioni vettoriali di  $\mathbf{Pin}(V)$  e  $\mathbf{Spin}(V)$  sono irriducibili.*  $\square$

NOTAZIONE X.10.11. Si denota con  $\mathbf{Spin}(n)$  il gruppo  $\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{n,0})$  e con  $\mathbf{Spin}(p, q)$  il gruppo  $\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{p,q})$ .

PROPOSIZIONE X.10.12. *Il gruppo di Lie  $\mathbf{Spin}(n)$  è compatto e di dimensione  $\frac{1}{2}n(n-1)$  per ogni intero  $n \geq 1$ , connesso se  $n \geq 2$ , semplicemente connesso se  $n \geq 3$ . Valgono gli isomorfismi:*

$$\begin{aligned} \mathbf{Spin}(1) &\simeq \mathbf{O}(1) \simeq \{\pm 1\}, & \mathbf{Spin}(2) &\simeq \mathbf{U}(1) \simeq \mathbf{SO}(2), & \mathbf{Spin}(3) &\simeq \mathbf{SU}(2) \simeq \mathbf{Sp}(1), \\ \mathbf{Spin}(4) &\simeq \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2), & \mathbf{Spin}(5) &\simeq \mathbf{Sp}(2), & \mathbf{Spin}(6) &\simeq \mathbf{SU}(4). \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Tutte le proprietà si ricavano facilmente dal fatto che (10.10.9) è un rivestimento a due fogli, connesso per  $n > 1$ , e dalle proprietà dei gruppi speciali ortogonali.

Gli isomorfismi di  $\mathbf{Spin}(n)$  dell'enunciato sono già stati verificati per  $n = 1, 2$  e seguono dall'unicità del rivestimento a due fogli negli altri casi. Sono quindi conseguenza dalla Proposizione VIII.4.2 per  $n = 3, 4$ , della Proposizione VIII.8.14 per  $n = 5$  e della Proposizione VIII.8.8 per  $n = 6$ .  $\square$

PROPOSIZIONE X.10.13. *Il sottogruppo compatto massimale di  $\mathbf{Spin}(p, q)$ , per  $pq \geq 1$ , è isomorfo al quoziente di  $\mathbf{Spin}(p) \times \mathbf{Spin}(q)$  rispetto al sottogruppo  $\{\pm(1, 1)\} \simeq \mathbb{Z}_2$ .*

### X.11. Rappresentazioni spinoriali

DEFINIZIONE X.11.1. Si chiama *rappresentazione spinoriale* (risp. *pinoriale*) di  $(V, q)$  una rappresentazione irriducibile di  $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$  (risp. di  $\mathcal{C}\ell_q(V)$ ).

Per restrizione, le rappresentazioni spinoriali e pinoriali definiscono rappresentazioni irriducibili dei gruppi **Spin**( $V$ ) e **Pin**( $V$ ).

Consideriamo le algebre di Clifford  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$  associate al dato di un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^n$ .

Se  $n$  non è congruo a 3 o a 7 modulo 8, le algebre  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$  sono semplici (reali o complesse) ed hanno quindi un'unica rappresentazione irriducibile. Lo spazio della rappresentazione si indica con  $P_n$  e si dice spazio dei *pinori*.

Quando  $n \equiv 3, 7 \pmod{8}$ , la  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$  è somma diretta di due algebre di matrici o reali o quaternioniche, ed ha due rappresentazioni irriducibili, dei *pinori positivi*, o *destrorsi*  $P_n^+$  e dei *pinori negativi*, o *sinistrorsi*,  $P_n^-$ .

Raccogliamo nella tabella seguente le rappresentazioni pinoriali per  $0 \leq n \leq 7$ .

$n$	$\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$	rappres.
0	$\mathbb{R}$	$P_0 = \mathbb{R}$
1	$\mathbb{C}$	$P_1 = \mathbb{C}$
2	$\mathbb{H}$	$P_2 = \mathbb{H}$
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$P_3^\pm = \mathbb{H}$
4	$\mathbb{H}(2)$	$P_4 = \mathbb{H}^2$
5	$\mathbb{C}(4)$	$P_5 = \mathbb{C}^4$
6	$\mathbb{R}(8)$	$P_6 = \mathbb{R}^8$
7	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$P_7^\pm = \mathbb{R}^8$

Le rappresentazioni irriducibili di  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n+8})$  si ottengono da quelle di  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$  tensorizzandole per  $\mathbb{R}^{16}$ . Come abbiamo osservato, queste sono anche rappresentazioni irriducibili del gruppo **Pin**( $V$ ).

Analogamente, le rappresentazioni irriducibili di  $\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^n)$  definiscono rappresentazioni irriducibili di **Spin**( $\mathbb{R}^n$ )  $\subset \mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$ . Poiché  $\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n-1})$ , abbiamo, per  $n \leq 8$ , per le rappresentazioni spinoriali in dimensione  $n$  con  $1 \leq n \leq 8$ , la tabella

$n$	$\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^n)$	rappres.
1	$\mathbb{R}$	$S_1 = \mathbb{R}$
2	$\mathbb{C}$	$S_2 = \mathbb{C}$
3	$\mathbb{H}$	$S_3 = \mathbb{H}$
4	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$S_4^\pm = \mathbb{H}$
5	$\mathbb{H}(2)$	$S_5 = \mathbb{H}^2$
6	$\mathbb{C}(4)$	$S_6 = \mathbb{C}^4$
7	$\mathbb{R}(8)$	$S_7 = \mathbb{R}^8$
8	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$S_8^\pm = \mathbb{R}^8$

e, per periodicità,  $S_{n+8} \simeq S_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{16}$  (con eventuali  $\pm$ ).

ESEMPIO X.11.2.  $n = 1$ . È

$$\begin{aligned}\mathcal{E}l(\mathbb{R}^1) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}, \\ \mathcal{E}l^0(\mathbb{R}^1) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}, \\ \mathbf{Spin}(1) &= \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \middle| \epsilon = \pm 1 \right\}, \\ V_1 = \mathcal{E}l^1(\mathbb{R}^1) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v \\ -v & 0 \end{pmatrix} \middle| v \in \mathbb{R} \right\}, \\ S_1^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}, \\ S_1^- &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\},\end{aligned}$$

Le rappresentazioni di  $\mathbf{Spin}(1)$  sono quella banale su  $V_1$ , la moltiplicazione per  $\epsilon$  in  $S_1^\pm$ . La forma trilineare associata è

$$\langle y|v|x \rangle = xvy, \quad \forall x, y, v \in \mathbb{R}.$$

ESEMPIO X.11.3.  $n = 2$ . È

$$\begin{aligned}\mathcal{E}l(\mathbb{R}^2) &= \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \middle| z, w \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{H}, \\ \mathcal{E}l^0(\mathbb{R}^2) &= \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{C}, \\ \mathbf{Spin}(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \right\} \simeq S^1, \\ V_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v \\ -\bar{v} & 0 \end{pmatrix} \middle| v \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{C}, \\ S_2^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{C}, \\ S_2^- &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{C}.\end{aligned}$$

È poi

$$\beta \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z} & w \\ -\bar{w} & z \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi rappresentare l'azione di  $\mathbf{Spin}(2)$  sugli spinori e sui vettori mediante

$$\xi(x) = zx, \quad \xi(y) = \bar{z}y, \quad \xi(v) = zv\bar{z}, \quad \text{per } \xi = \begin{pmatrix} z & \\ & \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Il gruppo **Spin**(2) è quello che lascia invariante la forma trilineare

$$\mathbb{C}^3 \ni (x, y, v) \longrightarrow \langle y|v|x \rangle = \operatorname{Re}(xvy) \in \mathbb{R}.$$

ESEMPIO X.11.4.  $n = 3$ . È

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbb{R}^3) &= \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} \middle| z, w \in \mathbb{H} \right\} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \\ \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^3) &= \left\{ \begin{pmatrix} z & \\ & z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{H} \right\} \simeq \mathbb{H}, \\ \mathbf{Spin}(3) &= \left\{ \begin{pmatrix} z & \\ & z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{H}, |z| = 1 \right\} \simeq \mathbb{S}^3 \simeq \mathbf{SU}(2), \\ V_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v \\ v & 0 \end{pmatrix} \middle| v \in \operatorname{Im}(\mathbb{H}) \right\} \simeq \operatorname{Im}(\mathbb{H}) \simeq \mathbb{R}^3, \\ S_3^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} x & \\ & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{H} \right\} \simeq \mathbb{H}, \\ S_3^- &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \\ & y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{H} \right\} \simeq \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\beta \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^* & w \\ w & z^* \end{pmatrix}$$

e di conseguenza l'azione di **Spin**(3) si può rappresentare mediante

$$\xi x = zx, \quad \xi y = zy, \quad \xi v = zvz^*, \quad \text{con} \quad \xi = \begin{pmatrix} z & \\ & z \end{pmatrix}.$$

La forma trilineare con gruppo di invarianza **Spin**(3) è la

$$S_3^+ \times S_3^- \times V_3 \ni (x, y, v) \longrightarrow \langle y|v|x \rangle = \operatorname{Re}(y^*vx) \in \mathbb{R}.$$

ESEMPIO X.11.5. Sia  $n = 4$ . Lo spazio  $V_4$  della rappresentazione vettoriale si identifica al corpo  $\mathbb{H}$  dei quaternioni e  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^4)$  all'algebra  $\mathbb{H}(2)$  delle matrici  $2 \times 2$  a coefficienti in  $\mathbb{H}$ , con

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^4) &= \left\{ \begin{pmatrix} q_1 & \\ & q_2 \end{pmatrix} \middle| q_1, q_2 \in \mathbb{H} \right\}, \\ \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^4) &= \left\{ \begin{pmatrix} & q_1 \\ q_2 & \end{pmatrix} \middle| q_1, q_2 \in \mathbb{H} \right\}, \\ V_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} & v \\ -\bar{v} & \end{pmatrix} \middle| v \in \mathbb{H} \right\}. \end{aligned}$$

È poi

$$\beta \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{q}_{11} & q_{12} \\ q_{21} & \bar{q}_{22} \end{pmatrix}, \quad \forall q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22} \in \mathbb{H}.$$

Perciò

$$\mathbf{Spin}(4) = \left\{ \operatorname{diag}(a, b) = \begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H} \right\} \simeq \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2),$$



$$S_4^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{H} \right\}, \quad S_4^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{H} \right\}.$$

Indicando per semplicità con un singolo quaternionione le corrispondenti matrici di  $V_4$  ed  $S_4^\pm$ , l'azione di  $\mathbf{Spin}(4)$  è descritta da

$$\begin{aligned} \phi(x) &= ax, & \phi(y) &= by, & \phi(v) &= av\bar{b}, \\ x &\in S_4^+, & y &\in S_4^-, & v &\in V_4, & \phi &= \text{diag}(a, b) \in \mathbf{Spin}(4). \end{aligned}$$

Dalle tre rappresentazioni  $V_4, S_4^+, S_4^-$  possiamo costruire la forma trilineare

$$V_4 \times S_4^+ \times S_4^- \ni (v, x, y) \longrightarrow \langle y|v|x \rangle = -\text{Re}(y^* v^* x) \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che  $\langle \phi(y)|\phi(v)|\phi(x) \rangle = \langle y|v|x \rangle$  per ogni  $\phi \in \mathbf{Spin}(4)$  e, viceversa,  $\mathbf{Spin}(4)$  è il gruppo che lascia invariante la forma trilineare.

ESEMPIO X.11.6.  $n = 5$ . Sappiamo che in questo caso  $\mathbf{Spin}(5) \simeq \mathbf{Sp}(2)$ . Con

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad \text{ove } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \text{è}$$

$$\mathbf{Spin}(5) = \mathbf{Sp}(2) = \{a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \mid a\Omega a^\dagger = \Omega, aa^* = I_4\}.$$

Osserviamo che

$$\text{se } a \in \mathbf{Spin}(5) = \mathbf{Sp}(2), \quad \text{allora } a\Omega = \Omega(a^\dagger)^{-1} = \Omega\bar{a} \quad \text{e} \quad a^*\Omega = \Omega a^\dagger.$$

Ricordiamo che

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}^5) = \mathbb{C}(4),$$

$$\mathcal{E}^0(\mathbb{R}^5) = \{X \in \mathbb{C}(4) \mid X\Omega = \Omega\bar{X}\},$$

$$\mathcal{E}^1(\mathbb{R}^5) = \{X \in \mathbb{C}(4) \mid X\Omega + \Omega\bar{X} = 0\}.$$

La rappresentazione vettoriale è data da

$$V_5 = \{X \in \mathbb{C}(4) \mid X\Omega = \Omega X^\dagger, X + X^* = 0, \text{traccia}(X) = 0\}$$

e su di essa  $\mathbf{Spin}(5)$  opera mediante l'estensione della rappresentazione aggiunta. È infatti

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix} \in V_5 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,1} = -x_{1,1}^* = x_{2,2}^\dagger, \\ x_{1,2} = -x_{2,1}^* = -x_{1,2}^\dagger, \\ \text{traccia}(x_{1,1}) = 0. \end{cases}$$

Sia  $X \in V_5$  ed  $Y = aXa^*$  con  $a \in \mathbf{Spin}(5)$ . È  $Y^* + Y = 0$  e  $\text{traccia}(Y) = 0$  perché  $\text{su}(4)$  è invariante per l'azione aggiunta di  $\mathbf{Spin}(5) \subset \mathbf{SU}(4)$ . Abbiamo poi

$$Y\Omega = aXa^*\Omega = aX\Omega a^\dagger = a\Omega X^\dagger a^\dagger = \Omega(\bar{a}X^\dagger a^\dagger) = \Omega Y^\dagger.$$

Questo dimostra che  $aXa^* \in V_5$  per ogni  $a \in \mathbf{Spin}(5)$ .

Gli elementi di  $V_5$  sono della forma

$$X = \begin{pmatrix} it & \alpha & 0 & \beta \\ -\bar{\alpha} & -it & -\beta & 0 \\ 0 & \bar{\beta} & it & -\bar{\alpha} \\ -\bar{\beta} & 0 & \alpha & -it \end{pmatrix}, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

La rappresentazione spinoriale è

$$S_5^\pm = \mathbb{C}^4 \simeq \mathbb{R}^8,$$

su cui l'azione di  $\mathbf{Sp}(2)$  è la restrizione di quella di  $\mathbb{C}(4)$ . Anche in questo caso abbiamo una forma trilineare

$$S_5^+ \times S_5^- \times V_5 \ni (x, y, v) \longrightarrow \langle y|v|x \rangle = \operatorname{Re}(y^*vx) \in \mathbb{R},$$

e  $\mathbf{Spin}(5)$  si può caratterizzare come il gruppo di trasformazioni  $\mathbb{R}$ -lineari che la lascia invariante.

ESEMPIO X.11.7.  $n=6$ .

Sappiamo che  $\mathbf{Spin}(6) \simeq \mathbf{SU}(4)$ . Sia

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ -I_4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}.$$

Allora

$$\mathbf{Spin}(6) = \{a \in \mathbf{SO}(8) \mid a\Omega a^\dagger = \Omega\}.$$

La rappresentazione spinoriale  $S_6^\pm$  è la rappresentazione su  $\mathbb{R}^8$  di  $\mathbf{Spin}(6) \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(8)$ . Abbiamo

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^6) = \mathbb{R}(8),$$

$$\mathcal{L}^0(\mathbb{R}^6) = \{X \in \mathbb{R}(8) \mid \Omega X = X\Omega\} \simeq \mathbb{C}(4),$$

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^6) = \{X \in \mathbb{R}(8) \mid \Omega X + X\Omega = 0\}.$$

Gli elementi di  $V_6$  si possono rappresentare mediante matrici

$$v = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$$

in cui  $A, B \in \mathfrak{so}(4)$ , con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_2 & -x_3 & 0 & x_1 \\ -x_3 & x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ -y_1 & 0 & -y_3 & y_2 \\ -y_2 & y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_3 & -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti l'insieme

$$W = \{v \in \mathbb{R}^{8 \times 8} \mid v + v^\dagger = 0, \Omega v + v\Omega = 0, v^\dagger v \in \mathbb{R}I_8\}.$$

è unione di due sottospazi vettoriali reali di dimensione 6, invarianti per l'azione aggiunta di  $\mathbf{Spin}(6)$  su  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^6) = \mathbb{R}(8)$ . Infatti, se  $a \in \mathbf{Spin}(6)$ ,  $X \in W$  ed  $Y = \operatorname{ad}(a)(X) = aXa^\dagger$ , allora

$$Y^\dagger = (aXa^\dagger)^\dagger = aX^\dagger a^\dagger = -aXa^\dagger = -Y,$$

$$\Omega Y = \Omega aXa^\dagger = a\Omega Xa^\dagger = -aX\Omega a^\dagger = -aXa^\dagger \Omega = -Y\Omega,$$

$$Y^\dagger Y = aX^\dagger a^\dagger aXa^\dagger = aX^\dagger Xa^\dagger = kaa^\dagger = kI_8, \quad \text{se } X^\dagger X = kI_8.$$

Questo dimostra che  $W$  è trasformato in sé dall'azione aggiunta di  $\mathbf{Spin}(6)$ . Poiché  $\mathbf{Spin}(6)$  è connesso e la sua azione aggiunta sulla Grassmanniana dei sottospazi

di dimensione 6 di  $\mathbb{R}^{8 \times 8}$  continua, ciascuno dei due sottospazi di dimensione 6 contenuti in  $W$  è trasformato in sé da  $\mathbf{Spin}(6)$ .

Anche in questo caso  $\mathbf{Spin}(6)$  si può caratterizzare come il gruppo di trasformazioni lineari che lasciano invariante la forma trilineare

$$S_6^+ \times S_6^- \times V_6 \ni (x, y, v) \longrightarrow \langle y|v|x \rangle = y^\dagger v x \in \mathbb{R}.$$

ESEMPIO X.11.8.  $n = 7$ . Il gruppo  $\mathbf{Spin}(7)$  è il rivestimento a due fogli di  $\mathbf{SO}(7)$ . In questo caso

$$\mathcal{E}l(\mathbb{R}^7) \simeq \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix} \middle| X, Y \in \mathbb{R}(8) \right\},$$

$$\mathcal{E}l^0(\mathbb{R}^7) \simeq \mathbb{R}(8) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \middle| X \in \mathbb{R}(8) \right\},$$

$$\mathcal{E}l^1(\mathbb{R}^7) \simeq \mathbb{R}^{8 \times 8} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y & 0 \end{pmatrix} \middle| X, Y \in \mathbb{R}(8) \right\},$$

$$V_7 = \left\{ v = \begin{pmatrix} 0 & t\Omega + v' \\ t\Omega + v' & 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R}, v' \in V_6 \right\},$$

$$S_7^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{16} \middle| x \in \mathbb{R}^8 \right\},$$

$$S_7^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{16} \middle| y \in \mathbb{R}^8 \right\},$$

e  $\mathbf{Spin}(7)$  è il gruppo di trasformazioni lineari che lascia invariante la forma trilineare

$$S_7^+ \times S_7^- \times V_7 \ni (x, y, v) \longrightarrow \langle y|v|x \rangle = y^\dagger v x \in \mathbb{R}.$$

## X.12. Spinori di Dirac, Weyl, Majorana

In fisica, gli *spinori* di dimensione  $n$  sono costruiti a partire da una base di matrici Hermitiane  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , il cui ordine  $d_n$  sarà precisato in seguito, e che soddisfano la relazione di anti-commutazione

$$(10.12.1) \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\delta_{i,j}.$$

Le  $\gamma_i$  si dicono *matrici gamma* o *matrici di Dirac* e i vettori dello spazio complesso su cui operano *spinori di Dirac*.

Le matrici

$$(10.12.2) \quad \sigma_{i,j} = \frac{1}{4}[\gamma_i, \gamma_j], \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

che a meno del fattore  $\frac{1}{4}$  sono i commutatori delle matrici gamma, generano un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di matrici anti-Hermitiane. L'algebra  $\mathfrak{g}$  è isomorfa ad  $\mathfrak{so}(n)$  e questo isomorfismo si rialza ad una rappresentazione unitaria di  $\mathbf{Spin}(n)$  in  $\mathbf{SU}\left(\binom{n}{2}\right)$ .

Se le matrici gamma possono essere scelte o tutte reali o tutte puramente immaginarie, allora le  $\sigma_{i,j}$  sono reali e lasciano invariante il sottospazio degli spinori reali, che si dicono *di Majorana*.

Quando  $n = 2m$  è pari, la *matrice di chiralità*

$$\hat{\gamma} = i^{\pm m} \gamma_1 \cdots \gamma_{2m}$$

è Hermitiana. Infatti abbiamo

$$\hat{\gamma}^* = i^{\mp m} \gamma_{2m} \cdots \gamma_1 = i^{\mp m} (-1)^{m(2m-1)} \gamma_1 \cdots \gamma_{2m} = \hat{\gamma}.$$

Poiché  $\hat{\gamma}^2 = \mathbf{I}$ , ha autovalori  $\pm 1$ . Inoltre  $\hat{\gamma}$  anti-commuta con le matrici gamma e quindi gli autospazi degli autovalori  $\pm 1$  sono invarianti per l'azione di  $\mathbf{Spin}(n)$ . Gli spinori di Dirac si decompongono quindi nella somma diretta di due rappresentazioni, che si dicono *spinori di Weyl*.

Se le rappresentazioni sono complessificazioni di rappresentazioni reali, i vettori di queste sono gli *spinori di Majorana-Weyl*.

Quando  $n$  è dispari, il prodotto  $\hat{\gamma}$  delle matrici gamma è un multiplo dell'identità e la rappresentazione di Dirac è irriducibile.

#### Costruzione degli spinori in dimensione $\leq 8$ .

$n = 2$ . Possiamo considerare due scelte distinte delle matrici gamma e quindi dell'operatore di chiralità, che corrispondono agli isomorfismi  $\mathbf{Spin}(2) \simeq \mathbf{SO}(2)$  e  $\mathbf{Spin}(2) \simeq \mathbf{U}(1)$ , rispettivamente.

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma} = i\gamma_1\gamma_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}. \\ \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$n = 2m + 1$ . Date le matrici gamma  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2m}$  in dimensione pari  $2m$ , otteniamo le matrici gamma per la dimensione  $2m + 1$  aggiungendo come  $\gamma_{2m+1}$  la matrice di chiralità  $i^{\pm m} \gamma_1 \cdots \gamma_{2m}$ .

$n = 2m \geq 4$ . Date le gamma matrici  $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{2m-1}$  nella dimensione dispari precedente, possiamo costruire le nuove gamma matrici per la dimensione  $2m$  ponendo

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma'_i \\ -i\gamma'_i & \end{pmatrix} \text{ per } 1 \leq i < 2m, \quad \gamma_{2m} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}$$

## CAPITOLO XI

### Ottonioni

#### XI.1. Richiami sulle algebre

Ricordiamo che un'algebra è uno spazio vettoriale reale  $\mathbb{A}$  su un campo  $\mathbb{k}$ , su cui è definita un'applicazione bilineare

$$(11.1.1) \quad \mathbb{A} \times \mathbb{A} \ni (a, b) \longrightarrow a \cdot b \in \mathbb{A}.$$

L'algebra  $\mathbb{A}$  si dice *unitaria* se contiene un elemento 1 con la proprietà che

$$(11.1.2) \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \quad \forall a \in \mathbb{A}.$$

Ogni algebra non unitaria  $\mathbb{A}$  è sottoalgebra dell'algebra unitaria  $\mathbb{A}' = \mathbb{A} \oplus \mathbb{k}$ , in cui il prodotto è definito da

$$(\lambda + a)(\mu + b) = \lambda\mu + \lambda b + \mu a + ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}.$$

NOTAZIONE XI.1.1. Se  $a_1, \dots, a_k$  sono elementi di un'algebra reale unitaria  $\mathbb{A}$ , indichiamo con  $\mathbb{R}[a_1, \dots, a_k]$  la sottoalgebra unitaria di  $\mathbb{A}$  generata da  $a_1, \dots, a_k$ , cioè la più piccola sottoalgebra unitaria di  $\mathbb{A}$  che li contiene.

#### Algebre di divisione.

DEFINIZIONE XI.1.2. Chiamiamo *di divisione* un'algebra reale unitaria  $\mathbb{A}$  in cui le moltiplicazioni a destra e a sinistra per un elemento diverso da 0 siano endomorfismi invertibili di  $\mathbb{A}$ .

LEMMA XI.1.3. *Un'algebra unitaria  $\mathbb{A}$  di dimensione finita è di divisione se e soltanto se*

$$a, b \in \mathbb{A}, \quad ab = 0, \quad a \neq 0 \implies b = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Le traslazioni a sinistra  $L_a : \mathbb{A} \ni x \rightarrow a \cdot x \in \mathbb{A}$  e a destra  $R_a : \mathbb{A} \ni x \rightarrow x \cdot a \in \mathbb{A}$  sono morfismi  $\mathbb{R}$ -lineari di  $\mathbb{A}$ . Se  $\mathbb{A}$  ha dimensione finita,  $L_a$  ed  $R_a$  sono isomorfismi lineari se e soltanto se sono iniettive. La condizione che non vi siano divisori sinistri o destri di zero non banali ci dice che sia  $L_a$  che  $R_a$  sono iniettive, e quindi isomorfismi, quando  $a \neq 0$ .  $\square$

OSSERVAZIONE XI.1.4. In un'algebra di divisione ogni elemento non nullo ha inversi destro e sinistro, ma questi possono essere distinti se l'algebra non è associativa. Inoltre, ci sono esempi di algebre unitarie non associative in cui per ogni elemento non nullo  $a$  si possono trovare elementi  $b, c$  con  $ab = 1, ca = 1$ , ma  $a$  è un divisore di 0.

**Algebre normate.**

DEFINIZIONE XI.1.5. Un'algebra reale unitaria  $\mathbb{A}$  si dice *normata* se su di essa è definita una norma  $\mathbb{A} \ni a \rightarrow \|a\| \in \mathbb{R}$  tale che

$$\|1\| = 1 \quad \text{e} \quad \|a \cdot b\| \leq \|a\| \|b\|, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

**Algebre commutative, associative, alternative.** Su un'algebra  $\mathbb{A}$  possiamo definire

$$\begin{aligned} [a, b] &= a \cdot b - b \cdot a && \text{(il COMMUTATORE),} \\ [a, b, c] &= (a \cdot b) \cdot c - a \cdot (b \cdot c) && \text{(l'ALTERNATORE).} \end{aligned}$$

DEFINIZIONE XI.1.6. Un'algebra  $\mathbb{A}$  si dice

- *commutativa*, se il commutatore è identicamente nullo;
- *associativa*, se l'alternatore è identicamente nullo;
- *alternativa* se l'alternatore è una 3-forma alternata.

L'alternatività<sup>1</sup> equivale cioè alla validità delle identità

$$(a \cdot a) \cdot b = a \cdot (a \cdot b), \quad (a \cdot b) \cdot a = a \cdot (b \cdot a), \quad a \cdot (b \cdot b) = (a \cdot b) \cdot b, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

LEMMA XI.1.7 (Identità di Moufang<sup>2</sup>). *In un'algebra alternativa  $\mathbb{A}$  valgono, per ogni  $a, b, x, y \in \mathbb{A}$ , le identità<sup>3</sup>*

$$(11.1.3) \quad (xax)y = x(a(xy)),$$

$$(11.1.4) \quad y(xax) = ((yx)a)x,$$

$$(11.1.5) \quad (xy)(ax) = x(ya)x$$

$$(11.1.6) \quad [y, xa, x] = -[y, x, a]x.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned} (xax)y - x(a(xy)) &= ((xa)x)y - (xa)(xy) + (xa)(xy) - x(a(xy)) = [xa, x, y] + [x, a, xy] \\ &= -[x, xa, y] - [x, xy, a] = -(x(xa))y + x((xa)y) - (x(xy))a + x((xy)a) \\ &= -(x^2a)y - (x^2y)a + x((xa)y + (xy)a) \\ &= -[x^2, a, y] - [x^2, y, a] - x^2(ay + ya) + x((xa)y + (xy)a) \\ &= x(-x(ay) - x(ya) + (xa)y + (xy)a) \\ &= x([x, y, a] + [x, a, y]) = 0. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Per le algebre alternative vedi:

E. Artin: *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, New York, 1957,

R.D. Schafer, *On the algebras formed by the Cayley-Dickson process*. Amer. J. Math. **76** (1954), pp. 435-446.

<sup>2</sup>Ruth Moufang (1905-1977), prima matematica tedesca ad ottenere una cattedra di professore ordinario (nel 1957). Ha dimostrato nel 1933 che nel piano proiettivo di Cayley non vale il teorema di Desargues. (*Alternativkörper und der Satz von vollständigen Vierseit*, Abh. Math. Sem. Hamburg **9** (1933), pp.207-222.) Nel 1935 (*Zur Struktur von Alternativkörpern*, Math. Ann. **110** (1935), pp. 416-430) introdusse e studiò una nozione di *quasi-gruppo (Moufang loops)*, in cui all'associatività sono sostituite le identità di Moufang (11.1.3), (11.1.4), (11.1.5).

<sup>3</sup>Possiamo scrivere senza ambiguità  $xax$  perché  $(xa)x = x(ax)$  in quanto  $\mathbb{A}$  è alternativa.

Questo dimostra la (11.1.3). La (11.1.4) si dimostra in modo del tutto analogo. Utilizzando la (11.1.3) otteniamo poi

$$\begin{aligned} (xy)(ax) - x(ya)x &= [x, y, ax] + x((y(ax)) - (ya)x) = -[x, ax, y] - x[y, a, x] \\ &- (xax)y + x((ax)y - [y, a, x]) = -x(a(xy)) + x((ax)y - [y, a, x]) \\ &= x([a, x, y] - [y, a, x]) = 0. \end{aligned}$$

Questo dimostra (11.1.5). Per concludere la dimostrazione, mostriamo che (11.1.4) e (11.1.6) sono equivalenti. È infatti

$[y, xa, x] + [y, x, a]x = (y(xa))x - y((xa)x) + ((yx)a - y(xa))x = (yx)a x - y((xa)x)$   
e nell'ultimo membro dell'uguaglianza possiamo scrivere  $(xa)x = xax$  perché abbiamo supposto che  $\mathbb{A}$  fosse alternativa.  $\square$

**TEOREMA XI.1.8 (Artin).** *L'algebra  $\mathbb{A}$  è alternativa se e soltanto se, per ogni coppia di elementi  $a, b \in \mathbb{A}$ , la sua sottoalgebra  $\mathbb{k}[a, b]$  è associativa.*

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo supporre senz'altro che  $\mathbb{A}$  sia unitaria.

Se  $\mathbb{k}[a, b]$  è associativa per ogni  $a, b \in \mathbb{A}$ , l'alternatore è una forma alternata e quindi l'algebra  $\mathbb{A}$  è alternativa.

Dimostriamo ora l'implicazione opposta.

Fissati due elementi di  $\mathbb{A}$ , indichiamo con  $p = p(a, b), q = q(a, b), r = r(a, b)$  monomi ottenuti come prodotti degli elementi  $a$  e  $b$ , in cui naturalmente, poiché non abbiamo supposto che  $\mathbb{A}$  sia associativa, conta anche la scelta delle parentesi che descrivono l'ordine in cui si eseguono i prodotti. Indichiamo con  $d_p, d_q, d_r$  i loro gradi, cioè il numero di fattori che li compongono. Sarà sufficiente dimostrare che l'alternatore  $[p, q, r]$  è nullo per ogni scelta di monomi  $p, q, r$ , con gradi  $d_p, d_q, d_r$  maggiori o uguali ad 1. Ragioniamo per ricorrenza sulla somma  $d = d_p + d_q + d_r \geq 3$ . Poiché l'alternatore è per ipotesi una forma alternata, possiamo supporre che il primo fattore di  $p$  e l'ultimo di  $r$  sia lo stesso, diciamo  $a$ . Utilizzando l'ipotesi induttiva (e ponendo uguale ad 1 il monomio di grado 0), possiamo scrivere  $p = ap'$  ed  $r = r'a$ , con  $p'$  ed  $r'$  monomi in  $a, b$ , di gradi  $d_p - 1$  e  $d_r - 1$  rispettivamente. Allora, utilizzando (11.1.5) ed evitando di scrivere le parentesi per prodotti di monomi la somma dei cui gradi sia strettamente inferiore a  $d$ , otteniamo

$$[p, q, r] = [ap', q, r'a] = (ap'q')(r'a) - (ap')(q'r'a) = a(p'q'r')a - a(p'q'r')a = 0.$$

La dimostrazione è completa.  $\square$

### ★-algebre.

**DEFINIZIONE XI.1.9.** Una ★-algebra è un'algebra  $\mathbb{A}$  su cui è definito un coniugio  $\mathbb{A} \ni a \rightarrow a^* \in \mathbb{A}$  tale che

$$(11.1.7) \quad a^{**} = a, \quad (\lambda a + \mu b)^* = \lambda a^* + \mu b^*, \quad (ab)^* = b^* a^*, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}.$$

Diciamo che una ★-algebra reale  $\mathbb{A}$  ammette una norma compatibile (con il coniugio) se

$$a + a^* \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \ni a \cdot a^* > 0, \quad \forall a \in \mathbb{A}.$$

In questo caso definiamo<sup>4</sup>

$$\operatorname{Re}(a) = \frac{1}{2}(a + a^*), \quad \operatorname{Im}(a) = \frac{1}{2}(a - a^*), \quad \|a\| = \sqrt{a \cdot a^*} \geq 0, \quad \forall a \in \mathbb{A}.$$

In una  $\star$ -algebra di divisione con una norma compatibile il *reciproco* di un elemento non nullo  $a$  è  $a^{-1} = a^*/\|a\|^2$ .

LEMMA XI.1.10. (1) Se  $\mathbb{A}$  è una  $\star$ -algebra alternativa e con norma compatibile, allora

$$\|a \cdot b\| = \|a\| \|b\|, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

(2) Se, oltre alle ipotesi di (1),  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A} < \infty$ , allora  $\mathbb{A}$  è un'algebra di divisione.

DIMOSTRAZIONE. Se  $a, b \in \mathbb{A}$ , allora  $a, a^*, b, b^*$  appartengono alla sottoalgebra unitaria di  $\mathbb{A}$  generata da  $\operatorname{Im}(a)$  ed  $\operatorname{Im}(b)$ . Per ipotesi  $\mathbb{R}[\operatorname{Im}(a), \operatorname{Im}(b)]$  è associativa. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \|a \cdot b\|^2 &= (a \cdot b)(a \cdot b)^* = a \cdot b \cdot b^* \cdot a^* = (a \cdot b) \cdot (b^* \cdot a^*) \\ &= a \cdot (b \cdot b^*) \cdot a^* = a \cdot \|b\|^2 \cdot a^* = (a \cdot a^*) \|b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2. \end{aligned}$$

Questo dimostra che in  $\mathbb{A}$  non ci sono divisori destri o sinistri di 0 non banali, e quindi, se  $\mathbb{A}$  ha dimensione finita, è un'algebra di divisione.  $\square$

## XI.2. La costruzione di Cayley-Dickson

La costruzione di Cayley-Dickson<sup>5</sup> consiste nell'*estendere* una  $\star$ -algebra aggiungendo un'*unità immaginaria*.

Estendiamo una  $\star$ -algebra assegnata  $\mathbb{A}$ , definendo  $\mathbb{A}'$  nel modo seguente.

Sia  $j$  un elemento che non appartiene ad  $\mathbb{A}$  e poniamo

$$(11.2.1) \quad \mathbb{A} \times \mathbb{A} \simeq \mathbb{A}' = \{a + jb \mid a, b \in \mathbb{A}\},$$

con la struttura di  $\star$ -algebra definita dalle

$$(11.2.2) \quad (a + jb)(c + jd) = (ac - db^*) + j(a^*d + cb), \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{A},$$

$$(11.2.3) \quad (a + jb)^* = a^* - jb, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

LEMMA XI.2.1. Le (11.2.2) e (11.2.3) definiscono su  $\mathbb{A}'$  una struttura di  $\star$ -algebra che estende quella di  $\mathbb{A}$ .

DIMOSTRAZIONE. Le prime due relazioni nella (11.1.7) sono facilmente verificate. Basta verificare che vale la terza, cioè che  $\star$  è un'anti-isomorfismo dell'algebra  $\mathbb{A}'$ . Siano  $a, b, c, d \in \mathbb{A}$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} [(a + jb)(c + jd)]^* &= (ac - db^*)^* - j(a^*d + cb) = (c^*a^* - b^*d^*) - j(a^*d + cb), \\ (c + jd)^*(a + jb)^* &= (c^* - jd^*)(a^* - jb) = (c^*a^* - b^*d^*) + j(-cb - a^*d). \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Richiamiamo l'attenzione sul fatto che questa notazione differisce dalla convenzione usuale per i numeri complessi di definire *parte immaginaria* il coefficiente *reale*  $y$  nella decomposizione  $x + iy$  di un numero complesso nella somma di un numero reale  $x$  e di un immaginario puro  $iy$ .

<sup>5</sup>Leonard E. Dickson, *On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem*, Ann. Math, **20** (1919), pp. 155-171.



Questo completa la dimostrazione.  $\square$

Osserviamo che la struttura di  $\star$ -algebra di  $\mathbb{A}'$  si può anche riassumere nella tabella di moltiplicazione e coniugazione:

$$a(jb) = j(a^*b), \quad (ja)b = j(ba), \quad (ja)(jb) = -ba^*, \quad j^2 = -1, \quad j^* = -j.$$

L'ultima relazione ci dice che  $j$  non è né divisore destro né sinistro di zero, perché

$$0 = (x + jy)j = jx^* - y^* \implies x^* = 0, \quad y^* = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad y = 0$$

$$0 = j(x + jy) = jx - y \implies x = 0, \quad y = 0.$$

OSSERVAZIONE XI.2.2. Per comprendere il significato della costruzione, introduciamo le traslazioni a sinistra e a destra rispetto agli elementi di  $\mathbb{A}'$

$$L_a : \mathbb{A}' \ni x \rightarrow ax \in \mathbb{A}', \quad R_a : \mathbb{A}' \ni x \rightarrow xa \in \mathbb{A}', \quad \forall a \in \mathbb{A}'.$$

Le regole che definiscono il prodotto in  $\mathbb{A}'$  sono allora conseguenza delle

$$(11.2.4) \quad L_a \circ L_{jb} = L_{jb} \circ L_{a^*}, \quad R_a \circ R_{jb} = R_{jb} \circ R_{a^*}, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

LEMMA XI.2.3. *Se valgono le (11.2.4), allora  $\mathbb{A}'$  si ottiene da  $\mathbb{A}$  per mezzo della costruzione di Cayley-Dickson.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo valgano le (11.2.4). Allora, per ogni  $a, b \in \mathbb{A}$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} aj &= L_a \circ L_j(1) = L_j \circ L_{a^*}(1) = ja^*, \\ a(jb) &= L_a \circ L_j(b) = L_j \circ L_{a^*}(b) = j(a^*b), \\ (ja)b &= (a^*j)b = R_b \circ R_j(a) = R_j \circ R_{b^*}(a) = (ab^*)j = j(ba^*), \\ (ja)(jb) &= (ja)(b^*j) = L_{ja} \circ L_{b^*}(j) = L_b \circ L_{ja}(j) = b((ja)j) \\ &= b(R_j \circ R_a(j)) = b(R_{a^*} \circ R_j(j)) = -ba^*. \end{aligned}$$

$\square$

Consideriamo su una  $\star$ -algebra la proprietà seguente:

$$(P) \quad (a + a^*)b = b(a + a^*), \quad \forall a, b \in \mathbb{A}, \quad aa^* = a^*a, \quad \forall a \in \mathbb{A}.$$

PROPOSIZIONE XI.2.4. *Su una siano  $\mathbb{A}$  una  $\star$ -algebra ed  $\mathbb{A}'$  la  $\star$ -algebra da essa ottenuta con la costruzione di Cayley-Dickson. Allora:*

- (1) *Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\mathbb{A}'$  sia commutativa è che  $x^* = x$  per ogni  $x \in \mathbb{A}$ .*
- (2) *Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\mathbb{A}'$  sia associativa è che  $\mathbb{A}$  sia associativa e commutativa.*
- (3) *Se  $\mathbb{A}$  ha la proprietà (P), allora anche  $\mathbb{A}'$  ha la proprietà (P), e viceversa.*
- (4) *Se  $\mathbb{A}$  ed  $\mathbb{A}'$  hanno la proprietà (P), allora condizione necessaria e sufficiente affinché  $\mathbb{A}'$  sia alternativa è che  $\mathbb{A}$  sia associativa.*

DIMOSTRAZIONE. (1). Se  $\mathbb{A}'$  è commutativa, allora  $xj = jx^* = x^*j$  per ogni  $x \in \mathbb{A}$  e quindi  $x = x^*$  per ogni  $x \in \mathbb{A}$ .

(2). Supponiamo che  $\mathbb{A}'$  sia associativa. Allora

$$j(ab) = (ja)b = a^*jb = a^*b^*j = (ab)^*j = b^*a^*j \implies a^*b^* = b^*a^*, \quad \forall a, b \in \mathbb{A},$$

e questo implica che  $\mathbb{A}$  sia commutativa.

Viceversa, se  $\mathbb{A}$  è associativa e commutativa, allora, essendo

$$\begin{aligned} (a_1 + jb_1)[(a_2 + jb_2)(a_3 + jb_3)] &= (a_1 + jb_1)[(a_2a_3 - b_2b_3^*) + j(a_2^*b_3 + a_3b_2)] \\ &= a_1a_2a_3 - a_1b_3b_2^* - a_2^*b_3b_1 - a_3b_2b_1 \\ &\quad + j(a_1^*a_2^*b_3 + a_1^*a_3b_2 + a_2a_3b_1 - b_3b_2^*b_1), \\ [(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2)](a_3 + jb_3) &= [a_1a_2 - b_2b_1^* + j(a_1^*b_2 + a_2b_1)](a_3 + jb_3) \\ &= a_1a_2a_3 - b_2a_1^*a_3 - b_3a_1^*b_2 - b_3a_2b_1 \\ &\quad + j(a_2^*a_1^*b_3 - b_1b_2^*b_3 + a_3a_1^*b_2 + a_3a_2b_1), \end{aligned}$$

ne segue che  $\mathbb{A}'$  è associativa.

(3). Osserviamo che la  $\star$  su  $\mathbb{A}$  e  $\star$  su  $\mathbb{A}'$  fissano gli stessi elementi. Quindi, se la proprietà  $(P)$  vale per  $\mathbb{A}'$ , vale a maggior ragione per  $\mathbb{A}$ . Per verificare l'implicazione opposta, basta osservare che, se vale la proprietà  $(P)$  per  $\mathbb{A}'$ , allora  $a(jb) = j(a^*b) = (jab) = (jb)a$  se  $a = a^* \in \mathbb{A}$  e  $b \in \mathbb{A}$ .

(4). La condizione che  $\mathbb{A}'$  sia alternativa equivale al fatto che, per ogni  $a, b, c, d \in \mathbb{A}$ , l'algebra  $\mathbb{A}[a + jb, c + jd]$  sia associativa. Abbiamo

$$\begin{aligned} (a + jb)[(a + jb)(c + jd)] &= (a + jb)[ac - db^* + j(a^*d + cb)] \\ &= a(ac - db^*) - (a^*d + cb)b^* + j[a^*(a^*d + cb) + (ac - db^*)b], \\ [(a + jb)(a + jb)](c + jd) &= [aa - bb^* + j(a^*b + ab)](c + jd) \\ &= (aa - bb^*)c - d(b^*a^* + b^*a) + j[(a^*a^* - bb^*)d + c(a^*b + ab)], \\ (a + jb)[(c + jd)(a + jb)] &= (a + jb)[(ca - bd^*) + j(c^*b + ad)] \\ &= a(ca - bd^*) - (c^*b + ad)b^* + j[a^*(c^*b + ad) + (ca - bd^*)b], \\ [(a + jb)(c + jd)](a + jb) &= [(ac - db^*) + j(a^*d + cb)](a + jb) \\ &= (ac - db^*)a - b(d^*a + b^*c^*) + j[(c^*a^* - bd^*)b + a(a^*d + cb)]. \end{aligned}$$

Si verifica che, se  $\mathbb{A}$  è associativa e gode della proprietà  $(P)$ , allora le prime e le ultime due espressioni sono uguali. Verifichiamolo ad esempio per i coefficienti di  $j$  nella terza e quarta espressione. A questo scopo osserviamo che

$$(a^* + c)(a + c^*) = (a + c^*)(a^* + c) \implies a^*c^* + ca = ac + c^*a^*.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} a^*(c^*b + ad) + (ca - bd^*)b &= (a^*a)d + (a^*c^* + ca)b - bd^*b \\ &= (aa^*)d + (c^*a^* + ac)b - bd^*b \\ &= (c^*a^* - bd^*)b + a(a^*d + cb). \end{aligned}$$

Vice versa, uguagliando la parte in  $\mathbb{A}$  delle prime due espressioni otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= a(ac - db^*) - (a^*d + cb)b^* - (aa - bb^*)c + d(b^*a^* + b^*a) \\ &= [a(ac) - (aa)c] + [(cb)b^* - (bb^*)c] - a(db^*) - (a^*d)b^* + d(b^*(a^* + a)). \end{aligned}$$

Poiché l'uguaglianza deve valere quando  $a$  e  $d$  sono uguali a zero, la seconda parentesi quadra racchiude un termine nullo. Anche il termine entro la prima parentesi quadra è nullo perché una sottoalgebra di un'algebra alternativa è alternativa. Abbiamo allora

$$0 = d(b^*(a^* + a)) - (bb^*)c] - a(db^*) - (a^*d)b^* = (a + a^*)(db^*) - a(db^*) - (a^*d)b^* \\ = a^*(db^*) - (a^*d)b^*$$

perché per la proprietà (P) tutti gli elementi di  $\mathbb{A}$  commutano con  $(a+a^*)$ . Questo dimostra che  $\mathbb{A}$  è associativa.  $\square$

I numeri reali  $\mathbb{R}$  costituiscono una  $\star$ -algebra di divisione normata *reale*, in cui cioè  $a^* = a$  per ogni elemento  $a$ . Osserviamo che, per le  $\star$ -algebre  $\mathbb{A}$  che si costruiscono successivamente a partire da  $\mathbb{R}$  ed iterando la costruzione di Cayley-Dickson,  $xx^*$  è un numero reale ed è il quadrato della norma, associata al prodotto scalare reale  $(x|y) = \frac{1}{2}(xy^* + y^*x)$ , e la proprietà (P) è equivalente al fatto che

$$x + x^* \in \mathbb{R}, \quad xx^* = \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{A}.$$

Al primo passo, otteniamo il campo  $\mathbb{C}$  dei numeri complessi: come  $\star$ -algebra di divisione normata è commutativa e associativa, ma non reale. Il passo successivo dà  $\mathbb{C}' = \mathbb{H}$ , il corpo non commutativo dei quaternioni. Abbiamo ottenuto una  $\star$ -algebra di divisione normata associativa, ma non commutativa. A partire dai quaternioni, otteniamo  $\mathbb{C}' = \mathbb{O}$ , l'algebra di divisione degli ottonioni (o ottave di Cayley), che è una  $\star$ -algebra normata che non è né associativa, né commutativa, ma alternata.

### XI.3. Un teorema di Hurwitz

Il teorema di classificazione delle algebre di divisione è dovuto a Hurwitz<sup>6</sup>, che lo dimostrò sotto l'ulteriore restrizione che le algebre fossero *normate*.

Diamo qui una dimostrazione che utilizza le algebre di Clifford ed alcune considerazioni elementari di algebra lineare.

Se  $\mathbb{A}$  è un'algebra reale, possiamo associare ad ogni  $a \in \mathbb{A}$  le applicazioni lineari

$$L_a : \mathbb{A} \ni x \longrightarrow ax \in \mathbb{A}, \quad R_a : \mathbb{A} \ni x \longrightarrow xa \in \mathbb{A}.$$

Otteniamo in questo modo due applicazioni lineari

$$L : \mathbb{A} \ni a \longrightarrow L_a \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A}), \quad R : \mathbb{A} \ni a \longrightarrow R_a \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A}).$$

<sup>6</sup>Adlof Hurwitz, *Über die Composition der quadratischen formen von beliebig vielen Variablen*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1898), 309-316, per il caso delle algebre *normate*.

Michel Kervaire, *Non-parallelizability of the n sphere for n > 7*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **44** (1958), pp. 280-283 e

Raoul Bott, John Milnor, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), pp. 87-89,

hanno dimostrato indipendentemente il teorema generale, utilizzando tecniche di topologia algebrica.

LEMMA XI.3.1. *Sia  $\mathbb{A}$  un'algebra di divisione reale, di dimensione  $n$ . Per ogni elemento di  $a$  che non sia multiplo dell'identità sono univocamente determinati due numeri reali  $\lambda_0, \lambda_1$  ed un elemento  $j_a$  di  $\mathbb{A}$  tali che*

$$(11.3.1) \quad a = \lambda_0 1 + \lambda_1 j_a, \quad j_a^2 = -1, \quad \text{ove} \quad \lambda_0 = \frac{1}{n} \text{traccia}(L_a).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $a$  un elemento di  $\mathbb{A}$ . Se  $L_a$  ha un autovalore reale  $\lambda_0$ , allora c'è in  $\mathbb{A}$  un elemento  $x \neq 0$  per cui  $ax = \lambda_0 x$ . Da  $(a - \lambda_0)x = 0$  segue che  $a = \lambda_0$ , perché abbiamo supposto che  $\mathbb{A}$  fosse di divisione. Quindi, se  $a$  non è un numero reale, l'endomorfismo  $L_a$  ha solo autovalori non reali. Sia  $\lambda_0 + i\lambda_1$ , con  $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq 0$ , un autovalore di  $L_a$ . Allora  $-\lambda_1^2$  è un autovalore di  $L_{a-\lambda_0}^2$ . Possiamo quindi trovare un  $x \neq 0$  in  $A$  per cui

$$(a - \lambda_0)[(a - \lambda_0)x] = -\lambda_1^2 x \implies \left[ \left( \frac{a - \lambda_0}{\lambda_1} \right) + \left( \frac{a - \lambda_0}{\lambda_1} \right)^{-1} \right] x = 0.$$

Poiché abbiamo supposto che  $\mathbb{A}$  sia di divisione,

$$j_a = \left( \frac{a - \lambda_0}{\lambda_1} \right) \text{ soddisfa } j_a + j_a^{-1} = 0 \text{ e quindi } j_a^2 = -1.$$

È dunque  $a = \lambda_0 + \lambda_1 j_a$ . Osserviamo che  $L_{j_a}$  ha autovalori  $\pm i$  ed è un endomorfismo reale. Ha quindi traccia nulla. La traccia di  $L_a$  è allora uguale a  $n\lambda_0$ , ove  $n$  è la dimensione di  $\mathbb{A}$  come spazio vettoriale reale. La dimostrazione è completa.  $\square$

COROLLARIO XI.3.2. *Sia  $\mathbb{A}$  un'algebra di divisione reale di dimensione  $n$  e*

$$(11.3.2) \quad V = \text{Im}(\mathbb{A}) = \{a \in \mathbb{A} \mid \text{traccia}(L_a) = 0\}.$$

Allora  $V$  è un'ipersuperficie in  $\mathbb{A}$ , trasversale ad  $\mathbb{R}$  e

$$(11.3.3) \quad (\lambda + v \mid \mu + w) = \lambda\mu - \frac{1}{2n} \text{traccia}(L_{(v\mu + wv)}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V$$

è un prodotto scalare su  $\mathbb{A}$ , con la proprietà che

$$(11.3.4) \quad L_v^2 = -\|v\|^2 I_{\mathbb{A}}, \quad \forall v \in V.$$

DIMOSTRAZIONE. La (11.3.3) descrive una forma bilineare simmetrica su  $\mathbb{A}$ , che, per il lemma precedente, è definita positiva. Anche la (11.3.4) segue subito dal lemma precedente, perché  $v^2 = -\|v\|^2$  per ogni  $v \in V$ .  $\square$

LEMMA XI.3.3. *Sia  $\mathbb{A}$  un'algebra di divisione reale e  $V$  il sottospazio dei suoi elementi immaginari, definito dalla (11.3.2). Allora l'applicazione*

$$(11.3.5) \quad \star : \mathbb{A} = \mathbb{R} \oplus V \ni (\lambda + v) \longrightarrow \lambda - v \in \mathbb{A}$$

è un'anti-involuzione dell'algebra  $\mathbb{A}$ .

DIMOSTRAZIONE. Per la (11.3.4), la  $V \ni v \rightarrow L_v \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$  si estende ad una rappresentazione su  $\mathbb{A}$  dell'algebra di Clifford  $\mathcal{C}\ell(V)$  (il prodotto scalare è la restrizione a  $V$  del prodotto scalare (11.3.3)).

In particolare, se  $e_1, e_2 \in V$  sono ortogonali tra loro, con  $e_1^2 = -1, e_2^2 = -1$ , da  $L_{e_1} \circ L_{e_2} + L_{e_2} \circ L_{e_1} = 0$  ricaviamo che  $e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0$ . Infatti  $e_1 e_2 + e_2 e_1$  è il valore in 1 dell'endomorfismo  $(L_{e_1} \circ L_{e_2} + L_{e_2} \circ L_{e_1})$  di  $\mathbb{A}$ . Dico che  $e_1 e_2 \in V$ .

Infatti  $(e_1e_2)^{-1} = e_2e_1 = -e_1e_2$  ci dice che  $(e_1e_2)^2 = -1$  e quindi che  $L_{e_1e_2}$  non ha autovalori reali.

Per dimostrare che  $(xy)^* = y^*x^*$  per ogni  $x, y \in \mathbb{A}$ , è sufficiente considerare il caso in cui  $x$  e  $y$  siano due elementi linearmente indipendenti di  $V$ . Fissiamo allora una base ortonormale  $e_1, e_2$  del sottospazio generato da  $x, y$  con  $x = \lambda_1e_1$  ed  $y = \lambda_2e_1 + \lambda_3e_2$ , con  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ . Abbiamo

$$xy = \lambda_1e_1(\lambda_2e_1 + \lambda_3e_2) = -\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3(e_1e_2).$$

Poiché abbiamo verificato che  $e_1e_2 \in V$  ed  $e_2e_1 = -e_1e_2$ , troviamo che

$$(xy)^* = -\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3(e_1e_2) = -\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3(e_2e_1) = y^*x^*.$$

La dimostrazione è completa.  $\square$

Vale il

**TEOREMA XI.3.4** (Hurwitz, Kervaire, Bott, Milnor). *Esistono, a meno di isomorfismi, esattamente quattro algebre reali di divisione, di dimensioni 1, 2, 4, 8 rispettivamente.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbb{A}$  un'algebra di divisione.

Poiché per la (11.3.4) la  $V \ni v \rightarrow L_v \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$  si estende ad una rappresentazione su  $\mathbb{A}$  dell'algebra di Clifford  $\mathcal{C}\ell(V)$ , la dimensione  $n$  dev'essere tale che  $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n-1})$  abbia una rappresentazione non banale di dimensione  $n$ . Considerando la prima tabella in §X.11, si vede che questo è possibile solo se  $n = 1, 2, 4, 8$ .

Resta da verificare l'unicità. A questo fine mostreremo che le algebre di divisione normate formano una catena in cui ciascuna si ottiene dalla precedente mediante la costruzione di Cayley-Dickson.

Sia  $\mathbb{A}$  sia un'algebra di divisione e  $\mathbb{B}$  una sua sottoalgebra unitaria. La  $\mathbb{B}$  è anch'essa di divisione. Infatti, se  $x$  è un elemento non nullo di  $\mathbb{B}$ , è  $L_{x^{-1}} = (L_x)^{-1}$ . Infatti,

$$y = (L_x)^{-1}(z) \Leftrightarrow z = L_x(y) = xy \Leftrightarrow y = x^{-1}z = L_{x^{-1}}(z).$$

Quindi  $L_{x^{-1}} \in \mathbb{R}[L_x]$ . Se  $f(\lambda)$  è un polinomio tale che  $f(L_x) = L_{x^{-1}}$ , abbiamo

$$x^{-1} = L_{x^{-1}}(1) = f(L_x)(1) = f(x),$$

e perciò  $x^{-1} \in \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{B}$ .

Se  $\mathbb{B} \neq \mathbb{A}$ , allora gli elementi dell'ortogonale  $\mathbb{B}^\perp$  di  $\mathbb{B}$  in  $\mathbb{A}$  sono immaginari e possiamo fissare  $j \in \mathbb{B}^\perp$  con  $j^2 = -1$ . Poiché  $L : V \rightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$  si estende ad un omomorfismo di  $\mathcal{C}\ell(V)$  in  $\mathcal{E}nd_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$ , abbiamo  $L_j \circ L_w + L_w \circ L_j = 0$  se  $w \in \text{Im}(\mathbb{B}) = \mathbb{B} \cap \text{Im}(\mathbb{A})$  e quindi, più in generale, che  $L_j \circ L_x = L_{x^*} \circ L_j$  per ogni  $x \in \mathbb{B}$ . Applicando questi endomorfismi ad 1 otteniamo la formula di commutazione

$$jx = x^*j, \quad \forall x \in \mathbb{B}.$$

Questo ci permette di calcolare il prodotto in  $\mathbb{B}[j]$  a partire dal prodotto in  $\mathbb{B}$ . Infatti, se  $x, y \in \mathbb{B}$ , otteniamo le formule:

$$\begin{aligned} x(jy) &= L_x \circ L_j(y) = L_j \circ L_{x^*}(y) = j(x^*y), \\ (jx)y &= (x^*j)y = R_y \circ R_j(x^*) = R_j \circ R_{y^*}(x^*) = (x^*y^*)j = j(yx), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (jx)(jy) &= (jx)(y^*j) = L_{jx} \circ L_{y^*j} = L_y \circ L_{jx}(j) \\ &= y((jx)j) = y((x^*j)j) = y(R_j^2(x^*)) = -yx^*. \end{aligned}$$

Nel derivare la seconda formula abbiamo utilizzato il fatto che anche la traslazione a destra definisce un'applicazione lineare  $V \ni v \rightarrow R_v \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$  che verifica la condizione  $R_v^2 = -\|v\|^2 I_{\mathbb{A}}$  e si estende quindi ad un omomorfismo  $\mathcal{L}(V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$ .

Nel derivare la terza, abbiamo utilizzato il fatto che, se  $x \in \mathbb{B}$ , allora  $jx$  è ortogonale a  $\mathbb{B}$  e verifica quindi  $(jx)y = y^*(jx)$  per ogni  $y$  di  $\mathbb{B}$ .

Da queste otteniamo

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - db^*) + j(a^*d + cb), \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{B},$$

formula che dimostra che  $\mathbb{B}[j]$  si ottiene a partire da  $\mathbb{B}$  per mezzo della costruzione di Cayley-Dickson.

Poiché la sola algebra di divisione reale di dimensione uno è  $\mathbb{R}$ , l'esistenza e unicità è conseguenza della costruzione di Cayley-Dickson.  $\square$

#### XI.4. Gli ottonioni

Abbiamo esaminato in precedenza la struttura del corpo non commutativo dei quaternioni. In questo paragrafo discutiamo quella dell'algebra di divisione reale di dimensione otto, alternativa ma non associativa, che abbiamo costruito in precedenza con il metodo di Cayley-Dickson.

DEFINIZIONE XI.4.1. L'algebra di divisione normata di dimensione otto si indica con  $\mathbb{O}$  e si dice *degli ottonioni, od ottave di Cayley*.

La costruzione di Cayley-Dickson ci dà:

LEMMA XI.4.2. (1) Se  $e_1$  è un qualsiasi ottonione immaginario, la sottoalgebra unitaria  $\mathbb{R}[e_1]$  di  $\mathbb{O}$  è isomorfa a  $\mathbb{C}$ .

(2) Fissati due ottonioni immaginari  $e_1, e_2$  ortogonali tra loro la sottoalgebra  $\mathbb{R}[e_1, e_2]$  è isomorfa ad  $\mathbb{H}$ .

(3) Possiamo trovare tre ottonioni immaginari  $e_1, e_2, e_3$ , ortogonali tra loro, tali che  $e_2 \notin \mathbb{R}[e_1] \simeq \mathbb{C}$ ,  $e_3 \notin \mathbb{R}[e_1, e_2] \simeq \mathbb{H}$ ,  $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3] = \mathbb{O}$ .

(4) Per ogni tripletta  $e_1, e_2, e_3$  di ottonioni immaginari ortogonali tra loro, tali che  $e_2 \notin \mathbb{R}[e_1] \simeq \mathbb{C}$ ,  $e_3 \notin \mathbb{R}[e_1, e_2] \simeq \mathbb{H}$ , risulta  $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3] = \mathbb{O}$ .  $\square$

DEFINIZIONE XI.4.3. Una tripletta  $e_1, e_2, e_3$  di ottonioni immaginari, con

$$(11.4.1) \quad e_i^2 = -1, \quad i = 1, 2, 3, \quad e_i e_j + e_j e_i = 0, \quad \forall 1 \leq i < j \leq 3, \quad e_3 \notin \mathbb{R}[e_1, e_2]$$

si dice *generatrice*.

Il Lemma XI.4.2 ci dice che esistono triplette generatrici. Si può completare la tripletta generatrice aggiungendo quattro radici di  $-1$ :

$$(11.4.2) \quad e_4 = e_1 e_2, \quad e_5 = e_2 e_3, \quad e_6 = e_3 e_4, \quad e_7 = e_4 e_5.$$

Per calcolare la tabella di moltiplicazione di queste unità immaginarie possiamo pensare che  $\mathbb{O}$  è stata ottenuta da  $\mathbb{H} = \mathbb{R}[e_1, e_2] = \langle 1, e_1, e_2, e_4 \rangle$  con il procedimento

di Cayley-Dickson per la scelta  $j = e_3$ . Dobbiamo quindi esprimere  $e_5, e_6, e_7$  come prodotto di  $e_3$  per un quaternione. Ricordiamo che, se  $q \in \mathbb{H} = \mathbb{R}[e_1, e_2]$ , allora  $qe_3 = e_3q^*$ . Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} e_5 &= e_2e_3 = -e_3e_2, & e_6 &= e_3e_4, \\ e_7 &= e_4e_5 = e_4(e_2e_3) = -e_4(e_3e_2) = -L_{e_4} \circ L_{e_3}(e_2) \\ &= -L_{e_3} \circ L_{e_4}(e_2) = -e_3(e_4e_2) = -e_3e_1. \end{aligned}$$

Possiamo quindi ricavare la tabella di moltiplicazione delle unità immaginarie  $e_1, \dots, e_7$  dalle

$$\begin{cases} e_1e_2 = -e_2e_1 = e_4, \\ e_2e_4 = -e_4e_2 = e_1, \\ e_4e_1 = -e_1e_4 = e_2, \end{cases} \quad \begin{cases} e_5 = -e_3e_2 = -e_2e_3, \\ e_6 = e_3e_4 = -e_4e_3, \\ e_7 = -e_3e_1 = e_1e_3. \end{cases}$$

La seguente tabella riporta alla  $i$ -esima riga e  $j$ -esima colonna il prodotto dell'elemento che sta nella  $i$ -esima riga per quello che sta nella  $j$ -esima colonna.

1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_1$	-1	$e_4$	$e_7$	$-e_2$	$e_6$	$-e_5$	$-e_3$
$e_2$	$-e_4$	-1	$e_5$	$e_1$	$-e_3$	$e_7$	$-e_6$
$e_3$	$-e_7$	$-e_5$	-1	$e_6$	$e_2$	$-e_4$	$e_1$
$e_4$	$e_2$	$-e_1$	$-e_6$	-1	$e_7$	$e_3$	$-e_5$
$e_5$	$-e_6$	$e_3$	$-e_2$	$-e_7$	-1	$e_1$	$e_4$
$e_6$	$e_5$	$-e_7$	$e_4$	$-e_3$	$-e_1$	-1	$e_2$
$e_7$	$e_3$	$e_6$	$-e_1$	$e_5$	$-e_4$	$-e_2$	-1

Ciascun prodotto si può calcolare a partire dalle identità stabilite sopra. Ad esempio,

$$e_5e_4 = (-e_3e_2)e_4 = (j(-e_2))e_4 = j(e_4)(-e_2) = je_1 = e_3e_1 = -e_7.$$

OSSERVAZIONE XI.4.4. L'insieme  $\{\pm 1\} \cup \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq 7\}$ , con la restrizione del prodotto in  $\mathbb{O}$ , costituisce un esempio di *Moufang loop* finito, di ordine 16.

### XI.5. $G_2$

Élie Cartan<sup>7</sup> osservò, nel 1914, che il più piccolo dei gruppi semplici eccezionali scoperti da Killing<sup>8</sup> si può identificare col gruppo degli automorfismi di  $\mathbb{O}$ . Utilizziamo questo risultato di Cartan come una definizione.

DEFINIZIONE XI.5.1. Indichiamo con  $G_2$  il gruppo degli automorfismi di  $\mathbb{O}$ :

$$(11.5.1) \quad G_2 = \{\phi \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}) \mid \phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \forall a, b \in \mathbb{O}\}.$$

<sup>7</sup>Les groupes réels simples et continus, Ann. Sci. École Norm. Sup. **31** (1914), pp. 255-262.

<sup>8</sup>Wilhelm Killing, Die Zusammensetzung der stetigen/endlich Transformationen, Mathematische Annalen, vol. **31**, 2, (1888) pp. 252-290, vol. **33**, 1 (1888), pp.1-48 vol. **34**, 1, (1889), pp. 57-122, vol. **36**, 2 (1890), pp. 161-189.

PROPOSIZIONE XI.5.2.  $\mathbf{G}_2$  è un gruppo di Lie compatto, connesso e semplicemente connesso, di dimensione 14. La sua algebra di Lie

$$(11.5.2) \quad \mathfrak{g}_2 = \text{der}(\mathbb{O}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}) \mid X(ab) = (X(a))b + a(X(b)), \forall a, b \in \mathbb{O}\}.$$

DIMOSTRAZIONE.  $\mathbf{G}_2$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$  e quindi è un gruppo di Lie. Si verifica facilmente che la sua algebra di Lie è quella delle derivazioni di  $\mathbb{O}$ .

Gli elementi di  $\mathbf{G}_2$  operano in modo semplicemente transitivo sulle triplette generatrici. Fissata una tripletta generatrice di base  $(e_1, e_2, e_3)$  possiamo identificare un elemento  $\phi \in \mathbf{G}_2$  con la tripletta generatrice  $(\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3))$ . La  $\mathbf{G}_2 \ni \phi \rightarrow \phi(e_1)$  è una fibrazione di  $\mathbf{G}_2$  sulla sfera unitaria  $S^6$  dello spazio  $\mathbb{R}^7$  degli ottonioni immaginari. Sia  $F_1 = \{\phi \in \mathbf{G}_2 \mid \phi(e_1) = e_1\}$  la fibra su  $e_1$ . Abbiamo allora una fibrazione  $F_1 \ni \phi \rightarrow \phi(e_2) \in S^5$  di  $F_1$  sulla sfera unitaria  $S^5$  dello spazio  $\mathbb{R}^6$  degli ottonioni immaginari perpendicolari ad  $e_1$ . La fibra  $F_2 = \{\phi \in F_1 \mid \phi(e_2) = e_2\}$  è diffeomorfa alla sfera  $S^3$  nello spazio  $\mathbb{R}^4$  degli ottonioni immaginari ortogonali ad  $\mathbb{H} = \mathbb{R}[e_1, e_2]$ . Questo mostra che  $\mathbf{G}_2$  è connesso, semplicemente connesso, compatto, di dimensione  $6 + 5 + 3 = 14$ . La semplice connessione segue dalle successioni esatte di Serre:

$$0 = \pi_2(S^5) \longrightarrow \pi_1(F_2) \longrightarrow \pi_1(F_1) \longrightarrow \pi_1(S^5) = 0,$$

$$0 = \pi_2(S^6) \longrightarrow \pi_1(F_1) \longrightarrow \pi_1(\mathbf{G}_2) \longrightarrow \pi_1(S^6) = 0,$$

perché  $\pi_1(F_2) = \pi_1(S^3) = 0$ . □



## **Parte 3**

# **Teoria delle connessioni**



## Fibrati principali

La nozione di fibrato principale generalizza il metodo del riferimento mobile introdotto per lo studio delle curve gobbe ed è fondamentale nell'impostazione di Cartan del problema dell'equivalenza di strutture geometrico-differenziali.

### XII.1. Prime definizioni

DEFINIZIONE XII.1.1. Siano  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato differenziabile e  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie. Un'azione differenziabile a destra di  $\mathbf{G}$  su  $\xi$  è un'azione differenziabile a destra di  $\mathbf{G}$  su  $P$  che operi sulle fibre di  $\xi$ .

Richiediamo cioè che

$$(12.1.1) \quad P_p a = P_p, \quad \forall p \in M, \quad \forall a \in \mathbf{G}, \quad \text{ovvero che } \pi \circ R_a = \pi, \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

In particolare, per ogni  $a \in \mathbf{G}$ , la traslazione a destra  $R_a$  su  $P$  definisce un'equivalenza di  $\xi$  in sé.

DEFINIZIONE XII.1.2. Un fibrato  $\mathbf{G}$ -principale è il dato di un fibrato differenziabile  $\xi$ , di un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$ , che si dirà il suo gruppo strutturale, e di un'azione differenziabile a destra di  $\mathbf{G}$  su  $\xi$  che sia libera e transitiva sulle fibre di  $\xi$ .

Richiediamo cioè che valga la (12.1.1) e che inoltre

$$(12.1.2) \quad \forall p \in M, \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in P_p, \quad \exists! a \in \mathbf{G} \text{ tale che } \sigma_2 = \sigma_1 \cdot a.$$

Indicheremo nel seguito con  $\sigma_1^{-1}\sigma_2$  l'unico elemento  $a \in \mathbf{G}$  per cui  $\sigma_2 = \sigma_1 \cdot a$ .

Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato  $\mathbf{G}$ -principale.

Per il teorema delle funzioni implicite, una sommersione differenziabile ammette in ogni punto un'inversa destra locale. Poiché un'inversa destra locale di  $\pi$  è una sezione locale del fibrato  $\xi$ , abbiamo:

LEMMA XII.1.3. Per ogni  $\sigma_0 \in P$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $p_0 = \pi(\sigma_0)$  in  $M$  ed una sezione  $\sigma \in \Gamma_\xi(U, P)$  tale che  $\sigma(x_0) = \sigma_0$ .  $\square$

COROLLARIO XII.1.4. Ogni fibrato principale differenziabile è localmente banale.

DIMOSTRAZIONE. Se  $U$  è un aperto di  $M$  e  $\sigma \in \Gamma_\xi(U, P)$  una sezione di  $\xi$  su  $U$ , l'applicazione  $U \times \mathbf{G} \ni (p, a) \rightarrow \sigma(p)a \in \pi^{-1}(U)$  è una trivializzazione di  $\xi$  su  $U$ . La tesi segue quindi dal Lemma XII.1.3  $\square$

COROLLARIO XII.1.5. Un fibrato principale  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  è banale se e soltanto se ammette una sezione globale  $\sigma \in \Gamma_\xi(M, P)$ .  $\square$

DEFINIZIONE XII.1.6. Un suo atlante di trivializzazione  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$  è il dato di un ricoprimento aperto  $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$  di  $M$  e, per ogni indice  $\alpha \in I$ , di una sezione  $\sigma_\alpha \in \Gamma_\xi(U_\alpha, P)$ .

Alla coppia  $(U_\alpha, \sigma_\alpha)$  corrisponde la *trivializzazione locale*

$$(12.1.3) \quad \tilde{\sigma}_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \ni (p, a) \longrightarrow \sigma_\alpha(p) \cdot a \in P|_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha).$$

Per ogni coppia di indici  $\alpha, \beta \in I$ , con  $U_{\alpha, \beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , otteniamo una funzione  $\psi_{\alpha, \beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha, \beta}, \mathbf{G})$ , definita da

$$(12.1.4) \quad \psi_{\alpha, \beta} : U_{\alpha, \beta} \ni p \longrightarrow [\sigma_\alpha(p)]^{-1} \sigma_\beta(p) \in \mathbf{G}.$$

Le  $\{\psi_{\alpha, \beta} \mid U_{\alpha, \beta} \neq \emptyset\}$  si dicono le *funzioni di transizione* dell'atlante  $\mathcal{A}$ .

PROPOSIZIONE XII.1.7. Siano  $\xi$  un fibrato principale ed  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  un suo atlante di trivializzazione. Le sue funzioni di transizione  $\{\psi_{\alpha, \beta}\}$  soddisfano le condizioni

$$(12.1.5) \quad \psi_{\alpha, \alpha}(p) = e, \quad \forall p \in U_{\alpha, \alpha} = U_\alpha,$$

$$(12.1.6) \quad \psi_{\alpha, \beta} \psi_{\beta, \gamma} = \psi_{\alpha, \gamma} \quad \text{su } U_{\alpha, \beta, \gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma. \quad \square$$

TEOREMA XII.1.8. Siano  $M$  una varietà differenziabile,  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie,  $\{U_\alpha\}$  un ricoprimento aperto di  $M$  e  $\Psi = \{\psi_{\alpha, \beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha, \beta}, \mathbf{G}) \mid U_{\alpha, \beta} \neq \emptyset\}$  una famiglia di funzioni che soddisfino le (12.1.5), (12.1.6). Allora esiste un fibrato principale  $\xi$  su  $M$ , con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ , per cui le  $\psi_{\alpha, \beta}$  siano le funzioni di transizione di un atlante di trivializzazione corrispondente al ricoprimento  $\{U_\alpha\}$ . Tale fibrato è unico, a meno di diffeomorfismi che commutino con l'azione di  $\mathbf{G}$ .

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo, a partire dalla famiglia  $\Psi$ , l'unione disgiunta

$$P^\sharp = \bigsqcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times \mathbf{G}.$$

Per le (12.1.5) e (12.1.6), la

$$U_\alpha \times \mathbf{G} \ni (p, a) \sim (q, b) \in U_\beta \times \mathbf{G} \iff (p = q, a = \psi_{\alpha, \beta}(p)b)$$

è una relazione d'equivalenza su  $P^\sharp$ . Poniamo  $P = P^\sharp / \sim$  ed indichiamo con  $\iota_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \rightarrow P^\sharp$  le applicazioni naturali. Detta  $\varpi : P^\sharp \rightarrow P$  la proiezione nel quoziente, otteniamo per ogni  $\alpha$  applicazioni

$$\tilde{\sigma}_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \xrightarrow{\iota_\alpha} \iota_\alpha(U_\alpha \times \mathbf{G}) \subset P^\sharp \xrightarrow{\varpi} \varpi \circ \iota_\alpha(U_\alpha \times \mathbf{G}) = P|_{U_\alpha},$$

che sono omeomorfismi su aperti di  $P$ . Risulta allora definita su  $P$  un'unica struttura di varietà differenziabile che renda le  $\tilde{\sigma}_\alpha$  diffeomorfismi.

Definiamo  $\pi : P \rightarrow M$  in modo che, per ogni indice  $\alpha$ , il diagramma (ove la seconda freccia orizzontale è l'inclusione)

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbf{G} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_\alpha} & P \\ \text{pr}_{U_\alpha} \downarrow & & \downarrow \pi \\ U_\alpha & \longrightarrow & M \end{array}$$

sia commutativo. Otteniamo così un fibrato differenziabile  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ , su cui definiamo un'azione a destra di  $\mathbf{G}$  mediante il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbf{G} \times \mathbf{G} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_\alpha \times \text{id}_\mathbf{G}} & P \times \mathbf{G} \\ \downarrow (p,a,b) \rightarrow (p,ab) & & \downarrow (\sigma,a) \rightarrow \sigma \cdot a \\ U_\alpha \times \mathbf{G} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_\alpha} & P. \end{array}$$

Abbiamo cioè 
$$\begin{cases} \pi(\tilde{\sigma}_\alpha(p, a)) = p, \\ \tilde{\sigma}_\alpha(p, a) \cdot b = \tilde{\sigma}_\alpha(p, ab). \end{cases}$$

In questo modo  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  acquista una struttura di fibrato principale con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ .

Per ogni  $\alpha$ ,

$$\sigma_\alpha : U_\alpha \ni p \longrightarrow \tilde{\sigma}_\alpha(p, e) \in P$$

è una sezione differenziabile di  $\xi$  su  $U_\alpha$  ed  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$  un suo atlante di trivializzazione, con funzioni di transizione  $\{\psi_{\alpha,\beta}\}$ .

Se  $\xi' = (P' \xrightarrow{\pi'} M)$  è un altro fibrato principale con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ , che ammette un atlante di trivializzazione  $\mathcal{A}' = \{(U_\alpha, \sigma'_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ , con  $\sigma'^{-1}_\alpha \sigma'_\beta = \psi_{\alpha,\beta}$ , definiamo un'equivalenza  $f : P \rightarrow P'$  ponendo

$$f(\tilde{\sigma}_\alpha(p, a)) = \sigma'_\alpha(p) \cdot a, \quad \forall \alpha \in I, \quad p \in U_\alpha, \quad a \in \mathbf{G}.$$

La condizione che le  $\{\psi_{\alpha,\beta}\}$  siano le funzioni di transizione di  $\mathcal{A}'$  ci dice che la  $f$  è ben definita.  $\square$

## XII.2. L'esempio degli spazi omogenei

Gli spazi omogenei sono una classe fondamentale di fibrati principali. Dal Teorema VII.8.3 segue infatti:

**TEOREMA XII.2.1.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile e  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie che opera transitivamente su  $M$ . Sia  $\mathbf{H}$  lo stabilizzatore di un punto  $p_0 \in M$  e*

$$\pi : \mathbf{G} \ni x \longrightarrow xp_0 \in M.$$

Allora  $\xi = (\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M)$  è un fibrato principale con gruppo strutturale  $\mathbf{H}$ .  $\square$

## XII.3. Morfismi di fibrati principali

Siano  $\xi_i = (P_i \xrightarrow{\pi_i} M_i)$ ,  $i = 1, 2$ , due fibrati principali, con gruppi strutturali  $\mathbf{G}_i$ . Saremo interessati essenzialmente ai casi in cui i due gruppi siano o uguali, oppure uno un sottogruppo dell'altro.

DEFINIZIONE XII.3.1. Un *morfismo di fibrati principali*  $\Phi : \xi_1 \rightarrow \xi_2$  è una tripletta  $(f, F, \phi)$  in cui la coppia  $(f, F)$  definisca un morfismo di fibrati differenziabili

$$(12.3.1) \quad \begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{F} & P_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2, \end{array}$$

e  $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$  sia un omomorfismo di gruppi di Lie che renda commutativo il diagramma

$$(12.3.2) \quad \begin{array}{ccc} P_1 \times \mathbf{G}_1 & \xrightarrow{F \times \phi} & P_2 \times \mathbf{G}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_1 & \xrightarrow{F} & P_2, \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono definite dalle azioni dei gruppi.

Diciamo che  $\Phi = (f, F, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$  induce  $f$  tra le basi,  $F$  tra gli spazi totali e  $\phi$  tra i gruppi di Lie.

Diciamo che  $\Phi = (f, F, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$  è un'immersione se  $F$  è un'immersione. In questo caso  $\phi$  è un monomorfismo di gruppi.

Se  $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}$  e  $\phi$  è l'identità, diciamo che  $\Phi : \xi_1 \rightarrow \xi_2$  è un morfismo di  $\mathbf{G}$ -fibrati principali.

Se  $F$  è un'inclusione, diciamo che  $\Phi = (f, F, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$  è un'inclusione di fibrati principali. In questo caso, se  $M_1 = M_2$  ed  $f = \text{Id}_M$ , diciamo che  $\xi_1$  è un sottofibrato principale di  $\xi_2$ , o che è stato ottenuto da  $\xi_2$  mediante una riduzione del gruppo strutturale, ovvero che  $\xi_2$  è stato ottenuto da  $\xi_1$  mediante un'estensione del gruppo strutturale.

PROPOSIZIONE XII.3.2. Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato principale con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ , e  $\mathbf{G}'$  un sottogruppo di Lie di  $\mathbf{G}$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\xi$  ammetta una riduzione del gruppo strutturale a  $\mathbf{G}'$  è che ammetta un atlante di trivializzazione con funzioni di transizione a valori in  $\mathbf{G}'$ .

DIMOSTRAZIONE. La condizione è ovviamente necessaria. Dimostriamone la sufficienza.

Fissato un atlante di trivializzazione  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$  di  $\xi$  con funzioni di transizione  $\psi_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, \mathbf{G}')$ , sia

$$P' = \bigcup_{\alpha \in I} \{\sigma_\alpha(p) \cdot a \mid p \in U_\alpha, a \in \mathbf{G}'\}.$$

Con la struttura differenziabile per cui le

$$\Psi'_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G}' \ni (p, a) \longrightarrow \sigma(p) \cdot a \in P' \cap P_{U_\alpha}$$

siano diffeomorfismi,  $P'$  è una sottovarietà differenziabile di  $P$ . La restrizione  $\pi' = \pi|_{P'}$  definisce un sottofibrato differenziabile  $\xi' = (P' \xrightarrow{\pi'} M)$ , che è principale con gruppo strutturale  $\mathbf{G}'$ , ed è una riduzione di  $\xi$  a  $\mathbf{G}'$ .  $\square$

OSSERVAZIONE XII.3.3. Se  $\xi$  è un fibrato principale con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ , e  $\mathbf{G}$  è un sottogruppo di Lie di un gruppo di Lie  $\mathbf{G}'$ , esiste unico, a meno di equivalenze, un fibrato principale  $\xi'$  che si ottiene da  $\xi$  per estensione a  $\mathbf{G}'$  del gruppo strutturale. Ciò è facile conseguenza del Teorema XII.1.8.

LEMMA XII.3.4. *Il pullback di un fibrato  $\mathbf{G}$ -principale ha un'unica struttura di fibrato  $\mathbf{G}$ -principale che rende l'applicazione naturale associata un morfismo di fibrati  $\mathbf{G}$ -principali.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\eta = (Q \xrightarrow{\pi_\eta} N)$  un fibrato  $\mathbf{G}$ -principale. Sia  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  e consideriamo il pullback  $f^*(\eta)$  di  $\eta$  mediante  $f$ . Il suo spazio totale è

$$E_{f^*(\eta)} = \{(p, \tau) \mid p \in M, \tau \in Q, \pi_\eta(\tau) = f(p)\}$$

ed è un fibrato  $\mathbf{G}$ -principale per l'azione

$$(12.3.3) \quad (p, \tau) \cdot a = (p, \tau \cdot a), \quad \forall (p, \tau) \in E_{f^*(\eta)}, \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

Si verifica immediatamente che il morfismo associato,  $(f, \hat{f}, \text{id}_{\mathbf{G}}) : f^*(\eta) \rightarrow \eta$ , con  $\hat{f}(p, \tau) = \tau$ , è un morfismo di fibrati  $\mathbf{G}$ -principali.  $\square$

DEFINIZIONE XII.3.5. Il pullback  $f^*(\eta)$ , con la struttura di fibrato  $\mathbf{G}$ -principale definita dalla (12.3.3), si dice il *pullback* o *immagine inversa* del fibrato  $\mathbf{G}$ -principale  $\eta$ .

I morfismi di fibrati  $\mathbf{G}$ -principali sono completamente determinati dalle applicazioni indotte tra le basi. Vale infatti la

PROPOSIZIONE XII.3.6. *Siano  $\xi = (P \xrightarrow{\pi_\xi} M)$ ,  $\eta = (Q \xrightarrow{\pi_\eta} N)$  due fibrati  $\mathbf{G}$ -principali ed  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché esista un'applicazione differenziabile  $F \in \mathcal{C}^\infty(P, Q)$  per cui  $(f, F, \text{id}_{\mathbf{G}}) : \xi \rightarrow \eta$  sia un morfismo di fibrati  $\mathbf{G}$ -principali, è che  $\xi$  sia equivalente ad  $f^*(\eta)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi_\xi} M)$  un fibrato  $\mathbf{G}$ -principale per cui esista un morfismo  $(f, F, \text{id}_{\mathbf{G}}) : \xi \rightarrow \eta$  di fibrati  $\mathbf{G}$ -principali.

Allora  $(\text{id}_M, \check{F}, \text{id}_{\mathbf{G}}) : \xi \rightarrow f^*(\eta)$ , con  $\check{F}(\sigma) = (\pi_\xi(\sigma), F(\sigma)) \in E_{f^*(\eta)}$  per  $\sigma \in P$  è un'equivalenza di fibrati  $\mathbf{G}$ -principali.  $\square$

PROPOSIZIONE XII.3.7. *Siano  $M, N$  due varietà differenziabili,  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie e  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} N)$  un fibrato principale su  $N$  con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ . Abbiamo:*

- (1) *Se  $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  sono omotope, allora  $f_0^*(\xi)$  e  $f_1^*(\xi)$  sono equivalenti.*
- (2) *Se  $M$  è contrattile, ogni  $\mathbf{G}$ -fibrato principale di base  $M$  è banale.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Sia  $\tilde{f} = \{f_t\} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$  un'omotopia tra  $f_0$  ed  $f_1$  e consideriamo il fibrato  $\mathbf{G}$ -principale  $\tilde{f}^*(\xi)$ . L'equivalenza si ottiene utilizzando l'esistenza di una  $\mathbf{G}$ -connessione principale sul fibrato  $\tilde{f}^*(\xi)$  ed il corrispondente trasporto parallelo<sup>1</sup> (vedi §XIII.8) lungo le curve  $t \rightarrow (p, t)$  in  $M \times \mathbb{R}$ .

(2) Sia  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato  $\mathbf{G}$ -principale. Supponiamo che  $M$  sia contrattile e sia  $\tilde{f} = \{f_t\} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, M)$  un'omotopia con  $f_1 = \text{id}_M$  ed  $f_0$  costante. Per il punto (1),  $\xi \simeq f_1^*(\xi)$  ed  $f_0^*(\xi)$ , che è un fibrato banale, sono equivalenti.  $\square$

<sup>1</sup>Per un argomento topologico, che non faccio uso della struttura differenziabile e dell'esistenza di connessioni principali, si veda il Teorema XXVI.6.2 nell'appendice.

### XII.4. Classificazione dei fibrati principali

La Proposizione XII.3.7 è fondamentale per la classificazione dei fibrati principali con base  $M$ . John Milnor<sup>2</sup> ha introdotto la nozione di fibrato universale.

**DEFINIZIONE XII.4.1.** Un fibrato  $\mathbf{G}$ -principale  $\zeta = (E_\zeta \xrightarrow{\pi_\zeta} B_\zeta)$  si dice *m-universale* se per ogni fibrato  $\mathbf{G}$ -principale  $\xi = (E_\xi \xrightarrow{\pi_\xi} B_\xi)$  con una base  $B_\xi$  di dimensione minore o uguale ad  $m$  esiste un'applicazione  $f \in \mathcal{C}^\infty(B_\xi, B_\zeta)$ , unica a meno di omotopia, tale che  $f^*(\zeta)$  sia equivalente a  $\xi$ .

Utilizzando i risultati di §XXVI.7 e quelli relativi all'approssimazione  $\mathcal{C}^\infty$  dell'omotopia, ricaviamo dal Teorema XXVI.7.6 l'enunciato

**TEOREMA XII.4.2.** *Ogni fibrato  $\zeta = (E_\zeta \xrightarrow{\pi_\zeta} B_\zeta)$  il cui spazio totale  $E_\zeta$  sia  $m$ -connesso<sup>3</sup> è  $m$ -universale.*

**XII.4.1. Alcuni esempi.** Costruiamo in questo paragrafo alcuni fibrati principali  $m$ -universali rispetto ad alcuni gruppi classici.

**Sottogruppi del gruppo ortogonale.** Fissiamo due interi positivi  $m$  ed  $n$  e consideriamo  $\mathbf{SO}(m)$  ed  $\mathbf{SO}(n)$  come sottogruppi disgiunti di  $\mathbf{SO}(m+n)$ , ciascuno contenuto nel commutatore dell'altro. Il quoziente  $E = \mathbf{SO}(m+n)/\mathbf{SO}(n)$  si può identificare alla varietà di Stiefel  $\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{R})$  delle  $m$ -uple ortonormali di  $\mathbb{R}^{m+n}$ . Fissiamo un sottogruppo chiuso  $\mathbf{G}$  di  $\mathbf{SO}(m)$  e poniamo  $M = \mathbf{SO}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SO}(n))$ . L'inclusione  $\{e\} \times \mathbf{SO}(n) < \mathbf{G} \times \mathbf{SO}(n)$  definisce un'applicazione  $\mathbf{SO}(m+n)$ -equivariante  $\pi : E \rightarrow M$  che definisce un  $\mathbf{G}$ -fibrato principale. Ricordiamo che la varietà di Stiefel  $\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{R})$  delle  $m$ -uple ortonormali di  $\mathbb{R}^{m+n}$  è  $(n-1)$ -connessa e che

$$\pi_n(\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

**DEFINIZIONE XII.4.3.** Chiamiamo

$$(12.4.1) \quad \mathbf{SO}(m+n)/\mathbf{SO}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SO}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SO}(n))$$

l' $n$ -fibrato principale ortogonale standard con gruppo strutturale  $\mathbf{G} \subset \mathbf{SO}(m)$ .

Il fibrato (12.4.1) è  $\mathbf{G}$ -principale  $(n-1)$ -universale.

**Sottogruppi del gruppo speciale unitario.** Siano  $m, n$  due interi positivi e consideriamo  $\mathbf{SU}(m)$  ed  $\mathbf{SU}(n)$  come sottogruppi disgiunti di  $\mathbf{SU}(m+n)$  contenuti

<sup>2</sup> John Milnor *Construction of Universal Bundles, I* Annals of Mathematics Second Series, Vol. 63, No. 2 (Mar., 1956), pp. 272-284, e *Construction of Universal Bundles, II*, Annals of Mathematics Second Series, Vol. 63, No. 3 (May, 1956), pp. 430-436.

<sup>3</sup>Ricordiamo che uno spazio topologico  $E$  è  $m$ -connesso se è connesso per archi ed i suoi gruppi di omotopia  $\pi_i(E)$  sono banali per  $1 \leq i \leq m$ .



ciascuno nel commutatore dell'altro. Il quoziente  $E = \mathbf{SU}(m+n)/\mathbf{SU}(n)$  è la varietà di Stiefel  $\mathbb{V}_{m+n,n}(\mathbb{C})$ . È

$$\pi_q(\mathbb{V}_{m+n,n}(\mathbb{C})) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq q < 2n, \\ \mathbb{Z} & \text{se } q = 2n. \end{cases}$$

Se  $\mathbf{G}$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{SU}(m)$ , la proiezione naturale  $\pi : E \rightarrow M$  su  $M = \mathbf{SU}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SU}(n))$  definita dall'inclusione  $\{e\} \times \mathbf{SU}(n) < \mathbf{G} \times \mathbf{SU}(n)$  definisce un  $\mathbf{G}$ -fibrato principale.

DEFINIZIONE XII.4.4. Chiamiamo

$$(12.4.2) \quad \mathbf{SU}(m+n)/\mathbf{SU}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SU}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SU}(n))$$

l' $n$ -fibrato principale unitario standard con gruppo strutturale  $\mathbf{G} \subset \mathbf{SU}(m)$ .

Il fibrato (12.4.2) è  $\mathbf{G}$ -principale  $(2n-1)$ -universale.

**Sottogruppi del gruppo unitario simplettico.** Ricordiamo che il gruppo unitario simplettico  $\mathbf{Sp}(n)$  è il sottogruppo delle trasformazioni di  $\mathbf{U}(2n)$  che lasciano invariante la forma alternata  $\omega = dz^1 \wedge dz^{n+1} + \dots + dz^{2n-1} \wedge dz^{2n}$ . Siano  $m, n$  interi positivi e consideriamo  $\mathbf{Sp}(m)$  ed  $\mathbf{Sp}(n)$  come sottogruppi di  $\mathbf{Sp}(m+n)$ , ciascuno contenuto nel commutatore dell'altro. Il quoziente  $\mathbf{Sp}(m+n)/\mathbf{Sp}(n)$  è la varietà di Stiefel quaternionica  $\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{H})$  delle  $m$ -uple ortonormali rispetto al prodotto scalare quaternionico standard di  $\mathbb{H}^n$ . Abbiamo

$$\pi_q(\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{H})) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq q < 4n, \\ \mathbb{Z} & \text{se } q = 4n. \end{cases}$$

Se  $\mathbf{G}$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{Sp}(m)$ , la proiezione naturale  $\pi : E \rightarrow M$  su  $M = \mathbf{Sp}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n))$  definita dall'inclusione  $\{e\} \times \mathbf{Sp}(n) < \mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n)$  definisce un  $\mathbf{G}$ -fibrato principale.

DEFINIZIONE XII.4.5. Chiamiamo

$$(12.4.3) \quad \mathbf{Sp}(m+n)/\mathbf{Sp}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{Sp}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n))$$

l' $n$ -fibrato principale quaternionico standard con gruppo strutturale  $\mathbf{G} \subset \mathbf{Sp}(m)$ .

Il fibrato (12.4.3) è  $\mathbf{G}$ -principale  $(4n-1)$ -universale.

**Sottogruppi del gruppo lineare.** Siano  $m$  ed  $n$  interi positivi. Consideriamo  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$  ed  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$  come due sottogruppi disgiunti di  $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})$  che commutano tra loro. Le loro rappresentazioni in  $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})$  sono date rispettivamente da

$$\begin{aligned} \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \ni x &\rightarrow \begin{pmatrix} x & \\ & \text{sgn}(\det x)I_n \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \\ \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \ni x &\rightarrow \begin{pmatrix} I_m & \\ & x \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Per la decomposizione di Cartan,  $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$  è omotopicamente equivalente al quoziente  $\mathbf{SO}(m+n)/\mathbf{SO}(n)$  ed è quindi  $(n-1)$ -connesso. Ne segue che, se  $\mathbf{G}$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ , allora

$$(12.4.4) \quad \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/(\mathbf{G} \times \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}))$$

è un fibrato  $\mathbf{G}$ -principale  $(n-1)$ -universale.

Costruzioni analoghe ci permettono di ottenere fibrati  $\mathbf{G}$ -principali  $k$ -universali per sottogruppi chiusi di  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{C})$  e  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{H})$ .

### XII.5. Il fibrato dei sistemi di riferimento

Sia  $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$  un fibrato vettoriale di rango  $n$  su una varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $m$ . Per ogni punto  $p$  di  $M$  indichiamo con  $F_p(\eta)$  l'insieme di tutti gli isomorfismi lineari  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow E_p$ . Su  $F_p(\eta)$  il gruppo lineare  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  agisce, per composizione a destra, in modo libero e transitivo. L'unione disgiunta  $F(\eta) = \sqcup_{p \in M} F_p(\eta)$  è lo spazio totale di un fibrato principale  $\mathbb{L}(\eta) = (F(\eta) \xrightarrow{\pi} M)$ , con gruppo strutturale  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ . La proiezione  $\pi : \mathbb{L}(\eta) \rightarrow M$  associa a  $\sigma \in \mathbb{L}_p(\eta)$  il punto  $p$ .

**DEFINIZIONE XII.5.1.** Il fibrato principale  $F(\eta)$ , con gruppo strutturale  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ , si dice il *fibrato dei sistemi di riferimento* di  $\eta$ .

Abbiamo un morfismo differenziabile di fibrati vettoriali, associato al diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}(\eta) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{(\sigma, v) \rightarrow \sigma v} & E \\ \text{pr}_{\mathbb{L}(\eta)} \downarrow & & \downarrow \varpi \\ \mathbb{L}(\eta) & \xrightarrow{\pi} & M, \end{array}$$

che ci mostra come il pullback del fibrato vettoriale allo spazio totale dei suoi sistemi di riferimento sia un fibrato vettoriale banale.

Una trivializzazione locale di  $\mathbb{L}(\eta)$  è descritta dal dato di  $n$  sezioni  $s_1, \dots, s_n \in \Gamma_\eta(U, E)$ , definite su un aperto  $U$  di  $M$ , per cui  $s_1(p), \dots, s_n(p)$  siano linearmente indipendenti in  $E_p$  per ogni  $p \in U$ . Ad esse associamo la sezione  $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{L}(\eta)}(U, \mathbb{L}(\eta))$  definita da

$$\sigma(p) : \mathbb{R}^n \ni (k^1, \dots, k^n) \rightarrow \sum_{i=1}^n k^i s_i(p) \in E_p.$$

Il fibrato dei sistemi di riferimento di  $\eta$  è caratterizzato dal fatto che le sue sezioni locali definiscono trivializzazioni locali di  $\eta$ . Viceversa, vale la

**PROPOSIZIONE XII.5.2.** *Ad ogni fibrato principale  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ , con gruppo strutturale  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ , possiamo associare un fibrato vettoriale  $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$  di rango  $n$ , unico a meno di equivalenza, di cui  $\xi$  sia il fibrato dei sistemi di riferimento.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$  un atlante di trivializzazione di  $\xi$ . Le sue funzioni di transizione  $\psi_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha\beta}, \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}))$  ci permettono di definire un fibrato vettoriale con fibra tipica  $\mathbb{R}^n$  nel modo seguente.

Sull'unione disgiunta  $\tilde{E} = \bigsqcup_{\alpha} U_{\alpha} \times \mathbb{R}^n$  introduciamo la relazione di equivalenza  $U_{\alpha} \times \mathbb{R}^n \ni (p_{\alpha}, v_{\alpha}) \sim (p_{\beta}, v_{\beta}) \in U_{\beta} \times \mathbb{R}^n$  se  $p_{\alpha} = p_{\beta}$  e  $v_{\alpha} = \psi_{\alpha,\beta}(p_{\beta})v_{\beta}$ . Il quoziente  $E = \tilde{E}/\sim$  è lo spazio totale di un fibrato vettoriale di rango  $n$  di cui  $\xi$  è il fibrato dei sistemi di riferimento.

Se  $\eta' = (E' \xrightarrow{\sigma'} M)$  è un altro fibrato vettoriale di cui  $\xi$  sia il fibrato dei sistemi di riferimento, definiamo un'applicazione  $\tilde{E} \rightarrow E'$  associando a  $(p, v) \in U_{\alpha} \times \mathbb{R}^n$  l'elemento  $\sigma_{\alpha}(p)v \in E'$ . Per passaggio al quoziente otteniamo l'equivalenza tra  $\eta$  ed  $\eta'$ .  $\square$

Abbiamo quindi:

**TEOREMA XII.5.3.** *La  $\eta \longleftrightarrow \mathbb{L}(\eta)$  è una corrispondenza biunivoca tra la categoria dei fibrati vettoriali di rango  $n$  su  $M$ , modulo equivalenza, e quella dei fibrati principali su  $M$  con gruppo strutturale  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ , modulo equivalenza.*

**DEFINIZIONE XII.5.4.** Il fibrato dei sistemi di riferimento del fibrato tangente di una varietà differenziabile  $M$  si indica con  $F(M)$  e si dice il *fibrato dei sistemi di riferimento su  $M$* . Indichiamo con  $L(M)$  il suo spazio totale.

Abbiamo

**PROPOSIZIONE XII.5.5.** *Ogni diffeomorfismo  $f : M_1 \rightarrow M_2$  di varietà differenziabili si rialza in modo unico ad un isomorfismo di fibrati principali che renda commutativo il diagramma*

$$(12.5.1) \quad \begin{array}{ccc} L(M_1) & \xrightarrow{\tilde{f}} & L(M_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2. \end{array}$$

### XII.6. Jacobiano di un'applicazione differenziabile

Siano  $M, N$  due varietà differenziabili, di dimensioni  $m, n$  rispettivamente. Siano  $\mathbb{L}(M) = (L(M) \xrightarrow{\pi_M} M)$  ed  $\mathbb{L}(N) = (L(N) \xrightarrow{\pi_N} N)$  i loro fibrati dei sistemi di riferimento. Ad una  $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M, N)$  associamo il fibrato  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ -principale  $\mathbb{L}_f$  su  $M$ , con spazio totale

$$L_f = \{(\sigma, \tau) \in L(M) \times L(N) \mid \pi_N(\tau) = f(\pi_M(\sigma))\}$$

e proiezione  $\pi(\sigma, \tau) = \pi_M(\tau)$ . Al differenziale della  $f$  è associato il suo *jacobiano*  $\mathcal{J}f : L_f \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{J}f(\sigma, \tau) = \tau^{-1} \circ df \circ \sigma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

nei sistemi di riferimento  $\sigma$  e  $\tau$ .

### XII.7. Riduzione del gruppo strutturale e G-strutture

Il Teorema XII.5.3 stabilisce una corrispondenza biunivoca tra fibrati vettoriali e fibrati principali con gruppo strutturale  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ . Osserviamo che, se, nella dimostrazione della Proposizione XII.5.2, avessimo ristretto la costruzione ad un sottofibrato principale  $\xi'$  di  $\xi$ , con gruppo strutturale  $\mathbf{G} < \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ , avremmo ottenuto un fibrato vettoriale canonicamente isomorfo a quello associato a  $\xi$ .

Siano  $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$  un fibrato vettoriale reale di rango  $n$  e  $\mathbf{G}$  un sottogruppo di Lie di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ .

**DEFINIZIONE XII.7.1.** Un  $\mathbf{G}$ -atlante di trivializzazione di  $\eta$  è un suo atlante di trivializzazione  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  con funzioni di transizione  $\psi_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha\beta}, \mathbf{G})$ .

Due  $\mathbf{G}$ -atlanti di trivializzazione  $\mathcal{A}$  ed  $\mathcal{A}'$ , sono *equivalenti* se  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  è ancora un  $\mathbf{G}$ -atlante di trivializzazione.

L'unione di tutti i  $\mathbf{G}$ -atlanti di trivializzazione equivalenti ad un  $\mathbf{G}$ -atlante di trivializzazione assegnato è un  $\mathbf{G}$ -atlante di trivializzazione massimale.

Una  $\mathbf{G}$ -struttura, o *riduzione a  $\mathbf{G}$  del gruppo strutturale* è il dato di una classe di equivalenza di  $\mathbf{G}$ -atlanti di trivializzazione di  $\eta$ , ovvero di un  $\mathbf{G}$ -atlante di trivializzazione massimale.

Una carta locale di trivializzazione  $(U, \sigma_U)$  di  $\eta$  è *compatibile* con la  $\mathbf{G}$ -struttura se appartiene al suo  $\mathbf{G}$ -atlante di trivializzazione massimale.

Osserviamo che un  $\mathbf{G}$ -atlante di trivializzazione  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  di  $\eta$  determina un fibrato  $\mathbf{G}$ -principale  $F_{\mathbf{G}}(\eta)$ , ottenuto da  $F(\eta)$  per riduzione del gruppo strutturale, con spazio totale

$$(12.7.1) \quad \mathbb{L}_{\mathbf{G}}(\eta) = \bigcup_{\alpha \in I} \{\sigma_\alpha(p)a \mid p \in U_\alpha, a \in \mathbf{G}\} \subset \mathbb{L}(\eta).$$

**DEFINIZIONE XII.7.2.** Chiamiamo  $F_{\mathbf{G}}(\eta)$  un fibrato di  $\mathbf{G}$ -sistemi di riferimento di  $\eta$ .

Siano  $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$  ed  $\eta' = (E' \xrightarrow{\varpi'} M')$  due fibrati vettoriali di rango  $n$ . Un isomorfismo di fibrati vettoriali

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\ \varpi \downarrow & & \downarrow \varpi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

si rialza ad un isomorfismo dei corrispondenti fibrati dei sistemi di riferimento

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}(\eta) & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & \mathbb{L}(\eta') \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M', \end{array} \quad \text{con } \tilde{f}_*(\sigma) = \tilde{f}_* \circ \sigma \in \mathbb{L}_{\pi(\sigma)}(\mathbb{R}^n, E'_{\pi(\sigma)}).$$

DEFINIZIONE XII.7.3. Siano  $\eta, \eta'$  due fibrati vettoriali dello stesso rango, dotati di una  $\mathbf{G}$ -struttura. Un isomorfismo  $(f, \tilde{f})$  di  $\eta$  in  $\eta'$  è un  $\mathbf{G}$ -isomorfismo se

$$(12.7.2) \quad \tilde{f}_*(L_{\mathbf{G}}(\eta)) = L_{\mathbf{G}}(\eta').$$

Se i due fibrati hanno la stessa base ed  $f$  è l'identità, chiamiamo il corrispondente  $\mathbf{G}$ -isomorfismo una  $\mathbf{G}$ -equivalenza.

PROPOSIZIONE XII.7.4. Sia  $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$  un fibrato vettoriale di rango  $n$ . A meno di equivalenza, le  $\mathbf{G}$ -strutture su  $\eta$  sono in corrispondenza biunivoca con le  $\mathbf{G}$ -riduzioni del fibrato  $F(\eta)$  dei suoi sistemi di riferimento.  $\square$

Sia  $\mathbf{G}$  un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ . Se  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  è un ricoprimento aperto di  $M$ , indichiamo con  $\mathfrak{C}^q(\mathcal{U}, \mathbf{G})$  l'insieme delle  $q$ -catene di applicazioni di classe  $\mathcal{C}^\infty$  del ricoprimento  $\mathcal{U}$ , a valori in  $\mathbf{G}$ :

$$(12.7.3) \quad \mathfrak{C}^q(\mathcal{U}, \mathbf{G}) = \{(g_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q} \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q}, \mathbf{G}))\}.$$

Indichiamo poi con

$$(12.7.4) \quad \mathfrak{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbf{G}) = \{(g_{\alpha, \beta} \in \mathfrak{C}^1(\mathcal{U}, \mathbf{G})) \mid g_{\alpha, \beta} g_{\beta, \gamma} = g_{\alpha, \gamma} \text{ su } U_{\alpha, \beta, \gamma}, \forall \alpha, \beta, \gamma\},$$

e scriviamo

$$(12.7.5) \quad \delta(g_\alpha) = (g_\alpha \circ g_\beta^{-1}) \in \mathfrak{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbf{G}), \quad \forall (g_\alpha) \in \mathfrak{C}^0(\mathcal{U}, \mathbf{G}).$$

PROPOSIZIONE XII.7.5. Siano  $(g_{\alpha, \beta}), (g'_{\alpha, \beta}) \in \mathfrak{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbf{G})$  funzioni di transizione delle trivializzazioni di due fibrati vettoriali di rango  $n$

$$\xi = (E \xrightarrow{\varpi} M) \quad e \quad \xi' = (E' \xrightarrow{\varpi'} M)$$

sulla stessa base  $M$ , entrambi con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché i due fibrati siano  $\mathbf{G}$ -equivalenti è che esista una  $(h_\alpha) \in \mathfrak{C}^0(\mathcal{U}, \mathbf{G})$  tale che

$$(12.7.6) \quad g'_{\alpha, \beta} = h_\alpha g_{\alpha, \beta} h_\beta^{-1} \quad \text{su } U_{\alpha, \beta}, \quad \forall \alpha, \beta.$$

In particolare, il fibrato  $\xi$  è  $\mathbf{G}$ -equivalente al fibrato banale se, e soltanto se,  $(g_{\alpha, \beta}) = \delta(h_\alpha)$  per qualche  $(h_\alpha) \in \mathfrak{C}^0(\mathcal{U}, \mathbf{G})$ .  $\square$

ESEMPIO XII.7.6. Ogni fibrato vettoriale di rango  $n$  ammette una  $\mathbf{O}(n)$ -struttura. Sia infatti  $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$  un fibrato vettoriale di rango  $n$  ed  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$  un suo atlante di trivializzazione, con  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  ricoprimento aperto localmente finito di  $M$ . Sia  $\{\chi_\alpha\}$  una partizione differenziabile dell'unità subordinata ad  $\mathcal{U}$ . Possiamo allora definire un prodotto scalare sulle fibre di  $E$  ponendo

$$g(v_1, v_2) = \sum_{U_\alpha \ni p} \chi_\alpha(p) (\sigma_\alpha^{-1}(v_1) \mid \sigma_\alpha^{-1}(v_2)), \quad \forall p \in M, \quad \forall v_1, v_2 \in E_p.$$

La  $\mathbf{O}(n)$  struttura su  $\eta$  associata alla metrica  $g$  si può ottenere dall'atlante  $\mathcal{A}$  applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alle basi  $\sigma_\alpha(p)(e_1), \dots, \sigma_\alpha(p)(e_n)$  di  $E_p$  rispetto al prodotto scalare  $g_p = g|_{E_p}$ .

### XII.8. G-strutture su una varietà differenziabile

Siano  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$  e  $\mathbf{G}$  è un sottogruppo di Lie del gruppo lineare<sup>4</sup>  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ .

DEFINIZIONE XII.8.1. Una  $\mathbf{G}$ -struttura su  $M$  è una  $\mathbf{G}$ -struttura sul suo fibrato tangente.

OSSERVAZIONE XII.8.2. Il concetto di  $\mathbf{G}$ -struttura ci permette di considerare in modo concettualmente unitario diverse geometrie su  $M$ . Ad esempio:

- un'orientazione su  $M$  è equivalente al dato di una  $\mathbf{GL}_m^+(\mathbb{R})$ -struttura;
- una misura di Radon di classe  $\mathcal{C}^\infty$  di una  $\mathbf{SL}(m, \mathbb{R})$ -struttura;
- una metrica Riemanniana di una  $\mathbf{O}(m)$ -struttura;
- una struttura quasi-compessa di una  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ -struttura ( $m = 2n$  pari);
- una struttura quasi-Hermitiana<sup>5</sup> di una  $\mathbf{U}(n)$ -struttura ( $m = 2n$  pari);
- una struttura quasi-simplettica di una  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ -struttura ( $m = 2n$ )<sup>6</sup>;
- una struttura iper-unitaria di una  $\mathbf{Sp}(n)$ -struttura<sup>7</sup> ( $m = 4n$ );
- una  $\mathbf{1}$ -struttura si dice un *parallelismo completo*.

ESEMPIO XII.8.3. La fibrazione canonica  $\mathbf{SO}(n+1) \rightarrow S^n$  è una  $\mathbf{SO}(n)$ -riduzione del fibrato dei sistemi di riferimento di  $S^n$  e quindi una  $\mathbf{SO}(n)$ -struttura su  $S^n$ .

La fibrazione canonica  $\mathbf{SO}(n+1) \rightarrow \mathbb{R}P^n$  è una  $\mathbf{O}(n)$ -riduzione del fibrato dei sistemi di riferimento di  $\mathbb{R}P^n$  e quindi una struttura Riemanniana su  $\mathbb{R}P^n$ .

La fibrazione canonica  $\mathbf{SU}(n+1) \rightarrow \mathbb{C}P^n$  è una  $\mathbf{U}(n)$ -riduzione del fibrato dei sistemi di riferimento su  $\mathbb{C}P^n$  e quindi una struttura quasi-Hermitiana su  $\mathbb{C}P^n$ .

### XII.9. Fibrati vettoriali associati a rappresentazioni lineari

**XII.9.1. Fibrati vettoriali associati.** La costruzione della Proposizione XII.5.2 si generalizza al caso di fibrati principali generali e di rappresentazioni lineari del loro gruppo strutturale.

Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato principale su  $M$ , con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ .

Fissata una rappresentazione lineare di dimensione finita  $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ , definiamo su  $P \times V$  una relazione di equivalenza ponendo

$$(12.9.1) \quad (\sigma, v) \sim (\sigma \cdot a, \rho(a^{-1})(v)) \quad \forall \sigma \in P, \forall v \in V, \forall a \in \mathbf{G}.$$

NOTAZIONE XII.9.1. Indicheremo con  $E_V$  il quoziente  $(P \times V)/\sim$  e scriveremo per semplicità  $\sigma_\rho v$ , o anche  $\sigma v$ , quando si possa sottintendere la rappresentazione  $\rho$  senza creare confusione, per indicare la classe in  $E_V$  di  $(\sigma, v) \in P \times V$ . Se  $\alpha = \sigma v$ ,

<sup>4</sup>La nozione di  $\mathbf{G}$ -struttura per una varietà differenziabile è stata introdotta in S.S. Chern, *Pseudo-groupes continus infinis*, Colloque de Géométrie différentielle, Strasbourg (1953), pp. 119-136.

<sup>5</sup>Affinché si possa parlare di struttura Hermitiana occorre che si possa definire sul fibrato tangente una struttura quasi-complessa che sia un'isometria per la struttura quasi-Hermitiana.

<sup>6</sup>Ricordiamo che  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathbf{SL}(2n, \mathbb{R}) \mid a\Omega a = \Omega\}$  per una matrice antisimmetrica non degenera  $\Omega$  di tipo  $(2n) \times (2n)$ .

<sup>7</sup>Ricordiamo che  $\mathbf{Sp}(n) = \mathbf{U}(2n) \cap \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ .

il vettore  $v \in V$  è univocamente determinato da  $\alpha$  e  $\sigma$ . Possiamo quindi denotarlo con  $v = \sigma^{-1}\alpha$ .

PROPOSIZIONE XII.9.2. *Il quoziente  $E_V = (P \times V)/\sim$  è lo spazio totale di un fibrato vettoriale  $\xi_V = (E_V \xrightarrow{\pi_V} M)$  con fibra tipica  $V$ . La proiezione nel quoziente  $\varpi : P \times V \ni (\sigma, v) \rightarrow \sigma v \in E_V$  definisce un morfismo di fibrati vettoriali che rende commutativo il diagramma*

$$(12.9.2) \quad \begin{array}{ccc} P \times V & \xrightarrow{\varpi} & E_V \\ \text{pr}_P \downarrow & & \downarrow \pi_V \\ P & \xrightarrow{\pi} & M. \end{array}$$

DEFINIZIONE XII.9.3.  $\xi_V = (E_V \xrightarrow{\pi_V} M)$  è il fibrato vettoriale associato a  $\xi$  e alla rappresentazione lineare  $(\rho, V)$  del suo gruppo strutturale.

Riassumiamo questa costruzione nell'enunciato:

PROPOSIZIONE XII.9.4. *Sia  $\xi$  un fibrato principale sulla varietà differenziabile  $M$ , con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ . Ad ogni rappresentazione lineare  $\rho$  di  $\mathbf{G}$  su uno spazio vettoriale  $V$  risulta associato un fibrato vettoriale  $\xi_V$  su  $M$ , con fibra tipica  $V$ , tale che (12.9.2) sia un diagramma commutativo di morfismi di fibrati vettoriali.*  $\square$

DEFINIZIONE XII.9.5. Chiamiamo le sezioni differenziabili del fibrato vettoriale  $\xi_V$  *quantità di tipo*  $(\rho, V)$ .

Scriveremo per semplicità  $\Gamma_\xi(M, E_V)$  invece di  $\Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$ .

Una sezione  $s \in \Gamma_\xi(M, E_V)$  del fibrato  $\xi_V$  si rialza alla funzione  $\tilde{s} \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$ , definita da

$$(12.9.3) \quad \tilde{s}(\sigma) = \sigma^{-1}s(\pi(\sigma)).$$

DEFINIZIONE XII.9.6. Chiamiamo la  $\tilde{s}$  il *sollevamento* su  $P$  della sezione  $s$ .

PROPOSIZIONE XII.9.7. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una  $f \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$  sia il sollevamento di una sezione di  $\xi_V$  è che risulti*

$$(12.9.4) \quad f(\sigma a) = \rho(a^{-1})f(\sigma), \quad \forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G}.$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza immediata della (12.9.1). Infatti

$$(\sigma a)f(\sigma a) = \varpi(\sigma, \rho(a)\rho(a^{-1})f(\sigma)) = \varpi(\sigma, f(\sigma)) = \sigma f(\sigma).$$

Quindi il valore di  $\sigma f(\sigma)$  dipende solo da  $\pi(\sigma)$  e possiamo perciò definire una sezione differenziabile  $s$  di  $\xi_V$  ponendo  $s(\pi(\sigma)) = \sigma f(\sigma)$  per ogni  $\sigma \in P$ .  $\square$

NOTAZIONE XII.9.8. Indichiamo con  $\mathcal{E}_\rho(P, V)$  lo spazio delle  $f \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$  che soddisfano la (12.9.4).

PROPOSIZIONE XII.9.9. *La (12.9.3) stabilisce un isomorfismo lineare  $s \leftrightarrow \tilde{s}$  tra  $\Gamma_\xi(M, E_V)$  ed  $\mathcal{E}_\rho(P, V)$ .*  $\square$

ESEMPIO XII.9.10. Sia  $F(M) = (L(M) \xrightarrow{\pi} M)$  il fibrato dei sistemi di riferimento di una varietà differenziabile  $M$ .

Il fibrato associato alla rappresentazione canonica di  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$  su  $\mathbb{R}^m$  è il *fibrato tangente*  $TM \rightarrow M$ .

Il fibrato associato alla rappresentazione duale

$$\mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \ni a \rightarrow (a^\dagger)^{-1} \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$$

è il *fibrato cotangente*  $T^*M \rightarrow M$ .

I fibrati tensoriali  $T^{p,q}M$  sono associati alle rappresentazioni tensoriali :

$$\begin{aligned} \rho(a)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q) \\ = a(v_1) \otimes \cdots \otimes a(v_p) \otimes {}^t a^{-1}(w_1) \otimes \cdots \otimes {}^t a^{-1}(w_q) \\ \forall v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE XII.9.11. La Proposizione XII.9.9 ci permette di associare ad ogni sezione differenziabile del fibrato  $\xi_V$  una *funzione* a valori in  $V$ . Come abbiamo visto, alle funzioni definite su una varietà differenziabile e a valori in uno spazio vettoriale si possono applicare le diverse operazioni del calcolo differenziale. Ad esempio, possiamo calcolarne il differenziale e le derivate rispetto a campi di vettori.

**XII.9.2. Forme tensoriali e pseudotensoriali.** Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato principale con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$  e  $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$  una sua rappresentazione lineare reale di dimensione finita.

DEFINIZIONE XII.9.12. Una  $q$ -forma alternata  $\phi \in \Omega^q(P, V)$  si dice *pseudotensoriale di tipo*  $(\rho, V)$  se soddisfa

$$(12.9.5) \quad R_a^* \phi = \rho(a^{-1}) \cdot \phi \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

La  $\phi$  si dice *tensoriale* se è anche *orizzontale*, cioè se è pseudotensoriale ed inoltre

$$(12.9.6) \quad \phi(X_1, \dots, X_q) = 0 \quad \text{quando almeno uno degli } X_i \text{ sia verticale.}$$

Indichiamo con  $\Omega_{\rho}^q(P, V)$  lo spazio delle  $q$ -forme pseudotensoriali di tipo  $(\rho, V)$  e con  $\Omega_{\rho,0}^q(P, V)$  il sottospazio delle  $q$ -forme tensoriali di tipo  $(\rho, V)$ .

ESEMPIO XII.9.13. Su  $F(M)$  la *forma canonica*<sup>8</sup>

$$(12.9.7) \quad \theta = \sigma^{-1} d\pi \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m).$$

è una 1-forma tensoriale per la rappresentazione canonica di  $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ .

Se  $\xi$  è un sottofibrato di  $F(M)$ , con gruppo strutturale  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ , la restrizione di  $\theta$  a  $P$  è ancora una 1-forma tensoriale per la rappresentazione naturale di  $\mathbf{G}$  su  $\mathbb{R}^m$ .

La definizione del prodotto esterno di forme si estende al caso di forme pseudotensoriali nel caso in cui una di esse sia di tipo  $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$ .

<sup>8</sup>La  $\theta$  si dice anche forma *tautologica* o *di saldatura* (in inglese: solder form).



DEFINIZIONE XII.9.14. Se  $(\rho, V)$  è una rappresentazione lineare di  $\mathbf{G}$ , il prodotto esterno di  $\phi \in \Omega_{\text{Ad}}^r(P, \mathfrak{g})$  e  $\psi \in \Omega_{\rho}^s(P, V)$  è la forma  $\phi \wedge_{\rho} \psi \in \Omega_{\rho}^{r+s}(P, V)$  definita da (12.9.8)

$$\phi \wedge_{\rho} \psi(X_1, \dots, X_{r+s}) = \sum' \varepsilon(k) \rho_*(\phi(X_{k_1}, \dots, X_{k_r}))(\psi(X_{k_{r+1}}, \dots, X_{k_{r+s}})),$$

$$\forall X_1, \dots, X_{r+s} \in \mathfrak{X}(P),$$

dove il simbolo  $\sum'$  indica che la somma a secondo membro è fatta su tutte le permutazioni di  $k$  di  $\{1, \dots, r+s\}$  con

$$1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq r+s \quad \text{ed} \quad 1 \leq k_{r+1} < \dots < k_{r+s} \leq r+s.$$

Se  $\rho$  è la rappresentazione aggiunta, scriveremo  $[\phi \wedge \psi]$  invece di  $\phi \wedge_{\text{Ad}} \psi$  e, se  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  ed  $\iota$  la rappresentazione canonica su  $\mathbb{R}^n$ , scriveremo  $\phi \wedge \psi$  invece di  $\phi \wedge_{\iota} \psi$ .

Abbiamo facilmente

PROPOSIZIONE XII.9.15. Se  $\phi \in \Omega_{\text{Ad},0}^r(P, \mathfrak{g})$ ,  $\psi \in \Omega_{\rho,0}^s(P, V)$ , allora  $\phi \wedge_{\rho} \psi \in \Omega_{\rho,0}^{r+s}(P, V)$ .  $\square$

### XII.9.3. Forme differenziali a valori in un fibrato vettoriale.

Sia  $\eta = (E \xrightarrow{\pi_E} M)$  un fibrato vettoriale.

DEFINIZIONE XII.9.16. Lo spazio  $\Omega^q(M, E)$  delle  $q$ -forme differenziali a valori in  $E$  consiste delle  $q$ -forme  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineari alternate di grado  $q$

$$f : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{q \text{ volte}} \longrightarrow \Gamma_{\eta}(M, E).$$

In particolare,  $\Omega^0(M, E) = \Gamma_{\eta}(M, E)$ . Se  $\eta$  è il fibrato banale  $M \times V \xrightarrow{\text{pr}_M} M$ , gli  $\Omega^q(M, E)$  coincidono con gli spazi  $\Omega^q(M, V)$  delle forme differenziali a valori in  $V$ .

OSSERVAZIONE XII.9.17. Se  $f : N \rightarrow M$  è un'applicazione differenziabile, il pullback  $f^*\phi$  di  $\phi \in \Omega^q(M, E)$ , è una  $q$ -forma a valori in  $f^*E$ .

### XII.9.4. Forme tensoriali e forme a valori in un fibrato vettoriale.

Una forma a valori in un fibrato vettoriale definisce una forma a valori vettoriali sullo spazio totale dei sistemi di riferimento.

Siano  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato principale,  $(\rho, V)$  una rappresentazione lineare del suo gruppo strutturale  $\mathbf{G}$  e  $\xi_V = (E_V \xrightarrow{\pi_V} M)$  il corrispondente fibrato vettoriale.

Data una forma  $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$  definiamo

$$(12.9.9) \quad \tilde{\phi}_{\sigma}(X_1, \dots, X_q) = \sigma^{-1} \phi(\pi_* X_{1\sigma}, \dots, \pi_* X_{q\sigma}), \quad \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(P), \quad \sigma \in P.$$

PROPOSIZIONE XII.9.18. Se  $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$ , la  $\tilde{\phi}$  definita dalla (12.9.9) è una  $q$ -forma tensoriale di tipo  $(\rho, V)$ . L'applicazione

$$(12.9.10) \quad \Lambda_V : \Omega^q(M, E_V) \ni \phi \longrightarrow \tilde{\phi} \in \Omega_{\rho,0}^q(P, V)$$

è un isomorfismo lineare.  $\square$

PROPOSIZIONE XII.9.19. Se  $U$  è un aperto di  $M$  e  $\sigma_U \in \Gamma_\xi(U, P)$ , allora

$$(12.9.11) \quad \sigma_U \cdot (\sigma_U^* \tilde{\phi}) = \phi|_U, \quad \forall \phi \in \Omega^q(U, E_V).$$

□

DEFINIZIONE XII.9.20. La forma  $\phi_U = \sigma_U^* \tilde{\phi} \in \Omega^q(U, V)$  è il *coefficiente* di  $\phi$  nella carta di trivializzazione  $(U, \sigma_U)$ .

Se  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$  è un atlante di trivializzazione di  $\xi$ , possiamo associare a  $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$  la famiglia

$$(12.9.12) \quad \{\phi_\alpha = \sigma_\alpha^{-1} \phi|_{U_\alpha} \in \Omega^q(U_\alpha, V)\}.$$

□

DEFINIZIONE XII.9.21. Le  $\{\phi_\alpha\}$  sono i *coefficienti* di  $\phi$  nell'atlante  $\mathcal{A}$ .

PROPOSIZIONE XII.9.22. Condizione necessaria e sufficiente affinché le  $\{\phi_\alpha \in \Omega^q(U_\alpha, V)\}$  siano i coefficienti di una  $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$  è che

$$\phi_\alpha = \rho(\psi_{\alpha,\beta}) \phi_\beta \quad \text{su } U_{\alpha,\beta}, \quad \forall \alpha, \beta$$

ove le  $\psi_{\alpha,\beta} = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha,\beta}, \mathbf{G})$  sono le funzioni di transizione dell'atlante  $\mathcal{A}$ .

## Connessioni principali

In questo capitolo indicheremo con  $\xi$  un fibrato principale differenziabile di classe  $\mathcal{C}^\infty$ , con spazio totale  $P$ , base  $M$  e gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ . Indichiamo con  $\mathfrak{g}$  l'algebra Lie di  $\mathbf{G}$ .

### XIII.1. La distribuzione verticale

All'azione di  $\mathbf{G}$  su  $P$  associamo le applicazioni

$$(13.1.1) \quad \ell_\sigma : \mathbf{G} \ni x \longrightarrow \sigma x \in P, \quad \text{per ogni } \sigma \in P,$$

$$(13.1.2) \quad R_a : P \ni \sigma \longrightarrow \sigma a \in P, \quad \text{per ogni } a \in \mathbf{G}.$$

Indicando con  $L_a$  ed  $R_a$  le traslazioni a sinistra e a destra in  $\mathbf{G}$ , abbiamo

$$\ell_\sigma \circ L_a = \ell_{\sigma a},$$

$$R_a \circ \ell_\sigma = \ell_{\sigma a} \circ \text{ad}(a^{-1}).$$

Infatti

$$\ell_\sigma(L_a(x)) = \ell_\sigma(ax) = \sigma(ax) = (\sigma a)x = \ell_{\sigma a}(x),$$

$$R_a(\ell_\sigma(x)) = \ell_\sigma(x)a = \sigma xa = (\sigma a)\text{ad}(a^{-1})(x) = \ell_{\sigma a} \circ \text{ad}(a^{-1})(x).$$

DEFINIZIONE XIII.1.1. Denotiamo con

$$(13.1.3) \quad \mathfrak{V}(P) = \{X \in \mathfrak{X}(P) \mid d\pi(\sigma)(X_\sigma) = 0, \forall \sigma \in P\}$$

la *distribuzione verticale* su  $P$  e con

$$(13.1.4) \quad VP = \bigcup_{\sigma \in P} \{X_\sigma \mid X \in \mathfrak{V}(P)\} = \ker d\pi \subset TP$$

il corrispondente *fibrato verticale*.

La  $\mathfrak{V}(P)$  è totalmente integrabile, in quanto la  $\pi : P \rightarrow M$  definisce una foliazione globale di  $\mathfrak{V}(P)$ . In particolare, è soddisfatta la condizione di integrabilità formale

$$(13.1.5) \quad [\mathfrak{V}(P), \mathfrak{V}(P)] \subset \mathfrak{V}(P).$$

Ogni  $X \in \mathfrak{g}$  definisce<sup>1</sup> un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di  $P$ :

$$(13.1.6) \quad \mathbb{R} \ni t \longrightarrow R_{\exp(tX)} \in \mathcal{C}^\infty(P, P).$$

DEFINIZIONE XIII.1.2. Il suo generatore infinitesimale, che denotiamo con  $X^*$ , si dice il *campo fondamentale* associato a  $X$ .

<sup>1</sup>Vedi §VII.9.

OSSERVAZIONE XIII.1.3. Se  $\xi$  è il fibrato banale  $\mathbf{G} \rightarrow \{p_0\}$ , allora il campo fondamentale  $X^*$  coincide con il campo invariante a sinistra  $X^*$  su  $\mathbf{G}$ .

NOTAZIONE XIII.1.4. Indichiamo con  $\lambda_\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow T_\sigma P$  il differenziale nell'identità dell'applicazione  $\ell_\sigma$  definita in (13.1.1).

LEMMA XIII.1.5. Per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ , è  $X^* \in \mathfrak{V}(P)$  ed

$$(13.1.7) \quad X_\sigma^* = \lambda_\sigma(X), \quad \forall \sigma \in P.$$

DIMOSTRAZIONE. Le curve integrali  $t \rightarrow \sigma \exp(tX)$  di  $X^*$  sono verticali e quindi  $X^*$  è verticale. Risulta poi

$$X_\sigma^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma \exp(tX) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \ell_\sigma(\exp(tX)) = d\ell_\sigma(e)(X). \quad \square$$

PROPOSIZIONE XIII.1.6. Con le notazioni introdotte sopra, abbiamo:

- (1)  $\forall \sigma \in P$ ,  $\lambda_\sigma = d\ell_\sigma(e) : \mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_\sigma^* \in V_\sigma P$  è un isomorfismo lineare.
- (2) La  $P \times \mathfrak{g} \ni (\sigma, X) \rightarrow X_\sigma^* \in VP$  è un'equivalenza di fibrati vettoriali, che definisce una trivializzazione del fibrato verticale  $VP$ .
- (3) La  $\Lambda : \mathfrak{g} \ni X \rightarrow X^* \in \mathfrak{V}(P)$  è un monomorfismo di algebre di Lie.
- (4) Vale la formula

$$(13.1.8) \quad dR_a(X^*) = [\text{Ad}(a^{-1})X]^*, \quad \forall a \in \mathbf{G}, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

- (5) La distribuzione  $\mathfrak{V}(P)$  è il sotto- $\mathcal{C}^\infty(P)$ -modulo generato dai campi di vettori  $X^*$ , al variare di  $X$  in  $\mathfrak{g}$ .

DIMOSTRAZIONE. (1). Poiché l'azione di  $\mathbf{G}$  su  $P$  è libera, per il Corollario VII.9.20 la  $\lambda_\sigma$  è iniettiva. È anche un isomorfismo, perché  $V_\sigma P$  e  $\mathfrak{g}$  hanno la stessa dimensione. Le (2) e (5) sono conseguenza immediata della (1).

(3). Per (1),  $\Lambda$  è iniettiva. I campi  $X^*$  su  $\mathbf{G}$  ed  $X^*$  su  $P$  sono  $\ell_\sigma$ -correlati per ogni  $\sigma \in P$ . Questo implica che  $\Lambda$  è anche un omomorfismo di algebre di Lie, completando la dimostrazione del punto (3).

La formula (13.1.8) si ottiene dalla

$$R_a(\sigma \exp(tX)) = \sigma(\exp(tX)a) = \sigma a(a^{-1} \exp(tX)a) = (\sigma a) \exp(t \text{Ad}(a^{-1})X),$$

che dimostra come la traslazione  $R_a$  trasformi il flusso generato da  $X^*$  nel flusso generato da  $[\text{Ad}(a^{-1})X]^*$ .  $\square$

Sia  $\sigma$  un punto di  $P$ . Per la (1) della Proposizione XIII.1.6, ad ogni vettore verticale  $w \in V_\sigma P$  corrisponde un unico elemento  $X$  di  $\mathfrak{g}$  tale che  $X_\sigma^* = w$ . Questa corrispondenza definisce un'applicazione

$$(13.1.9) \quad \omega_\nu : VP \rightarrow \mathfrak{g}$$

di classe  $\mathcal{C}^\infty$  ed  $\mathbb{R}$ -lineare sulle fibre di  $VP$ .

Diremo che la  $\omega_\nu$  è una forma differenziale sulla distribuzione verticale  $VP$ , a valori nell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ .

Per la (13.1.8), la  $\omega_\nu$  soddisfa

$$(13.1.10) \quad (R_a)^* \omega_\nu = \text{ad}(a^{-1}) \circ \omega_\nu, \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

Per semplificare le notazioni, sarà a volte conveniente scrivere

$$\begin{array}{lll} X_\sigma a & \text{invece che} & dR_a(X_\sigma), & \text{per } X_\sigma \in TP, a \in \mathbf{G}, \\ \sigma A & \text{invece che} & \lambda_\sigma(A), & \text{per } \sigma \in P, A \in \mathfrak{g}, \\ aY_x & \text{invece che} & dL_a(Y_x), & \text{per } a \in \mathbf{G}, Y_x \in T\mathbf{G}. \end{array}$$

### XIII.2. Il concetto di connessione principale

DEFINIZIONE XIII.2.1. Una *connessione  $\mathbf{G}$ -principale*<sup>2</sup>  $\Gamma$  su  $\xi$  è il dato di una forma differenziale  $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  (la sua *forma di Cartan*) che soddisfi le:

$$\begin{array}{ll} (1) & \omega(A^\star) = A, \text{ per ogni } A \in \mathfrak{g}, \\ (2) & R_a^* \omega = \text{Ad}(a^{-1})\omega, \forall a \in \mathbf{G}, \text{ cioè} \\ (2') & R_a^* \omega(X) = \omega((R_a)_*(X)) = \text{Ad}(a^{-1})(\omega(X)), \forall X \in \mathfrak{X}(P). \end{array}$$

DEFINIZIONE XIII.2.2. Il nucleo  $\ker \omega$  della forma di Cartan è la *distribuzione orizzontale* di  $\Gamma$ :

$$(13.2.1) \quad HP = \ker \omega = \{v \in TP \mid \omega(v) = 0\}.$$

Indichiamo con

$$(13.2.2) \quad \mathcal{H}(P) = \{X \in \mathfrak{X}(P) \mid X_\sigma \in HP, \forall \sigma \in P\}$$

lo spazio dei *campi orizzontali*, cioè delle sezioni  $\mathcal{C}^\infty$  di  $HM$ .

La *distribuzione orizzontale* è caratterizzata dalle proprietà:

$$\begin{array}{ll} (1') & T_\sigma P = V_\sigma P \oplus H_\sigma P, \quad \forall \sigma \in P \\ (2') & (R_a)_*(H_\sigma P) = H_{\sigma a} P, \quad \forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G}. \end{array}$$

Sia  $HP$  un sottofibrato vettoriale differenziabile di  $TP$  che verifichi le (1'), (2'), e  $\text{pr}_h$  e  $\text{pr}_v$  le proiezioni sulle *componenti orizzontale e verticale*, corrispondenti alla decomposizione (1')

$$(13.2.3) \quad \begin{array}{ccc} & TP & \\ \text{pr}_v \swarrow & & \searrow \text{pr}_h \\ VP & & HP. \end{array}$$

Si verifica immediatamente che la forma  $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ , definita da

$$(13.2.4) \quad \omega(X) = \omega_v(\text{pr}_v(X)), \quad \forall X \in TP.$$

è la forma di Cartan di una connessione principale  $\Gamma$  su  $\xi$  ed abbiamo quindi la<sup>3</sup>:

<sup>2</sup>Spesso, quando questo non porti confusione, ometteremo il riferimento esplicito al gruppo e diremo semplicemente *connessione principale* invece di *connessione  $\mathbf{G}$ -principale*.

<sup>3</sup>La definizione della connessione a partire dalla distribuzione orizzontale è dovuta a CHARLES EHRESMANN: *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie, Bruxelles, (1950), pp. 29-55.

PROPOSIZIONE XIII.2.3. *La  $\omega \longleftrightarrow HP = \ker \omega$  definisce una corrispondenza biunivoca tra le connessioni principali  $\Gamma$  su  $\xi$  ed i sottofibrati  $HP$  di  $TP$  che soddisfano le condizioni (1') e (2').*  $\square$

La caratterizzazione di una connessione principale mediante la sua distribuzione orizzontale ci dà facilmente:

PROPOSIZIONE XIII.2.4 (estensione). *Sia  $\xi' = (P' \xrightarrow{\pi'} M)$  un sottofibrato principale differenziabile di  $\xi$ , con la stessa base  $M$  e gruppo strutturale  $\mathbf{G}' \subset \mathbf{G}$ . Indichiamo con  $\iota : P' \hookrightarrow P$  l'inclusione. Per ogni connessione principale  $\Gamma'$  su  $\xi'$ , con forma di Cartan  $\omega'$ , vi è un'unica connessione principale  $\Gamma$  su  $\xi$ , la cui forma di Cartan  $\omega$  soddisfi*

$$(13.2.5) \quad \omega' = \iota^* \omega.$$

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con  $H'P'$  il fibrato orizzontale della connessione  $\Gamma'$ . Poiché  $H'P'$  è invariante per le traslazioni a destra mediante elementi di  $\mathbf{G}'$ , abbiamo  $R_{a_1} H'_{\sigma_1} P' = R_{a_2} H'_{\sigma_2} P'$  se  $\sigma_1, \sigma_2 \in P'$ ,  $a_1, a_2 \in \mathbf{G}'$  e  $\sigma_1 a_1 = \sigma_2 a_2$ . L'applicazione

$$P' \times \mathbf{G}' \ni (\sigma, a) \rightarrow \sigma a \in P_{\xi}$$

è surgettiva. Per l'osservazione precedente, possiamo allora definire il fibrato orizzontale  $HP$  della connessione  $\Gamma$  ponendo

$$H_{\sigma a} P = (R_a)_*(H'_{\sigma} P'), \quad \forall \sigma \in P', \forall a \in \mathbf{G}'.$$

Chiaramente  $HP$  è univocamente determinato da  $H'P'$ , verifica le condizioni (1') e (2'), e definisce quindi un'unica connessione principale  $\Gamma$  su  $\xi$ , la cui forma di Cartan  $\omega$  estende quella di  $\Gamma'$ .  $\square$

OSSERVAZIONE XIII.2.5. Viceversa, è possibile restringere la connessione principale  $\Gamma$  su  $\xi$  ad una connessione principale  $\Gamma'$  sul sottofibrato  $\xi'$  se, e soltanto se, la restrizione a  $V'P'$  della sua forma di Cartan  $\omega$  è a valori nell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}'$  di  $\mathbf{G}'$ .

ESEMPIO XIII.2.6. Sul fibrato banale  $M \times \mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M$  possiamo definire la *connessione piatta* canonica: è quella che ha come forma di Cartan il pullback  $\text{pr}_{\mathbf{G}}^* \omega_{\mathbf{G}}$  della forma di Maurer-Cartan di  $\mathbf{G}$ .

La distribuzione orizzontale è in questo caso completamente integrabile ed ha come varietà integrali le  $M \times \{a\}$ , al variare di  $a$  in  $\mathbf{G}$ .

TEOREMA XIII.2.7 (esistenza). *Ogni fibrato principale differenziabile ammette una connessione principale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato principale differenziabile con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ , e sia  $\omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^1(\mathbf{G}, \mathfrak{g})$  la forma di Maurer-Cartan di  $\mathbf{G}$ . Fissiamo un atlante di trivializzazione  $\{(U_{\alpha}, \sigma_{\alpha})\}$  di  $\xi$ . Per ogni  $\alpha$ , la  $\mathbf{G}$ -equivalenza tra  $P|_{U_{\alpha}}$  ed il fibrato banale  $U_{\alpha} \times \mathbf{G} \rightarrow U_{\alpha}$  ci permette di definire una forma di Cartan  $\omega'_{\alpha} \in \Omega^1(P|_{U_{\alpha}}, \mathfrak{g})$  su  $P|_{U_{\alpha}}$ . Fissata una partizione  $\mathcal{C}^{\infty}$  dell'unità  $\{\kappa_{\alpha}\}$ , subordinata ad  $\{U_{\alpha}\}$ , la  $\omega = \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha} \omega'_{\alpha} \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  è la forma di Cartan di una connessione principale su  $\xi$ .  $\square$

### XIII.3. Pullback di una connessione principale

Sia  $\mathbf{H}$  un altro gruppo di Lie ed  $\eta = (Q \xrightarrow{\pi_N} N)$  un fibrato principale differenziabile con gruppo strutturale  $\mathbf{H}$ . Ricordiamo che un morfismo  $\Phi$  di  $\eta$  in  $\xi$  è una terna  $(f, F, \phi)$ , ove  $f \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$  ed  $F \in \mathcal{C}^\infty(Q, P)$  sono applicazioni differenziabili,  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{H}, \mathbf{G})$  un omomorfismo di gruppi di Lie, ed abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} Q \times \mathbf{H} & \xrightarrow{(\mu, h) \rightarrow \mu h} & Q & \xrightarrow{\pi_\eta} & N \\ \downarrow F \times \phi & & \downarrow F & & \downarrow f \\ P \times \mathbf{G} & \xrightarrow{(\sigma, g) \rightarrow \sigma g} & P & \xrightarrow{\pi_\xi} & M. \end{array}$$

È in particolare

$$F(\mu h) = F(\mu)\phi(h), \quad \forall \mu \in Q, \forall h \in \mathbf{H}.$$

Si verifica facilmente la

**PROPOSIZIONE XIII.3.1.** *Il pullback  $F^*\omega$  della forma di Cartan di una connessione  $\mathbf{G}$ -principale  $\Gamma$  su  $\xi$  è la forma di Cartan di una connessione  $\mathbf{H}$ -principale  $\Gamma'$  su  $\eta$ .  $\square$*

**DEFINIZIONE XIII.3.2.** La  $\Gamma'$  si dice il *pullback* su  $\eta$  della connessione  $\Gamma$  su  $\xi$ .

Dato un fibrato differenziabile  $\mathbf{G}$ -principale  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ , una varietà differenziabile  $N$  ed un'applicazione  $f \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$ , il pullback  $f^*\xi = (P_f \xrightarrow{\pi_f} N)$  di  $\xi$  mediante  $f$  è il fibrato differenziabile  $\mathbf{G}$ -principale con

$$\begin{aligned} P_f &= \{(q, \sigma) \in N \times P \mid \pi(\sigma) = f(q)\}, \quad \pi_f : P_f \ni (q, \sigma) \longrightarrow q \in N, \\ P_f \times \mathbf{G} &\ni ((q, \sigma), a) \longrightarrow (q, \sigma)a = (q, \sigma a) \in P_f. \end{aligned}$$

La  $f$  si rialza ad un morfismo  $\tilde{f}$  di fibrati  $\mathbf{G}$ -principali

$$\tilde{f} : P_f \ni (q, \sigma) \longrightarrow \tilde{f}(q, \sigma) = \sigma \in P.$$

**PROPOSIZIONE XIII.3.3.** *Se  $\omega$  è la forma di Cartan di una connessione principale  $\Gamma$  su  $\xi$ , allora la  $\tilde{f}^*\omega \in \Omega^1(P_f, \mathfrak{g})$  è la forma di Cartan di una connessione principale  $f^*\Gamma$  su  $f^*\xi$ .  $\square$*

### XIII.4. Il fibrato delle connessioni principali

Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato differenziabile  $\mathbf{G}$ -principale. Il differenziale dell'azione di  $\mathbf{G}$  definisce un'azione differenziabile a destra su  $TP$ :

$$(13.4.1) \quad TP \times \mathbf{G} \ni (X_\sigma, a) \longrightarrow dR_a(X_\sigma) = X_{\sigma a} \in TP.$$

Sia  $C_\xi = TP/\mathbf{G}$  il quoziente rispetto a questa azione e  $\varpi : TP \rightarrow C_\xi$  la proiezione canonica.

**PROPOSIZIONE XIII.4.1.** *Possiamo definire su  $C_\xi$  un'unica struttura differenziale per cui  $\varpi : TP \rightarrow C_\xi$ , con l'azione (13.4.1), sia un fibrato differenziabile  $\mathbf{G}$ -principale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $U$  un aperto di  $M$  e siano  $\sigma_i \in \Gamma_\xi(U, P)$ , per  $i = 1, 2$ , sezioni di  $\xi$  su  $U$ . Le  $\sigma_i(U)$  sono sottovarietà localmente chiuse di  $P$ . Le restrizioni  $TP|_{\sigma_i(U)}$  di  $TP$  alle  $\sigma_i(P)$  sono sottovarietà di  $TP$  che hanno la stessa immagine  $W$  mediante  $\varpi$ . Le  $\phi_i : TP|_{\sigma_i(U)} \xrightarrow{\varpi} W$  ( $i = 1, 2$ ) sono omeomorfismi. Sia  $\{p \rightarrow \psi(p) = [\sigma_1(p)]^{-1}\sigma_2(p)\} \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{G})$ . Allora

$$\phi_1^{-1}\phi_2(X_{\sigma_2(p)}) = R_{\psi(p)}X_{\sigma_2(p)}$$

e quindi  $\phi_1^{-1}\phi_2$  è un diffeomorfismo di  $TP|_{\sigma_2(U)}$  su  $TP|_{\sigma_1(U)}$ .

Da questo ricaviamo che  $C_\xi$  ha un'unica struttura di varietà differenziabile per cui le  $\phi_i$  definite sopra siano diffeomorfismi. Chiaramente l'azione (13.4.1) è libera e transitiva e quindi  $\varpi : TP \rightarrow C_\xi$  è un fibrato differenziabile  $\mathbf{G}$ -principale.  $\square$

LEMMA XIII.4.2. *Il differenziale della proiezione sulla base del fibrato  $\xi$  definisce un fibrato differenziabile localmente banale*

$$(13.4.2) \quad d\pi : TP \rightarrow TM$$

con fibra tipica  $\mathbf{G} \times \mathfrak{g}$ .

DIMOSTRAZIONE. Se  $\sigma \in \Gamma_\xi(U, P)$  è una sezione di  $\xi$  definita su un aperto  $U$  di  $M$ , la

$$TM|_U \times \mathbf{G} \times \mathfrak{g} \ni (Y_p, a, X) \longrightarrow [d\sigma(p)(Y_p)]a + X_{\sigma(p)a}^* \in TP|_{TM|_U}$$

è una trivializzazione locale.  $\square$

PROPOSIZIONE XIII.4.3. *L'applicazione  $d\pi : TP \rightarrow TM$  definisce, per passaggio al quoziente, un fibrato vettoriale differenziabile  $\mathcal{C}_\xi = (C_\xi \xrightarrow{\varpi_\xi} TM)$ , con fibra tipica  $\mathfrak{g}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\sigma \in \Gamma_\xi(U, P)$  una sezione differenziabile di  $\xi$ , definita su un aperto  $U$  di  $M$ . Ad esso possiamo associare la trivializzazione locale

$$\Phi_\sigma : TM|_U \times \mathfrak{g} \ni (Y_p, X) \rightarrow \varpi(d\sigma(p)(Y_p) + X_{\sigma(p)}^*) \in C_\xi|_U = \varpi^{-1}(TM|_U).$$

Osserviamo che un'altra sezione di  $\xi$  su  $U$  è della forma  $\sigma_1(p) = \sigma(p)\psi(p)$  per una  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{G})$ . La corrispondente trivializzazione locale è

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma_1}(Y_p, X) &= \varpi(d\sigma_1(p)(Y_p) + X_{\sigma_1(p)}^*) = \varpi(d\sigma(p)(Y_p)\psi(p) + X_{\sigma(p)\psi(p)}^*) \\ &= \Phi_\sigma(Y_p, \text{Ad}([\psi(p)]^{-1})(X)) \end{aligned}$$

Quindi, ad un atlante di trivializzazione  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$  di  $\xi$ , con funzioni di transizione  $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ , corrisponde un atlante  $\hat{\mathcal{A}} = \{(TM|_{U_\alpha}, \Phi_{\sigma_\alpha})\}$  di con funzioni di transizione  $\{\text{Ad}([\psi_{\alpha\beta}]^{-1})\}$ .  $\square$

Osserviamo che abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} TP & \xrightarrow{\varpi} & C_\xi \\ & \searrow d\pi & \swarrow \varpi_\xi \\ & & TM. \end{array}$$



Abbiamo<sup>4</sup>:

**TEOREMA XIII.4.4.** *Le connessioni principali su  $\xi$  sono in corrispondenza biunivoca con le sezioni  $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{G}_\xi}(TM, C_\xi)$  di  $\mathfrak{G}_\xi$  tali che*

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\gamma} & C_\xi \\ & \searrow \text{pr} & \swarrow \varpi_\xi \\ & M & \end{array}$$

sia un morfismo di fibrati vettoriali su  $M$ .

In questa corrispondenza, la distribuzione orizzontale è caratterizzata da

$$(13.4.3) \quad HP = \varpi^{-1}(\gamma(TM)).$$

### XIII.5. Automorfismi di una connessione principale

Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato differenziabile  $\mathbf{G}$ -principale, su cui è assegnata una connessione  $\mathbf{G}$ -principale  $\Gamma$ , con forma di Cartan  $\omega$ .

**DEFINIZIONE XIII.5.1.** Un *automorfismo* di  $\Gamma$  è un automorfismo  $(f, \tilde{f}, \text{id})$  di  $\xi$  che preserva la connessione.

Abbiamo cioè un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tilde{f}} & P \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

in cui  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$  è un diffeomorfismo e la  $\tilde{f}$  gode delle proprietà:

- (i)  $\tilde{f}(\sigma a) = \tilde{f}(\sigma)a, \quad \forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G},$
- (ii)  $\tilde{f}^* \omega = \omega.$

Denotiamo con  $\text{Aut}(\Gamma)$  il gruppo degli automorfismi di  $\Gamma$ .

### XIII.6. Forme di Christoffel ed equazioni di gauge

Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato differenziabile  $\mathbf{G}$ -principale, su cui sia fissata una connessione principale  $\Gamma$ , con forma di Cartan  $\omega$ .

Prima di introdurre le forme di Christoffel e ricavare le equazioni a cui esse soddisfano, è conveniente richiamare una formula di differenziazione. Cominciamo precisando alcune notazioni.

Se  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{G})$  è una funzione definita su un aperto  $U$  di  $M$  a valori nel gruppo di Lie  $\mathbf{G}$ , indichiamo con  $\psi^{-1}d\psi$  il suo *differenziale di Darboux*, cioè il pullback, mediante  $\psi$ , della forma di Maurer-Cartan di  $\mathbf{G}$ . La  $\psi^{-1}d\psi = \psi^* \omega_{\mathbf{G}}$  è una forma in  $\Omega^1(U, \mathfrak{g})$ . Indicheremo inoltre con  $dR_\psi$  l'applicazione che associa ad ogni  $p \in U$  il differenziale di  $R_{\psi(p)}$ .

<sup>4</sup> Shoshichi Kobayashi: *Theory of Connections*, Ann. Mat. Pura Appl. **43** (1957), pp.119-194.

Se  $\sigma \in P$  ed  $A \in \mathfrak{g}$ , indichiamo con  $\sigma A$  il valore  $A_\sigma^*$  del campo fondamentale  $A^*$  nel punto  $\sigma$ . Se  $\eta \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$  e  $\sigma \in \Gamma_\xi(U, P)$ , la  $\sigma\eta$  definisce, per ogni  $p \in U$ , l'applicazione  $T_p M \ni v \rightarrow \sigma\eta(v) \in V_{\sigma(p)} P$  che fa corrispondere al vettore  $v \in T_p U$  il vettore  $[\eta(v)]_{\sigma(p)}^*$ .

Con queste notazioni abbiamo:

LEMMA XIII.6.1. *Sia  $U$  un aperto di  $M$  e siano  $\sigma \in \Gamma_\xi(U, P)$ ,  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{G})$ . Allora*

$$(13.6.1) \quad d(\sigma\psi) = dR_\psi \circ d\sigma + (\sigma\psi)(\psi^{-1}d\psi). \quad \square$$

Sia  $\sigma_U \in \Gamma_\xi(U, P)$  una sezione  $\mathcal{C}^\infty$  di  $\xi$ , definita su un aperto  $U$  di  $M$ . Indichiamo con

$$(13.6.2) \quad \omega_U = \sigma_U^* \omega = \omega \circ d\sigma_U \in \Omega^1(U, \mathfrak{g}).$$

il pullback su  $U$  di  $\omega$  mediante la sezione  $\sigma_U$ .

DEFINIZIONE XIII.6.2. La  $\omega_U \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ , definita dalla (13.6.2), si dice *la forma di Christoffel<sup>5</sup>* della connessione  $\Gamma$  nel riferimento  $(U, \sigma_U)$ .

La  $\sigma_U$  definisce la trivializzazione locale

$$\Psi_U : U \times \mathbf{G} \ni (p, a) \longrightarrow \sigma_U(p)a \in P|_U.$$

Identifichiamo in modo canonico  $T(U \times \mathbf{G})$  con il prodotto cartesiano  $TU \times T\mathbf{G}$ : un vettore tangente ad  $U \times \mathbf{G}$  è descritto da una coppia  $(v, A_a^*)$  con  $v \in TU$ ,  $A \in \mathfrak{g}$ ,  $a \in \mathbf{G}$ .

LEMMA XIII.6.3. È

$$(13.6.3) \quad \Psi_U^* \omega = \text{Ad}(a^{-1})\omega_U + a^{-1}da,$$

ove abbiamo indicato con  $a^{-1}da$  la forma di Maurer-Cartan di  $\mathbf{G}$ .

Notiamo che, nella (13.6.3) il primo addendo a secondo membro opera sui vettori di  $TU$ , il secondo su quelli di  $T\mathbf{G}$ ; è cioè

$$\Psi_U^* \omega(v, A_a^*) = \text{Ad}(a^{-1})\omega_U(v) + A, \quad \forall v \in TU, \forall A \in \mathfrak{g}, \forall a \in \mathbf{G}.$$

DIMOSTRAZIONE. La  $\Psi_U^* \omega$  è la forma di Cartan di una connessione  $\mathbf{G}$ -principale su  $U \times \mathbf{G}$  e quindi si restringe alla forma di Maurer-Cartan sui vettori verticali. Basta quindi verificare la (13.6.3) sui vettori di  $TM$ . Con le notazioni introdotte alla fine di §XIII.1, abbiamo, se  $p \in U$ ,  $v \in T_p M$ ,  $a \in \mathbf{G}$ ,

$$\begin{aligned} (\Psi_U^* \omega)(v) &= \omega(d\Psi_U(p, a)(v)) = \omega([d\sigma_U(v)]a) \\ &= \text{Ad}(a^{-1})\omega(d\sigma_U(v)) = \text{Ad}(a^{-1})\omega_U(v). \end{aligned}$$

La dimostrazione è completa. □

<sup>5</sup>Elwin Bruno Christoffel (10/11/1829, Montjoie, ora Monschau (villaggio tedesco vicino ad Aquisgrana e alla frontiera belga) - 15/3/1900 Strasburgo) matematico e fisico tedesco. Ha lavorato su applicazioni conformi, teoria del potenziale, teoria degli invarianti, analisi tensoriale, fisica matematica, geodesia e onde d'urto. Oltre ai simboli di Christoffel, sono note le applicazioni di Schwarz-Christoffel, mappe conformi dei poligoni semplici sul semipiano superiore.

Sia ora  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$  un atlante di trivializzazione di  $\xi$ . Poniamo per semplicità

$$\omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega, \quad \tilde{\omega}_\alpha = \Psi_\alpha^* \omega$$

per indicare le forme di Christoffel delle trivializzazioni locali dell'atlante e i pullback  $\tilde{\omega}_\alpha$  della forma di Cartan mediante le trivializzazioni locali

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \ni (p, a) \longrightarrow \sigma_\alpha(p)a \in P|_{U_\alpha}.$$

NOTAZIONE XIII.6.4. Siano<sup>6</sup>  $\psi_{\alpha,\beta} = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha,\beta}, \mathbf{G})$  le funzioni di transizione dell'atlante  $\mathcal{A}$ . Per ogni coppia di indici  $\alpha, \beta$  per cui  $U_{\alpha,\beta} \neq \emptyset$  indichiamo con

$$(13.6.4) \quad \psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta} = \psi_{\alpha,\beta}^* \omega_{\mathbf{G}} \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha,\beta}, \mathfrak{g})$$

le derivate di Darboux delle funzioni di transizione, cioè i loro pullback della forma di Maurer-Cartan  $\omega_{\mathbf{G}} = a^{-1}da$  di  $\mathbf{G}$ .

Per il Lemma XIII.6.1 abbiamo

PROPOSIZIONE XIII.6.5. *Le forme di Christoffel  $\{\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})\}$  della connessione  $\Gamma$  nell'atlante di trivializzazione  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$  verificano le EQUAZIONI DI GAUGE*

$$(13.6.5) \quad \omega_\beta = \text{Ad}(\psi_{\alpha,\beta}^{-1})\omega_\alpha + \psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta} \text{ su } U_{\alpha,\beta},$$

ove le  $\{\psi_{\alpha,\beta} = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha,\beta}, \mathbf{G})\}$  sono le funzioni di transizione di  $\mathcal{A}$ .

DIMOSTRAZIONE. È infatti  $\sigma_\beta = \sigma_\alpha \psi_{\alpha,\beta}$ . Otteniamo allora

$$\begin{aligned} \omega_\beta &= \sigma_\beta^* \omega = (\sigma_\alpha \psi_{\alpha,\beta})^* \omega = \omega \circ d(\sigma_\alpha \psi_{\alpha,\beta}) \\ &= \omega \circ (d\mathbf{R}_{\psi_{\alpha,\beta}} \circ d\sigma_\alpha + (\sigma_\alpha \psi_{\alpha,\beta})(\psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta})) \\ &= (\mathbf{R}_{\psi_{\alpha,\beta}}^* \omega) \circ d\sigma_\alpha + \psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta} = \text{Ad}(\psi_{\alpha,\beta}^{-1})\omega_\alpha + \psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta} \end{aligned}$$

su  $U_{\alpha,\beta}$ . □

Viceversa, una famiglia di forme a valori in  $\mathfrak{g}$ , definite sugli aperti di un atlante di trivializzazione, e che soddisfino le equazioni di gauge, definiscono univocamente una connessione  $\mathbf{G}$ -principale.

TEOREMA XIII.6.6. *Siano  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  un atlante di trivializzazione di  $\xi$ , con funzioni di transizione  $\{\psi_{\alpha,\beta} = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha,\beta}, \mathbf{G})\}$ , ed  $\{\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})\}_{\alpha \in I}$  una famiglia di forme differenziali, definite sugli aperti  $U_\alpha$  dell'atlante  $\mathcal{A}$ , ed a valori in  $\mathfrak{g}$ . Allora:*

- (1) *Vi è al più una connessione  $\mathbf{G}$ -principale su  $\xi$  di cui le  $\{\omega_\alpha\}$  siano le forme di Christoffel di  $\Gamma$  rispetto alle trivializzazioni locali dell'atlante  $\mathcal{A}$ .*
- (2) *Condizione necessaria e sufficiente affinché le  $\{\omega_\alpha\}$  siano le forme di Christoffel di una connessione  $\mathbf{G}$ -principale su  $\xi$  è che siano verificate le (13.6.5).*

<sup>6</sup>Indichiamo con  $U_{\alpha_1, \dots, \alpha_h}$  l'intersezione  $U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_h}$ .

DIMOSTRAZIONE. L'unicità segue dal Lemma XIII.6.3, in quanto, per (13.6.3), le  $\tilde{\omega}_\alpha$  sono determinate dalle  $\omega_\alpha$  e a loro volta determinano univocamente le restrizioni di  $\omega$  agli aperti  $P|_{U_\alpha}$ .

Per dimostrare la seconda affermazione, basterà verificare che le equazioni di gauge esprimono una condizione necessaria e sufficiente affinché risulti

$$(13.6.6) \quad \Psi_{\alpha^*} \tilde{\omega}_\alpha = \Psi_{\beta^*} \tilde{\omega}_\beta \quad \text{su } P|_{U_{\alpha,\beta}}$$

e quindi le  $\{\Psi_{\alpha^*} \tilde{\omega}_\alpha\}$  si ricolino e definiscano una forma di connessione  $\omega$  su  $P$ .

Le (13.6.6) sono equivalenti a

$$(13.6.7) \quad (\Psi_\alpha^{-1} \circ \Psi_\beta)^* \tilde{\omega}_\alpha = \tilde{\omega}_\beta \quad \text{su } U_{\alpha,\beta} \times \mathbf{G}.$$

È  $\Psi_\alpha^{-1} \Psi_\beta(p, a) = (p, \psi_{\alpha,\beta} a)$  su  $U_{\alpha,\beta} \times \mathbf{G}$ .

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} (\Psi_\alpha^{-1} \Psi_\beta)^* \tilde{\omega}_\alpha &= \tilde{\omega}_\alpha \circ d(\Psi_\alpha^{-1} \Psi_\beta) \\ &= \text{Ad}(a^{-1} \psi_{\alpha,\beta}^{-1}) \omega_\alpha + a^{-1} (\psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta}) a + a^{-1} da \\ &= \text{Ad}(a^{-1}) \left( \text{Ad}(\psi_{\alpha,\beta}^{-1}) \omega_\alpha + \psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta} \right) + a^{-1} da \\ &= \text{Ad}(a^{-1}) \omega_\beta + a^{-1} da = \tilde{\omega}_\beta. \end{aligned}$$

La dimostrazione è completa.  $\square$

OSSERVAZIONE XIII.6.7. Identificando  $T(U_\alpha \times \mathbf{G})$  al prodotto cartesiano  $TU_\alpha \times T\mathbf{G}$ , possiamo descrivere il pullback su  $U_\alpha \times \mathbf{G}$  della distribuzione orizzontale su  $P$  mediante

$$(13.6.8) \quad \Psi_\alpha^* H_{\sigma_\alpha(p)a} = \{X_p - [\omega_\alpha(X_p)]_a^* \mid X_p \in T_p M\}, \quad \forall p \in U_\alpha, \forall a \in \mathbf{G}.$$

La forma di Christoffel misura quindi di quanto la distribuzione orizzontale definita dalla connessione differisca da quella banale della trivializzazione locale.

### XIII.7. Sollevamento orizzontale di campi di vettori

Sia assegnata una connessione principale  $\Gamma$  su  $\xi$ , con forma di Cartan  $\omega$ . Per ogni  $\sigma \in P$  l'applicazione

$$(13.7.1) \quad H_\sigma P \ni X_\sigma \longrightarrow d\pi(\sigma)(X_\sigma) \in T_{\pi(\sigma)} M$$

è un isomorfismo lineare. La sua inversa

$$(13.7.2) \quad h_\sigma : T_{\pi(\sigma)} M \longrightarrow H_\sigma P$$

ci permette di definire l'applicazione

$$(13.7.3) \quad \tilde{h} : \mathfrak{X}(M) \ni X \longrightarrow \tilde{X} \in \mathcal{H}(P), \quad \text{con } \tilde{X}_\sigma = h_\sigma(X_{\pi(\sigma)}), \quad \forall \sigma \in P.$$

DEFINIZIONE XIII.7.1. Il campo  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$  è il *sollevamento orizzontale* di  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

PROPOSIZIONE XIII.7.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un campo di vettori  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$  sia il sollevamento orizzontale di un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  è che siano soddisfatte le due condizioni:*

$$(13.7.4) \quad (i) \quad \omega(\tilde{X}) = 0, \quad (ii) \quad R_{a*}(\tilde{X}) = \tilde{X}, \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

*Il sollevamento orizzontale (13.7.3) è un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare che soddisfa:*

$$\begin{aligned} (a) \quad & h(fX) = \pi^*(f)\tilde{X}, & \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \\ (b) \quad & d\pi([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = [X, Y], & \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \\ (c) \quad & [A^*, \tilde{X}] = 0, & \forall A \in \mathfrak{g}, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \quad \square \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE XIII.7.3. Il commutatore del sollevamento orizzontale di due campi di vettori è invariante rispetto alle traslazioni a destra, soddisfa cioè la proprietà (ii) ma può non essere orizzontale, non soddisfare cioè la (i) di (13.7.4). Il sollevamento orizzontale del commutatore è *la componente orizzontale* del commutatore dei sollevamenti orizzontali.

### XIII.8. Sollevamento orizzontale di cammini e trasporto parallelo

Indichiamo con  $\mathcal{C}_\Gamma^1([0, 1], M)$  (rispettivamente  $\mathcal{C}_\Gamma^1([0, 1], P)$ ) l'insieme delle curve di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti in  $M$  (rispettivamente in  $P$ ).

DEFINIZIONE XIII.8.1. Una curva  $\eta \in \mathcal{C}_\Gamma^1([0, 1], P)$  si dice *orizzontale* se  $\dot{\eta}_\pm(t) \in HP$  per ogni  $t \in [0, 1]$ . Indicheremo con  $\mathcal{C}_{\Gamma,h}^1([0, 1], P)$  l'insieme dei cammini orizzontali in  $P$ .

PROPOSIZIONE XIII.8.2 (Sollevamento orizzontale dei cammini).

*Siano  $\gamma \in \mathcal{C}_\Gamma^1([0, 1], M)$  e  $\sigma_0 \in P$ , con  $\pi(\sigma_0) = \gamma(0)$ . Allora esiste un unico cammino orizzontale  $\tilde{\gamma}_{\sigma_0} \in \mathcal{C}_{\Gamma,h}^1([0, 1], P)$ , tale che*

$$(13.8.1) \quad \begin{cases} \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(0) = \sigma_0, \\ \pi \circ \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) = \gamma(t), \quad \forall t \in [0, 1]. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo limitarci al caso in cui  $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$ . Poiché il fibrato differenziabile  $\xi$  è localmente banale, esiste senz'altro una curva  $\gamma^P \in \mathcal{C}^1([0, 1], P)$  tale che

$$\begin{cases} \gamma^P(0) = \sigma_0, \\ \pi \circ \gamma^P(t) = \gamma(t), \quad \forall t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Cerchiamo allora la  $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}$  nella forma

$$\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) = \gamma^P(t)a(t), \quad \text{con } a \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{G}), \quad a(0) = e_{\mathbf{G}}.$$

Poiché

$$\frac{d\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)}{dt} = \dot{\gamma}^P(t)a(t) + \gamma^P(t)\dot{a}(t),$$

la condizione che  $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}$  sia orizzontale si può riscrivere mediante

$$0 = \omega\left(\frac{d\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)}{dt}\right) = \omega(\dot{\gamma}^P(t)a(t)) + \omega(\gamma^P(t)\dot{a}(t)) = \omega(dR_{a(t)}(\dot{\gamma}^P)) + \omega_{\mathbf{G}}(\dot{a}(t))$$

$$= \text{Ad}(a(t)^{-1}) \circ \omega(\dot{\gamma}^P) + a(t)^{-1} \dot{a}(t).$$

La  $a(t)$  deve essere quindi soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{a} a^{-1} = -\omega(\dot{\gamma}^P), \\ a(0) = e_G. \end{cases}$$

Per la Proposizione VII.4.10, questo problema ammette una ed una sola soluzione, e quindi anche la (13.8.1) ha una ed una sola soluzione.  $\square$

DEFINIZIONE XIII.8.3. L'unica soluzione  $\tilde{\gamma}_{\sigma_0} \in \mathcal{C}_{\text{tr},h}^1([0, 1], P)$  di (13.8.1) si dice il *sollevamento orizzontale* di  $\gamma$  a partire dal punto  $\sigma_0$ .

DEFINIZIONE XIII.8.4. Sia  $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], M)$ . Chiamiamo *trasporto parallelo* lungo  $\gamma$  l'applicazione

$$(13.8.2) \quad \tau_\gamma : P_{\gamma(0)} \ni \sigma \longrightarrow \tilde{\gamma}_\sigma(1) \in P_{\gamma(1)}.$$

PROPOSIZIONE XIII.8.5. *Il trasporto parallelo gode delle seguenti proprietà:*

(1) *Per ogni  $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], M)$  la  $\tau_\gamma : P_{\gamma(0)} \rightarrow P_{\gamma(1)}$  è invertibile e<sup>7</sup>*

$$(13.8.3) \quad \tau_\gamma^{-1} = \tau_{\gamma^{-1}}.$$

*Inoltre*

$$(13.8.4) \quad \tau_\gamma(\sigma a) = (\tau_\gamma(\sigma))a, \quad \forall \sigma \in P_{\gamma(0)}, \forall a \in \mathbf{G}.$$

(2) *Se  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], M)$  e  $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$ , allora<sup>8</sup>*

$$(13.8.5) \quad \tau_\gamma = \tau_{\gamma_2} \circ \tau_{\gamma_1}.$$

### XIII.9. Il gruppo di olonomia

NOTAZIONE XIII.9.1. Per ogni punto  $p \in M$  indichiamo con  $\mathcal{L}(p)$  lo spazio dei laccetti in  $p$ , di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti<sup>9</sup>. Ogni elemento  $\gamma$  di  $\mathcal{L}(p)$  definisce un elemento  $[\gamma]$  del gruppo fondamentale  $\pi_1(M, p)$  di  $M$  con punto base  $p$ . Denotiamo con  $\mathcal{L}_0(p)$  l'insieme dei laccetti  $\gamma$  con  $[\gamma] = 0$ .

Fissata una connessione principale  $\Gamma$  su  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ , il trasporto parallelo associa ad ogni laccetto  $\gamma \in \mathcal{L}(p)$  un'applicazione  $\tau_\gamma$  della fibra  $P_p$  in sé

$$(13.9.1) \quad \tau_\gamma : P_p \ni \sigma \longrightarrow \tilde{\gamma}_\sigma(1) \in P_p.$$

<sup>7</sup>Indichiamo con  $\gamma^{-1}$  la curva  $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$ .

<sup>8</sup>Ricordiamo che  $\gamma_1 \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$

<sup>9</sup>Possiamo definire i gruppi di olonomia utilizzando laccetti di classe  $\mathcal{C}^k$  a tratti, per  $k \geq 1$ . Un teorema di Nomizu e Ozeki [On the degree of differentiability of curves used in the definition of the holonomy group, Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 74-75] ci dice che diversi gradi di regolarità ( $1 \leq k \leq \infty$ ) danno gli stessi gruppi di olonomia.

LEMMA XIII.9.2. Per ogni  $p \in M$ , l'insieme

$$(13.9.2) \quad \Phi(p) = \{\tau_\gamma \mid \gamma \in \mathcal{L}(p)\}$$

dei trasporti paralleli corrispondenti a laccetti di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti in  $p$  è un gruppo di permutazioni di  $P_p$ .

L'insieme

$$(13.9.3) \quad \Phi_0(p) = \{\tau_\gamma \mid \gamma \in \mathcal{L}_0(p)\}$$

dei trasporti paralleli corrispondenti a laccetti di  $\mathcal{L}(p)$  omotopi al laccetto costante è un sottogruppo normale di  $\Phi(p)$ .  $\square$

DEFINIZIONE XIII.9.3. Chiamiamo  $\Phi(p)$  gruppo di ologonia ed il suo sottogruppo normale  $\Phi_0(p)$  gruppo di ologonia ristretto della connessione  $\Gamma$  nel punto  $p$  di  $M$ .

Ad ogni  $\sigma \in P_p$  associamo un monomorfismo del gruppo di ologonia nel gruppo strutturale mediante:

$$(13.9.4) \quad \rho_\sigma : \Phi(p) \ni \tau_\gamma \longrightarrow a = \sigma^{-1} \circ \tau_\gamma(\sigma) \in \mathbf{G}.$$

DEFINIZIONE XIII.9.4. I sottogruppi  $\Phi(\sigma) = \rho_\sigma(\Phi(p))$  di  $\mathbf{G}$  e  $\Phi_0(\sigma) = \rho_\sigma(\Phi_0(p))$  si dicono rispettivamente gruppo di ologonia e di ologonia ristretta di  $\Gamma$  in  $\sigma \in P$ .

PROPOSIZIONE XIII.9.5. Il gruppo di ologonia ristretta  $\Phi_0(\sigma)$  è un sottogruppo normale del gruppo di ologonia  $\Phi(\sigma)$ .  $\square$

OSSERVAZIONE XIII.9.6. Consideriamo in  $P$  la relazione di equivalenza “ $\sim$ ” che identifica gli estremi dei cammini orizzontali. Allora

$$(13.9.5) \quad \Phi(\sigma) = \{a \in \mathbf{G} \mid \sigma a \sim \sigma\}.$$

PROPOSIZIONE XIII.9.7. (1) Se  $p \in M$ ,  $\sigma \in P_p$ ,  $a \in \mathbf{G}$ , allora

$$(13.9.6) \quad \Phi(\sigma a) = \text{ad}(a^{-1})(\Phi(\sigma)), \quad \Phi_0(\sigma a) = \text{ad}(a^{-1})(\Phi_0(\sigma)).$$

(2) Se  $\sigma_0, \sigma_1 \in P$  possono essere congiunti con una curva orizzontale di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti, allora

$$(13.9.7) \quad \Phi(\sigma_1) = \Phi(\sigma_0), \quad \Phi_0(\sigma_1) = \Phi_0(\sigma_0).$$

(3) In particolare, se  $P$  è connesso, allora i gruppi di ologonia  $\Phi(\sigma)$  sono sottogruppi di  $\mathbf{G}$  tutti coniugati tra loro.

DIMOSTRAZIONE. (1) È  $\tilde{\gamma}_{\sigma a} = \tilde{\gamma}_\sigma a$  e quindi

$$(\sigma a)^{-1} \tilde{\gamma}_{\sigma a}(1) = a^{-1} \sigma^{-1} \tilde{\gamma}(1) a = \text{ad}(a^{-1})(\sigma^{-1} \tilde{\gamma}_\sigma(1)),$$

da cui segue la (13.9.6).

(2) Sia  $\tilde{s}$  una curva orizzontale di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti che congiunga  $\sigma_0$  a  $\sigma_1$  ed  $s = \pi \circ \tilde{s}$  la sua proiezione su  $M$ . Per ogni  $a \in \Phi(\sigma_0)$ , possiamo trovare un laccetto  $\gamma \in \mathcal{L}(\pi(\sigma_0))$  tale che  $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(1) = \sigma_0 a$ . La curva  $\tilde{s}a$  è una curva orizzontale di estremi  $\sigma_0 a$  e  $\sigma_1 a$ . Quindi la curva  $(\tilde{s}a)\tilde{\gamma}_{\sigma_0}\tilde{s}^{-1}$  è una curva orizzontale che rialza il laccetto  $s\gamma s^{-1} \in \mathcal{L}(\pi(\sigma_1))$  e che congiunge  $\sigma_1$  a  $\sigma_1 a$ . Questo dimostra che  $a \in \Phi(\sigma_1)$ . Quindi  $\Phi(\sigma_0) \subset \Phi(\sigma_1)$ . Ripetendo lo stesso ragionamento possiamo

dimostrare anche l'inclusione opposta. Per completare la dimostrazione del punto (2), basta osservare che  $s\gamma s^{-1} \in \mathcal{L}_0(\pi(\sigma_1))$  se  $\gamma \in \mathcal{L}_0(\pi(\sigma_0))$ .

La (3) è conseguenza immediata delle (1) e (2).  $\square$

Vale<sup>10</sup> il :

**TEOREMA XIII.9.8.** *Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato principale differenziabile con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ , con base connessa, su cui abbiamo fissato una connessione principale  $\Gamma$ . Sia  $\sigma_0$  un punto di  $P$ . Allora:*

- (a)  $\Phi_0(\sigma_0)$  è un sottogruppo di Lie connesso di  $\mathbf{G}$ .
- (b)  $\Phi_0(\sigma_0)$  è un sottogruppo normale di  $\Phi(\sigma_0)$  ed il quoziente  $\Phi(\sigma_0)/\Phi_0(\sigma_0)$  è al più numerabile.
- (c) In particolare,  $\Phi(\sigma_0)$  è un sottogruppo di Lie di  $\mathbf{G}$ , e  $\Phi_0(\sigma_0)$  è la sua componente connessa dell'identità.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\gamma \in \mathcal{L}_0(p)$  un laccetto omotopo all'identità. Se  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$  è un'omotopia di laccetti di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti di  $\gamma$  con il laccetto costante, allora  $[0, 1] \ni t \rightarrow \sigma_0^{-1}\tau_{F_t}(\sigma_0)$  è un cammino continuo in  $\Phi_0(\sigma_0)$  che congiunge  $\sigma_0^{-1}\tau_\gamma(\sigma_0)$  con l'identità. Per il teorema di Freudenthal citato nella nota, ne segue che  $\Phi_0(\sigma_0)$  è un sottogruppo di Lie di  $\mathbf{G}$ .

La seconda affermazione segue dal fatto che  $\Phi_0(\sigma_0)$  è un sottogruppo normale ed abbiamo un omomorfismo surgettivo

$$\pi_1(M) \longrightarrow \Phi(\sigma_0)/\Phi_0(\sigma_0).$$

Poiché  $M$  è connesso e paracompatto, il suo gruppo fondamentale è al più numerabile e da questa osservazione ricaviamo la tesi.  $\square$

Dal Teorema XIII.9.8 segue subito il

**TEOREMA XIII.9.9 (di riduzione).** *Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato principale differenziabile con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ , e supponiamo  $M$  connesso e paracompatto. Sia  $\Gamma$  una connessione principale su  $\xi$ . Fissiamo  $\sigma_0 \in P$  e sia  $P(\sigma_0)$  l'insieme dei punti di  $P$  che possono essere congiunti a  $\sigma_0$  da un cammino orizzontale. Allora:*

- (i)  $\xi_{\sigma_0} = (P(\sigma_0) \xrightarrow{\pi} M)$  è un sottofibrato principale differenziabile di  $\xi$ , con gruppo strutturale  $\Phi(\sigma_0)$ .
- (ii) La connessione  $\Gamma$  su  $\xi$  si riduce ad una connessione  $\Gamma'$  su  $\xi_{\sigma_0}$ .

**DEFINIZIONE XIII.9.10.** Chiamiamo  $\xi_{\sigma_0}$  il fibrato d'olonomia per  $\sigma_0$ .

<sup>10</sup> Per la dimostrazione di questo risultato, è utile utilizzare il seguente teorema di Freudenthal [Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches Phänomen I Ann. of Math. 42 (1941) 1051-1074]: Un sottogruppo  $\mathbf{H}$  connesso per archi di un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$ , in cui ogni coppia di punti si possa congiungere con un arco di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti, è un sottogruppo di Lie di  $\mathbf{G}$ .



## Differenziazione covariante e curvatura

### XIV.1. Differenziale di forme tensoriali e pseudotensoriali

Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato principale differenziabile, con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ . Nel seguito di questo paragrafo penseremo fissata una connessione principale  $\Gamma$  su  $\xi$ , con forma di Cartan  $\omega$ , ed una rappresentazione lineare  $(\rho, V)$  del suo gruppo strutturale. Nel §XII.9.2 abbiamo definito le forme tensoriali e pseudotensoriali associate a  $(\rho, V)$ .

OSSERVAZIONE XIV.1.1. La forma di Cartan  $\omega$  di  $\Gamma$  è pseudotensoriale di tipo  $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$ , e non è tensoriale se  $\mathfrak{g} \neq 0$ .

DEFINIZIONE XIV.1.2. Il *differenziale esterno covariante* di una  $q$ -forma pseudotensoriale  $\phi \in \Omega_{\rho}^q(P, V)$  è la  $(q+1)$ -forma tensoriale  $D\phi \in \Omega_{\rho,0}^{q+1}(P, V)$ , definita da<sup>1</sup>

$$(14.1.1) \quad D\phi(X_0, X_1, \dots, X_q) = d\phi(\text{pr}_h(X_0), \text{pr}_h(X_1), \dots, \text{pr}_h(X_q)) \\ \forall X_0, X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(P).$$

TEOREMA XIV.1.3. Sia  $\phi \in \Omega_{\rho}^q(P, V)$  una  $q$ -forma pseudotensoriale di tipo  $(\rho, V)$ . Allora:

- (a)  $\phi \circ \text{pr}_h$  è una  $q$ -forma tensoriale di tipo  $(\rho, V)$ ;
- (b)  $d\phi$  è una  $(q+1)$ -forma pseudotensoriale di tipo  $(\rho, V)$ ;
- (c)  $D\phi = (d\phi) \circ \text{pr}_h$  è una  $(q+1)$ -forma tensoriale di tipo  $(\rho, V)$ . □

Alla rappresentazione lineare  $(\rho, V)$  di  $\mathbf{G}$  corrisponde la rappresentazione  $(\rho_*, V)$  della sua algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , definita da

$$(14.1.2) \quad \rho_*(A)v = d\rho_e(A)(v) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} \rho(e^{tA}) \cdot v, \quad \forall A \in \mathfrak{g}, \forall v \in V.$$

Ricordiamo l'affermazione che  $(\rho_*, V)$  sia una rappresentazione lineare di  $\mathfrak{g}$  significa che  $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$  è  $\mathbb{R}$ -lineare e soddisfa

$$(14.1.3) \quad \rho_*([A, B]) = [\rho_*(A), \rho_*(B)] = \rho_*(A) \circ \rho_*(B) - \rho_*(B) \circ \rho_*(A), \quad \forall A, B \in \mathfrak{g}.$$

NOTAZIONE XIV.1.4. Ricordiamo la notazione della Definizione XII.9.14.

Se  $\phi \in \Omega_{\rho}^q(P, V)$  è pseudotensoriale di tipo  $(\rho, V)$ , il prodotto  $\omega \wedge_{\rho} \phi$  è definito come la  $(q+1)$ -forma alternata a valori in  $V$

$$(14.1.4) \quad (\omega \wedge_{\rho} \phi)(X_0, \dots, X_q) = \sum_{h=0}^q (-1)^h [\rho_*(\omega(X_h))] (\phi(X_0, \dots, \widehat{X}_h, \dots, X_q)).$$

<sup>1</sup>Ricordiamo che  $\text{pr}_h$  è la proiezione sulla distribuzione orizzontale della connessione.

Per le forme tensoriali abbiamo:

LEMMA XIV.1.5. Se  $\phi \in \Omega_{\rho,0}^q(P, V)$  è una  $r$ -forma tensoriale di tipo  $(\rho, V)$ , allora

$$(14.1.5) \quad D\phi = d\phi + \omega \wedge_{\rho} \phi.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta verificare che

$$(*) \quad D\phi(X_0, \dots, X_q) = d\phi(X_0, \dots, X_q) + (\omega \wedge_{\rho} \phi)(X_0, \dots, X_q)$$

quando  $X_0, \dots, X_q$  siano o campi verticali fondamentali associati ad elementi dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , oppure sollevamenti orizzontali di campi di vettori su  $M$ . La formula è banalmente vera quando gli  $X_i$  siano tutti orizzontali oppure almeno due di essi siano verticali.

Basterà dunque dimostrare la (\*) nel caso in cui  $X_0 = A^*$  con  $A \in \mathfrak{g}$  e gli  $X_i$  siano sollevamenti orizzontali, sia cioè  $X_i = \tilde{Z}_i$  con  $Z_i \in \mathfrak{X}(M)$ , per  $1 \leq i \leq q$ .

Poiché abbiamo supposto che  $\phi$  fosse tensoriale, otteniamo

$$\begin{aligned} d\phi(A^*, X_1, \dots, X_q) &= A^* \phi(X_1, \dots, X_q) + \sum_{i=1}^q (-1)^i X_i \underbrace{\phi(A^*, \dots, \widehat{X}_i, \dots)}_{=0} \\ &\quad + \sum_{i=1}^q (-1)^i \underbrace{\phi([A^*, X_i], \dots, \widehat{X}_i, \dots)}_{=0} \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \underbrace{\phi([X_i, X_j], A^*, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots)}_{=0} \\ &= A^* \phi(X_1, \dots, X_q) = (L_{A^*} \phi)(X_1, \dots, X_q), \end{aligned}$$

perché la derivata di Lie  $[A, X_i] = [A^*, \tilde{Z}_i]$  dei sollevamenti orizzontali rispetto ai campi fondamentali è nulla.

Il campo  $A^*$  è il generatore infinitesimale di  $t \rightarrow R_{\exp(tA)}$ . Abbiamo perciò

$$L_{A^*} \phi = \frac{d}{dt} [R_{\exp(tA)}^* \phi]_{t=0} = \frac{d}{dt} [\rho(\exp(-tA)) \phi]_{t=0} = -\rho_*(A) \phi.$$

Poiché  $\phi$  è tensoriale, otteniamo

$$(\omega \wedge_{\rho} \phi)(A^*, X_1, \dots, X_q) = \rho_*(A)(\phi(X_1, \dots, X_q)),$$

che, insieme alle precedenti, dà la (\*).  $\square$

## XIV.2. Differenziazione covariante di sezioni di fibrati vettoriali

Sia  $(\rho, V)$  una rappresentazione lineare di dimensione finita del gruppo strutturale  $\mathbf{G}$  del fibrato principale  $\xi$  e  $\xi_V$  il fibrato vettoriale associato. Utilizzando l'isomorfismo  $\Lambda_V$  descritto nella Proposizione XII.9.18, possiamo utilizzare il differenziale esterno covariante per definire una differenziazione nello spazio delle forme differenziali a coefficienti in  $E_V$ .

DEFINIZIONE XIV.2.1. La *differenziazione covariante*  $d^\nabla$  (o *connessione lineare*) su  $\xi_V$ , associata alla connessione principale  $\Gamma$  su  $\xi$ , è l'applicazione lineare

$$(14.2.1) \quad d^\nabla : \Omega^q(M, E_V) \xrightarrow{\Lambda_V^{-1} \circ D \circ \Lambda_V} \Omega^{q+1}(M, E_V), \quad q \geq 0.$$

Il differenziale covariante è definito cioè dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}^r(M, E_V) & \xrightarrow{d^\nabla} & \mathcal{Q}^{r+1}(M, E_V) \\ \Lambda_V \downarrow & & \downarrow \Lambda_V \\ \mathcal{Q}_{\rho,0}^r(P, V) & \xrightarrow{D} & \mathcal{Q}_{\rho,0}^{r+1}(P, V). \end{array}$$

PROPOSIZIONE XIV.2.2. *Valgono le formule:*

$$\begin{cases} d^\nabla(fs) = s \otimes df + f d^\nabla s & \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V), \\ d^\nabla(s \otimes \beta) = s \otimes d\beta + d^\nabla s \otimes \beta & \forall s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V), \forall \beta \in \mathcal{Q}^r(M), \\ d^\nabla(\alpha \wedge \beta) = (d^\nabla \alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta & \forall \alpha \in \mathcal{Q}^r(M, E_V), \forall \beta \in \mathcal{Q}^s(M). \quad \square \end{cases}$$

DEFINIZIONE XIV.2.3 (Derivata covariante). Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ed  $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$ , la sezione  $d^\nabla s(X) \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$  si indica con  $\nabla_X s$  e si dice *derivata covariante di  $s$  rispetto ad  $X$* .

Data una sezione  $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$ , il suo sollevamento  $\tilde{s} \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$  (ricordiamo che  $\tilde{s}(\sigma) = \sigma^{-1}s(\pi(\sigma))$ ) è una funzione a valori in  $V$ , che quindi possiamo differenziare.

LEMMA XIV.2.4. *Abbiamo*

$$(14.2.2) \quad \widetilde{\nabla_X s} = \tilde{X} \tilde{s}, \quad \forall s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V), \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. La formula segue subito dalla definizione di differenziazione covariante.  $\square$

OSSERVAZIONE XIV.2.5. Gli elementi di  $\mathcal{Q}^q(M, E_V)$  sono sezioni di un fibrato vettoriale differenziabile su  $M$ , ma questo non è, in generale, associato ad una rappresentazione lineare di  $\mathbf{G}$ . Di una forma di grado positivo possiamo quindi definire il differenziale, ma non la derivata covariante rispetto ad un campo di vettori.

LEMMA XIV.2.6. *Sia  $p$  un punto di  $M$ . Abbiamo:*

$$(14.2.3) \quad \text{supp } d^\nabla \phi \subset \text{supp } \phi, \quad \forall \phi \in \mathcal{Q}^*(M, E_V),$$

$$(14.2.4) \quad d^\nabla \phi_1(p) = d^\nabla \phi_2(p) \quad \text{se } \phi_1 = \phi_2 \text{ in un intorno di } p,$$

$$(14.2.5) \quad \text{supp } \nabla_X s \subset \text{supp } X \cap \text{supp } s, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V),$$

$$(14.2.6) \quad \begin{cases} \nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} s = f_1 \nabla_{X_1} s + f_2 \nabla_{X_2} s, \\ \forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M), \forall s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V), \end{cases}$$

$$(14.2.7) \quad \nabla_X(fs) = (Xf)s + f \nabla_X s, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V),$$

$$(14.2.8) \quad \nabla_X(s_1 + s_2) = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall s_1, s_2 \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V),$$

$$(14.2.9) \quad \nabla_X s(p) = \nabla_Y s(p) \quad \text{se } X_p = Y_p, \quad \forall s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V).$$

$\square$

In particolare, se  $U$  è un aperto di  $M$ ,  $\phi \in \mathcal{Q}^q(U, E_V)$ ,  $X \in \mathfrak{X}(U)$ ,  $s \in \Gamma_{\xi_V}(U, E_V)$ ,  $p \in U$ ,  $v \in T_p M$ , possiamo definire senza ambiguità  $d^\nabla \phi \in \mathcal{Q}^{q+1}(U, E_V)$ ,  $\nabla_X s \in \Gamma_{\xi_V}(U, E_V)$ ,  $\nabla_v s \in E_{V_p}$ .

### XIV.3. Espressione locale del differenziale covariante

Possiamo utilizzare le forme di Christoffel relative ad un atlante di trivializzazione di  $\xi$  per ricavare espressioni esplicite del differenziale covariante.

Sia  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$  un atlante di trivializzazione di  $\xi$ . Data la forma di Cartan  $\omega$  di una connessione principale su  $\xi$ , abbiamo posto

$$\omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g}), \quad (\text{FORME DI CHRISTOFFEL}),$$

$$\theta_{\alpha,\beta} = \psi_{\alpha,\beta}^* \omega_{\mathbf{G}} = \psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta} \in \Omega^1(U_\alpha \cap U_\beta, \mathfrak{g}).$$

Il pullback su  $U_\alpha \times \mathbf{G}$  della connessione su  $\xi$  per mezzo della trivializzazione ha forma di Cartan  $\tilde{\omega}_\alpha = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega_\alpha + a^{-1} da$ . Quindi il sollevamento orizzontale  $\tilde{X}^\alpha$  ad  $U_\alpha \times \mathbf{G}$  di un campo  $X \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$  è definito da<sup>2</sup>

$$(14.3.1) \quad \tilde{X}^\alpha = X - (\text{Ad}(a^{-1})\omega_\alpha(X))^*.$$

Fissiamo una rappresentazione lineare  $(\rho, V)$  di  $\mathbf{G}$  e scriviamo per semplicità  $E$  invece di  $E_V$  per indicare lo spazio totale di  $\xi_V$ . Ad una  $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E)$  associamo le funzioni  $s_\alpha = \sigma_\alpha^{-1} s \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, V)$ . Esse si rialzano a funzioni  $\tilde{s}_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha \times \mathbf{G}, V)$ , definite da

$$\tilde{s}_\alpha(p, a) = \rho(a^{-1})s_\alpha(p), \quad \forall p \in U_\alpha, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Se  $A \in \mathfrak{g}$ , abbiamo

$$A^* \tilde{s}_\alpha(p, a) = \left( \frac{d}{dt} \right)_{t=0} \rho(e^{-tA} a^{-1})s_\alpha(p) = -\rho(a^{-1})\rho_*(\text{Ad}(a)(A))s_\alpha(p).$$

Otteniamo perciò

$$(14.3.2) \quad \tilde{X} \tilde{s}_\alpha = \rho(a)^{-1} (X - [\text{Ad}(a^{-1})\omega_\alpha(X)]^*) \tilde{s}_\alpha = \rho(a)^{-1} (Xs + \rho_*(\omega_\alpha(X))s).$$

DEFINIZIONE XIV.3.1. Le forme

$$(14.3.3) \quad \gamma_\alpha = \rho_* \circ \omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V))$$

si dicono le *forme di Christoffel* della differenziazione covariante  $\nabla$  di  $\xi_V$ , nell'atlante di trivializzazione  $\{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ .

Abbiamo dimostrato la seguente :

PROPOSIZIONE XIV.3.2. *La differenziazione covariante si esprime, per mezzo delle forme di Christoffel (14.3.3), mediante*

$$(14.3.4) \quad d^\nabla(\sigma_\alpha f) = \sigma_\alpha \cdot (df + \gamma_\alpha(f)), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, V).$$

Più in generale, ogni  $\phi \in \Omega^q(M, E)$  può essere descritta da una famiglia di forme differenziali  $\{\phi_\alpha \in \Omega^q(U_\alpha, V)\}$ , caratterizzate da

$$\phi = \sigma_\alpha \phi_\alpha \quad \text{su } U_\alpha.$$

Definiamo  $\gamma_\alpha \wedge \phi_\alpha \in \Omega^{q+1}(U_\alpha, V)$  ponendo, per ogni  $X_0, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ ,

$$(14.3.5) \quad \gamma_\alpha \wedge \phi_\alpha(X_0, \dots, X_q) = \sum_{j=0}^q (-1)^j \gamma_\alpha(X_j)(\phi_\alpha(X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q)).$$

<sup>2</sup>Come in precedenza, abbiamo identificato  $T(U_\alpha \times \mathbf{G})$  con il prodotto Cartesiano  $(TU_\alpha) \times (T\mathbf{G})$ , ed indicato con  $A^*$  il campo di vettori invariante a sinistra corrispondente a  $A \in \mathfrak{g}$ .

Possiamo associare ad una  $\psi \in \mathcal{Q}^q(U_\alpha, V)$  la  $\sigma_\alpha \psi \in \mathcal{Q}^q(U_\alpha, E_V)$  definita da

$$(14.3.6) \quad (\sigma_\alpha \psi)(X_1, \dots, X_q) = \sigma_\alpha(p) \cdot \psi(X_1, \dots, X_q) \in E_{V_p}, \quad \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(U_\alpha).$$

Per la Proposizione XIV.2.2, otteniamo la formula:

$$(14.3.7) \quad d^\nabla \phi = \sigma_\alpha \cdot (d\phi_\alpha + \gamma_\alpha \wedge \phi_\alpha) \quad \text{su } U_\alpha.$$

#### XIV.4. Forma di curvatura ed equazioni di struttura

Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato principale differenziabile, con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ , su cui sia stata fissata una connessione principale con forma di Cartan  $\omega$ . Indichiamo con  $\mathfrak{g}$  l'algebra di Lie di  $\mathbf{G}$ . Ricordiamo che  $\omega$  è una forma pseudotensoriale di tipo  $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$ .

DEFINIZIONE XIV.4.1. La *forma di curvatura* di  $\Gamma$  è il differenziale esterno covariante della sua forma di Cartan, cioè la 2-forma tensoriale di tipo  $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$ :

$$(14.4.1) \quad \Omega = D\omega \in \Omega_{\text{Ad},0}^2(P, \mathfrak{g}).$$

Ricordiamo che il fatto che  $\Omega$  sia una 2-forma tensoriale di tipo  $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$  significa che valgono le:

- (a)  $R_a^* \Omega = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \Omega \quad \forall a \in \mathbf{G}$
- (b)  $\Omega(X, Y) = 0$  se uno dei campi  $X, Y$  è verticale.

TEOREMA XIV.4.2. *La forma di curvatura soddisfa l'equazione di struttura*<sup>3</sup>

$$(14.4.2) \quad \Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega].$$

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che

$$(*) \quad \Omega(X, Y) = \left( d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] \right)(X, Y)$$

quando  $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$  siano o fondamentali, o sollevamenti orizzontali di campi su  $M$ .

Distinguiamo i diversi casi.

Se  $X = A^*, Y = B^*$ , con  $A, B \in \mathfrak{g}$ , sono entrambi fondamentali, allora  $\Omega(X, Y) = 0$  e la (\*) si riduce a

$$d\omega(A^*, B^*) = A^*(B) - B^*(A) - \omega([A^*, B^*]) = -[A, B] = -\frac{1}{2}[\omega \wedge \omega](A^*, B^*).$$

Siano ora  $X = A^*$ , con  $A \in \mathfrak{g}$ , ed  $Y = \tilde{Z}$ , con  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Ancora,  $\Omega(X, Y) = \Omega(A^*, \tilde{Z}) = 0$ . Poiché ora anche

$$[\omega \wedge \omega](A^*, \tilde{Z}) = 0,$$

in quanto  $\omega(\tilde{Z}) = 0$ , la (\*) si riduce a

$$d\omega(A^*, \tilde{Z}) = A^*(0) - \tilde{Z}(A) - \omega([A^*, \tilde{Z}]) = -\omega([A^*, \tilde{Z}]) = 0.$$

Infatti,  $[A^*, \tilde{Z}] = L_{A^*}(\tilde{Z}) = 0$ , perché  $\tilde{Z}$  è invariante rispetto all'azione di  $\mathbf{G}$  su  $P$ .

Infine, nel caso in cui  $X = \tilde{Z}_1, Y = \tilde{Z}_2$ , con  $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M)$ , la (\*) si riduce ad  $[\omega \wedge \omega](\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) = 0$ , e  $D\omega(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) = d\omega(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2)$ .  $\square$

<sup>3</sup>Non possiamo utilizzare la (14.1.5) per il calcolo del differenziale esterno covariante di  $\omega$ , perché  $\omega$  è pseudotensoriale, ma non tensoriale.

OSSERVAZIONE XIV.4.3. In particolare, abbiamo

$$(14.4.3) \quad \Omega(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) = -\omega([\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2]), \quad \forall Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M).$$

La forma di curvatura misura quindi la non integrabilità formale della distribuzione orizzontale.

**TEOREMA XIV.4.4** (identità di Bianchi). *La forma di curvatura  $\Omega$  soddisfa l'identità differenziale di Bianchi*

$$(14.4.4) \quad D\Omega = 0.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $\Omega \in \mathcal{Q}_{\text{Ad},0}^2(P, \mathfrak{g})$  è una 2-forma tensoriale di tipo  $(\mathfrak{g}, \text{Ad})$ , abbiamo per il Lemma XIV.1.5 e per l'equazione di struttura :

$$\begin{aligned} D\Omega &= d\Omega + [\omega \wedge \Omega] \\ &= d(d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]) + [\omega \wedge \Omega] \\ &= \frac{1}{2}([d\omega \wedge \omega] - [\omega \wedge d\omega]) + [\omega \wedge d\omega] + \frac{1}{2}[\omega \wedge [\omega \wedge \omega]] \\ &= \frac{1}{2}[\omega \wedge [\omega \wedge \omega]] = 0, \end{aligned}$$

perché una 3-forma tensoriale che si annulli sui vettori orizzontali è nulla.  $\square$

### XIV.5. Connessioni piatte

In questo paragrafo consideriamo il caso di connessioni principali con forma di curvatura nulla.

**DEFINIZIONE XIV.5.1.** Siano  $\xi = (M \times \mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M)$  il fibrato banale e  $\pi_{\mathbf{G}} : M \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  la proiezione sulla seconda coordinata. Il pullback  $\omega = \pi_{\mathbf{G}}^* \omega_{\mathbf{G}}$  della forma di Maurer-Cartan su  $\mathbf{G}$  è la forma di Cartan di una connessione principale su  $\xi$ , che si dice la *connessione canonica*.

**DEFINIZIONE XIV.5.2.** Chiamiamo *piatta* una connessione principale localmente isomorfa alla connessione canonica.

**TEOREMA XIV.5.3.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché una connessione principale sia piatta è che la sua forma di curvatura sia identicamente nulla.*

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti, la forma di curvatura è nulla se e soltanto se la distribuzione orizzontale è formalmente e quindi completamente integrabile.  $\square$

**TEOREMA XIV.5.4.** *Se la sua base  $M$  è semplicemente connessa, il fibrato principale  $\xi$  ammette una connessione principale piatta se e soltanto se è isomorfo al fibrato banale, ed una connessione piatta su  $\xi$  è isomorfa alla connessione canonica.*  $\square$

**OSSERVAZIONE XIV.5.5.** In generale, se  $\xi$  ammette una connessione principale piatta, le foglie complete della sua distribuzione orizzontale sono tra loro diffeomorfe e sono dei rivestimenti della base  $M$ .

### XIV.6. La famiglia delle connessioni principali

Se  $\omega$  ed  $\omega'$  sono le forme di Cartan di due connessioni principali su  $\xi$ , la differenza  $\eta = \omega' - \omega$  è una uno-forma tensoriale di tipo  $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$  e quindi definisce una forma  $\varphi \in \Omega^1(M, E_{\mathfrak{g}})$ . Abbiamo quindi

**PROPOSIZIONE XIV.6.1.** *Lo spazio delle connessioni principali su  $\xi$  è uno spazio affine con spazio vettoriale associato  $\Omega_{\text{Ad},0}^1(P, \mathfrak{g}) \simeq \Omega^1(M, E_{\mathfrak{g}})$ .*

**OSSERVAZIONE XIV.6.2.** La forma di Christoffel  $\omega_{\alpha} = \sigma_{\alpha}^* \omega$  si può interpretare come l'elemento di  $\Omega^1(M, E_{\mathfrak{g}})$  che corrisponde alla differenza tra  $\Psi_{\alpha}^* \omega$  e la connessione piatta canonica su  $U_{\alpha} \times \mathbf{G}$ .

### XIV.7. Fibrato degli endomorfismi e rappresentazione aggiunta

**Fibrato degli endomorfismi di un fibrato vettoriale.** Ad un fibrato vettoriale  $\eta = (E \xrightarrow{\pi_{\eta}} M)$  possiamo associare il *fibrato degli endomorfismi* di  $\eta$ , che indicheremo con  $\mathcal{E}nd(\eta)$ . La sua fibra sopra il punto  $p$  di  $M$  è lo spazio vettoriale di tutti le applicazioni lineari di  $E_p$  in sé. Il fibrato  $\mathcal{E}nd(\eta) = (\mathcal{E}nd(E) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{E}nd(\eta)}} M)$  è il prodotto di Whitney  $\eta \otimes_M \eta^*$  su  $M$  del fibrato  $\eta$  e del suo fibrato duale  $\eta^*$ .

Sia  $n$  il rango di  $\eta$  ed  $\mathbb{L}(\eta)$  il fibrato  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ -principale dei sistemi di riferimento di  $\eta$ . Allora  $\mathcal{E}nd(\eta)$  è il fibrato vettoriale associato alla rappresentazione aggiunta di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  su  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ .

**Fibrato associato alla rappresentazione aggiunta.** Sia  $\xi_{\mathfrak{g}} = (E_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{g}}} M)$  il fibrato vettoriale corrispondente alla rappresentazione aggiunta di  $\mathbf{G}$ .

**PROPOSIZIONE XIV.7.1.** *Sia  $(\rho, V)$  una rappresentazione lineare di  $\mathbf{G}$ . Risulta allora definita un unico morfismo di fibrati vettoriali  $(\text{id}_M, \tilde{\rho}_*) : \xi_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{E}nd(\xi_V)$ , che renda commutativo il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} P \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{id}_P \times \rho_*} & P \times \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\tilde{\rho}_*} & \mathcal{E}nd(E_V) \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono le proiezioni canoniche nel quoziente.

**DIMOSTRAZIONE.** Basta osservare che  $\rho_*(\text{Ad}(a)(A)) = \text{Ad}(\rho(a))\rho_*(A)$  e quindi l'applicazione  $\text{id}_P \times \rho_*$  passa al quoziente, definendo un omomorfismo di fibrati vettoriali.  $\square$

**Alcune osservazioni sulle forme a valori vettoriali.** Sia  $\eta = (E \xrightarrow{\pi_{\eta}} M)$  un fibrato vettoriale differenziabile. Se  $\phi \in \Omega^p(M, \mathcal{E}nd(E))$  e  $\psi \in \Omega^q(M, E)$ , è naturale definire il prodotto esterno  $\phi \wedge \psi \in \Omega^{p+q}(M, E)$  ponendo

$$(\phi \wedge \psi)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum_{\substack{k \in \mathbf{S}_{p+q} \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq p+q \\ 1 \leq k_{p+1} < \dots < k_{p+q} \leq p+q}} \epsilon(k) \phi(X_{k_1}, \dots, X_{k_p})(\psi(X_{k_{p+1}}, \dots, X_{k_{p+q}})), \quad \forall X_1, \dots, X_{p+q} \in \mathfrak{X}(M).$$

Siano ora  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie,  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato differenziabile  $\mathbf{G}$ -principale,  $\xi_{\mathfrak{g}}$  il fibrato vettoriale associato alla rappresentazione aggiunta,  $\xi_V$  il fibrato vettoriale associato ad una rappresentazione lineare  $(\rho, V)$  di  $\mathbf{G}$ .

Se  $\phi \in \Omega^p(M, E_{\mathfrak{g}})$ , allora  $\tilde{\rho}_*\phi \in \Omega^p(M, E_{\text{End}(E_V)})$ . Se  $\psi \in \Omega^q(M, E_V)$ , definiamo

$$\phi \wedge_{\rho} \psi = (\tilde{\rho}_*\phi) \wedge \psi \in \Omega^{p+q}(M, E_V).$$

Utilizzando l'isomorfismo  $\Lambda_{\mathfrak{g}} : \Omega^*(M, E_{\mathfrak{g}}) \rightarrow \Omega_{\text{Ad},0}^*(P, \mathfrak{g})$  della Proposizione XII.9.18 e la Proposizione XII.9.15 abbiamo il seguente<sup>4</sup>

LEMMA XIV.7.2. *Se  $\phi \in \Omega^r(M, E_{\mathfrak{g}})$  e  $\psi \in \Omega^s(M, E_V)$ , la forma  $\phi \wedge_{\rho} \psi \in \Omega^{r+s}(M, E_V)$  verifica*

$$(14.7.1) \quad \Lambda_V(\phi \wedge_{\rho} \psi) = \Lambda_{\mathfrak{g}}(\phi) \wedge_{\rho} \Lambda_V(\psi).$$

□

Nel caso in cui  $\phi, \psi \in \Omega^*(M, E_{\mathfrak{g}})$ , scriveremo

$$[\phi \wedge \psi] \quad \text{per indicare} \quad \phi \wedge_{\text{Ad}} \psi.$$

NOTAZIONE XIV.7.3. Se  $\psi \in \Omega^p(M, E_V)$  ed  $\alpha \in \Omega^q(M)$ , indichiamo con  $\psi \wedge \alpha$  l'elemento di  $\Omega^{p+q}(M, E_V)$  definito da

$$(14.7.2) \quad (\psi \wedge \alpha)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum' (-1)^p \varepsilon(k) \alpha(X_{k_{p+1}}, \dots, X_{k_{p+q}}) \psi(X_{k_1}, \dots, X_{k_p}),$$

per ogni  $X_1, \dots, X_{p+q} \in \mathfrak{X}(M)$ , ove la somma è estesa a tutte le permutazioni  $k$  di  $\{1, \dots, p+q\}$  con  $k_1 < \dots < k_p$  e  $k_{p+1} < \dots < k_{p+q}$ .

OSSERVAZIONE XIV.7.4. Se  $\phi \in \Omega^p(M, E_{\mathfrak{g}})$ ,  $\psi \in \Omega^{q_1}(M, E_V)$  ed  $\alpha \in \Omega^{q_2}(M)$ , allora

$$(14.7.3) \quad \phi \wedge_{\rho} (\psi \wedge \alpha) = (\phi \wedge_{\rho} \psi) \wedge \alpha.$$

LEMMA XIV.7.5. *Ogni elemento di  $\Omega^p(M, E_V)$  si può scrivere come una somma localmente finita di forme  $s \cdot \alpha$  con  $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$ ,  $\alpha \in \Omega^p(M)$ .* □

Le formule (14.7.2), (14.7.3) ed il Lemma XIV.7.5 ci saranno utili per semplificare, più avanti, il calcolo di alcune espressioni.

### XIV.8. Tensore di curvatura

La forma di curvatura  $\Omega$  di una connessione principale  $\Gamma$  su  $\xi$  è di tipo tensoriale per la rappresentazione aggiunta di  $\mathbf{G}$ . Essa determina quindi un elemento  $R \in \Omega^2(M, E_{\mathfrak{g}})$  tale che

$$(14.8.1) \quad R(X_p, Y_p) = \sigma \Omega(\tilde{X}_{\sigma}, \tilde{Y}_{\sigma}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall p \in M, \quad \forall \sigma \in P_p.$$

DEFINIZIONE XIV.8.1. L'elemento  $R \in \Omega^2(M, E_{\mathfrak{g}})$  definito dalla (14.8.1) si dice il *tensore di curvatura* di  $\Gamma$ .

<sup>4</sup>cf. la Definizione XII.9.14



**TEOREMA XIV.8.2.** *Siano  $\{\omega_\alpha\}$  le forme di Christoffel di  $\Gamma$  in un atlante di trivializzazione  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$  di  $\xi$ . Allora*

$$(14.8.2) \quad R|_{U_\alpha} = \sigma_\alpha \cdot (d\omega_\alpha + \frac{1}{2}[\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha]), \quad \forall \alpha \in I.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per la Proposizione XII.9.19, abbiamo

$$R|_{U_\alpha} = \sigma_\alpha \cdot \sigma_\alpha^* \Omega = \sigma_\alpha \cdot \sigma_\alpha^* (d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]) = \sigma_\alpha \cdot (d\omega_\alpha + \frac{1}{2}[\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha]).$$

□

**TEOREMA XIV.8.3.** *Sia  $(\rho, V)$  una rappresentazione lineare di  $\mathbf{G}$ . Allora, per ogni  $\phi \in \mathcal{Q}^q(M, E_V)$  abbiamo*

$$(14.8.3) \quad (d^\nabla)^2 \phi = d^\nabla d^\nabla \phi = R \wedge_\rho \phi.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$  ed  $\alpha \in \mathcal{Q}^q(M)$ , abbiamo:

$$d^\nabla d^\nabla (s\alpha) = d^\nabla ((d^\nabla s)\alpha) + s d\alpha = (d^\nabla d^\nabla s)\alpha - d^\nabla s \wedge d\alpha + d^\nabla s \wedge d\alpha = (d^\nabla d^\nabla s)\alpha.$$

Utilizzando il Lemma XIV.7.5 possiamo limitarci quindi a dimostrare la formula nel caso in cui  $\phi = s \in \mathcal{Q}^0(M, E_V) = \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} D^2 \tilde{s} &= D(d\tilde{s} + \omega \wedge_\rho \tilde{s}) = d\omega \wedge_\rho \tilde{s} - \omega \wedge_\rho d\tilde{s} + \omega \wedge_\rho (d\tilde{s} + \omega \wedge_\rho \tilde{s}) \\ &= d\omega \wedge_\rho \tilde{s} + \omega \wedge_\rho (\omega \wedge_\rho \tilde{s}). \end{aligned}$$

Per completare la dimostrazione della (14.8.3) è sufficiente osservare che  $D^2 \tilde{s}$  è una due-forma tensoriale di tipo  $(\rho, V)$  e che l'uguaglianza  $D^2 \tilde{s} = \Omega \wedge_\rho \tilde{s}$  è verificata su ogni coppia di campi di vettori orizzontali. □

**COROLLARIO XIV.8.4.** *Se  $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$ , abbiamo*

$$(14.8.4) \quad R(X, Y) \wedge_\rho s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s, \\ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$ . Posto  $\phi = d^\nabla s$ , abbiamo  $\tilde{\phi}(\tilde{Z}) = \tilde{Z}\tilde{s} = \widetilde{\nabla_Z s}$  per ogni  $Z \in \mathfrak{X}(M)$  e quindi:

$$\begin{aligned} d\tilde{\phi}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \tilde{X}\tilde{\phi}(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\tilde{\phi}(\tilde{X}) - \tilde{\phi}([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = (\tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X} - [\tilde{X}, \tilde{Y}])\tilde{s}, \\ &= \sigma^{-1}(\nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s) \circ \pi. \end{aligned}$$

Per il Teorema XIV.8.3 otteniamo la (14.8.4). □

### XIV.9. Trasporto parallelo di vettori

Il sollevamento orizzontale di cammini descritto nel §XIII.8 ci permette di definire il trasporto parallelo lungo i cammini di classe  $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1$  in  $M$  di vettori di fibrati vettoriali associati alle rappresentazioni lineari del suo gruppo strutturale.

Siano  $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], M)$  e  $\tilde{\gamma}_{\sigma_0} \in \mathcal{C}_{\text{tr}, h}^1([0, 1], P)$  il suo sollevamento orizzontale a partire dal punto  $\sigma_0 \in P_{\gamma(0)}$ . Se  $(\rho, V)$  è una rappresentazione lineare di  $\mathbf{G}$  e  $\nu_0 \in E_{V, s(0)}$ , allora  $\nu_0 = \sigma_0^{-1} \nu_0 \in V$  e  $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)\nu_0$  è un sollevamento differenziabile di  $\gamma$  ad un cammino in  $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], E_V)$ , con punto iniziale  $\nu_0$ .

Se  $\sigma'_0$  è un altro punto di  $P_{\gamma(0)}$ , è  $\sigma'_0 = \sigma_0 a$  per un elemento  $a \in \mathbf{G}$  ed il sollevamento orizzontale di  $\gamma$  con punto iniziale  $\sigma'_0$  è  $\tilde{\gamma}_{\sigma'_0}(t) = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \cdot a$ . Poiché

$$\begin{aligned} v'_0 &= \sigma'^{-1}_0 v_0 = (\sigma_0 a)^{-1} v_0 = \rho(a^{-1}) \sigma_0^{-1} v_0 = \rho(a^{-1}) v_0, \\ \text{otteniamo } \tilde{\gamma}_{\sigma'_0}(t) v'_0 &= \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \cdot a v'_0 = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) v_0. \end{aligned}$$

La curva  $\tilde{\gamma}_{v_0}(t) = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) v_0$  in  $E_V$  è quindi indipendente dalla scelta del punto iniziale  $\sigma_0$  in  $P_{\gamma(0)}$ .

**DEFINIZIONE XIV.9.1.** La curva  $\tilde{\gamma}_{v_0} = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \sigma_0^{-1} v_0 \in \mathcal{C}^1_{\text{tr}}([0, 1], E_V)$  si dice il *trasporto parallelo di  $v_0$  lungo la curva  $\gamma$* .

Una curva  $v \in \mathcal{C}^1([0, 1], E_V)$  può essere considerata come un *campo di vettori lungo il cammino*  $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$  definito dalla sua proiezione  $\gamma(t) = \pi_V(v(t))$ . Se  $\tilde{\gamma}_{\sigma_0} \in \mathcal{C}^1([0, 1], P)$  è il sollevamento orizzontale di  $\gamma$  di punto iniziale  $\sigma_0 \in P_{\gamma(0)}$ , la composizione  $v_{\sigma_0}(t) = (\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t))^{-1} v(t)$  è un cammino  $v_{\sigma_0} \in \mathcal{C}^1([0, 1], V)$  e possiamo quindi calcolarne la derivata  $\dot{v}_{\sigma_0} = \frac{d}{dt} v_{\sigma_0}$ . Se  $a \in \mathbf{G}$  e  $\sigma'_0 = \sigma_0 a$ , allora  $\tilde{\gamma}_{\sigma'_0}(t) = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \cdot a$  è il sollevamento di  $\gamma$  con punto iniziale  $\sigma'_0$ . Quindi  $v_{\sigma'_0}$  è  $a^{-1} v_{\sigma_0}$  ed abbiamo perciò

$$\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \dot{v}_{\sigma_0} = \tilde{\gamma}_{\sigma'_0} \dot{v}_{\sigma'_0}.$$

Quindi  $\tilde{\gamma}_{\sigma_0} \dot{v}_{\sigma_0}$  è un campo di vettori lungo  $\gamma$ , indipendente dalla scelta del punto iniziale  $\sigma_0$  del sollevamento. Possiamo introdurre quindi la

**DEFINIZIONE XIV.9.2.** Siano  $v \in \mathcal{C}^1([0, 1], E_V)$  un campo di vettori lungo una curva  $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$  e  $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}$  il sollevamento orizzontale di  $\gamma$ , a partire da un punto  $\sigma_0 \in P_{s(0)}$ . La

$$(14.9.1) \quad \frac{Dv}{dt} = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \left( \frac{d[(\tilde{\gamma}_{\sigma_0})^{-1} v(t)]}{dt} \right)$$

si dice *derivata covariante di  $v$  lungo la curva  $s$* . Se

$$(14.9.2) \quad \frac{Dv}{dt} = 0$$

diciamo che il campo di vettori  $v$  è *parallelo* lungo la curva  $\gamma$ .

**OSSERVAZIONE XIV.9.3.** Il campo di vettori  $v$  è parallelo lungo la curva  $\gamma$  se e soltanto se  $v$  è il trasporto parallelo lungo  $\gamma$  del vettore  $v(0)$ .

Abbiamo

**PROPOSIZIONE XIV.9.4.** Siano  $f \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$  e  $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$ . Allora

$$(14.9.3) \quad \frac{D(f \circ \gamma)}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} f.$$

### XIV.10. Differenziazione covariante secondo Koszul

In questo paragrafo introduciamo la definizione astratta di differenziazione covariante<sup>5</sup> sulle sezioni di un fibrato vettoriale differenziabile e mostriamo che essa equivale al dato di una connessione principale sul fibrato dei suoi sistemi di riferimento.

Sia  $\eta = (E \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato vettoriale reale differenziabile, di rango  $n$ , con fibra tipica  $V$ , su una varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $m$ . Indichiamo con  $\mathcal{E}(M)$  lo spazio  $\Gamma_{\xi_V}(M, E)$  delle sue sezioni differenziabili.

DEFINIZIONE XIV.10.1 (Koszul). Una *derivazione covariante* su  $\eta$  è un'applicazione

$$(14.10.1) \quad \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{E}(M) \ni (X, s) \longrightarrow \nabla_X s \in \mathcal{E}(M)$$

che gode delle proprietà

$$(14.10.2) \quad \begin{cases} \nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} s = f_1 \nabla_{X_1} s + f_2 \nabla_{X_2} s, \\ \nabla_X (s_1 + s_2) = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2, \\ \nabla_X (fs) = f \nabla_X s + X(f) \cdot s, \end{cases}$$

ove  $f, f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,  $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $s, s_1, s_2 \in \mathcal{E}(M)$ .

Poiché l'applicazione  $X \rightarrow \nabla_X s$  è  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineare su  $\mathfrak{X}(M)$ , possiamo considerare, per ogni  $s \in \mathcal{E}(M)$ , la

$$(14.10.3) \quad \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow d^\nabla s(X) = \nabla_X s \in \mathcal{E}(M)$$

come una 1-forma a valori in  $E$ . Definiamo così un'applicazione

$$(14.10.4) \quad d^\nabla : \mathcal{E}(M) = \Omega^0(M, E) \longrightarrow \Omega^1(M, E).$$

DEFINIZIONE XIV.10.2. L'applicazione (14.10.4) si dice *differenziazione covariante*.

Abbiamo mostrato nel §XIV.2 come una connessione sul fibrato  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ -principale  $\mathbb{L}(\eta)$  dei sistemi di riferimento di  $\eta$  permetta di definire una differenziazione covariante su  $\eta$ . Viceversa, vale il

TEOREMA XIV.10.3. *Ogni differenziazione covariante su  $\eta$  è associata ad una ed una sola connessione principale sul fibrato  $\mathbb{L}(\eta)$  dei suoi sistemi di riferimento.*

DIMOSTRAZIONE. Se  $s \in \mathcal{E}(M)$ , denotiamo con  $\tilde{s} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{L}(\eta), V)$  il suo sollevamento, definito da  $\tilde{s}(\sigma) = \sigma^{-1} s(\pi(\sigma))$ . Abbiamo

$$(14.10.5) \quad X_\sigma \tilde{s} = -\omega_V(X_\sigma) \tilde{s}, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}(\eta)), \quad \forall s \in \mathcal{E}(M).$$

Infatti, se  $A = \omega_V(X_\sigma) \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ , da  $\tilde{s}(\sigma \exp(tA)) = \exp(-tA) \tilde{s}(\sigma)$  ricaviamo

$$X_\sigma \tilde{s} = \left. \frac{d \exp(-tA) \sigma^{-1} s(\pi(\sigma))}{dt} \right|_{t=0} = -A \tilde{s}(\sigma).$$

<sup>5</sup>J.L.Koszul *Lectures on fibre bundles and differential geometry*. Notes by S. Ramanan. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 20 Bombay 1965 ii+130+iii pp.

Perciò, assegnata una connessione principale su  $\mathbb{L}(\eta)$ , la sua forma di Cartan  $\omega$  è legata alla derivazione covariante dall'identità

$$(14.10.6) \quad X_\sigma \tilde{s} = \sigma^{-1}(\nabla_{\pi_* X_\sigma} s) - \omega(X_\sigma) \tilde{s}(\sigma), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}(\eta)), \quad \forall \sigma \in P, \quad \forall s \in \mathcal{E}(M).$$

Per concludere la dimostrazione è quindi sufficiente verificare che, assegnata una derivazione covariante  $\nabla$  su  $\eta$ , la  $\omega \in \mathcal{Q}^1(\mathbb{L}(\eta), \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V))$  definita dalla (14.10.6) è la forma di Cartan di una connessione principale su  $\mathbb{L}(\eta)$ . Per la (14.10.5) è  $\omega(A^*) = A$  per ogni  $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ . Se  $a \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ ,  $\sigma \in \mathbb{L}(\eta)$  ed  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}(\eta))$ , abbiamo

$$\begin{aligned} [R_a^* \omega(X_\sigma)] \tilde{s}(\sigma a) &= [R_a^* \omega(X_\sigma)] a^{-1} \tilde{s}(\sigma) \\ &= \omega(R_{a^*} X_\sigma) \tilde{s}(\sigma a) = (\sigma a)^{-1} (\nabla_{\pi_* (R_{a^*} X_\sigma)} s) - R_{a^*} X_\sigma \tilde{s} \\ &= a^{-1} \sigma^{-1} (\nabla_{\pi_* X} s) - X_\sigma R_a^* \tilde{s} = a^{-1} (\sigma^{-1} (\nabla_{\pi_* X} s) - X_\sigma \tilde{s}) \\ &= a^{-1} \omega(X_\sigma) \tilde{s}(\sigma) = [a^{-1} \omega(X_\sigma) a] \tilde{s}(\sigma a) = [\text{Ad}(a^{-1}) \omega(X_\sigma)] \tilde{s}(\sigma a), \end{aligned}$$

da cui ricaviamo che  $R_a^* \omega = \text{Ad}(a^{-1}) \omega$ . Ciò completa la dimostrazione.  $\square$

#### XIV.11. Il Teorema di Ambrose-Singer

Dopo aver introdotto il concetto di curvatura, ritorniamo sull'olonomia, definita in §XIII.9. Il legame tra curvatura ed olonomia è descritto dal seguente Teorema di Ambrose e Singer<sup>6</sup>.

**TEOREMA XIV.11.1** (dell'olonomia). *Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato principale differenziabile, con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ , ed  $M$  varietà connessa e paracompatta. Sia  $\Gamma$  una  $\mathbf{G}$ -connessione principale su  $\xi$ , con forma di connessione  $\omega$  e forma di curvatura  $\Omega$ . Fissiamo un punto  $\sigma_0 \in P$ . L'algebra di Lie di  $\Phi_0(\sigma_0)$  è il sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{g}$  generato dagli elementi della forma  $\Omega(\sigma)(X, Y)$ , al variare di  $\sigma$  in  $P(\sigma_0)$  e di  $X, Y$  tra i vettori orizzontali in  $H_\sigma(P)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Fissato  $\sigma_0 \in P$ , sia  $p_0 = \pi(\sigma_0)$ . Per il Teorema XIII.9.9 possiamo supporre che il gruppo strutturale  $\mathbf{G}$  di  $\xi$  coincida col gruppo di olonomia  $\Phi(\sigma_0)$ . Sia  $\mathfrak{a}$  il sottospazio di  $\mathfrak{g}$  generato da tutti gli elementi  $\Omega_\sigma(\tilde{X}, \tilde{Y})$ , al variare di  $X, Y$  in  $\mathfrak{X}(M)$  e di  $\sigma$  in  $P$ . Poiché  $\Omega$  è una forma tensoriale di tipo  $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$ , abbiamo, per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  ed  $A \in \mathfrak{g}$ ,

$$\mathfrak{a} \ni \Omega(\mathbf{R}_{\exp(tA)_*} \tilde{X}, \mathbf{R}_{\exp(tA)_*} \tilde{Y}) = \mathbf{R}_{\exp(tA)}^* \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \text{Ad}(\exp(-tA)) \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}).$$

Derivando rispetto a  $t$  per  $t = 0$  otteniamo che  $[A, \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y})] \in \mathfrak{a}$ , e quindi  $\mathfrak{a}$  è un ideale di  $\mathfrak{g}$ .

Consideriamo la distribuzione vettoriale  $\mathcal{A}(P)$  generata dai campi di vettori  $A^*$ , al variare di  $A$  in  $\mathfrak{a}$ , e la  $\mathcal{B}(P) = \mathcal{A}(P) + \mathcal{H}(P)$ , generata dalla distribuzione orizzontale  $\mathcal{H}(P)$  e da  $\mathcal{A}(P)$ . Per costruzione la  $\mathcal{B}(P)$  è una distribuzione di rango  $m + \dim \mathfrak{a}$ . Dimostriamo che è involutiva. Infatti  $\mathcal{A}(P)$  è completamente

<sup>6</sup>W.Ambrose, I.M. Singer: *A theorem on holonomy*, Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953), 428-443

<sup>7</sup>Ricordiamo che  $P(\sigma_0)$  è l'insieme dei punti  $\sigma$  di  $P$  che possono essere congiunti a  $\sigma_0$  da un cammino orizzontale.

integrabile,  $[A^*, \mathcal{H}(P)] \subset \mathcal{H}(P)$  per ogni  $A \in \mathfrak{a}$ , perché la distribuzione orizzontale è invariante per le traslazioni a destra rispetto agli elementi di  $\mathbf{G}$  ed, infine, se  $X, Y \in \mathcal{H}(P)$ , la

$$\text{pr}_v([X, Y]_\sigma) = [\omega([X, Y])]_\sigma^* = -[\Omega(X, Y)]_\sigma^*$$

prova che  $[X, Y] \in \mathcal{B}(P)$ . Poiché abbiamo supposto che  $\mathbf{G}$  coincida con il gruppo di ologonomia  $\Phi(\sigma_0)$ , ogni coppia di elementi di  $P$  possono essere collegati da un cammino orizzontale. Ne segue che  $P$  è la varietà integrale di  $\mathcal{B}(P)$  passante per  $\sigma_0$  e che quindi ha rango uguale alla dimensione di  $P$ . Questo implica che  $\mathfrak{a}$ , avendo la stessa dimensione di  $\mathfrak{g}$ , coincida con  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

OSSERVAZIONE XIV.11.2. Se  $\xi$  è un fibrato principale differenziabile, con spazio totale  $P$  connesso, su una base  $M$  di dimensione maggiore o uguale a due<sup>8</sup>, esiste una connessione principale su  $\xi$  per cui sia  $P(\sigma_0) = P$ . In particolare, se  $\dim M \geq 2$ , ogni gruppo di Lie connesso  $\mathbf{G}$  è il gruppo di ologonomia di una connessione principale sul fibrato banale  $M \times \mathbf{G}$ .

### XIV.12. L'ologonomia infinitesima

Lo spazio  $\mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g})$  delle funzioni differenziabili su  $P$  a valori in  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie con l'operazione

$$[f_1, f_2](\sigma) = [f_1(\sigma), f_2(\sigma)], \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g}), \quad \forall \sigma \in P.$$

Consideriamo la sua sottoalgebra

$$(14.12.1) \quad \mathcal{G} = \mathcal{Q}_{\text{Ad},0}^0(P, \mathfrak{g}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g}) \mid R_a^* f = \text{Ad}(a^{-1})f, \quad \forall a \in \mathbf{G}\}.$$

LEMMA XIV.12.1. *Valgono le*

$$(14.12.2) \quad Zf = -[\omega(Z), f], \quad \forall Z \in \mathfrak{V}(P), \quad \forall f \in \mathcal{G},$$

$$(14.12.3) \quad \tilde{X}f \in \mathcal{G} \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall f \in \mathcal{G}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $f \in \mathcal{Q}_{\text{Ad},0}^0(P, \mathfrak{g})$ , è  $Df = df + [\omega \wedge f] = df + [\omega, f]$ . Poiché  $Df$  è tensoriale, otteniamo la (14.12.2). La (14.12.3) segue dal fatto che, se  $f \in \mathcal{G}$  ed  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , allora  $f = \tilde{s}$  per una  $s \in \Gamma_{\xi_g}(M, E_g)$  ed  $\tilde{X}f = \widetilde{\nabla_X s}$ .  $\square$

Definiamo per ricorrenza

$$(14.12.4) \quad \begin{cases} \mathcal{K}_0 = \langle \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) \mid X, Y \in \mathfrak{X}(M) \rangle, \\ \mathcal{K}_{p+1} = \mathcal{K}_p + \langle \tilde{X} \cdot \mathcal{K}_p \mid X \in \mathfrak{X}(M) \rangle \quad \text{per } p \geq 0, \\ \mathcal{K} = \bigcup_{p \geq 0} \mathcal{K}_p. \end{cases}$$

PROPOSIZIONE XIV.12.2.  $\mathcal{K}$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathcal{G}$ .

<sup>8</sup>Vedi J.Hano e H.Ozeki: *On the holonomy group of linear connections*, Nagoya Math. J. **10** (1956), pp 71-81, per il caso dei gruppi lineari, e K.Nomizu: *Un théorème sur les groupes d'ologonomie*, Nagoya Math. J. **10**, 1956, pp. 101-103 per il caso generale.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con  $R \in \mathcal{Q}^2(M, E_g)$  il tensore di curvatura. Per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , la  $f = \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y})$  è il rialzamento  $R(\tilde{X}, \tilde{Y})$  di  $R(X, Y) \in \Gamma_{\xi_0}(M, E_g)$  e quindi un elemento di  $\mathcal{G}$ . Per definizione  $\tilde{X}\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$  per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$  per la (14.12.3).

Dimostriamo per ricorrenza su  $p$  che  $[\mathcal{H}_p, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}$ .

Siano  $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ . Poiché  $\Omega(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = -\omega([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2])$ , e  $\text{pr}_h([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]) = \tilde{Y}$ , con  $Y = [X_1, X_2]$ , otteniamo, per la (14.12.2),

$$\begin{aligned} [\Omega(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2), f] &= -\text{pr}_v([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2])f = (\text{pr}_h([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]) - [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2])f \\ &= \tilde{Y}f - \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 f + \tilde{X}_2, \tilde{X}_1 f \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Da questo segue che  $[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}$ .

Supponiamo ora che  $p > 0$  e  $[\mathcal{H}_{p-1}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}$ . Basta verificare che, se  $f_0 \in \mathcal{H}_{p-1}$ ,  $f \in \mathcal{H}$  ed  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , allora  $[\tilde{X}f_0, f] \in \mathcal{H}$ . Questo segue perché per l'ipotesi induttiva  $[f_0, f] \in \mathcal{H}$  e quindi

$$[\tilde{X}f_0, f] = \tilde{X}[f_0, f] - [f_0, \tilde{X}f] \in \tilde{X}\mathcal{H} + [f_0, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}.$$

La dimostrazione è completa.  $\square$

Fissato  $\sigma_0 \in P$ , poniamo

$$(14.12.5) \quad \begin{cases} \mathfrak{m}_p(\sigma_0) = \{f(\sigma_0) \mid f \in \mathcal{H}_p\}, \\ \mathfrak{m}(\sigma_0) = \{f(\sigma_0) \mid f \in \mathcal{H}\} = \bigcup_{p \geq 0} \mathfrak{m}_p(\sigma_0). \end{cases}$$

PROPOSIZIONE XIV.12.3.  $\mathfrak{m}(\sigma_0)$  è una sottoalgebra dell'algebra di Lie  $\phi(\sigma_0)$  del gruppo di ologonia  $\Phi(\sigma_0)$ .

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione XIV.12.2  $\mathfrak{m}(\sigma_0)$  è un'algebra di Lie e l'inclusione  $\mathfrak{m}(\sigma_0) \subset \phi(\sigma_0)$  è conseguenza del Teorema XIV.11.1.  $\square$

DEFINIZIONE XIV.12.4. L'algebra di Lie (14.12.5) si dice l'ologonia infinitesima della connessione  $\Gamma$  in  $\sigma_0$  ed il sottogruppo analitico di  $\mathbf{G}$  generato da  $\mathfrak{m}(\sigma_0)$  il suo gruppo di ologonia infinitesima in  $\sigma_0$ .

Abbiamo

PROPOSIZIONE XIV.12.5. Se sia  $\xi$  che la connessione principale  $\Gamma$  su  $\xi$  sono analitici reali, allora i suoi gruppi di ologonia speciale ed infinitesima coincidono.  $\square$

### XIV.13. Connessioni invarianti canoniche su spazi omogenei

In questo paragrafo e nel successivo discuteremo connessioni principali invarianti rispetto ad azioni differenziabili di gruppi di Lie. Considereremo in primo luogo il caso degli spazi omogenei, considerati come fibrati principali con gruppo strutturale uguale allo stabilizzatore di un punto.

Siano  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie,  $\mathbf{H}$  un suo sottogruppo chiuso e  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  le loro algebre di Lie.

DEFINIZIONE XIV.13.1. Lo spazio omogeneo  $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$  si dice *riduttivo* se  $\mathfrak{h}$  ammette in  $\mathfrak{g}$  un complemento lineare  $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante.

Supponiamo cioè che esista un sottospazio vettoriale  $\mathfrak{m}$  di  $\mathfrak{g}$  tale che:

$$(14.13.1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m},$$

$$(14.13.2) \quad \mathfrak{m} = \text{Ad}(a)(\mathfrak{m}), \quad \forall a \in \mathbf{H}.$$

NOTAZIONE XIV.13.2. Indicheremo con  $A_{\mathfrak{h}}, A_{\mathfrak{m}}$  le componenti di  $A \in \mathfrak{g}$  nella decomposizione (14.13.1):  $A = A_{\mathfrak{h}} + A_{\mathfrak{m}}$ , con  $A_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}, A_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{m}$ .

OSSERVAZIONE XIV.13.3.  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  è sempre riduttivo quando  $\mathbf{H}$  sia compatto, perché le rappresentazioni lineari dei gruppi compatti sono completamente riducibili.

ESEMPIO XIV.13.4. Sia  $\mathbf{G}$  un sottogruppo di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  semialgebrico e chiuso rispetto all'aggiunzione. Allora  $\mathbf{K} = \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$  è un sottogruppo compatto massimale di  $\mathbf{G}$ . Indichiamo con  $\mathfrak{k}$  la sua algebra di Lie e con  $\mathfrak{p}$  il sottospazio  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)$  delle matrici Hermitiane-simmetriche dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $\mathbf{G}$ . La decomposizione di Cartan  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  verifica le (14.13.1), (14.13.2) e quindi lo spazio omogeneo  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  è riduttivo.

TEOREMA XIV.13.5 (Connessioni invarianti su spazi riduttivi). *Sia  $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$  uno spazio omogeneo ed indichiamo con  $\xi$  il corrispondente fibrato principale, con gruppo strutturale  $\mathbf{H}$ , spazio totale  $\mathbf{G}$  e base  $M$ .*

- (1) *Supponiamo che  $M$  sia riduttivo e valgano le (14.13.1), (14.13.2). Allora la componente  $\omega$  in  $\mathfrak{h}$  della forma di Maurer-Cartan  $\omega_{\mathbf{G}}$  di  $\mathbf{G}$  rispetto alla decomposizione (14.13.1) è la forma di Cartan di una connessione  $\mathbf{H}$ -principale su  $\xi$ .*
- (2) *Se esiste su  $\xi$  una connessione  $\mathbf{H}$ -principale  $\Gamma$ , invariante per le traslazioni a sinistra su  $\mathbf{G}$ , allora  $M$  è riduttivo, e  $\Gamma$  è ottenuta come in (1), a partire da una decomposizione (14.13.1), per cui valga la (14.13.2).*
- (3) *La forma di curvatura della connessione  $\Gamma$  definita in (1) è*

$$(14.13.3) \quad \Omega(A^*, B^*) = -[A_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{h}}, \quad \forall A, B \in \mathfrak{g}.$$

DIMOSTRAZIONE. (1) Basta verificare che la

$$(14.13.4) \quad \omega(A^*) = A_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}, \quad \forall A \in \mathfrak{g}$$

(ove  $A^*$  è il campo di vettori invariante a sinistra su  $\mathbf{G}$  corrispondente ad  $A \in \mathfrak{g}$ ), è una forma di Cartan su  $\mathbf{G}$ . La distribuzione verticale  $\mathfrak{V}(\mathbf{G})$  è generata dai campi  $A^*$ , al variare di  $A$  in  $\mathfrak{h}$ . Abbiamo perciò

$$\omega(A^*) = A_{\mathfrak{h}} = A, \quad \forall A \in \mathfrak{h}.$$

Abbiamo poi  $(R_a)_*(A^*) = (\text{Ad}(a^{-1})(A))^*$  per ogni  $A \in \mathfrak{g}$  ed  $a \in \mathbf{G}$ , e dunque

$$\begin{aligned} R_a^* \omega(A^*) &= \omega((\text{Ad}(a^{-1})(A))^*) = (\text{Ad}(a^{-1})(A))_{\mathfrak{h}} \\ &= \text{Ad}(a^{-1})(A_{\mathfrak{h}}) = \text{Ad}(a^{-1})\omega(A^*), \quad \forall A \in \mathfrak{g}, \quad \forall a \in \mathbf{H}, \end{aligned}$$

in quanto la proiezione  $A \rightarrow A_{\mathfrak{h}}$  su  $\mathfrak{h}$  commuta con  $\text{Ad}(a^{-1})$ , perché abbiamo supposto che  $\mathfrak{m}$  fosse  $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante.

(2) Se  $\omega$  è la forma di Cartan di una connessione  $\mathbf{H}$ -principale  $\mathbf{G}$ -invariante a sinistra su  $\xi$ , si verifica facilmente che  $\mathfrak{m} = \ker \omega_e \subset \mathfrak{g}$  soddisfa (14.13.1) e (14.13.2), e che  $\omega(A^*) = A_{\mathfrak{h}}$  per ogni  $A \in \mathfrak{g}$ .

(3) Per dimostrare (14.13.3) basta utilizzare l'equazione di struttura, decomponendo  $A$  e  $B$  con la (14.13.1). Abbiamo:

$$\begin{aligned}\Omega(A^*, B^*) &= A^*A_{\mathfrak{h}} - B^*B_{\mathfrak{h}} - [A, B]_{\mathfrak{h}} + [A_{\mathfrak{h}}, B_{\mathfrak{h}}] \\ &= -[A_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}} - [A_{\mathfrak{h}}, B_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{h}} - [A_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{h}}\end{aligned}$$

ed otteniamo la formula desiderata perché  $[A_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{h}}], [A_{\mathfrak{h}}, B_{\mathfrak{m}}] \in \mathfrak{m}$ .  $\square$

Come conseguenza del Teorema XIV.11.1 e della (3) del Teorema XIV.13.5 abbiamo:

**TEOREMA XIV.13.6.** *Siano  $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$  uno spazio omogeneo che ammette una connessione  $\mathbf{G}$ -invariante e  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$  la corrispondente decomposizione della sua algebra di Lie. Allora l'algebra di Lie  $\phi$  in del suo gruppo di ologonia  $\Phi(e)$  in  $e$  è generata dagli elementi di  $\mathfrak{h}$  della forma  $[X, Y]_{\mathfrak{h}}$  al variare di  $X, Y$  in  $\mathfrak{m}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per il Teorema XIV.11.1 l'algebra di Lie  $\phi$  dell'ologonia  $\Phi(e)$  è il sottospazio vettoriale generato dagli  $\Omega_a(X^*, Y^*)$ , al variare di  $X, Y$  in  $\mathfrak{m}$  e di  $a$  in  $\mathbf{G}$ . Infatti i campi  $X^*$ , con  $X \in \mathfrak{m}$ , generano la distribuzione orizzontale su  $\mathbf{G}$ . Per l'invarianza della connessione rispetto alle traslazioni a sinistra su  $\mathbf{G}$ , abbiamo, per (14.13.3),

$$\Omega_a(X^*, Y^*) = \Omega_e(X, Y) = -[X, Y]_{\mathfrak{h}}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

da cui la tesi.  $\square$

#### XIV.14. Connessioni invarianti

Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato principale differenziabile con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ . Ricordiamo che un automorfismo di  $\xi$  è il dato di una coppia di diffeomorfismi  $(f, F)$ , con  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$ ,  $F \in \mathcal{C}^\infty(P, P)$ , tali che

$$(14.14.1) \quad \pi(F(\sigma)) = f(\pi(\sigma)), \quad F(\sigma a) = F(\sigma)a, \quad \forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Fissiamo una connessione principale  $\Gamma$  su  $\xi$ , con forma di Cartan  $\omega$ . Diciamo che un automorfismo  $(f, F)$  di  $\xi$  lascia invariante  $\Gamma$  se  $F^*\omega = \omega$ .

**PROPOSIZIONE XIV.14.1.** *Siano  $\{(f_t, F_t)\}$  un gruppo a un parametro di automorfismi di  $\xi$  che lasci invariante  $\Gamma$  ed  $X^P$  il generatore infinitesimale di  $\{F_t\}$ . Allora*

$$(14.14.2) \quad F_t(\sigma) = \tilde{f}_t(\sigma) \exp(t\omega(X_\sigma^P)), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \sigma \in P,$$

ove, per ogni  $\sigma \in P$ , abbiamo indicato con  $\tilde{f}_t(\sigma)$  il sollevamento orizzontale di  $t \rightarrow f_t(\pi(\sigma))$ , di punto iniziale  $\sigma$ .

**DIMOSTRAZIONE.** È  $F_t(\sigma) = \tilde{f}_t(\sigma)a(t)$  per una  $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbf{G})$ , con  $a(0) = e$ . Derivando questa uguaglianza, troviamo che

$$X_{F_t(\sigma)}^P = R_{a(t)*} \dot{\tilde{f}}_t(\sigma) + \tilde{f}_t(\sigma) \dot{a}(t).$$

Poiché  $\tilde{f}_t(\sigma)$  è orizzontale, applicando la forma di Cartan ad ambo i membri di quest'uguaglianza, otteniamo

$$\omega(X_{F_t(\sigma)}^P) = [a(t)]^{-1} \dot{a}(t),$$



perché  $\omega(\sigma \dot{a}(t)) = [a(t)]^{-1} \dot{a}(t)$  per ogni  $\sigma \in P$ . Poiché  $F_{t*} X^P = X^P$ , ed  $F_t^* \omega = \omega$ , otteniamo

$$\omega(X_{F_t(\sigma)}^P) = \omega(F_{t*} X_\sigma^P) = (F_t^* \omega)(X_\sigma^P) = \omega(X_\sigma^P),$$

e quindi  $a(t) = \exp(t\omega(X_\sigma^P))$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE XIV.14.2.** Il generatore infinitesimale  $X^P \in \mathfrak{X}(P)$  di un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di  $\xi$  è invariante per traslazioni a destra. Soddisfa cioè  $R_{a*} X^P = X^P$ , per ogni  $a \in \mathbf{G}$ .

Consideriamo ora un'azione differenziabile su  $\xi$  di un gruppo di Lie  $\mathbf{K}$ . Indichiamo per semplicità con la moltiplicazione a sinistra sia la sua azione sugli elementi di  $M$  che su quelli di  $P$ . Scriveremo quindi

$$\pi(k\sigma) = k\pi(\sigma), \quad k(\sigma a) = (k\sigma)a, \quad \forall k \in \mathbf{K}, \forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G}.$$

**ESEMPIO XIV.14.3.** Sia  $\mathbf{K}$  un gruppo di Lie,  $\mathbf{K}_0$  un suo sottogruppo chiuso ed  $M = \mathbf{K}/\mathbf{K}_0$  il corrispondente spazio omogeneo. Se  $m = \dim M$ , il fibrato  $\mathbb{L}(M)$  è un fibrato  $\mathbf{GL}_m(\mathbf{R})$ -principale. L'azione di  $\mathbf{K}$  su  $\mathbb{L}(M)$  è la composizione  $k \cdot \sigma = dL_k \circ \sigma$  di  $\sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbb{R}^m, T_{\pi(\sigma)}M)$  con il differenziale  $dL_k$  del diffeomorfismo  $L_k : M \ni p \rightarrow kp \in M$ .

Supporremo nel seguito per semplicità che  $P$ ,  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{K}$  siano tutti connessi.

Fissiamo un punto  $p_0 \in M$ . Lo stabilizzatore

$$(14.14.3) \quad \mathbf{K}_0 = \{k \in \mathbf{K} \mid k \cdot p_0 = p_0\}$$

di  $p_0$  in  $\mathbf{K}$  è un sottogruppo chiuso, e quindi di Lie, di  $\mathbf{K}$ . Siano  $\mathfrak{k}$  l'algebra di Lie di  $\mathbf{K}$  e  $\mathfrak{k}_0$  quella di  $\mathbf{K}_0$ .

Per ogni punto  $\sigma_0$  di  $P_{p_0}$  ed ogni elemento  $k$  di  $\mathbf{K}_0$ , il punto  $k\sigma_0$  appartiene ancora alla fibra  $P_{p_0}$ , e vi sarà quindi un unico elemento  $a \in \mathbf{G}$  per cui  $k\sigma_0 = \sigma_0 a$ . Associamo in questo modo ad ogni  $\sigma_0 \in P_{p_0}$  un'applicazione

$$(14.14.4) \quad \lambda_{\sigma_0} : \mathbf{K}_0 \ni k \longrightarrow \sigma_0^{-1} k \sigma_0 \in \mathbf{G}.$$

**LEMMA XIV.14.4.** La  $\lambda_{\sigma_0}$  definita dalla (14.14.4) è un omomorfismo di gruppi di Lie.

**DIMOSTRAZIONE.** La (14.14.4) si può riscrivere nella forma  $k\sigma_0 = \sigma_0 \lambda_{\sigma_0}(k)$ , per ogni  $k \in \mathbf{K}_0$ . Se  $k_1, k_2 \in \mathbf{K}_0$ , abbiamo

$$\sigma_0 \lambda_{\sigma_0}(k_1 k_2) = (k_1 k_2) \sigma_0 = k_1 (k_2 \cdot \sigma_0) = k_1 \sigma_0 \lambda_{\sigma_0}(k_2) = \sigma_0 \lambda_{\sigma_0}(k_1) \lambda_{\sigma_0}(k_2).$$

Quindi  $\lambda_{\sigma_0}(k_1 k_2) = \lambda_{\sigma_0}(k_1) \cdot \lambda_{\sigma_0}(k_2)$  per ogni  $k_1, k_2 \in \mathbf{K}_{\sigma_0}$ . Per come è definita,  $\lambda_{\sigma_0} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{K}_0, \mathbf{G})$  ed è perciò un omomorfismo di gruppi di Lie.  $\square$

**DEFINIZIONE XIV.14.5.** Ogni elemento  $X$  dell'algebra di Lie  $\mathfrak{k}$  di  $\mathbf{K}$  definisce gruppi a un parametro di diffeomorfismi

$$(14.14.5) \quad P \times \mathbb{R} \ni (\sigma, t) \longrightarrow \exp(tX)\sigma \in P, \quad M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \longrightarrow \exp(tX)p \in M.$$

I loro generatori infinitesimali  $X^P \in \mathfrak{X}(P)$  ed  $X^M \in \mathfrak{X}(M)$ , si dicono i *campi associati* ad  $X$  in  $P$  ed in  $M$ , rispettivamente.

NOTAZIONE XIV.14.6. Analogamente, indichiamo con  $X^{\mathbf{K}}$  il campo di vettori invariante a destra su  $\mathbf{K}$ , generatore infinitesimale del gruppo a un parametro di diffeomorfismi  $\mathbf{K} \times \mathbb{R} \ni (k, t) \rightarrow \exp(tX)k \in \mathbf{K}$ . Ricordiamo che

$$(14.14.6) \quad [X^{\mathbf{K}}, Y^{\mathbf{K}}] = -[X, Y]^{\mathbf{K}}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{f}.$$

LEMMA XIV.14.7. *Le applicazioni*

$$(14.14.7) \quad \mathfrak{f} \ni X \longrightarrow X^P \in \mathfrak{X}(P), \quad e \quad \mathfrak{f} \ni X \longrightarrow X^M \in \mathfrak{X}(M)$$

sono anti-omomorfismi di gruppi di Lie. Abbiamo cioè

$$(14.14.8) \quad [X, Y]^P = -[X^P, Y^P] \quad ed \quad [X, Y]^M = -[X^M, Y^M], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{f}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni  $\sigma_0 \in P$  e  $p_0 \in M$  possiamo considerare le applicazioni differenziabili  $r_{\sigma_0} : \mathbf{K} \ni k \rightarrow k\sigma_0 \in P$  ed  $r_{p_0} : \mathbf{K} \ni k \rightarrow kp_0 \in M$ . Se  $X \in \mathfrak{f}$ , il campo  $X^{\mathbf{K}}$  è  $r_{\sigma_0}$ -correlato ad  $X^P$  ed  $r_{p_0}$ -correlato ad  $X^M$ . La tesi segue allora dalla (14.14.6).  $\square$

Indichiamo con  $\lambda_{\sigma_0*}$  il differenziale nell'identità dell'applicazione  $\lambda_{\sigma_0}$  definita dalla (14.14.4). Per il Lemma XIV.14.4, abbiamo

LEMMA XIV.14.8.  $\lambda_{\sigma_0*} : \mathfrak{f}_0 \rightarrow \mathfrak{g}$  è un omomorfismo di algebre di Lie.  $\square$

Fissiamo su  $\xi$  una connessione principale  $\mathbf{K}$ -invariante, con forma di Cartan  $\omega$  e definiamo

$$(14.14.9) \quad \Lambda_{\sigma_0} : \mathfrak{f} \ni X \longrightarrow \omega(X_{\sigma_0}^P) \in \mathfrak{g}.$$

PROPOSIZIONE XIV.14.9. *L'applicazione (14.14.9) soddisfa*

- (1)  $\Lambda_{\sigma_0}(X) = \lambda_{\sigma_0*}(X), \quad \forall X \in \mathfrak{f}_0,$
- (2)  $\Lambda_{\sigma_0}(\text{Ad}(k_0)(X)) = \text{Ad}(\lambda_{\sigma_0}(k_0))(\Lambda_{\sigma_0}(X)), \quad \forall k_0 \in \mathbf{K}_0, \forall X \in \mathfrak{f}.$

DIMOSTRAZIONE. Se  $X \in \mathfrak{f}_0$ , allora

$$X_{\sigma_0}^P = \left( \frac{d}{dt} \right)_{t=0} [\exp(tX)\sigma_0] = \left( \frac{d}{dt} \right)_{t=0} \sigma_0 \lambda_{\sigma_0}(\exp(tX)) = \left( \frac{d}{dt} \right)_{t=0} \sigma_0 \exp(t\lambda_{\sigma_0*}(X)).$$

Quindi  $X_{\sigma_0}^P = [\lambda_{\sigma_0*}(X)]_{\sigma_0}^*$ , e da questa segue la (1).

Fissiamo  $X \in \mathfrak{f}$ ,  $k_0 \in \mathbf{K}_0$  e sia  $Y = \text{Ad}(k_0)X$ . Abbiamo allora

$$\exp(tY)\sigma_0 = k_0 \exp(tX)k_0^{-1}\sigma_0 = k_0 \exp(tX)\sigma_0 \lambda_{\sigma_0}(k_0^{-1}) = k_0 \mathbf{R}_{\lambda_{\sigma_0}(k_0^{-1})}(\exp(tX)\sigma_0),$$

da cui otteniamo che  $Y_{\sigma_0}^P = k_0* d\mathbf{R}_{\lambda_{\sigma_0}(k_0^{-1})} X_{\sigma_0}^P$ . Poiché  $\omega$  è per ipotesi  $\mathbf{K}$ -invariante, applicando  $\omega$  ad ambo i membri di questa uguaglianza, ricaviamo la (2). Infatti

$$\begin{aligned} \Lambda_{\sigma_0}(Y) &= \omega(Y_{\sigma_0}^P) = \omega(k_0* d\mathbf{R}_{\lambda_{\sigma_0}(k_0^{-1})} X_{\sigma_0}^P) = \omega(d\mathbf{R}_{\lambda_{\sigma_0}(k_0^{-1})} X_{\sigma_0}^P) = \text{Ad}(\lambda_{\sigma_0}(k_0))\omega(X_{\sigma_0}^P) \\ &= \text{Ad}(\lambda_{\sigma_0}(k_0))(\Lambda_{\sigma_0}(X)). \end{aligned}$$

Ciò completa la dimostrazione.  $\square$

OSSERVAZIONE XIV.14.10. Per la Proposizione XIV.14.1, abbiamo la decomposizione

$$X_{\sigma}^P = \tilde{X}_{\sigma}^M + [\omega(X_{\sigma}^P)]_{\sigma}^*, \quad \forall X \in \mathfrak{f}.$$

In particolare, poiché i campi  $X^P$  ed  $\tilde{X}^M$  sono  $\mathbf{G}$ -invarianti, anche  $[\omega(X_{\sigma}^P)]_{\sigma}^*$  lo è.

OSSERVAZIONE XIV.14.11. L'estensione  $\Lambda_{\sigma_0}$  di  $\lambda_{\sigma_0^*}$  non è, in generale, un omomorfismo di algebre di Lie, come ci mostreranno la Proposizione XIV.14.12 ed il successivo Corollario XIV.14.13.

PROPOSIZIONE XIV.14.12. *La forma di curvatura  $\Omega$  di una connessione  $\mathbf{K}$ -invariante su  $\xi$  soddisfa*

$$(14.14.10) \quad \Omega_{\sigma_0}(X^P, Y^P) = [\Lambda_{\sigma_0}(X), \Lambda_{\sigma_0}(Y)] - \Lambda_{\sigma_0}([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k},$$

e quindi abbiamo

$$(14.14.11) \quad R_{p_0}(X^M, Y^M) = \sigma_0([\Lambda_{\sigma_0}(X), \Lambda_{\sigma_0}(Y)] - \Lambda_{\sigma_0}([X, Y]))\sigma_0^{-1} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano  $X, Y \in \mathfrak{k}$ . Per le equazioni di struttura abbiamo

$$\Omega_{\sigma_0}(X^P, Y^P) = X_{\sigma_0}^P \omega(Y^P) - Y_{\sigma_0}^P \omega(X^P) - \omega_{\sigma_0}([X^P, Y^P]) + [\omega(X^P), \omega(Y^P)]_{\sigma_0}.$$

Le derivata di Lie di  $\omega$  rispetto ad  $X^P, Y^P$  sono nulle, perché  $\omega$  è  $\mathbf{K}$ -invariante.

Quindi

$$X_{\sigma_0}^P \omega(Y^P) = \omega_{\sigma_0}([X^P, Y^P]), \quad Y_{\sigma_0}^P \omega(X^P) = \omega_{\sigma_0}([Y^P, X^P]).$$

Inoltre, poiché  $[X^P, Y^P] = -[X, Y]^P$ ,

$$\omega_{\sigma_0}([X^P, Y^P]) = -\omega_{\sigma_0}([X, Y]^P) = -\Lambda_{\sigma_0}([X, Y]).$$

Da queste osservazioni otteniamo la tesi.  $\square$

COROLLARIO XIV.14.13. *La connessione  $\mathbf{K}$ -invariante definita da  $\Lambda_{\sigma_0}$  è piatta se e soltanto se  $\Lambda_{\sigma_0} : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{g}$  è un omomorfismo di algebre di Lie.*

Il teorema seguente<sup>9</sup> caratterizza le connessioni  $\mathbf{K}$ -invarianti:

TEOREMA XIV.14.14 (Wang). *Sia  $\mathbf{K}$  un gruppo di Lie connesso di trasformazioni  $\mathcal{C}^\infty$  del fibrato principale differenziabile  $\xi$ , che operi transitivamente sulla base  $M$ . Fissato un elemento  $\sigma_0 \in P$ , la (14.14.9) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle connessioni  $\mathbf{K}$ -invarianti su  $\xi$  e quello delle applicazioni lineari  $\Lambda_{\sigma_0} : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{g}$  che soddisfino le condizioni (1) e (2) della Proposizione XIV.14.9.*

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che ad ogni applicazione lineare  $\Lambda_{\sigma_0} : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{g}$  che soddisfi le (1) e (2) della Proposizione XIV.14.9 si può far corrispondere una connessione principale  $\Gamma$  su  $\xi$  per cui valga la (14.14.9). Definiamo

$$H_{\sigma_0} = \{X_{\sigma_0}^P - \Lambda_{\sigma_0}(X)_{\sigma_0}^* \mid X \in \mathfrak{k}\}.$$

L'azione  $(\mathbf{K} \times \mathbf{G}) \times P \ni (k, a, \sigma) \rightarrow k\sigma a \in P$  di  $\mathbf{K} \times \mathbf{G}$  su  $P$  è transitiva e lascia invariante la distribuzione orizzontale di una  $\mathbf{G}$ -connessione principale  $\mathbf{K}$ -invariante su  $\xi$ . Basterà quindi verificare che si può definire la distribuzione orizzontale ponendo  $H_{k\sigma_0 a} = k_* \mathbf{R}_{a^*} H_{\sigma_0}$ , che cioè, se  $k_1, k_2 \in \mathbf{K}$  ed  $a_1, a_2 \in \mathbf{G}$  sono tali che  $k_1 \sigma_0 a_1 = k_2 \sigma_0 a_2$ , allora  $k_{1*} \mathbf{R}_{a_1^*} H_{\sigma_0} P = k_{2*} \mathbf{R}_{a_2^*} H_{\sigma_0} P$ .

Posto  $a = a_1 a_2^{-1}$  e  $k = k_2^{-1} k_1$ , ciò è equivalente a dimostrare che

$$k_* \mathbf{R}_{a^*} H_{\sigma_0} = H_{\sigma_0} \quad \text{se} \quad k\sigma_0 a = \sigma_0.$$

<sup>9</sup>H.C. Wang: *On invariant connections over a principal fiber bundle*. Nagoya Math.J. 13 (1958), 1-19.

Da  $k\sigma_0 a = \sigma_0$  segue che  $k \in \mathbf{K}_0$  ed  $a = \lambda_{\sigma_0}(k^{-1})$ . Mostriamo che

$$k_* \mathbf{R}_{a_*} (X_{\sigma_0}^P - \Lambda_{\sigma_0}(X)_{\sigma_0}^*) \in H_{\sigma_0}, \quad \text{se } X \in \mathfrak{k}, k \in \mathbf{K}_0, a = \lambda_{\sigma_0}(k^{-1}).$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} k_* \mathbf{R}_{a_*} (X_{\sigma_0}^P) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} k \exp(tX) \sigma_0 a = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t \text{Ad}(k)X) (k\sigma_0 a) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t \text{Ad}(k)X) \sigma_0 = [\text{Ad}(k)X]_{\sigma_0}^P. \end{aligned}$$

Per ogni  $A \in \mathfrak{g}$ , abbiamo

$$\begin{aligned} k_* \mathbf{R}_{a_*} A_{\sigma_0}^* &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} k \sigma_0 \exp(tA) a = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (k\sigma_0 a) a^{-1} \exp(tA) a \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma_0 \exp(t \text{Ad}(a^{-1}A)) = [\text{Ad}(a^{-1}A)]_{\sigma_0}^*. \end{aligned}$$

Per la (2), se  $A = \Lambda_{\sigma_0}(X)$ , è

$$\text{Ad}(a^{-1})A = \text{Ad}(\lambda_{\sigma_0}(k))\Lambda_{\sigma_0}(X) = \Lambda_{\sigma_0}(\text{Ad}(k)X).$$

Otteniamo perciò

$$k_* \mathbf{R}_{a_*} (X_{\sigma_0}^P - \Lambda_{\sigma_0}(X)_{\sigma_0}^*) = [\text{Ad}(k)X]_{\sigma_0}^P - [\Lambda_{\sigma_0}(\text{Ad}(k)X)]_{\sigma_0}^* \in H_{\sigma_0}.$$

Quindi  $k_* \mathbf{R}_{a_*} (H_{\sigma_0}) \subset H_{\sigma_0}$  e, poiché questi due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione, si ha l'uguaglianza. La dimostrazione è completa.  $\square$

Ricaviamo ancora

**TEOREMA XIV.14.15.** *Supponiamo inoltre che l'azione di  $\mathbf{K}$  su  $M$  sia riduttiva, e sia  $\mathfrak{m}$  un sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{k}$  con*

$$(14.14.12) \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{m},$$

$$(14.14.13) \quad \text{Ad}(k)(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}, \quad \forall k \in \mathbf{K}_0.$$

*Vi è allora una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle connessioni  $\mathbf{K}$ -invarianti su  $\xi$  e quello delle applicazioni lineari*

$$(14.14.14) \quad \lambda_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

*tali che*

$$(14.14.15) \quad \lambda_{\mathfrak{m}}(\text{Ad}(k)(X)) = \text{Ad}(\lambda(k))(\lambda_{\mathfrak{m}}(X)), \quad \forall X \in \mathfrak{m}, \forall k \in \mathbf{K}_0.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Ci riduciamo infatti al teorema precedente associando a  $\lambda_{\mathfrak{m}}$  l'applicazione lineare  $\Lambda_{\sigma_0} : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{g}$  definita da:

$$\lambda_{\sigma_0}(X) = \begin{cases} X, & \text{se } X \in \mathfrak{k}_0, \\ \lambda_{\mathfrak{m}}(X), & \text{se } X \in \mathfrak{m}. \end{cases} \quad \square$$

**OSSERVAZIONE XIV.14.16.** La curvatura della connessione  $\Gamma$  associata a  $\lambda_{\mathfrak{m}}$  è

$$(14.14.16) \quad \Omega_{\sigma_0}(X^P, Y^P) = [\lambda_{\mathfrak{m}}(X), \lambda_{\mathfrak{m}}(Y)] - \lambda_{\mathfrak{m}}([X, Y]_{\mathfrak{m}}) - \lambda_{\sigma_0*}([X, Y]_{\mathfrak{k}_0}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

DEFINIZIONE XIV.14.17. La connessione  $\Gamma$  corrispondente alla scelta  $\lambda_m = 0$  si dice la *connessione canonica* su  $\xi$  associata allo spazio omogeneo riduttivo  $M = \mathbf{K}/\mathbf{K}_0$ . La forma di curvatura della connessione canonica è

$$\Omega(X^P, Y^P) = -\lambda_{\sigma_0*}([X, Y]_{\mathfrak{k}_0}), \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{m}.$$

Fissiamo una connessione  $\mathbf{K}$ -invariante su  $\xi$ , con forma di Cartan  $\omega$  e sia  $\Lambda_{\sigma_0}$  l'applicazione lineare (14.14.9). Definiamo per ricorrenza

$$(14.14.17) \quad \begin{cases} \mathfrak{n}_0 = \langle \{[\Lambda_{\sigma_0}(X), \Lambda_{\sigma_0}(Y)] - \Lambda_{\sigma_0}([X, Y]) \mid X, Y \in \mathfrak{k}\} \rangle, \\ \mathfrak{n}_{p+1} = \mathfrak{n}_p + [\Lambda_{\sigma_0}(\mathfrak{k}), \mathfrak{n}_p], \quad \text{per } p \geq 0, \\ \mathfrak{n} = \bigcup_{p \geq 0} \mathfrak{n}_p. \end{cases}$$

TEOREMA XIV.14.18. *Se l'azione di  $\mathbf{K}$  su  $M$  è transitiva, allora  $\mathfrak{n}$  è l'algebra di Lie dell'olonomia  $\Phi(\sigma_0)$ .*  $\square$

DIMOSTRAZIONE. Se  $f \in \mathcal{G} = \Omega_{\text{Ad},0}^0(P, \mathfrak{g})$  ed  $X \in \mathfrak{k}$ , abbiamo

$$(14.14.18) \quad X^P f = \tilde{X}^M f - [\omega(X^P), f].$$

Vale poi

$$(14.14.19) \quad [X^P, \tilde{Y}] = \tilde{Z}, \quad \text{con } Z = [X^M, Y], \quad \forall X \in \mathfrak{k}, \forall Y \in \mathfrak{k}(M).$$

Infatti  $[X^P, \tilde{Y}]$  è un campo di vettori orizzontale, perché  $\mathcal{H}(P)$  è  $\mathbf{K}$ -invariante, ed i campi  $X^P$  ed  $\tilde{Y}$  sono  $\pi$ -correlati ad  $X^M, Y$ , rispettivamente. Quindi  $[X^P, \tilde{Y}]$  è il campo di vettori orizzontale  $\pi$ -correlato a  $Z = [X^M, Y]$ .

Consideriamo gli spazi  $\mathcal{H}_p$  definiti dalla (14.12.4). Dico che

$$(14.14.20) \quad X^P \mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}_p, \quad \forall X \in \mathfrak{k}, \forall p \geq 0.$$

Ragioniamo per ricorrenza su  $p$ . Poiché  $\Omega$  è  $\mathbf{K}$ -invariante, la sua derivata di Lie rispetto ad  $X^P$ , per  $X \in \mathfrak{k}$ , è nulla e quindi, se  $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{k}(M)$ , la (14.14.19) ci dà

$$X^P \Omega(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) = \Omega(\tilde{Z}_1, \tilde{Y}_2) + \Omega(\tilde{Y}_1, \tilde{Z}_2), \quad \text{con } Z_1 = [X^M, Y_1], Z_2 = [X^M, Y_2].$$

Quindi  $X^P \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$ . Supponiamo ora che, per un  $p \geq 0$ , sia  $X^P \mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}_p$ . Allora, per ogni  $f \in \mathcal{H}_p$  ed  $Y \in \mathfrak{k}(M)$ , posto  $Z = [X^M, Y]$ , abbiamo

$$X^P \tilde{Y} f = \tilde{Z} f + \tilde{Y} X^P f \in \mathcal{H}_{p+1}.$$

Ciò dimostra che  $X^P \mathcal{H}_{p+1} \subset \mathcal{H}_{p+1}$  e perciò la (14.14.20) vale per ogni intero  $p \geq 0$ . Poiché per ipotesi  $\mathbf{K}$  opera transitivamente su  $M$ , i campi  $\tilde{X}^M$ , al variare di  $X$  in  $\mathfrak{k}$ , generano  $\mathfrak{k}(M)$  come  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo. Utilizzando la (14.14.18), otteniamo allora

$$(14.14.21) \quad \tilde{X}^M \mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}_p + [\omega(X^P), \mathcal{H}_p], \quad \mathcal{H}_{p+1} \subset \mathcal{H}_p + \langle [\omega(X^P), \mathcal{H}_p] \mid X \in \mathfrak{k} \rangle.$$

Con le  $\mathfrak{m}_p(\sigma_0)$  definite da (14.12.5), poiché  $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{m}_0(\sigma_0)$ , da queste inclusioni ricaviamo

$$(14.14.22) \quad \mathfrak{m}_p(\sigma_0) = \mathfrak{n}_p, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

La tesi è allora conseguenza della Proposizione XIV.12.5.  $\square$



## **Parte 4**

# **Varietà affini e Riemanniane**





## Varietà differenziabili affini e Riemanniane

### XV.1. Connessioni lineari

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$ .

DEFINIZIONE XV.1.1. Chiamiamo *connessione lineare*<sup>1</sup> su  $M$  una connessione  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ -principale sul fibrato  $\mathbb{L}(M) = (\mathbb{L}(M) \xrightarrow{\pi} M)$  dei suoi sistemi di riferimento e *varietà differenziabile affine* una varietà differenziabile  $M$  su cui sia fissata una connessione lineare.

Sia  $\mathbf{G}$  un sottogruppo chiuso del gruppo lineare  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ .

DEFINIZIONE XV.1.2. Una connessione  $\mathbf{G}$ -lineare su  $M$  è una  $\mathbf{G}$ -riduzione di una connessione lineare su  $M$  ad un sottofibrato  $\xi$  di  $\mathbb{L}(M)$ .

Una *varietà differenziabile  $\mathbf{G}$ -affine* è una varietà differenziabile  $M$  su cui sia fissata una connessione  $\mathbf{G}$ -lineare.

Ad esempio, se  $M$  è connessa, possiamo considerare il sottofibrato di olonomia  $\xi$  determinato da un riferimento  $\sigma_0$  in  $\mathbb{L}(M)$  (vedi §XIII.9). Viceversa, per la Proposizione XIII.2.4, ogni connessione principale definita su un sottofibrato  $\xi$  di  $\mathbb{L}(M)$ , si estende a una connessione lineare su  $M$ .

Fissiamo un sottofibrato principale  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  di  $\mathbb{L}(M)$ , il cui gruppo strutturale  $\mathbf{G}$  sia un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ , con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ .

Sia  $\theta \in \Omega_{t,0}^1(P, \mathbb{R}^m)$  la *forma canonica su  $P$* , definita da

$$(15.1.1) \quad \theta(X_\sigma) = \sigma^{-1}(d\pi(X_\sigma)), \quad \forall \sigma \in P, \quad \forall X_\sigma \in T_\sigma P.$$

Fissiamo su  $\xi$  connessione  $\mathbf{G}$ -principale  $\Gamma$ , con forma di Cartan  $\omega$ .

#### Campi orizzontali standard.

PROPOSIZIONE XV.1.3. *Per ogni  $v \in \mathbb{R}^m$  vi è un unico campo di vettori  $v^* \in \mathfrak{X}(P)$  tale che*

$$(15.1.2) \quad \theta(v^*) \equiv v, \quad \omega(v^*) \equiv 0 \quad \text{su } P.$$

<sup>1</sup>In letteratura le connessioni qui definite sono a volte chiamate *affini*. Seguendo qui S.Kobayashi, K.Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, I*, John Wiley & Sons, New York, 1963, riserveremo il nome di *affini* alle connessioni principali rispetto a sottogruppi del gruppo delle affinità di  $TM$ .

Le connessioni lineari furono introdotte in T. Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana*, Rend. Cir. Mat. Palermo, 42 (1917) pp. 173-205 nel contesto della geometria Riemanniana e generalizzate in H.Weyl, *Reine Infinitesimalgeometrie*, Math.Z. 2 (1918), pp.384-411.

DIMOSTRAZIONE. La restrizione di  $\theta$  ai vettori orizzontali definisce, per ogni  $\sigma \in P$ , un isomorfismo lineare  $\bar{\theta}_\sigma : H_\sigma P \ni X_\sigma \rightarrow \theta(X_p) \in \mathbb{R}^m$ . Se  $v \in \mathbb{R}^m$ , porremo  $v_\sigma^* = \bar{\theta}_\sigma^{-1}v$ .  $\square$

DEFINIZIONE XV.1.4. Il campo di vettori  $v^*$  caratterizzato dalle (15.1.2) si dice il *campo orizzontale standard* associato a  $v \in \mathbb{R}^m$ .

OSSERVAZIONE XV.1.5. I campi orizzontali standard non sono, in generale, sollevamenti orizzontali di campi di vettori su  $M$ .

PROPOSIZIONE XV.1.6. *I campi orizzontali standard godono delle proprietà:*

- (a)  $H_\sigma P = \{v_\sigma^* \mid v \in \mathbb{R}^m\}$ ,
- (b)  $dR_a(v^*) = (a^{-1}v)^*$ ,  $\forall v \in \mathbb{R}^m, \forall a \in \mathbf{G}$ .
- (c)  $v \neq 0 \implies v_\sigma^* \neq 0, \forall \sigma \in P$ .

DIMOSTRAZIONE. Le (a) e (c) sono conseguenze immediate della definizione. Verifichiamo la (b). Se  $a \in \mathbf{G}$ , abbiamo

$$\theta(dR_a(v^*)) = (R_a^*\theta)(v^*) = a^{-1}\theta(v^*) = a^{-1}v, \quad \omega(dR_a(v^*)) = 0,$$

perché  $\theta$  è una 1-forma tensoriale di tipo  $(1, \mathbb{R}^m)$  ed  $dR_a$  trasforma vettori orizzontali in vettori orizzontali. Questo dimostra la (b).  $\square$

COROLLARIO XV.1.7. *Se  $A \in \mathfrak{g}$  e  $v \in \mathbb{R}^m$ , allora*

$$(15.1.3) \quad [A^*, v^*] = (Av)^*.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché gli elementi di  $\mathbf{G}$  trasformano vettori orizzontali in vettori orizzontali, la derivata di Lie  $L_{A^*}v^* = [A^*, v^*]$  di un campo orizzontale standard  $v^*$  rispetto ad un campo fondamentale  $A^*$  (con  $v \in \mathbb{R}^m, A \in \mathfrak{g}$ ) è ancora un campo orizzontale. Abbiamo poi

$$\theta([A^*, v^*]) = A^*\theta(v^*) - (L_{A^*}\theta)(v^*) = A\theta(v^*) = Av,$$

perché  $L_{A^*}\theta$  è la derivata, per  $t = 0$ , di  $R_{\exp(tA)}^*\theta = \exp(-tA) \circ \theta$ . Quindi  $[A^*, v^*]$  è il campo orizzontale standard corrispondente al vettore  $Av \in \mathbb{R}^m$ .  $\square$

ESEMPIO XV.1.8. Il fibrato  $L(\mathbb{R})$  dei sistemi di riferimento su  $\mathbb{R}$  ha spazio totale  $L(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ . La forma di Cartan di una connessione lineare su  $\mathbb{R}$  ha la forma  $\omega(t, s) = s^{-1}ds + \phi(t)dt$ , con  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , e la distribuzione orizzontale è generata dal campo di vettori  $X = \frac{\partial}{\partial t} - s\phi(t)\frac{\partial}{\partial s}$ . Se  $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  è una primitiva di  $\phi$ , allora l'applicazione  $f : L(\mathbb{R}) \ni (t, s) \rightarrow (t, s \exp(\Phi(t))) \in L(\mathbb{R})$  è un'equivalenza di fibrati principali con  $\omega = f^*(s^{-1}ds)$ . Quindi, a meno di *equivalenza*, l'unica connessione lineare su  $\mathbb{R}$  è la connessione banale.

Un diffeomorfismo  $\phi : M \rightarrow M$  definisce il diffeomorfismo  $\hat{\phi} : L(M) \rightarrow L(M)$  che associa a  $\sigma : \mathbb{R}^m \rightarrow TM$  il riferimento  $\hat{\phi}(\sigma) = d\phi \circ \sigma$ .

Sia  $M$  affine, con forma di Cartan  $\omega \in \mathcal{Q}^1(L(M), \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$ .

DEFINIZIONE XV.1.9. Un *automorfismo affine* di  $M$  è un diffeomorfismo  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$  tale che  $\hat{\phi}^*\omega = \omega$ .

**ESEMPIO XV.1.10.** Identifichiamo  $T\mathbb{R}^m$  col prodotto cartesiano  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ . Allora  $L(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m \times \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$  e  $TL(\mathbb{R}^m)$  il fibrato banale con fibra  $\mathbb{R}^m \times \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ ; la forma di Cartan della connessione lineare canonica su  $\mathbb{R}^m$  è la forma di Maurer-Cartan  $\omega = a^{-1}da$  sul secondo fattore. Se  $\phi$  è un diffeomorfismo di  $\mathbb{R}^m$ , allora  $\hat{\phi}(x, a) = (\phi(x), d\phi \circ a)$ . Scriviamo  $a = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq m}$  e  $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^m)$ . Allora  $d\phi \circ a = (\frac{\partial \phi^i}{\partial x^h} a_j^h)$  (indici uguali in alto e in basso si intendono sommati). È quindi  $d(\hat{\phi})(x, a) = (\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x^k \partial x^h} a_j^h dx^k + \frac{\partial \phi^i}{\partial x^h} da_j^h)$ . Otteniamo perciò

$$\hat{\phi}^* \omega = (d\phi \circ a)^{-1} \left( \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x^k \partial x^h} a_j^h dx^k \right) + a^{-1} da$$

e quindi la condizione necessaria e sufficiente affinché  $\phi$  sia una trasformazione affine è che  $\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x^k \partial x^h} = 0$  per ogni  $1 \leq i, j \leq m$ , cioè che  $\phi$  sia della forma  $\phi(x) = ax + x_0$ , con  $a \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$  ed  $x_0 \in \mathbb{R}^m$ . Nel per lo lo spazio affine  $\mathbb{R}^m$  le trasformazioni affini nel senso della geometria differenziale coincidono con le trasformazioni affini della geometria elementare.

## XV.2. Forme di torsione e di curvatura

Fissiamo su  $M$  una connessione  $\mathbf{G}$ -lineare  $\Gamma$ , con forma di Cartan  $\omega$ , definita sullo spazio totale  $P$  di un sottofibrato  $\mathbf{G}$ -principale  $\xi$  di  $\mathbb{L}(M)$ .

**DEFINIZIONE XV.2.1.** La *forma di torsione*  $\Theta$  di  $\Gamma$  è il differenziale esterno covariante<sup>2</sup> della forma canonica  $\theta$ :

$$(15.2.1) \quad \Theta = D\theta = d\theta \circ \mathfrak{h} \in \mathcal{Q}_{i,0}^2(P, \mathbb{R}^m).$$

La *forma di curvatura*  $\Omega$  di  $\Gamma$  è il differenziale esterno covariante della sua forma di Cartan  $\omega$ :

$$(15.2.2) \quad \Omega = D\omega = d\omega \circ \mathfrak{h} \in \mathcal{Q}_{\text{Ad},0}^2(P, \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})).$$

**TEOREMA XV.2.2** (equazioni di struttura). *Le forme di curvatura e di torsione di una connessione  $\mathbf{G}$ -lineare  $\Gamma$  su  $M$  soddisfano le EQUAZIONI DI STRUTTURA*

$$(15.2.3) \quad \Theta = D\theta = d\theta + \omega \wedge \theta,$$

$$(15.2.4) \quad \Omega = D\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega].$$

**DIMOSTRAZIONE.** La (15.2.3) è conseguenza del Lemma XIV.1.5, perché  $\theta$  è una forma tensoriale di tipo  $(t, \mathbb{R}^m)$ . La (15.2.4) è un caso particolare dell'equazione di struttura del Teorema XIV.4.2.  $\square$

Dal Lemma XIV.1.5, dal Teorema XIV.4.4 e dalle equazioni di struttura (15.2.3), (15.2.4), otteniamo:

**TEOREMA XV.2.3** (Identità differenziali di Bianchi). *Le forme di torsione e di curvatura soddisfano le identità :*

$$(I) \quad D\Theta = \Omega \wedge \theta$$

$$(II) \quad D\Omega = 0$$

<sup>2</sup>Indichiamo con  $(t, \mathbb{R}^m)$  la rappresentazione canonica di  $\mathbf{G} < \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$  su  $\mathbb{R}^m$ .

DIMOSTRAZIONE. La (II) è un caso particolare della formula (14.4.4) del Teorema XIV.4.4. Dimostriamo la (I). Poiché  $\Theta$  è tensoriale di tipo  $(\iota, \mathbb{R}^m)$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} D\Theta &= d\Theta + \omega \wedge \Theta = d(d\theta + \omega \wedge \theta) + \omega \wedge (d\theta + \omega \wedge \theta) \\ &= d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\theta + \omega \wedge d\theta + \omega \wedge \omega \wedge \theta = (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge \theta \\ &= \left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]\right) \wedge \theta = \Omega \wedge \theta. \end{aligned}$$

□

La prima identità differenziale di Bianchi è un caso particolare della

PROPOSIZIONE XV.2.4. *Se  $\alpha \in \mathcal{Q}_{\iota,0}^q(P, \mathbb{R}^m)$ , allora*

$$(15.2.5) \quad D^2\alpha = \Omega \wedge \alpha.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} D^2\alpha &= d^\nabla(d\alpha + \omega \wedge \alpha) = d(d\alpha + \omega \wedge \alpha) + \omega \wedge (d\alpha + \omega \wedge \alpha) \\ &= (d\omega) \wedge \alpha - \omega \wedge d\alpha + \omega \wedge d\alpha + \omega \wedge \omega \wedge \alpha = (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge \alpha = \Omega \wedge \alpha \end{aligned}$$

per le equazioni di struttura, in quanto  $\omega \wedge \omega = \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]$ . □

Questa relazione dà un'altra interpretazione della curvatura, come l'ostruzione al fatto che il differenziale esterno covariante sulle forme tensoriali definisca un complesso.

### XV.3. Derivazione covariante, torsione e curvatura

I campi tensoriali su  $M$  sono sezioni dei fibrati vettoriali associati al fibrato  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ -principale  $\mathbb{L}(M)$  mediante le rappresentazioni tensoriali di  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ . In particolare, una connessione lineare ci permette di calcolare le derivate covarianti dei campi di tensori su  $M$ . Per le proprietà generali della differenziazione covariante ed il Teorema XIV.10.3 abbiamo:

TEOREMA XV.3.1. *Ad una connessione lineare su  $M$  è associata una derivazione covariante*

$$(15.3.1) \quad \nabla : \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow \nabla_X \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M)).$$

La  $\nabla$  è un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare che gode delle proprietà:

- (i)  $\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y, \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$
- (ii)  $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$

Viceversa, ogni applicazione (15.3.1) che goda delle proprietà (i), (ii) è la derivazione covariante associata ad una connessione lineare su  $M$ . □

Per la (14.2.2) possiamo calcolare la derivata covariante di un campo di vettori utilizzando i sollevamenti orizzontali. È infatti

$$(15.3.2) \quad \theta(\widetilde{\nabla_X Y}) = \tilde{X}\theta(\tilde{Y}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

cioè  $\nabla_{X_p} Y = \sigma(\tilde{X}_\sigma \theta(\tilde{Y}))$ , se  $\pi(\sigma) = p$ .

Le  $\Theta \in \mathcal{Q}_{i,0}^2(P, \mathbb{R}^m)$  ed  $\Omega \in \mathcal{Q}_{\text{Ad},0}^2(P, \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$  sono forme tensoriali. Ad esse corrispondono i tensori  $T \in \mathcal{Q}^2(M, TM)$  ed  ${}^3R \in \mathcal{Q}^2(M, T^{1,1}M)$  su  $M$ , mediante gli isomorfismi

$$\Lambda_i : \mathcal{Q}^2(M, TM) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Q}_{i,0}^2(P, \mathbb{R}^m) \quad \text{e} \quad \Lambda_{\text{Ad}} : \mathcal{Q}^2(M, \mathcal{E}nd(TM)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Q}_{i,0}^2(P, \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})).$$

DEFINIZIONE XV.3.2. I tensori di torsione  $T \in \mathcal{Q}^2(M, TM)$  e di curvatura  $R \in \mathcal{Q}^2(M, \mathcal{E}nd(TM))$  di una connessione lineare  $\Gamma$  sono le forme per cui

$$(15.3.3) \quad \Lambda_i(T) = \Theta,$$

$$(15.3.4) \quad \Lambda_{\text{Ad}}(R) = \Omega.$$

Abbiamo cioè

$$T(X_{\pi(\sigma)}, Y_{\pi(\sigma)}) = \sigma \circ \Theta(\tilde{X}_\sigma, \tilde{Y}_\sigma), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}, \forall \sigma \in P,$$

$$R(X_{\pi(\sigma)}, Y_{\pi(\sigma)}) = \sigma \circ \Omega(\tilde{X}_\sigma, \tilde{Y}_\sigma) \circ \sigma^{-1}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}, \forall \sigma \in P$$

TEOREMA XV.3.3. La torsione e la curvatura di una connessione lineare  $\Gamma$  su  $M$  si esprimono, per mezzo della derivazione covariante, nella forma:

$$(15.3.5) \quad T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

$$(15.3.6) \quad R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. La (15.3.6) segue dal Corollario XIV.8.4.

Dimostriamo la (15.3.5). Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , otteniamo, per le equazioni di struttura,

$$\Theta(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (d\theta + \omega \wedge \theta)(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d\theta(\tilde{X}, \tilde{Y}),$$

perché  $\omega \wedge \theta$  si annulla su una coppia di campi di vettori orizzontali,

$$\begin{aligned} &= \tilde{X}\theta(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\theta(\tilde{X}) - \theta([\tilde{X}, \tilde{Y}]) \\ &= \tilde{X}\theta(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\theta(\tilde{X}) - \theta([\tilde{X}, \tilde{Y}]) \end{aligned}$$

perché  $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$  ed  $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$  differiscono per un campo di vettori verticale,

$$= \theta(\widetilde{\nabla_X Y} - \widetilde{\nabla_Y X} - [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]),$$

e la tesi segue dalla (15.3.2).  $\square$

I fibrati  $T^{r,s}M$  dei tensori  $r$ -covarianti ed  $s$ -controvarianti su  $M$  sono associati alle rappresentazioni tensoriali di  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ . La derivazione covariante è quindi definita sull'algebra dei campi di tensori

$$(15.3.7) \quad \mathfrak{T}^*(M) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{T}^{r,s}(M), \quad \text{ove} \quad \mathfrak{T}^{r,s}(M) = \Gamma(M, T^{r,s}M).$$

<sup>3</sup> $T^{1,1}M = TM \otimes_M T^*M = \mathcal{E}nd(TM)$  è il fibrato degli endomorfismi lineari di  $TM$ .

DEFINIZIONE XV.3.4. Siano  $i, j$  due interi positivi. La *contrazione*  $C_i^j$  è l'applicazione  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare  $C_i^j : \mathfrak{T}^{r,s}(M) \rightarrow \mathfrak{T}^{r-1,s-1}(M)$  che è nulla se  $i > r$  oppure  $j > s$ , e, altrimenti, è data, sui tensori di rango 1, da

$$C_i^j(X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \eta^1 \otimes \cdots \otimes \eta^s) = \eta^j(X_i) X_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{X_i} \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \eta^1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\eta^j} \otimes \cdots \otimes \eta^s.$$

TEOREMA XV.3.5. *La derivazione covariante è una derivazione dell'algebra dei campi tensoriali che preserva i gradi di covarianza e controvarianza e commuta con le contrazioni.*  $\square$

Recapitoliamo le proprietà della derivazione covariante dei campi tensoriali. Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\tau \in \mathfrak{T}^*(M)$ ,  $f \in \mathcal{C}^\infty(M) = \mathfrak{T}^{0,0}(M)$ ,  $i, j, r, s \in \mathbb{N}$ :

$$(15.3.8) \quad \nabla_X : \mathfrak{T}^{r,s}(M) \longrightarrow \mathfrak{T}^{r,s}(M) \text{ è } \mathbb{R}\text{-lineare,}$$

$$(15.3.9) \quad C_j^i(\nabla_X \tau) = \nabla_X C_j^i \tau,$$

$$(15.3.10) \quad \nabla_X f = Xf,$$

$$(15.3.11) \quad \nabla_{X+Y} \tau = \nabla_X \tau + \nabla_Y \tau,$$

$$(15.3.12) \quad \nabla_{fX} \tau = f \nabla_X \tau.$$

Ad esempio, se  $\eta \in \mathfrak{X}^*(M) = \mathfrak{T}^{0,1}(M)$ , la derivata covariante  $\nabla_X \eta$  è caratterizzata da

$$(\nabla_X \eta)(Y) = X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X Y), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

DEFINIZIONE XV.3.6. Definiremo *differenziale covariante* di un tensore  $t \in \mathfrak{T}^{r,s}(M)$ , ed indicheremo con  $\nabla t$ , il tensore  $\{X \rightarrow \nabla_X t\} \in \mathfrak{T}^{r,s+1}(M)$ .

Un tensore  $\tau \in \mathfrak{T}^{r,s}(M)$  si dice *parallelo* se  $\nabla \tau = 0$  su  $M$ .

Possiamo applicare la derivazione covariante alle forme differenziali associate ad una rappresentazione tensoriale di  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ . Se  $\alpha \in \mathcal{Q}^q(M, T^{r,s}M)$ , indichiamo con  $\tilde{\alpha}$  la corrispondente forma  $\sigma^{-1} \pi^* \alpha \in \mathcal{Q}_{p,0}(P, T^{r,s}\mathbb{R}^m)$ . Se  $X, X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\sigma \in P$ , allora

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(\nabla_X \alpha)(X_1, \dots, X_q) &= \sigma^{-1}(\nabla_X[\alpha(X_1, \dots, X_q)] - \sum \alpha(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_q)) \\ &= \tilde{X}[\tilde{\alpha}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q)] - \sum \tilde{\alpha}(\tilde{X}_1, \dots, \widetilde{\nabla_X X_i}, \dots, \tilde{X}_q) \\ &= \tilde{X}[\tilde{\alpha}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q)] - \sum \tilde{\alpha}(\tilde{X}_1, \dots, \bar{\theta}^{-1}(\tilde{X}\theta(\tilde{X}_i)), \dots, \tilde{X}_q), \end{aligned}$$

perché  $\widetilde{\nabla_X X_i} = \bar{\theta}^{-1}(\tilde{X}\theta(\tilde{X}_i))$ . L'ultima espressione è tensoriale rispetto ai campi di vettori orizzontali. Possiamo quindi calcolarla in ogni punto utilizzando, invece dei rialzamenti orizzontali dei campi di vettori su  $M$ , i campi orizzontali standard. Su di essi  $\theta$  è costante, ed otteniamo quindi una formula più semplice per il calcolo della derivata covariante.

LEMMA XV.3.7. *Siano  $\alpha \in \mathcal{Q}^q(M, T^{r,s}M)$ ,  $v, v_1, \dots, v_s \in \mathbb{R}^m$ ,  $\sigma \in L(M)$ ,  $p = \pi(\sigma)$ , ed  $X_p = \sigma v$ ,  $X_{1p} = \sigma v_1, \dots, X_{sp} = \sigma v_s$ . Allora*

$$(15.3.13) \quad (\nabla_X \alpha)(X_1, \dots, X_s)(p) = \sigma(v_\sigma^* \tilde{\alpha}(v_1^*, \dots, v_s^*)). \quad \square$$

Ad un tensore  $s$ -covariante ed  $r$ -controvariante  $\tau \in T^{r,s}(M, V)$ , a valori in uno spazio vettoriale  $V$ , possiamo associare un tensore alternato  $\mathfrak{S}(\tau) \in \mathcal{Q}^s(M, T^{r,0}(V))$ , ponendo<sup>4</sup>

$$(15.3.14) \quad \mathfrak{S}(\tau)(X_1, \dots, X_s) = \frac{1}{s!} \sum_{a \in \mathfrak{S}_s} \varepsilon(a) \tau(X_{a_1}, \dots, X_{a_s}), \quad \forall X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M).$$

Con questa notazione, possiamo enunciare il :

**TEOREMA XV.3.8 (Identità algebriche di Bianchi).** *Siano  $T$  ed  $R$  i tensori di torsione e di curvatura di una connessione lineare  $\Gamma$  su  $M$ . Valgono allora, per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , le:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(R(X, Y)Z) &= \mathfrak{S}[(T(T(X, Y), Z)) + (\nabla_X T)(Y, Z)] && \textbf{(I identità di Bianchi)}, \\ \mathfrak{S}[(\nabla_X R)(Y, Z) + R(T(X, Y), Z)] &= 0 && \textbf{(II identità di Bianchi)}. \end{aligned}$$

**DEFINIZIONE XV.3.9.** Una connessione lineare  $\Gamma$  si dice *simmetrica* se ha torsione nulla.

In particolare:

**COROLLARIO XV.3.10.** *Se  $\Gamma$  è simmetrica, il suo tensore di curvatura soddisfa, per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , le due identità :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(R(X, Y)Z) &= 0 && \textbf{(I identità di Bianchi con } T = 0) \\ \mathfrak{S}((\nabla_X R)(Y, Z)) &= 0 && \textbf{(II identità di Bianchi con } T = 0) \end{aligned}$$

**DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA XV.3.8.** Utilizziamo il Teorema XV.2.3 e il Lemma XV.3.7. Se  $p \in M$ ,  $\sigma \in L(M)$  ed  $X_p = \sigma v_1$ ,  $Y_p = \sigma v_2$ ,  $Z_p = \sigma v_3$ , abbiamo

$$\nabla_X T(Y, Z)(p) = \sigma v_1^* \Theta(v_2^*, v_3^*).$$

La (I) del Teorema XV.2.3 ci dà

$$\begin{aligned} (\Omega \wedge \theta)(v_1^*, v_2^*, v_3^*) &= \mathfrak{S}(\Omega(v_1^*, v_2^*)v_3) = d\Theta(v_1^*, v_2^*, v_3^*) \\ &= \mathfrak{S}(v_1^* \Theta(v_2^*, v_3^*)) - \mathfrak{S}(\Theta([v_1^*, v_2^*], v_3^*)) \end{aligned}$$

Osserviamo che (vedi anche nel seguito il Lemma XV.4.1)

$$\Theta(v_1^*, v_2^*) = d\theta(v_1^*, v_2^*) = -\theta([v_1^*, v_2^*]).$$

Quindi  $[v_1^*, v_2^*]_\sigma = -[\Theta(v_1^*, v_2^*)]_\sigma^*$ , ed otteniamo perciò

$$\mathfrak{S}(\Omega(v_1^*, v_2^*)v_3) = \mathfrak{S}(v_1^* \Theta(v_2^*, v_3^*)) + \mathfrak{S}(\Theta([\Theta(v_1^*, v_2^*)]^*, v_3^*)).$$

Applicando  $\sigma$  ad ambo i membri otteniamo allora la prima identità tensoriale di Bianchi.

Per la (II) del Teorema XV.2.3, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 = D\Omega(v_1^*, v_2^*, v_3^*) &= d\Omega(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = \mathfrak{S}(v_1^* \Omega(v_2^*, v_3^*)) - \mathfrak{S}(\Omega([v_1^*, v_2^*], v_3^*)) \\ &= \mathfrak{S}(v_1^* \Omega(v_2^*, v_3^*)) + \mathfrak{S}(\Omega([\Theta(v_1^*, v_2^*)]^*, v_3^*)). \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Lo spazio  $\mathcal{Q}^s(M, T^{r,0}(V))$  dei tensori alternati è un sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{T}^{r,s}(M)$ . La  $\mathfrak{S}$  è una proiezione di  $\mathfrak{T}^{r,s}(M)$  su  $\mathcal{Q}^s(M, T^{r,0}(V))$ .

Poiché, per il Lemma XV.3.7,

$$(\nabla_X R)(Y, Z)(p) = \sigma(v_1^* \Omega(v_2^*, v_3^*)) \sigma^{-1},$$

otteniamo la seconda identità tensoriale di Bianchi applicando l'aggiunzione rispetto a  $\sigma$  all'ultima riga della formula ottenuta sopra.  $\square$

#### XV.4. Interpretazione geometrica della torsione e della curvatura

Le forme di torsione e di curvatura misurano le componenti orizzontale e verticale del commutatore di due campi orizzontali standard.

LEMMA XV.4.1. *Per ogni  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$  abbiamo*

$$(15.4.1) \quad \Theta(v_1^*, v_2^*) = -\theta([v_1^*, v_2^*]),$$

$$(15.4.2) \quad \Omega(v_1^*, v_2^*) = -\omega([v_1^*, v_2^*]).$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ , otteniamo:

$$\Theta(v_1^*, v_2^*) = d\theta(v_1^*, v_2^*) = v_1^* v_2 - v_2^* v_1 - \theta([v_1^*, v_2^*]) = -\theta([v_1^*, v_2^*]),$$

$$\Omega(v_1^*, v_2^*) = d\omega(v_1^*, v_2^*) = v_1^* \omega(v_2^*) - v_2^* \omega(v_1^*) - \omega([v_1^*, v_2^*]) = -\omega([v_1^*, v_2^*]).$$

$\square$

PROPOSIZIONE XV.4.2. *Sia  $\Gamma$  una connessione lineare su  $M$ . Allora:*

$$T = 0 \iff [v_1^*, v_2^*] \text{ è verticale } \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m,$$

$$R = 0 \iff [v_1^*, v_2^*] \text{ è orizzontale } \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m.$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi segue dal Lemma XV.4.1, perché  $T = 0$  se e soltanto se  $\Theta = 0$  ed, analogamente  $R = 0$  se e soltanto se  $\Omega = 0$ .  $\square$

Analogamente, il fatto che la torsione (risp. la curvatura) sia parallela equivale al fatto che la componente orizzontale (risp. verticale) del commutatore di due campi orizzontali standard sia ancora un campo orizzontale standard (risp. un campo verticale fondamentale) sui fibrati d'olonomia.

PROPOSIZIONE XV.4.3. *Sia  $\Gamma$  una connessione lineare su  $M$ . Fissiamo un riferimento  $\sigma_0 \in P$  ed indichiamo con  $P(\sigma_0) \subset P$  il fibrato d'olonomia per  $\sigma_0$ , con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$  e sia  $\mathfrak{g}$  l'algebra di Lie di  $\mathbf{G}$ . Siano  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ .*

(1) *Se  $\nabla T = 0$ , allora  $\theta([v_1^*, v_2^*]) = v = \text{costante}$  su  $P(\sigma_0)$ .*

(2) *Se  $\nabla R = 0$ , allora  $\omega([v_1^*, v_2^*]) = A = \text{costante}$  su  $P(\sigma_0)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma XV.3.7, la condizione  $\nabla T = 0$  è equivalente ad avere  $\tilde{X}[\Theta(v_1^*, v_2^*)] = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ed ogni coppia di vettori  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ . Ciò equivale al fatto che  $\Theta(v_1^*, v_2^*) = -\theta([v_1^*, v_2^*])$  sia costante su ciascun fibrato d'olonomia  $P(\sigma)$ .

Analogamente, la condizione  $\nabla R = 0$  è equivalente, per il Lemma XV.3.7, ad  $\tilde{X}[\Omega(v_1^*, v_2^*)] = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ed ogni coppia di vettori  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ , e quindi al fatto che  $\Omega(v_1^*, v_2^*) = -\omega([v_1^*, v_2^*])$  sia costante su ciascun fibrato d'olonomia  $P(\sigma)$ .  $\square$



**COROLLARIO XV.4.4.** *Supponiamo che su  $M$  sia definita una connessione lineare con torsione e curvatura parallele. Fissiamo  $\sigma_0 \in P$  e sia  $P(\sigma_0)$  il corrispondente spazio di ologonia. Allora lo spazio vettoriale reale  $\mathfrak{F}$  formato dai campi di vettori  $X \in \mathfrak{X}(P(\sigma_0))$  per cui  $\theta(X)$  e  $\omega(X)$  siano costanti su  $P(\sigma_0)$  è una sottoalgebra di Lie reale di dimensione finita di  $\mathfrak{X}(P(\sigma_0))$ .  $\square$*

Questo corollario ci dice che una connessione lineare con torsione e curvatura parallele è localmente equivalente ad una connessione invariante su uno spazio omogeneo.

**COROLLARIO XV.4.5.** *Supponiamo che su  $M$  sia definita una connessione lineare  $\Gamma$  simmetrica con curvatura parallela. Siano  $\sigma \in L(M)$ ,  $\mathbf{G}$  il gruppo di ologonia di  $\Gamma$  in  $\sigma$  e  $\mathfrak{g}$  la sua algebra di Lie. Allora  $\mathfrak{F} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}^m$  è un'algebra di Lie con*

$$\begin{cases} [A_1, A_2] = B, & [A, v] = Av, & [v_1, v_2] = C, \\ \text{se } A_1, A_2, A, B, C \in \mathfrak{g}, v, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m \text{ soddisfano} \\ [A_1^*, A_2^*] = B^*, & [A^*, v^*] = (Av)^*, & [v_1^*, v_2^*] = C^*. \end{cases}$$

L'applicazione

$$\vartheta : \mathfrak{F} \ni (A, v) \longrightarrow (A, -v) \in \mathfrak{F}$$

è un'involuzione ed un automorfismo dell'algebra di Lie  $\mathfrak{F}$ .

**DEFINIZIONE XV.4.6.** La coppia  $(\mathfrak{F}, \vartheta)$  formata da un'algebra di Lie reale  $\mathfrak{F}$  e da un automorfismo involutivo  $\vartheta$  di  $\mathfrak{F}$  si dice un'algebra di Lie simmetrica.

**DEFINIZIONE XV.4.7.** Una varietà  $M$  su cui sia assegnata una connessione lineare simmetrica con curvatura parallela si dice uno spazio localmente simmetrico.

## XV.5. Esistenza di connessioni simmetriche

Ricordiamo che una connessione lineare è *simmetrica* se ha torsione nulla.

**XV.5.1. Preliminari algebrici.** È utile rammentare alcune nozioni di algebra lineare. Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione finita  $m$ . Un tensore  $\tau$  di  $V \otimes V^* \otimes V^*$  si può considerare sia come una forma bilineare a valori in  $V$  che come una forma lineare a valori nello spazio  $V \otimes V^*$  degli endomorfismi di  $V$ . Sia  $\Lambda^2(V, V)$  il sottospazio di  $V \otimes V^* \otimes V^*$  delle forme bilineari alternate  $\eta : V \times V \rightarrow V$ . Ad una  $\eta \in \Lambda^2(V, V)$  facciamo corrispondere l'elemento  $\mu(\eta) \in \text{Hom}(V, \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V))$  definito da

$$\mu(\eta)(u)(v) = \eta(u, v), \quad \forall u, v \in V.$$

L'applicazione  $\lambda : \text{Hom}(V, \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)) \rightarrow \Lambda^2(V, V)$  definita da

$$\lambda(\alpha)(u, v) = \frac{1}{2}(\alpha(u)v - \alpha(v)u), \quad \forall u, v \in V$$

è un'inversa sinistra di  $\mu$ . Infatti

$$\lambda(\mu(\eta))(u, v) = \lambda(\mu(\eta)(u)(v) - \mu(\eta)(v)(u)) = \frac{1}{2}(\eta(u, v) - \eta(v, u)) = \eta(u, v), \quad \forall u, v \in V.$$

In particolare,  $\lambda$  è surgettiva. Il suo nucleo è costituito dalle  $\alpha \in \text{Hom}(V, \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V))$  tali che  $\alpha(u)(v) = \alpha(v)(u)$  per ogni  $u, v \in V$ , cioè dagli elementi di  $V \otimes S^2(V)$ , dove abbiamo indicato con  $S^2(V)$  di il sottospazio di  $V^* \otimes V^*$  delle forme bilineari simmetriche (su  $V$ ).

Ad una  $b \in \mathcal{S}^2(V)$  non degenera associamo il *gruppo ortogonale*  $\mathbf{O}_b(V)$  e la sua algebra di Lie  $\mathfrak{so}_b(V)$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_b(V) &= \{a \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V) \mid b(au, av) = b(u, v), \forall u, v \in V\}, \\ \mathfrak{o}_b(V) &= \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V) \mid b(Xu, v) + b(u, Xv) = 0, \forall u, v \in V\}.\end{aligned}$$

LEMMA XV.5.1. *L'applicazione  $\text{Hom}(V, \mathfrak{o}_b(V)) \ni \alpha \rightarrow \lambda(\alpha) \in \Lambda^2(V, V)$  è un isomorfismo lineare.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché i due spazi lineari  $\text{Hom}(V, \mathfrak{o}_b(V))$  e  $\Lambda^2(V, V)$  hanno entrambi dimensione  $m^2(m-1)/2$ , è sufficiente dimostrare che la restrizione di  $\lambda$  a  $\text{Hom}(V, \mathfrak{o}_b(V))$  è iniettiva. Se  $\alpha \in \text{Hom}(V, \mathfrak{o}_b(V))$ , e  $\lambda(\alpha) = 0$ , abbiamo

$$\begin{aligned}0 &= b(\alpha(u)v, w) + b(v, \alpha(u)w) = b(\alpha(v)u, w) + b(v, \alpha(w)u) \\ &= -b(\alpha(v)w + \alpha(w)v, u), \quad \forall u, v, w \in V.\end{aligned}$$

Quindi, poiché  $\alpha(v)w = \alpha(w)(v)$ , è

$$2\alpha(v)w = \alpha(v)w + \alpha(v)w = 0, \quad \forall v, w \in V.$$

Quindi  $\alpha(v)w = 0$  per ogni  $v, w \in V$  e quindi  $\alpha = 0$ .  $\square$

**XV.5.2. Connessioni lineari simmetriche.** Le connessioni affini su  $M$  formano uno spazio affine  $\Gamma(M)$ , con spazio vettoriale associato  $\Omega_{\text{Ad},0}(\mathbf{L}(M), \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$ . Ciò significa che, fissata la forma di Cartan  $\omega$  di una qualsiasi connessione lineare su  $M$ , è

$$\Gamma(M) \simeq \{\omega + \alpha \mid \alpha \in \Omega_{\text{Ad},0}^1(\mathbf{L}(M), \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))\}.$$

Possiamo ripetere la costruzione algebrica fatta sopra per dimostrare l'esistenza di connessioni simmetriche.

Un elemento  $\tau$  di  $\Omega_{i,0}^2(\mathbf{L}(M), \mathbb{R}^m)$  definisce in modo naturale un elemento  $\alpha_\tau$  di  $\Omega_{\text{Ad},0}^1(\mathbf{L}(M), \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$ , con

$$\alpha_\tau(X_\sigma)\sigma^{-1}(\pi_*(Y_\sigma)) = \tau(X_\sigma, Y_\sigma), \quad \forall \sigma \in \mathbf{L}(M), \forall X_\sigma, Y_\sigma \in T_\sigma\mathbf{L}(M),$$

e viceversa dalla forma  $\alpha_\tau$  possiamo ricavare la  $\tau$  mediante

$$\tau = \frac{1}{2}\alpha_\tau \wedge \theta, \quad \forall \tau \in \Omega_{i,0}^2(\mathbf{L}(M), \mathbb{R}^m).$$

È infatti

$$\begin{aligned}(\alpha_\tau \wedge \theta)(X_\sigma, Y_\sigma) &= \alpha_\tau(X_\sigma)(\sigma^{-1}Y_\sigma) - \alpha_\tau(Y_\sigma)(\sigma^{-1}X_\sigma) \\ &= \tau(X_\sigma, Y_\sigma) - \tau(Y_\sigma, X_\sigma) = 2\tau(X_\sigma, Y_\sigma).\end{aligned}$$

In particolare, se  $\Theta = (d\theta + \omega \wedge \theta) \in \Omega_{i,0}^2(\mathbf{L}(M), \mathbb{R}^m)$  è la forma di torsione di  $\Gamma_\omega$ , la

$$(15.5.1) \quad \omega' = \omega - \frac{1}{2}\alpha_\Theta$$

è la forma di Cartan di una connessione  $\Gamma_{\omega'}$  con torsione nulla. Infatti

$$\Theta' = D'\theta = d\theta + (\omega - \frac{1}{2}\alpha_\tau) \wedge \theta = \Theta - \frac{1}{2}\alpha_\Theta \wedge \theta = 0.$$

OSSERVAZIONE XV.5.2. Non c'è una relazione semplice tra la forma di curvatura di  $\Gamma_\omega$  e di quella della  $\Gamma_{\omega'}$  ad essa associata dalla (15.5.1). Quindi, il gruppo di ologonia della nuova connessione potrebbe essere diverso da quello della connessione assegnata. In particolare, la costruzione descritta sopra può associare ad una connessione  $\mathbf{G}$ -lineare, per un sottogruppo  $\mathbf{G}$  di  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ , una nuova connessione  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ -lineare che potrebbe non essere più  $\mathbf{G}$ -lineare. Osserviamo che, comunque, le due connessioni  $\Gamma_\omega$  e  $\Gamma_{\omega'}$  hanno le stesse linee geodetiche (vedi §XV.7).

Abbiamo quindi, per la discussione appena svolta ed il Lemma XV.5.1,

TEOREMA XV.5.3. *Ogni varietà differenziabile  $M$  ammette una connessione simmetrica. Se  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  è una  $\mathbf{O}(p, q)$ -riduzione del fibrato  $\mathbb{L}(M)$  dei sistemi di riferimento ed esiste una connessione  $\mathbf{O}(p, q)$ -principale su  $\xi$ , allora esiste un'unica connessione  $\mathbf{O}(p, q)$ -principale su  $\xi$  che sia priva di torsione.  $\square$*

## XV.6. Derivata covariante lungo una curva e parallelismo

Il dato di una connessione lineare sulla varietà differenziabile  $M$  ci permette di definire il trasporto parallelo di vettori tangenti (vedi il §XIII.8 e il §XIV.9) e interpretare quindi la derivazione covariante come derivazione lungo una curva.

TEOREMA XV.6.1. *Sia  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\gamma \in \mathcal{C}^1((-\epsilon, \epsilon), M)$  una sua curva integrale con  $\gamma(0) = p$ . Se  $\tau_\gamma : T_p M \rightarrow T_{\gamma(t)} M$  è il trasporto parallelo lungo la curva  $\gamma$ , allora*

$$(15.6.1) \quad \nabla_{X_p} Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[\tau_\gamma(t)]^{-1} Y_{\gamma(t)} - Y_p}{t}, \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano  $\sigma \in L(M)$  con  $\pi(\sigma) = p$  e  $\tilde{\gamma}_\sigma$  il rialzamento orizzontale di punto iniziale  $\sigma$ . Allora il trasporto parallelo è definito da  $\tau_\gamma(t)\sigma v = \tilde{\gamma}_\sigma(t)v$ , per ogni  $v \in \mathbb{R}^m$ . Abbiamo allora  $f(t) = [\tau_\gamma(t)]^{-1} Y_{\gamma(t)} = \sigma \theta(\tilde{Y}_{\tilde{\gamma}_\sigma(t)}) \in \mathcal{C}^\infty((-\epsilon, \epsilon), T_p M)$  ed il secondo membro di (15.6.1) è la derivata di  $f$  in 0. Da  $\dot{f}(0) = \sigma(\tilde{X}_\sigma \theta(\tilde{Y})) = \nabla_{X_p} Y$  otteniamo la tesi.  $\square$

Nella (15.6.1) intervengono soltanto i valori che il campo  $Y$  assume sul supporto della curva integrale di  $X$ . Questa osservazione ci suggerisce la seguente definizione. Indichiamo con  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$ .

DEFINIZIONE XV.6.2. Un campo di vettori di classe  $\mathcal{C}^k$  lungo una curva  $\gamma \in \mathcal{C}^k(I, M)$  è un'applicazione  $Y \in \mathcal{C}^k(I, TM)$  tale che  $Y(t) \in T_{\gamma(t)}$  per ogni  $t \in I$ .

Se  $k \geq 1$ , chiamiamo *derivata covariante* del campo  $Y$  lungo  $\gamma$  il campo di vettori

$$(15.6.2) \quad \frac{DY}{dt} = \frac{d}{dt} [\tau_\gamma(t)^{-1} Y(t)] \in \mathcal{C}^{k-1}(I, TM).$$

Sia  $Y \in \mathcal{C}^1(I, TM)$  un campo di vettori lungo una curva  $\gamma \in \mathcal{C}^1(I, M)$ . Fissiamo un riferimento  $\sigma \in L(M)$  con  $\pi(\sigma) = \gamma(t_0)$  per un  $t_0 \in I$ , e sia  $\tilde{\gamma}_\sigma \in \mathcal{C}^1(I, L(M))$

il rialzamento orizzontale di  $\gamma$  con  $\tilde{\gamma}_\sigma(t_0) = \sigma$ . Allora  $v(t) = [\tilde{\gamma}_\sigma(t)]^{-1}Y(t)$  è una curva in  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^m)$  e la derivata covariante di  $Y$  lungo  $\gamma$  è

$$\frac{DY}{dt} = \tilde{\gamma}_\sigma \dot{v}.$$

Ricordiamo la

DEFINIZIONE XV.6.3. Il campo di vettori  $Y(t)$  è *parallelo lungo la curva*  $\gamma$  se e soltanto se  $\frac{DY}{dt} = 0$  lungo  $\gamma$ .

I campi paralleli lungo la curva  $\gamma$  sono quelli della forma  $\tilde{\gamma}_\sigma v_0$  per un vettore costante  $v_0 \in \mathbb{R}^m$ .

Possiamo estendere la definizione di derivazione covariante e di parallelismo a campi tensoriali lungo una curva. Sia  $0 \in I$ ,  $\gamma \in \mathcal{C}^1(I, M)$  una curva di classe  $\mathcal{C}^1$  in  $M$ ,  $p = \gamma(0)$  e  $\tau_\gamma(t) : T_p(M) \rightarrow T_{\gamma(t)}M$  il trasporto parallelo lungo la curva  $\gamma$ . Poiché  $\tau_\gamma(t)$  è un isomorfismo lineare, la sua aggiunta  $\tau_\gamma(t)^*$  ci permette di definire un isomorfismo lineare  $(\tau_\gamma(t)^*)^{-1} : T_{\gamma(t)}^*M \rightarrow T_p^*M$ .

Per ogni  $p, q$  interi non negativi risulta allora definita un unico isomorfismo lineare:

$$\begin{aligned} \tau_\gamma^{(r,s)}(t) : T_p^{p,q}M &\rightarrow T_{\gamma(t)}^{r,s}M \quad \text{tale che} \\ \tau_\gamma^{(r,s)}(t)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v^1 \otimes \cdots \otimes v^q) \\ &= \tau_\gamma(t)(v_1) \otimes \cdots \otimes \tau_\gamma(t)(v_p) \otimes (\tau_\gamma(t)^*)^{-1}(v^1) \otimes \cdots \otimes (\tau_\gamma(t)^*)^{-1}(v^q) \\ &\quad \forall v_1, \dots, v_p \in T_pM, \quad \forall v^1, \dots, v^q \in T_p^*M. \end{aligned}$$

Un *campo tensoriale* di classe  $\mathcal{C}^k$  lungo una curva  $\gamma \in \mathcal{C}^k(I, M)$  è un'applicazione  $t \in \mathcal{C}^k(I, T^{r,s}M)$  tale che  $t(t) \in T_{\gamma(t)}^{r,s}M$  per ogni  $t \in I$ . Se  $k \geq 1$  la *derivata covariante* di  $t$  lungo  $\gamma$  è il campo tensoriale di classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  lungo  $\gamma$  definito da

$$\frac{Dt}{dt} = \frac{d}{dt}[\tau_\gamma(t)^{-1}t(t)].$$

Se  $\sigma \in L(M)$  e  $\pi(\sigma) = \gamma(t_0)$  per un  $t_0 \in I$ , sia  $\tilde{\gamma}_\sigma$  il rialzamento orizzontale di  $\gamma$  con  $\tilde{\gamma}_\sigma(t_0) = \sigma$ . Allora  $t(t) = \tilde{\gamma}_\sigma(t)\phi(t)$  per una  $\phi \in \mathcal{C}^k(I, T^{r,s}\mathbb{R}^m)$  e

$$\frac{Dt}{dt} = \tilde{\gamma}_\sigma(t)\dot{\phi}.$$

DEFINIZIONE XV.6.4. Il campo tensoriale  $t$  è *parallelo lungo*  $\gamma$  se  $\frac{Dt}{dt} = 0$  lungo  $\gamma$ .

I campi tensoriali paralleli lungo  $\gamma$  sono tutti e soli quelli della forma  $\tilde{\gamma}_\sigma\phi_0$ , con  $\phi_0 \in T^{r,s}\mathbb{R}^m$  costante.

## XV.7. Geodetiche

Sia  $I$  un intervallo in  $\mathbb{R}$  e  $\gamma \in \mathcal{C}^2(I, M)$  una curva di classe  $\mathcal{C}^2$ . La sua velocità  $\dot{\gamma}$  è un campo di vettori di classe  $\mathcal{C}^1$  lungo  $\gamma$ , di cui possiamo calcolare la derivata covariante  $(D\dot{\gamma}/dt)$  lungo  $\gamma$ .

DEFINIZIONE XV.7.1. Una curva  $\gamma \in \mathcal{C}^2(I, M)$  si dice *geodetica* se la sua velocità  $\dot{\gamma}$  è parallela lungo  $\gamma$ , se cioè

$$(15.7.1) \quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0, \quad \text{su } I.$$

Scriveremo a volte  $\frac{D^2\gamma}{dt^2}$  per  $\frac{D\dot{\gamma}}{dt}$ .

Siano  $\sigma \in L(M)$  con  $\pi(\sigma) = \gamma(t_0)$  per un  $t_0 \in I$  e  $\tilde{\gamma}_\sigma \in \mathcal{C}^2(I, L(M))$  il sollevamento orizzontale di  $\gamma$  con  $\tilde{\gamma}_\sigma(t_0) = \sigma$ . Allora  $\dot{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}_\sigma v(t)$  per una  $v \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^m)$  e

$$(15.7.2) \quad \frac{D^2\gamma}{dt^2} = \tilde{\gamma}_\sigma \dot{v} = \tilde{\gamma}_\sigma \frac{d}{dt}([\tilde{\gamma}_\sigma]^{-1}\dot{\gamma}).$$

In particolare,  $\gamma$  è una geodetica se e soltanto se  $[\tilde{\gamma}_\sigma]^{-1}\dot{\gamma}$  è costante. Vale cioè la

PROPOSIZIONE XV.7.2. *La proiezione su  $M$  di una curva integrale di un campo di vettori orizzontale standard è una geodetica e viceversa ogni rialzamento orizzontale di una geodetica in  $M$  è la curva integrale di un campo di vettori standard.*  $\square$

OSSERVAZIONE XV.7.3. In particolare, la velocità  $\dot{\gamma}$  su una geodetica  $\gamma$  è o identicamente nulla, o diversa da zero per ogni  $t \in I$ .

OSSERVAZIONE XV.7.4. Supponiamo che  $\gamma \in \mathcal{C}^2(I, M)$  sia una geodetica, con  $\dot{\gamma} \neq 0$ . Una sua riparametrizzazione  $\gamma \circ \tau$ , con  $\tau \in \mathcal{C}^2(I', I)$  è ancora una geodetica se, e soltanto se, la  $\tau$  è affine, cioè della forma  $\tau(t) = at + b$ . Abbiamo infatti

$$\frac{d}{dt}\gamma \circ \tau = \dot{\tau} \cdot \dot{\gamma} \circ \tau \implies \frac{D}{dt} \frac{d}{dt}(\gamma \circ \tau) = \ddot{\tau} \dot{\gamma} + \dot{\tau}^2 \frac{D\dot{\gamma}}{dt}.$$

Quindi, se  $\gamma$  è una geodetica,  $\frac{D^2(\gamma \circ \tau)}{dt^2} = \ddot{\tau} \cdot \dot{\gamma}$ . Se  $\dot{\gamma} \neq 0$ , questa ci dà  $\ddot{\tau} = 0$ , e perciò  $\tau$  è affine.

Dalla Proposizione XV.7.2 otteniamo:

TEOREMA XV.7.5. *Assegnati  $p_0 \in M$  e  $v_0 \in T_{p_0}M$  esiste un'unica geodetica  $\gamma$ , definita su un intervallo  $I$  contenente 0 come punto interno, tale che*

$$(15.7.3) \quad \begin{cases} \gamma(0) = p_0, \\ \dot{\gamma}(0) = v_0. \end{cases}$$

Abbiamo inoltre  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ .  $\square$

L'unicità va intesa nel modo seguente: se  $I, I'$  sono due intervalli di  $\mathbb{R}$  che contengono 0 e  $\gamma \in \mathcal{C}^2(I, M)$ ,  $\gamma' \in \mathcal{C}^2(I', M)$  sono due geodetiche che soddisfino le condizioni iniziali (15.7.3), allora  $\gamma(t) = \gamma'(t)$  per ogni  $t \in I \cap I'$ . In particolare, esiste un'unica geodetica massimale che soddisfi le condizioni iniziali (15.7.3).

DEFINIZIONE XV.7.6. Una connessione lineare  $\Gamma$  su  $M$  si dice *completa* se ogni geodetica  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$  in  $M$  può essere estesa ad una geodetica definita su  $\mathbb{R}$ .

Per il Teorema XV.7.5, abbiamo

**PROPOSIZIONE XV.7.7.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché la connessione  $\Gamma$  su  $M$  sia completa è che tutti i campi orizzontali standard siano completi su  $L(M)$ .*  $\square$

**NOTAZIONE XV.7.8.** Se  $v \in T_p M$ ,  $p \in M$ , indicheremo con  $\gamma_v$  la geodetica massimale tale che  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = v$  e con  $I_v \subset \mathbb{R}$  il suo massimo dominio di definizione.

Osserviamo che, se  $v \in T_p M$  e  $t, s \in \mathbb{R}$  sono tali che  $st \in I_v$ ,  $t \in I_{sv}$ , allora  $\gamma_{sv}(t) = \gamma_v(st)$ . Inoltre,  $I_{\dot{\gamma}_v(t_0)} = I_v - t_0$  e  $\gamma_{\dot{\gamma}_v(t_0)}(t) = \gamma_v(t + t_0)$  per ogni  $t_0 \in I_v$ .

**ESEMPIO XV.7.9.** La connessione lineare simmetrica piatta canonica su  $\mathbb{R}^m$  è completa. Le geodetiche sono le rette affini  $t \rightarrow x_0 + tv$  di  $\mathbb{R}^m$ .

Dalla Proposizione XV.7.7 ricaviamo

**PROPOSIZIONE XV.7.10.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile  $\mathbf{G}$ -affine, con forma di Cartan  $\omega$  sul fibrato  $\mathbf{G}$ -principale  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ . Sono equivalenti:*

- (1) *La connessione è completa.*
- (2) *Per ogni  $\alpha \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$  e  $\sigma \in P$  esiste un cammino orizzontale  $s \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], P)$  tale che  $\theta(\dot{s}) = \alpha$ .*
- (3) *Per ogni  $\alpha \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$ ,  $\beta \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathfrak{g})$  e  $\sigma \in P$  esiste un cammino  $s \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], P)$  tale che  $\theta(\dot{s}) = \alpha$ ,  $\omega(\dot{s}) = \beta$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per la Proposizione XV.7.7, è (2)  $\Rightarrow$  (1). Banalmente vale (3)  $\Rightarrow$  (2).

Dimostriamo che (2)  $\Rightarrow$  (3). Siano date  $\alpha \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$ ,  $\beta \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathfrak{g})$ . Sappiamo che vi è una ed una sola soluzione  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{G})$  di  $\omega_{\mathbf{G}}(\dot{\gamma}) = \beta \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathfrak{g})$  con  $\gamma(0) = e_{\mathbf{G}}$ . Sia  $(\gamma\alpha)(t) = \gamma(t)\alpha(t)$ . Allora  $\gamma\alpha \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$  e, se vale la (2), vi è un unico cammino orizzontale  $s_h \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], P)$  con  $s_h(0) = \sigma_0$  e  $\theta(\dot{s}_h) = \gamma\alpha$ . Il cammino  $s = s_h \cdot \gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], P)$  verifica  $s(0) = \sigma_0$ ,  $\theta(\dot{s}_h) = \gamma^{-1}\theta(\dot{s}_h) = \alpha$ ,  $\omega(\dot{s}) = \beta$ .

Concludiamo la dimostrazione verificando che (1)  $\Rightarrow$  (2). Data una curva  $\alpha \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$ , per (1) possiamo, per ogni partizione  $T = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$  dell'intervallo  $[0, 1]$  costruire un'unica curva orizzontale  $s_T$ , di classe  $\mathcal{C}^\infty$  a tratti con  $s_T(0) = \sigma_0$  e  $\theta(\dot{s}_T) = \beta(t_i)$  sull'intervallo  $t_i < t < t_{i+1}$  per  $0 \leq i < n$ . Facendo tendere  $\sup |t_i - t_{i-1}|$  a zero, le  $s_T$  convergono alla curva  $s$  cercata.  $\square$

**DEFINIZIONE XV.7.11.** Uno spazio simmetrico è uno spazio localmente simmetrico<sup>5</sup> la cui connessione sia completa.

## XV.8. Metriche (pseudo-)Riemanniane e connessione di Levi-Civita

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$ .

<sup>5</sup>Cioè una varietà differenziabile su cui è fissata una connessione simmetrica con curvatura parallela.

DEFINIZIONE XV.8.1. Una *metrica Riemanniana* su  $M$  è un tensore simmetrico  $g \in \mathfrak{T}^{0,2}(M)$  definito positivo. Richiediamo cioè che sia

$$\begin{aligned} \text{(SIMMETRIA)} \quad & g(X, Y) = g(Y, X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \\ \text{(POSITIVITÀ)} \quad & g(v, v) > 0, \quad \text{se } v \in TM \text{ e } v \neq 0. \end{aligned}$$

Una *metrica pseudo-Riemanniana* di segnatura  $(v_+, v_-)$  su  $M$ , con  $v_+ + v_- = m$ , è un tensore simmetrico  $g \in \mathfrak{T}^{0,2}(M)$  che definisce, in ogni punto  $p$  di  $M$ , una forma simmetrica  $g_p$  non degenera di segnatura  $(v_+, v_-)$ . Richiediamo cioè che sia

$$\begin{aligned} \text{(NON DEGENERE)} \quad & p \in M, v \in T_p M, g(v, w) = 0, \quad \forall w \in T_p M \implies v = 0, \\ \text{(SEGNATURA)} \quad & T_p M \times T_p M \ni (v, w) \rightarrow g(v, w) \in \mathbb{R} \text{ ha segnatura } (v_+, v_-). \end{aligned}$$

DEFINIZIONE XV.8.2. Una *varietà Riemanniana* (rispettivamente *pseudo-Riemanniana*) è una varietà differenziabile su cui sia stata fissata una metrica Riemanniana (rispettivamente pseudo-Riemanniana). Indicheremo a volte una varietà Riemanniana, o pseudo-Riemanniana, come una coppia  $(M, g)$ .

DEFINIZIONE XV.8.3. Siano  $(M, g)$  ed  $(N, h)$  due varietà pseudo-Riemanniane. Un'applicazione differenziabile  $f : N \rightarrow M$  si dice *immersione isometrica* se

$$(15.8.1) \quad g_{f(q)}(f_*X_q, f_*Y_q) = h_q(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(N), \quad \forall q \in N.$$

Se  $f$  è anche un diffeomorfismo locale, diciamo che è un'*isometria locale*. Se  $f$  è anche un diffeomorfismo, diciamo che è un'*isometria*.

Sia  $(M, g)$  una varietà pseudo-Riemanniana,  $b$  una forma bilineare simmetrica su  $\mathbb{R}^m$ , e supponiamo che, per ogni  $p \in M$ ,  $g_p$  abbia la stessa segnatura di  $b$ . Indichiamo con  $\mathbf{O}_b$  il gruppo degli automorfismi lineari di  $\mathbb{R}^m$  che preservano la forma  $b$  e con  $\mathfrak{so}_b$  la sua algebra di Lie:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_b &= \{a \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \mid b(av, aw) = b(v, w), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^m\}, \\ \mathfrak{so}_b &= \{X \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}) \mid b(Xv, w) + b(v, Xw) = 0, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^m\}. \end{aligned}$$

I gruppi  $\mathbf{O}_b$  corrispondenti a forme bilineari simmetriche con la stessa segnatura sono coniugati in  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ , e si possono identificare quindi ai gruppi  $\mathbf{O}_{v_+, v_-}$  definiti in precedenza.

Otteniamo una riduzione  $\mathfrak{O}_b(M) = (\mathbf{O}_b(M) \xrightarrow{\pi} M)$  ad  $\mathbf{O}_b$  di  $\mathbb{L}(M)$  ponendo

$$(15.8.2) \quad \mathfrak{O}_b(M, p) = \{\sigma \in \mathbb{L}(M) \mid g_p(\sigma(v), \sigma(w)) = b(v, w), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^m\}.$$

PROPOSIZIONE XV.8.4. Per una connessione lineare  $\Gamma$  su una varietà pseudo-Riemanniana  $(M, g)$  sono equivalenti:

- (1)  $g$  è parallela, cioè  $\nabla g = 0$ .
- (2)  $\Gamma$  ammette una  $\mathbf{O}_b$ -riduzione ad  $\mathfrak{O}_b(M)$ .

DIMOSTRAZIONE. La  $g$  si rialza ad un'applicazione  $\tilde{g} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{L}(M), \text{Simm}^2(\mathbb{R}^m))$ , ove abbiamo indicato con  $\text{Simm}^2(\mathbb{R}^m)$  lo spazio vettoriale delle forme bilineari simmetriche su  $\mathbb{R}^m$ , con

$$\tilde{g}(\sigma)(v_1, v_2) = g(\sigma(v_1), \sigma(v_2)), \quad \forall \sigma \in \mathbb{L}(M), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m.$$

La restrizione di  $\tilde{g}$  ad  $\mathbf{O}_b(M)$  è costante ed uguale a  $b$ . Quindi  $X\tilde{g} = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{O}_b(M))$ . Questo significa che, se  $\Gamma$  ammette una riduzione ad  $\mathfrak{O}_b(M)$ , allora  $\nabla g = 0$  e dimostra quindi l'implicazione (2) $\Rightarrow$ (1).

Viceversa, se vale (1), allora  $\tilde{g}$  è costante sui fibrati di olonomia  $L(M)(\sigma)$  per ogni  $\sigma \in L(M)$ . In particolare  $L(M)(\sigma) \subset \mathbf{O}_b(M)$  se  $\sigma \in \mathbf{O}_b(M)$  e quindi  $\Gamma$  ammette una riduzione ad  $\mathfrak{O}_b(M)$ .  $\square$

**DEFINIZIONE XV.8.5.** Diciamo che una connessione lineare  $\Gamma$  ed una metrica pseudo-Riemanniana  $g$  su  $M$  sono *compatibili* se sono soddisfatte le condizioni equivalenti della Proposizione XV.8.4. Diremo anche che la  $\Gamma$  è una *connessione metrica*.

**TEOREMA XV.8.6 (Levi-Civita).** *Sia  $(M, g)$  una varietà pseudo-Riemanniana. Vi è allora un'unica connessione lineare  $\Gamma$  su  $M$  simmetrica e compatibile con  $g$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per il Teorema XIII.2.7 esiste una connessione  $\mathbf{O}_b$ -principale su  $\mathfrak{O}_b(M)$ . Per il Teorema XV.5.3 essa può essere modificata in un unico modo ad una connessione priva di torsione.  $\square$

**DEFINIZIONE XV.8.7.** L'unica connessione metrica priva di torsione su  $(M, g)$  si dice la *connessione di Levi-Civita*<sup>6</sup>.

**Derivazione covariante associata alla connessione di Levi-Civita.** Ricaviamo qui l'espressione esplicita della differenziazione covariante associata alla connessione di Levi-Civita.

La sua derivazione covariante  $\nabla$  deve soddisfare le due condizioni

$$(15.8.3) \quad \begin{cases} T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}, \\ \nabla g = 0. \end{cases}$$

Per la seconda delle (15.8.3) abbiamo per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ :

$$(15.8.4) \quad Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Se supponiamo inoltre che valga la prima delle (15.8.3) abbiamo

$$\begin{aligned} Yg(Z, X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) - g(Z, [X, Y]) \\ Zg(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \\ &= g(\nabla_X Z, Y) + g(X, \nabla_Y Z) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) - g(Z, [X, Y]) \\ &\quad - g(\nabla_X Z, Y) - g(X, \nabla_Y Z) - g(Y, [Z, X]) + g(X, [Y, Z]). \end{aligned}$$

<sup>6</sup> Tullio Levi-Civita (Padova, 29 Marzo 1873 - Roma, 29 Dicembre 1941) matematico italiano, allievo di Gregorio Ricci-Curbastro, è l'inventore del *calcolo differenziale assoluto* (calcolo tensoriale). Ha dato notevoli contributi alla geometria differenziale, alla teoria della relatività, alla meccanica celeste, all'idrodinamica. Nel 1938 fu cacciato dall'Università in seguito alle leggi razziali.



Da questa ricaviamo la formula della derivazione covariante :

$$(15.8.5) \quad \begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]). \end{aligned}$$

### XV.9. Esempi

ESEMPIO XV.9.1. La metrica Euclidea di  $\mathbb{R}^m$  è definita, nelle coordinate canoniche  $x^1, \dots, x^m$ , da

$$(15.9.1) \quad g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_{i,j}, \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq m.$$

ESEMPIO XV.9.2. Siano  $(M, g)$  una varietà Riemanniana,  $N$  una varietà differenziabile ed  $f : N \rightarrow M$  un'immersione differenziabile. Allora

$$(15.9.2) \quad h(X_q, Y_q) = g(f_*(X_q), f_*(Y_q)), \quad \forall q \in N, \forall X_q, Y_q \in T_q N$$

definisce una metrica Riemanniana su  $N$ .

Più in generale, se  $(M, g)$  è pseudo-Riemanniana, la (15.9.2) definisce una metrica pseudo-Riemanniana su  $N$  se, per ogni  $q \in N$ , il sottospazio  $f_*(T_q N)$  è anisotropo in  $(T_{f(q)} M, g_{f(q)})$ .

ESEMPIO XV.9.3. Consideriamo su  $S^m$  la metrica Riemanniana  $g$  indotta dall'immersione canonica  $S^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ . Sia  $U = \{x \in S^m \mid x^0 + 1 > 0\}$  e consideriamo su  $U$  le coordinate locali  $y^1, \dots, y^m$  definite da

$$x^0 = \frac{1 - |y|^2}{1 + |y|^2}, \quad x^i = \frac{2y^i}{1 + |y|^2}, \quad y^i = \frac{x^i}{1 + x^0}, \quad \text{per } i = 1, \dots, m.$$

Abbiamo

$$dx^0 = -4 \frac{\sum_j y^j dy^j}{(1 + |y|^2)^2}, \quad dx^i = 2 \frac{dy^i}{(1 + |y|^2)} - 4y^i \frac{\sum_j y^j dy^j}{(1 + |y|^2)^2} \quad \text{su } S^m.$$

Quindi<sup>7</sup>

$$g = \sum_i dx^i \otimes dx^i|_{S^m} = 4 \frac{\sum_{i=1}^m dy^i \otimes dy^i}{(1 + |y|^2)^2}.$$

Calcoliamo ora il tensore della metrica in coordinate sferiche. Per semplicità ci limitiamo a trattare il caso della sfera di dimensione due dello spazio ordinario. Abbiamo allora su  $S^2$

$$\begin{cases} x^0 = \cos \theta, \\ x^1 = \sin \theta \cos \phi, \\ x^2 = \sin \theta \sin \phi, \end{cases} \quad \begin{cases} dx^0 = -\sin \theta d\theta, \\ dx^1 = \cos \theta \cos \phi d\theta - \sin \theta \sin \phi d\phi, \\ dx^2 = \cos \theta \sin \phi d\theta + \sin \theta \cos \phi d\phi \end{cases}$$

e quindi, ponendo  $d\theta^2 = d\theta \otimes d\theta$  e  $d\phi^2 = d\phi \otimes d\phi$ ,

$$g = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

<sup>7</sup>La forma della metrica è particolarmente semplice perché le coordinate  $y^i$  sono conformi.

ESEMPIO XV.9.4. Poiché la mappa antipodale  $a_0 : S^m \ni x \rightarrow -x \in S^m$  è un'isometria, la metrica  $g$  definisce, per passaggio al quoziente, una metrica  $\bar{g}$  sullo spazio proiettivo, che rende la proiezione  $\pi : S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$  un'isometria locale.

ESEMPIO XV.9.5. La metrica dell'esempio XV.9.3 coincide su  $S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$  con la *metrica di Fubini-Study* degli spazi proiettivi complessi. È, a meno di un fattore moltiplicativo, la parte reale della *metrica di Fubini-Study* di  $\mathbb{C}P^m$ . Questa è una metrica Hermitiana invariante per l'azione di  $\mathbf{SU}(n+1)$ , che si esprime, nelle coordinate locali  $w^j = z^j/z^0$  di  $U_0 = \{z^0 \neq 0\}$ , mediante

$$(15.9.3) \quad h = \frac{(1 + |w|^2) \sum_{j=1}^m dw^j \otimes d\bar{w}^j - \sum_{j,h=1}^m \bar{w}^j w^h dw^j \otimes d\bar{w}^h}{(1 + |w|^2)^2}.$$

Si ottiene una metrica Riemanniana ponendo  $g = \operatorname{Re} h$ .

ESEMPIO XV.9.6. Possiamo considerare lo spazio proiettivo reale  $\mathbb{R}P^m$  come una sottovarietà differenziabile dello spazio proiettivo complesso  $\mathbb{C}P^m$ . La restrizione ad  $\mathbb{R}P^m$  della metrica di Fubini-Study definisce una metrica  $\mathbf{SO}(n+1)$ -invariante su  $\mathbb{R}P^m$ . La sua espressione, nelle coordinate locali  $y^i = x^i/x^0$  di  $U_0 = \{x^0 \neq 0\}$ , è

$$(15.9.4) \quad g = \frac{(1 + |y|^2) \sum_{i=1}^m dy^i \otimes dy^i - \sum_{i,j=1}^m y^i y^j dy^i \otimes dy^j}{(1 + |y|^2)^2}.$$

ESEMPIO XV.9.7. Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo di Lie ed  $\mathbf{H}$  un suo sottogruppo compatto, possiamo definire su  $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$  una metrica Riemanniana  $\mathbf{G}$ -invariante. Sia  $p_0 = [H]$  il punto base di  $M$ . Per il teorema di Haar sull'esistenza di misure bi-invarianti sui gruppi compatti, possiamo definire su  $T_{p_0}M$  un prodotto scalare  $g_{p_0}$  per cui i  $dL_h, dR_h : T_{p_0}M \rightarrow T_{p_0}M$ , per  $h \in \mathbf{H}$ , siano isometrie. Se  $p = a \cdot p_0$  per un  $a \in \mathbf{G}$ , poniamo.

$$g(a_*X_{p_0}, a_*Y_{p_0}) = g_{p_0}(X_{p_0}, Y_{p_0}).$$

Questa è una buona definizione, perché, se  $b = ah$  con  $h \in \mathbf{H}$ , allora

$$g((ah)_*X_{p_0}, (ah)_*Y_{p_0}) = g_{p_0}(h_*X_{p_0}, h_*Y_{p_0}) = g_{p_0}(X_{p_0}, Y_{p_0}).$$

DEFINIZIONE XV.9.8. Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie,  $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$  un suo spazio omogeneo e  $g$  una metrica Riemanniana su  $M$ . Se  $g$  è  $\mathbf{G}$ -invariante, diciamo che  $(M, g)$  è uno *spazio Riemanniano  $\mathbf{G}$ -omogeneo*.

ESEMPIO XV.9.9. Ogni gruppo di Lie compatto  $\mathbf{G}$  ammette una metrica Riemanniana bi-invariante, invariante cioè sia rispetto alle traslazioni a destra che rispetto alle traslazioni a sinistra. Possiamo infatti considerare  $\mathbf{G}$  come uno spazio omogeneo del gruppo  $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ , rispetto all'azione transitiva

$$(15.9.5) \quad (\mathbf{G} \times \mathbf{G}) \times \mathbf{G} \ni ((a, b), x) \longrightarrow axb^{-1} \in \mathbf{G}.$$

Il sottogruppo di isotropia di  $e$  è  $\Delta_{\mathbf{G}} = \{(a, a) \mid a \in \mathbf{G}\}$ . Per l'Esempio XV.9.7,  $\mathbf{G}$  ammette una metrica  $g$  invariante per l'azione di  $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ , cioè invariante sia a destra che a sinistra per l'azione di  $\mathbf{G}$ .

Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo semisemplice compatto, la sua *forma di Killing*

$$(15.9.6) \quad \kappa_{\mathfrak{g}}(A, B) = \operatorname{traccia}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(A) \cdot \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(B))$$

è definita negativa e la

$$(15.9.7) \quad g(X_a^*, Y_a^*) = -\kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

(dove abbiamo indicato con  $X^*, Y^*$  i campi di vettori invarianti a sinistra associati ad  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ) definisce su  $\mathbf{G}$  una metrica Riemanniana bi-invariante.

Analogamente, se  $\mathbf{G}$  è un sottogruppo compatto di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ , la forma quadratica

$$(15.9.8) \quad g_e(X, Y) = -\text{traccia}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$$

è definita positiva e la

$$(15.9.9) \quad g(X_a^*, Y_a^*) = -\text{traccia}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

definisce una metrica Riemanniana bi-invariante su  $\mathbf{G}$ .

ESEMPIO XV.9.10. Se  $1 < p < m$ , la forma

$$(15.9.10) \quad g = \sum_{i=1}^p dx^i \otimes dx^i - \sum_{i=p+1}^m dx^i \otimes dx^i.$$

definisce una metrica pseudo-Riemanniana su  $\mathbb{R}^m$ .

ESEMPIO XV.9.11. Consideriamo su  $\mathbb{R}^{m+1}$  la metrica pseudo-Riemanniana

$$h = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^m dx^i \otimes dx^i.$$

Il pullback di  $h$  su  $M = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x^0 = (1 + \sum_{i=1}^m |x^i|^2)^{1/2}\}$  definisce una metrica Riemanniana  $g$ , che è la metrica standard dello spazio iperbolico di Lobačevskij di dimensione  $n$ . Indichiamo con  $K$  la matrice

$$K = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

e sia  $\mathbf{O}(1, n) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t a K a = K\}$  il gruppo delle trasformazioni lineari di  $\mathbb{R}^{m+1}$  che lasciano invariata la  $K$ . Posto  $e_0 = {}^t(1, 0, \dots, 0) \in M$ ,

$$\mathbf{O}_+(1, n) = \{a \in \mathbf{O}(1, n) \mid {}^t e_0 K a e_0 > 0\}$$

è un sottogruppo normale di indice due di  $\mathbf{O}(1, n)$ , che opera transitivamente su  $M$  e lascia invariata la metrica Riemanniana  $g$ . Lo stabilizzatore di  $e_0$  in  $\mathbf{O}_+(1, n)$  è un sottogruppo compatto, isomorfo ad  $\mathbf{O}(n)$ . Questa costruzione è dunque un caso particolare di quella dell'Esempio.,XV.9.7.

ESEMPIO XV.9.12. Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie semisemplice. Per un criterio di Cartan, la semisemplicità è equivalente al fatto che la forma di Killing

$$(15.9.11) \quad \kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{traccia}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)), \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

sia non degenerare sull'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $\mathbf{G}$ . Nota che, se  $\mathbf{G}$  non è compatto, la forma di Killing è indefinita. La

$$(15.9.12) \quad g(X_a^*, Y_a^*) = -\kappa(X, Y), \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{g}$$

definisce allora una metrica pseudo-Riemanniana su  $\mathbf{G}$ .

### XV.10. Estensione della metrica ai fibrati tensoriali

Sia  $g$  una forma bilineare simmetrica, definita su uno spazio vettoriale reale  $V$ , di dimensione finita  $m$ . Risulta allora univocamente definita una forma bilineare simmetrica, che denoteremo ancora con  $g$ , sulla potenza tensoriale  $k$ -esima  $\mathbf{T}^k(V) = V^{\otimes k}$  e che, sulle coppie di tensori di rango uno dà

$$g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, w_1 \otimes \cdots \otimes w_k) = g(v_1, w_1) \cdots g(v_k, w_k).$$

Fissata una base  $e_1, \dots, e_m$  di  $V$ , poniamo  $g_{i,j} = g(e_i, e_j)$ . Siano  $\alpha, \beta \in \mathbf{T}^k(V)$ , con  $\alpha = \sum_{i_1, \dots, i_k} \alpha^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$ ,  $\beta = \sum_{i_1, \dots, i_k} \beta^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$ . Allora

$$g(\alpha, \beta) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k}} g_{i_1, j_1} \cdots g_{i_k, j_k} \alpha^{i_1, \dots, i_k} \beta^{j_1, \dots, j_k}.$$

Se  $g$  è non degenere, l'applicazione lineare  $B_g : V \rightarrow V^*$  ad essa associata è un isomorfismo. Utilizzando la  $B_g$ , possiamo definire una forma bilineare simmetrica su  $V^*$  ponendo

$$g(\xi, \eta) = g(B_g^{-1}(\xi), B_g^{-1}(\eta)), \quad \forall \xi, \eta \in V^*.$$

Se indichiamo con  $(g^{i,j})$  l'inversa della matrice  $(g_{i,j})$ , otteniamo che

$$g(\xi, \eta) = \sum_{i,j} g^{i,j} \xi_i \eta_j,$$

ove  $\xi = \sum_i \xi_i e^i$ ,  $\eta = \sum_i \eta_i e^i$  per la base duale  $e^1, \dots, e^m$  in  $V^*$  di  $e_1, \dots, e_m$ .

Possiamo quindi definire il prodotto di tensori  $h$ -covarianti e  $k$ -controvarianti

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_h \\ j_1, \dots, j_k}} \alpha^{i_1, \dots, i_h}_{j_1, \dots, j_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_h} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_k}, \\ \beta &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_h \\ j_1, \dots, j_k}} \beta^{i_1, \dots, i_h}_{j_1, \dots, j_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_h} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_k}, \end{aligned}$$

mediante

$$g(\alpha, \beta) = \sum g_{i_1, i'_1} \cdots g_{i_h, i'_h} g^{j_1, j'_1} \cdots g^{j_k, j'_k} \alpha^{i_1, \dots, i_h}_{j_1, \dots, j_k} \beta^{j'_1, \dots, j'_k}_{i'_1, \dots, i'_h}.$$

Osserviamo ancora che le applicazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{h,k}V \ni \alpha &\longrightarrow g_{i_1, j_1+k} \cdots g_{i_h, j_h+k} \alpha^{i_1, \dots, i_h}_{j_1, \dots, j_k} e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_h+k} \in T^{0, h+k}V, \\ \mathbf{T}^{h,k}V \ni \alpha &\longrightarrow g^{j_1, i_1+k} \cdots g^{j_k, i_k+k} \alpha^{i_1, \dots, i_h}_{j_1, \dots, j_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_h+k} \in T^{h+k, 0}V \end{aligned}$$

sono isomorfismi lineari che preservano le estensioni della  $g$ .

Tutte queste considerazioni si estendono in modo ovvio ai tensori definiti su una varietà pseudo-Riemanniana  $(M, g)$ .

### XV.11. Tensore di curvatura di una varietà pseudo-Riemanniana

Sia  $(M, g)$  una varietà pseudo-Riemanniana. La curvatura  $R$  della sua connessione di Levi-Civita è una 2-forma a valori nel sottofibrato  $\mathfrak{so}_g(M)$  del fibrato degli endomorfismi  $A$  di  $TM$  che soddisfano

$$g(Av, w) + g(v, Aw) = 0, \quad \forall v, w \in T_p M.$$

È conveniente associare ad  $R$  un tensore puramente controvariante, che ci permette di esplicitare meglio alcune proprietà di simmetria.

**DEFINIZIONE XV.11.1.** Il *tensore di curvatura controvariante* di una varietà pseudo-Riemanniana  $(M, g)$  è il tensore

$$(15.11.1) \quad R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4), \quad \forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M).$$

Abbiamo

**PROPOSIZIONE XV.11.2.** Il *tensore di curvatura controvariante* verifica le identità algebriche

$$(15.11.2) \quad R(X_2, X_1, X_3, X_4) = -R(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

$$(15.11.3) \quad R(X_1, X_2, X_4, X_3) = -R(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

$$(15.11.4) \quad R(X_3, X_4, X_1, X_2) = R(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

$$(15.11.5) \quad R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_2, X_3, X_1, X_4) + R(X_3, X_1, X_2, X_4) = 0,$$

$$\forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Le (15.11.2), (15.11.3) sono conseguenza la prima del fatto che  $R$  è una forma alternata e la seconda del fatto che  $R$  è  $g$ -antisimmetrica. La (15.11.5) è l'identità algebrica di Bianchi. Mostriamo che dalle (15.11.2), (15.11.3) ed (15.11.5) segue la (15.11.4). Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} R(X_3, X_4, X_1, X_2) &= -R(X_4, X_1, X_3, X_2) - R(X_1, X_3, X_4, X_2) \\ &= R(X_4, X_1, X_2, X_3) + R(X_1, X_3, X_2, X_4) \\ &= -R(X_1, X_2, X_4, X_3) - R(X_2, X_1, X_3, X_4) \\ &\quad - R(X_2, X_4, X_1, X_3) - R(X_3, X_2, X_1, X_4) \\ &= 2R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_2, X_4, X_3, X_1) + R(X_3, X_2, X_4, X_1) \\ &= 2R(X_1, X_2, X_3, X_4) - R(X_3, X_4, X_1, X_2). \end{aligned}$$

La dimostrazione è completa.  $\square$

**OSSERVAZIONE XV.11.3.** Le (15.11.2), (15.11.3), (15.11.4) ci permettono di estendere  $R$  ad una forma bilineare simmetrica su  $\Lambda^2 TM$ , ponendo, sui tensori di rango due,

$$(15.11.6) \quad R(v_1 \wedge v_2, v_3 \wedge v_4) = R(v_1, v_2, v_3, v_4), \quad \forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in T_p M, \quad \forall p \in M.$$

**DEFINIZIONE XV.11.4.** Se  $(M, g)$  è Riemanniana, chiamiamo *curvatura sezionale* del piano  $\alpha = \langle v_1, v_2 \rangle \in \mathfrak{Gr}_2(T_p M)$  il numero reale

$$(15.11.7) \quad K(\alpha) = \frac{R(v_1, v_2, v_2, v_1)}{g(v_1, v_1)g(v_2, v_2) - |g(v_1, v_2)|^2}.$$

### XV.12. Connessioni principali su varietà dotate di una connessione lineare

Il dato di una connessione principale ci permetta di differenziare le sezioni e le forme differenziali a valori nei fibrati vettoriali associati. Rappresentandole in un sistema di riferimento, ci accorgiamo che la derivazione covariante così introdotta riguarda soltanto le derivate prime degli oggetti considerati. Peraltro, abbiamo osservato che gli oggetti prodotti mediante la differenziazione covariante *non* sono, in generale, sezioni di fibrati associati a rappresentazioni lineari del gruppo strutturale. Per definire derivate covarianti di ordine superiore occorre introdurre, contemporaneamente, una struttura differenziabile affine sulla base.

Premettiamo alcune osservazioni sul prodotto di fibrati principali.

**XV.12.1. Prodotto di connessioni principali.** Siano  $\xi_i = (P_i \xrightarrow{\pi_i} M)$ , per  $i = 1, 2$ , due connessioni principali con gruppi strutturali  $\mathbf{G}_i$ . Il prodotto  $\xi = \xi_1 \times_M \xi_2$  è il fibrato principale su  $M$  con spazio totale

$$P = \{(\sigma_1, \sigma_2) \mid \pi_1(\sigma_1) = \pi_2(\sigma_2)\}$$

e gruppo strutturale  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$ , che agisce su  $P$  mediante

$$(\sigma_1, \sigma_2)(a_1, a_2) = (\sigma_1 a_1, \sigma_2 a_2), \quad \forall (\sigma_1, \sigma_2) \in P, \quad \forall a_1 \in \mathbf{G}_1, \quad \forall a_2 \in \mathbf{G}_2.$$

L'algebra di Lie di  $\mathbf{G}$  è la somma diretta  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  delle algebre di Lie  $\mathfrak{g}_i$  dei gruppi  $\mathbf{G}_i$ , per  $i = 1, 2$ . Indichiamo con  $\text{pr}_i : P \rightarrow P_i$  le proiezioni  $\text{pr}_i(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_i$ .

**PROPOSIZIONE XV.12.1.** *Se  $\omega_i \in \Omega^1(P_i, \mathfrak{g}_i)$  sono le forme di Cartan di connessioni principali su  $\xi_i$ , per  $i = 1, 2$ , allora  $\omega = \text{pr}_1^* \omega_1 \oplus \text{pr}_2^* \omega_2 \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  è la forma di Cartan di una connessione principale su  $\xi$ .*  $\square$

Siano  $(\rho_i, V_i)$  due rappresentazioni lineari dei gruppi  $\mathbf{G}_i$ . Allora  $(\rho, V)$ , con  $V = V_1 \otimes V_2$  e  $\rho(a_1, a_2)(v_1 \otimes v_2) = (\rho_1(a_1)v_1) \otimes (\rho_2(a_2)v_2)$  è una rappresentazione lineare di  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \oplus \mathbf{G}_2$ . La derivazione covariante  $\nabla$  su  $\xi_V$  si esprime per mezzo delle derivazioni covarianti  $\nabla^i$  sui  $\xi_{iV_i}$  mediante<sup>8</sup>

$$\nabla_X(s_1 \otimes s_2) = (\nabla_X^1 s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes (\nabla_X^2 s_2), \quad \forall X \in \mathfrak{X}, \quad \forall s_i \in \Gamma(M, E_{V_i}), \quad i = 1, 2.$$

**XV.12.2. Connessioni principali su spazi affini.** Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato principale con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ , dotato di una connessione  $\mathbf{G}$ -principale con forma di Cartan  $\omega^P \in \Omega_{\text{Ad}}^1(P, \mathfrak{g})$ , e supponiamo di aver fissato sulla base  $M$  una connessione lineare, con forma di Cartan  $\omega^M \in \Omega_{\text{Ad}}^1(L(M), \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$ .

Sia  $(\rho, V)$  una rappresentazione lineare di  $\mathbf{G}$  ed  $\eta = (E \xrightarrow{\pi_V} M)$  il corrispondente fibrato vettoriale. Indichiamo con  $\nabla$  la differenziazione covariante su  $\eta$  e con  $D$  quella definita su  $\mathfrak{T}^*(M)$  dalla connessione lineare.

Utilizzando la connessione prodotto su  $\xi \times_M L(M)$ , possiamo definire una derivazione covariante sugli spazi  $\mathfrak{T}^{r,s}(M, E)$  dei tensori con coefficienti in  $E$ , che denoteremo ancora con  $\nabla$ . Per essa vale la

$$(15.12.1) \quad \nabla_X(s \otimes \alpha) = (\nabla_X s) \otimes \alpha + s \otimes D_X \alpha, \quad \forall s \in \Gamma(M, E), \quad \forall \alpha \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(M).$$

<sup>8</sup>Le definizioni sui tensori di rango uno si estendono per linearità ai tensori di rango qualsiasi.

PROPOSIZIONE XV.12.2. *La derivazione covariante definisce un'applicazione lineare*

$$(15.12.2) \quad \nabla : \mathfrak{T}^{r,s}(M, E) \longrightarrow \mathfrak{T}^{r,s+1}(M, E). \quad \square$$

Poiché il differenziale covariante di un tensore a valori in  $E$  è ancora un tensore a valori in  $E$ , ne possiamo calcolare ancora il differenziale covariante, e così per ricorrenza le le derivate covarianti di ogni ordine. In particolare per una sezione  $s \in \Gamma(M, E)$ , ad esempio, abbiamo la

DEFINIZIONE XV.12.3. La derivata seconda covariante di una sezione  $s \in \Gamma(M, E)$  rispetto ai campi  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  è definita da

$$(15.12.3) \quad \nabla_{X,Y}^2 s = \nabla_X(\nabla_Y s) - \nabla_{D_X Y} s.$$

OSSERVAZIONE XV.12.4. La derivata covariante  $\nabla^k s$  di una sezione  $s \in \Gamma(M, E)$  è un tensore in  $\mathfrak{T}^{0,k}(M, E)$ , cioè un'applicazione  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ volte}} \ni (X_1, \dots, X_k) \longrightarrow \nabla_{X_1, \dots, X_k}^k s \in \Gamma(M, E).$$

Verifichiamo ad esempio la  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilinearità della derivata seconda. La  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linearità di  $\nabla_{X,Y}^2 s$  rispetto ad  $X$  è ovvia. Se  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla_{X,fY}^2 s &= \nabla_X(\nabla_{fY} s) - \nabla_{D_X(fY)} s = \nabla_X(f\nabla_Y s) - \nabla_{fD_X Y + (Xf)Y} s \\ &= (f\nabla_X(\nabla_Y s) + (Xf)\nabla_Y s) - (f\nabla_{D_X Y} s + (Xf)\nabla_Y s) \\ &= f(\nabla_X(\nabla_Y s) + \nabla_{D_X Y} s) = f\nabla_{X,Y}^2 s. \end{aligned}$$

ESEMPIO XV.12.5. Se  $\eta$  è il fibrato banale con spazio totale  $E = M \times V$  e  $\nabla$  la connessione banale, allora la derivata seconda di una sezione  $s \in \mathcal{C}^\infty(M, V)$  è

$$\nabla_{X,Y}^2 s = XYs - (D_X Y)s.$$

Se  $M$  fosse un aperto di  $\mathbb{R}^m$ , con la connessione lineare banale, ed  $X = \sum_{i=1}^m a^i \partial / \partial x^i$ ,  $Y = \sum_{i=1}^m b^i \partial / \partial x^i$  allora

$$\nabla_{X,Y}^2 s = \sum_{i,j=1}^m a^i b^j \frac{\partial^2 s}{\partial x^i \partial x^j}.$$

OSSERVAZIONE XV.12.6. Nell'Esempio XV.12.5, in cui avevamo considerato le connessioni banali sia sul fibrato principale che sulla base (aperto di  $\mathbb{R}^m$ ), il tensore della derivata seconda coincide con la matrice Hessiana dell'applicazione  $s$  ed è quindi, in particolare, simmetrico.

In generale, otteniamo

PROPOSIZIONE XV.12.7. *Per le derivate seconde covarianti delle sezioni di un fibrato vettoriale vale la formula di Ricci:*

$$(15.12.4) \quad \nabla_{X,Y}^2 s - \nabla_{Y,X}^2 s = R^\nabla(X, Y)s - \nabla_{T^D(X,Y)} s, \quad \forall s \in \mathcal{E}(M), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

ove abbiamo indicato con  $R^\nabla$  la curvatura della connessione lineare  $\nabla$  e con  $T^D$  la torsione della connessione lineare  $D$ .

DIMOSTRAZIONE.

$$\begin{aligned}
 \nabla_{X,Y}^2 s - \nabla_{Y,X}^2 s &= (\nabla_X \nabla_Y s - \nabla_{D_X Y} s) - (\nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{D_Y X} s) \\
 &= (\nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s) - \nabla_{D_X Y - D_Y X - [X,Y]} s \\
 &= R^\nabla(X, Y) s - \nabla_{T^D(X,Y)} s.
 \end{aligned}$$

□

Quindi la curvatura di  $\nabla$  e la torsione di  $D$  esprimono l'ostruzione, la prima algebrica, la seconda differenziale, al fatto che il tensore della derivata seconda sia simmetrico. In particolare, se la connessione lineare è simmetrica, l'unica ostruzione è la curvatura.

Si possono ottenere altre formule di Ricci, che esprimono in termini di curvatura e torsione come cambino i tensori delle derivate covarianti di ordine superiore rispetto a permutazioni degli argomenti.



## Connessioni lineari invarianti

### XVI.1. Rappresentazione lineare d'isotropia

Sia  $M$  lo spazio omogeneo di un gruppo di Lie  $\mathbf{K}$ . Ogni  $k \in \mathbf{K}$  definisce il diffeomorfismo  $(L_k : M \ni p \rightarrow kp \in M) \in \mathbf{Diff}^\infty(M)$ . La corrispondenza

$$(16.1.1) \quad L : \mathbf{K} \ni k \longrightarrow L_k \in \mathbf{Diff}^\infty(M)$$

è un omomorfismo di gruppi. Il suo nucleo  $\mathbf{N} = \ker L$  è il *nucleo d'infedeltà* dell'azione di  $\mathbf{K}$  su  $M$ .

Fissiamo un *punto base*  $p_0$  di  $M$ . Il suo stabilizzatore  $\mathbf{H} = \{k \in \mathbf{K} \mid kp_0 = p_0\}$  è un sottogruppo chiuso, e quindi di Lie, di  $\mathbf{G}$ , che si dice anche di *isotropia* in  $p_0$ .

Indicheremo con  $\mathfrak{k}, \mathfrak{h}, \mathfrak{n}$  le algebre di Lie di  $\mathbf{K}, \mathbf{H}, \mathbf{N}$ .

LEMMA XVI.1.1. *Il nucleo d'ineffettività  $\mathbf{N}$  e la sua algebra di Lie  $\mathfrak{n}$  sono descritti da:*

$$(16.1.2) \quad \mathbf{N} = \bigcap_{a \in \mathbf{K}} \text{ad}(a)(\mathbf{H}), \quad \mathfrak{n} = \bigcap_{a \in \mathbf{K}} \text{Ad}(a)(\mathfrak{h}).$$

$\mathbf{N}$  è un sottogruppo normale chiuso di  $\mathbf{K}$  ed  $\mathfrak{n}$  un ideale di  $\mathfrak{k}$ . □

DEFINIZIONE XVI.1.2. L'azione di  $\mathbf{K}$  su  $M$  si dice *effettiva* se  $\mathbf{N} = \{e\}$ , *quasi effettiva* se  $\mathbf{N}$  è discreto.

Poiché un gruppo di Lie è discreto se e soltanto se la sua algebra di Lie è  $\{0\}$ , l'azione di  $\mathbf{K}$  è quasi effettiva se e soltanto se  $\mathfrak{n} = \{0\}$ .

Lasciando fisso  $p_0$ , gli elementi  $a$  dell'isotropia definiscono automorfismi di  $T_{p_0}M$ . Abbiamo quindi una rappresentazione lineare

$$(16.1.3) \quad \mathbf{H} \ni a \longrightarrow a_* = dL_a(p_0) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(T_{p_0}M).$$

DEFINIZIONE XVI.1.3. La (16.1.3) si dice *rappresentazione lineare d'isotropia*.

Il quoziente iniettivo del differenziale in  $e$  della proiezione canonica

$$\pi = \pi_{p_0} : \mathbf{K} \ni k \longrightarrow kp_0 \in M$$

ci permette di identificare lo spazio tangente  $T_{p_0}M$  di  $M$  nel punto base  $p_0$  con il quoziente  $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$  e conseguentemente la rappresentazione lineare d'isotropia con il quoziente della restrizione ad  $\mathbf{H}$  della rappresentazione aggiunta, per mezzo del

diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{Ad}(a)} & \mathfrak{g} & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 \mathfrak{g}/\mathfrak{h} & \xrightarrow{\sim} & T_{p_0}M & \xrightarrow{a_*} & T_{p_0}M & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{g}/\mathfrak{h}.
 \end{array}$$

Otteniamo perciò:

PROPOSIZIONE XVI.1.4. *Il nucleo d'infedeltà della rappresentazione lineare d'isotropia è*

$$(16.1.4) \quad \mathbf{N}_0 = \{a \in \mathbf{H} \mid \text{Ad}(a)(X) - X \in \mathfrak{h}, \forall X \in \mathfrak{g}\}.$$

*Esso è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{H}$ , con algebra di Lie*

$$(16.1.5) \quad \mathfrak{n}_0 = \{X \in \mathfrak{h} \mid [X, Y] \in \mathfrak{h}, \forall Y \in \mathfrak{g}\}. \quad \square$$

Valgono le inclusioni

$$(16.1.6) \quad \mathbf{N} \subset \mathbf{N}_0, \quad \mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}_0$$

e quindi la

PROPOSIZIONE XVI.1.5. *Se la rappresentazione d'isotropia è fedele, allora l'azione di  $\mathbf{K}$  su  $M$  è effettiva.*

*Se il nucleo d'infedeltà dell'applicazione aggiunta è discreto, cioè se  $\mathfrak{n}_0 = \{0\}$ , allora l'azione di  $\mathbf{K}$  su  $M$  è quasi effettiva.*  $\square$

Ricordiamo che lo spazio omogeneo  $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$  è *riduttivo* se la sua algebra d'isotropia  $\mathfrak{h}$  ammette un complemento lineare  $\mathbf{H}$ -invariante  $\mathfrak{m}$  in  $\mathfrak{g}$ , se risulta cioè

$$(16.1.7) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{con} \quad \text{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}.$$

OSSERVAZIONE XVI.1.6. Poiché tutte le rappresentazioni lineari di un gruppo di Lie compatto, o di un gruppo di Lie semisemplice<sup>1</sup>, sono completamente riducibili, tutti gli spazi omogenei  $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$  con  $\mathbf{H}$  compatto, o semisemplice, sono riduttivi.

La prima delle (16.1.7) ci dice che la restrizione ad  $\mathfrak{m}$  del differenziale  $\pi_*(e)$  della proiezione nel quoziente è un isomorfismo lineare  $\pi_*(e) : \mathfrak{m} \rightarrow T_{p_0}M$  ed, insieme alla seconda, che la restrizione ad  $\mathfrak{m}$  della rappresentazione aggiunta di  $\mathbf{H}$  su  $\mathfrak{g}$  è equivalente alla rappresentazione lineare d'isotropia.

Sia  $\mathbf{H}_\mathfrak{m}$  il gruppo formato dalle restrizioni ad  $\mathfrak{m}$  degli automorfismi  $\text{Ad}(a)$ , al variare di  $a$  in  $\mathbf{H}$ . L'isomorfismo tra  $\mathfrak{m}$  e  $T_{p_0}M$  ci permette di considerare  $TM$  come un fibrato vettoriale con fibra tipica  $\mathfrak{m}$ , dotato di una  $\mathbf{H}_\mathfrak{m}$ -struttura, invariante per l'azione di  $\mathbf{K}$ .

<sup>1</sup>Un gruppo di Lie si dice *semisemplice* se la sua algebra di Lie è semisemplice, somma cioè di ideali semplici non abeliani (vedi §XXX.7).

LEMMA XVI.1.7. *Supponiamo che  $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$  sia riduttivo e valgano le (16.1.7). Allora, per ogni  $a \in \mathbf{K}$ , l'applicazione<sup>2</sup>*

$$(16.1.8) \quad \mathfrak{m} \ni X \rightarrow d\pi_a(X^*) \in T_{\pi(a)}M,$$

*è un isomorfismo lineare.*

DIMOSTRAZIONE. Condizione necessaria e sufficiente affinché  $d\pi_a(X^*) = 0$  è che  $X_a^* = L_{a_*}(X)$  sia tangente ad  $a\mathbf{H}$ , cioè che  $X \in \mathfrak{h}$ .  $\square$

Da questo si ricava

LEMMA XVI.1.8. *Se  $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$  è riduttivo, allora  $TM$  è un fibrato vettoriale con fibra tipica  $\mathfrak{m}$  e con una  $\mathbf{H}_m$ -struttura invariante per l'azione di  $\mathbf{K}$ .*  $\square$

PROPOSIZIONE XVI.1.9. *Supponiamo che  $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$  sia riduttivo. Se la rappresentazione lineare d'isotropia è fedele, allora  $\xi = (\mathbf{K} \xrightarrow{\pi} M)$  è il fibrato principale associato ad una  $\mathbf{H}$ -struttura su  $M$ , invariante per l'azione di  $\mathbf{K}$ .*  $\square$

## XVI.2. Connessioni lineari canoniche su spazi omogenei riduttivi

Sia  $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$  uno spazio omogeneo riduttivo, con decomposizione (16.1.7). Mostriamo che la connessione principale definita nel Teorema XIV.13.5 è una connessione lineare su  $M$ . Ricordiamone la definizione.

Sia  $\omega_{\mathbf{K}} \in \Omega^1(\mathbf{K}, \mathfrak{k})$  la forma di Maurer-Cartan di  $\mathbf{K}$ .

NOTAZIONE XVI.2.1. Indichiamo con

$$(16.2.1) \quad \omega_{\mathfrak{h}} \in \Omega^1(\mathbf{K}, \mathfrak{h}) \text{ la componente di } \omega_{\mathbf{K}} \text{ in } \mathfrak{h},$$

$$(16.2.2) \quad \theta_{\mathfrak{m}} \in \Omega^1(\mathbf{K}, \mathfrak{m}) \text{ la componente di } \omega_{\mathbf{K}} \text{ in } \mathfrak{m},$$

rispetto alla decomposizione (16.1.7). Se  $X \in \mathfrak{k}$ , indicheremo con  $X_{\mathfrak{h}}$  ed  $X_{\mathfrak{m}}$  le sue componenti in  $\mathfrak{h}$  ed  $\mathfrak{m}$ , rispettivamente.

Se  $X, Y \in \mathfrak{k}$ , possiamo decomporre il commutatore  $[X, Y]$  nella somma

$$[X, Y] = [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{h}}] + [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{m}}] + [X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{h}}] + [X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{m}}].$$

Per l'ipotesi che  $\mathfrak{m}$  sia  $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -invariante, otteniamo

$$(16.2.3) \quad [X, Y]_{\mathfrak{h}} = [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{h}}] + [X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{h}},$$

$$(16.2.4) \quad [X, Y]_{\mathfrak{m}} = [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{m}}] + [X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}} + [X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}}.$$

DEFINIZIONE XVI.2.2. Chiamiamo la  $\theta_{\mathfrak{m}}$  *forma canonica* e la  $\omega_{\mathfrak{h}}$  *forma di connessione*<sup>3</sup> dello spazio riduttivo  $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ , relativa alla decomposizione (16.1.7).

TEOREMA XVI.2.3. *Siano  $\mathbf{K}$  un gruppo di Lie connesso,  $\mathbf{H}$  un suo sottogruppo chiuso,  $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$  e consideriamo  $\xi = (\mathbf{K} \xrightarrow{\pi} M)$  come un fibrato principale con gruppo strutturale  $\mathbf{H}$ .*

<sup>2</sup>Ricordiamo che  $X^*$  è il campo di vettori invariante a sinistra su  $\mathbf{K}$  corrispondente all'elemento  $X \in \mathfrak{m} \subset \mathfrak{k}$ .

<sup>3</sup>È la stessa forma di connessione del Teorema XIV.13.5.

- (1) Se  $M$  è riduttivo e valgono le (16.1.7), allora la  $\omega_{\mathfrak{h}}$  è la forma di Cartan di una connessione principale su  $\xi$ , invariante rispetto alle traslazioni a sinistra su  $\mathbf{K}$ , e definisce quindi su  $M$  una connessione lineare per cui gli elementi di  $\mathbf{K}$  agiscono su  $M$  come trasformazioni affini.
- (2) Ogni connessione principale su  $\xi$ , che sia invariante rispetto alle traslazioni a sinistra su  $\mathbf{K}$ , determina univocamente una decomposizione (16.1.7), rispetto alla quale la forma di Cartan sia la  $\mathfrak{h}$ -componente della forma di Maurer-Cartan di  $\mathbf{K}$ .
- (3) Le forme di torsione e di curvatura di una connessione lineare con forma di Cartan  $\omega_{\mathfrak{h}}$  definita dalla (16.2.1) sono:

$$(16.2.5) \quad \Theta(X^*, Y^*) = -[X_m, Y_m]_m, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k},$$

$$(16.2.6) \quad \Omega(X^*, Y^*) = -[X_m, Y_m]_{\mathfrak{h}}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

DIMOSTRAZIONE. La (1) e la (2) sono parte dell'enunciato del Teorema XIV.13.5. Verifichiamo la (3). Se  $X \in \mathfrak{k}$ , allora  $X_m^*$  ed  $X_{\mathfrak{h}}^*$  sono, rispettivamente, le componenti orizzontale e verticale di  $X^*$ . Otteniamo quindi, per  $X, Y \in \mathfrak{k}$ ,

$$\begin{aligned} \Theta(X^*, Y^*) &= \Theta(X_m^*, Y_m^*) = X_m^* Y_m^* - Y_m^* X_m^* - \theta_m([X_m^*, Y_m^*]) = -\theta_m([X_m, Y_m]^*) \\ &= -[X_m, Y_m]_m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega(X^*, Y^*) &= \Omega(X_m^*, Y_m^*) = X_m^* \omega_{\mathfrak{h}}(Y_m^*) - Y_m^* \omega_{\mathfrak{h}}(X_m^*) - \omega_{\mathfrak{h}}([X_m^*, Y_m^*]) \\ &= -\omega_{\mathfrak{h}}([X_m, Y_m]^*) = -[X_m, Y_m]_{\mathfrak{h}}. \end{aligned}$$

La dimostrazione è completa.  $\square$

OSSERVAZIONE XVI.2.4. Utilizzando le (16.2.5), (16.2.6), ed identificando  $\mathfrak{m}$  con  $T_{p_0}M$  mediante la  $\pi_*(e)$ , possiamo descrivere i tensori di torsione e curvatura nel punto base  $p_0$  nella forma:

$$(16.2.7) \quad T_{p_0}(X, Y) = -[X, Y]_m, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

$$(16.2.8) \quad R_{p_0}(X, Y)Z = -[[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z]_m, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}.$$

OSSERVAZIONE XVI.2.5. Se  $\mathbf{K}$  è un gruppo di Lie semisemplice connesso ed  $\mathbf{H}$  compatto, con  $\mathfrak{h}$  compatta massimale<sup>4</sup>, abbiamo la *decomposizione di Cartan*  $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ , ove  $\mathfrak{p}$  è l'ortogonale di  $\mathfrak{h}$  per la forma di Killing di  $\mathfrak{k}$ . Scegliamo  $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ . Poiché  $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$ , otteniamo su  $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$  una connessione simmetrica (cioè con torsione nulla). La  $\vartheta : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{k}$ , che lascia fissi gli elementi di  $\mathfrak{h}$  e trasforma quelli di  $\mathfrak{p}$  nei loro opposti è un automorfismo involutivo di  $\mathfrak{k}$ , che si dice un'*involutione di Cartan*. I campi orizzontali standard su  $\mathbf{K}$  sono i campi invarianti a sinistra  $X^*$ , con  $X \in \mathfrak{m}$  e sono perciò completi. La  $M$  è quindi in questo caso uno *spazio simmetrico*.

Siano ad esempio  $\mathbf{K} = \mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$  ed  $\mathbf{H} = \mathbf{SO}(n)$ . La decomposizione di Cartan è  $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{p}$ , ove  $\mathfrak{so}(n)$  e  $\mathfrak{p}$  sono, rispettivamente, gli spazi vettoriali delle matrici antisimmetriche e simmetriche in  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ . Lo spazio omogeneo  $M$  ha dimensione  $(n^2 + n - 2)/2$  ed ha una connessione  $\mathbf{SO}(n)$ -lineare canonica  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ -invariante, con torsione nulla e curvatura  $R_{p_0}(X, Y)Z = -[[X, Y], Z]$  per  $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$ .

<sup>4</sup>Cioè una sottoalgebra massimale su cui la forma di Killing  $\kappa(X, Y) = \text{traccia}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y))$  è definita negativa.

ESEMPIO XVI.2.6. Il gruppo  $\mathbf{SO}(m+1)$  opera transitivamente sulla sfera  $S^m$ . La proiezione  $\mathbf{SO}(m+1) \ni a \rightarrow ae_0 \in S^m$  ci permette di rappresentare la sfera  $S^m$  come lo spazio omogeneo  $\mathbf{SO}(m+1)/\mathbf{SO}(m)$ . La decomposizione

$$\mathfrak{so}(m+1) = \mathfrak{so}(m) \oplus \mathfrak{m}$$

ove

$$\mathfrak{so}(m) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}), A^\dagger = -A \right\}, \quad \mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -v^\dagger \\ v & 0 \end{pmatrix} \middle| v \in \mathbb{R}^m \right\}$$

descrive su  $M$  la struttura di spazio omogeneo riduttivo. È  $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{so}(m)$  e quindi la connessione invariante su  $S^m$  è priva di torsione. Le geodetiche con origine nel punto  $e_0$  di isotropia  $\mathfrak{so}(m)$  sono le proiezioni su  $S^m$  dei gruppi a un parametro di  $\mathbf{SO}(m+1)$  generati dagli elementi di  $\mathfrak{m}$ . Ogni matrice di  $\mathfrak{m}$  è coniugata, modulo  $\mathbf{SO}(m)$ , ad una matrice della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos(ct) & -\sin(ct) & 0 \\ \sin(ct) & \cos(ct) & 0 \\ 0 & 0 & I_{m-1} \end{pmatrix}.$$

La sua proiezione  $\exp(tA)e_0$  è un arco di cerchio massimo di  $S^m$  passante per  $e_0$ . Tutte le geodetiche su  $S^m$  si ottengono traslando le geodetiche per  $e_0$  per mezzo degli elementi di  $\mathbf{SO}(m+1)$  e i loro supporti sono dunque tutte e sole le intersezioni di  $S^m$  con i piani passanti per l'origine di  $\mathbb{R}^{m+1}$ .

ESEMPIO XVI.2.7. Sia  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_m \end{pmatrix}$  ed

$$\mathbf{SO}(1, m) = \{a \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \mid a^\dagger B a = B\}.$$

La componente connessa dell'identità  $\mathbf{SO}^+(1, m)$  di  $\mathbf{SO}(1, m)$  opera transitivamente su

$$M = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_0 = \sqrt{1 + x_1^2 + \cdots + x_m^2} > 0\},$$

che possiamo quindi identificare allo spazio simmetrico  $\mathbf{SO}^+(1, m)/\mathbf{SO}(m)$  mediante la proiezione  $\mathbf{SO}^+(1, m) \ni a \rightarrow ae_0 \in M$ . L'algebra di Lie  $\mathfrak{so}(1, m)$  di  $\mathbf{SO}(1, m)$  si decompone in

$$\mathfrak{so}(1, m) = \mathfrak{so}(m) \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{con}$$

$$\mathfrak{so}(m) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}), A^\dagger = -A \right\} \quad \text{ed} \quad \mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v^\dagger \\ v & 0 \end{pmatrix} \middle| v \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Abbiamo  $\text{Ad}(\mathbf{SO}(m))(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$  ed  $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{so}(m)$ . Quindi possiamo definire su  $M$  una connessione lineare canonica simmetrica. Le geodetiche uscenti da  $e_0$  sono le proiezioni dei sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{SO}_0(1, m)$  generati dagli elementi di  $\mathfrak{m}$ . Modulo  $\mathbf{SO}(m)$ , ogni matrice di  $\mathfrak{m}$  è coniugata ad una della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \longrightarrow \exp(tA) = \begin{pmatrix} \cosh(ct) & \sinh(ct) & 0 \\ \sinh(ct) & \cosh(ct) & 0 \\ 0 & 0 & I_{m-1} \end{pmatrix}.$$

La connessione è completa. Le geodetiche per  $e_0$  sono le intersezioni di  $M$  con i piani passanti per 0 ed  $e_0$ . Tutte le geodetiche sono immagini di queste mediante le traslazioni rispetto al gruppo  $\mathbf{SO}^+(1, m)$ .

### XVI.3. Connessioni lineari invarianti

Possiamo applicare al caso particolare delle connessioni lineari i risultati sulle connessioni principali invarianti del §XIV.14.

Supponiamo che  $M$  (di dimensione  $m$ ) sia lo spazio omogeneo di un gruppo di Lie  $\mathbf{K}$ , ed utilizziamo le notazioni del paragrafo precedente. In particolare,  $\mathbf{H}$  è l'isotropia del suo punto base  $p_0$ ,  $\pi_{\mathbf{K}} : \mathbf{K} \ni k \rightarrow k \cdot p_0 \in M \simeq \mathbf{K}/\mathbf{H}$  la proiezione corrispondente. Indichiamo ancora con  $k\sigma (= dL_k \circ \sigma)$  l'azione di  $\mathbf{K}$  su  $L(M)$ .

Fissiamo un sottogruppo chiuso  $\mathbf{G}$  di  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ .

DEFINIZIONE XVI.3.1. Una  $\mathbf{G}$ -struttura<sup>5</sup>  $\xi = (P \xrightarrow{\pi_P} M)$  su  $M$  si dice  $\mathbf{K}$ -invariante se  $kP = P$ , per ogni  $k \in \mathbf{K}$ .

Ogni  $X \in \mathfrak{k}$  definisce un sottogruppo a un parametro  $\{\exp(tX)\}_{t \in \mathbb{R}}$  di  $\mathbf{K}$ , che agisce a sinistra, come gruppo a un parametro di diffeomorfismi, su  $\mathbf{K}$ ,  $M$  e  $P$ . Indicheremo con  $X^{\mathbf{K}}$ ,  $X^M$  ed  $X^P$  i rispettivi generatori infinitesimali. In particolare,  $X^{\mathbf{K}}$  è il campo di vettori invariante a destra su  $\mathbf{K}$  corrispondente ad  $X$ , ed<sup>6</sup>

$$X_k^{\mathbf{K}} = R_{k*}X = [\text{Ad}(k^{-1})X]_k^*, \quad \forall k \in \mathbf{K}.$$

I campi  $X^{\mathbf{K}}$  ed  $X^P$  sono rispettivamente  $\pi_{\mathbf{K}}$ - e  $\pi_P$ -correlati ad  $X^M$  e, per ogni  $\sigma \in P$ ,  $\ell_{\sigma}$ -correlati tra loro dall'applicazione  $\ell_{\sigma} : \mathbf{K} \ni k \rightarrow k\sigma \in P$ .

LEMMA XVI.3.2. Per ogni  $X, Y \in \mathfrak{k}$  valgono le

$$(16.3.1) \quad [X^{\mathbf{K}}, Y^{\mathbf{K}}] = -[X, Y]^{\mathbf{K}}, \quad [X^P, Y^P] = -[X, Y]^P, \quad [X^M, Y^M] = -[X, Y]^M.$$

□

LEMMA XVI.3.3. Abbiamo

$$(16.3.2) \quad k_*(X^P) = [\text{Ad}(k)(X)]^P, \quad k_*(X^M) = [\text{Ad}(k)(X)]^M, \quad \forall k \in \mathbf{K}, \forall X \in \mathfrak{k},$$

$$(16.3.3) \quad R_{a_*}X^P = X^P, \quad \forall a \in \mathbf{G}, \forall X \in \mathfrak{k}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti, per ogni  $k \in \mathbf{K}$  ed  $X \in \mathfrak{k}$ ,

$$k \cdot (\exp(tX) \cdot p) = \exp(t\text{Ad}(k)(X)) \cdot (k \cdot p), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in M,$$

$$k \cdot (\exp(tX) \cdot \sigma) = \exp(t\text{Ad}(k)(X)) \cdot (k \cdot \sigma), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \sigma \in P.$$

Derivando rispetto a  $t$  in  $t = 0$  otteniamo le (16.3.2). Se  $a \in \mathbf{G}$  ed  $X \in \mathfrak{k}$ , allora

$$e^{tX} \cdot (\sigma \cdot a) = (e^{tX} \cdot \sigma) \cdot a, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \sigma \in P$$

e, derivando rispetto a  $t$  in  $t = 0$ , otteniamo le (16.3.3). □

<sup>5</sup>Questo significa che  $\xi$  è un sottofibrato di  $L(M)$  e l'azione di  $\mathbf{G}$  su  $P$  è la restrizione dell'azione di  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$  su  $L(M)$ .

<sup>6</sup>Ricordiamo che  $X_k^* = (L_k)_*(X)$  è il campo di vettori invariante a sinistra associato ad  $X \in \mathfrak{k}$ .

Il Teorema di Wang (Teorema XVI.3.6) caratterizza le  $\mathbf{G}$ -connessioni affini  $\mathbf{K}$ -invarianti su  $M$ .

Per ogni  $\sigma \in P_{p_0}$  l'applicazione

$$(16.3.4) \quad \lambda_\sigma : \mathbf{H} \ni h \longrightarrow \sigma^{-1} \circ h_* \circ \sigma \in \mathbf{G}$$

è un omomorfismo di gruppi di Lie. Poiché  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ , il suo differenziale nell'identità  $\lambda_{\sigma_*} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$  è una rappresentazione lineare di  $\mathfrak{h}$ .

Ricordiamo i risultati dimostrati nel §XIV.14.

LEMMA XVI.3.4. *Sia  $\omega$  la forma di Cartan di una  $\mathbf{G}$ -connessione lineare  $\mathbf{K}$ -invariante su  $\xi$ . Fissato un punto  $\sigma_0 \in P_{p_0}$ , l'applicazione lineare*

$$(16.3.5) \quad \Lambda_{\sigma_0} : \mathfrak{k} \ni X \longrightarrow \omega(X_{\sigma_0}^P) \in \mathfrak{g}, \quad \forall X \in \mathfrak{k}.$$

soddisfa le

$$(16.3.6) \quad \begin{cases} \Lambda_{\sigma_0}(X) = \lambda_{\sigma_0*}(X), & \forall X \in \mathfrak{h}, \\ \Lambda_{\sigma_0}(\text{Ad}_{\mathfrak{h}}(h)(X)) = \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\sigma_0}(h))(\Lambda_{\sigma_0}(X)), & \forall h \in \mathbf{H}, \forall X \in \mathfrak{k}. \quad \square \end{cases}$$

OSSERVAZIONE XVI.3.5. La (16.3.6) ci dice che la  $\Lambda_{\sigma_0}$  estende l'omomorfismo di algebre di Lie  $\lambda_{\sigma_0*}$  ad un'omomorfismo dell' $\mathbf{H}$ -modulo  $\mathfrak{k}$  sul  $\mathbf{G}$ -modulo  $\mathfrak{g}$ . Come già osservato in precedenza,  $\Lambda_{\sigma_0}$  non è, in generale, un omomorfismo di algebre di Lie.

TEOREMA XVI.3.6 (Wang). *Sia  $\xi$  una  $\mathbf{G}$ -struttura  $\mathbf{K}$ -invariante su  $M$ . La (16.3.5) definisce una corrispondenza biunivoca tra le  $\mathbf{G}$ -connessioni affini  $\mathbf{K}$ -invarianti su  $M$  e le applicazioni lineari  $\Lambda_{\sigma_0} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{k}, \mathfrak{g})$  che soddisfano le (16.3.6).  $\square$*

OSSERVAZIONE XVI.3.7. La (16.3.6) implica che

$$(16.3.7) \quad \Lambda_{\sigma_0}([X, Y]) = [\lambda_{\sigma_0*}(X), \Lambda_{\sigma_0}(Y)], \quad \forall X \in \mathfrak{h}, \forall Y \in \mathfrak{k},$$

e le due condizioni sono equivalenti se  $\mathbf{H}$  è connesso.

LEMMA XVI.3.8. *Per ogni  $X \in \mathfrak{k}$  l'applicazione  $P \ni \sigma \rightarrow \sigma \circ \omega(X_\sigma^P) \circ \sigma^{-1} \in T^{1,1}M$  è costante sulle fibre di  $\xi$  e definisce quindi un tensore di tipo (1, 1) su  $M$ .*

DIMOSTRAZIONE. I campi  $X^P$  sono invarianti per l'azione di  $\mathbf{G}$  sulle fibre. Quindi  $\omega(X^P) \in \Omega_{\text{Ad},0}^0(P, \mathfrak{g})$  corrisponde ad una sezione  $\sigma \circ \omega(X^P) \circ \sigma^{-1} \in \Gamma(M, T^{1,1})$ .  $\square$

NOTAZIONE XVI.3.9. Indichiamo con  $L : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{T}^{1,1}(M)$  l'applicazione che fa corrispondere ad  $X \in \mathfrak{k}$  il tensore di tipo (1, 1) definito nel Lemma XVI.3.8.

Una connessione  $\mathbf{G}$ -lineare  $\mathbf{K}$ -invariante si può quindi considerare come il dato di un'applicazione lineare  $L$  che fa corrispondere ad ogni  $X \in \mathfrak{k}$  un tensore  $\mathbf{K}$ -invariante  $L(X) \in \mathfrak{T}^{1,1}(M)$ . Se  $h \in \mathbf{H}$ , e  $\sigma \in P_{p_0}$ , abbiamo

$$\begin{aligned} h_* \circ \sigma \circ \omega(X^P) \circ \sigma^{-1} \circ h_*^{-1} &= \sigma \circ (\sigma^{-1} \circ h_* \circ \sigma) \circ \omega(X^P) \circ (\sigma^{-1} \circ h_* \circ \sigma)^{-1} \circ \sigma^{-1} \\ &= \sigma \circ \text{Ad}(\lambda_{\sigma}(h))(\omega(X^P)) \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ \omega([\text{Ad}(h)(X)]^P) \circ \sigma^{-1}. \end{aligned}$$

Abbiamo perciò

PROPOSIZIONE XVI.3.10. *Una connessione lineare  $\mathbf{K}$ -invariante su  $M$  è il dato di un'applicazione lineare  $L : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{T}^{1,1}(M)$  che soddisfa la condizione*

$$(16.3.8) \quad \begin{cases} k_*L(X) = L(X), & \forall k \in \mathbf{K}, \forall X \in \mathfrak{k}, \\ k_*L(X)k_*^{-1}(p) = L(\text{Ad}(k)(X))(p), & \forall p \in M, \forall k \in \mathbf{K}_p, \end{cases}$$

ove abbiamo indicato con  $\mathbf{K}_p = \{k \in \mathbf{K} \mid kp = p\}$  lo stabilizzatore di  $p$  in  $\mathbf{K}$ .  $\square$

Per Calcolare torsione e di curvatura di una  $\mathbf{G}$ -connessione lineare  $\mathbf{K}$ -invariante, è utile premettere il

LEMMA XVI.3.11. *Con le notazioni fin qui introdotte:*

$$(16.3.9) \quad X^P \theta_\sigma(Y^P) = -\sigma^{-1}([X, Y]^M), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}, \quad \forall \sigma \in P.$$

Se  $\omega$  è la forma di Cartan di una connessione  $\mathbf{G}$ -lineare  $\mathbf{K}$ -invariante, allora

$$(16.3.10) \quad X^P \omega(Y^P) = -\omega([X, Y]^P), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché  $\mathbf{K}$  definisce un gruppo di automorfismi di  $\xi$ , la derivata di Lie di  $\theta$  rispetto ai campi  $X^P$  è nulla. Abbiamo quindi

$$X^P \theta(Y^P) = (L_{X^P} \theta)(Y^P) + \theta([X^P, Y^P]) = -\sigma^{-1}(\pi_{P*}([X, Y]^P)) = -\sigma^{-1}([X, Y]^M).$$

Analogamente, poiché la derivata di Lie di  $\omega$  rispetto ai campi  $X^P$  è nulla,

$$X^P \omega(Y^P) = (L_{X^P} \omega)(Y^P) + \omega([X^P, Y^P]) = -\omega([X, Y]^P).$$

$\square$

PROPOSIZIONE XVI.3.12. *La torsione e la curvatura della connessione  $\Gamma$  associata all'applicazione  $\Lambda_{\sigma_0}$  sono parallele e si esprimono, mediante le formule:*

$$(16.3.11) \quad T(X^M, Y^M) = L(X)Y^M - L(Y)X^M - [X, Y]^M, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k},$$

$$(16.3.12) \quad R(X^M, Y^M) = [L(X), L(Y)] - L([X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando la (16.3.9) e le equazioni di struttura, abbiamo

$$\begin{aligned} \Theta_\sigma(X^P, Y^P) &= X^P \theta(Y^P) - Y^P \theta(X^P) - \theta([X^P, Y^P]) + \omega(X^P) \theta(Y^P) - \omega(Y^P) \theta(X^P) \\ &= -\sigma^{-1}([X, Y]^M) + \sigma^{-1}([Y, X]^M) + \sigma^{-1}([X, Y]^M) \\ &\quad + \Lambda_\sigma(X) \sigma^{-1}(Y^M) - \Lambda_\sigma(Y) \sigma^{-1}(X^M) \\ &= -\sigma^{-1}([X, Y]^M) + \Lambda_\sigma(X) \sigma^{-1}(Y^M) - \Lambda_\sigma(Y) \sigma^{-1}(X^M). \end{aligned}$$

Da questa ricaviamo la (16.3.11). Analogamente otteniamo

$$\begin{aligned} \Omega(X^P, Y^P) &= X^P \omega(Y^P) - Y^P \omega(X^P) - \omega([X^P, Y^P]) + [\omega(X^P), \omega(Y^P)] \\ &= \omega([X^P, Y^P]) - \omega([Y^P, X^P]) - \omega([X^P, Y^P]) + [\omega(X^P), \omega(Y^P)] \\ &= -\omega([X, Y]^P) + [\omega(X^P), \omega(Y^P)], \end{aligned}$$

da cui ricaviamo la (16.3.12).  $\square$



### XVI.4. Connessioni lineari invarianti su spazi riduttivi

Utilizziamo le notazioni del §XVI.3. Supponiamo inoltre, in questo paragrafo, che lo spazio omogeneo  $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$  sia *riduttivo* e che valgano le (16.1.7), cioè che  $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ , con  $\text{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$ . In particolare,  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ .

Sia  $m$  la dimensione di  $M$ ,  $\mathbf{G}$  un sottogruppo di Lie di  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$  e  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  una  $\mathbf{G}$ -struttura su  $M$ , invariante per l'azione di  $\mathbf{K}$ .

Fissiamo un riferimento  $\sigma_0 \in P_{p_0}$ , ove  $p_0$  è un punto base di isotropia  $\mathbf{H}$ . Osserviamo che, in questo caso, identificando  $T_{p_0}M$  con  $\mathfrak{m}$ , è

$$\begin{aligned}\lambda_{\sigma_0}(h)X &= \text{Ad}(h)X = hXh^{-1}, \quad \forall h \in \mathbf{H}, \quad \forall X \in \mathfrak{m}, \\ \lambda_{\sigma_0*}(Y)X &= \text{ad}(Y)X = [Y, X], \quad \forall Y \in \mathfrak{h}, \quad \forall X \in \mathfrak{m}.\end{aligned}$$

Il Teorema XIV.14.15 dà in questo caso:

**TEOREMA XVI.4.1 (Wang).** *C'è una corrispondenza biunivoca tra le  $\mathbf{G}$ -connessioni affini  $\mathbf{K}$ -invarianti su  $M$  e le applicazioni lineari*

$$(16.4.1) \quad \Lambda : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{g} \quad \text{tali che}$$

$$(16.4.2) \quad \Lambda(\text{Ad}_{\mathfrak{k}}(h)(X)) = \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\sigma_0}(h))(\Lambda(X)), \quad \forall h \in \mathbf{H}, \quad \forall X \in \mathfrak{m}. \quad \square$$

Il sistema di riferimento  $\sigma_0$  ci permette di identificare  $T_{p_0}M$  con  $\mathfrak{m}$  e gli elementi di  $\mathfrak{g}$  con endomorfismi di  $\mathfrak{m}$ . Indichiamo al solito con  $X_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{m}$  ed  $X_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}$  le componenti di  $X \in \mathfrak{k}$  rispetto alla decomposizione (16.1.7). Con queste notazioni, la Proposizione XVI.3.12 si riduce all'enunciato seguente.

**TEOREMA XVI.4.2.** *La torsione e la curvatura della  $\mathbf{G}$ -connessione  $\mathbf{K}$ -invariante  $\Gamma$  sono parallele e sono espresse in termini della  $\Lambda$  dalle formule*

$$(16.4.3) \quad T_{p_0}(X, Y) = \Lambda(X)Y - \Lambda(Y)X - [X, Y]_{\mathfrak{m}}$$

$$(16.4.4) \quad R_{p_0}(X, Y) = [\Lambda(X), \Lambda(Y)] - \Lambda([X, Y]_{\mathfrak{m}}) - \text{ad}([X, Y]_{\mathfrak{h}}) \\ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m} \simeq T_{p_0}M. \quad \square$$

**DEFINIZIONE XVI.4.3.** Chiamiamo *canonica* la connessione lineare corrispondente alla scelta  $\Lambda = 0$ .

Poiché  $\Lambda(X) = \omega_{\sigma_0}(X^*)$ , otteniamo

**PROPOSIZIONE XVI.4.4.** *La connessione canonica è l'unica connessione  $\mathbf{G}$ -lineare  $\mathbf{K}$ -invariante tale che, per ogni  $X \in \mathfrak{m}$ , il campo invariante a sinistra  $X^*$  sia orizzontale.*  $\square$

**PROPOSIZIONE XVI.4.5.** *Supponiamo che  $M$  sia riduttivo,  $\xi$  una  $\mathbf{G}$ -struttura su  $M$  e  $\Gamma$  la connessione canonica su  $\xi$ . Allora:*

- (1)  $\Gamma$  è completa;
- (2) Le geodetiche sono le curve integrali dei campi  $X^M$  al variare di  $X$  in  $\mathfrak{m}$ .
- (3) La torsione e la curvatura di  $\Gamma$  soddisfano le

$$(16.4.5) \quad T_{p_0}(X, Y) = -[X, Y]_{\mathfrak{m}}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

$$(16.4.6) \quad R_{p_0}(X, Y)Z = -[[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z], \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m},$$

$$(16.4.7) \quad \nabla T = 0,$$

$$(16.4.8) \quad \nabla R = 0.$$

□

Viceversa, vale il

**TEOREMA XVI.4.6.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile affine connessa. Fissiamo un riferimento  $\sigma_0 \in \mathbb{L}(M)$  e sia  $P = \mathbb{L}(\sigma_0)$  lo spazio totale del fibrato di ologonia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  per  $\sigma_0$ .*

- (1) *Supponiamo esista un gruppo di Lie connesso  $\mathbf{K}$  di trasformazioni affini di  $M$  tale che l'immagine di  $\sigma_0$  mediante  $\mathbf{K}$  contenga  $P$ . Allora  $M$  è uno spazio omogeneo riduttivo di  $\mathbf{K}$  e la connessione  $\Gamma$  coincide con la connessione canonica.*
- (2) *Se  $\nabla T = 0$ ,  $\nabla R = 0$  ed  $M$  è semplicemente connessa, allora  $M$  ammette un gruppo di Lie  $\mathbf{K}$  di trasformazioni affini, che opera in modo semplicemente transitivo su  $P$  e la connessione su  $M$  è equivalente alla connessione canonica su uno spazio riduttivo  $\mathbf{K}/\mathbf{H}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** (1). Siano  $\mathbf{H}$  lo stabilizzatore in  $\mathbf{K}$  del punto  $p_0 = \pi(\sigma_0)$  e  $\lambda : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(T_{p_0}M)$  la rappresentazione lineare d'isotropia di  $\mathbf{H}$ . Il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{L}(M) \\ \pi_{\mathbf{K}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbb{L}(M)} \\ \mathbf{K}/\mathbf{H} & \xrightarrow{\cong} & M, \end{array}$$

con  $\rho(k) = dL_k(p_0) \circ \sigma_0$ , descrive un morfismo di fibrati principali. L'immagine  $P'$  di  $\rho$  è lo spazio totale di un sottofibrato di  $\mathbb{L}(M)$ , con  $P \subset P' \subset \mathbb{L}(M)$ .

Quindi, indicando con  $H_{\sigma_0}$  il sottospazio orizzontale di  $T_{\sigma_0}\mathbb{L}(M)$ , abbiamo

$$H_{\sigma_0} \subset T_{\sigma_0}P \subset T_{\sigma_0}P'.$$

Definiamo  $\mathfrak{m}$  come l'immagine inversa in  $\mathfrak{f}$  di  $H_{\sigma_0}$ , mediante il differenziale dell'isomorfismo  $d\rho(e) : \mathfrak{g} \rightarrow T_{\sigma_0}P'$ . È cioè  $H_{\sigma_0} = d\rho(e)(\mathfrak{m})$ . Se  $h \in \mathbf{H}$ , allora  $\rho(h) = \sigma_0\lambda(h)$  e quindi  $d\rho(e) \circ \text{Ad}(h) = dL_h \circ d\rho(e)$ . Poiché per ipotesi le  $L_h$  sono affini, è  $dL_h(H_{\sigma_0}) = H_{\sigma_0}$  e quindi  $\text{Ad}(h)(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$ . Poiché la distribuzione orizzontale su  $P'$  è generata dalle immagini dei campi  $X^*$  di  $\mathbf{K}$ , al variare di  $X$  in  $\mathfrak{m}$ , ne segue che la connessione lineare su  $M$  coincide con la connessione canonica associata alla decomposizione  $\mathfrak{f} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$  sullo spazio omogeneo riduttivo  $\mathbf{K}/\mathbf{H}$ .

(2). Nel Corollario XV.4.5 abbiamo costruito un'algebra di Lie  $\mathfrak{f} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ , ove  $\mathfrak{h}$  è l'algebra di Lie del gruppo di ologonia in  $\sigma_0$ ,  $\mathfrak{m} = \mathbb{R}^m$ , e le operazioni in  $\mathfrak{f}$  sono definite da

$$\begin{cases} [A, B] \in \mathfrak{h} \text{ e } [A, B]^* = [A^*, B^*] & \text{se } A, B \in \mathfrak{h}, \\ [A, X] \in \mathfrak{m} \text{ e } [A, X]^* = [A^*, X^*] = (AX)^* & \text{se } A \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{m}, \\ [X, Y] = -\Omega(X^*, Y^*) \in \mathfrak{h} & \text{se } X, Y \in \mathfrak{m}, \end{cases}$$

ove gli  $A^*$  sono i campi verticali fondamentali, corrispondenti ad  $A \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ , e gli  $X^*$  i campi orizzontali standard, caratterizzati da  $\theta(X^*) = X \in \mathbb{R}^m$ . Su  $P$  è definito un parallelismo completo

$$P \times \mathfrak{k} = P \times (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}) \ni (\sigma; A, X) \rightarrow A_\sigma^* + X_\sigma^* \in TP$$

e quindi una forma  $\tilde{\omega} \in \Omega^1(P, \mathfrak{k})$ , con  $\tilde{\omega}(A^* + X^*) = A + X$ .

Siano  $\mathbf{K}$  un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie  $\mathfrak{k}$  ed  $\omega_{\mathbf{K}}$  la sua forma di Maurer-Cartan. Identifichiamo lo spazio tangente del prodotto  $\mathbf{K} \times P$  con il prodotto  $T\mathbf{K} \times TP$  degli spazi tangenti e consideriamo la forma  $\omega_{\mathbf{K}} - \tilde{\omega} \in \Omega^1(\mathbf{K} \times P, \mathfrak{k})$ , ove  $\omega_{\mathbf{K}}$  è la forma di Maurer-Cartan di  $\mathbf{K}$ . La  $\mathfrak{V} = \{Z = (X, Y) \in T(\mathbf{K} \times P) \mid \omega_{\mathbf{K}}(X) = \tilde{\omega}(Y)\}$  è una distribuzione il cui rango è uguale alle dimensioni di  $P$  e di  $\mathbf{K}$ . Dico che  $\mathfrak{V}$  è totalmente integrabile. Infatti essa è generata dagli elementi

$$(A^* + X^*, A^* + X^*), \quad \text{con } A \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{m}$$

ed abbiamo

$$\begin{aligned} & [(A_1^* + X_1^*, A_1^* + X_1^*), (A_2^* + X_2^*, A_2^* + X_2^*)] \\ &= [(A_1^* + X_1^*, A_2^* + X_2^*), [(A_1^* + X_1^*, A_2^* + X_2^*)]] \\ &= [(A_1 + X_1, A_2 + X_2)^*, [(A_1^* + X_1^*, A_2^* + X_2^*)]] \in \mathfrak{V}, \quad \forall A_1, A_2 \in \mathfrak{h}, \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{m}. \end{aligned}$$

Consideriamo l'integrale massimale  $N$  di  $\mathfrak{V}$  per il punto  $(e_{\mathbf{K}}, \sigma_0)$ . Dico che  $N$  è il grafico di un rivestimento di  $\mathbf{K}$  su  $P$ . Infatti, ogni cammino  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{K})$  (rispettivamente  $\hat{\gamma} \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], P)$ ) determina un cammino  $\alpha = \omega_{\mathbf{K}}(\dot{\gamma}) \in \mathcal{C}([0, 1], \mathfrak{k})$  (rispettivamente  $\alpha = \tilde{\omega}(\dot{\hat{\gamma}}) \in \mathcal{C}([0, 1], \mathfrak{k})$ ). Poiché  $\mathbf{K}$  è connesso e semplicemente connesso, la proiezione sul primo fattore definisce un rivestimento a un solo foglio, e quindi un diffeomorfismo  $f$ , di  $N$  su  $\mathbf{K}$ . Componendo l'inversa di  $f$  con la proiezione di  $N$  su  $P$ , otteniamo un diffeomorfismo locale  $\eta : \mathbf{K} \rightarrow P$  che è un rivestimento.

Definiamo l'azione di  $\mathbf{K}$  su  $P$  nel modo seguente. Se  $k \in \mathbf{K}$  e  $\sigma \in P$ , fissiamo una curva  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{K})$  con  $\gamma(0) = e_{\mathbf{K}}$  e  $\gamma(1) = k$ . Sia  $\gamma_\sigma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], P)$  la curva definita da  $\tilde{\omega}(\dot{\gamma}_\sigma) = \omega_{\mathbf{K}}(\dot{\gamma})$  con punto iniziale  $\sigma$  e poniamo  $k\sigma = \gamma_\sigma(1)$ . Poiché i laccetti in  $\mathbf{K}$  di punto iniziale  $e_{\mathbf{K}}$  si trasformano in questo modo in laccetti di punto iniziale  $\sigma$ , l'azione è ben definita. Gli elementi  $k \in \mathbf{K}$  che trasformano in sé la fibra  $P_{p_0}$  formano un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{K}$ . Sia  $\mathbf{H}$  la sua componente connessa dell'identità. La composizione  $\pi \circ \eta$  definisce per passaggio al quoziente un rivestimento  $\varpi : \mathbf{K}/\mathbf{H} \rightarrow M$ , che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \xrightarrow{\eta} & P \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbf{K}/\mathbf{H} & \xrightarrow{\varpi} & M. \end{array}$$

Poiché  $M$  è connessa e semplicemente connessa,  $\varpi$  è un diffeomorfismo. La connessione lineare su  $M$  coincide con la connessione canonica sullo spazio riduttivo  $\mathbf{K}/\mathbf{H}$ .  $\square$

PROPOSIZIONE XVI.4.7. *Siano  $\Gamma$  una  $\mathbf{G}$ -connessione lineare  $\mathbf{K}$ -invariante sullo spazio riduttivo  $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$  e  $\Lambda \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$  l'applicazione lineare associata.*

*Condizione necessaria e sufficiente affinché le curve integrali dei campi  $X^M$ , al variare di  $X$  in  $\mathfrak{m}$ , siano geodetiche, è che*

$$(16.4.9) \quad \Lambda(X)X = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{m}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $X \in \mathfrak{m}$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla_{X^M} X^M &= \sigma \tilde{X}^M \theta(\tilde{X}^M) = \sigma \tilde{X}^M \theta(X^P) = \sigma(X^P \theta(X^P)) - [\omega(X^P)]_{\sigma}^* \theta(X^P) \\ &= -([X, X]^M) - \sigma \Lambda(X)X = -\sigma \Lambda(X)X. \end{aligned}$$

Quindi la condizione  $\Lambda(X)X = 0$  è necessaria e sufficiente affinché la derivata covariante della velocità sia nulla lungo le curve integrali di  $X^M$ .  $\square$

TEOREMA XVI.4.8. *Esiste una connessione  $\mathbf{G}$ -lineare simmetrica sullo spazio omogeneo riduttivo  $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$  le cui geodetiche siano le curve integrali dei campi  $X^M$ , al variare di  $X$  in  $\mathfrak{m}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Basta infatti considerare la connessione corrispondente alla scelta

$$(16.4.10) \quad \Lambda(X)Y = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

$\square$

DEFINIZIONE XVI.4.9. La connessione corrispondente alla scelta (16.4.10) si dice la *connessione simmetrica naturale*.

Calcoliamo la curvatura della connessione simmetrica naturale. Abbiamo, per  $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned} R_{p_0}(X, Y)Z &= \frac{1}{4}[X, [Y, Z]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{4}[Y, [X, Z]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[[X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z]_{\mathfrak{m}} - [[X, Y]_{\mathfrak{b}}, Z] \\ &= \frac{1}{4}[X, [Y, Z]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{4}[X, [Y, Z]_{\mathfrak{b}}]_{\mathfrak{m}} + \frac{1}{4}[Y, [Z, X]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{4}[Y, [Z, X]_{\mathfrak{b}}]_{\mathfrak{m}} \\ &\quad + \frac{1}{2}[Z, [X, Y]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} + \frac{1}{2}[Z, [X, Y]_{\mathfrak{b}}]_{\mathfrak{m}} \\ &= \frac{1}{4}[Z, [X, Y]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{4}[X, [Y, Z]_{\mathfrak{b}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{4}[Y, [Z, X]_{\mathfrak{b}}]_{\mathfrak{m}} + \frac{1}{2}[Z, [X, Y]_{\mathfrak{b}}]_{\mathfrak{m}}. \end{aligned}$$

DEFINIZIONE XVI.4.10. Si dice *spazio simmetrico* uno spazio omogeneo riduttivo dotato di una connessione lineare simmetrica associata ad una decomposizione (16.1.7) con  $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ .

Abbiamo

TEOREMA XVI.4.11. *La curvatura di uno spazio simmetrico è data da*

$$(16.4.11) \quad R_0(X, Y)Z = -[[X, Y], Z], \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m} \simeq T_{p_0}M.$$

**Connessioni di Cartan-Shauten.** Consideriamo<sup>7</sup> il caso particolare in cui  $M = \mathbf{G}$  sia un gruppo di Lie. Facciamo agire  $\mathbf{K} = \mathbf{G} \times \mathbf{G}$  su  $\mathbf{G}$  mediante

$$(16.4.12) \quad \mathbf{K} \times \mathbf{G} \ni ((a, b), x) \longrightarrow axb^{-1} \in \mathbf{G}.$$

Lo stabilizzatore dell'identità è il sottogruppo

$$(16.4.13) \quad \mathbf{H} = \{(a, a) \mid a \in \mathbf{G}\}.$$

Se  $\mathfrak{g}$  è l'algebra di Lie di  $\mathbf{G}$ , allora  $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$  è quella di  $\mathbf{K}$  ed  $\mathfrak{h} = \{(X, X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$  quella di  $\mathbf{H}$ .

Possiamo rappresentare  $\mathbf{G} = \mathbf{K}/\mathbf{H}$  come uno spazio riduttivo in diversi modi. Tra questi, abbiamo le decomposizioni  $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invarianti:

$$\begin{aligned} (+) \quad & \mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_+, \quad \text{con } \mathfrak{m}_+ = \{(0, X) \mid X \in \mathfrak{g}\}, \\ (-) \quad & \mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_-, \quad \text{con } \mathfrak{m}_- = \{(X, 0) \mid X \in \mathfrak{g}\}, \\ (0) \quad & \mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_0, \quad \text{con } \mathfrak{m}_0 = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

**DEFINIZIONE XVI.4.12 (Cartan-Shauten).** Le connessioni canoniche corrispondenti alle decomposizioni (+), (-), (0), si dicono la connessione-(+), la connessione-(-) e la connessione-(0), rispettivamente.

**TEOREMA XVI.4.13.** *La torsione e curvatura delle connessioni di Cartan-Shauten sul gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  si esprimono con le formule:*

$$\begin{aligned} (+) \quad & T_e(X, Y) = [X, Y], \quad R = 0, \\ (-) \quad & T_e(X, Y) = -[X, Y], \quad R = 0, \\ (0) \quad & T = 0, \quad R_e(X, Y)Z = -[[X, Y], Z], \end{aligned}$$

per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per evitare confusione, indicheremo con  $M$  il gruppo  $\mathbf{G}$  considerato come spazio omogeneo  $\mathbf{K}/\mathbf{H}$ . Se  $(X, Y) \in \mathfrak{k}$  abbiamo  $(X, Y)^{\mathbf{K}} = (X^b, Y^b)$  ed  $(X, Y)^M = X^b - Y^*$ , ove abbiamo indicato con  $X^b, Y^b$  i campi di vettori invarianti a destra che valgono  $X, Y$  in  $e_{\mathbf{G}}$  e con  $Y^*$  il campo di vettori invariante a sinistra associato ad  $Y \in \mathfrak{g}$ .

Consideriamo la connessione lineare  $\mathbf{K}$ -invariante corrispondente alla scelta del complemento  $\mathfrak{m}_+$  di  $\mathfrak{h}$ . Possiamo allora identificare lo spazio  $\mathbb{R}^m$  con  $\mathfrak{m}_+$ , ed otteniamo

$$\theta(X^b, Y^b) = (0, \omega_{\mathbf{G}}(Y^b - X^b)), \quad \omega(X^b, Y^b) = (\omega_{\mathbf{G}}(X^b), \omega_{\mathbf{G}}(X^b)).$$

Se  $X \in \mathfrak{g}$ , il sollevamento orizzontale di  $X^*$  è il campo  $\tilde{X}^* = (0, -X^b)$ . Abbiamo quindi

$$(16.4.14) \quad \tilde{X}^* \theta(\tilde{Y}^*) = (0, -X^b)(0, \omega_{\mathbf{G}}(-Y^b)) = (0, [X^b, Y^b]) = (0, -[X, Y]^b).$$

<sup>7</sup>Jan Arnoldus Schouten (28 agosto 1883 - 20 gennaio 1971), matematico olandese, professore a Delft. Ha contribuito allo sviluppo del calcolo tensoriale e di Ricci.

I lavori a cui facciamo riferimento sono: E.Cartan and J.A. Schouten, *On the Geometry of the group manifold of simple and semisimple groups*, Proc. Amsterdam 29 (1926), 803-815 ed *On Riemannian manifolds admitting an absolute parallelism*, Proc. Amsterdam 29 (1926), 933-946.

Questo ci dice che  $\nabla_{X^*} Y^* = [X^*, Y^*]$ . Otteniamo allora

$$\begin{aligned} T(X^*, Y^*) &= \nabla_{X^*} Y^* - \nabla_{Y^*} X^* - [X^*, Y^*] = [X^*, Y^*], \\ R(X^*, Y^*)Z^* &= (\nabla_{X^*} \nabla_{Y^*} - \nabla_{Y^*} \nabla_{X^*} - \nabla_{[X^*, Y^*]})Z^* \\ &= [X^*, [Y^*, Z^*]] - [Y^*, [X^*, Z^*]] - [X^*, Y^*, Z^*] = 0. \end{aligned}$$

Consideriamo ora la connessione lineare corrispondente alla scelta del complemento  $\mathfrak{m}_-$ . Identificando  $\mathbb{R}^m$  ad  $\mathfrak{m}_-$ , abbiamo in questo caso

$$\theta(X^b, Y^b) = (\omega_{\mathbf{G}}(X^b - Y^b), 0), \quad \omega(X^b, Y^b) = (\omega_{\mathbf{G}}(Y^b), \omega_{\mathbf{G}}(Y^b)).$$

Se  $X \in \mathfrak{g}$ , il sollevamento orizzontale del campo di vettori invariante a destra  $X^b$  è il campo  $(X^b, 0)$ . Abbiamo quindi, se  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,

$$\tilde{X}^b \theta(\tilde{Y}^b) = (X^b, 0)(\omega_{\mathbf{G}}(Y^b), 0) = (\omega([X^b, Y^b]), 0) = (-\omega_{\mathbf{G}}([X, Y]^b), 0).$$

È perciò  $\nabla_{X^b} Y^b = [X^b, Y^b] = -[X, Y]^b$ . Otteniamo quindi

$$T(X^b, Y^b) = \nabla_{X^b} Y^b - \nabla_{Y^b} X^b - [X^b, Y^b] = [X^b, Y^b] = -[X, Y]^b.$$

Il caso della connessione (0) è conseguenza del Teorema XVI.4.11, perché risulta  $[\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0] \subset \mathfrak{h}$ , e quindi, con la corrispondente connessione,  $M = \mathbf{G}$  è uno spazio affine simmetrico.  $\square$

Calcoliamo esplicitamente la derivata covariante e la curvatura rispetto ai campi di vettori  $X^M$ , al variare di  $X$  in  $\mathfrak{g}$ , per la connessione simmetrica. In questo caso ad  $X \in \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{m}_0$  associamo il campo  $X^M = X^* + X^b$ . È

$$\nabla_{X^M} Y^M = \frac{1}{2}([X^*, Y^*] + [X^b, Y^b]) = \frac{1}{2}([X, Y]^* - [X, Y]^b), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Si verifica immediatamente che la torsione è nulla, mentre la curvatura è

$$\begin{aligned} R(X^M, Y^M)Z^M &= -\frac{1}{2}([X^*, Y^*], Z^*] + [X^b, Y^b], Z^b]) \\ &= -\frac{1}{2}([X, Y], Z]^* + [X, Y], Z]^b), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

### XVI.5. Spazi affini simmetrici

Gli spazi affini simmetrici sono varietà differenziabili affini complete dotate di una connessione lineare simmetrica con curvatura parallela.

Per il Teorema XVI.4.6 uno spazio affine simmetrico è della forma  $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ , per un gruppo di Lie  $\mathbf{K}$ , la cui algebra di Lie  $\mathfrak{k}$  si decompone nella somma diretta  $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$  dell'algebra di Lie  $\mathfrak{h}$  di  $\mathbf{H}$  e di un sottospazio vettoriale  $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante  $\mathfrak{m}$  con  $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ . L'applicazione lineare  $\vartheta : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{k}$  definita da

$$\vartheta(X) = \begin{cases} X & \text{se } X \in \mathfrak{h}, \\ -X & \text{se } X \in \mathfrak{m}, \end{cases}$$

è un'involuzione dell'algebra di Lie  $\mathfrak{k}$ : soddisfa cioè

$$(16.5.1) \quad \vartheta^2 = \text{id}_{\mathfrak{k}}, \quad [\vartheta(X), \vartheta(Y)] = \vartheta([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

Viceversa, dato un automorfismo involutivo  $\vartheta$  di  $\mathfrak{k}$ , il luogo

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{k} \mid \vartheta(X) = X\}$$

dei suoi punti fissi è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{k}$  e l'auto-spazio

$$\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{k} \mid \vartheta(X) = -X\}$$

dell'autovalore  $(-1)$  un complemento lineare di  $\mathfrak{h}$  in  $\mathfrak{k}$ ,  $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -invariante.

**PROPOSIZIONE XVI.5.1.** *Sia  $\mathbf{K}$  un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso, con algebra di Lie  $\mathfrak{k}$ . Gli spazi affini simmetrici connessi e localmente connessi di  $\mathbf{K}$ , modulo isomorfismi affini, sono in corrispondenza biunivoca con le classi di equivalenza degli automorfismi involutivi della sua algebra di Lie  $\mathfrak{k}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per l'ipotesi che  $\mathbf{K}$  sia connesso e semplicemente connesso, ogni automorfismo involutivo  $\vartheta$  di  $\mathfrak{k}$  è il differenziale nell'identità di un automorfismo involutivo  $\hat{\vartheta} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$  di  $\mathbf{K}$ . I punti fissi di  $\hat{\vartheta}$  formano un sottogruppo chiuso  $\hat{\mathbf{H}}$  di  $\mathbf{G}$ . La componente dell'identità  $\mathbf{H}$  di  $\hat{\mathbf{H}}$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{K}$  e lo spazio omogeneo  $\mathbf{K}/\mathbf{H}$  è lo spazio affine simmetrico connesso e semplicemente connesso associato a  $\vartheta$ . Il viceversa è conseguenza del Teorema XVI.4.6.  $\square$

**OSSERVAZIONE XVI.5.2.** Se  $M$  è uno spazio affine simmetrico del gruppo di Lie  $\mathbf{K}$ , il suo rivestimento universale  $\hat{M}$  è uno spazio affine simmetrico del rivestimento universale  $\hat{\mathbf{K}}$  di  $\mathbf{K}$ .

**XVI.5.1. Spazi affini simmetrici piatti.** Il *prolungamento affine* di un sottogruppo  $\mathbf{G}$  di  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$  è il prodotto diretto  $\mathbb{R}^m \times \mathbf{G}$ , su cui le operazioni di gruppo sono definite da

$$(v, a)(w, b) = (v + aw, ab), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^m, \forall a, b \in \mathbf{G}.$$

Il gruppo  $\mathbf{G}$  si può identificare al sottogruppo  $\mathbf{H} = \{(0, a) \mid a \in \mathbf{G}\}$  di  $\mathbf{G}_1$ . A sua volta,  $\mathbf{G}_1$  si può identificare al sottogruppo di  $\mathbf{GL}_{m+1}(\mathbb{R})$  delle matrici

$$(16.5.2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & a \end{pmatrix} \quad \text{con } v \in \mathbb{R}^m, a \in \mathbf{G}.$$

La proiezione  $\text{pr}_{\mathbf{G}} : \mathbf{G}_1 \ni (v, a) \rightarrow a \in \mathbf{G}$  è un omomorfismo di gruppi e quindi il suo nucleo, che è il sottogruppo abeliano  $\mathbb{R}^m \simeq \{(v, I_m) \mid v \in \mathbb{R}^m\}$ , è un sottogruppo normale di  $\mathbf{G}_1$ . La sua algebra di Lie  $\mathfrak{m} = \{(v, 0) \mid v \in \mathbb{R}^m\} \simeq \mathbb{R}^m$  è abeliana ed è un complemento lineare nell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}_1 = \{(v, X) \mid v \in \mathbb{R}^m, X \in \mathfrak{g}\} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}$  di  $\mathbf{G}_1$  dell'algebra di Lie  $\mathfrak{h} = \{(0, X) \mid X \in \mathfrak{g}\} \simeq \mathfrak{g}$  del nucleo della proiezione  $\text{pr}_{\mathbf{G}}$ . Lo spazio omogeneo  $\mathbb{R}^m \simeq \mathbf{G}_1/\mathbf{G}$  è affine simmetrico con curvatura nulla e corrisponde all'involuzione  $(v, X) \rightarrow (-v, X)$  di  $\mathfrak{g}_1$ .

Tutti gli spazi affini simmetrici piatti sono di questa forma.

**XVI.5.2. Automorfismi di un'algebra di Lie reale.** Sia  $\mathfrak{k}$  un'algebra di Lie reale. Ricordiamo che ogni  $X \in \mathfrak{k}$  definisce un'applicazione

$$(16.5.3) \quad \text{ad}(X) : \mathfrak{k} \ni Y \longrightarrow \text{ad}(X)Y = [X, Y] \in \mathfrak{k}.$$

Per l'identità di Jacobi,  $\text{ad}(X)$  è una derivazione di  $\mathfrak{k}$ : soddisfa cioè la

$$\text{ad}(X)[Y, Z] = [\text{ad}(X)Y, Z] + [Y, \text{ad}(X)Z], \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{k}.$$

DEFINIZIONE XVI.5.3. Una *derivazione* dell'algebra di Lie  $\mathfrak{k}$  è un'applicazione lineare  $D \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{k})$  che soddisfi l'identità di Leibnitz

$$(16.5.4) \quad D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

Indichiamo con  $\mathfrak{D}(\mathfrak{k})$  l'insieme di tutte le derivazioni di  $\mathfrak{k}$ . Le derivazioni  $\text{ad}(X)$ , al variare di  $X$  in  $\mathfrak{k}$ , si dicono *interne*. Indichiamo con  $\text{ad}(\mathfrak{k}) = \{\text{ad}(X) \mid X \in \mathfrak{k}\}$  l'insieme delle derivazioni interne di  $\mathfrak{k}$ .

LEMMA XVI.5.4. *Le derivazioni di  $\mathfrak{k}$  formano una sottoalgebra di Lie  $\mathfrak{D}(\mathfrak{k})$  dell'algebra di Lie  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{k})$  degli endomorfismi lineari di  $\mathfrak{k}$ .*

*Le derivazioni interne formano un ideale  $\text{ad}(\mathfrak{k})$  di  $\mathfrak{D}(\mathfrak{k})$ .*

DIMOSTRAZIONE. L'insieme  $\mathfrak{D}(\mathfrak{k})$  delle derivazioni è uno spazio vettoriale reale, perché (16.5.4) è, per ogni  $X, Y \in \mathfrak{k}$ , una relazione lineare in  $D$ . Se  $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}(\mathfrak{k})$ , abbiamo

$$\begin{aligned} [D_1, D_2][X, Y] &= D_1 D_2[X, Y] - D_2 D_1[X, Y] \\ &= D_1([D_2 X, Y] + [X, D_2 Y]) - D_2([D_1 X, Y] + [X, D_1 Y]) \\ &= [D_1 D_2 X, Y] + [D_2 X, D_1 Y] + [D_1 X, D_2 Y] + [X, D_1 D_2 Y] \\ &\quad - [D_2 D_1 X, Y] - [D_1 X, D_2 Y] - [D_2 X, D_1 Y] - [X, D_2 D_1 Y] \\ &= [(D_1 D_2 - D_2 D_1)X, Y] + [X, (D_1 D_2 - D_2 D_1)Y] \\ &= [[D_1, D_2]X, Y] + [X, [D_1, D_2]Y]. \end{aligned}$$

Questo dimostra che anche  $[D_1, D_2]$  è una derivazione e quindi  $\mathfrak{D}(\mathfrak{k})$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{k})$ .

Osserviamo che  $\text{ad}(\mathfrak{k})$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{D}(\mathfrak{k})$ , perché  $\text{ad} : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{k})$  è un'applicazione lineare. Poiché

$$[D, \text{ad}(X)] = \text{ad}(DX), \quad \forall X \in \mathfrak{k}, \quad \forall D \in \mathfrak{D}(\mathfrak{k}),$$

$\text{ad}(\mathfrak{k})$  è un ideale in  $\mathfrak{D}(\mathfrak{k})$ . □

DEFINIZIONE XVI.5.5. Un *automorfismo* di  $\mathfrak{k}$  è una  $\phi \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{k})$  tale che

$$(16.5.5) \quad [\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

Gli automorfismi di  $\mathfrak{k}$  formano un gruppo  $\mathbf{Aut}(\mathfrak{k})$ , che si dice il *gruppo degli automorfismi di  $\mathfrak{k}$* .

PROPOSIZIONE XVI.5.6.  $\mathbf{Aut}(\mathfrak{k})$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{k})$ , con algebra di Lie  $\mathfrak{D}(\mathfrak{k})$ . Il sottogruppo analitico  $\mathbf{Int}(\mathfrak{k})$  di  $\mathbf{Aut}(\mathfrak{k})$  generato da  $\text{ad}(\mathfrak{k})$  è un sottogruppo normale di  $\mathbf{Aut}(\mathfrak{k})$ . □

DIMOSTRAZIONE. Il prodotto di Lie in  $\mathfrak{k}$  è una forma bilineare antisimmetrica  $B : \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{k}$ . Scegliendo una base otteniamo un'identificazione  $\mathfrak{k} \simeq \mathbb{R}^n$  e possiamo rappresentare il prodotto nella forma  $[X, Y] = X^\dagger B Y$ , per una matrice antisimmetrica  $B$ . Allora

$$\mathbf{Aut}(\mathfrak{k}) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid a^\dagger B a = B\}$$



e di conseguenza  $\mathbf{Aut}(\mathfrak{f})$  è un sottogruppo chiuso algebrico di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ , con algebra di Lie

$$\{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid A^\dagger B + BA = 0\} = \mathfrak{D}(\mathfrak{f}).$$

Se  $a \in \mathbf{Aut}(\mathfrak{f})$  ed  $X \in \mathfrak{f}$ , allora

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{\mathfrak{D}(\mathfrak{f})}(a)(\text{ad}_{\mathfrak{f}}(X))(Y) &= a \circ \text{ad}_{\mathfrak{f}}(X) \circ a^{-1}(Y) = a([X, a^{-1}(Y)]) = [a(X), Y] \\ &= \text{ad}(aX)(Y) \end{aligned}$$

Questo dimostra che  $\text{Ad}_{\mathfrak{D}(\mathfrak{f})}(\text{ad}(\mathfrak{f})) = \text{ad}(\mathfrak{f})$  e quindi  $\text{ad}(\mathbf{Aut}(\mathfrak{f}))$  trasforma in sé il sottogruppo  $\mathbf{Int}(\mathfrak{f})$ , che perciò è un sottogruppo normale.  $\square$

**OSSERVAZIONE XVI.5.7.** Il sottogruppo  $\mathbf{Int}(\mathfrak{f})$  può non essere chiuso in  $\mathbf{Aut}(\mathfrak{f})$ . Si consideri ad esempio l'algebra  $\mathfrak{f}$  delle matrici complesse triangolari superiori generata dalle quattro matrici

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\pi+2}{3} & & \\ & \frac{\pi-1}{3} & \\ & & -\frac{2\pi+1}{3} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} [A, B_1] &= B_1, & [A, B_2] &= \pi B_2, & [A, C] &= (\pi + 1)C, \\ [B_1, B_2] &= C, & [B_1, C] &= 0, & [B_2, C] &= 0. \end{aligned}$$

Nella base  $A, B_1, B_2, C$  Le matrici diagonali di  $\mathbf{Int}(\mathfrak{f})$  sono della forma

$$\text{diag}(1, e^z, e^{\pi z}, e^{(1+\pi)z})$$

al variare di  $z$  in  $\mathbb{C}$ . La sua chiusura contiene tutte le matrici della forma

$$\text{diag}(1, \rho \exp(it), \rho^\pi \exp(is), \rho^{1+\pi} \exp(i(t+s))),$$

con  $s, t, \rho \in \mathbb{R}$  e  $\rho > 0$ . Quindi  $\mathbf{Int}(\mathfrak{f})$  non è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{f})$ .

**XVI.5.3. Involuzioni  $\mathbb{C}$ -lineari del gruppo lineare complesso.** Gli automorfismi interni dell'algebra di Lie lineare complessa  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  sono della forma

$$\text{Ad}(a)(X) = aXa^{-1}, \quad \forall X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), \quad \text{con } a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Infatti  $\exp(\text{Ad}(X))(Y) = \exp(X)Y \exp(-X)$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  e l'esponenziale di matrici  $\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  è surgettivo. Il nucleo di  $\text{Ad}$  è costituito dai multipli dell'identità. Quindi

**PROPOSIZIONE XVI.5.8.** Il gruppo degli automorfismi interni di  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  e di  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  è il gruppo  $\mathbf{PL}_n(\mathbb{C}) = \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})/(\mathbb{C}^* I_n)$  delle proiettività di  $\mathbb{CP}^{n-1}$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE XVI.5.9.** Gli automorfismo involutivi interni di  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  e di  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  sono coniugati, modulo automorfismi, a

$$(I) \quad \vartheta(X) = I_{\nu, n-\nu} X I_{\nu, n-\nu} \quad \text{con } I_{\nu, n-\nu} = \begin{pmatrix} I_\nu & \\ & -I_{n-\nu} \end{pmatrix}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Un automorfismo interno  $X \rightarrow aXa^{-1}$  è involutivo se e soltanto se  $a^2Xa^{-2} = X$  per ogni  $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . Questo equivale al fatto che  $a^2$  commuti con ogni matrice  $X$  e sia quindi un multiplo dell'identità. Il polinomio minimo di  $a$  divide quindi un polinomio della forma  $x^2 - k$ , con  $k \in \mathbb{C}$ . Perciò  $a$  è semisemplice ed abbiamo, in una base opportuna di  $\mathbb{C}^n$ ,

$$a = \text{diag}(\underbrace{\lambda, \dots, \lambda}_{\nu \text{ volte}}, \underbrace{-\lambda, \dots, -\lambda}_{n - \nu \text{ volte}}).$$

Moltiplicando questa matrice per una opportuna costante, possiamo fare in modo che  $a \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ . Da questo segue la tesi.  $\square$

Indichiamo con  $\mathbf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{k})$  il gruppo degli automorfismi  $\mathbb{C}$ -lineari di un'algebra di Lie complessa  $\mathfrak{k}$ . Chiaramente  $\mathbf{Int}(\mathfrak{k})$  è un sottogruppo normale di  $\mathbf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{k})$ .

**TEOREMA XVI.5.10 (Cartan).** *Il quoziente  $\mathbf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(n))/\mathbf{Int}(\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(n))$  è un gruppo isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ , generato dall'immagine dell'automorfismo  $X \rightarrow -X^\dagger$ .*  $\square$

**PROPOSIZIONE XVI.5.11.** *Gli automorfismo involutivi esterni  $\mathbb{C}$ -lineari di  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  sono coniugati, modulo automorfismi, a*

$$(II) \quad \vartheta(X) = -X^\dagger;$$

$$(III) \quad n = 2\nu \text{ è pari e } \vartheta(X) = JX^\dagger J, \text{ con } J = \begin{pmatrix} & -I_\nu \\ I_\nu & \end{pmatrix}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per il Teorema XVI.5.10 un automorfismo esterno  $\vartheta$  di  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  è della forma  $\vartheta(X) = -aX^\dagger a^{-1}$ , con  $a \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ . È

$$X = \vartheta^2(X) = a(a^{-1})^\dagger X a^\dagger a^{-1} \implies X a^\dagger a^{-1} = a^\dagger a^{-1} X, \quad \forall X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}).$$

Da questa relazione segue che  $a^\dagger a^{-1} = kI_n$ , cioè  $a^\dagger = ka$ . Allora è  $a = a^{\dagger\dagger} = k^2 a$  e quindi  $k = \pm 1$ . Poiché  $k^n = 1$  in quanto  $a, a^\dagger \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ , ne segue che  $k = 1$ , ed  $a$  è simmetrica, se  $n$  è dispari ed  $a$  può essere o simmetrica o antisimmetrica quando  $n$  è pari. Ogni matrice simmetrica  $a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  si può rappresentare nella forma  $a = bb^\dagger$  per un'opportuna  $b \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ . Quindi  $\vartheta(X) = -b([b^{-1}Xb]^\dagger)b^{-1}$ , cioè  $\text{ad}(b^{-1}) \circ \vartheta(X) = -[\text{ad}(b^{-1}(X))]^\dagger$  e quindi  $\vartheta$  è coniugata ad un automorfismo involutivo della forma (II). In modo analogo, nel caso  $n$  sia pari ed  $a$  antisimmetrica, si verifica che  $\vartheta$  è coniugata a un endomorfismo di tipo (III).  $\square$

Abbiamo quindi tre tipi di spazi affini simmetrici complessi connessi e semplicemente connessi del gruppo  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ :

$$(I) \quad \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{S}(\mathbf{GL}_\nu(\mathbb{C}) \times \mathbf{GL}_{n-\nu}(\mathbb{C})), \quad 1 \leq \nu \leq n/2,$$

$$(II) \quad \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{SO}_n(\mathbb{C}),$$

$$(III) \quad \mathbf{SL}_{2\nu}(\mathbb{C})/\mathbf{Sp}_\nu(\mathbb{C}),$$

ove ricordiamo le notazioni per i gruppi di Lie complessi e le loro algebre di Lie:

$$\mathbf{SO}_n(\mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}) \mid a^\dagger a = I_n\}, \quad \mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid X + X^\dagger = 0\},$$

$$\mathbf{Sp}_\nu(\mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{SL}_{2\nu}(\mathbb{C}) \mid a^\dagger J a = J\}, \quad \mathfrak{sp}_\nu(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2\nu}(\mathbb{C}) \mid X^\dagger J + JX = 0\}.$$

**XVI.5.4. Forme reali.** Ogni algebra di Lie reale  $\mathfrak{k}_0$  si può *complessificare*, estendendo il prodotto alla complessificazione  $\mathfrak{k}$  dello spazio vettoriale  $\mathfrak{k}_0$  per  $\mathbb{C}$ -bilinearità. Viceversa, se un'algebra di Lie complessa  $\mathfrak{k}$  contiene una sottoalgebra reale  $\mathfrak{k}_0$  di cui è la complessificazione, il coniugio

$$X + iY \longrightarrow X - iY, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}_0$$

rispetto alla forma reale  $\mathfrak{k}_0$  è un automorfismo involutivo anti- $\mathbb{C}$ -lineare di  $\mathfrak{k}$  con  $\mathfrak{k}_0$  come luogo di punti fissi.

**PROPOSIZIONE XVI.5.12.** *Sia  $\mathfrak{k}$  un'algebra di Lie complessa. Il luogo di punti fissi di un qualsiasi suo automorfismo involutivo anti- $\mathbb{C}$ -lineare è una forma reale  $\mathfrak{k}_0$  di  $\mathfrak{k}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\vartheta$  un automorfismo involutivo anti- $\mathbb{C}$ -lineare di  $\mathfrak{k}$ . Indichiamo con  $\mathfrak{k}_0$  e  $\mathfrak{k}_1$  gli autospazi reali in  $\mathfrak{k}$  di  $\vartheta$ , relativi agli autovalori 1 e  $-1$ , rispettivamente. Abbiamo  $i\mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{k}_1$  e  $i\mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{k}_0$ , da cui deduciamo che  $\mathfrak{k}_1 = i\mathfrak{k}_0$  e quindi  $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_0 \oplus i\mathfrak{k}_0$  e  $\mathfrak{k}$  è la complessificazione dell'algebra di Lie reale  $\mathfrak{k}_0$ .  $\square$

Sia  $\mathbf{K}$  un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie  $\mathfrak{k}$  e sia  $\mathbf{K}_0$  il sottogruppo analitico di  $\mathbf{K}$  generato dalla sua forma reale  $\mathfrak{k}_0$ . Per la Proposizione XVI.5.1 il sottogruppo  $\mathbf{K}_0$  è chiuso e  $\mathbf{K}/\mathbf{K}_0$  ammette una connessione lineare, associata alla decomposizione  $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$  con  $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_0$  ed  $\mathfrak{m} = i\mathfrak{k}_0$ , che lo rende uno spazio affine simmetrico.

Élie Cartan ha classificato (a meno di automorfismi) le forme reali delle algebre di Lie complesse semisemplici, riconducendolo a quello degli automorfismi  $\mathbb{C}$ -lineari involutivi che commutano con una involuzione anti- $\mathbb{C}$ -lineare fissata.

**XVI.5.5. Sottoalgebre di Cartan.** Nella sua tesi di dottorato, nel 1894, É. Cartan introdusse una nozione fondamentale per la classificazione delle algebre di Lie semisemplici e riduttive<sup>8</sup> complesse e reali e quindi degli spazi simmetrici affini e Riemanniani.

Sia  $\mathfrak{k}$  un'algebra di Lie.

**DEFINIZIONE XVI.5.13.** Una *sottoalgebra di Cartan* di  $\mathfrak{k}$  è una sua sottoalgebra di Lie nilpotente  $\mathfrak{d}$ , massimale tra quelle che sono autonormalizzanti, per cui cioè

$$\mathfrak{d} = \{X \in \mathfrak{k} \mid [X, \mathfrak{d}] \subset \mathfrak{d}\}.$$

Le sottoalgebre di Cartan di un'algebra riduttiva  $\mathfrak{k}$  coincidono con le loro sottoalgebre abeliane massimali, e queste a loro volta sono i *commutanti*

$$\mathfrak{d} = \{X \in \mathfrak{k} \mid [X, A] = 0\}$$

degli elementi *regolari*  $A$  di  $\mathfrak{k}$ , quelli cioè per cui  $\text{ad}(A) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{k})$  abbia rango massimo.

Supponiamo che  $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  per qualche  $n$  e sia  $\mathfrak{d}$  una sua sottoalgebra di Cartan. Il sottogruppo analitico  $\mathbf{D}$  di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  generato da  $\mathfrak{d}$  è un gruppo abeliano, isomorfo a un prodotto diretto  $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times S^1 \times \cdots \times S^1$  di  $\ell$ , copie del gruppo additivo  $\mathbb{R}$  ed

<sup>8</sup>Un'algebra di Lie  $\mathfrak{k}$  si dice riduttiva se, per ogni suo ideale  $\mathfrak{h}$ , esiste un altro ideale  $\mathfrak{a}$  tale che  $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ .

$\ell_k$  copie del gruppo moltiplicativo  $S^1 = \{|z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ . Diciamo che  $\mathfrak{d}$  è *vettoriale* se  $\ell_k = 0$ , *compatta* se  $\ell_v = 0$ , e chiamiamo in generale  $\ell_v$  la sua *dimensione vettoriale* ed  $\ell_k$  la sua *dimensione compatta*. Queste nozioni, che sono relative alla rappresentazione di  $\mathfrak{k}$  come algebra lineare, diventano intrinseche se ci restringiamo alle algebre di Lie semisemplici.

**DEFINIZIONE XVI.5.14.** Un'algebra di Lie semisemplice reale si dice *split* se contiene una sottoalgebra di Cartan vettoriale.

Un'algebra di Lie semisemplice si dice *compatta* se è l'algebra di Lie di un gruppo compatto.

Vale il

**TEOREMA XVI.5.15.** *Ogni algebra di Lie semisemplice complessa ammette una forma reale split e una forma reale compatta, uniche a meno di isomorfismi.*  $\square$

**XVI.5.6. Forme reali dei gruppi classici semplici.** Le forme reali delle algebre di Lie semisemplici, modulo il coniugio, sono state classificate da E.Cartan. Diamo la lista delle forme reali per le algebre semplici complesse  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{so}_{2\nu+1}(\mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{so}_{2\nu}(\mathbb{C})$ .

Poniamo

$$J_\nu = \begin{pmatrix} 0 & I_\nu \\ -I_\nu & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}, \quad I_{p,q,r} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{pmatrix}.$$

**Forme reali di  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ .** Gli spazi omogenei  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{K}_0$ , ove  $\mathbf{K}_0$  è una forma reale di  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$  sono spazi affini simmetrici di dimensione  $n^2 - 1$ .

- (1)  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$  è la forma split, corrispondente all'involuzione  $\vartheta(X) = \bar{X}$ . Lo spazio affine simmetrico  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$  è la grassmanniana degli  $n$ -piani totalmente reali di  $\mathbb{C}^n$ . È una varietà differenziabile di dimensione  $n^2 - 1$ .
- (2)  $\mathfrak{su}_n = \{X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid X^* + X = 0\}$  è la forma compatta, corrispondente all'involuzione  $\vartheta(X) = -X^*$ . Lo spazio affine simmetrico corrispondente è uno spazio Riemanniano simmetrico con curvatura sezionale negativa  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{SU}_n$ .
- (3)  $\mathfrak{su}(\nu, n - \nu)$ , per  $1 \leq \nu < n$ , con  $\vartheta(X) = -I_{\nu, n-\nu} X^* I_{\nu, n-\nu}$ . Lo spazio affine simmetrico  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{SU}(\nu, n - \nu)$  è l'aperto dello spazio proiettivo reale  $\mathbb{P}(\mathfrak{p}_n)$  associato allo spazio vettoriale  $\mathfrak{p}_n$  delle forme Hermitiane simmetriche, che corrisponde alle forme non degeneri di indice di Witt  $\nu$ .
- (4)  $\mathfrak{su}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2\nu}(\mathbb{C}) \mid X J_\nu = J_\nu \bar{X}\}$ , con  $n = 2\nu$  pari e  $\vartheta(X) = -J_\nu \bar{X} J_\nu$ . Il sottogruppo  $\mathbf{SU}^*(2n) \simeq \mathbf{SL}_\nu(\mathbb{H})$  consiste delle matrici  $a$  di  $\mathbf{SL}_{2\nu}(\mathbb{C})$  che soddisfano  $aJ = J\bar{a}$ .

**Forme reali di  $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ .** Gli spazi omogenei  $\mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})/\mathbf{K}_0$ , ove abbiamo indicato con  $\mathbf{K}_0$  una forma reale di  $\mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$ , sono spazi affini simmetrici di dimensione  $n(2n + 1)$ . Essi sono le grassmanniane dei  $(2n + 1)$ -piani totalmente reali di  $\mathbb{C}^{2n+1}$  su cui la restrizione della parte reale di una forma bilineare simmetrica assegnata è non degenera ed ha segnatura assegnata.

Su  $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n+1}(\mathbb{C}) \mid X^\dagger = -X\}$  è  $\bar{X} = -X^*$ .

- (1)  $\mathfrak{so}_{n,n+1} = \{X \in \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) \mid X^* I_{n,n+1} + I_{n,n+1} X = 0\}$  è la forma split, con  $\vartheta(X) = -I_{n,n+1} X^* I_{n,n+1}$ .
- (2)  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  è la forma compatta, con  $\vartheta(X) = -X^* = \bar{X}$ . Lo spazio omogeneo corrispondente  $\mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})/\mathbf{SO}_{2n+1}$  è Riemanniano simmetrico con curvatura sezionale negativa.
- (3)  $\mathfrak{so}_{\nu,2n-\nu+1} = \{X \in \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) \mid X^* I_{\nu,2n-\nu+1} + I_{\nu,2n-\nu+1} X = 0\}$ , con  $0 < \nu < n$ , e  $\vartheta(X) = -I_{\nu,2n-\nu+1} X^* I_{\nu,2n-\nu+1}$ .

**Forme reali di  $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ .** Gli spazi affini simmetrici  $\mathbf{Sp}_n(\mathbb{C})/\mathbf{K}_0$ , ove  $\mathbf{K}_0$  è una forma reale di  $\mathbf{Sp}_n(\mathbb{C})$ , hanno dimensione  $n(2n+1)$ . L'algebra di Lie di  $\mathbf{Sp}_n(\mathbb{C})$  è  $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C}) \mid J_n X + X^\dagger J_n = 0\}$  e, poiché  $J_n^2 = -I_{2n}$ , i suoi elementi soddisfano  $-X^* = J\bar{X}J$ . Inoltre, per ogni  $0 \leq \nu \leq n$ , è  $J I_{\nu,2(n-\nu),\nu} = I_{\nu,2(n-\nu),\nu} J$ .

Elenchiamo le forme reali.

- (1)  $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{R}) \mid J_n X + X^\dagger J_n = 0\}$  è la forma split, con  $\vartheta(X) = \bar{X}$ . Il quoziente  $\mathbf{Sp}_n(\mathbb{C})/\mathbf{Sp}_n(\mathbb{R})$  è uno spazio affine simmetrico che si può identificare all'aperto nella grassmanniana dei sottospazi reali di dimensione  $2n$  di  $\mathbb{C}^{2n}$  su cui la restrizione della parte reale di una forma bilineare alternata assegnata su  $\mathbb{C}^{2n}$  è non degenere.
- (2)  $\mathfrak{sp}_n = \{X \in \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\} = \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{su}_n$  è la forma compatta, con  $\vartheta(X) = -X^*$ . Il quoziente  $\mathbf{Sp}_n(\mathbb{C})/\mathbf{Sp}_n$  è uno spazio Riemanniano simmetrico con curvatura sezionale negativa.
- (3)  $\mathfrak{sp}_{\nu,n-\nu} = \{X \in \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) \mid X^* I_{\nu,2n-2\nu,\nu} + I_{\nu,2n-2\nu,\nu} X = 0\}$ , con  $0 < \nu < n$  e  $\vartheta(X) = -I_{\nu,2n-2\nu,\nu} X^* I_{\nu,2n-2\nu,\nu}$ .

**Forme reali di  $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ .** Gli spazi affini simmetrici  $\mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})/\mathbf{K}_0$ , con  $\mathbf{K}_0$  forma reale di  $\mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$ , hanno dimensione  $n(2n-1)$ . Gli elementi dell'algebra di Lie  $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C}) \mid X^\dagger + X = 0\}$  di  $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$  soddisfano  $X^* = -\bar{X}$ . Elenchiamo le forme reali.

- (1) La forma split è  $\mathfrak{so}_{n,n} = \{X \in \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) \mid X^* I_{n,n} + I_{n,n} X = 0\}$ , con  $\vartheta(X) = -I_{n,n} X^* I_{n,n}$ .
- (2) La forma compatta è  $\mathfrak{so}_{2n} = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{R}) \mid X^\dagger + X = 0\}$ , con  $\vartheta(X) = \bar{X} = -X^*$ . Il quoziente  $\mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})/\mathbf{SO}_{2n}$  è Riemanniano simmetrico con curvatura sezionale negativa.
- (3)  $\mathfrak{so}_{\nu,2n-\nu} = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{R}) \mid X^\dagger I_{\nu,2n-\nu} + I_{\nu,2n-\nu} X = 0\}$ , con  $0 < \nu < n$ . Lo spazio affine simmetrico corrispondente è  $\mathbf{SO}_n(\mathbb{C})/\mathbf{SO}_{\nu,2n-\nu}$ .
- (4)  $\mathfrak{so}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) \mid X^* J_n + J_n X = 0\}$  è l'algebra di Lie del sottogruppo  $\mathbf{SO}^*(2n)$  delle matrici di  $\mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$  che lasciano invariante la forma Hermitiana antisimmetrica associata alla matrice  $J_n$ . L'involutione di Cartan è  $\vartheta(X) = -J_n \bar{X} J_n$ .



## Applicazione esponenziale e campi di Jacobi

### XVII.1. L'applicazione esponenziale

Sia  $(M, \Gamma)$  una varietà differenziabile affine.

Fissato un punto  $p_0$  di  $M$ , le geodetiche uscenti da  $p_0$  sono parametrizzate dalla loro velocità iniziale  $v \in T_{p_0}M$ . Indichiamo con  $\gamma_v$  la geodetica uscente da  $p_0$  con velocità iniziale  $v$ . La  $\gamma_v$  è la soluzione del problema di Cauchy

$$(17.1.1) \quad \begin{cases} \frac{D^2 \gamma_v}{dt^2} = 0, \\ \gamma_v(0) = p_0, \\ \dot{\gamma}_v(0) = v. \end{cases}$$

Indichiamo con  $I_v$  il suo intervallo massimale di definizione. È  $I_{kv} = k^{-1}I_v$  per ogni numero reale  $k \neq 0$  e

$$(17.1.2) \quad \gamma_{kv}(t) = \gamma_v(kt), \quad \forall t \in k^{-1}I_v.$$

Per la dipendenza  $\mathcal{C}^\infty$  delle soluzioni del problema di Cauchy dai dati iniziali, (17.1.1), l'insieme

$$(17.1.3) \quad W_{p_0} = \{v \in T_{p_0} \mid 1 \in I_v\}$$

è un intorno aperto di 0 in  $T_{p_0}M$ , che, per la (17.1.2) è stellato rispetto all'origine e la

$$(17.1.4) \quad \text{Exp}_{p_0} : W_{p_0} \ni v \longrightarrow \gamma_v(1) \in M$$

un'applicazione di classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**DEFINIZIONE XVII.1.1.** Chiamiamo la  $\text{Exp}_{p_0}$ , definita dalla (17.1.4) l'*applicazione esponenziale in  $p_0$* , associata alla struttura affine di  $M$ .

**OSSERVAZIONE XVII.1.2.** Se la connessione  $\Gamma$  è completa, allora, per ogni punto  $p_0$ , l'applicazione esponenziale è definita su  $T_{p_0}M$ .

**ESEMPIO XVII.1.3.** Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo di Lie reale su cui sia fissata una connessione di Cartan-Shauten, è  $\text{Exp}_e(X) = \exp(X)$  per ogni  $X \in \mathfrak{g} = T_e\mathbf{G}$ . Usando l'identificazione  $T\mathbf{G} \ni v \rightarrow (\pi(v), \omega_{\mathbf{G}}(v)) \in \mathbf{G} \times \mathfrak{g}$ , abbiamo  $\text{exp}_a(X) = a \exp(X)$  per ogni  $a \in \mathbf{G}$  ed  $X \in \mathfrak{g}$ . In particolare,  $\mathbf{G}$  con una qualsiasi delle connessioni di Cartan-Shauten, è completo.

**PROPOSIZIONE XVII.1.4.** L'applicazione esponenziale in  $p_0 \in M$  definisce un diffeomorfismo di un intorno aperto di 0 in  $T_{p_0}M$  su un intorno aperto di  $p_0$  in  $M$ .

**DIMOSTRAZIONE.** L'enunciato è conseguenza del teorema dell'applicazione inversa, perché il differenziale di  $\text{Exp}_{p_0}$  in 0 è l'identità su  $T_{p_0}M$ .  $\square$

In particolare, l'esponenziale in  $p_0$  definisce una carta locale con centro in  $p_0$ .

### XVII.2. Intorni normali ed intorni convessi

**DEFINIZIONE XVII.2.1.** Un intorno stellato  $N_0(p)$  dell'origine in  $T_pM$ , contenuto in  $W_{p_0}$ , e su cui  $\text{Exp}_p$  definisca un diffeomorfismo su un aperto  $N_p$  di  $M$ , si dice *normale*, ed  $N_p = \text{Exp}_p(N_0(p))$  si dice *un intorno normale di  $p$  in  $M$* .

**DEFINIZIONE XVII.2.2.** Se  $v_1, \dots, v_m$  è una base di  $T_pM$ , si dicono *coordinate normali del punto  $q \in N_p$*  i numeri reali  $x^1, \dots, x^m$  tali che

$$\text{Exp}_p(x^1 v_1 + \dots + x^m v_m) = q.$$

Le coordinate normali definiscono una carta coordinata in  $N_p$ .

**TEOREMA XVII.2.3.** *Ogni punto  $p_0 \in M$  ha un sistema fondamentale di intorni normali  $N_{p_0}$  che sono anche intorni normali di ciascuno dei suoi punti.*

*In particolare, per ogni coppia di punti  $p_1, p_2$  di  $N_{p_0}$  vi è una e una sola geodetica di estremi<sup>1</sup>  $p_1, p_2$  contenuta in  $N_{p_0}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $(U, x)$  una carta locale con centro in  $p_0$ . Per  $q_0 \in U$  ed  $r > 0$ , sia

$$V(q_0, r) = \{p \in U \mid \|x(p) - x(q_0)\| < r\},$$

ove  $\|\cdot\|$  è la norma euclidea standard in  $\mathbb{R}^m$ . Utilizzando i teoremi di esistenza, unicità, dipendenza  $\mathcal{C}^\infty$  dai dati iniziali per le equazioni differenziali ordinarie ed il teorema delle funzioni implicite, possiamo trovare un  $r_0 > 0$  tale che, per ogni  $p \in V(p_0, 2r_0)$ , l'aperto  $V(p, 2r_0)$  sia contenuto in un intorno normale di  $p$ . In particolare, tutti gli aperti  $V(p, r)$ , con  $p \in V(p_0, r_0)$  ed  $r \leq r_0$  sono *semplici*, ovvero contengono al più un segmento di geodetica che congiunga due punti assegnati.

Sia  $F(p) = \|x(p)\|^2 \in \mathcal{C}^\infty(U)$ . Ad una geodetica  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([a, b], V(p_0, r_0))$  associamo la funzione  $G(t) = F(\gamma(t)) \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$ . Abbiamo<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &= 2 \sum_{j=1}^m x^j(t) \dot{x}^j(t), \\ \ddot{G}(t) &= 2 \sum_{j=1}^m \left( |\dot{x}^j(t)|^2 + x^j(t) \ddot{x}^j(t) \right) \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^m \left( \delta_{i,j} - \sum_{h=1}^m x^h(t) \cdot \Gamma_{i,j}^h(\gamma(t)) \right) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t). \end{aligned}$$

Possiamo quindi determinare un numero reale  $r^*$ , con  $0 < r^* \leq r_0$ , tale che, per ogni geodetica  $\gamma : [a, b] \rightarrow V(p_0, r^*)$ , la funzione  $F(\gamma(t))$  sia strettamente convessa.

Fissiamo un  $r > 0$  tale che ogni  $p \in V(p_0, r)$  abbia un intorno normale  $N_p$  con  $V(p_0, r) \subset N_p \subset V(p_0, r^*)$ . Dati due punti  $q_0, q_1 \in V(p_0, r)$  vi è un'unica geodetica

<sup>1</sup>Se  $\gamma \in \mathcal{C}^0([0, 1], M)$  chiamiamo i punti  $\gamma(0)$  e  $\gamma(1)$  *estremi* di  $\gamma$ .

<sup>2</sup>I simboli di Christoffel  $\Gamma_{i,j}^h$  sono definiti da  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{h=1}^m \Gamma_{i,j}^h \frac{\partial}{\partial x^h}$ . Le geodetiche soddisfano le equazioni locali  $\ddot{x}^h + \sum_{i,j=1}^m \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$ , per  $1 \leq h \leq m$ . Vedi §XXXI.3.



$\gamma : [0, 1] \rightarrow V(p_0, r^*)$ , che congiunge  $q_0$  a  $q_1$ . Poiché  $F(\gamma(0)) < r^2$ ,  $F(\gamma(1)) < r^2$ , segue dalla convessità di  $F(\gamma(t))$  che  $\gamma(t) \in V(p_0, r)$  per ogni  $t \in [0, 1]$ .  $\square$

DEFINIZIONE XVII.2.4. Un sottoinsieme  $A$  di  $M$  si dice

- *convesso* se, per ogni coppia di suoi punti contiene una geodetica che li congiunge;
- *semplice* se, per ogni coppia di suoi punti vi è al più una geodetica che li congiunge.

Per il Teorema XVII.2.3, abbiamo:

TEOREMA XVII.2.5. *Ogni punto di  $M$  ammette un sistema fondamentale di intorni aperti semplici e convessi.*  $\square$

Sia  $N_p$  un intorno normale di un punto  $p \in M$ . Per ogni  $q \in N_p$ ,  $v$  è un'unica geodetica  $\gamma_{[p,q]} : [0, 1] \rightarrow N_p$  che congiunge  $p$  a  $q$ . Il trasporto parallelo lungo la geodetica  $\gamma_{[p,q]}$  ci permette di definire un'applicazione lineare  $\tau_{p,q} : T_p M \rightarrow T_q M$ . Indichiamo con  $v^* \in \mathfrak{X}(N_p)$  il campo di vettori

$$(17.2.1) \quad v^*(q) = \tau_{p,q}(v) \in \mathfrak{X}(N_p).$$

DEFINIZIONE XVII.2.6. Il campo di vettori (17.2.1) si dice *adattato* al vettore tangente  $v \in T_p M$ .

Possiamo utilizzare i campi di vettori adattati per esprimere con una formula il differenziale dell'esponenziale di una connessione analitica.

DEFINIZIONE XVII.2.7. Se  $M$  è una varietà analitica reale, la connessione  $\nabla$  si dice *analitica* se  $\nabla_X Y$  è analitico in  $U^{\text{aperto}} \subset M$  per ogni coppia di campi di vettori  $X, Y$  che siano analitici in  $U$ .

Questa condizione equivale al fatto che i simboli di Christoffel, calcolati in un sistema di riferimento analitico, siano analitici.

Indichiamo con  $L_X$  la derivata di Lie rispetto al campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

TEOREMA XVII.2.8. *Sia  $M$  una varietà affine analitica<sup>3</sup>. Per ogni  $p \in M$  e  $v \in T_p M$  esiste un  $\epsilon > 0$  tale che  $\text{Exp}_p$  sia definita ed analitica in un intorno di  $\{tv \mid -\epsilon \leq t \leq \epsilon\}$  e si ha:*

$$(17.2.2) \quad (d\text{Exp}_p)(tv)(w) = \left\{ \frac{1 - e^{L_{-tv}^*}}{L_{tv}^*}(w^*) \right\}_{\text{Exp}_p(tv)} \quad \forall |t| \leq \epsilon.$$

OSSERVAZIONE XVII.2.9. Se  $(M, g)$  è una varietà Riemanniana, in coordinate normali  $(N_{p_0}, x)$  abbiamo:

$$(17.2.3) \quad \begin{cases} g_{i,j}(x) = \delta_{i,j} + O(|x|^2) \\ \Gamma_{j,k}^i(0) = 0. \end{cases}$$

<sup>3</sup>Supponiamo cioè che la forma di Cartan della sua connessione lineare sia analitica sul fibrato dei sistemi di riferimento.

### XVII.3. Definizione dei campi di Jacobi

**XVII.3.1. Superfici parametriche.** Sia  $M$  una varietà differenziabile.

DEFINIZIONE XVII.3.1. Una *superficie parametrica in  $M$*  è il dato di un aperto connesso  $U$  di  $\mathbb{R}^2$  e di un'applicazione differenziabile  $f : U \rightarrow M$ .

Siano  $(t, s)$  le coordinate cartesiane di  $\mathbb{R}^2$ . Poniamo

$$\partial f(t, s)/\partial t = f_*(\partial/\partial t)_{(t,s)}, \quad \text{e} \quad \partial f(t, s)/\partial s = f_*(\partial/\partial s)_{(t,s)}.$$

Un *campo di vettori su  $f$*  è un'applicazione differenziabile  $V : U \rightarrow TM$  che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & & TM \\ & \nearrow V & \downarrow \pi \\ U & & M \\ & \searrow f & \end{array}$$

Se  $(M, \Gamma)$  è una varietà affine, possiamo calcolare le derivate covarianti

$$(17.3.1) \quad \frac{DV}{\partial t}(t, s) \quad \text{e} \quad \frac{DV}{\partial s}(t, s).$$

di  $V$  lungo le curve  $t \rightarrow f(t, s)$  (per  $s$  fissato), ed  $s \rightarrow f(t, s)$  (per  $t$  fissato).

LEMMA XVII.3.2. Siano  $f : U \rightarrow M$  una superficie parametrica in  $M$  e  $V$  un campo di vettori su  $f$ . Valgono allora le:

$$(17.3.2) \quad \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} = T \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right),$$

$$(17.3.3) \quad \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V = R \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V.$$

DIMOSTRAZIONE. La verifica delle formule è immediata quando la  $f$  si scriva, in un sistema di coordinate locali  $x^1, \dots, x^m$ , mediante:

$$(t, s) \rightarrow (t, s, 0, \dots, 0).$$

Ciò è possibile vicino a ciascun punto  $(t, s)$  in cui la  $f$  sia un'immersione, cioè in cui  $\frac{\partial f}{\partial t}$  e  $\frac{\partial f}{\partial s}$  siano linearmente indipendenti. Perturbando la  $f$ , ed osservando che le formule che vogliamo dimostrare dipendono con continuità dalla  $f$  e dalle sue derivate, ci riconduciamo al caso in cui  $f$  sia un'immersione.  $\square$

**XVII.3.2. L'equazione di Jacobi.** Fissiamo un punto  $p \in M$  e consideriamo l'applicazione esponenziale  $\text{Exp}_p$ , definita sull'intorno  $W_p$  di 0 in  $T_p M$ . Per calcolarne il differenziale in un punto  $v \in W_p$ , consideriamo una curva  $v(s) \in \mathcal{C}^\infty([-\epsilon, \epsilon], T_p M)$  con  $v(0) = v$  e  $\dot{v}(0) = w$  e la superficie parametrica

$$(17.3.4) \quad f(t, s) = \text{Exp}_p(t v(s)),$$

definita su un intorno aperto  $U$  di  $[0, 1] \times (-\epsilon, \epsilon)$  in  $\mathbb{R}^2$ . È

$$(17.3.5) \quad (\text{Exp}_p)_*(v)(w) = \frac{\partial f(1, 0)}{\partial s}.$$

Il campo di vettori  $J(t) = \partial f(t, 0)/\partial s$  soddisfa un'equazione differenziale lineare del second'ordine lungo la geodetica  $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$ . Infatti, poiché per ogni  $s$  la  $t \rightarrow f(t, s) = \exp_p(tv(s))$  è una geodetica, per il Lemma XVII.3.2 abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} + R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{D}{\partial t} \left( T\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \right) + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto l'equazione di Jacobi per il campo di vettori  $J(t)$  lungo la geodetica  $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$ :

$$(17.3.6) \quad \frac{D^2 J}{dt^2} + \frac{D T(J, \dot{\gamma})}{dt} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

Nel caso di una *connessione simmetrica* l'equazione di Jacobi si semplifica nella

$$(17.3.7) \quad \ddot{J} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

Sia  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$  una geodetica.

**DEFINIZIONE XVII.3.3.** Chiamiamo *campi di Jacobi* lungo  $\gamma$  le soluzioni di (17.3.6). Indichiamo con  $\mathcal{J}(\gamma)$  l'insieme dei campi di Jacobi lungo  $\gamma$ .

**PROPOSIZIONE XVII.3.4.** Siano  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$  una geodetica e  $t_0 \in I$ .

Per ogni coppia  $v_0, w_0$  di vettori tangenti in  $T_{\gamma(t_0)}M$  esiste uno ed un solo campo di Jacobi  $J$  lungo  $\gamma$  che soddisfi le condizioni iniziali  $J(t_0) = v_0, \dot{J}(t_0) = w_0$ . In particolare,  $\mathcal{J}(\gamma)$  è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $2m$ .

**DIMOSTRAZIONE.** L'enunciato segue dal fatto che la (17.3.6) è un'equazione differenziale ordinaria del second'ordine lineare per il campo  $J(t)$ .  $\square$

**LEMMA XVII.3.5.** Siano  $p \in M, v, w \in T_p M$ . Allora

$$(17.3.8) \quad J(t) = \text{Exp}_{p_*}(tv)(tw) = (d\text{Exp}_p)(tv)(tw)$$

è il campo di Jacobi lungo  $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$  che soddisfa le condizioni iniziali:

$$(17.3.9) \quad J(0) = 0, \quad \dot{J}(0) = w.$$

**DIMOSTRAZIONE.** La  $J(t)$  definita dalla (17.3.8) è la  $\partial f(t, 0)/\partial s$  per la superficie parametrica

$$(t, s) \rightarrow f(t, s) = \text{Exp}_p(t(v + sw)).$$

Infatti, poiché  $f(0, s) = p$  per ogni  $s$ , è  $J(0) = 0$ ; abbiamo poi

$$\begin{aligned} \frac{DJ(0)}{dt} &= \left(\frac{D}{dt}\right)_{t=0} \left[ (\text{Exp}_p)_*(tv)(tw) \right] = \left(\frac{D}{dt}\right)_{t=0} \left[ t (\text{Exp}_p)_*(tv)(w) \right] \\ &= \left[ (\text{Exp}_p)_*(tv)(w) + t \frac{D}{dt}((\text{Exp}_p)_*(tv)(w)) \right]_{t=0} = w. \end{aligned}$$

$\square$

**OSSERVAZIONE XVII.3.6.** Per ogni geodetica  $\gamma$ , la sua velocità  $\dot{\gamma}$  ed il campo  $t\dot{\gamma}$  sono di Jacobi lungo  $\gamma$ .

Dal Lemma XVII.3.5 abbiamo:

PROPOSIZIONE XVII.3.7. *Siano  $v$  un punto di un intorno normale  $N_0$  di  $0$  in  $T_pM$ ,  $w \in T_pM$  e  $J_w$  il campo di Jacobi lungo  $\text{Exp}_p(tv)$  che soddisfa le condizioni iniziali  $J_w(0) = 0$ ,  $\dot{J}_w(0) = w$ . Allora*

$$J_w(1) = d\text{Exp}_p(v)(w). \quad \square$$

COROLLARIO XVII.3.8. *I punti singolari di  $\text{Exp}_p$  sono i vettori  $v \in N_0$  per cui esiste un campo di Jacobi non nullo lungo  $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$  che si annulli in  $0$  ed  $1$ .*  $\square$

ESEMPIO XVII.3.9. Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Per calcolare il differenziale dell'applicazione esponenziale, consideriamo su  $\mathbf{G}$  la connessione lineare di Cartan-Shauten di tipo (+). Essa ha curvatura nulla e torsione  $T(X^*, Y^*) = [X^*, Y^*]$  sui campi di vettori invarianti a sinistra. Fissiamo  $X \in \mathfrak{g}$ . L'equazione dei campi di Jacobi lungo la geodetica  $\gamma(t) = \exp(tX)$  si può scrivere, utilizzando l'isomorfismo di  $T\mathbf{G}$  con  $\mathbf{G} \times \mathfrak{g}$  dato dalla forma di Maurer-Cartan, e posto quindi  $J(t) = \exp(tX)_* Y(t)$ , mediante

$$Y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{g}), \quad \ddot{Y} + [X, \dot{Y}] = 0.$$

Abbiamo cioè

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Y(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & -\text{ad}(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & -\text{ad}(X) \end{pmatrix}^h = \begin{pmatrix} 0 & (-\text{ad}(X))^{h-1} \\ 0 & (-\text{ad}(X))^h \end{pmatrix} \quad \forall h > 0,$$

otteniamo

$$\exp \left( t \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & -\text{ad}(X) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} I & \frac{I - \exp(-t \text{ad}(X))}{\text{ad}(X)} \\ 0 & \exp(-t \text{ad}(X)) \end{pmatrix},$$

ove abbiamo posto, se  $A$  è un endomorfismo di  $\mathfrak{g}$ ,

$$\frac{\exp(A) - I}{A} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{A^h}{(h+1)!}.$$

I campi di Jacobi lungo  $\gamma$  sono quindi della forma

$$Y(t) = Y_0 + \frac{I - \exp(-t \text{ad}(X))}{\text{ad}(X)} Y_1, \quad Y_0, Y_1 \in \mathfrak{g}.$$

In particolare, poiché il differenziale dell'esponenziale in  $X$  valuta in  $1$  il campo di Jacobi con valore iniziale  $0$  e velocità iniziale  $Z \in \mathfrak{g}$ , otteniamo

$$d\text{exp}(X)(Z) = \frac{I - \exp(-\text{ad}(X))}{\text{ad}(X)} \text{exp}(X)Z.$$

### XVII.4. Campi di Jacobi su una varietà Riemanniana

Sia  $(M, g)$  sia una varietà Riemanniana, su cui consideriamo la struttura affine definita dalla connessione di Levi-Civita.

DEFINIZIONE XVII.4.1. Un *riferimento mobile* lungo una curva  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$  è una curva  $\tilde{\gamma} = (e_1, \dots, e_m) \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{O}(M))$  tale che i campi  $e_1, \dots, e_m$  siano paralleli<sup>4</sup> lungo  $\gamma$ .

Un riferimento mobile è cioè un sollevamento orizzontale  $\tilde{\gamma}$  di  $\gamma$  in  $\mathbf{O}(M)$ .

Se  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$  è una geodetica, allora

$$\frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 2g\left(\frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt}, \dot{\gamma}(t)\right) = 0.$$

Quindi

LEMMA XVII.4.2. *Le geodetiche non costanti di una varietà Riemanniana  $(M, g)$  sono parametrizzate mediante un multiplo della lunghezza d'arco.*  $\square$

Potremo dunque scegliere, su una geodetica non costante  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ , un riferimento mobile  $(e_1, \dots, e_m) \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{O}(M))$  con  $e_1 = \dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|$ . Poniamo

$$(17.4.1) \quad a_{i,j}(t) = R(e_i(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), e_j(t)) = g(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)).$$

Per la prima identità di Bianchi, i coefficienti  $a_{i,j}$  sono simmetrici. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} a_{i,j}(t) &= R(e_i(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), e_j(t)) = R(\dot{\gamma}(t), e_j(t), e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \\ &= R(e_j(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), e_i(t)) = a_{j,i}(t), \end{aligned}$$

per le proprietà di simmetria del tensore di Riemann controvariante. È poi, per la scelta di  $e_1$ ,  $a_{1,i} = a_{i,1} = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, m$ .

Le componenti  $f^i$  di un campo di Jacobi  $J(t) = \sum_{i=1}^m f^i(t)e_i(t)$  rispetto al riferimento mobile scelto sulla geodetica  $\gamma$ , soddisfano il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$(17.4.2) \quad \ddot{f}^i + \sum_{j=1}^m a_{i,j} f^j = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

In particolare,

$$(17.4.3) \quad \ddot{f}^1 = 0.$$

I campi di Jacobi  $\dot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}\| e_1(t)$  e  $t\dot{\gamma}(t) = t\|\dot{\gamma}\| e_1(t)$  sono le soluzioni della (17.4.2), corrispondenti, rispettivamente, alle condizioni iniziali

$$\begin{cases} f(t_0) = (\|\dot{\gamma}\|, 0, \dots, 0), \\ \dot{f}(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad \begin{cases} f(t_0) = 0, \\ \dot{f}(t_0) = (\|\dot{\gamma}\|, 0, \dots, 0). \end{cases}$$

Dalla (17.4.3) segue il

<sup>4</sup>Il fatto che  $\tilde{\gamma}$  sia a valori in  $\mathbf{O}(M)$  significa che per ogni  $t \in I$ ,  $e_1(t), \dots, e_m(t)$  è una base ortonormale di  $T_{\gamma(t)}M$ .

LEMMA XVII.4.3. Sia  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$  una geodetica e fissiamo  $t_0 \in I$ . Ogni campo di Jacobi  $J$  tale che

$$(17.4.4) \quad g(J(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) = 0 \quad e \quad g(\dot{J}(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) = 0$$

soddisfa

$$(17.4.5) \quad g(J(t), \dot{\gamma}(t)) = 0 \quad e \quad g(\dot{J}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0, \quad \forall t \in I. \quad \square$$

COROLLARIO XVII.4.4. Sia  $p_0 \in M$ ,  $v \in W_{p_0} \subset T_{p_0}M$  e  $w \in T_{p_0}M$  con  $w \perp v$ . Allora  $d\text{Exp}_{p_0}(v)(w) \perp d\text{Exp}_{p_0}(v)(v)$ .  $\square$

**Curvatura sezionale.** Il tensore di curvatura  $R$  della connessione di Levi-Civita è una due-forma a coefficienti nel fibrato  $\mathfrak{so}(M) \subset T^{1,1}M$  degli endomorfismi  $g$ -antisimmetrici di  $TM$ . La

$$(17.4.6) \quad R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4), \quad \forall X_1, X_2, X_3, X_4$$

definisce una forma bilineare simmetrica su  $\Lambda^2 TM$ , con  $R(X_1 \wedge X_2, X_3 \wedge X_4) = R(X_1, X_2, X_3, X_4)$ . In particolare, se  $\alpha$  è il piano di  $T_p M$  generato dai vettori  $X_1, X_2$ , il quoziente  $R(X_1, X_2, X_1, X_2) / (\|X_1 \wedge X_2\|^2)$ , ove  $\|X_1 \wedge X_2\|^2 = g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - |g(X_1, X_2)|^2$ , non dipende dalla scelta della base  $X_1, X_2$  di  $\alpha$ .

DEFINIZIONE XVII.4.5. Chiamiamo *curvatura sezionale* di  $(M, g)$  rispetto al piano  $\alpha$  di  $TM$  il numero reale  $K(\alpha)$  per cui

$$(17.4.7) \quad R(X_1, X_2, X_1, X_2) = -K(\alpha)(g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - |g(X_1, X_2)|^2)$$

per ogni base  $X_1, X_2 \in T_p M$  di  $\alpha$ .

ESEMPIO XVII.4.6. Supponiamo che  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  sia un gruppo lineare, la cui algebra di Lie  $\mathfrak{k}$  ammetta una decomposizione di Cartan  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{m}$ , con  $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}_n$  e  $\mathfrak{m} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}_n$ . Possiamo definire su  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  una struttura di spazio Riemanniano simmetrico definendo su  $\mathfrak{m}$  il prodotto scalare

$$g_{p_0}(X, Y) = \text{tr}_{\mathbb{R}}(XY) = \text{Re traccia}(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

Poiché  $R_{p_0}(X, Y)Z = -[[X, Y], Z]$ , abbiamo

$$\begin{aligned} -R(X, Y, X, Y) &= \text{tr}_{\mathbb{R}}([X, Y], X[Y]) = \text{tr}_{\mathbb{R}}([X, Y]XY) - \text{tr}_{\mathbb{R}}(X[X, Y]Y) \\ &= \text{tr}_{\mathbb{R}}(XY[X, Y]) - \text{tr}_{\mathbb{R}}(YX[X, Y]) = \text{tr}_{\mathbb{R}}([X, Y][X, Y]) \end{aligned}$$

La curvatura sezionale è allora data da

$$K(\langle X, Y \rangle) = (\text{tr}_{\mathbb{R}}(X^2)\text{tr}_{\mathbb{R}}(Y^2) - |\text{tr}_{\mathbb{R}}(XY)|^2)^{-1} \text{tr}_{\mathbb{R}}([X, Y], [X, Y]) < 0$$

per ogni  $X, Y \in \mathfrak{m}$ , perché  $[X, Y] \in \mathfrak{u}_n$  ed ha quindi autovalori puramente immaginari.

La somma diretta  $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus i\mathfrak{m}$  è ancora un'algebra di Lie reale. Il sottogruppo analitico  $\mathbf{K}$  di  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$  da essa generato è compatto. Il quoziente  $M' = \mathbf{K}/\mathbf{K}_0$  è uno spazio Riemanniano simmetrico, con la metrica definita su  $T_{p_0}M$  da

$$g_{p_0}(X, Y) = -\text{tr}_{\mathbb{R}}(XY), \quad \forall X, Y \in i\mathfrak{m}.$$

Sostituendo  $iX$  ed  $iY$  ad  $X$  ed  $Y$  nei calcoli precedenti otteniamo per la curvatura sezionale

$$K(\langle iX, iY \rangle) = -(\operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(X^2)\operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(Y^2) - |\operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(XY)|^2)^{-1} \operatorname{tr}_{\mathbb{R}}([X, Y], [X, Y]) > 0$$

per ogni  $iX, iY \in im$ .

Gli spazi Riemanniani simmetrici  $M$  ed  $M'$  dell'esempio si dicono *in dualità*: le curvatures sezionali dell'uno sono l'opposto delle curvatures sezionali dell'altro.

Se  $\mathbf{G} = \mathbf{SO}^+(1, n)$ , questa costruzione ci dà  $M$  uguale allo spazio di Lobachevskij  $n$ -dimensionale, con curvatura sezionale costante  $-1$ , ed  $M'$  alla sfera  $S^n$ , con curvatura sezionale costante  $1$ .

**Campi di Jacobi su una varietà a curvatura sezionale costante.** Supponiamo che  $M$  abbia curvatura sezionale costante  $K$  e sia  $\gamma$  una geodetica su  $M$ , parametrizzata per lunghezza d'arco.

Fissiamo un campo di vettori  $w(t)$  parallelo su  $\gamma$ , con  $\|w(t)\| = 1$  e  $g(w(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ . Allora  $R(w(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = Kw(t)$ . Poiché  $Dw/dt = 0$  lungo  $\gamma$ , ne segue che le

$$(17.4.8) \quad J(t) = \begin{cases} K^{-1}(A \cos(t\sqrt{K}) + B \sin(t\sqrt{K})) \cdot w(t) & \text{se } K > 0, \\ (A + Bt) \cdot w(t) & \text{se } K = 0, \\ K^{-1}(A \cosh(t\sqrt{-K}) + B \sinh(t\sqrt{-K})) \cdot w(t) & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

sono campi di Jacobi ortogonali lungo  $\gamma$ . Tutti i campi di Jacobi ortogonali si ottengono al variare di  $w(t)$  tra i campi di vettori ortogonali paralleli lungo  $\gamma$ .

**Campi di Jacobi su varietà a curvatura costante.** Più in generale, possiamo considerare il caso in cui sia  $\nabla R = 0$ , che si verifica ad esempio per una metrica invariante su uno spazio omogeneo riduttivo. Sia  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$  una geodetica. Supporremo per semplicità che  $0 \in I$  e  $\|\dot{\gamma}\| = 1$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{da_{i,j}}{dt} &= \frac{d}{dt} R(e_i, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_j) \\ &= R\left(\frac{De_i}{dt}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_j\right) + R\left(e_i, \frac{D^2\gamma}{dt^2}, \dot{\gamma}, e_j\right) \\ &\quad + R\left(e_i, \dot{\gamma}, \frac{D^2\gamma}{dt^2}, e_j\right) + R\left(e_i, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \frac{De_j}{dt}\right) = 0, \end{aligned}$$

perché  $\gamma$  è geodetica e gli  $e_i$  paralleli lungo  $\gamma$ ; quindi i coefficienti  $a_{i,j}$  sono costanti lungo  $\gamma$ . Possiamo fissare il riferimento mobile  $\tilde{\gamma} = (e_1, \dots, e_m)$  lungo  $\gamma$  in modo che i vettori  $e_i$  diagonalizzino  $(a_{i,j})$ , che cioè

$$\sum_{j=1}^m a_{i,j} e_j(t) = k_i e_i(t), \quad \text{per } i = 1, \dots, m$$

ove  $k_1 = 0$  e  $k_2, \dots, k_m$  sono gli autovalori della matrice  $(a_{i,j})$ . Allora

$$J'_i = \begin{cases} k_i^{-1} \cos(t\sqrt{k}) e_i(t) & \text{se } k_i > 0, \\ e_i(t) & \text{se } k_i = 0, \\ k_i^{-1} \cosh(t\sqrt{-k_i}) & \text{se } k_i < 0, \end{cases} \quad J''_i = \begin{cases} k_i^{-1} \sin(t\sqrt{k}) e_i(t) & \text{se } k_i > 0, \\ t e_i(t) & \text{se } k_i = 0, \\ k_i^{-1} \sinh(t\sqrt{-k_i}) e_i(t) & \text{se } k_i < 0, \end{cases}$$

per  $i = 1, \dots, m$  formano una base dello spazio vettoriale  $\mathcal{J}(\gamma)$ .

### XVII.5. Punti coniugati

Sia  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$  una geodetica.

**DEFINIZIONE XVII.5.1.** Due valori distinti  $t_0 \neq t_1 \in I$  del parametro si dicono *coniugati* se esiste un campo di Jacobi  $J \in \mathcal{J}(\gamma)$ , non identicamente nullo, che si annulli in  $t_0$  e  $t_1$ .

Chiamiamo *molteplicità* di  $(t_0, t_1)$  la dimensione dello spazio vettoriale:

$$(17.5.1) \quad \{J \in \mathcal{J}(\gamma) \mid J(t_0) = 0, J(t_1) = 0\}.$$

Su dicono *coniugati lungo*  $\gamma$  anche i due punti  $p_0 = \gamma(t_0)$  e  $p_1 = \gamma(t_1)$  corrispondenti ai valori coniugati del parametro, e *molteplicità* di  $(p_0, p_1)$  lungo  $\gamma$  quella della corrispondente coppia  $(t_0, t_1)$ .

Diremo che due punti  $p_0, p_1$  di  $M$ , distinti o coincidenti, sono *coniugati* se lo sono lungo una geodetica non costante che li congiunge.

L'insieme dei punti di  $M$  coniugati a  $p_0$  si dice il suo *luogo coniugato* e si indica con  $C(p_0)$ .

**OSSERVAZIONE XVII.5.2.** Fissato  $t_0 \in I$ , i campi di  $\mathcal{J}(\gamma)$  che si annullano in  $t_0$  formano uno spazio vettoriale di dimensione  $m$ . Tra di essi c'è il campo di vettori  $(t - t_0)\dot{\gamma}(t)$ , che si annulla soltanto nel punto  $t_0$ . Quindi la *molteplicità* di un punto coniugato è un intero  $\leq (n - 1)$ .

**ESEMPIO XVII.5.3.** Le geoderiche della sfera  $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|x\| = 1\}$ , sono i suoi cerchi massimi (intersezioni di  $S^n$  con i piani per l'origine). Per ogni  $x \in S^m$  è  $C(x) = \{\pm x\}$  e ciascun punto è coniugato a sé stesso ed al suo antipodale, lungo un qualsiasi cerchio massimo passante per esso, con molteplicità  $(n - 1)$ .

Le geodetiche dello spazio proiettivo  $\mathbb{R}P^m$  sono le immagini dei cerchi massimi di  $S^m$ . Poiché la proiezione  $\pi : S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$  identifica i punti antipodali, abbiamo  $C(\pi(x)) = \{\pi(x)\}$  per ogni  $x \in S^m$ .

**PROPOSIZIONE XVII.5.4.** Siano  $p_0$  un punto di  $M$  e  $W_{p_0} \subset T_{p_0}$  il dominio di definizione di  $\text{Exp}_{p_0}$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché  $v \in W_{p_0}$  sia un punto critico dell'esponenziale  $\text{Exp}_{p_0}$  è che  $(0, 1)$  siano coniugati lungo la geodetica  $t \rightarrow \text{Exp}_{p_0}(tv)$  e la molteplicità di  $(0, 1)$  è allora la dimensione di  $\ker d\text{Exp}_{p_0}(v)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Abbiamo dimostrato che il campo di Jacobi su  $\gamma(t) = \text{Exp}_{p_0}(tv)$  che si annulla e ha derivata prima uguale a  $w \in T_{p_0}M$  in 0 è descritto da  $J(t) = \left[ (\partial E_p(t(v + sw)))/\partial s \right]_{s=0}$ . Il suo valore in  $t$  è  $d\text{Exp}_p(tv)(tw)$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE XVII.5.5.** Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una geodetica. Se  $a$  e  $b$  non sono coniugati, allora il problema al contorno:

$$(17.5.2) \quad \begin{cases} \frac{D^2 J}{dt^2} + R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = 0 \\ J(a) = v_a, J(b) = v_b \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione per ogni coppia di vettori  $v_a \in T_{\gamma(a)}M$  e  $v_b \in T_{\gamma(b)}M$ .



DIMOSTRAZIONE. Se  $a$  e  $b$  non sono coniugati, l'applicazione lineare

$$\mathcal{J}(\gamma) \ni J \rightarrow (J(a), J(b)) \in T_{\gamma(a)}M \oplus T_{\gamma(b)}M$$

è iniettiva e quindi anche surgettiva perché i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione finita  $2m$ .  $\square$



## Proprietà metriche delle varietà Riemanniane

### XVIII.1. Geodetiche e distanza Riemanniana

Sia  $(M, g)$  è una varietà Riemanniana. Useremo la notazione

$$(18.1.1) \quad (v|w) = g(v, w), \quad \|v\| = \sqrt{g(v, v)} \geq 0, \quad \text{se } p \in M \text{ e } v, w \in T_p M,$$

e considereremo su  $M$  la struttura affine definita dalla connessione di Levi-Civita.

Sia  $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], M)$  una curva differenziabile.

DEFINIZIONE XVIII.1.1. La *lunghezza*  $L(\gamma)$  e l'*energia*, o *azione*  $E(\gamma)$  di  $\gamma$  sono definite dagli integrali:

$$(18.1.2) \quad L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt, \quad E(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt.$$

Se  $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$  per ogni  $t \in [a, b]$  diciamo che  $\gamma$  è *parametrizzata per lunghezza d'arco*. In questo caso  $t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}(t)\| dt$  per ogni  $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ .

Queste definizioni si estendono in modo ovvio al caso in cui  $\gamma$  sia di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti.

Sia  $\mathcal{C}_r^1([a, b], M)$  la famiglia delle curve di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti definite sull'intervallo  $[a, b]$  e  $\mathcal{C}_r^1([a, b], a, b; M, p, q)$  il sottoinsieme di di quelle di di punto iniziale  $\gamma(a) = p$  e punto finale  $\gamma(b) = q$ .

Dalle formule di cambiamento di variabile negli integrali ricaviamo il

LEMMA XVIII.1.2. *La lunghezza di una curva non dipende dalla sua parametrizzazione.*  $\square$

Supponiamo che  $M$  sia connessa<sup>1</sup>.

DEFINIZIONE XVIII.1.3. La *distanza Riemanniana* tra due punti  $p, q \in M$  è

$$(18.1.3) \quad \text{dist}(p, q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}_r^1([0, 1], 0, 1; M, p, q)\}.$$

NOTAZIONE XVIII.1.4. Per semplicità indicheremo a volte, nel seguito, con  $\overline{pq}$  la distanza Riemanniana  $\text{dist}(p, q)$  di due punti  $p, q$  di  $M$ .

PROPOSIZIONE XVIII.1.5. *Sia  $N_{p_0}(r) = \{v \in T_{p_0}M \mid \|v\| < r\}$ , con  $r > 0$ , un intorno normale dell'origine in  $T_{p_0}M$  e  $B_{p_0}(r) = \text{Exp}_{p_0}(N_{p_0}(r))$  il corrispondente intorno normale di  $p_0$  in  $M$ . Allora*

$$(18.1.4) \quad \text{dist}(p_0, \text{Exp}_{p_0}(v)) = \|v\|, \quad \forall v \in N_{p_0}(r)$$

<sup>1</sup>Se  $M$  non è connessa, possiamo porre  $\text{dist}(p_1, p_2) = 1$  se  $p_1, p_2$  appartengono a due diverse componenti connesse.

e  $B_{p_0}(r) = \{p \in M \mid \text{dist}(p, p_0) < r\}$  è la palla aperta di centro  $p_0$  e raggio  $r$  della distanza Riemanniana.

**DIMOSTRAZIONE.** Per ipotesi,  $\text{Exp}_{p_0}$  è un diffeomorfismo di  $N_{p_0}(r)$  su  $B_{p_0}(r)$ . Quindi, ogni cammino  $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], B_{p_0}(r))$  da  $p_0$  ad  $\text{Exp}_{p_0}(v)$  si può scrivere in modo unico nella forma  $\gamma(t) = \text{exp}_{p_0}(\alpha(t))$  con  $\alpha \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], N_{p_0}(r))$  ed  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(1) = v$ . Per calcolare la distanza riemanniana, possiamo limitarci a considerare il caso in cui  $\alpha$  sia semplice e parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco. Per  $t > 0$  decomponiamo  $\dot{\alpha}(t)$  nella sua componente radiale  $\dot{\alpha}_r(t) = (\dot{\alpha}(t)|\alpha(t))\alpha(t)/\|\alpha(t)\|^2$  ed in quella normale  $\dot{\alpha}_n(t) = \dot{\alpha}(t) - \dot{\alpha}_r(t)$  alla direzione radiale. La  $\|\dot{\alpha}_r\|$  è definita e continua per  $t > 0$  e limitata sull'intervallo  $(0, 1]$ . Abbiamo

$$\dot{\gamma}(t) = d\text{Exp}_{p_0}(\dot{\alpha}(t)) = d\text{Exp}_{p_0}(\dot{\alpha}_r(t)) + d\text{Exp}_{p_0}(\dot{\alpha}_n(t)) = \dot{\gamma}_r(t) + \dot{\gamma}_n(t).$$

Il differenziale dell'esponenziale si calcola utilizzando i campi di Jacobi lungo le geodetiche uscenti dal punto  $p_0$ , che sono le immagini dei segmenti uscenti dall'origine di  $T_{p_0}M$ . In particolare, per la Proposizione XVII.3.7 ed il Lemma XVII.4.3, i vettori  $\dot{\gamma}_r$  e  $\dot{\gamma}_n$  sono ortogonali. Inoltre  $\|\dot{\gamma}_r\| = \|\dot{\alpha}_r\|$  e  $\|\dot{\gamma}_n\| = 0$  se e soltanto se  $\|\dot{\alpha}_n\| = 0$ . Osserviamo che

$$2\|\alpha\| \frac{d\|\alpha\|}{dt} = \frac{d\|\alpha\|^2}{dt} = 2(\dot{\alpha}|\alpha) = \pm 2\|\dot{\alpha}_r\| \cdot \|\alpha\|.$$

Quindi

$$\int_0^1 \|\dot{\alpha}_r(t)\| dt = \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} \|\alpha(t)\| \right| dt \geq \int_0^1 \frac{d}{dt} \|\alpha(t)\| dt = \|v\|.$$

Otteniamo perciò

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\| \geq \int_0^1 \|\dot{\gamma}_r\| dt \geq \|v\|$$

e vale l'uguaglianza solo quando  $\dot{\alpha}_n(t)$  sia identicamente nulla, cioè quando  $\gamma$  sia la geodetica  $\text{Exp}_{p_0}(tv)$ . Per concludere la dimostrazione basta osservare che ogni cammino di classe  $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1$  che congiunga  $p_0$  ad un punto non contenuto in  $B_{p_0}(r)$  ha, per la prima parte della dimostrazione, lunghezza maggiore o uguale ad  $r$ .  $\square$

Per la Proposizione XVIII.1.5 le geodetiche minimizzano localmente la lunghezza d'arco. Abbiamo cioè

**COROLLARIO XVIII.1.6.** *Se  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$  è una geodetica, allora per ogni  $t_0 \in I$  possiamo trovare  $\epsilon_0 > 0$  tale che  $\text{dist}(\gamma(t), \gamma(t_0)) = \|\dot{\gamma}(t_0)\| \cdot |t - t_0|$  per  $|t - t_0| < \epsilon_0$ .*  $\square$

**DEFINIZIONE XVIII.1.7.** Chiamiamo *segmento* il supporto di una geodetica  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$  tale che

$$\text{dist}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = \|\dot{\gamma}\| |t_1 - t_2|, \quad \forall 0 \leq t_1, t_2 \leq 1.$$

Chiamiamo *retta* il supporto di una geodetica  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$  non costante e completa, cioè definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

Per la Proposizione XVIII.1.5 abbiamo

**TEOREMA XVIII.1.8.**  $M \times M \ni (p, q) \rightarrow \text{dist}(p, q)$  è una distanza su  $M$ . La topologia indotta dalla distanza Riemanniana coincide con la topologia di varietà di  $M$ .  $\square$

### XVIII.2. Il funzionale dell'energia

Mostriamo in questo paragrafo che le geodetiche di una varietà Riemanniana sono i punti stazionari del funzionale dell'energia.

**LEMMA XVIII.2.1.** Per ogni curva  $\gamma \in \mathcal{C}_r^1([a, b], M)$  vale la disuguaglianza:

$$(18.2.1) \quad L(\gamma)^2 \leq (b-a)E(\gamma).$$

In (18.2.1) vale l'uguaglianza se e soltanto se  $\|\dot{\gamma}(t)\| = \text{costante}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La disuguaglianza di Hölder dà

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq \left( \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left( \int_a^b dt \right)^{1/2} = (b-a)^{1/2} E(\gamma)^{1/2}$$

e vale l'uguaglianza se e soltanto se  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  è costante.  $\square$

**COROLLARIO XVIII.2.2.** Se  $\gamma \in \mathcal{C}_r^1([a, b], M)$  è parametrizzata per lunghezza d'arco, allora  $E(\gamma)$  è il minimo di  $\{E(\gamma \circ \phi)\}$ , al variare di  $\phi$  tra i diffeomorfismi di  $[a, b]$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE XVIII.2.3.** L'equazione delle geodetiche

$$(18.2.2) \quad \frac{D^2\gamma}{dt^2} = 0$$

è l'equazione di Eulero-Lagrange per il funzionale dell'energia con estremi fissi.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $f \in \mathcal{C}^1([a, b] \times I, M)$ , ove  $I$  è un intervallo reale contenente 0, con  $f(a, s) = p_a$  e  $f(b, s) = p_b$  costanti per  $s \in I$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \int_a^b \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 dt &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 dt = 2 \int_a^b \left( \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} \middle| \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt \\ &= 2 \int_a^b \left( \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} \middle| \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt = -2 \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial s} \middle| \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che il tensore della metrica è parallelo, che la connessione di Levi-Civita è priva di torsione, e che il campo di vettori  $\frac{\partial f}{\partial s}$  si annulla negli estremi dell'intervallo d'integrazione. Se  $\gamma(t) = f(t, 0)$  è un estremale del funzionale dell'energia con estremi fissi, posto  $f_s = \{t \rightarrow f(t, s)\}$ , la derivata di  $F(s) = E(f_s)$  si annulla per  $s = 0$ . Otteniamo quindi

$$\int_a^b \left( \frac{D^2\gamma}{dt^2} \middle| V \right) dt = 0$$

per ogni campo di vettori  $V$  di classe  $\mathcal{C}^1$  lungo  $\gamma$  che si annulli agli estremi. Questa relazione è equivalente alla (18.2.2).  $\square$

### XVIII.3. Varietà di Riemann compatte

**TEOREMA XVIII.3.1.** *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana compatta. Ogni curva continua  $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], M)$  è omotopa, in un'omotopia che lascia fissi i suoi estremi  $p_0 = \gamma(0)$  e  $p_1 = \gamma(1)$ , ad una geodetica, che può essere scelta come una curva di lunghezza minima nella classe  $[\gamma]$  di  $\gamma$  in  $\pi([0, 1], 0, 1; M, p_0, p_1)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Gli intorni normali sono contrattili e quindi due archi qualsiasi, che abbiano gli stessi estremi e siano contenuti in un intorno normale, sono omotopi in un'omotopia con gli estremi fissi. Sia  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{1 \leq i \leq k}$  un ricoprimento finito di  $M$  mediante aperti semplici e convessi.

Possiamo fissare un numero reale positivo  $r$  tale che, per ogni  $p \in M$  la palla  $B(p, r) = \{q \in M \mid \text{dist}(p, q) < r\}$  sia contenuta in un aperto del ricoprimento<sup>2</sup>  $\mathcal{U}$ .

Siano  $p_0, p_1 \in M$  ed  $\alpha$  una classe di omotopia in  $\pi([0, 1], 0, 1; M, p_0, p_1)$ . Sia<sup>3</sup>  $\mu = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \alpha\}$  e  $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$  una successione in  $\alpha$  con  $\{L(\gamma_n)\}$  decrescente a  $\mu$ . Possiamo supporre che le  $\gamma_n$  siano delle geodetiche a tratti, e quindi di classe  $\mathcal{C}_r^1$ , parametrizzate per lunghezza d'arco. È allora  $\|\dot{\gamma}_n\| = L(\gamma_n)$  e  $\text{dist}(\gamma_n(t), \gamma_n(s)) \leq L(\gamma_n)|t - s|$  per ogni  $0 \leq s, t \leq 1$ . Poiché le  $L(\gamma_n)$  sono uniformemente limitate, pur di scegliere un intero  $N$  sufficientemente grande, avremo, con  $t_i = i/N$ ,  $\text{dist}(\gamma_n(t_i), \gamma_n(t_{i-1})) = L(\gamma_n)/N < r$  se  $1 \leq i \leq n$ . È  $\gamma_n(t_0) = p_0$  e  $\gamma_n(t_N) = p_1$  per ogni  $n$ . In generale, le  $\{\gamma_n(t_i)\}$  sono, per ogni  $i = 0, \dots, N$ , delle successioni a valori nel compatto  $M$ . Quindi, a meno di passare ad una sottosuccessione, possiamo supporre che tutte le  $N+1$  successioni  $\{\gamma_n(t_i)\}_{n \in \mathbb{N}}$  coprano a punti  $\gamma(t_i)$  di  $M$ . Per costruzione,  $\text{dist}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) = \mu/N < r$  per ogni  $i = 1, \dots, N$ . Quindi le coppie di punti  $\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})$  appartengono ad uno stesso aperto semplice e convesso del ricoprimento  $\mathcal{U}$  e possono quindi essere congiunte da un unico arco di geodetica di lunghezza  $\mu/N$ . Otteniamo in questo modo una spezzata  $\gamma \in \mathcal{C}_r^1([0, 1], M)$  di lunghezza  $\mu$ , che possiamo parametrizzare per un multiplo della lunghezza d'arco, e che realizza il minimo delle lunghezze tra i cammini continui che congiungono  $p_0$  a  $p_1$  ed è quindi la geodetica cercata.  $\square$

**COROLLARIO XVIII.3.2.** *Due punti qualsiasi di una varietà Riemanniana compatta sono estremi di un segmento che li congiunge.*

<sup>2</sup>Infatti, se ciò non fosse vero, per ogni intero positivo  $\nu$  potremmo trovare un punto  $p_\nu$  in  $M$  tale che  $B(p_\nu, 2^{-\nu})$  non sia contenuto in nessun aperto del ricoprimento  $\mathcal{U}$ . Poiché  $M$  è compatto, a meno di passare ad una estratta, possiamo supporre che la successione  $\{p_\nu\}$  converga ad un punto  $p_\infty \in M$ . È  $p_\infty \in U_{i_0}$  per qualche  $i_0$  e  $B(p_\infty, r) \subset U_{i_0}$  per qualche  $r > 0$ . Ma, se  $2^{1-\nu} < r, \mu > \nu$  e  $\text{dist}(p_\mu, p_\infty) < 2^{-\nu-1}$ , la palla  $B(p_\mu, 2^{-\mu})$  sarebbe contenuta in  $B(p_\infty, r)$  e quindi in  $U_{i_0}$ , contraddicendo la scelta della successione  $\{p_\nu\}$ .

<sup>3</sup>La lunghezza di una curva continua  $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], M)$  in uno spazio metrico  $(M, d)$  è l'estremo superiore  $\ell(\gamma) = \sup_{\epsilon > 0} \ell_\epsilon(\gamma)$ , finito o infinito, dei numeri

$$\ell_\epsilon(\gamma) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^N \text{dist}(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \mid 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1, \text{dist}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) < \epsilon \right\}.$$

### XVIII.4. Il teorema di Hopf-Rinow

DEFINIZIONE XVIII.4.1. Una varietà riemanniana  $(M, g)$  si dice *geodeticamente completa* se è completa come varietà differenziabile affine con la connessione di Levi-Civita.

TEOREMA XVIII.4.2 (Hopf-Rinow<sup>4</sup>). Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana connessa. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) con la distanza Riemanniana,  $M$  è uno spazio metrico completo;
- (2) i sottoinsiemi chiusi e limitati di  $M$  sono compatti;
- (3) esiste un punto  $p_0 \in M$  tale che  $\text{Exp}_{p_0}$  sia definita su tutto  $T_{p_0}M$ ;
- (4)  $M$  è geodeticamente completa.

Ognuna delle (1), (2), (3), (4) implica:

- (5) due punti qualsiasi  $p, q \in M$  possono essere congiunti da una geodetica di lunghezza  $\text{dist}(p, q)$ , sono cioè estremi di un segmento che li congiunge.

DIMOSTRAZIONE. In primo luogo mostriamo che, se  $\text{Exp}_{p_0}$  è definita su tutto  $T_{p_0}M$ , allora ogni  $p \in M$  può essere congiunto a  $p_0$  da una geodetica di lunghezza  $\text{dist}(p, p_0)$ .

In particolare, questo dimostra che (4)  $\implies$  (5).

Sia  $R$  l'estremo superiore dei numeri reali  $R \geq 0$  tali che ogni punto  $p$  con  $r = \text{dist}(p, p_0) < R$  possa essere congiunto a  $p_0$  da una geodetica di lunghezza  $r$ . Per la Proposizione XVIII.1.5 l'insieme  $N$  contiene ogni intorno normale  $B_{p_0}(\rho) = \{\text{Exp}_{p_0}(v) \mid v \in T_{p_0}M, \|v\| < \rho\}$ . Quindi  $R > 0$ . La tesi equivale al fatto che  $R = +\infty$ .

Supponiamo per assurdo che  $R$  sia finito. L'insieme  $\bar{B}_{2R}(p_0) = \{\text{Exp}_{p_0}(v) \mid \|v\| \leq 2R\}$  è un compatto di  $M$ . Possiamo quindi trovare un numero reale  $\epsilon$ , con  $0 < \epsilon < R$ , tale che  $N_p(\epsilon) = \{v \in T_pM \mid \|v\| < \epsilon\}$  sia un intorno normale di 0 in  $T_pM$  ed  $\exp_p : N_p(\epsilon) \rightarrow B_p(\epsilon)$  un diffeomorfismo per ogni  $p \in \bar{B}_{2R}(p_0)$ . Sia  $p_1$  un punto di  $M$  con  $R \leq r = \text{dist}(p_1, p_0) < R + (\epsilon/2)$ . Per ogni  $n$  possiamo trovare un cammino  $\gamma_n \in \mathcal{C}_r^1([0, 1], M)$  con  $\gamma_n(0) = p_0$ ,  $\gamma_n(1) = p_1$  ed  $r \leq \ell(\gamma_n) < r + 2^{-n}\epsilon$ . Poiché

$$\text{dist}(p_0, \gamma_n(t)) + \text{dist}(\gamma_n(t), p_1) \leq \ell(\gamma_n) < r + 2^{-n}\epsilon,$$

se  $q_n = \gamma_n(t_n)$  e  $\text{dist}(q_n, p_0) = R - 2^{-n}\epsilon$ , abbiamo

$$\text{dist}(q_n, p_1) < r + 2^{-n}\epsilon - (R - 2^{-n}\epsilon) = (r - R) + 2^{1-n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{2\epsilon}{2^n} < \epsilon, \text{ se } n > 2.$$

Quindi  $q_n$  appartiene all'intorno normale  $B_\epsilon(p_1)$  di  $p_1$  e possiamo allora sostituire a  $\gamma_n$  la curva  $\gamma'_n$  che si ottiene sommando i segmenti geodetici  $[p_0, q_n]$  e  $[q_n, p_1]$ . La successione  $\{q_n\}$  è contenuta nel compatto  $\bar{B}_{2R}(p_0)$  e quindi ne possiamo estrarre una convergente ad un elemento  $q \in B_{p_0}(R) \cap B_{p_1}(\epsilon)$ . Parametizziamo per lunghezza d'arco la somma dei segmenti geodetici  $[p_0, q]$  e  $[q, p_1]$ . La curva così

<sup>4</sup>Hopf, H., Rinow, W., Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche, Commentarii Mathematici Helvetici 3 (1931), 209-225. Heinz Hopf (1894-1971) matematico tedesco, ha dato importanti contributi alla topologia e alla geometria differenziale. Willi Ludwig August Rinow (1907-1979), geometra differenziale, fu suo studente a Berlino.

ottenuta ha lunghezza uguale alla distanza tra  $p_0$  e  $p_1$  ed è parametrizzata per lunghezza d'arco. È quindi una geodetica da  $p_0$  a  $p_1$  e perciò della forma  $\text{Exp}_{p_0}(tv)$  per qualche  $v \in T_{p_0}M$  con  $\|v\| = 1$ . Quindi ogni punto  $p$  a distanza minore di  $R + (\epsilon/2)$  da  $p_0$  si può congiungere a  $p_0$  con una geodetica di lunghezza  $\text{dist}(p, p_0)$ . Ciò contraddice la scelta di  $R$  e dimostra quindi che  $R = +\infty$ .

Completiamo ora la dimostrazione delle altre implicazioni del teorema.

(4) $\Rightarrow$ (3) è banale.

(3) $\Rightarrow$ (2) Se  $A$  è un sottoinsieme limitato di  $M$ , è  $A \subset \overline{B(p, R)}$  per qualche  $R > 0$  e quindi è un sottoinsieme del compatto  $\text{Exp}_p(\{v \in T_pM \mid \|v\| \leq R\})$ . La (2) segue quindi dal fatto che un sottoinsieme chiuso di un compatto è compatto.

(2) $\Rightarrow$ (1) Ogni successione di Cauchy  $\{p_n\} \subset M$  è limitata e quindi la chiusura della sua immagine è compatta. Esiste perciò una sottosuccessione convergente e dunque la successione  $\{p_n\}$  stessa è convergente.

(1) $\Rightarrow$ (4) Sia  $p \in M$  e consideriamo la geodetica  $t \rightarrow \gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$ . Sia  $I$  il suo intervallo massimale di definizione. Se fosse  $\sup I = T_0 < +\infty$ , potremmo scegliere una successione  $\{t_n\}$  tale che  $t_n \nearrow T_0$ . Poiché  $\text{dist}(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq \|v\| |t_n - t_m|$ , la  $\{\gamma(t_n)\}$  è una successione di Cauchy. Per ipotesi ammette un limite  $p_0 \in M$ . Se  $B(p_0, r)$  è un intorno normale di  $p_0$  e  $\gamma(t_n) \in B(p_0, r)$ , vi è un unico  $v_0 \in T_{p_0}M$  tale che  $\gamma(t_n) = \text{Exp}_{p_0}((t_n - T_0)v_0)$  e le geodetiche  $\gamma(t)$  ed  $\text{Exp}_{p_0}((t - T_0)v_0)$  coincidono sull'intervallo  $[t_n, T_0)$ . Questo mostra che  $\text{Exp}_p(tv)$  è definita in un intorno destro di  $T_0$ . Ciò contraddice la scelta di  $T_0$  e mostra quindi che  $T_0 = +\infty$ . Analogamente si dimostra che  $\inf I = -\infty$ . Quindi  $I = \mathbb{R}$  e vale la (4).

Ciò completa la dimostrazione.  $\square$

### XVIII.5. Varietà riemanniane complete

PROPOSIZIONE XVIII.5.1. *Se  $(M, g)$  è completa, per ogni coppia di punti  $p_0, p_1$  di  $M$  passa almeno una retta.*

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione è conseguenza immediata della (5) del Teorema XVIII.4.2 e del fatto che completezza metrica e geodetica sono equivalenti.  $\square$

PROPOSIZIONE XVIII.5.2. *Se  $(M, g)$  è completa, dati una retta e un punto vi è almeno una retta incidente e perpendicolare alla retta data e passante per il punto assegnato.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $r_t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$  la retta assegnata e  $p_0 \in M$ . L'affermazione è banale se  $p_0 \in r = r(\mathbb{R})$ . Supponiamo quindi che  $\delta = \text{dist}(p_0, r) > 0$ . La palla chiusa  $\overline{B}_{p_0}(2\delta)$  è compatta e  $\overline{B}_{p_0}(2\delta) \cap r$  è compatto e non vuoto. Poiché la distanza da un punto è una funzione reale continua ci sarà un punto di  $\overline{B}_{p_0}(2\delta) \cap r$ , che possiamo supporre corrisponda al valore 0 del parametro, per cui  $\overline{p_0, r_0} = \text{dist}(p_0, r) = \delta$ . La retta  $p_t$  per  $p_0$  ed  $r_0 = p_1$  è perpendicolare ad  $r$  in  $r_0$ . Definiamo infatti  $f \in \mathcal{C}^\infty([0, 1] \times [-\epsilon, \epsilon], M)$  in modo che, per ogni  $-\epsilon < s < \epsilon$ ,  $t \rightarrow f(t, s)$  sia la geodetica da  $p_0$  ad  $r_s$ . In particolare,  $f(1, s) = r_s$  per  $|s| < \epsilon$ . Poiché  $E(s) = \int_0^1 \|\partial f(t, s)/\partial t\|^2 dt$  ha un minimo per  $s = 0$ , il campo di Jacobi



$J(t) = (\partial f / \partial s)_{s=0}$  soddisfa le condizioni

$$J(0) = 0, \quad \int_0^1 (J(t)|\dot{\gamma}(t)) = 0.$$

Decomponiamo  $J$  nella somma di un campo di Jacobi  $J_n$  ortogonale a  $p_t$  e di un campo tangenziale  $J_t$ . Poiché  $J(0) = 0$ , esso è della forma della forma  $ct\dot{\gamma}(t)$ . Quindi

$$0 = \int_0^1 (J(t)|\dot{\gamma}(t)) = \int_0^1 ct \overline{p_0 r_0^2} dt = \frac{c}{2} \overline{p_0 r_0^2}$$

e  $c = 0$ . Dunque  $J(t)$  è perpendicolare a  $\gamma$  ed in particolare lo è  $J(1) = \dot{r}_0$ , che è un vettore tangente ad  $r$  in  $r_0$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE XVIII.5.3.** *Se  $(M, g)$  è completa, allora ogni classe di omotopia di curve continue tra due punti  $p_0, p_1$  di  $M$  contiene una geodetica di lunghezza minima.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\alpha$  una classe di omotopia in  $\pi([0, 1], 0, 1; M, p_0, p_1)$ ,  $\mu = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \alpha\}$  e sia  $\{\gamma_n\} \subset \alpha$  una successione di curve di classe  $\mathcal{C}_{tr}^1$ , parametrizzate per multipli della lunghezza d'arco, con  $L(\gamma_n) \searrow \mu$ . I supporti delle  $\gamma_n$  sono tutti contenuti in un compatto  $\overline{B_{p_0}(R)}$ , per  $R > 0$  e possiamo quindi utilizzare l'argomento della dimostrazione del Teorema XVIII.3.1 per ottenere una geodetica in  $\alpha$ .  $\square$

Il punto (5) del Teorema XVIII.4.2 si può riformulare nella

**PROPOSIZIONE XVIII.5.4.** *Se  $(M, g)$  è completa, allora due qualsiasi punti distinti di  $M$  sono estremi di un segmento che li unisce.*  $\square$

**OSSERVAZIONE XVIII.5.5.** La retta per due punti può non essere univocamente determinata, come ad esempio nel caso di punti antipodali di una sfera  $S^m$  con la metrica standard. È invece unica nello spazio proiettivo  $\mathbb{R}P^m$ , su cui consideriamo la metrica riemanniana che rende la proiezione canonica  $S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$  un'isometria locale. Se chiamiamo *rette* le sue geodetiche, per  $\mathbb{R}P^m$  vale l'affermazione che per due punti passa una ed una sola retta. Le rette di  $\mathbb{R}P^m$  sono omeomorfe a circonferenze e due punti dividono la retta che li unisce in due segmenti opposti.

**TEOREMA XVIII.5.6.** *Se  $(M, g)$  è connessa, completa e contiene un punto  $p_0$  privo di punti coniugati, allora  $\text{Exp}_{p_0} : T_{p_0}M \rightarrow M$  è un rivestimento. In particolare, se  $M$  è semplicemente connesso, l'inversa di  $\text{Exp}_{p_0}$  definisce un diffeomorfismo di  $M$  con uno spazio Euclideo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $(M, g)$  è connessa e completa e contiene un punto  $p_0$  privo di punti coniugati, allora  $\text{Exp}_{p_0}$ , che è definita su tutto  $T_{p_0}M$  perché abbiamo supposto  $(M, g)$  completa, non ha punti critici<sup>5</sup>. Possiamo quindi considerare su

<sup>5</sup>Ricordiamo che una coppia  $(p_0, p_1)$  di punti di  $M$  è coniugata se  $p_0$  e  $p_1$  (che può anche coincidere con  $p_0$ ) sono gli estremi di una geodetica non costante  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$  e vi è  $J \in \mathcal{J}(\gamma)$  non identicamente nullo con  $J(0) = 0, J(1) = 0$ ; ciò è equivalente al fatto che  $p_1$  sia un valore critico di  $\text{Exp}_{p_0}$

$T_{p_0}M$  la metrica riemanniana  $g^* = \text{Exp}_{p_0}^* g$ . Anche  $(T_{p_0}M, g^*)$  è, per il teorema di Hopf-Rinow, una varietà riemanniana completa, perché tutte le geodetiche di  $g^*$  passanti per l'origine, che hanno come supporto le rette per l'origine in  $T_{p_0}M$ , sono complete. L'applicazione  $\text{Exp}_{p_0}$  definisce un'isometria di  $(T_{p_0}M, g^*)$  su  $(M, g)$ . La sua immagine è aperta per il teorema dell'inversa locale perché  $\text{Exp}_{p_0}$  non ha punti critici, ed è chiusa perché è un'isometria di uno spazio metrico completo. Poiché abbiamo supposto  $M$  connessa,  $\text{Exp}_{p_0}$  è allora anche surgettiva e definisce perciò un rivestimento, perché ogni aperto semplice convesso di  $(M, g)$  è di trivializzazione.  $\square$

### XVIII.6. Varietà Riemanniane con curvatura sezionale negativa

La curvatura sezionale<sup>6</sup> di un piano  $\alpha = \langle v_1, v_2 \rangle \in \mathcal{G}r_2(TM)$  è il numero reale

$$K(\alpha) = \frac{R(v_1, v_2, v_2, v_1)}{\|v_1\|^2\|v_2\|^2 - (v_1|v_2)^2}.$$

DEFINIZIONE XVIII.6.1. Diciamo che una varietà Riemanniana  $(M, g)$  ha curvatura sezionale *mai positiva* (rispettivamente *negativa*) se  $K(\alpha) \leq 0$  (rispettivamente  $K(\alpha) < 0$ ) per ogni 2-piano  $\alpha \in \mathcal{G}r_2(TM)$ .

Ricordiamo che i campi di Jacobi sono le soluzioni, lungo le curve geodetiche  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ , dell'equazione differenziale

$$(18.6.1) \quad \frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

Poiché rappresentano deformazioni geodetiche infinitesimali, le loro proprietà ci consentono di collegare la geometria delle geodetiche con il tensore di curvatura ed, in particolare, con la curvatura sezionale.

LEMMA XVIII.6.2. *Supponiamo che  $(M, g)$  abbia curvatura sezionale mai positiva. Allora, per ogni campo di Jacobi  $J$  lungo una geodetica  $\gamma$  di  $(M, g)$ , la norma  $\|J(t)\|$  è funzione convessa del parametro e si annulla al più per un valore di  $t$ .*

*Se  $J$ , non identicamente nullo, è ortogonale a  $\gamma$ , ed  $(M, g)$  ha curvatura sezionale negativa, allora  $\|J(t)\|$  è strettamente convessa.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$  una geodetica e  $J \in \mathcal{J}(\gamma)$  un campo di Jacobi su  $\gamma$ . Calcoliamo le derivate prima e seconda del quadrato della sua norma:

$$\frac{d}{dt}\|J(t)\|^2 = 2(\dot{J}(t), J(t)), \quad \frac{d^2}{dt^2}\|J(t)\|^2 = 2(\ddot{J}(t)|J(t)) + 2\|\dot{J}(t)\|^2,$$

ove abbiamo indicato con  $\dot{J}$  e  $\ddot{J}$  le derivate covarianti prima e seconda di  $J$  lungo  $\gamma$ . Utilizzando la (18.6.1), otteniamo

$$\frac{d^2}{dt^2}\|J(t)\|^2 = -2R(J, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, J) + 2\|\dot{J}\|^2.$$

<sup>6</sup>vedi Definizione XV.11.4.

Per l'ipotesi di curvatura sezionale non positiva, il primo addendo a secondo membro è  $\geq 0$ , e quindi  $(d/dt)^2\|J(t)\|^2 \geq 2\|\dot{J}\|^2$ . La  $\|J(t)\|$  è di classe  $\mathcal{C}^\infty$  nei punti in cui è diversa da zero, ed in cui abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\|J(t)\| &= \frac{1}{4}\|J(t)\|^{-3} \left( 2\|J(t)\|^2 \frac{d^2}{dt^2}\|J(t)\|^2 - \left| \frac{d}{dt}\|J(t)\|^2 \right|^2 \right) \\ &\geq \|J(t)\|^{-3} (\|J(t)\|^2\|\dot{J}(t)\|^2 - |(\dot{J}(t)|J(t))|^2) \geq 0 \end{aligned}$$

per la disuguaglianza di Cauchy. Una funzione non negativa, che sia convessa nei punti in cui è positiva, è convessa. Quindi  $\|J(t)\|$  è convessa. Poiché gli zeri dei campi di Jacobi non identicamente nulli sono isolati, dalla convessità della norma ricaviamo che un campo di Jacobi non banale si annulla al più in un punto di  $\gamma$ . Se la curvatura sezionale è negativa, per i campi di Jacobi ortogonali a  $\gamma$  abbiamo  $(d/dt)^2\|J(t)\| > 2\|\dot{J}\|^2$  nei punti in cui  $J \neq 0$ , e quindi la  $J(t)$  è strettamente convessa.  $\square$

**TEOREMA XVIII.6.3** (von Mangoldt-Cartan<sup>7</sup>). *Una varietà Riemanniana  $(M, g)$  con curvatura sezionale mai positiva non contiene coppie di punti coniugati.*

*Se  $(M, g)$  è connessa e completa, allora per ogni  $p_0 \in M$ , l'applicazione  $\text{Exp}_{p_0}M : T_{p_0}M \rightarrow M$  è un rivestimento.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per il Lemma XVIII.6.2, i campi di Jacobi non banali hanno soltanto zeri isolati e quindi  $M$  non contiene coppie di punti coniugati. L'affermazione successiva è quindi conseguenza del Teorema XVIII.5.6.  $\square$

**COROLLARIO XVIII.6.4.** *Una varietà Riemanniana  $(M, g)$ , connessa e semplicemente connessa, e con curvatura sezionale mai positiva, è diffeomorfa ad uno spazio Euclideo.*  $\square$

**TEOREMA XVIII.6.5.** *Supponiamo che  $(M, g)$  abbia curvatura sezionale mai positiva. Siano  $p$  un punto di  $M$  ed  $N_0$  un intorno aperto di 0 in  $T_pM$ , stellato rispetto all'origine, su cui  $\text{Exp}_p$  sia definito. Allora*

$$(18.6.2) \quad \|d\text{Exp}_p(v)(w)\| \geq \|w\|, \quad \forall v \in N_0, \forall w \in T_pM.$$

*In particolare, se  $\gamma_0 \in \mathcal{C}^1([a, b], N_0)$ , è*

$$(18.6.3) \quad L(\gamma_0) = \int_a^b \|\dot{\gamma}_0(t)\|_p dt \leq L(\text{Exp}_p \circ \gamma_0).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per il Lemma XVIII.6.2,  $d\text{Exp}_p(v)(w)$  è il valore per  $t = 1$  del campo di Jacobi  $J(t) = d\text{Exp}_p(tv)(tw)$  lungo la geodetica  $\text{Exp}_p(tv)$  (caratterizzato dai dati iniziali  $J(0) = 0$  e  $\dot{J}(0) = w$ ). Poiché  $J(t) = tw + 0(t^2)$  e  $\|J(t)\|$  è convessa,

<sup>7</sup>Hans Carl Friedrich von Mangoldt (1854-1925) ha dimostrato questo risultato nel 1881 nel caso delle superfici (*Ueber diejenigen Punkte auf positiv gekrumraten Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geoditischen Linien nie aufhoren, kirzeste Linien zu sein.* Journ. fir Math., vol. 91, 23-53, 1881). La formulazione generale è dovuta a Èlie Cartan (1869-1951) (*La géométrie des espaces de Riemann, Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 9* (1925), p. 1-61).

da  $\|J(t)\| = \|w\| \cdot |t| + 0(t^2)$  segue che  $\|J(t)\| \geq \|w\| \cdot |t|$  e questo, per  $t = 1$  ci dà la (18.6.2).

La (18.6.3) è conseguenza del fatto che  $\frac{d}{dt}\text{Exp}_p(\gamma_0(t)) = d\text{Exp}_p(\dot{\gamma}_0(t))$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE XVIII.6.6.** *Supponiamo che  $(M, g)$  sia completa e a curvatura sezionale mai positiva. Sia  $p_0 \in M$ . Allora ogni classe del gruppo fondamentale  $\pi_1(M, p_0)$  contiene un'unica geodetica di lunghezza minima.*

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo un punto  $p_0 \in M$ . Per il Teorema XVIII.4.2, l'applicazione  $\text{Exp}_{p_0} : T_{p_0}M \rightarrow M$  è un rivestimento. Quindi i laccetti geodetici in  $p_0$  omotopi corrispondono segmenti uscenti dall'origine e con lo stesso secondo estremo in  $T_{p_0}M \rightarrow M$ , cioè due laccetti geodetici in  $p_0$  sono omotopi se e soltanto se sono coincidenti.  $\square$

**DEFINIZIONE XVIII.6.7.** Un *triangolo geodetico* in  $M$  è il dato di tre segmenti, gli estremi di ciascuno dei quali siano anche estremi degli altri due.

I tre segmenti si dicono *lati*, i loro estremi *vertici* e gli angoli che essi formano due a due nei punti d'intersezione *angoli* del triangolo geodetico.

Ricordiamo che l'angolo  $\alpha$  tra due curve regolari  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$  uscenti dallo stesso punto  $p_0$  è il valore  $\alpha \in [0, \pi]$  per cui

$$(\dot{\gamma}_1(0)|\dot{\gamma}_2(0)) = \|\dot{\gamma}_1(0)\| \|\dot{\gamma}_2(0)\| \cos \alpha.$$

**NOTAZIONE XVIII.6.8.** Per semplicità indicheremo nel seguito con  $\overline{pq}$  la distanza Riemanniana  $\text{dist}(p, q)$  di due punti  $p, q$  di  $M$ .

**PROPOSIZIONE XVIII.6.9.** *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana a curvatura sezionale mai positiva e  $B$  una palla convessa e semplice di  $M$ . Siano  $p_a, p_b, p_c$  i vertici di un triangolo geodetico contenuto in  $B$  e poniamo  $a = \overline{p_b p_c}$ ,  $b = \overline{p_a p_c}$ ,  $c = \overline{p_a p_b}$ ,  $\alpha = \widehat{p_b p_a p_c}$ ,  $\beta = \widehat{p_a p_b p_c}$ ,  $\gamma = \widehat{p_a p_c p_b}$ , con  $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$ . Valgono allora le disequaglianze:*

$$(18.6.4) \quad a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \leq c^2$$

$$(18.6.5) \quad \alpha + \beta + \gamma \leq \pi.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per dimostrare la (18.6.4) confronteremo il triangolo geodetico  $\Delta(p_a, p_b, p_c)$  con il triangolo euclideo  $\Delta(v_a, v_b, 0)$  di  $T_{p_c}M$ , utilizzando l'esponenziale  $\text{Exp}_{p_c}$ , che fa corrispondere i segmenti  $[0, v_a]$ ,  $[0, v_b]$  alle geodetiche  $[p_c, p_a]$ ,  $[p_c, p_b]$ .

Abbiamo  $p_a = \text{Exp}_{p_c}(v_a)$ ,  $p_b = \text{Exp}_{p_c}(v_b)$ , per due vettori  $v_a, v_b \in T_{p_c}M$  con  $\|v_a\| = b$ ,  $\|v_b\| = a$ . Il lato  $[p_a, p_b]$  del triangolo è il supporto di una geodetica  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ , di lunghezza  $c$ , che possiamo scrivere nella forma  $\gamma = \text{Exp}_{p_c} \circ \gamma_0$ , con  $\gamma_0 \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], 0, 1; T_{p_c}M, v_a, v_b)$ . Per il Teorema XVIII.6.5,

$$c^2 = |L(\gamma)|^2 \geq |L(\gamma_0)|^2 \geq \|v_b - v_a\|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Le ampiezze  $\alpha', \beta', \gamma'$  degli angoli interni del triangolo Euclideo i cui lati hanno lunghezze  $a, b, c$  soddisfano

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma' = c^2, \quad a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta' = b^2, \quad b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha' = a^2.$$

Poiché gli angoli  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  sono tutti compresi tra 0 e  $\pi$ , per la prima parte della dimostrazione abbiamo  $\alpha \leq \alpha', \beta \leq \beta', \gamma \leq \gamma'$ . Essendo  $\alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$ , otteniamo anche la seconda disequaglianza.  $\square$

OSSERVAZIONE XVIII.6.10. La Proposizione XVIII.6.9 si applica in particolare a tutti i triangoli geodetici di una varietà Riemanniana completa con curvatura sezionale mai positiva.

PROPOSIZIONE XVIII.6.11. *Se  $(M, g)$  è connessa e completa, con curvatura sezionale mai positiva, allora per ogni coppia di punti distinti di  $M$  passa una e una sola retta.*

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato è un'immediata conseguenza del Teorema di von Mangoldt-Cartan.  $\square$

PROPOSIZIONE XVIII.6.12. *Sia  $(M, g)$  connessa, semplicemente connessa e completa, con curvatura sezionale mai positiva. Allora per ogni retta ed ogni punto fuori di essa esiste un'unica retta incidente e perpendicolare alla retta data e che passi per il punto assegnato.*

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione XVIII.5.2, per ogni punto  $p_0$  ed ogni retta  $r$  che non lo contiene, c'è una retta  $r'$  per  $p_0$ , incidente e perpendicolare ad  $r$  in un punto  $p_1$ . Se ce ne fosse un'altra, incidente ad  $r$  in un punto  $p_2 \neq p_1$ , la somma degli angoli interni del triangolo geodetico  $p_0p_1p_2$  sarebbe maggiore di  $\pi$ .  $\square$

Ricordiamo la

DEFINIZIONE XVIII.6.13. Una funzione reale  $f \in \mathcal{C}^0(M, \mathbb{R})$ , definita su una varietà differenziabile affine  $M$ , si dice *convessa* se, per ogni intervallo  $I \subset \mathbb{R}$  ed ogni geodetica  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ , la funzione composta  $f \circ \gamma \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$  è convessa.

PROPOSIZIONE XVIII.6.14. *Se  $(M, g)$  è una varietà Riemanniana semplicemente connessa, completa e con curvatura sezionale mai positiva, allora la distanza da un punto è una funzione convessa.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo tre punti  $q, p_0, p_1$  di  $M$ . Sia  $p_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$  il segmento che congiunge  $p_0$  a  $p_1$ . Abbiamo  $\overline{p_0p_t} = t\overline{p_0p_1}$ ,  $\overline{p_t p_1} = (1-t)\overline{p_0p_1}$ . Sia  $\alpha_t = \widehat{p_0p_tq}$ . Poiché  $\widehat{p_1p_tq} = \pi - \alpha_t$ , otteniamo dalla (18.6.4), applicata ai triangoli geodetici  $p_0p_tq$  e  $p_1p_tq$ :

$$\begin{aligned} \overline{p_tq}^2 + t^2\overline{p_0p_1}^2 - 2t\overline{p_0p_1} \cdot \overline{p_tq} \cos \alpha_t &\leq \overline{p_0q}^2, \\ \overline{p_tq}^2 + (1-t)^2\overline{p_0p_1}^2 + 2(1-t)\overline{p_0p_1} \cdot \overline{p_tq} \cos \alpha_t &\leq \overline{p_1q}^2. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo per  $(1-t)$  la prima e per  $t$  la seconda disequaglianza e sommiamole, eliminando così gli addendi contenenti  $\cos \alpha_t$ . Otteniamo:

$$\overline{p_tq}^2 + t(1-t)\overline{p_0p_1}^2 \leq (1-t)\overline{p_0q}^2 + t\overline{p_1q}^2.$$

Per la disequaglianza triangolare,  $\overline{p_0p_1} \leq |\overline{p_0q} - \overline{p_1q}|$ . Sostituendo nella precedente, ricaviamo che

$$\overline{p_tq}^2 + t(1-t)(\overline{p_0q} - \overline{p_1q})^2 \leq (1-t)\overline{p_0q}^2 + t\overline{p_1q}^2.$$

È quindi

$$\begin{aligned}\overline{p_t q^2} &\leq [(1-t) - t(1-t)]\overline{p_0 q^2} + [t - t(1-t)]\overline{p_1 q^2} + 2t(1-t)\overline{p_0 q p_1 q} \\ &\leq (1-t)^2\overline{p_0 q^2} + t^2\overline{p_1 q^2} + 2t(1-t)\overline{p_0 q p_1 q} \\ &\leq ((1-t)\overline{p_0 q} + t\overline{p_1 q})^2,\end{aligned}$$

da cui ricaviamo che la  $t \rightarrow \overline{p_t q}$  è convessa.  $\square$

Nella dimostrazione abbiamo ottenuto

LEMMA XVIII.6.15. *Siano  $p_0, p_1, q$  tre punti di un aperto semplice convesso di una varietà Riemanniana  $(M, g)$  a curvatura sezionale mai positiva e  $p_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$  il segmento di estremi  $p_0, p_1$ . Allora*

$$(18.6.6) \quad \overline{p_t q^2} \leq (1-t)\overline{p_0 q^2} + t\overline{p_1 q^2} - t(1-t)\overline{p_0 p_1^2}, \quad \forall 0 \leq t \leq 1. \quad \square$$

LEMMA XVIII.6.16. *Supponiamo che  $(M, g)$  abbia curvatura sezionale mai positiva. Siano  $p_0 \in M$  ed  $N_{p_0}$  un intorno normale di  $p_0$  in  $M$ . Allora la funzione  $p \rightarrow \overline{p p_0}$  è differenziabile su  $N_{p_0} \setminus \{p_0\}$  e*

$$(18.6.7) \quad d_p \overline{p p_0}(w) = -\|w\| \cos \alpha, \quad \forall p \in N_{p_0}, \forall w \in T_p M,$$

ove  $\alpha$  è l'angolo che il segmento  $[p_0, p]$  forma con la direzione  $w$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $f(p) = \overline{p p_0}$ . È  $f(\text{Exp}_{p_0}(v)) = \|v\|$ . Quindi

$$df(p)(d\text{Exp}_{p_0}(v)(w)) = \frac{(v|w)}{\|v\|} = \|w\| \cos \widehat{vw}, \quad \text{se } p = \text{Exp}_{p_0}(v), v, w \in T_{p_0} M.$$

Poiché il trasporto parallelo preserva l'ortogonalità lungo la geodetica, otteniamo la tesi, perché l'angolo  $\widehat{vw}$  è il supplementare di quello che il segmento  $[0, v]$  forma con la semiretta  $\{v + tw \mid t \geq 0\}$ .  $\square$

LEMMA XVIII.6.17. *Supponiamo che  $(M, g)$  abbia curvatura sezionale mai positiva. Siano  $p_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$  e  $q_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$  due geodetiche uscenti dallo stesso punto  $p_0$  i cui supporti siano contenuti in un aperto semplice convesso di  $M$ . Allora*

$$(18.6.8) \quad \text{dist}(p_t, q_t) \leq t \text{dist}(p_1, q_1), \quad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo, per la (18.6.6), applicata una prima volta alla distanza del punto  $p_1$  dai punti del segmento geodetico  $\{q_t\}$  (è  $q_0 = p_0$ ), la seconda alla distanza di  $q_t$  dai punti del segmento  $\{p_t\}$ ,

$$\begin{aligned}\overline{p_1 q_t^2} &\leq t\overline{p_1 q_1^2} + (1-t)\overline{p_0 p_1^2} - t(1-t)\overline{p_0 q_1^2}, \\ \overline{p_t q_t^2} &\leq t\overline{p_1 q_t^2} + (1-t)\overline{p_0 q_t^2} - t(1-t)\overline{p_0 p_1^2}.\end{aligned}$$

Tenuto conto che  $\overline{p_0 q_t} = t\overline{p_0 q_1}$ , sostituendo la prima disequaglianza nella seconda otteniamo

$$\begin{aligned}\overline{p_t q_t^2} &\leq t\left(t\overline{p_1 q_1^2} + (1-t)\overline{p_0 p_1^2} - t(1-t)\overline{p_0 q_1^2}\right) + t^2(1-t)\overline{p_0 q_1^2} - t(1-t)\overline{p_0 p_1^2} \\ &\leq t^2\overline{p_1 q_1^2},\end{aligned}$$

che è la disequaglianza cercata.  $\square$

PROPOSIZIONE XVIII.6.18. *Supponiamo che  $(M, g)$  abbia curvatura sezionale mai positiva. Allora la funzione  $\text{dist} : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa.*

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo verificare che, se  $p_t, q_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$  sono due geodetiche, allora la funzione  $f(t) = \overline{p_t q_t} \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  è convessa. Il segmento  $r_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$  che unisce  $p_0$  a  $q_1$  ha lo stesso punto iniziale di  $p_t$  ed i segmenti  $\{t \rightarrow r_{1-t}\}$  e  $\{t \rightarrow q_{1-t}\}$  hanno lo stesso punto iniziale  $q_0$ . Per il Lemma XVIII.6.17 valgono quindi

$$\overline{p_t r_t} \leq t \overline{p_1 q_1}, \quad \overline{r_t q_t} \leq (1-t) \overline{p_0 q_0}, \quad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

Otteniamo perciò

$$\overline{p_t q_t} \leq \overline{p_t r_t} + \overline{r_t q_t} \leq (1-t) \overline{p_0 q_0} + t \overline{p_1 q_1}, \quad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

La dimostrazione è completa.  $\square$

Mostriamo ora che ogni gruppo compatto di isometrie di una varietà Riemanniana a curvatura non positiva è un gruppo di rotazioni. Il significato di questa affermazione è spiegato dall'enunciato seguente.

TEOREMA XVIII.6.19. *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana connessa e completa, con curvatura sezionale mai positiva. Sia  $\mathbf{K}$  un gruppo topologico compatto e localmente compatto, che agisce su  $M$  come un gruppo di isometrie. Allora  $\mathbf{K}$  ha almeno un punto fisso in  $M$ .*

DIMOSTRAZIONE. Siano  $\lambda$  la misura di Haar su  $\mathbf{K}$ , normalizzata in modo che sia  $\int_{\mathbf{K}} d\lambda = 1$ , e  $\text{dist}$  la distanza su  $M$  a definita dalla metrica  $g$ . Fissiamo un punto  $p_0 \in M$  e definiamo su  $M$  una funzione continua, ponendo

$$\Psi(p) = \int_{\mathbf{K}} |\text{dist}(p, kp_0)|^2 d\lambda(k).$$

Osserviamo che  $\Psi(kp) = \Psi(p)$  per ogni  $k \in \mathbf{K}$ . Dico che  $\Psi(p)$  ha minimo in  $M$ . Infatti, l'orbita  $\mathbf{K}p_0$  è compatta e quindi ha diametro  $\delta = \max_{p_1, p_2 \in \mathbf{K}p_0} \text{dist}(p_1, p_2)$  finito. Se  $\text{dist}(p, p_0) > 2\delta$ ,

$$\begin{aligned} \Psi(p) &= \int_{\mathbf{K}} |\text{dist}(p, kp_0)|^2 d\lambda(k) \geq \int_{\mathbf{K}} |\text{dist}(p, p_0) - \text{dist}(p_0, kp_0)|^2 d\lambda(k) \\ &> \delta^2 \geq \Psi(p_0). \end{aligned}$$

Per l'ipotesi che  $(M, g)$  sia completa, la palla chiusa  $\overline{B_{p_0}(2\delta)}$  è compatta. Il minimo di  $\Psi$  su  $\overline{B_{p_0}(2\delta)}$  è anche minimo di  $\Psi$  su  $M$ . Sia  $q_0 \in \overline{B_{p_0}(2\delta)}$  un punto di minimo di  $\Psi$ . Poiché  $\Psi$  è  $\mathbf{K}$ -invariante, per dimostrare che  $q_0$  è punto fisso di  $\mathbf{K}$  è sufficiente verificare che  $\Psi(p) > \Psi(q_0)$  per ogni  $p \neq q_0$ .

Sia  $p \in M$  un punto distinto da  $q_0$ ,  $k \in \mathbf{K}$  ed  $\alpha_k$  l'angolo delle geodetiche uscenti da  $q_0$  e passanti per  $p$  e  $kp_0$ , rispettivamente. Per il teorema del coseno è

$$(*) \quad |\text{dist}(p, kp_0)|^2 \geq |\text{dist}(q_0, kp_0)|^2 + |\text{dist}(p, q_0)|^2 - 2\text{dist}(q_0, kp_0)\text{dist}(p, q_0) \cos \alpha_k.$$

Poiché  $q_0$  è punto di minimo per  $\Psi$ , indicando con  $t \rightarrow q_t$  la geodetica di estremi  $q_0$  e  $p = q_1$ , abbiamo

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{G}} |\text{dist}(q_t, kp_0)|^2 d\lambda(k) \Big|_{t=0} = 0.$$

Fissato  $k \in \mathbf{K}$ , è  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} |\text{dist}(q_t, kp_0)|^2 = -2\text{dist}(p, q_0) \text{dist}(kp_0, q_0) \cos \alpha_k$ .

Quindi, differenziando sotto il segno d'integrale, otteniamo

$$\int_{\mathbf{G}} \text{dist}(q_0, p) \cdot \text{dist}(q_0, kp_0) \cos \alpha_k d\lambda(k) = 0.$$

Integrando (\*) membro a membro abbiamo perciò

$$\Psi(p) \geq \Psi(q_0) + |\text{dist}(p, q_0)|^2.$$

La dimostrazione è completa.  $\square$

Questo teorema di punto fisso si può considerare un caso particolare del teorema di Cartan sull'esistenza del baricentro:

**TEOREMA XVIII.6.20 (Cartan (1929)).** *Supponiamo che  $(M, g)$  sia completa, connessa e semplicemente connessa, ed abbia curvatura sezionale mai positiva. Sia  $K$  un compatto non vuoto di  $M$  e  $\lambda$  una misura di probabilità<sup>8</sup> su  $K$ . Allora la funzione*

$$f(p) = \int_K |\text{dist}(p, q)|^2 d\lambda(q)$$

*è strettamente convessa ed ammette un unico punto di minimo in  $M$ . Il suo gradiente<sup>9</sup> è definito da*

$$\nabla f(p) = \int_K \text{Exp}_p^{-1}(q) d\lambda(q).$$

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione è simile a quella del teorema precedente.  $\square$

Interpretando una misura di probabilità come una distribuzione di massa tra i punti di  $K$ , l'unico minimo del funzionale  $f$  ne è il *centro di massa*. In particolare, quando  $K$  consiste di un numero finito di punti  $p_0, p_1, \dots, p_k$ , possiamo considerare il *poliedro* dei punti  $p = t_0 p_0 + t_1 p_1 + \dots + t_k p_k$ , con  $t_i \geq 0$  e  $t_0 + t_1 + \dots + t_k = 1$ , ove  $p$  è il punto di minimo della funzione  $f(p) = \sum_{i=0}^k t_i |\text{dist}(p, p_i)|^2$ . I punti interni del poliedro di  $(k+1)$  punti sufficientemente vicini tra loro formano una varietà di dimensione minore o uguale di  $k$ .

<sup>8</sup>È cioè positiva e di massa totale 1.

<sup>9</sup>Il gradiente di  $f$  è il campo di vettori  $\nabla f$  tale che  $df(p)(v) = (\nabla f|_v)$  per ogni  $v \in T_p M$ , per ogni  $p \in M$ .



### XVIII.7. Un teorema di Bochner

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico.

DEFINIZIONE XVIII.7.1. Un'azione locale di  $\mathbf{G}$  su una varietà differenziabile  $M$  è il dato di un aperto  $U$  di  $M$  e di una applicazione continua  $\phi : \mathbf{G} \times U \rightarrow M$  tale che

- (1)  $\phi_a = \{p \rightarrow \phi(a, p)\} \in \mathcal{C}^\infty(U, M), \quad \forall a \in \mathbf{G},$
- (2)  $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \phi_a \in \mathcal{C}^\infty(U, M)$  sia continua,
- (3)  $\phi_e(p) = \phi(e, p) = p, \quad \forall p \in U,$
- (4)  $\phi_a \circ \phi_b(p) = \phi(ab)(p)$  se  $a, b \in \mathbf{G}, e, p, \phi_b(p) \in U.$

TEOREMA XVIII.7.2. Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo compatto. Supponiamo definita un'azione locale di  $\mathbf{G}$  su  $M$  con un punto fisso  $p_0$ . Allora possiamo trovare una carta locale  $(U, x)$  con centro in  $p_0$  in cui  $\mathbf{G}$  operi come un gruppo di trasformazioni lineari.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che  $M = \mathbb{R}^n$ , che ogni  $a \in \mathbf{G}$  definisca una  $\phi_a \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r), B_0(r))$  per due numeri reali  $0 < r < R$ , e che 0 sia punto fisso di tutte le  $\phi_a$ . Indichiamo con  $y = (y^1, \dots, y^m)$  le coordinate di  $\mathbb{R}^m$ . L'applicazione

$$\mathbf{G} \ni a \longrightarrow L_a = \frac{\partial \phi_a(0)}{\partial y} \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$$

che associa ad  $a \in \mathbf{G}$  lo Jacobiano di  $\phi_a$  in 0 è un omomorfismo di gruppi tale che

$$\phi_a(y) = L_a y + o(|y|), \quad \forall a \in \mathbf{G}, \forall y \in B_0(r).$$

Sia  $\lambda$  la misura di Haar biinvariante su  $\mathbf{G}$  di volume 1 e definiamo la trasformazione

$$R(y) = \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\lambda(a).$$

Per il teorema di derivazione sotto il segno d'integrale, l'applicazione  $R$  è differenziabile su  $W$  e

$$\frac{\partial R(y)}{\partial y} v = \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \frac{\partial \phi_a(y)}{\partial y} v d\lambda(a), \quad \forall y \in B_0(r), \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

In particolare,  $\partial R(0)/\partial y = I_m$  e quindi, per il teorema delle funzioni implicite, la  $R$  definisce un diffeomorfismo di un intorno  $U$  di 0 in  $B_0(r) \subset \mathbb{R}^m$  su un intorno  $U'$  di 0 in  $\mathbb{R}^m$ .

Abbiamo poi, se  $b \in \mathbf{G}$  ed  $y, \phi_b(y) \in B_0(r)$ :

$$\begin{aligned} L_b \circ R(y) &= L_b \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\lambda(a) = \int_{\mathbf{G}} L_b L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\lambda(a) \\ &= \int_{\mathbf{G}} L_{ba^{-1}} \circ \phi_{ab^{-1}} \circ \phi_b(y) d\lambda(ab^{-1}) = R \circ \phi_b(y). \end{aligned}$$

Quindi, in un intorno sufficientemente piccolo di 0 in  $B_0(r)$ , abbiamo

$$R \circ \phi_b \circ R^{-1} = L(b).$$

La dimostrazione è completa. □

**TEOREMA XVIII.7.3.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico localmente compatto, con un'azione locale su una varietà differenziabile  $M$ . Allora esiste un intorno dell'identità  $N_e$  in  $\mathbf{G}$  tale che gli elementi di ogni sottogruppo di  $\mathbf{G}$  che sia contenuto in  $N_e$  lascino fissi tutti i punti di un aperto non vuoto di  $M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $U_0$  un aperto non vuoto di  $M$  tale che ogni  $a \in \mathbf{G}$  definisca un diffeomorfismo di  $U_0$  su un aperto di  $M$ . Fissiamo un qualsiasi aperto non vuoto  $V_0$  relativamente compatto in  $U_0$  e sia  $N'_e$  un intorno aperto relativamente compatto dell'identità in  $\mathbf{G}$  tale che ogni elemento di  $N'_e$  definisca un'applicazione che trasformi  $\bar{V}_0$  in un aperto contenuto in  $U_0$ . Ciò è possibile perché per ipotesi l'applicazione  $\phi$  è continua per la topologia di gruppo topologico assegnata su  $\mathbf{G}$  e la compatta-aperta su  $\mathcal{C}^\infty(U_0, M)$ .

Possiamo supporre che  $U_0$  sia l'aperto di una carta locale  $x$ , con  $x(U_0) = B_0(R) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| < R\}$ , che  $x(V_0) = B_0(r)$  con  $0 < r < R$ . Gli elementi  $a$  di  $N'_e$  definiscono allora delle applicazioni  $\psi_a \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r), B_0(R))$  e possiamo, fissato un numero reale  $\epsilon < 1$  con  $0 < \epsilon < R - r$ , considerare un intorno  $N_e$  di  $e$  relativamente compatto in  $N'_e$  e tale che, per ogni  $a$  in  $N_e$  sia

$$|x - \psi_a(x)| + \|I_m - \partial\psi_a/\partial x\| < \epsilon, \quad \text{se } |x| \leq r.$$

Sia  $\mathbf{G}_0$  un sottogruppo contenuto in  $N_e$ . La sua chiusura è un sottogruppo compatto  $\mathbf{H} = \bar{\mathbf{G}}_0$  contenuto in  $\bar{N}_e \Subset N'_e$ . Sia  $\lambda$  la misura di Haar biinvariante su  $\mathbf{H}$  e definiamo, per  $x \in B_0(r)$ ,

$$R(x) = \int_{\mathbf{H}} \psi_a(x) d\lambda(a)$$

Differenziando sotto il segno d'integrale otteniamo

$$\left| \frac{\partial R(x)}{\partial x} v \right| = \left| \int_{\mathbf{H}} \frac{\partial \psi_a(x)}{\partial x} v d\lambda(a) \right| \geq (1 - \epsilon) |v|, \quad \forall x \in B_0(r), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

In particolare,  $R$  è invertibile nell'intorno di ogni punto  $x$  di  $B_0(r)$ .

Per ogni  $b \in \mathbf{H}$ , per l'invarianza della misura di Haar abbiamo

$$R \circ \phi_b = \int_{\mathbf{H}} \psi_a \circ \psi_b d\lambda(a) = \int_{\mathbf{H}} \phi_{ab} d\lambda(a) = \int_{\mathbf{H}} \phi_{ab} d\lambda(ab) = R$$

ne segue che  $\psi_b$  è l'identità su  $B_0(r)$ . □

Da questo ricaviamo il teorema<sup>10</sup> sulla non esistenza di sottogruppi *piccoli*.

**TEOREMA XVIII.7.4.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico localmente compatto di diffeomorfismi  $\mathcal{C}^\infty$  di una varietà differenziabile  $M$ . Allora esiste un intorno  $N$  dell'identità in  $\mathbf{G}$  che non contiene sottogruppi di  $\mathbf{G}$  diversi da  $\{e\}$ .* □

**COROLLARIO XVIII.7.5.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico di trasformazioni differenziabili di una varietà  $M$ . Allora esiste un intorno dell'identità  $N_e$  in  $\mathbf{G}$  tale che, per ogni  $a \in N_e \setminus \{e\}$  esiste un intero  $k$  tale che  $a^k \notin N_e$ .*

<sup>10</sup>S.Bochner e D.Montgomery, *Locally compact groups of differentiable transformations*, Annals of Mathematics, **47**, (1946) pp.639-653.

**TEOREMA XVIII.7.6.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo localmente compatto di diffeomorfismi di una varietà  $M$ . Se l'identità  $e$  di  $\mathbf{G}$  non è un punto isolato di  $\mathbf{G}$ , allora <sup>11</sup>, allora  $\mathbf{G}$  contiene sottogruppi a un parametro.*

---

<sup>11</sup>Ciò significa che ogni intorno di  $e$  ha in  $\mathbf{G}$  elementi distinti da  $e$ .



## Gruppi di trasformazioni

### XIX.1. Il gruppo delle isometrie di uno spazio metrico

Sia  $(M, \text{dist}_M)$  uno spazio metrico.

Indichiamo con  $B_p(r) = \{q \in M \mid \text{dist}_M(q, p) < r\}$  e con  $\bar{B}_p(r) = \{q \in M \mid \text{dist}_M(q, p) \leq r\}$  le palle, rispettivamente aperta e chiusa, di centro  $p$  e raggio  $R$ .

DEFINIZIONE XIX.1.1. Se  $(M, \text{dist}_M)$  ed  $(N, \text{dist}_N)$  sono due spazi metrici, un'applicazione  $f : M \rightarrow N$  è un'isometria se preserva le distanze, se cioè

$$\text{dist}_N(f(p_1), f(p_2)) = \text{dist}_M(p_1, p_2), \quad \forall p_1, p_2 \in M.$$

OSSERVAZIONE XIX.1.2. Ogni isometria è un'applicazione continua e iniettiva.

Un'isometria di uno spazio metrico in sé può non essere surgettiva. Si consideri ad esempio il caso in cui  $M$  sia la semiretta  $\{t \geq 0\} \subset \mathbb{R}$ , con la metrica standard. La  $M \ni t \rightarrow f(t) = t + 1 \in M$  è un'isometria non surgettiva.

DEFINIZIONE XIX.1.3. Si chiama *isometria globale* o *congruenza* un'isometria invertibile.

Le isometrie invertibili di  $(M, \text{dist}_M)$  in sé formano un gruppo, che chiamiamo *gruppo delle isometrie di  $M$* , ed indicheremo con  $\mathbf{I}(M)$ .

PROPOSIZIONE XIX.1.4. Se  $(M, \text{dist}_M)$  è compatta e connessa, allora ogni isometria di  $M$  in sé è globale.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $f$  un'isometria di  $M$  in sé. L'immagine  $f(M)$  è compatta e quindi chiusa. Supponiamo per assurdo che  $f$  non sia surgettiva e sia  $p_0 \in M$  con  $\delta = \text{dist}_M(p_0, f(M)) = \max_{p \in M} \text{dist}_M(p, f(M)) > 0$ . Definiamo per ricorrenza  $p_{n+1} = f(p_n) = f^{n+1}(p_0)$  per ogni intero  $n \geq 0$ . Se  $0 \leq n_1 < n_2$  abbiamo

$$\text{dist}_M(p_{n_1}, p_{n_2}) = \text{dist}_M(f^{n_1}(p_0), f^{n_2}(p_0)) = \text{dist}_M(p_0, f^{n_2-n_1}(p_0)) \geq \delta > 0.$$

La  $\{p_n\}$  non ha quindi punti di accumulazione in  $M$ , e ciò contraddice la compattezza di  $M$ . La dimostrazione è completa.  $\square$

LEMMA XIX.1.5. Sia  $(N, \text{dist}_N)$  uno spazio metrico localmente compatto. Siano  $(M, \text{dist}_M)$  un altro spazio metrico ed  $\{f_v\} \subset \mathcal{C}(M, N)$  una successione di isometrie di  $M$  in  $N$ . Sia  $p_0$  un punto di  $M$  e supponiamo che la successione  $\{f_v(p_0)\}$  converga in  $N$  ad un punto  $q_0$ . Se  $r > 0$  e  $\bar{B}_{q_0}(r)$  è compatta in  $N$ , allora possiamo estrarre da  $\{f_v\}$  una sottosuccessione  $\{f_{k_v}\}$  che converge, uniformemente su  $\bar{B}_{p_0}(r)$ , ad una isometria  $f : \bar{B}_{p_0}(r) \rightarrow \bar{B}_{q_0}(r)$ .

DIMOSTRAZIONE. Possiamo fissare un numero reale  $R > r$  tale che  $\bar{B}_{q_0}(R)$  sia ancora compatta in  $N$ . A meno di passare ad una sottosuccessione, possiamo supporre che  $\text{dist}_N(f_\nu(p_0), q_0) < (R - r)/2$  per ogni indice  $\nu$ . Allora

$$\begin{aligned} \text{dist}_N(f_\nu(p), q_0) &\leq \text{dist}_N(f_\nu(p), f_\nu(p_0)) + \text{dist}_N(f_\nu(p_0), q_0) \\ &\leq (R + r)/2 + (R - r)/2 = R, \quad \text{se } \text{dist}_M(p, p_0) \leq (R + r)/2, \end{aligned}$$

cioè  $f_\nu(\bar{B}_{p_0}((R + r)/2)) \subset \bar{B}_{q_0}(R)$  per ogni  $\nu$ .

Per ogni intero  $\nu$  possiamo fissare dei sottoinsiemi finiti  $A_\nu$  di  $\bar{B}_{p_0}((R + r)/2)$  tali che  $A_\nu \subset A_{\nu+1}$  e  $\bar{B}_{p_0}((R + r)/2) \subset \bigcup_{p \in A_\nu} B_p(r2^{-\nu})$ . Infatti, se ciò non fosse possibile, potremmo trovare un  $\epsilon > 0$  ed, in  $\bar{B}_{p_0}((R + r)/2)$ , una successione  $\{p_n\}$  con  $\text{dist}(p_{n_1}, p_{n_2}) > \epsilon$  se  $n_1 \neq n_2$ . Ma questo darebbe una contraddizione, perché le successioni  $\{f_\nu(p_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  sarebbero allora prive di punti di accumulazione, pur essendo contenute nel compatto  $\bar{B}_{q_0}(R)$ .

Per ogni  $p \in \bar{B}_{p_0}((R + r)/2)$ , la successione  $\{f_\nu(p)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  è a valori nel compatto  $\bar{B}_{q_0}(R)$  ed ammette perciò una sottosuccessione convergente. Possiamo quindi costruire per ricorrenza una sequenza di successioni estratte  $\{f_\nu\} \supset \{f_\nu^{(1)}\} \supset \dots \supset \{f_\nu^{(\mu)}\} \supset \dots$  tali che  $\text{dist}(f_\nu^{(\mu)}(p), f_{\nu'}^{(\mu)}(p)) < r2^{-\mu}$  per ogni  $\nu, \nu'$  se  $p \in A_\mu$ . Dico che la  $\{f_\nu^{(\nu)}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente su  $\bar{B}_{p_0}((R + r)/2)$  ad un'isometria  $f : \bar{B}_{p_0}((R + r)/2) \rightarrow B_{q_0}((R + r)/2) \subset M$ . Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} &\text{dist}_N(f_\nu^{(\nu)}(p), f_\mu^{(\mu)}(p)) \\ &\leq \inf_{\bar{p} \in A_\nu} \left( \text{dist}_N(f_\nu^{(\nu)}(p), f_\nu^{(\nu)}(\bar{p})) + \text{dist}_N(f_\nu^{(\nu)}(\bar{p}), f_\mu^{(\mu)}(\bar{p})) + \text{dist}_N(f_\mu^{(\mu)}(\bar{p}), f_\mu^{(\mu)}(p)) \right) \\ &\leq 3r2^{-\nu}, \quad \forall p \in \bar{B}_{p_0}((R + r)/2), \quad \forall \nu < \mu. \end{aligned}$$

Ne segue che, per ogni  $p \in \bar{B}_{p_0}((R + r)/2)$ , la  $\{f_\nu^{(\nu)}(p)\}$  è una successione di Cauchy a valori nel compatto  $\bar{B}_{q_0}(R)$ . Le restrizioni a  $\bar{B}_{p_0}((R + r)/2)$  delle  $f_\nu^{(\nu)}$  convergono quindi uniformemente ad una funzione  $f : \bar{B}_{p_0}((R + r)/2) \rightarrow \bar{B}_{q_0}(R)$ . La  $f$  è un'isometria ed inoltre, poiché  $f(p_0) = q_0$ , essa trasforma  $\bar{B}_\rho(p_0)$  in  $\bar{B}_{q_0}(\rho)$  per ogni  $\rho \leq (R + r)/2$ .  $\square$

Considereremo nel seguito di questo paragrafo isometrie di uno spazio metrico  $M$  in sé. Indicheremo per semplicità con  $\text{dist}$ , invece che  $\text{dist}_M$ , la distanza su  $M$ .

Vale il seguente

LEMMA XIX.1.6. *Supponiamo che  $(M, \text{dist})$  sia uno spazio metrico localmente compatto e connesso e sia  $\{f_\nu\}$  una successione di isometrie globali di  $M$  in sé. Sia  $p_0 \in M$  e supponiamo che la successione  $\{f_\nu(p_0)\}$  converga ad un punto  $q_0$  di  $M$ . Allora, se  $r > 0$  e  $\bar{B}_{p_0}(r)$  è compatta, possiamo estrarre da  $\{f_\nu\}$  una sottosuccessione  $\{f_{k_\nu}\}$  che converge, uniformemente su  $\bar{B}_{p_0}(r)$ , ad un'isometria  $f$  di  $\bar{B}_{p_0}(r)$  su  $\bar{B}_{q_0}(r)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo  $R > r$  in modo che  $\bar{B}_{p_0}(R)$  sia ancora compatta in  $M$ . Se  $\nu_0$  è tale che  $\text{dist}(f(p_0), q_0) < (R - r)/2$ , allora, poiché abbiamo supposto che le  $f_\nu$  fossero invertibili, abbiamo

$$f_{\nu_0}(\bar{B}_{p_0}(R)) = \bar{B}_{f_{\nu_0}(p_0)}(R) \supset \bar{B}_{q_0}((R + r)/2).$$

Quindi anche  $\bar{B}_{q_0}(r)$  è compatta e possiamo applicare il LemmaXIX.1.5 sia alla successione  $\{f_v\}$  che alla successione delle inverse  $\{f_v^{-1}\}$ . Otteniamo così una sottosuccessione  $\{f_{k_v}\}$  che converge uniformemente su  $\bar{B}_{p_0}(r)$  ad una isometria  $f$  a valori in  $\bar{B}_{q_0}(r)$ , e tale che la successione delle inverse  $\{f_{k_v}^{-1}\}$  converga uniformemente su  $\bar{B}_{q_0}(r)$  all'inversa della  $f$ .  $\square$

LEMMA XIX.1.7. *Sia  $(M, \text{dist})$  uno spazio metrico localmente compatto e connesso. Dati due punti  $q_0, q$  di  $M$  è possibile trovare una successione finita  $q_0, q_1, \dots, q_k$  e numeri reali positivi  $r_0, r_1, \dots, r_k$  tali che*

- (1)  $q_k = q$ ;
- (2) per ogni  $i = 0, 1, \dots, k$  la palla chiusa  $\bar{B}_{q_i}(r_i)$  è compatta in  $M$ ;
- (3)  $\text{dist}(q_i, q_{i-1}) \leq r_{i-1}$  per  $1 \leq i \leq k$ .

DIMOSTRAZIONE. Fissato il punto  $q_0$ , indichiamo con  $N$  il sottoinsieme di  $M$  formato dai punti  $q$  per cui è possibile trovare una successione finita  $q_0, \dots, q_k$  che soddisfi le condizioni (1), (2), (3). Se  $q \in N$  e  $q = q_k$  per una sequenza  $q_0, \dots, q_k$  di punti di  $M$  ed  $r_0, \dots, r_k$  di numeri reali positivi che soddisfano le (1), (2), (3), allora tutti i punti della palla  $B_q(r_k)$  appartengono ancora ad  $N$ . Quindi  $N$  è aperto in  $M$ .

Supponiamo ora che  $q$  appartenga alla chiusura  $\bar{N}$  di  $N$  e sia  $\bar{B}_q(R)$ , con  $R > 0$ , una palla compatta di  $M$  con centro in  $q$ . Allora possiamo trovare una successione  $q_0, \dots, q_k$  di punti di  $M$  ed  $r_0, \dots, r_k$  di numeri reali positivi che soddisfano (1), (2), (3), e con  $\text{dist}(q_k, q) < R/2$ . Possiamo allora considerare le nuove successioni  $q_0, \dots, q_k, q_{k+1}$  di punti di  $M$  ed  $r'_0, \dots, r'_{k+1}$  di numeri reali positivi, con  $r'_i = r_i$  per  $i < k$ ,  $r'_k = \max(r_k, R/2)$  ed  $r'_{k+1} = R$ . Esse soddisfano le (1), (2), (3) e quindi  $q \in N$ . Ciò dimostra che  $N$  è anche chiuso.

Poiché  $q_0 \in N \neq \emptyset$ , il sottoinsieme  $N$  di  $M$  è aperto e chiuso e non vuoto nel connesso  $M$  e dunque uguale ad  $M$ .  $\square$

PROPOSIZIONE XIX.1.8. *Supponiamo che  $(M, \text{dist})$  sia connesso e localmente compatto. Sia  $p_0 \in M$ . Da ogni successione  $\{f_v\}$  di isometrie globali di  $M$  per cui  $\{f_v(p_0)\}$  sia convergente si può estrarre una sottosuccessione  $\{f_{k_v}\}$  che converga, uniformemente sui compatti di  $M$ , ad un'isometria globale di  $M$ .*

DIMOSTRAZIONE. Inseriamo il punto  $p_0$  in una successione  $\{p_\mu\}_{\mu \geq 0}$  densa in  $M$ . Per ogni  $\mu$  sia  $\rho_\mu > 0$  tale che  $\bar{B}_{p_\mu}(\rho_\mu)$  sia compatto in  $M$ . Mostriamo per ricorrenza che è possibile trovare una sequenza

$$\{f_v\} \supset \{f_v^{(0)}\} \supset \dots \supset \{f_v^{(\mu)}\} \supset \dots$$

di successioni, ciascuna estratta dalla precedente, tali che  $\{f_v^{(\mu)}\}$  converga uniformemente su  $\bigcup_{0 \leq j \leq \mu} \bar{B}_{p_j}(\rho_j)$ . La possibilità di trovare la  $\{f_v^{(0)}\}$  è conseguenza del LemmaXIX.1.6. Supponiamo sia  $\mu > 0$  e di aver costruito le  $\{f_v^{(j)}\}$  per  $j < \mu$ . Siano  $q_0, \dots, q_k$  con  $q_0 = p_0$  e  $q_k = p_k$  una sequenza finita di punti di  $M$  ed  $r_0, \dots, r_k$  di numeri reali positivi che soddisfino le condizioni (1), (2), (3) del LemmaXIX.1.7. Possiamo prendere  $r_k = \rho_\mu$ . Per il LemmaXIX.1.6 è possibile estrarre da  $\{f_v^{(\mu-1)}\}$  una sottosuccessione  $\{\phi_v^{(0)}\}$  che converga uniformemente in tutti i punti di  $\bar{B}_{q_0}(r_0)$ . In particolare,  $\{\phi_v^{(0)}(q_1)\}$  è convergente e quindi, per il LemmaXIX.1.6

se ne può estrarre una  $\{\phi_v^{(1)}\}$  che converga uniformemente su  $\bar{B}_{q_1}(r_1)$ . Per ricorrenza, otterremo dopo  $k$  passi una successione estratta  $\{\phi_v^{(k)}\}$  di isometrie che converge uniformemente su  $\bar{B}_{q_0}(r_0) \cup \dots \cup \bar{B}_{q_k}(r_k)$ . In particolare, la  $\{f_v^{(\mu)}\} = \{\phi_v^{(k)}\}$  converge uniformemente su  $\bigcup_{0 \leq j \leq \mu} \bar{B}_{p_j}(\rho_j)$ .

La successione estratta  $\{f_v^{(\nu)}\}$  converge allora uniformemente su tutti i compatti di  $M$  ad un'isometria  $f : M \rightarrow M$ . Per dimostrare che  $f$  è globale, osserviamo che, posto  $\phi_v = [f_v^{(\nu)}]^{-1}$  e  $q_0 = f(p_0)$ , la  $\{\phi_v(q_0)\}$  converge a  $p_0$ . Possiamo allora inserire  $q_0$  in una successione densa  $\{q_\mu\}_{\mu \geq 0}$  di punti di  $M$  e ripetere il ragionamento svolto in precedenza. Dalla  $\{\phi_v\}$  possiamo allora estrarre una sottosuccessione  $\{\phi_{k_v}\}$  che converge uniformemente su tutti i compatti di  $M$  ad una  $\phi$ , che si verifica facilmente essere l'inversa della  $f$  trovata in precedenza.  $\square$

Dalla Proposizione XIX.1.8 si ricavano gli enunciati seguenti.

**TEOREMA XIX.1.9.** *Il gruppo  $\mathbf{I}(M)$  delle isometrie di uno spazio metrico connesso e localmente compatto è localmente compatto rispetto alla topologia compatta-aperta.*  $\square$

**PROPOSIZIONE XIX.1.10.** *Il gruppo delle isometrie globali di uno spazio metrico localmente compatto  $(M, \text{dist})$  che lasciano fisso un punto  $p_0$  di  $M$  è un gruppo compatto.*

*Le isometrie di uno spazio metrico compatto  $(M, \text{dist})$  formano un gruppo compatto.*  $\square$

## XIX.2. Un teorema di Bochner-Montgomery

In questo paragrafo dimostriamo il teorema di Bochner-Montgomery<sup>1</sup> che ci dice che ogni gruppo localmente compatto di trasformazioni differenziabili è un gruppo di Lie.

Siano  $M$  una varietà differenziabile e  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico di diffeomorfismi di  $M$ . Si suppone che l'inclusione di  $\mathbf{G}$  in  $\mathcal{C}^\infty(M, M)$  sia continua.

**TEOREMA XIX.2.1.** *Supponiamo che  $\mathbf{G}$  sia compatto e che vi sia un punto fisso  $p_0$  per tutte le  $a \in \mathbf{G}$ . Allora l'applicazione*

$$(19.2.1) \quad \mathbf{G} \ni a \longrightarrow da \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(T_{p_0}M)$$

*è un isomorfismo di gruppi. Possiamo inoltre trovare una carta locale  $(U, x)$  con centro in  $p_0$  tale che, nelle coordinate  $x$ , gli elementi di  $a$  si scrivano come trasformazioni lineari.*

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo una carta locale  $(V, y)$  con centro in  $p_0$  tale che  $y(V) = B_0(R) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid |y| < R\}$ . Fissiamo  $0 < r < R$  in modo che  $|y(a(p))| < R$  se  $p \in V$  e  $|y(p)| < r$ . Indichiamo con  $\phi_a \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r), B_0(R))$  l'applicazione  $y \circ a \circ y^{-1}$  su  $B_0(r)$  e con  $L : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$  l'applicazione che fa corrispondere ad  $a \in \mathbf{G}$  lo Jacobiano  $L_a$  in 0 di  $\phi_a$ . La  $L$  è un omomorfismo di gruppi e

$$\phi_a(y) = L_a y + o(|y|), \quad \forall a \in \mathbf{G}, \forall y \in B_0(r).$$

<sup>1</sup>Salomon Bochner e Deane Montgomery, *Locally Compact Groups of Differentiable Transformations*, Annals of Mathematics, **47**, (1946), pp. 639-653



Sia  $\lambda$  la misura di Haar biinvariante su  $\mathbf{G}$  di volume 1 e definiamo la trasformazione

$$R(y) = \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\lambda(a).$$

Per il teorema di derivazione sotto il segno d'integrale, l'applicazione  $R$  è differenziabile su  $W$  e

$$\frac{\partial R(y)}{\partial y} v = \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \frac{\partial \phi_a(y)}{\partial y} v d\lambda(a), \quad \forall y \in B_0(r), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

In particolare,  $\partial R(0)/\partial y = I_m$  e quindi, per il teorema delle funzioni implicite, la  $R$  definisce un diffeomorfismo di un intorno  $U$  di 0 in  $B_0(r) \subset \mathbb{R}^m$  su un intorno  $U'$  di 0 in  $\mathbb{R}^m$ .

Abbiamo poi, se  $b \in \mathbf{G}$  ed  $y, \phi_b(y) \in B_0(r)$ :

$$\begin{aligned} L_b \circ R(y) &= L_b \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\lambda(a) = \int_{\mathbf{G}} L_b L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\lambda(a) \\ &= \int_{\mathbf{G}} L_{ba^{-1}} \circ \phi_{ab^{-1}}(\phi_b(y)) d\lambda(ab^{-1}) = R \circ \phi_b(y). \end{aligned}$$

Quindi, in un intorno sufficientemente piccolo di 0 in  $B_0(r)$ , abbiamo

$$R \circ \phi_b \circ R^{-1} = L_b.$$

La dimostrazione è completa. □

**COROLLARIO XIX.2.2.** *Supponiamo che  $\mathbf{G}$  sia compatto ed  $M$  connessa. Allora l'unica trasformazione di  $\mathbf{G}$  che lasci fissi i punti di un aperto non vuoto di  $M$  è l'identità.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $a$  una trasformazione di  $\mathbf{G}$  che lasci fissi i punti di un aperto non vuoto  $U$  di  $M$ . Il sottogruppo  $\mathbf{H}$  degli elementi di  $\mathbf{G}$  che lasciano fissi i punti di  $U$  è un sottogruppo chiuso e quindi compatto di  $\mathbf{G}$ . Sia  $N$  la parte interna dell'insieme dei punti fissi comuni a tutte le applicazioni di  $\mathbf{H}$ . Per ipotesi,  $N \neq \emptyset$ . Se  $p_0$  appartiene alla chiusura di  $N$ , esso è un punto fisso di tutte le trasformazioni di  $\mathbf{H}$ . Per il Teorema XIX.2.1, possiamo trovare una carta locale con centro in  $p_0$  in cui tutti gli elementi di  $\mathbf{H}$  si scrivano come trasformazioni lineari. Ma una trasformazione lineare che sia l'identità su un aperto non vuoto è l'identità, e quindi gli elementi di  $\mathbf{H}$  lasciano fissi anche tutti i punti di un intorno di  $p_0$  e quindi  $p_0 \in N$ . Essendo aperto e chiuso in  $M$  e non vuoto, l'insieme  $N$  dei punti fissi delle trasformazioni in  $\mathbf{H}$  coincide con  $M$ . Quindi  $a \in \mathbf{H} = \{\text{id}_M\}$  e dunque  $a$  è l'identità su  $M$ . □

Dimostriamo poi che un gruppo localmente compatto di trasformazioni differenziabili non contiene *sottogruppi piccoli*. Il significato di questa affermazione è spiegato nel teorema seguente.

**TEOREMA XIX.2.3.** *Supponiamo che  $\mathbf{G}$  sia un gruppo localmente compatto di diffeomorfismi di una varietà connessa  $M$ . Esiste allora un intorno  $N_e$  dell'identità di  $\mathbf{G}$  che non contiene sottogruppi non banali.*

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo una carta locale  $(U, x)$  con  $x(U) = B_0(R)$ . Se  $0 < r < R$ , indichiamo con  $U_r$  l'aperto  $\{p \in U \mid |x(p)| < r\}$ . Se  $a \in \mathcal{C}^\infty(U_r, U)$  indicheremo con  $\phi_a \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r), B_0(R))$  l'applicazione  $x \circ a \circ x^{-1}$  su  $B_0(r)$ .

Sia  $N_e$  un intorno compatto dell'identità in  $\mathbf{G}$  tale che

$$a(\bar{U}_r) \Subset U_{(r+R)/2}, \quad e \quad \left\| \frac{\partial \phi_a(x)}{\partial x} - I_m \right\| < \frac{1}{2}, \quad \forall |x| \leq \frac{r+R}{2}, \quad \forall a \in N_e.$$

$$a(\bar{U}_{(r+R)/2}) \Subset U,$$

Sia  $\mathbf{G}_0$  un sottogruppo contenuto in  $N_e$ . La sua chiusura è un sottogruppo compatto  $\mathbf{H} = \bar{\mathbf{G}}_0$  contenuto in  $\bar{N}_e$ . Sia  $\lambda$  la misura di Haar biinvariante su  $\mathbf{H}$  e definiamo, per  $x \in B_0((r+R)/2)$ , la funzione  $\mathcal{C}^\infty$  a valori in  $B_0(R)$ ,

$$R(x) = \int_{\mathbf{H}} \phi_a(x) d\lambda(a).$$

Differenziando sotto il segno d'integrale otteniamo

$$\left| \frac{\partial R(x)}{\partial x} v \right| = \left| \int_{\mathbf{H}} \frac{\partial \phi_a(x)}{\partial x} v d\lambda(a) \right| \geq \frac{1}{2} |v|, \quad \forall x \in B_0((r+R)/2), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

In particolare,  $R$  è invertibile nell'intorno di ogni punto  $x$  di  $B_0(r)$ .

Per ogni  $b \in \mathbf{H}$ , per l'invarianza della misura di Haar abbiamo

$$R \circ \phi_b = \int_{\mathbf{H}} \phi_a \circ \phi_b d\lambda(a) = \int_{\mathbf{H}} \phi_{ab} d\lambda(a) = \int_{\mathbf{H}} \phi_{ab} d\lambda(ab) = R$$

su  $B_0(r)$ . Ne segue, in particolare, che  $\phi_b$  è l'identità su un intorno di 0 in  $B_0(r)$ . La tesi è allora conseguenza del CorollarioXIX.2.2.  $\square$

**COROLLARIO XIX.2.4.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico di trasformazioni differenziabili di una varietà  $M$ . Allora esiste un intorno dell'identità  $N_e$  in  $\mathbf{G}$  tale che, per ogni  $a \in \mathbf{G}$ , con  $a \neq e$ , esista un intero positivo  $k$  tale che  $a^k \notin N_e$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** È sufficiente considerare l'intorno  $N_e = \{a \in N'_e \mid a^{-1} \in N'_e\}$  per un intorno  $N'_e$  dell'identità che non contenga sottogruppi non banali.  $\square$

Fissiamo un intorno compatto  $N_e$  dell'identità in  $\mathbf{G}$  che soddisfi la condizione del CorollarioXIX.2.4. Se

$$(19.2.2) \quad k_a + 1 = \inf\{h \in \mathbb{N} \mid a^h \notin N_e\}, \quad \text{per } a \in \mathbf{G},$$

abbiamo  $k_a \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , con  $k_e = \infty$ ,  $k_a = 0$  se  $a \notin N_e$  e  $1 \leq k_a < \infty$  se  $a \in N_e \setminus \{e\}$ .

Fissiamo una carta coordinata  $(U, x)$  in  $M$ , con centro in un punto  $p_0 \in M$ ,  $U \Subset M$ , ed  $x(U) = B_0(R)$  e poniamo, per  $0 < r < R$ ,  $U_r = \{p \in U \mid |x(p)| < r\}$ . Se  $a(U_r) \subset U$ , indicheremo con  $\phi_a \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r), B_0(R))$  la funzione  $\phi_a = x \circ a \circ x^{-1}$ .

Fissiamo  $0 < r_1 < r_2 < r_3 < R$  ed  $\epsilon > 0$ . Possiamo supporre che, se  $a \in N_e$ , sia

$$a(\bar{U}_{r_1}) \Subset U_{r_2} \Subset a(U_{r_3}) \Subset U, \quad \sup_{x \in \bar{U}_{r_3}} \left\| \frac{\partial \phi_a(x)}{\partial x} - I_m \right\| < \epsilon.$$

Con le notazioni introdotte sopra, vale il

**LEMMA XIX.2.5.** *Possiamo trovare una costante positiva  $C$  tale che, se  $a \in N_e$ , sia*

$$|x - \phi_a(x)| \leq C/k_a, \quad \forall x \in B_0(r_1).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $a \in N_e$ . Se  $x_1, x_2 \in B_0(r_2)$ , allora

$$\begin{aligned} \phi_a(x_2) - \phi_a(x_1) &= \int_0^1 \left[ \frac{d}{dt} \phi_a(x_1 + t(x_2 - x_1)) \right] dt \\ &= \left[ \int_0^1 \frac{\partial \phi_a}{\partial x}(x_1 + t(x_2 - x_1)) dt \right] (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1) + v \end{aligned}$$

ove  $v$  è un vettore con  $|v| \leq \epsilon |x_2 - x_1|$ .

Osserviamo ora che, se  $a \in N_e$ , poiché  $a, \dots, a^{k_a} \in N_e$ , abbiamo  $\phi_{a^h}(x) \in B_0(r_2)$  se  $x \in B_0(r_1)$  e  $0 \leq h \leq k_a$ . Quindi

$$\phi_{a^{k_a}}(x) - x = \sum_{h=0}^{k_a-1} (\phi_{a^h}(\phi_a(x)) - \phi_{a^h}(x)) = k_a(\phi_a(x) - x) + (v_1 + \dots + v_{k_a}),$$

con  $|v_i| \leq \epsilon |\phi(x) - x|$  per ogni  $i = 1, \dots, k_a$ . Otteniamo perciò

$$r_2 \geq |\phi_{a^{k_a}}(x) - x| \geq k_a(1 - \epsilon) |\phi(x) - x|, \quad \forall x \in B_0(r_1),$$

da cui segue la tesi. □

COROLLARIO XIX.2.6. *Con le notazioni del Lemma precedente, abbiamo*

$$|x - \phi_{a^h}(x)| \leq Ch/k_a, \quad \text{se } h \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq h \leq k_a.$$

TEOREMA XIX.2.7. *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo localmente compatto di diffeomorfismi di una varietà  $M$ . Se l'identità  $e$  di  $\mathbf{G}$  non è un punto isolato di  $\mathbf{G}$ , allora <sup>2</sup> di  $\mathbf{G}$ , allora  $\mathbf{G}$  contiene sottogruppi a un parametro.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un intorno compatto  $N_e$  dell'identità in  $\mathbf{G}$  che non contenga sottogruppi non banali e sia  $k_a$  definito dalla (19.2.2). Ricordiamo che  $1 < k_a < \infty$  se  $a \in N_e \setminus \{e\}$ . Per ogni numero razionale  $q$  con  $0 \leq q \leq 1$  ed  $a \in N_e \setminus \{0\}$  sia  $k_a(q)$  l'intero, con  $0 \leq k_a(q) \leq k_a$ , definito da

$$k_a(q) = \sup\{v \in \mathbb{N} \mid v \leq qk_a\}, \quad \text{tale cioè che } 0 \leq q - \frac{k_a(q)}{k_a} < \frac{1}{k_a}.$$

Sia ora  $\{a_n\}$  una successione di elementi di  $N_e$ , tutti distinti da  $e$ , che converga ad  $e$ . Per ogni  $q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ , la successione  $\{a_n^{k_{a_n}(q)}\}$  è a valori in nel compatto  $N_e$  e quindi se ne può estrarre una convergente. Poiché  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  è numerabile, possiamo estrarre una sottosuccessione, che indicheremo ancora con  $\{a_n\}$ , tale che le  $\{a_n^{k_{a_n}(q)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  siano convergenti per ogni  $q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ . Indichiamo con  $a(q)$  i limiti di tali successioni.

Mostriamo ora che la funzione  $a(q)$ , così definita per  $q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ , si può estendere ad un sottogruppo a un parametro di  $\mathbf{G}$ .

Per ogni punto  $p_0 \in M$  possiamo trovare una carta coordinata  $(U, x)$  con centro in  $p_0$  con  $x(U) = B_0(R)$  e per cui valga il Lemma XIX.2.5. Poiché  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_{a_n} = \infty$ , otteniamo che le  $\phi_{a_n}$  convergono uniformemente su  $B_0(r_1)$  a delle  $\phi_{a(q)}$  che soddisfano, per il Corollario XIX.2.6, la disuguaglianza  $|\phi_{a(q_1)}(x) - \phi_{a(q_2)}(x)| < C|q_1 - q_2|$ , per ogni  $q_1, q_2 \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  ed  $x$  in  $B_0(r_1)$ , per una costante  $C > 0$ . Possiamo dunque estendere in modo unico le  $\phi_{a(q)}$  a delle applicazioni  $\phi_{a(t)} \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r_1), B_0(r_2))$  per  $t \in [0, 1]$ . Questo ci permette di definire le  $a(t)$  per  $t \in [0, 1]$  e di verificare

<sup>2</sup>Ciò significa che ogni intorno di  $e$  in  $\mathbf{G}$  elementi distinti da  $e$ .

che  $a(t_1 + t_2) = a(t_1)a(t_2)$  se  $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in [0, 1]$ . Poiché anche la successione  $\{a_n^{-1}\}$  approssima l'identità, lo stesso ragionamento ci permette di definire  $a(t)$ , per  $-1 \leq t \leq 0$ , in modo che sia  $a(t_1 + t_2) = a(t_1)a(t_2)$  se  $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in [-1, 1]$ . Possiamo poi estendere  $a(t)$  a tutti i  $t \in \mathbb{R}$  in modo che sia  $a(kt) = [a(t)]^k$  se  $k \in \mathbb{N}$ . Poiché abbiamo supposto che  $\mathbf{G}$  sia un sottogruppo chiuso del gruppo dei diffeomorfismi di  $M$  per la topologia compatta-aperta delle applicazioni e delle loro inverse,  $a(t)$  è un sottogruppo a un parametro di  $\mathbf{G}$ .  $\square$

Dalla dimostrazione del Teorema XIX.2.7 ricaviamo una caratterizzazione dei generatori infinitesimali di sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{G}$ .

**PROPOSIZIONE XIX.2.8.** *I generatori infinitesimali  $X$  di sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{G}$  sono tutti e soli gli elementi  $X \in \mathfrak{X}(M)$  per cui esistono una successione  $\{a_n\} \subset \mathbf{G}$  ed una successione  $k_n$ , con  $k_n \rightarrow \infty$ , tale che*

$$(19.2.3) \quad Xf = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n (a_n^* f - f), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

**PROPOSIZIONE XIX.2.9.** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo localmente compatto di diffeomorfismi di  $M$ . Allora i generatori infinitesimali di sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{G}$  formano una sottoalgebra di Lie reale di dimensione finita di  $\mathfrak{X}(M)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathfrak{G}$  l'insieme dei generatori infinitesimali di sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{G}$ . Abbiamo  $0 \in \mathfrak{G}$ , come generatore infinitesimale del gruppo banale  $\{\text{id}_M\}$ .

Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  è il generatore infinitesimale del sottogruppo a un parametro  $a(t)$ , e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , allora  $\lambda X$  è il generatore infinitesimale del sottogruppo a un parametro  $t \rightarrow a(\lambda t)$ . Quindi  $\mathfrak{G}$  è chiuso rispetto al prodotto per scalare.

Siano  $a(t), b(t)$  due sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{G}$ , con generatori infinitesimali  $X, Y$ . Se  $c_n = a(\frac{1}{n}) \circ b(\frac{1}{n})$ , otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(f \circ c_n - f) = Xf + Yf, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

In modo analogo, con  $d_n = a(\frac{1}{n})b(\frac{1}{n})a(\frac{-1}{n})b(\frac{-1}{n})$ , è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(f \circ d_n - f) = [X, Y]f, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Per la Proposizione XIX.2.8 questo dimostra che  $\mathfrak{G}$  è un'algebra di Lie.  $\square$

**PROPOSIZIONE XIX.2.10.** *Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo localmente compatto di diffeomorfismi di  $M$ , allora l'algebra di Lie  $\mathfrak{G}$  dei generatori infinitesimali dei suoi sottogruppi a un parametro ha dimensione finita.*

**DIMOSTRAZIONE.** Si dimostra infatti che su  $\mathbf{G}$  si può definire una norma rispetto alla quale la palla unitaria è relativamente compatta.  $\square$

### XIX.3. Alcuni risultati sui gruppi di trasformazioni

Vale il:

**TEOREMA XIX.3.1.** *Siano  $M$  una varietà differenziabile numerabile all'infinito e  $\mathbf{G}$  un gruppo di diffeomorfismi di  $M$  in sé. Denotiamo con  $\mathfrak{G}$  l'insieme dei campi di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  che generano sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{G}$ .*

Se la sottoalgebra di Lie reale di  $\mathfrak{X}(M)$  generata da  $\mathfrak{G}$  ha dimensione finita, allora  $\mathfrak{G}$  è un'algebra di Lie e possiamo definire su  $\mathbf{G}$  una struttura di gruppo di Lie di trasformazioni di  $M$ , con algebra di Lie (isomorfa a)  $\mathfrak{G}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $X \in \mathfrak{G}$ , indichiamo con  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \text{Exp}(tX) \in \mathbf{G}$  il gruppo a un parametro di diffeomorfismi generato da  $X$ . Siano  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  la sottoalgebra di Lie reale di  $\mathfrak{X}(M)$  generata da  $\mathfrak{G}$ ,  $\tilde{\mathbf{G}}$  un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ , ed  $\exp : \mathfrak{G} \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}$  la corrispondente applicazione esponenziale. Ogni  $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  è generatore infinitesimale di un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di  $M$ , che denoteremo ancora con  $\text{Exp}(tX)$ :

$$V_X \ni (t, p) \rightarrow \text{Exp}(tX)p \in M, \quad \{0\} \times M \subset V_X^{\text{aperto}} \subset \mathbb{R} \times M,$$

$$\text{Exp}(0X)p = p, \quad \frac{d}{dt} \text{Exp}(tX)p = X_{\text{Exp}(tX)p}, \quad \forall p \in M, \quad \forall (t, p) \in V_X.$$

I campi  $X$  di  $\mathfrak{G}$  sono completi e quindi porremo  $V_X = (\mathbb{R} \times M)$ , se  $X \in \mathfrak{G}$ .

Poiché abbiamo supposto che  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  sia di dimensione finita, per i teoremi di esistenza e unicità e dipendenza  $\mathcal{C}^\infty$  dai dati iniziali per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie, possiamo trovare un intorno aperto  $\mathcal{U}$  di  $(\{e\} \times M)$  in  $(\tilde{\mathbf{G}} \times M)$  tale che, se  $(g, p) \in \mathcal{U}$ , allora vi sono  $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  e  $t \in \mathbb{R}$  tali che  $(t, p) \in V_X$  e  $g = \exp(tX)$ .

Per completare la dimostrazione, proviamo ora alcuni lemmi. □

**LEMMA XIX.3.2.** Siano  $X, Y \in \mathfrak{G}$ . Allora  $Z = \text{Ad}(\exp(X))(Y) \in \mathfrak{G}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dobbiamo verificare che  $Z$  genera un sottogruppo a un parametro di  $\mathbf{G}$ . Poiché

$$M \ni p \rightarrow \text{Exp}(tZ)p = \text{Exp}(X) \circ \text{Exp}(tY) \circ \text{Exp}(-X)p \in M$$

definisce per ogni  $t \in \mathbb{R}$  una trasformazione di  $\mathbf{G}$ , il campo  $Z$  è completo ed appartiene a  $\mathfrak{G}$ . □

**LEMMA XIX.3.3.**  $\mathfrak{G}$  genera  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  come spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $W$  il sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  generato da  $\mathfrak{G}$ . Per il lemma precedente, abbiamo  $\text{Ad}(\exp(\mathfrak{G}))(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G}$  e quindi, per linearità, abbiamo anche  $\text{Ad}(\exp(\mathfrak{G}))(W) \subset W$ . Poiché  $\mathfrak{G}$  genera  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  come algebra di Lie,  $\exp(\mathfrak{G})$  genera  $\tilde{\mathbf{G}}$  come gruppo. L'insieme degli elementi  $g \in \tilde{\mathbf{G}}$  per cui  $\text{Ad}(g)(W) \subset W$  è un sottogruppo di  $\tilde{\mathbf{G}}$ . Ne segue che  $\text{Ad}(\tilde{\mathbf{G}})(W) \subset W$ . Otteniamo in particolare che  $\text{Ad}(\exp(W))(W) \subset W$ , che ci dà, differenziando,  $[W, W] \subset W$ . Quindi  $W$  è un'algebra di Lie e perciò coincide con  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ . □

**LEMMA XIX.3.4.**  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{G}$  una base di  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  come spazio vettoriale. Allora l'applicazione

$$t_1 X_1 + \dots + t_n X_n \rightarrow \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_n X_n)$$

è un diffeomorfismo di un intorno  $N_0$  di 0 in  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  su un intorno  $U_e$  dell'identità  $e$  di  $\tilde{\mathbf{G}}$ . Quindi, se  $Y \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ , possiamo trovare un  $\epsilon > 0$  e funzioni  $a_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$

tali che  $\sum_{i=1}^n a_i(t)X_i \in N_0$  ed

$$\exp(tY) = \exp(a_1(t)X_1) \cdots \exp(a_n(t)X_n) \quad \text{in } \tilde{\mathbf{G}} \text{ se } |t| < \epsilon.$$

Questa uguaglianza ci dà la

$$\text{Exp}(tY) = \text{Exp}(a_1(t)X_1) \circ \cdots \circ \text{Exp}(a_n(t)X_n) \quad \text{su } M \text{ se } |t| < \epsilon.$$

Definendo  $\text{Exp}(tY) = (\text{Exp}[(t/\nu)Y])^\nu$  se  $|t| < \nu\epsilon$ , otteniamo che  $Y \in \mathfrak{G}$ . Questo completa la dimostrazione del lemma.  $\square$

Proseguiamo nella dimostrazione del TeoremaXXV.2.1.

Sia  $\mathbf{G}^*$  il gruppo di diffeomorfismi di  $M$  generato da  $\exp(\mathfrak{G})$ . Poiché  $\mathbf{G}^*$  è generato dai sottogruppi a un parametro contenuti in  $\mathbf{G}$ , abbiamo  $\mathbf{G}^* \subset \mathbf{G}$ . Poiché per ogni  $g \in \mathbf{G}$  ed ogni sottogruppo a un parametro  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow a_t \in \mathbf{G}$  anche  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \text{ad}(g)(a_t) \in \mathbf{G}$  è ancora un sottogruppo a un parametro di  $\mathbf{G}$ , il sottogruppo  $\mathbf{G}^*$  è normale in  $\mathbf{G}$ . Inoltre, l'applicazione  $\text{ad}(g) : \mathbf{G}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$  è continua<sup>3</sup> per la topologia di gruppo di Lie di  $\mathbf{G}^*$ , perché trasforma sottogruppi a un parametro in sottogruppi a un parametro.

Il TeoremaXXV.2.1 è conseguenza del lemma seguente.

**LEMMA XIX.3.5.** *Sia  $\mathbf{G}^*$  un sottogruppo normale di un gruppo  $\mathbf{G}$ . Se  $\mathbf{G}^*$  è un gruppo topologico e le applicazioni  $\text{ad}(g) : \mathbf{G}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$  sono continue per ogni  $g \in \mathbf{G}$ , allora vi è un'unica topologia di gruppo topologico su  $\mathbf{G}$  per cui  $\mathbf{G}^*$  sia aperto in  $\mathbf{G}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Definiamo su  $\mathbf{G}$  la topologia meno fine per cui sono aperti tutti gli insiemi  $L_g(A)$  con  $A$  aperto di  $\mathbf{G}^*$ . Si verifica facilmente che questa topologia è l'unica con le proprietà richieste nell'enunciato del lemma.  $\square$

**OSSERVAZIONE XIX.3.6.** Osserviamo che la topologia su  $\mathbf{G}$  che si ottiene nel TeoremaXXV.2.1 può risultare più fine della topologia compatta-aperta. Inoltre, non è detto che le componenti connesse di  $\mathbf{G}$ , con la topologia che abbiamo definito, formino un insieme di cardinalità al più numerabile. Possiamo ad esempio considerare l'azione sul gruppo additivo  $\mathbb{R}$ , che identifichiamo alla varietà  $M$ , di un qualsiasi suo sottogruppo  $\mathbf{G}$  totalmente sconnesso: in questo caso  $\mathfrak{G} = \{0\}$  ed otteniamo su  $\mathbf{G}$  la topologia discreta.

**TEOREMA XIX.3.7.** *Siano  $M$  una varietà differenziabile connessa e numerabile all'infinito e  $\mathbf{G}$  un gruppo localmente compatto di trasformazioni differenziabili di  $M$ . Allora i generatori infinitesimali dei sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{G}$  è una sottoalgebra di Lie di dimensione finita di  $\mathfrak{X}(M)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.**  $\square$

<sup>3</sup> Un teorema di Chevalley ([Theory of Lie groups. Princeton Univ. Press, 1946], p.128) ci dice che, se  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{G}'$  sono due gruppi di Lie, un omomorfismo algebrico  $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}'$  è un omomorfismo di gruppi di Lie se e soltanto se trasforma sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{G}$  in sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{G}'$ .

### XIX.4. Parallelismo assoluto

Ricordiamo che un *parallelismo assoluto* su una varietà differenziabile  $M$  è una sezione  $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M, L(M))$  del fibrato dei suoi sistemi di riferimento. In modo equivalente, è il dato di  $m$  campi di vettori  $X_1, \dots, X_m$  che definiscano, in ogni punto  $p \in M$ , una base  $(X_1(p), \dots, X_m(p))$  di  $T_p M$ . Un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  definisce un diffeomorfismo di fibrati principali  $\hat{f} : L(M) \rightarrow L(M)$ .

**DEFINIZIONE XIX.4.1.** Se  $(M, \sigma)$  è la coppia formata da una varietà differenziabile  $M$  e da un parallelismo assoluto  $\sigma$  assegnato su  $M$ , chiameremo *automorfismi* di  $(M, \sigma)$  i diffeomorfismi  $f : M \rightarrow M$  tali che  $\hat{f} \circ \sigma = \sigma \circ f$ , cioè  $df \circ \sigma(p) = \sigma(f(p))$  per ogni  $p \in M$ .

Gli automorfismi di  $(M, \sigma)$  formano un gruppo, che denoteremo  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ .

**TEOREMA XIX.4.2.** Sia  $(M, \sigma)$  la coppia formata da una varietà differenziabile connessa  $M$  numerabile all'infinito e da un parallelismo assoluto  $\sigma$  su  $M$ . Allora  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$  è un gruppo di Lie di trasformazioni con  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{Aut}(M, \sigma) \leq \dim_{\mathbb{R}} M$ . Più precisamente, per ogni  $p \in M$ , l'applicazione

$$(*) \quad \mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni g \rightarrow g(p) \in M$$

è iniettiva e la sua immagine è una sottovarietà chiusa di  $M$ . Vi è un'unica struttura di gruppo di Lie su  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$  per cui la  $(*)$  sia un diffeomorfismo.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\sigma(p) = (X_1(p), \dots, X_m(p))$  e sia  $\mathfrak{B}$  il sottospazio vettoriale reale di  $\mathfrak{X}(M)$  generato da  $X_1, \dots, X_m$ . Per definizione, le trasformazioni di  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$  lasciano  $\mathfrak{B}$  invariante. In particolare gli elementi di  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$  commutano con gli elementi dei sottogruppi a un parametro  $\phi_v(t)$  di diffeomorfismi di  $M$  generati dagli elementi  $v$  di  $\mathfrak{B}$ . Poniamo  $\tau_v = \phi_v(1)$ . Osserviamo che, per ogni punto  $p \in M$ ,  $\tau_v(q)$  è definita per  $v$  in un intorno di 0 in  $\mathfrak{B}$  e  $q$  in un intorno di  $p$  in  $M$ .

**LEMMA XIX.4.3.** Per ogni  $p \in M$  l'applicazione  $\mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni g \rightarrow g(p) \in M$  è iniettiva.

**DIMOSTRAZIONE.** Per ogni  $g \in \mathbf{Aut}(M, \sigma)$  l'insieme  $F_g = \{q \in M \mid g(q) = q\}$  dei punti fissi di  $g$  è un sottoinsieme chiuso di  $M$ . Fissato un punto  $q \in M$ , al variare di  $v$  in un intorno di 0 in  $\mathfrak{B}$ , gli elementi  $\tau_v(q)$  sono definiti e formano un intorno di  $q$  in  $M$ . Poiché, come abbiamo osservato,  $g \circ \tau_v = \tau_v \circ g$ , otteniamo che  $F_g$  contiene un intorno di  $q$ . Dunque  $F_g$  risulta aperto e chiuso in  $M$  e quindi o è vuoto, o coincide con  $M$  per l'ipotesi che  $M$  sia connesso.  $\square$

Sia  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  ( $T > 0$ ) una curva differenziabile. Risultano allora determinate  $m$  funzioni scalari  $a_\gamma^i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^m a_\gamma^i(t) X_i(\gamma(t))$  per ogni  $t \in [0, T]$ . Due curve differenziabili  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, T] \rightarrow M$  si diranno *parallele nel parallelismo completo*  $\sigma$  se  $a_{\gamma_1}^i(t) = a_{\gamma_2}^i(t)$  per ogni  $t \in [0, T]$ . Osserviamo che, data una curva differenziabile  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  ed un punto  $q_0$ , vi è al più una curva differenziabile  $\gamma'$  parallela a  $\gamma$  ed uscente dal punto  $q_0$ ; esisterà poi comunque, per qualche  $0 < \epsilon \leq T$  sufficientemente piccolo, una  $\gamma' : [0, \epsilon] \rightarrow M$  uscente da  $p_0$  e parallela alla restrizione di  $\gamma$  a  $[0, \epsilon]$ .

LEMMA XIX.4.4. *Per ogni  $p_0 \in M$ , l'insieme  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)(p_0)$  è chiuso in  $M$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\{a_k\}$  una successione di elementi di  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$  tali che  $\{a_k(p_0)\}$  converga a un elemento  $q_0 \in M$ .

Dimostriamo che ogni curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  uscente dal punto  $p_0$  ammette una parallela  $\gamma' : [0, 1] \rightarrow M$  uscente da  $q_0$ .

A questo scopo, indichiamo con  $T$  l'estremo superiore dei numeri reali  $a > 0$  per cui la restrizione di  $\gamma$  a  $[0, a]$  ammette una parallela  $\gamma'_a$  con punto iniziale  $q_0$ . Vogliamo dimostrare che esiste la parallela  $\gamma'_T$ . A questo scopo, osserviamo che esistono le parallele  $\gamma'_{T'}$ , per ogni  $0 < T' < T$  e che per ogni  $t$  con  $0 \leq t < T$ , abbiamo  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\gamma(t)) = \gamma'_{T'}(t)$  per  $0 \leq t \leq T' < T$ .

Fissiamo poi un intorno  $\mathfrak{B}_0$  di 0 in  $\mathfrak{B}$  e un intorno  $U$  di  $\gamma(T)$  in  $M$  tali che  $\tau_v(p)$  sia definita per  $v \in \mathfrak{B}_0$  e  $p \in U$ . Allora  $\tau_v$  è anche definita, per  $v \in \mathfrak{B}_0$ , su tutti gli insiemi  $a_k(U)$ . Sia  $t_0 < T$  tale che  $a_k(\gamma(t_0)) \in U$  per ogni  $k \gg 1$  e  $\gamma(T) = \tau_{v_0}(\gamma(t_0))$  per qualche  $v_0 \in \mathfrak{B}_0$ .

Possiamo allora definire  $\gamma'_T$  ponendo  $\gamma'_T(t) = \gamma'_{T'}(t)$  se  $0 \leq t \leq T' < T$  e  $\gamma'_T(T) = \tau_{v_0}(\gamma'_{T'}(t_0))$  se  $t_0 \leq T' < T$ .

Se fosse  $T < 1$ , potremmo prolungare  $\gamma'_T$  con una parallela a  $\gamma(t - T)$  uscente dal punto  $\gamma'_T(T)$ , contraddicendo la definizione di  $T$ . Quindi  $T = 1$  e questo dimostra l'esistenza della parallela. Poiché  $\gamma'(1) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\gamma(1))$ , l'estremo  $\gamma'(1)$  non dipende dalla scelta del cammino  $\gamma$ , ma soltanto dal suo punto finale  $\gamma(1)$ .

Dimostriamo in questo modo che  $\{a_k(q)\}$  converge per ogni  $q \in M$  e otteniamo quindi un'applicazione  $a : M \rightarrow M$  mediante  $a(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(q)$  per ogni  $q \in M$ . Poiché  $\tau_v(a(q)) = a(\tau_v(q))$  per ogni  $q \in M$ , la  $a$  è chiaramente differenziabile. Si può dimostrare che è invertibile, ripetendo i ragionamenti appena svolti per la successione delle applicazioni inverse  $\{a_k^{-1}\}$ .  $\square$

Abbiamo facilmente:

LEMMA XIX.4.5. *Sia  $\mathfrak{l}$  l'algebra di Lie dei campi di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tali che  $[X, \mathfrak{B}] = \{0\}$ . Per ogni  $p \in M$ , l'applicazione  $\mathfrak{l} \ni X \rightarrow X(p) \in T_p M$  è iniettiva.*

DIMOSTRAZIONE. I generatori di sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$  sono gli elementi di  $\mathfrak{l}$  che generano sottogruppi a un parametro di diffeomorfismi di  $M$ . Quindi, per il Teorema XXV.2.1, il gruppo  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$  è un gruppo di Lie, e l'applicazione  $\mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni a \rightarrow a(p) \in M$  definisce per ogni  $p \in M$  un diffeomorfismo di  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$  con una sottovarietà differenziabile chiusa di  $M$ .  $\square$

Completiamo ora la dimostrazione del Teorema XXV.2.8. L'insieme  $\mathfrak{G}$  dei campi di vettori  $X \in \mathfrak{l}$  che generano sottogruppi a un parametro di trasformazioni di  $M$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{l}$ , e quindi ha dimensione finita. Possiamo perciò applicare il Teorema XXV.2.1 al gruppo  $\mathbf{G} = \mathbf{Aut}(M, \sigma)$  e a  $\mathfrak{G}$ , e concludere che  $\mathbf{G}$  ha una struttura di gruppo di Lie con algebra di Lie  $\mathfrak{G}$ . Poiché l'azione  $\mathbf{G} \times M \rightarrow M$  è differenziabile, fissato un qualsiasi punto  $p_0 \in M$ , l'immersione differenziabile  $\mathbf{G} \ni g \rightarrow g(p_0) \in M$  è un diffeomorfismo di  $\mathbf{G}$  con una sottovarietà differenziabile chiusa di  $M$ .  $\square$



Ricordiamo che vale il teorema<sup>4</sup>:

**TEOREMA XIX.4.6 (Bochner-Montgomery).** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico localmente compatto e numerabile all'infinito di trasformazioni differenziabili di una varietà differenziabile paracompatta  $M$ . Allora  $\mathbf{G}$  è un gruppo di Lie.*

Ricordiamo ancora<sup>5</sup> il:

**TEOREMA XIX.4.7 (Dantzig-van der Waerden).** *Sia  $(E, d)$  uno spazio metrico localmente compatto. Sia  $\mathbf{Isom}(E, d)$  il gruppo delle isometrie di  $(M, E)$  e, per  $x \in E$ , indichiamo con  $\mathbf{Isom}_x(E, d)$  lo stabilizzatore di  $x$  in  $\mathbf{Isom}(E, d)$ . Consideriamo su  $\mathbf{Isom}(E, d)$  la topologia compatta-aperta. Allora  $\mathbf{Isom}(E, d)$  è localmente compatto e  $\mathbf{Isom}_x(E, d)$  è compatto per ogni  $x \in M$ . Se  $M$  è compatto, anche  $\mathbf{Isom}(E, d)$  è compatto.*

**OSSERVAZIONE XIX.4.8.** Ricordiamo ancora che, se  $(M, g)$  è una varietà Riemanniana e  $d$  è la distanza nella metrica corrispondente, allora le isometrie  $f : M \rightarrow M$  per la metrica  $d$  sono applicazioni differenziabili che preservano il tensore  $g$  della metrica. Indicheremo nel seguito con  $\mathbf{O}(M, g)$  il gruppo delle isometrie della varietà Riemanniana  $(M, g)$ , cioè:

$$\mathbf{O}(M, g) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, M) \mid f^*g = g\}.$$

Se  $d$  è la distanza su  $M$  definita dalla metrica  $g$ , allora  $\mathbf{Isom}(M, d) = \mathbf{O}(M, g)$ .

---

<sup>4</sup>S.Bochner, D.Montgomery *Locally compact groups of differentiable transformations*, Ann. of Math. **47** (1946), pp.639-657.

<sup>5</sup>D.Dantzig, B.L.van der Waerden *Über metrisch homogene Räume*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6** (1928) pp.374-376. Una dimostrazione completa si può trovare anche in: Kobayashi-Nomizu *Foundations of Differential Geometry*, New York: John Wiley & Sons, vol.1, 1963, alle pagine 46-50.



## Trasformazioni e decomposizione di de Rham

### XX.1. Applicazioni affini

Siano  $M, N$  due varietà differenziabili, di dimensioni  $m, n$  rispettivamente.

Un'applicazione  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  trasforma un campo di vettori  $V \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$  lungo una curva  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$  in un campo di vettori  $df(V)$  lungo la curva  $f \circ \gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, N)$ .

Supponiamo fissate su  $M$  ed  $N$  due strutture affini.

**DEFINIZIONE XX.1.1.** Diciamo che  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  è un'applicazione affine se, per ogni  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$  ed ogni campo di vettori  $V$  parallelo lungo  $\gamma$  in  $M$  il campo di vettori  $df(V)$  è parallelo lungo  $f \circ \gamma$  in  $N$ .

Siano  $\xi_M = (P_M \xrightarrow{\pi_M} M)$  e  $\xi_N = (P_N \xrightarrow{\pi_N} N)$  due fibrati d'olonomia su  $M$  ed  $N$ , con gruppi di olonomia  $\mathbf{G}_M$  e  $\mathbf{G}_N$ , rispettivamente. Ad essi possiamo associare il sottofibrato  $\xi_f$  di  $\mathbb{L}_f$ , il cui spazio totale consiste delle coppie  $(\sigma, \tau)$  in  $P_M \times P_N$ .

**PROPOSIZIONE XX.1.2.** Supponiamo che  $M$  sia connessa. Condizione necessaria e sufficiente affinché  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  sia una trasformazione affine è che la restrizione  $\mathcal{J}f : P_f \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  del suo Jacobiano a  $P_f$  sia costante.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$  una curva, definita su un intervallo  $I$  di  $\mathbb{R}$  contenente l'origine. Siano  $p_0 = \gamma(0)$  e  $q_0 = f(p_0)$ . Fissiamo due sistemi di riferimento  $\sigma_0 \in P_{M, p_0}$  e  $\tau_0 \in P_{N, q_0}$  e siano  $\alpha$  il sollevamento orizzontale di  $\gamma$  per  $\sigma_0$  e  $\beta$  il sollevamento orizzontale di  $f \circ \gamma$  per  $\tau_0$ . I campi di vettori orizzontali lungo  $\gamma$  sono della forma  $\alpha v$ , con  $v \in \mathbb{R}^m$ . La condizione affinché  $f$  sia affine è che<sup>1</sup>  $df(\alpha v) = \beta \mathcal{J}f(\alpha, \beta)v$  sia parallela lungo  $f \circ \gamma$ , cioè che  $\mathcal{J}f(\alpha, \beta)v$  per ogni  $v \in \mathbb{R}^m$ , e quindi  $\mathcal{J}f(\alpha, \beta)$ , sia costante su  $I$ . Poiché  $P_M$  è il luogo dei punti che si possono connettere a  $\sigma_0$  mediante cammini orizzontali, ne segue la tesi.  $\square$

**OSSERVAZIONE XX.1.3.** In particolare, se consideriamo su  $\mathbb{R}^m$  ed  $\mathbb{R}^n$  le connessioni affini standard, con curvatura e torsione nulle, i concetti di applicazione affine da  $\mathbb{R}^m$  in  $\mathbb{R}^n$  nel senso della geometria elementare e di quella differenziale coincidono.

**PROPOSIZIONE XX.1.4.** Un'applicazione affine  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  trasforma geodetiche in geodetiche. Se  $p \in M$  ed  $f(p) = q$ , allora  $f(\text{Exp}_p(v)) = \text{Exp}_q(df(p)v)$  per ogni  $v$  in un intorno aperto di 0 in  $T_p M$ .  $\square$

<sup>1</sup>Ricordiamo che lo Jacobiano di  $f$  nei sistemi di riferimento  $\alpha, \beta$  è

$$\mathcal{J}f(\alpha, \beta) = \beta^{-1} \circ df \circ \alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

**COROLLARIO XX.1.5.** *Se  $M$  è connessa, fissati  $p \in M$ ,  $q \in N$  ed  $A \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p M, T_q N)$ , vi è al più un'applicazione affine  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  tale che  $f(p) = q$  e  $df(p) = A$ .  $\square$*

**PROPOSIZIONE XX.1.6.** *Con la topologia compatta-aperta l'insieme delle applicazioni affini  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  è una varietà differenziabile di dimensione minore o uguale ad  $n(m+1)$ .  $\square$*

**ESEMPIO XX.1.7.** Se  $M$  è una varietà affine completa, le geodetiche in  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$  formano una varietà differenziabile diffeomorfa a  $TM$ , e quindi di dimensione  $2m$ .

Fissiamo su  $S^m$  la connessione di Levi-Civita associata alla metrica standard. Allora le trasformazioni affini di  $S^m$  in sé sono isometrie e formano un gruppo di dimensione  $m(m+1)/2$ , isomorfo ad  $\mathbf{SO}(m+1)$ . Se invece di  $S^m$  consideriamo lo spazio di Lobačeskij  $H_m = \mathbf{SO}^+(1, m)/\mathbf{SO}(m)$  di dimensione  $m$ , il gruppo delle affinità è generato dalle isometrie e dalle omotetie con centro in un punto, ed ha dimensione  $m(m+1)/2 + 1$ .

## XX.2. Sottovarietà affini

**DEFINIZIONE XX.2.1.** Una sottovarietà differenziabile  $N$  di una varietà differenziabile affine  $M$  si dice *affine* se i trasporti paralleli di vettori tangenti ad  $N$  lungo curve con supporto in  $N$  sono ancora tangenti ad  $N$ .

**PROPOSIZIONE XX.2.2.** *Se  $N$  è una sottovarietà differenziabile affine di una varietà differenziabile affine  $M$ , allora vi è un'unica connessione lineare su  $N$  per cui l'inclusione  $N \hookrightarrow M$  sia un'applicazione affine.*

**DIMOSTRAZIONE.** L'unicità è conseguenza del fatto che il trasporto parallelo caratterizza completamente la connessione. Possiamo supporre che  $M, N$  siano connesse. Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un fibrato d'olonomia di  $M$ , con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ . Fissato un punto  $p_0$  di  $N$  ed un riferimento  $\sigma_0 \in P_{p_0}$ , sia

$$V = \{v \in \mathbb{R}^m \mid \sigma_0 v \in T_{p_0} N\}.$$

Sia  $P'$  il sottospazio di  $P$  che consiste di tutti i riferimenti  $\sigma \in P$  che possono essere congiunti a  $\sigma_0$  dal rialzamento orizzontale di un cammino in  $N$ . Poiché  $N$  è una sottovarietà affine, abbiamo allora

$$T_p N = \{\sigma v \mid v \in V\}, \quad \forall \sigma \in P'_p, \quad \forall p \in N.$$

Infatti dalla definizione di sottovarietà affine segue che  $\sigma(t)v$  è tangente ad  $N$  per ogni vettore  $v \in V$  ed ogni cammino orizzontale in  $\pi^{-1}(N) \subset P$  con punto iniziale  $\sigma_0$ . Quindi  $\sigma v \in TN$  per ogni  $v \in \mathbb{R}^m$  e vale l'uguaglianza perché i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione.

Il gruppo  $\mathbf{G}' = \{a \in \mathbf{G} \mid \sigma_0 a \in P'\}$  è un sottogruppo di Lie di  $\mathbf{G}$  che lascia invariante il sottospazio vettoriale  $V$ . Possiamo allora considerare il sottofibrato  $\eta = (Q \xrightarrow{\pi} N)$  di  $\mathbb{L}(N)$  la cui fibra in  $p \in N$  consiste degli isomorfismi  $\sigma : V \rightarrow T_p N$  al variare di  $\sigma$  in  $P'_p$ . Abbiamo quindi un'applicazione naturale  $\varpi : P' \rightarrow Q$  che consiste nella restrizione a  $V$  degli elementi di  $P'$ . Per ogni  $v \in V$  vi è su  $Q$  un unico campo di vettori  $v^Q$  che è  $\varpi$ -correlato a  $v^*$ . I campi  $v^Q$  definiscono in  $Q$  la

distribuzione orizzontale di una connessione  $\mathbf{G}'_V$ -lineare, ove  $\mathbf{G}'_V$  è il gruppo delle restrizioni a  $V$  degli elementi di  $\mathbf{G}'$ .  $\square$

LEMMA XX.2.3. *Siano  $p$  un punto di una varietà differenziabile affine  $M$  e  $W$  un sottospazio vettoriale di  $T_pM$ . Esiste al più un germe di sottovarietà affine  $N$  di  $M$  con  $p \in N$  e  $T_pN = W$ .  $\square$*

PROPOSIZIONE XX.2.4. *Se  $N$  è una sottovarietà affine connessa di una varietà differenziabile affine completa  $M$ , allora  $N$  è una sottovarietà aperta di una sottovarietà affine di  $M$  completa.  $\square$*

### XX.3. Varietà totalmente geodetiche

Sia  $M$  una varietà differenziabile,  $S$  una sua sottovarietà. Un'applicazione continua  $\phi : N \rightarrow S$ , per cui  $N \ni p \rightarrow \phi(p) \in M$  sia differenziabile, è anche differenziabile come applicazione a valori in  $S$ .

Se  $(M, g)$  è una varietà Riemanniana, possiamo considerare su  $S$  la struttura Riemanniana definita dalla restrizione  $h$  della metrica  $g$ . Le geodetiche di  $M$  contenute in  $S$  sono anche geodetiche di  $S$ . In generale non è vero il viceversa.

DEFINIZIONE XX.3.1. Diciamo che una sottovarietà  $S$  di  $M$  è *geodetica* in  $p$  se contiene tutte le geodetiche di  $M$  tangenti ad  $S$  in  $p$ . Diciamo che  $S$  è *totalmente geodetica* se è geodetica in ogni suo punto.

Le sottovarietà geodetiche 1-dimensionali sono le geodetiche massimali di  $M$ .

PROPOSIZIONE XX.3.2. *Sia  $S$  una sottovarietà di  $M$ , geodetica in un punto  $p \in M$ . Se  $M$  è completa, allora anche  $S$  è completa.*

PROPOSIZIONE XX.3.3. *Se la sottovarietà  $S$  di  $M$  è totalmente geodetica, allora l'inclusione  $S \hookrightarrow M$  è un'isometria locale.*

TEOREMA XX.3.4. *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana ed  $S$  una sua sottovarietà, completa per la restrizione della metrica  $g$ . Se il trasporto parallelo in  $M$  lungo le curve di  $S$  trasforma vettori tangenti ad  $S$  in vettori tangenti ad  $S$ , allora  $S$  è totalmente geodetica. Viceversa, se  $S$  è totalmente geodetica, il trasporto parallelo in  $M$  lungo le curve di  $S$  trasforma vettori tangenti ad  $S$  in vettori tangenti ad  $S$ .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché abbiamo supposto  $S$  completa, la dimostrazione si riduce a considerare la situazione locale. Basterà allora verificare che, se si scelgono coordinate locali  $x^1, \dots, x^n$  tali che  $x^1, \dots, x^m$  siano coordinate locali su  $S$ , allora i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita su  $S$  si ottengono da quelli della connessione di Levi-Civita su  $M$  per restrizione del dominio di definizione degli indici.  $\square$

TEOREMA XX.3.5. *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana connessa, semplicemente connessa, completa, con curvatura sezionale negativa. Sia  $S$  una sua sottovarietà totalmente geodetica. Per ogni  $p \in S$ , le geodetiche uscenti da  $p$  e perpendicolari ad  $S$  formano una sottovarietà  $S_p^\perp$  ed  $M$  è unione disgiunta delle sottovarietà  $S_p^\perp$  al variare di  $p$  in  $S$ .*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo, per ogni  $p \in S$ ,

$$S = \exp_p(T_p S), \quad S^\perp = \exp_p(T_p^\perp S).$$

Poiché  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  è un diffeomorfismo,  $S^\perp$  è una sottovarietà.

Se  $q \in M$ , poiché  $S$  è chiusa, vi è un punto  $p \in S$  che realizza la minima distanza di  $q$  da  $S$  e  $q \in S^\perp$ . Tale punto  $p$  è unico, perché se ci fosse un altro punto  $p'$  che realizza la minima distanza, le geodetiche da  $q$  a  $p$  e a  $p'$  formerebbero angoli di  $\pi/2$  con il segmento di geodetica di  $S$  che congiunge  $p$  a  $p'$  e ci sarebbe quindi un triangolo geodetico con somma degli angoli interni  $> \pi$ .  $\square$

#### XX.4. Trasformazioni affini

Sia  $M$  una varietà affine.

DEFINIZIONE XX.4.1. Un diffeomorfismo  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$  di  $M$  in sé si dice una *trasformazione affine* se è un'applicazione affine.

L'inversa di una trasformazione affine è ancora una trasformazione affine. Abbiamo quindi

PROPOSIZIONE XX.4.2. *Le trasformazioni affini di  $M$  formano un gruppo.*  $\square$

NOTAZIONE XX.4.3. Indicheremo con  $\mathbf{A}(M)$  il gruppo delle trasformazioni affini di  $M$ .

DEFINIZIONE XX.4.4. Ad ogni diffeomorfismo  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$  corrisponde l'automorfismo

$$(20.4.1) \quad \hat{f} : \mathbf{L}(M) \ni \sigma \longrightarrow df \circ \sigma \in \mathbf{L}(M),$$

che chiamiamo il *rilevamento Jacobiano* di  $f$ .

LEMMA XX.4.5. *Un diffeomorfismo  $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{L}(M), \mathbf{L}(M))$  è il rilevamento Jacobiano di un diffeomorfismo di  $M$  se e soltanto se preserva le fibre e lascia invariante la forma canonica  $\theta$  di  $\mathbf{L}(M)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Se  $\hat{f}$  è il rilevamento Jacobiano di un diffeomorfismo  $f$  di  $M$  in sé, e  $w \in T_\sigma \mathbf{L}(M)$ , abbiamo

$$\begin{aligned} (\hat{f}^* \theta)(w) &= \theta(d\hat{f}(w)) = [\hat{f}(\sigma)]^{-1} \pi_*(d\hat{f}(w)) = [\hat{f}(\sigma)]^{-1} df(\pi_*(w)) \\ &= \sigma^{-1} \circ df^{-1} \circ df(\pi_*(w)) = \sigma^{-1} \pi_*(w) = \theta(w), \quad \forall w \in T_\sigma \mathbf{L}(M). \end{aligned}$$

Viceversa, un diffeomorfismo  $\psi$  di  $\mathbf{L}(M)$  in sé che lascia invariante  $\theta$ , preserva le fibre in quanto

$$\begin{aligned} \psi^* \theta(wa) &= \theta(d\psi(wa)) = \psi(\sigma a)^{-1} d\psi(wa) = a^{-1} \sigma^{-1} \pi_* w, \\ &\text{ci dice che } \psi(\sigma a) = \psi(\sigma) a, \quad \forall w \in T_\sigma \mathbf{L}(M), \quad \forall a \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Detto  $f$  il diffeomorfismo indotto sulla base abbiamo

$$\pi^* w = \sigma \theta(w) = \sigma(\psi^* \theta)(w) = \sigma \circ [\psi(\sigma)]^{-1} df(\pi_* w), \quad \forall w \in T_\sigma \mathbf{L}(M).$$

Quindi  $\psi(\sigma) \circ \sigma^{-1} = df$ , cioè  $\psi = df \circ \sigma = \hat{f}$ .  $\square$

PROPOSIZIONE XX.4.6. *Un diffeomorfismo  $f$  di  $M$  è una trasformazione affine se e soltanto se il suo rilevamento Jacobiano preserva la forma di Cartan  $\omega$ .*

*Viceversa, un diffeomorfismo di  $L(M)$  che preservi la forma canonica e la forma di Cartan è il rilevamento Jacobiano di una trasformazione affine di  $M$ .*

DIMOSTRAZIONE. Se  $f$  è una trasformazione affine, allora  $\hat{f}$  preserva la distribuzione orizzontale e quindi la forma di Cartan, e viceversa. L'ultima affermazione segue dal fatto che un diffeomorfismo di  $L(M)$  che preservi la forma canonica è il rilevamento Jacobiano di un differomorfismo di  $M$ .  $\square$

PROPOSIZIONE XX.4.7. *Un diffeomorfismo  $f$  di  $M$  è una trasformazione affine se e soltanto se  $\hat{f}$  lascia invarianti i campi orizzontali fondamentali.*

DIMOSTRAZIONE. Se  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$  è una trasformazione affine, allora  $\hat{f}$  lascia invarianti  $\theta$  ed  $\omega$ , e quindi anche i campi  $v^*$  (con  $v \in \mathbb{R}^m$ ), caratterizzati da  $\theta(v^*) = v$  ed  $\omega(v^*) = 0$ . Viceversa, da  $d\hat{f}(v^*) = v^*$  per ogni  $v \in \mathbb{R}^m$  segue che  $\hat{f}$  preserva la distribuzione orizzontale e quindi è una trasformazione affine. Come vedremo nel seguito, le isometrie di una varietà Riemanniana di dimensione  $n$  formano un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale ad  $n(n-1)/2$ . di dimensione  $\square$

PROPOSIZIONE XX.4.8. *Sia  $M$  sia una varietà differenziabile affine connessa. Allora una trasformazione affine di  $M$  è completamente determinata dal suo differenziale in un punto.*

DIMOSTRAZIONE. Siano  $f_1, f_2$  due trasformazioni affini di  $M$ . Il luogo  $N$  dei punti di  $M$  in cui  $f_1$  ed  $f_2$  coincidono con i loro differenziali è chiuso. Poiché  $f_i(\text{Exp}_p(v)) = \text{Exp}_{f_i(p)}(df(p_i)(v))$  per ogni  $p \in M$  e  $v$  in un intorno di 0 in  $T_pM$ , l'insieme  $N$  è anche aperto. Se quindi  $N \neq \emptyset$ , è  $N = M$  per l'ipotesi che  $M$  sia connessa.  $\square$

Vale il

TEOREMA XX.4.9. *Il gruppo  $\mathbf{A}(M)$  delle trasformazioni affini di  $M$  è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale ad  $m(m+1)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo su  $\mathbb{R}^m$  e su  $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$  i prodotti scalari standard<sup>2</sup>. Allora il rilevamento Jacobiano di una trasformazione affine è un diffeomorfismo di  $L(M)$  che preserva la metrica

$$\hat{g}(X, Y) = (\theta(X)|\theta(Y)) + (\omega(X)|\omega(Y)), \quad \forall \sigma \in L(M), \quad \forall X, Y \in T_\sigma L(M).$$

Quindi  $\mathbf{A}(M)$  è un gruppo topologico localmente compatto per il Teorema di van Dantzig-van der Waerden<sup>3</sup> e, per il teorema di Bochner-Montgomery<sup>4</sup> un gruppo di Lie. Per la Proposizione XX.4.8 la sua dimensione è minore o uguale alla dimensione  $m(m+1)$  dello spazio totale  $L(M)$  dei sistemi di riferimento di  $M$ .  $\square$

<sup>2</sup>È  $(v|w) = w^\dagger v$  se  $v, w \in \mathbb{R}^m$  ed  $(X|Y) = \text{traccia}(Y^\dagger X)$  se  $X, Y \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ .

<sup>3</sup>David van Dantzig (1900-1959) e Bartel Leendert van der Waerden 1903-1996) sono matematici olandesi. Il risultato citato è in *Über metrisch homogene Räume*, Sem. Univ. Hamburg **6**, (1928), pp.374-376.

<sup>4</sup>Salomon Bochner e Deane Montgomery, *Locally compact groups of differentiable transformations*, Annals of Mathematics, **47**, (1946), pp. 639-656.

### XX.5. Affinità infinitesime

Ad un campo di vettori  $X$  sulla varietà  $M$  corrisponde un gruppo locale un parametro di diffeomorfismi di  $M$ . Il suo rialzamento Jacobiano è un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di  $L(M)$ .

DEFINIZIONE XX.5.1. Il suo generatore infinitesimale  $\hat{X}$  si dice il *rilevamento Jacobiano di  $X$* .

LEMMA XX.5.2. *Un campo di vettori  $\hat{X}$  su  $L(M)$  è il rilevamento Jacobiano di un campo di vettori  $X$  su  $M$  se e soltanto se verifica le due condizioni:*

$$(20.5.1) \quad dR_a(\hat{X}) = \hat{X}, \quad \forall a \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}),$$

$$(20.5.2) \quad L_{\hat{X}}\theta = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo di vettori su  $M$  e  $\{\phi_t\}$  il gruppo locale a un parametro da esso generato. Da  $\hat{\phi}_t^*\theta = \theta$  otteniamo la (20.5.2). È poi  $\hat{\phi}_t(\sigma) = d\phi_t \circ \sigma$ , e quindi

$$dR_a(\hat{X}_\sigma) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} \hat{\phi}_t(\sigma a) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} d\phi_t \circ \sigma a = \hat{X}_{\sigma a}, \quad \forall \sigma \in L(M), \quad \forall a \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}).$$

Viceversa, se valgono le (20.5.1), (20.5.2), il gruppo a un parametro generato da  $\hat{X}$  consiste di diffeomorfismi locali di  $L(M)$  che preservano le fibre e lasciano  $\theta$  invariante, e sono quindi, per il LemmaXX.4.5 il rilevamento Jacobiano di un gruppo locale a un parametro di automorfismi di  $M$ , il cui generatore infinitesimale  $X$  soddisfa  $X_{\pi(\sigma)} = \pi_*(\hat{X}_\sigma)$  per ogni  $\sigma \in L(M)$ .  $\square$

Supponiamo che  $M$  sia una varietà differenziabile affine.

DEFINIZIONE XX.5.3. Un campo di vettori  $X$  su  $M$  è un' *affinità infinitesima* se il gruppo locale a un parametro da esso generato consiste di affinità locali.

PROPOSIZIONE XX.5.4. *Sia  $X$  un campo di vettori su  $M$  ed  $\hat{X}$  il suo rilevamento Jacobiano. Sono equivalenti:*

- (1)  $X$  è un' *affinità infinitesima*;
- (2)  $L_{\hat{X}}\omega = 0$ ;
- (3)  $[\hat{X}, v^*] = 0$ , *per ogni*  $v \in \mathbb{R}^m$ ;
- (4)  $[\hat{X}, \tilde{Y}] = [\hat{X}, Y]$ , *per ogni*<sup>5</sup>  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ .
- (5)  $L_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ L_X = \nabla_{[X, Y]}$ , *per ogni*  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

DIMOSTRAZIONE. (1)  $\Rightarrow$  (2) è conseguenza del fatto che il rilevamento Jacobiano di una trasformazione affine preserva la distribuzione orizzontale.

(2)  $\Rightarrow$  (3). Per il LemmaXX.5.2 è anche  $L_{\hat{X}}\theta = 0$ . Otteniamo, per ogni  $v \in \mathbb{R}^m$ ,

$$0 = \hat{X}v = \hat{X}(\theta(v^*)) = (L_{\hat{X}}\theta)(v^*) - \theta([\hat{X}, v^*]) = -\theta([\hat{X}, v^*]),$$

$$0 = \hat{X}\omega(v^*) = (L_{\hat{X}}\omega)(v^*) - \omega([\hat{X}, v^*]) = -\omega([\hat{X}, v^*])$$

e perciò la (3).

<sup>5</sup>Indichiamo con  $\tilde{Y}$ , o anche con  $\#(Y)$ , il rialzamento orizzontale di un campo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ .



Supponiamo che valga la (3). Ogni campo orizzontale  $Z \in \mathcal{H}(L(M))$  si può scrivere come una combinazione lineare  $Z = \sum_{i=1}^m f^i e_i^*$ , a coefficienti  $f^i \in \mathcal{C}^\infty(L(M))$ , dei campi orizzontali standard  $e_1^*, \dots, e_m^*$  associati alla base canonica  $e_1, \dots, e_m$  di  $\mathbb{R}^m$ . Se  $\hat{X}$  soddisfa (3), allora

$$[\hat{X}, Z] = \sum_{i=1}^m (Zf^i)e_i^* + \sum_{i=1}^m f^i[\hat{X}, e_i^*] = \sum_{i=1}^m (Zf^i)e_i^* \in \mathcal{H}(L(M)).$$

Quindi la derivata di Lie rispetto ad  $\hat{X}$  preserva la distribuzione orizzontale ed è quindi un'affinità infinitesima. Poiché, per ogni  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , il campo  $\tilde{Y}$  è  $\pi$ -correlato ad  $Y$ , ne segue che  $[\hat{X}, \tilde{Y}]$  è il campo orizzontale corrispondente ad  $[X, Y]$  e vale quindi la (4).

Poiché  $L_{\hat{X}}\theta = 0$ , perché  $\hat{X}$  è un rilevamento Jacobiano, otteniamo

$$\begin{aligned} \theta(\mathcal{L}([X, \nabla_Y Z] - \nabla_Y[X, Z])) &= \theta([\hat{X}, \widetilde{\nabla_Y Z}]) - \tilde{Y}\theta([\hat{X}, \tilde{Z}]) = \hat{X}\theta(\widetilde{\nabla_Y Z}) - \tilde{Y}\hat{X}\theta(\tilde{Z}) \\ &= [\hat{X}, \tilde{Y}]\theta(\tilde{Z}), \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

La (5) è dunque equivalente ad

$$[\hat{X}, \tilde{Y}]\theta(\tilde{Z}) = [\widetilde{X}, \tilde{Y}]\theta(\tilde{Z}), \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

che, essendo  $[\hat{X}, \tilde{Y}]$  è un campo  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ -invariante, è equivalente alla (4) e cioè al fatto che la derivata di Lie rispetto ad  $\hat{X}$ , preservando la distribuzione orizzontale, sia un'affinità infinitesima.  $\square$

**PROPOSIZIONE XX.5.5.** *L'insieme  $\alpha(M)$  delle affinità infinitesime di  $M$  è un'algebra di Lie di dimensione minore o uguale ad  $m(m+1)$ . Se  $M$  è connessa, per ogni  $\sigma \in L(M)$  l'applicazione  $\alpha(M) \ni X \rightarrow \hat{X}_\sigma \in T_\sigma L(M)$  è iniettiva.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , allora  $[\widetilde{X}, \tilde{Y}] = [\hat{X}, \hat{Y}]$  ed  $[L_{\hat{X}}, L_{\hat{Y}}] = L_{[\hat{X}, \hat{Y}]}$ . Il fatto che  $\alpha(M)$  sia un'algebra di Lie è allora conseguenza della caratterizzazione (2) della Proposizione XX.5.4. Infatti

$$L_{[\hat{X}, \hat{Y}]} \omega = [L_{\hat{X}}, L_{\hat{Y}}] \omega = 0 \quad \text{se } X, Y \in \alpha(M).$$

Per dimostrare che  $\alpha(M)$  ha dimensione finita  $\leq m(m+1)$ , è sufficiente dimostrare che, se  $M$  è connessa, ogni affinità infinitesima  $X$  per cui  $\hat{X}$  abbia un punto critico è identicamente nulla. Sia  $X \in \alpha(M)$ . Il luogo dei punti critici di  $\hat{X}$  in  $L(M)$  è un chiuso  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ -invariante. Poiché, per la (3) della Proposizione XX.5.4,  $[v^*, \hat{X}] = 0$  per ogni  $v \in \mathbb{R}^m$ , il campo  $\hat{X}$  è invariante per il flusso dei  $v^*$  e quindi, se ha un punto critico  $\sigma_0$ , sono punti critici tutti i punti  $\sigma$  dello spazio totale del fibrato d'olonomia per il punto  $\sigma_0$ . Questo implica che  $X$ , che è  $\pi$ -correlato ad  $\hat{X}$ , è identicamente nullo.  $\square$

**PROPOSIZIONE XX.5.6.** *La restrizione ad una geodetica di un'affinità infinitesima è un campo di Jacobi.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $X \in \alpha(M)$  un'affinità infinitesima. Se  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$  è un arco geodetico, esiste un  $\epsilon > 0$  per cui il flusso  $\phi_s$  di  $X$  sia definito, per  $|s| \leq \epsilon$ , in un intorno del supporto  $\gamma([0, 1])$  di  $\gamma$ . La  $f(t, s) = \phi_s \circ \gamma(t)$  è una superficie parametrica di classe  $\mathcal{C}^\infty$ , definita per  $(t, s) \in [0, 1] \times [-\epsilon, \epsilon]$ , e per ogni  $|s| \leq \epsilon$  la

$t \rightarrow \phi_s \circ \gamma(t)$  è una geodetica. Quindi  $X_{\gamma(t)} = \partial f(t, 0)/\partial s$  è un campo di Jacobi lungo  $\gamma$ .  $\square$

Ricordiamo che un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  è *completo* se genera un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di  $M$ .

**TEOREMA XX.5.7.** *L'algebra di Lie del gruppo  $\mathbf{A}(M)$  delle affinità di  $M$  è la sottoalgebra di  $\mathfrak{a}(M)$  formata dai campi completi.*

**PROPOSIZIONE XX.5.8.** *Se l'algebra di Lie  $\mathfrak{a}(M)$  delle affinità infinitesime ha dimensione  $m(m+1)$ , allora la connessione è piatta, ha cioè torsione e curvatura nulle.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\mathfrak{a}(M)$  ha dimensione  $m(m+1)$ , per ogni  $\sigma_0 \in L(M)$  l'applicazione  $\mathfrak{a}(M) \ni X \rightarrow \hat{X}_{\sigma_0} \in T_{\sigma_0}L(M)$  è un isomorfismo lineare. Quindi, per ogni  $A \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$  vi è uno ed un solo campo  $X \in \mathfrak{a}(M)$  tale che  $\hat{X}_{\sigma_0} = A_{\sigma_0}^*$ , ove  $A^*$  è il campo verticale fondamentale associato ad  $A$ . Siano  $v, w \in \mathbb{R}^m$ . Allora

$$\hat{X}_{\sigma_0} \Theta(v^*, w^*) = A_{\sigma_0}^* \Theta(v^*, w^*).$$

Calcoliamo separatamente i due membri di quest'uguaglianza. Poiché

$$L_{\hat{X}} \Theta = L_{\hat{X}}(d\theta + \omega \wedge \theta) = d(L_{\hat{X}}\theta) + (L_{\hat{X}}\omega) \wedge \theta + \omega \wedge L_{\hat{X}}\theta = 0,$$

otteniamo

$$\hat{X} \Theta(v^*, w^*) = (L_{\hat{X}} \Theta)(v^*, w^*) + \Theta([\hat{X}, v^*], w^*) + \Theta(v^*, [\hat{X}, w^*]) = 0.$$

È poi

$$L_{A^*} \Theta = A^* \lrcorner d\Theta + d(A^* \lrcorner \Theta) = A^* \lrcorner (\Omega \wedge \theta - \omega \wedge \Theta) = -A\Theta$$

e quindi otteniamo che  $A\Theta_{\sigma_0}(v^*, w^*) = 0$  per ogni  $A \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ , per ogni  $v, w \in \mathbb{R}^m$  ed ogni  $\sigma_0 \in L(M)$ . Questo dimostra che  $\Theta = 0$ . In modo analogo si dimostra che anche  $\Omega = 0$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE XX.5.9.** *Se la connessione è completa, allora anche tutte le affinità infinitesime sono complete, sono cioè generatori infinitesimali di gruppi a un parametro di trasformazioni affini di  $M$ .*

## XX.6. Isometrie di una varietà Riemanniana

Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana connessa e  $\text{dist}$  la distanza associata alla metrica  $g$ .

Ricordiamo che un'isometria di  $M$  è un'applicazione  $\phi : M \rightarrow M$  che preserva le distanze, tale cioè che sia

$$\text{dist}(\phi(p_1), \phi(p_2)) = \text{dist}(p_1, p_2), \quad \forall p_1, p_2 \in M.$$

Diciamo che è un'isometria globale, o una congruenza se è anche bigettiva.

**DEFINIZIONE XX.6.1.** Un'applicazione  $\phi : M \rightarrow M$  è un isomorfismo Riemanniano locale se è  $\mathcal{C}^\infty$  e  $\phi^*g = g$ . Diremo che è un isomorfismo Riemanniano se è anche bigettiva.

Segue dalla definizione della distanza Riemanniana che un isomorfismo Riemanniano è anche una congruenza. Le due nozioni sono di fatto equivalenti, come conseguenza del seguente teorema.

**TEOREMA XX.6.2.** *Un'isometria  $\phi : M \rightarrow M$  rispetto alla distanza Riemanniana è differenziabile di classe  $\mathcal{C}^\infty$  ed è un isomorfismo Riemanniano locale.*

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che gli archi di geodetica  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$  si possono caratterizzare come gli archi differenziabili per cui esistono costanti  $c \geq 0$  ed  $\epsilon > 0$  per cui

$$\text{dist}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = c|t_2 - t_1|, \quad \forall 0 \leq t_1, t_2 \leq 1, \text{ con } |t_1 - t_2| < \epsilon.$$

Quindi un'isometria  $\phi$  di  $M$  è un'applicazione continua che trasforma archi geodetici in archi geodetici e segmenti in segmenti. In particolare, se  $\phi(p_0) = q_0$ , possiamo associare a  $\phi$  un'applicazione  $\lambda : T_{p_0} \rightarrow T_{q_0}$  omogenea di grado uno che fa corrispondere ad un segmento  $\{\text{Exp}_{p_0}(tv)\}_{0 \leq t \leq 1}$ , per  $v$  in un intorno normale di  $0$  in  $T_{p_0}M$ , il segmento  $\{\text{Exp}_{q_0}(t\lambda(v))\}_{0 \leq t \leq 1}$ . L'applicazione  $\lambda$  preserva le lunghezze dei vettori. Osserviamo che l'angolo  $\alpha$  tra due geodetiche  $\text{Exp}_{p_0}(tv)$  ed  $\text{Exp}_{p_0}(tw)$  uscenti dallo stesso punto  $p_0$  si può calcolare, utilizzando il teorema del coseno, mediante

$$\cos \alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{dist}(\text{Exp}_{p_0}(tv), \text{Exp}_{p_0}(tw)) - t^2(\|v\|^2 + \|w\|^2)}{2t^2\|v\|\|w\|}.$$

Quindi l'applicazione  $\lambda$  preserva anche gli angoli ed è perciò un'isometria lineare di  $T_{p_0}M$  su  $T_{q_0}M$ . In un intorno normale di  $p_0$  abbiamo  $\phi(\text{Exp}_{p_0}(v)) = \text{Exp}_{q_0}(\lambda(v))$  e questo dimostra che  $\phi$  è di classe  $\mathcal{C}^\infty$  e  $d\phi(p_0) = \lambda$ . Dunque  $\phi^*g = g$  e  $\phi$  è un isomorfismo Riemanniano.  $\square$

**PROPOSIZIONE XX.6.3.** *Le congruenze di una varietà Riemanniana  $(M, g)$  formano un gruppo.*  $\square$

Indichiamo con  $\mathbf{I}(M, g)$  il gruppo delle congruenze della varietà Riemanniana  $(M, g)$ . Osserviamo che, se  $\phi \in \mathbf{I}(M, g)$  abbiamo:

$$(20.6.1) \quad \forall p \in M \exists r_p > 0 \text{ tale che } \phi(\text{Exp}_p(v)) = \text{Exp}_{\phi(p)}(d\phi(p)(v)) \\ \forall v \in T_pM \text{ con } \|v\| < r_p.$$

**PROPOSIZIONE XX.6.4.** *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana connessa,  $p_0$  un punto di  $M$ . Se  $\phi, \psi \in \mathbf{I}(M, g)$  e  $\phi(p_0) = \psi(p_0)$ ,  $d\phi(p_0) = d\psi(p_0)$ , allora  $\phi = \psi$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $N = \{p \in M \mid \phi(p) = \psi(p), \quad d\phi(p) = d\psi(p)\}$ . Poiché  $\phi$  e  $\psi$  sono di classe  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $N$  è chiuso. Per la ((20.6.1)), l'insieme  $N$  è anche aperto e quindi coincide con  $M$ .  $\square$

Ogni congruenza di  $(M, g)$  definisce un diffeomorfismo nello spazio totale  $\mathbf{O}_g(M)$  del fibrato dei sistemi di riferimento ortonormali di  $M$ . Su questo la forma di Cartan  $\omega \in \Omega^1(\mathbf{O}_g(M), \mathfrak{so}_m)$  della connessione di Levi-Civita e la forma canonica  $\theta \in \Omega^1(\mathbf{O}_g(M), \mathbb{R}^m)$  definiscono un parallelismo completo

$$T\mathbf{O}_g(M) \ni X \rightarrow (\pi(X), \theta(X), \omega(X)) \in M \times \mathbb{R}^m \times \mathfrak{so}_m.$$

LEMMA XX.6.5. Se  $\phi \in \mathbf{I}(M, g)$ , allora

$$(20.6.2) \quad \tilde{\phi} : \mathbf{O}_g(M) \ni \sigma \longrightarrow d\phi \circ \sigma \in \mathbf{O}_g(M)$$

definisce un morfismo del fibrato principale  $\mathfrak{O}_g(M)$  con

$$(20.6.3) \quad \tilde{\phi}^*\theta = \theta, \quad \tilde{\phi}^*\omega = \omega.$$

Viceversa, ogni isomorfismo  $(\phi, \tilde{\phi})$  del fibrato principale  $\mathfrak{O}_g(M)$  che soddisfi (20.6.3) è il sollevamento di una congruenza  $\phi \in \mathbf{I}(M, g)$ .

Come conseguenza abbiamo il seguente teorema di Myers-Steenrod<sup>6</sup>.

TEOREMA XX.6.6. Il gruppo  $\mathbf{I}(M, g)$  delle congruenze di una varietà Riemanniana connessa di dimensione  $m$  è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale ad  $m(m+1)/2$ .

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un punto  $p_0$  in  $M$  ed un riferimento ortonormale  $\sigma_0 \in \mathbf{O}_g(M)$  in  $p_0$ . Se  $\phi \in \mathbf{I}(M, g)$ , allora  $d\phi(p_0) = \sigma^{-1} \circ \tilde{\phi}(\sigma_0) \circ \sigma_0^{-1}$ . Quindi, per la Proposizione XX.6.4, la  $\phi$  è completamente determinata da  $\tilde{\phi}(\sigma_0)$  e l'applicazione  $\mathbf{I}(M, g) \ni \phi \rightarrow \tilde{\phi}(\sigma_0) \in \mathbf{O}_g(M)$  è iniettiva e continua. Sia  $N$  l'immagine di questa applicazione.

Dico che  $N$  è un chiuso di  $\mathbf{O}_g(M)$ . Sia infatti  $\{\phi_\nu\}$  una successione in  $\mathbf{I}(M, g)$  tale che  $\{\tilde{\phi}_\nu(\sigma_0)\}$  converga in  $\mathbf{O}_g(M)$  ad un riferimento ortonormale  $\sigma_1$  in un punto  $p_1$  di  $M$ . Fissiamo  $r > 0$  in modo che  $B_{p_0}(r)$  e  $B_{p_1}(r)$  siano intorni normali di  $p_0$  e  $p_1$  rispettivamente. Definiamo  $f : B_{p_0}(r) \rightarrow B_{p_1}(r)$  mediante  $f(\text{Exp}_{p_0}(v)) = \text{Exp}_{p_1}(\sigma_1 \circ \sigma_0(v))$  se  $v \in T_{p_0}M$  e  $\|v\| < r$ . Su tutti i sottoinsiemi compatti di  $B_{p_0}(r)$  la  $f$  è limite uniforme delle  $\phi_\nu$  e quindi è un'isometria di  $B_{p_0}(r)$  su  $B_{p_1}(r)$ . Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} = \left\{ (U, \psi) \left| \begin{array}{l} B_{p_0}(r) \subset U \text{ aperto connesso, } \psi \in \mathcal{C}^\infty(U, M), \psi|_{B_{p_0}(r)} = f, \\ \text{dist}(\psi(p), \psi(q)) = \text{dist}(p, q), \forall p, q \in U \end{array} \right. \right\}.$$

ed introduciamo su di essa la relazione d'ordine

$$(U_1, \psi_1) < (U_2, \psi_2) \iff U_1 \subset U_2 \text{ e } \psi_2|_{U_1} = \psi_1.$$

Si verifica immediatamente che questa famiglia è induttiva ed ammette quindi un elemento massimale  $(W, \phi)$ . Dico che  $W = M$  e  $\phi \in \mathbf{I}(M, g)$ . Infatti, se  $\{q_\nu\}$  è una successione di punti di  $W$  che converge ad un punto  $q$  di  $M$ , allora esiste un  $\eta > 0$  tale che per ogni  $\nu$  la palla  $B_{q_\nu}(\eta)$  sia un intorno normale di  $q_\nu$  in  $M$ . Le  $\phi_\nu$  convergono allora su  $B_q(\eta)$ , uniformemente sui compatti, ad una isometria locale  $\psi'$  di  $B_q(\eta)$  in  $M$  che, per la Proposizione XX.6.4, coincide con  $\phi$  su  $B_q(\eta) \cap W$ . Quindi per la massimalità  $B_q(\eta) \subset W$  e, poiché  $M$  è connessa, questo dimostra che  $W = M$ , cioè che  $\phi$  è un'isometria definita su  $M$ . Per verificare che è surgettiva, osserviamo che  $\{\tilde{\phi}_\nu^{-1}(\sigma_1)\}$  converge a  $\sigma_0$ . Ripetendo il ragionamento svolto sopra, ne ricaviamo che  $\phi_\nu^{-1}$  converge ad un'isometria  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$ , che è l'inversa di  $\phi$ .

<sup>6</sup>S. B. Myers and N. E. Steenrod *The Group of Isometries of a Riemannian Manifold* Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 40, No. 2 (Apr., 1939), pp. 400-416. Vedi anche Richard S. Palais, *On the differentiability of isometries* Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 805-807

Da questa osservazione segue che  $\mathbf{I}(M, g)$  è localmente compatto, e quindi un gruppo di Lie diffeomorfo, come varietà differenziabile, ad una sottovarietà  $N$  di  $\mathbf{O}_g(M)$ , e quindi di dimensione minore o uguale ad  $m(m+1)/2$ .  $\square$

### XX.7. Campi di Killing

Sia  $(M, g)$  una varietà pseudo-Riemanniana.

DEFINIZIONE XX.7.1. Un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  è *di Killing*<sup>7</sup> se è generatore infinitesimale di un gruppo locale a un parametro di isometrie locali di  $(M, g)$ .

Indicheremo con  $\mathfrak{i}(M, g)$  l'insieme dei campi di Killing di  $(M, g)$ .

Poiché le isometrie pseudo-Riemanniane sono trasformazioni affini per la connessione di Levi-Civita, abbiamo

PROPOSIZIONE XX.7.2. *I campi di Killing sono affinità infinitesime per la connessione di Levi-Civita.*  $\square$

Vale il seguente

TEOREMA XX.7.3. *Sono equivalenti, per  $X \in \mathfrak{X}(M)$ :*

- (1)  $X$  è di Killing;
- (2) la derivata di Lie  $L_X g$  del tensore della metrica è nulla;
- (3) la derivata covariante  $\nabla X$  è  $g$ -antisimmetrica, cioè

$$(20.7.1) \quad g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0, \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M);$$

Se  $X$  è un campo di Killing, allora

- (4) per ogni  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  risulta

$$(20.7.2) \quad [X, \nabla_Y Z] = \nabla_Y [X, Z] + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

- (5) la restrizione di  $X$  lungo ogni geodetica è un campo di Jacobi;

- (6)  $\nabla_{YZ}^2 X + R(X, Y)Z = 0$  per ogni  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

DIMOSTRAZIONE. L'equivalenza (1)  $\Leftrightarrow$  (2) è conseguenza immediata della definizione. Verifichiamo la (2)  $\Leftrightarrow$  (3). Se  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  abbiamo

$$\begin{aligned} (L_X g)(Y, Z) &= X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) \\ &= g(\nabla_X Y - [X, Y], Z) + g(\nabla_X Z - [X, Z], Y) \\ &= g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) \end{aligned}$$

perché la connessione di Levi-Civita è simmetrica. Quindi la (20.7.1) è condizione necessaria e sufficiente affinché  $L_X g = 0$ .

La (4) è la (5) della Proposizione XX.5.4. Abbiamo poi

$$\begin{aligned} \nabla_{YZ}^2 X &= \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_{\nabla_Y Z} X \\ &= \nabla_Y (\nabla_X Z - [X, Z]) - \nabla_X \nabla_Y Z + [X, \nabla_Y Z] \end{aligned}$$

<sup>7</sup> Wilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923), matematico tedesco, professore a Münster dal 1892, fu un pioniere della teoria dei gruppi e delle algebre di Lie e, tra l'altro, scoprì nel 1887 l'algebra eccezionale  $G_2$ .

$$= -R(X, Y)Z - \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_Y[X, Z] + [X, \nabla_Y Z]$$

ed otteniamo quindi la (6) perché per la (5) la somma degli ultimi tre termini nell'ultima riga è nulla.  $\square$

**PROPOSIZIONE XX.7.4.** *I campi di Killing su  $(M, g)$  formano un'algebra di Lie  $\mathfrak{i}(M, g)$  di dimensione minore o uguale ad  $m(m+1)/2$ . Se  $\mathfrak{i}(M, g)$  ha dimensione  $m(m+1)/2$ , allora  $(M, g)$  è uno spazio a curvatura costante. La dimostrazione dell'ultima affermazione si può ottenere ripetendo gli argomenti usati per dimostrare la Proposizione XX.5.8.*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché, per il Teorema XX.7.3,  $\mathfrak{i}(M, g) = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid L_X g = 0\}$ , i campi di Killing formano una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{X}(M)$ . Inoltre, la restrizione ad  $\mathbf{O}_g(M)$  del rilevamento Jacobiano  $\hat{X}$  di un campo di Killing  $X$  è un campo di vettori su  $\mathbf{O}_g(M)$ . Se quindi  $\sigma_0 \in \mathbf{O}_g(M)$ , otteniamo per la Proposizione XX.5.5 un'applicazione lineare iniettiva  $\mathfrak{i}(M, g) \ni X \rightarrow \hat{X}_{\sigma_0} T\mathbf{O}_g(M)$ . Questo dimostra che  $\mathfrak{i}(M, g)$  ha dimensione minore o uguale ad  $m(m+1)/2$ .  $\square$

## XX.8. Riducibilità

**Rappresentazioni riducibili e decomponibili.** Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie e  $(\rho, V) = \rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$  una sua rappresentazione lineare reale. Un sottospazio lineare  $W$  di  $V$  si dice  $\mathbf{G}$ -invariante se  $\rho(a)(W) = W$  per ogni  $a \in \mathbf{G}$ . I sottospazi  $\{0\}$  e  $V$  sono sottospazi  $\mathbf{G}$ -invarianti *banali*.

**DEFINIZIONE XX.8.1.** Diciamo che  $\rho$  è

- *irriducibile* se  $V$  non contiene sottospazi  $\mathbf{G}$ -invarianti non banali;
- *riducibile* se non è irriducibile;
- *decomponibile* se  $V$  si può decomporre nella somma diretta di due sottospazi  $\mathbf{G}$ -invarianti non banali;
- *indecomponibile* se non è decomponibile;
- *completamente decomponibile* se ogni sottospazio  $\mathbf{G}$ -invariante ammette in  $V$  un complemento lineare  $\mathbf{G}$ -invariante.

Una definizione analoga si dà per una rappresentazione lineare  $(\rho_*, V) = \rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$  di un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Un sottospazio lineare  $W$  di  $V$  si dice  $\mathfrak{g}$ -invariante se  $\rho_*(A)(W) \subset W$  per ogni  $A \in \mathfrak{g}$ . I sottospazi  $\{0\}$  e  $V$  sono sottospazi  $\mathfrak{g}$ -invarianti *banali*.

**DEFINIZIONE XX.8.2.** Diciamo che  $\rho_*$  è

- *irriducibile* se  $V$  non contiene sottospazi  $\mathfrak{g}$ -invarianti non banali;
- *riducibile* se non è irriducibile;
- *decomponibile* se  $V$  si può decomporre nella somma diretta di due sottospazi  $\mathfrak{g}$ -invarianti non banali;
- *indecomponibile* se non è decomponibile;
- *completamente decomponibile* se ogni sottospazio  $\mathfrak{g}$ -invariante ammette in  $V$  un complemento lineare  $\mathfrak{g}$ -invariante.

Se  $\mathfrak{g}$  è l'algebra di Lie di un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$ , ad ogni rappresentazione lineare  $(\rho, V)$  di  $\mathbf{G}$  corrisponde la rappresentazione  $(\rho_* = d\rho_e, V)$  di  $\mathfrak{g}$ . Vale anche il viceversa se  $\mathbf{G}$  è connesso e semplicemente connesso.

Abbiamo le implicazioni

$$(\rho_*, V) \text{ irriducibile} \implies (\rho, V) \text{ irriducibile}$$

$$(\rho_*, V) \text{ indecomponibile} \implies (\rho, V) \text{ indecomponibile}$$

$$(\rho, V) \text{ completamente decomponibile} \implies (\rho_*, V) \text{ completamente decomponibile}$$

e valgono le implicazioni opposte quando  $\mathbf{G}$  sia connesso.

Se  $(\rho, V)$  è completamente decomponibile, lo spazio  $V$  si decompone in modo unico in una somma diretta

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

in cui  $V_0 = \{v \in V \mid a(v) = v, \forall a \in \mathbf{G}\}$  è il luogo dei punti fissi di  $\mathbf{G}$  e la restrizione di  $\mathbf{G}$  a ciascuno dei sottospazi vettoriali  $V_i$ , per  $1 \leq i \leq k$ , è irriducibile.

**Riducibilità di varietà affini.** Sia  $M$  una varietà differenziabile affine connessa, dotata di una connessione lineare priva di torsione. Sia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$  un suo fibrato d'olonomia, con gruppo d'olonomia  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ . Indichiamo con  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(m)$  l'algebra di Lie di  $\mathbf{G}$ .

**DEFINIZIONE XX.8.3.** Diciamo che  $M$  è *irriducibile* se l'azione naturale di  $\mathbf{G}$  su  $\mathbb{R}^m$  è irriducibile.

Supponiamo che  $M$  sia riducibile e sia  $V$  un sottospazio  $\mathbf{G}$ -invariante non banale di  $\mathbb{R}^m$ .

**LEMMA XX.8.4.** *La distribuzione vettoriale  $\mathfrak{D}_V(P)$  su  $P$  generata dallo spazio vettoriale  $\{A^* \mid A \in \mathfrak{g}\} + \{v^* \mid v \in V\}$  è involutiva.*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché abbiamo supposto che la connessione su  $M$  sia simmetrica,  $[v_1^*, v_2^*]$  è un campo verticale per ogni  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ . Poiché  $V$  è  $\mathbf{G}$ -invariante, abbiamo poi  $[A^*, v^*] = (Av)^*$  con  $Av \in V$  per ogni  $v \in V$ . Da questo segue la tesi.  $\square$

**PROPOSIZIONE XX.8.5.** *L'insieme  $T_V M = \{\sigma v \mid \sigma \in P, v \in V\}$  è un sottofibrato vettoriale di  $TM$ . La distribuzione vettoriale  $\mathfrak{D}_V(M) = \Gamma(M, T_V M)$  su  $M$  è involutiva.*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché per ipotesi  $V$  è  $\mathbf{G}$ -invariante, abbiamo  $\sigma_1 V = \sigma_2 V$  se  $\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2)$ . In particolare, per ogni aperto  $U$  di  $M$  ed ogni  $\sigma \in \Gamma(U, P)$  la  $U \times V \ni (p, v) \rightarrow \sigma(p)v \in T_V M|_U$  è una trivializzazione locale di  $T_V M$  su  $U$ , e quindi  $T_V M$  è un sottofibrato vettoriale di  $TM$ .

La distribuzione  $\mathfrak{D}_V(P)$  è il pullback della  $\mathfrak{D}_V(M)$  mediante la proiezione di  $P$  sulla base. Quindi  $\mathfrak{D}_V(M)$  è involutiva perché  $\mathfrak{D}_V(P)$  lo è.  $\square$

**PROPOSIZIONE XX.8.6.** *Sia  $Q$  un integrale totale di  $\mathfrak{D}_V$  in  $P$ . Allora  $Q$  è lo spazio totale di un fibrato  $\mathbf{G}$ -principale la cui base  $N$  è una sottovarietà affine di  $M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per il teorema di Frobenius, per ogni punto  $\sigma_0$  di  $P$  passa una ed una solva varietà integrale massimale  $Q$  della distribuzione involutiva  $\mathfrak{D}_V(P)$ . Poiché  $\mathfrak{D}_V(P)$  contiene tutti i campi verticali,  $Q$  è  $\mathbf{G}$ -invariante. La  $Q$  è lo spazio totale di un fibrato  $\mathbf{G}$ -principale la cui base è l'integrale massimale di  $\mathfrak{D}_V(M)$  per il punto  $p_0 = \pi(\sigma_0)$ . Per costruzione,  $N$  è una sottovarietà affine di  $M$ . Infatti il trasporto parallelo in  $M$  lungo le curve con supporto in  $N$  di vettori tangenti ad  $N$  sono le curve  $\tilde{\gamma}v$  con  $\tilde{\gamma}$  orizzontale e con supporto in  $Q$  e  $v \in V$ , e sono quindi a valori in  $TN$ .  $\square$

La struttura affine di  $N$  è descritta dalla Proposizione XX.2.2. La sua ologonomia è un sottogruppo del gruppo delle restrizioni a  $V$  degli elementi di  $\mathbf{G}$ .

### XX.9. Decomponibilità e teorema di de Rham

Sia  $M$  una varietà differenziabile affine, connessa, e con una connessione simmetrica. Fissiamo un suo fibrato d'ologonomia  $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ , con gruppo strutturale  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ . Denotiamo con  $\mathfrak{g}$  l'algebra di Lie di  $\mathbf{G}$ .

**DEFINIZIONE XX.9.1.** Diciamo che  $M$  è *decomponibile* se l'azione naturale di  $\mathbf{G}$  su  $\mathbb{R}^m$  è decomponibile.

Sia  $\mathbb{R}^m = V_1 \oplus V_2$  una decomposizione di  $\mathbb{R}^m$  nella somma diretta di due sottospazi  $\mathbf{G}$ -invarianti. Indicheremo con  $\mathfrak{D}_{V_i}(P)$  e  $\mathfrak{D}_{V_i}(M)$ , per  $i = 1, 2$ , le distribuzioni involutive su  $P$  e su  $M$  associate al sottospazio  $\mathbf{G}$ -invariante  $V_i$ .

**LEMMA XX.9.2.** *Abbiamo*

$$\omega([v_1^*, w_1^*])v_2 = 0, \quad \omega([v_2^*, w_2^*])v_1 = 0, \quad \forall v_1, w_1 \in V_1, \forall v_2, w_2 \in V_2.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $v_1, w_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ . Poiché la forma di torsione  $\Theta$  è nulla, dall'equazione di struttura  $D\Theta = \Omega \wedge \theta$  ricaviamo che

$$(20.9.1) \quad \omega([v_1^*, v_2^*])w_1 + \omega([v_2^*, w_1^*])v_1 + \omega([w_1^*, v_1^*])v_2 = 0.$$

Poiché  $V_1$  e  $V_2$  sono  $\mathfrak{g}$ -invarianti, otteniamo  $\omega([w_1^*, v_1^*])(V_2) \subset V_1 \cap V_2 = \{0\}$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE XX.9.3.** *Sia  $M_1$  una sottovarietà integrale di  $\mathfrak{D}_{V_1}(M)$ ,  $p_0$  un punto di  $M_1$  e  $\sigma_0$  un riferimento in  $P_{p_0}$ . Sia  $\mathbf{G}_1^0$  il gruppo di ologonomia ristretta in  $\sigma_0$  del fibrato  $P|_{M_1} \xrightarrow{\pi} M_1$ . Risulta allora  $a(v) = v$  per ogni  $v \in V_2$  e per ogni  $a \in \mathbf{G}_1^0$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per il teorema di Ambrose-Singer l'algebra di Lie di  $\mathbf{G}_1^0$  è generata dagli elementi della forma  $\omega([v_1^*, w_1^*]_\sigma)$  al variare di  $v_1, w_1$  in  $V_1$  e di  $\sigma$  nel fibrato di ologonomia di  $M_1$  per  $\sigma_0$ . La tesi è quindi conseguenza del Lemma XX.9.2.  $\square$

**PROPOSIZIONE XX.9.4.** *Supponiamo inoltre che  $(M, g)$  sia una varietà Riemanniana con la connessione di Levi-Civita. Allora*

$$[v_1^*, v_2^*] = 0, \quad \forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$



DIMOSTRAZIONE. Fissiamo  $v_2 \in V_2$ ,  $\sigma \in P$ , e definiamo, per ogni  $v \in V_1$ ,  $A(v) = \omega([v^*, v_2^*]_\sigma)$ . Per il LemmaXX.9.2 e la (20.9.1) è  $A(v)w = A(w)v$  per ogni  $v, w \in V_1$ . Otteniamo allora

$$\begin{aligned} (A(v)w|z) &= (A(w)v|z) = -(v|A(w)z) = -(v|A(z)w) = (A(z)v|w) = (A(v)z|w) \\ &= -(A(v)w|z), \quad \forall v, w, z \in V_1. \end{aligned}$$

e quindi  $A(v)w = 0$  per ogni  $v, w \in V_1$ . Questo ci dice che  $\omega(v_1^*, v_2^*)w = 0$  per ogni  $v_1, w \in V_1$  e  $v_2 \in V_2$ . Con ragionamento analogo dimostriamo che  $\omega(v_1^*, v_2^*)w = 0$  per ogni  $v_1 \in V_1$  e  $v_2, w \in V_2$ . Quindi  $\omega(v_1^*, v_2^*) = 0$ . Poiché la connessione di Levi-Civita è priva di torsione, otteniamo la tesi.  $\square$

Poniamo

$$(20.9.2) \quad \begin{cases} \mathfrak{g}_1 = \{X \in \mathfrak{g} \mid Xv_2 = 0, \forall v_2 \in V_2\}, \\ \mathfrak{g}_2 = \{X \in \mathfrak{g} \mid Xv_1 = 0, \forall v_1 \in V_1\}. \end{cases}$$

PROPOSIZIONE XX.9.5. (1) *La sottoalgebra  $\mathfrak{g}_i$  è generata dagli elementi  $[v_i^*, w_i^*]_\sigma$  al variare di  $v_i, w_i$  in  $V_i$  e di  $\sigma$  in  $P$ .*

(2)  *$\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  sono ideali di  $\mathfrak{g}$  ed abbiamo la decomposizione*

$$(20.9.3) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione è una conseguenza immediata del LemmaXX.9.2.

Se  $v_1, w_1 \in V_1$ ,  $v_2, w_2 \in V_2$ , abbiamo

$$\begin{aligned} [[v_1^*, w_1^*], [v_2^*, w_2^*]] &= [[[v_1^*, w_1^*], v_2^*], w_2^*] + [v_2^*, [[v_1^*, w_1^*], w_2^*]] \\ &= [[[v_1^*, v_2^*], w_1^*], w_2^*] + [[v_1^*, [w_1^*, v_2^*]], w_2^*] \\ &\quad + [v_2^*, [[v_1^*, w_2^*], w_1^*]] + [v_2^*, [v_1^*, [w_1^*, w_2^*]]] = 0 \end{aligned}$$

e quindi  $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = 0$  e  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  sono ideali di  $\mathfrak{g}$ .

Per il Teorema di Ambrose-Singer,  $\mathfrak{g}$  è generata dagli elementi  $[v^*, w^*]_\sigma$  al variare di  $v, w$  in  $\mathbb{R}^m$  e di  $\sigma$  in  $P$ . Per la ProposizioneXX.9.4 è  $[v^*, w^*]_\sigma = [v_1^*, w_1^*]_\sigma + [v_2^*, w_2^*]_\sigma$  se  $v_1, w_1 \in V_1$ ,  $v_2, w_2 \in V_2$  e  $v = v_1 + v_2$ ,  $w = w_1 + w_2$ . Questo dimostra la (20.9.3).  $\square$

PROPOSIZIONE XX.9.6. *Se  $M$  è connesso e semplicemente connesso, allora  $\mathbf{G}$  è il prodotto diretto dei suoi sottogruppi normali*

$$\mathbf{G}_1 = \{a \in \mathbf{G} \mid a(v) = v, \forall v \in V_2\}, \quad \mathbf{G}_2 = \{a \in \mathbf{G} \mid a(v) = v, \forall v \in V_1\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $M$  è connesso e semplicemente connesso, il gruppo di ologonomia  $\mathbf{G}$  coincide con il gruppo d'ologonomia ristretto. La conclusione è quindi conseguenza della proposizione precedente.  $\square$

Dalle proposizioni XX.9.4 e XX.9.5 ricaviamo la

PROPOSIZIONE XX.9.7. *Abbiamo:*

(1) *Per  $i = 1, 2$  la distribuzione vettoriale  $\mathfrak{D}'_{V_i}(P)$  su  $P$  generata da  $\{X^* \mid X \in \mathfrak{g}_i\} + \{v^* \mid v \in V_i\}$  è involutiva.*

(2) *Il gruppo di ologonia ristretta di una sottovarietà integrale  $M_i$  di  $\mathfrak{D}_{V_i}(M)$  è contenuto in  $\mathbf{G}_i$ .*  $\square$

Fissiamo un punto  $p_0$  in  $M$  e siano  $M_i$  ( $i = 1, 2$ ) gli integrali completi delle distribuzioni vettoriali definite dalle sezioni dei fibrati  $T_{V_i}M = \{\sigma v \mid \sigma \in P, v \in V_i\}$ . Osserviamo che, se  $\sigma_0 \in P_0$ , allora  $\sigma_{i,0} : V_i \ni v \rightarrow \sigma_0 v \in T_{V_i}M$  sono sistemi di riferimento di  $M_i$  in  $p_0$ , per  $i = 1, 2$ . Siano  $P_i \xrightarrow{\pi_i} M_i$  i corrispondenti fibrati di ologonia passanti per il riferimento  $\sigma_{i,0}$ .

Indichiamo con  $\theta_i \in \Omega^1(P_i, V_i)$  la forma canonica e con  $\omega_i \in \Omega^1(P_i, \mathfrak{g}_i)$  la forma di Cartan della connessione di Levi-Civita di  $M_i$ . Sul prodotto  $P_1 \times P_2 \times P$  consideriamo la forma  $\eta = (\theta_1 \oplus \theta_2 - \theta, \omega_1 \oplus \omega_2 - \omega) \in \Omega^1(P_1 \times P_2 \times P, \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$ .

LEMMA XX.9.8. *ker  $\eta$  è una distribuzione involutiva su  $P_1 \times P_2 \times P$ .*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che  $\ker \eta$  è la distribuzione generata dallo spazio vettoriale

$\{(v_1^*, v_2^*, v^*; X_1^*, X_2^*, X^*) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v = v_1 + v_2, X_1 \in \mathfrak{g}_1, X_2 \in \mathfrak{g}_2, X = X_1 + X_2\}$   
e quindi è involutiva per le proposizioni XX.9.4 e XX.9.5.  $\square$

Sia  $\varpi : P_1 \times P_2 \times P \ni (\sigma_1, \sigma_2, \sigma) \rightarrow (\pi_1(\sigma_1), \pi_2(\sigma_2), \pi(\sigma)) \in M_1 \times M_2 \times M$  la proiezione naturale. Sia  $Q$  l'integrale totale di  $\ker \eta$  per il punto  $(\sigma_{1,0}, \sigma_{2,0}, \sigma_0)$ .

LEMMA XX.9.9. *La proiezione  $N = \varpi(Q)$  è una sottovarietà differenziabile di  $M_1 \times M_2 \times M$ . Le proiezioni  $N \ni (p_1, p_2, p) \rightarrow (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$  ed  $N \ni (p_1, p_2, p) \rightarrow p \in M$  sono diffeomorfismi locali.*  $\square$

COROLLARIO XX.9.10. *Possiamo allora trovare intorno aperti  $U_1, U_2, U$  di  $p_0$  in  $M_1, M_2, M$  tale che vi sia un'isometria  $f : U_1 \times U_2 \rightarrow M$  tale che  $f(p, p_0) = p$  per ogni  $p \in U_1$  ed  $f(p_0, p) = p$  per ogni  $p \in U_2$ .*  $\square$

TEOREMA XX.9.11. *Se  $M$  è connessa, semplicemente connessa e completa, allora vi è una ed una sola isometria  $f : M_1 \times M_2 \rightarrow M$  tale che  $f(p, p_0) = p$  per ogni  $p \in M_1$  ed  $f(p_0, p) = p$  per ogni  $p \in M_2$ . Le sottovarietà affini  $M_1$  ed  $M_2$  di  $M$  sono anch'esse connesse, semplicemente connesse e complete.*

DIMOSTRAZIONE. Si costruisca  $Q$  come sopra, sostituendo ad  $M_1$  e ad  $M_2$  i loro rivestimenti universali  $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2$ . La costruzione ci dà rivestimenti connessi  $N \rightarrow \tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$  ed  $N \rightarrow M$ , che sono diffeomorfismi perché  $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$  ed  $M$  sono semplicemente connessi. Otteniamo quindi un diffeomorfismo di  $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$  su  $M$  con grafico  $N$ . Poiché  $M_1$  ed  $M_2$  sono le immagini di  $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2$ , ne segue che  $\tilde{M}_1 = M_1, \tilde{M}_2 = M_2$ .  $\square$

Il gruppo di ologonia  $\mathbf{G}$  di  $(M, g)$  è compatto e quindi la sua rappresentazione su  $\mathbb{R}^m$  è completamente decomponibile. Otteniamo quindi, costruendo le sottovarietà affini  $M_0, M_1, \dots, M_k$  corrispondenti alle componenti  $V_0$  su cui  $\mathbf{G}$  opera banalmente ed alle rappresentazioni irriducibili  $V_1, \dots, V_k$ , il

TEOREMA XX.9.12 (de Rham). *Ogni varietà Riemanniana  $(M, g)$  connessa, semplicemente connessa e completa è decomponibile in un prodotto  $(M_0, g_0) \times$*

$(M_1, g_1) \times \cdots \times (M_k, g_k)$  di una varietà Euclidea  $(M_0, g_0)$  e di  $k$  varietà Riemanniane irriducibili  $(M_1, g_1), \dots, (M_k, g_k)$ .  $\square$



## Immersioni, isometrie, campi di Killing

### XXI.1. Immersioni pseudo-Riemanniane

**XXI.1.1. Sottofibrati con sottogruppo strutturale riduttivo e connessione indotta.** Siano  $\xi_G = (P_G \xrightarrow{\pi_G} M)$  un fibrato principale con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$  e  $\xi_H = (P_H \xrightarrow{\pi_H} M)$  un suo sottofibrato principale, con gruppo strutturale  $\mathbf{H} < \mathbf{G}$ . Indichiamo con  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{g}$  le rispettive algebre di Lie.

**DEFINIZIONE XXI.1.1.** Diciamo che  $\mathbf{H}$  è *riduttivo in*  $\mathfrak{g}$  se  $\mathfrak{h}$  ammette in  $\mathfrak{g}$  un complemento  $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante, se cioè possiamo trovare un sottospazio vettoriale  $\mathfrak{m}$  di  $\mathfrak{g}$  tale che

$$(21.1.1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{Ad}(h)(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} \quad \forall h \in \mathbf{H}.$$

Indichiamo con  $\text{pr}_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  la proiezione su  $\mathfrak{h}$  associata alla decomposizione (21.1.1). Poiché  $\text{pr}_{\mathfrak{h}}$  commuta con  $\text{Ad}(h)$  per ogni  $h \in \mathbf{H}$ , vale la

**PROPOSIZIONE XXI.1.2.** Se  $\omega_{\mathfrak{g}} \in \Omega^1(P_G, \mathfrak{g})$  è la forma di Cartan di una connessione principale su  $\xi_G$ , allora  $\omega_{\mathfrak{h}} = \text{pr}_{\mathfrak{h}} \circ \iota^* \omega_{\mathfrak{g}} \in \Omega^1(P_H, \mathfrak{h})$  è la forma di Cartan di una connessione su  $\xi_H$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE XXI.1.3.** I sottogruppi compatti e i sottogruppi semisemplici sono riduttivi. Se  $\mathbf{H}$  è compatto o semisemplice, possiamo definire su  $\mathfrak{g}$  una forma bilineare simmetrica  $\beta$  invariante, tale cioè che

$$\beta([X_1, X_2], X_3) + \beta(X_2, [X_1, X_3]) = 0, \quad \forall X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{g},$$

e la cui restrizione su  $\mathfrak{h}$  sia non degenera. Possiamo allora scegliere  $\mathfrak{m}$  come l'ortogonale di  $\mathfrak{h}$  rispetto alla forma  $\beta$ .

**XXI.1.2. Una decomposizione canonica per i gruppi ortogonali.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  e  $g$  una forma bilineare simmetrica non degenera su  $V$ . Fissiamo una decomposizione ortogonale

$$(21.1.2) \quad V = U \oplus W, \quad U \perp W,$$

con  $\dim U = m > 0$ ,  $\dim W = k > 0$ ,  $m + k = n$ . I due sottospazi  $U$  e  $W$  sono anisotropi. Consideriamo i gruppi

$$\mathbf{O}_g(V) = \{a \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V) \mid g(a(v), a(v)) = g(v, v), \quad \forall v \in V\},$$

$$\mathbf{O}_g(U) = \{a \in \mathbf{O}_g(V) \mid a(w) = w, \quad \forall w \in W\},$$

$$\mathbf{O}_g(W) = \{a \in \mathbf{O}_g(V) \mid a(u) = u, \quad \forall u \in U\},$$

$$\mathbf{O}_g(U, W) = \{a \in \mathbf{O}_g(V) \mid a(U) = U, a(W) = W\} \simeq \mathbf{O}_g(U) \times \mathbf{O}_g(W).$$

Ciascuno dei sottogruppi  $\mathbf{O}_g(U)$ ,  $\mathbf{O}_g(W)$  ed  $\mathbf{O}_g(U, W)$  è riduttivo nell'algebra di Lie  $\mathfrak{so}(V)$  di  $\mathbf{O}_g(V)$ . Indichiamo con  $\mathfrak{so}(U)$ ,  $\mathfrak{so}(W)$ ,  $\mathfrak{so}(U, W)$  le loro algebre di Lie. La forma

$$(21.1.3) \quad \beta(X, Y) = \text{tr}(XY) \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{so}(V)$$

è non degenera ed invariante su  $\mathfrak{so}(V)$  e le sottoalgebre  $\mathfrak{so}(U)$ ,  $\mathfrak{so}(W)$ ,  $\mathfrak{so}(U, W)$  sono  $\beta$ -anisotrope. Abbiamo perciò decomposizioni  $\beta$ -ortogonali

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(V) &= \mathfrak{so}(U) \oplus \mathfrak{m}_U, & \text{con } \text{Ad}(\mathbf{O}_g(U))(\mathfrak{m}_U) &= \mathfrak{m}_U, \\ \mathfrak{so}(V) &= \mathfrak{so}(W) \oplus \mathfrak{m}_W, & \text{con } \text{Ad}(\mathbf{O}_g(W))(\mathfrak{m}_W) &= \mathfrak{m}_W, \\ \mathfrak{so}(V) &= \mathfrak{so}(U, W) \oplus \mathfrak{m}_{U,W}, & \text{con } \text{Ad}(\mathbf{O}_g(U, W))(\mathfrak{m}_{U,W}) &= \mathfrak{m}_{U,W}, \end{aligned}$$

con  $\mathfrak{m}_{U,W} = \mathfrak{m}_U \cap \mathfrak{m}_W$ , poiché  $\mathfrak{so}(U, W) = \mathfrak{so}(U) \oplus \mathfrak{so}(W)$ .

Possiamo dare una rappresentazione matriciale di questi oggetti scegliendo una base  $e_1, \dots, e_n$  di  $V$  per cui  $e_1, \dots, e_m$  sia una base di  $U$  ed  $e_{m+1}, \dots, e_n$  una base di  $W$ . In questa base

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} g_U & 0 \\ 0 & g_W \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{so}(V) &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{U,U} & X_{U,W} \\ X_{W,U} & X_{W,W} \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} {}^t X_{U,U} g_U + g_U X_{U,U} = 0, \\ {}^t X_{W,W} g_W + g_W X_{W,W} = 0, \\ {}^t X_{W,U} g_W + g_U X_{U,W} = 0 \end{array} \right. \right\}, \\ \mathfrak{so}(U) &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{U,U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left| {}^t X_{U,U} g_U + g_U X_{U,U} = 0 \right. \right\}, \\ \mathfrak{m}_U &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_{U,W} \\ X_{W,U} & X_{W,W} \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(V) \right\}, \\ \mathfrak{so}(W) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_{W,W} \end{pmatrix} \left| {}^t X_{W,W} g_W + g_W X_{W,W} = 0 \right. \right\}, \\ \mathfrak{m}_W &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{U,U} & X_{U,W} \\ X_{W,U} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(V) \right\}, \\ \mathfrak{so}(U, W) &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{U,U} & 0 \\ 0 & X_{W,W} \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(V) \right\}, \\ \mathfrak{m}_{U,W} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_{U,W} \\ X_{W,U} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(V) \right\}. \end{aligned}$$

**XXI.1.3. La nozione di immersione pseudo-Riemanniana.** Siano  $(M, g)$  ed  $(N, h)$  due varietà pseudo-Riemanniane.

DEFINIZIONE XXI.1.4. Un'immersione pseudo-Riemanniana è un'applicazione differenziabile  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  per cui sia  $g = f^*h$ , cioè

$$(21.1.4) \quad g_p(X, Y) = h(f_*(X_p), f_*(Y_p)), \quad \forall p \in M, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Poiché  $g$  è non degenera, abbiamo

PROPOSIZIONE XXI.1.5. Ogni immersione pseudo-Riemanniana è un'immersione differenziabile.  $\square$

OSSERVAZIONE XXI.1.6. Viceversa, se  $(N, h)$  è una varietà pseudo-Riemanniana, ed  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  un'immersione differenziabile, condizione necessaria e sufficiente affinché  $g = f^*h$  definisca una struttura pseudo-Riemanniana su  $M$  è che  $f_*T_pM$  sia anisotropo in  $(T_{f(p)}N, h_{f(p)})$  per ogni  $p \in M$ .

#### XXI.1.4. Fibrati e connessioni associati ad un'immersione sub-Riemanniana.

Sia  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  un'immersione sub-Riemanniana. Indichiamo con  $f^*TN$  il pullback su  $M$  del fibrato tangente di  $N$ :

$$f^*TN = \{(p, w) \in M \times TN \mid f(p) = \pi_N(w)\}.$$

DEFINIZIONE XXI.1.7. Il fibrato normale dell'immersione pseudo-Riemanniana  $f$  è il sottofibrato vettoriale di  $f^*TN$

$$(21.1.5) \quad NM = \{(p, w) \in f^*TN \mid w \perp T_pM\}.$$

Supponiamo che  $g, h$  abbiano in ogni punto segnatura  $(p_g, q_g), (p_h, q_h)$  con  $p_g \leq p_h, q_g \leq q_h, p_g + q_g = m, p_h + q_h = n = m + k$  e fissiamo una matrice simmetrica

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & \\ & b_2 \end{pmatrix}$$

con segnatura  $(p_h, q_h)$ , con  $b_1$  simmetrica con segnatura  $(p_g, q_g)$ ,  $b_2$  simmetrica con segnatura  $(p_h - p_g, q_h - q_g)$ . Introduciamo i fibrati principali con spazi totali

$$\mathbf{O}_b(N) = \bigcup_{q \in N} \{\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, T_qN) \mid {}^t v b v = h(\sigma(v), \sigma(v)), \forall v \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\mathbf{O}_b(M) = \bigcup_{p \in M} \{\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, T_{f(p)}N) \mid {}^t v b v = h(\sigma(v), \sigma(v)), \forall v \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\mathbf{O}_{b_1}(M) = \bigcup_{p \in M} \{\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, T_pM) \mid {}^t v b_1 v = g(\sigma(v), \sigma(v)), \forall v \in \mathbb{R}^m\},$$

$$\mathbf{O}_{b_2}(M) = \bigcup_{p \in M} \{\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^k, N_pM) \mid {}^t v b_2 v = h(\sigma(v), \sigma(v)), \forall v \in \mathbb{R}^k\},$$

$$\mathbf{O}_b(M, N) = \bigcup_{p \in M} \{\sigma \in \mathbf{O}_{b_p}(M) \mid \sigma(e_i) \in f_*T_pM, 1 \leq i \leq m\},$$

ove abbiamo indicato con  $e_1, \dots, e_n$  i vettori della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ .

Utilizzeremo la decomposizione canonica e le notazioni introdotte in §XXI.1.2, indicheremo con  $V$  la fibra tipica di  $TN$ , con  $U$  quella di  $TM$  e con  $W$  quella di  $NM$ . La connessione di Levi-Civita di  $(N, h)$  induce connessioni principali sui fibrati principali sopra descritti. Indicheremo con  $\omega$  la forma di Cartan su  $\mathbf{O}_b(N)$  e con  $\omega^\top, \omega^\vee, \omega^{\top, \vee}$  le connessioni affini sui fibrati  $\mathbf{O}_{b_1}(M), \mathbf{O}_{b_2}(M), \mathbf{O}_b(M, N)$ , rispettivamente. Su  $\mathbf{O}_b(M)$  abbiamo il pullback della connessione di Levi-Civita su  $N$ .

**XXI.1.5. La seconda forma fondamentale.**

NOTAZIONE XXI.1.8. Useremo le seguenti notazioni:

- $\text{pr}_\nu$  e  $\text{pr}_\tau$  sono le proiezioni ortogonali di  $f^*TN$  su  $NM$  e  $TM$ , rispettivamente,
- $\nabla^\tau$  indica la differenziazione covariante corrispondente alla connessione di Levi Civita su  $(M, g)$ ;
- $D$  indica la differenziazione covariante corrispondente alla connessione di Levi-Civita su  $(N, h)$ ;
- $\nabla^f$  è la derivazione covariante su  $f^*TS$  associata al pullback della connessione di Levi-Civita su  $(N, h)$ ;
- $\nabla^v$  è la derivazione covariante sul fibrato  $NM$  definita da  $\nabla_X^v Y = \text{pr}_\nu \nabla_X^f Y$  per  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $Y \in \Gamma(M, NM)$ ;
- $R, R^f, R^v$  sono i tensori di curvatura corrispondenti alla connessione di Levi-Civita di  $(M, g)$ , al pullback di quella di  $(S, h)$ , alla connessione lineare sul fibrato normale, rispettivamente.

LEMMA XXI.1.9. Se  $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $Y \in \Gamma(M, NM)$ , allora

$$(21.1.6) \quad \nabla_{X_1}^\tau X_2 = \text{pr}_\tau(\nabla_{X_1}^f X_2) \quad e \quad \nabla_X^v Y = \text{pr}_\nu(\nabla_X^f Y).$$

DIMOSTRAZIONE. Si verifica facilmente che la  $\nabla_{X_1}^\tau X_2 = \text{pr}_\tau(\nabla_{X_1}^f X_2)$ , per  $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ , definisce la derivazione covariante di una connessione affine simmetrica su  $M$ . Per dimostrare che  $\nabla' = \nabla^\tau$ , che cioè  $\nabla'$  coincide con la connessione di Levi-Civita di  $(M, g)$ , è sufficiente verificare che è pseudo-metrica. Per semplicità, possiamo supporre che  $M \subset N$ , identificando così  $TM$  ad un sottospazio di  $TN$ . Abbiamo allora  $\nabla_X^f Y = D_X Y$  se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ed  $Y$  un campo di vettori lungo  $M$ . È quindi

$$\begin{aligned} (\nabla_X' g)(X_1, X_2) &= Xg(X_1, X_2) - g(\nabla_X' X_1, X_2) - g(X_1, \nabla_X' X_2) \\ &= Xh(X_1, X_2) - h(\nabla_X' X_1, X_2) - h(X_1, \nabla_X' X_2) \\ &= Xh(X_1, X_2) - h(D_X X_1, X_2) - h(X_1, D_X X_2) = 0 \end{aligned}$$

perché  $D$  è una connessione pseudo-metrica su  $(N, h)$ .  $\square$

LEMMA XXI.1.10. Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , allora

$$(21.1.7) \quad \nabla_X^f Y = \nabla_Y^f X + [X, Y].$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  sono  $f$ -correlati a campi  $U, V \in \mathfrak{X}(S)$ , Allora  $\nabla_X Y, \nabla_Y X, [X, Y]$  sono  $f$ -correlati a  $D_U V, D_V U, [U, V]$ . La (21.1.7) è conseguenza del fatto che la connessione di Levi-Civita su  $S$  sia simmetrica. Utilizzando la partizione dell'unità e il fatto che (21.1.7) ha natura locale, possiamo ricondurre la dimostrazione al caso di coppie di campi di vettori che siano  $f$ -correlati a campi di vettori su  $S$ .  $\square$

Definiamo

$$(21.1.8) \quad \mathbb{I}(X, Y) = \text{pr}_N(\nabla_X^f Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$



PROPOSIZIONE XXI.1.11.  $\mathbb{I}$  è un tensore simmetrico a valori nel fibrato normale  $NM$ .

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza del Lemma XXI.1.10:

$$\mathbb{I}(X, Y) = \text{pr}_v(\nabla_X^f Y) = \text{pr}_v(\nabla_Y^f X + [X, Y]) = \text{pr}_v(\nabla_Y^f X) = \mathbb{I}(Y, X),$$

perché  $\text{pr}_v([X, Y]) = 0$ , per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .  $\square$

DEFINIZIONE XXI.1.12. Il tensore  $\mathbb{I} \in \text{Simm}^2(M, NM)$  si dice *la seconda forma fondamentale* dell'immersione pseudo-Riemanniana  $f$ .

Poiché  $f$  è un'isometria pseudo-Riemanniana, abbiamo

$$(21.1.9) \quad \nabla_X Y = \text{pr}_\tau(\nabla_X^f Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

e vale quindi la

PROPOSIZIONE XXI.1.13 (formula di Gauss). Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , allora

$$(21.1.10) \quad \nabla_X^f Y = \nabla_X Y + \mathbb{I}(X, Y). \quad \square$$

Utilizzando i tensori  $g$  ed  $h$ , possiamo ricavare da  $\mathbb{I}$  un nuovo tensore:

DEFINIZIONE XXI.1.14. Sia  $B \in \mathfrak{T}^{1,1}(M, N^*M)$  il tensore definito da

$$(21.1.11) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, NM) \ni (X, V) \rightarrow B_X V \in \mathfrak{X}(M), \\ g(B_X V, Y) = -h(\mathbb{I}(X, Y), V), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall V \in \Gamma(M, NM). \end{cases}$$

Esso serve ad esprimere la componente tangenziale della derivata covariante di un campo di vettori normali.

PROPOSIZIONE XXI.1.15 (equazione di Weingarten). Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $V \in \Gamma(M, NM)$ , allora

$$(21.1.12) \quad \nabla_X^f V = B_X V + \text{pr}_v(\nabla_X^f V).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $V \in \Gamma(M, NM)$ . Abbiamo

$$g(\nabla_X^f V, Y) = h(\nabla_X^f V, Y) = X(h(V, Y)) - h(V, \nabla_X^f Y) = -h(V, \mathbb{I}(X, Y)).$$

Quindi  $B_X V$  è la componente in  $TM$  di  $\nabla_X^f V$  ed otteniamo la (21.1.12).  $\square$

Siano  $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M)$ . Abbiamo

$$\nabla_{X_1}^f \nabla_{X_2}^f X_3 = \nabla_{X_1}^f (\nabla_{X_2} X_3 + \mathbb{I}(X_2, X_3)) = \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3 + \mathbb{I}(X_1, \nabla_{X_2} X_3) + \nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3)).$$

Calcoliamo la componente in  $TM$  di  $\nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3))$ . Per ogni  $X_4 \in \mathfrak{X}(M)$  otteniamo

$$\begin{aligned} h(\nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3)), X_4) &= X_1 h(\mathbb{I}(X_2, X_3), X_4) - h(\mathbb{I}(X_2, X_3), \nabla_{X_1}^f X_4) \\ &= -h(\mathbb{I}(X_2, X_3), \mathbb{I}(X_1, X_4)). \end{aligned}$$

Risulta perciò

$$(21.1.13) \quad \left\{ \begin{aligned} R^f(X_1, X_2)X_3 &= \nabla_{X_1}^f \nabla_{X_2}^f X_3 - \nabla_{X_2}^f \nabla_{X_1}^f X_3 - \nabla_{[X_1, X_2]}^f X_3 \\ &= \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3 - \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_3 - \nabla_{[X_1, X_2]} X_3 \\ &\quad + \mathbb{I}(X_1, \nabla_{X_2} X_3) - \mathbb{I}(X_2, \nabla_{X_1} X_3) - \mathbb{I}([X_1, X_2], X_3) \\ &\quad + \nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3)) - \nabla_{X_2}^f (\mathbb{I}(X_1, X_3)). \end{aligned} \right.$$

Se  $X_4 \in \mathfrak{X}(M)$  abbiamo allora

$$h(R^f(X_1, X_2)X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4) - h(\mathbb{I}(X_2, X_3), \mathbb{I}(X_1, X_4)) \\ + h(\mathbb{I}(X_1, X_3), \mathbb{I}(X_2, X_4)).$$

Ricordiamo la notazione

$$R^f(X_1, X_2, X_3, X_4) = h(R^f(X_1, X_2)X_3, X_4), \quad R(X_3, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4).$$

Abbiamo ottenuto

PROPOSIZIONE XXI.1.16 (Equazione di Gauss). *Se  $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M)$ , allora*

$$(21.1.14) \quad \left\{ \begin{aligned} R^f(X_1, X_2, X_3, X_4) &= R(X_1, X_2, X_3, X_4) \\ &\quad + h(\mathbb{I}(X_1, X_3), \mathbb{I}(X_2, X_4)) - h(\mathbb{I}(X_1, X_4), \mathbb{I}(X_2, X_3)). \end{aligned} \right.$$

Per le formule per la derivazione covariante sui fibrati vettoriali sugli spazi affini del §XV.12 del Capitolo XV, abbiamo:

$$\nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3)) = (\nabla_{X_1}^f \mathbb{I})(X_2, X_3) - \mathbb{I}(\nabla_{X_1} X_2, X_3) - \mathbb{I}(X_2, \nabla_{X_1} X_3).$$

Possiamo quindi riscrivere (21.1.13) nella forma

$$(21.1.15) \quad \left\{ \begin{aligned} R^f(X_1, X_2)X_3 &= R(X_1, X_2)X_3 + (\nabla_{X_1}^f \mathbb{I})(X_2, X_3) + \mathbb{I}(\nabla_{X_1} X_2, X_3) \\ &\quad - (\nabla_{X_2}^f \mathbb{I})(X_1, X_3) - \mathbb{I}(\nabla_{X_2} X_1, X_3) - \mathbb{I}([X_1, X_2], X_3) \\ &= R(X_1, X_2)X_3 + (\nabla_{X_1}^f \mathbb{I})(X_2, X_3) - (\nabla_{X_2}^f \mathbb{I})(X_1, X_3). \end{aligned} \right.$$

Da questa otteniamo

PROPOSIZIONE XXI.1.17 (Equazione di Codazzi-Mainardi). *Se  $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M)$  ed  $Y \in \Gamma(M, NM)$ , allora*

$$(21.1.16) \quad R^f(X_1, X_2, X_2, Y) = h((\nabla_{X_1}^f \mathbb{I})(X_2, X_3), Y) - h((\nabla_{X_2}^f \mathbb{I})(X_1, X_3), Y).$$

Siano ora  $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$  ed  $Y_1, Y_2 \in \Gamma(M, NM)$ . Abbiamo

$$h(\nabla_{X_1}^v \nabla_{X_2}^v Y_1, Y_2) = h(\nabla_{X_1}^f (\nabla_{X_2}^f Y_1 - B_{X_2} Y_1), Y_2) \\ = h(\nabla_{X_1}^f \nabla_{X_2}^f Y_1, Y_2) - h(\mathbb{I}(X_1, B_{X_2} Y_1), Y_2) \\ = h(\nabla_{X_1}^f \nabla_{X_2}^f Y_1, Y_2) + h(B_{X_1} Y_2, B_{X_2} Y_1).$$

Da questa uguaglianza ricaviamo

PROPOSIZIONE XXI.1.18 (Equazione di Ricci). Se  $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $Y_1, Y_2 \in \Gamma(M, NM)$ , allora

$$(21.1.17) \quad \begin{cases} h(R^v(X_1, X_2)Y_1, Y_2) = h(R^f(X_1, X_2)Y_1, Y_2) \\ \quad - h(B_{X_1}Y_1, B_{X_2}Y_2) + h(B_{X_1}Y_2, B_{X_2}Y_1). \end{cases}$$

### XXI.2. Proprietà algebriche del tensore di curvatura

Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione finita  $n$ .

DEFINIZIONE XXI.2.1. Una *tensore algebrico di curvatura* è una forma bilineare simmetrica

$$(21.2.1) \quad R : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \rightarrow \mathbb{R}$$

per cui valga l'*identità algebrica di Bianchi*:

$$(21.2.2) \quad R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) + R(v_1, v_4, v_2, v_3) = 0 \\ \forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V.$$

Abbiamo posto qui

$$(21.2.3) \quad R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1 \wedge v_2, v_3 \wedge v_4) \quad \text{per } v_1, v_2, v_3, v_4 \in V.$$

In modo equivalente, possiamo dire che  $R$  è una forma quadri-lineare che soddisfa le proprietà :

$$(i) \quad R(v_2, v_1, v_3, v_4) = -R(v_1, v_2, v_3, v_4) \\ (ii) \quad R(v_1, v_2, v_4, v_3) = -R(v_1, v_2, v_3, v_4) \\ (iii) \quad R(v_3, v_4, v_1, v_2) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) \\ (iv) \quad R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) + R(v_1, v_4, v_2, v_3) = 0 \\ \forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V.$$

Notiamo che (i) e (iii) implicano (ii) e che (iii) è una conseguenza di (i), (ii), (iv).

DEFINIZIONE XXI.2.2. L'insieme  $\mathfrak{R}(V)$  dei tensori di curvatura su  $V$  è un sotto-spazio vettoriale dello spazio  $T^{[0,4]}V$  dei tensori 0-covarianti e 4-contovarianti su  $V$ .

Vale il

LEMMA XXI.2.3. Siano  $R, R' \in \mathfrak{R}(V)$ . Allora

$$(21.2.4) \quad R(v_1, v_2, v_1, v_2) = R'(v_1, v_2, v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \implies R = R'.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare il lemma nel caso sia  $R' = 0$ . Utilizziamo le formule di polarizzazione per forme bilineari simmetriche: fissato  $v_0 \in V$ , la forma bilineare simmetrica  $V \times V \ni (u, v) \rightarrow R(u, v_0, v, v_0) \in \mathbb{R}$  è nulla in quanto è nulla la forma quadratica associata.

Quindi, per ogni coppia  $v_1, v_3 \in V$  anche la forma bilineare simmetrica  $V \times V \ni (u, v) \rightarrow R(v_1, u, v_3, v) + R(v_3, u, v_1, v) \in \mathbb{R}$  è nulla in quanto è nulla la forma quadratica ad essa associata.

Applicando le proprietà (iii) e (ii) otteniamo:

$$0 = R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_4, v_3, v_2) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) - R(v_1, v_4, v_2, v_3).$$

Quindi, per ogni  $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$  abbiamo:

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1, v_4, v_2, v_3) = R(v_1, v_3, v_4, v_2)$$

da cui:

$$3R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) + R(v_1, v_4, v_2, v_3) = 0.$$

La dimostrazione è completa.  $\square$

Fissiamo su  $V$  un prodotto scalare  $(\cdot | \cdot)$ . Esso determina univocamente un prodotto scalare su  $\Lambda^2 V$  tale che, per ogni base ortonormale  $\{e_1, \dots, e_n\}$  di  $V$ , la  $\{e_i \wedge e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$  sia una base ortonormale in  $\Lambda^2 V$ . Per la norma associata risulta

$$(21.2.5) \quad |v_1 \wedge v_2|^2 = |v_1|^2 |v_2|^2 - (v_1 | v_2)^2, \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

OSSERVAZIONE XXI.2.4. Il secondo membro della (21.2.5) è il quadrato dell'area del parallelogramma di lati  $v_1, v_2$ . Infatti, l'altezza relativa alla base  $v_1$  è  $\left| v_2 - \frac{(v_1 | v_2)}{|v_1|^2} v_1 \right|$  e quindi il quadrato dell'area è

$$|v_1|^2 \cdot \left| v_2 - \frac{(v_1 | v_2)}{|v_1|^2} v_1 \right|^2 = |v_1|^2 |v_2|^2 - (v_1 | v_2)^2.$$

Per il prodotto scalare vale la formula

$$(21.2.6) \quad (v_1 \wedge v_2 | v_3 \wedge v_4) = (v_1 | v_3)(v_2 | v_4) - (v_1 | v_4)(v_2 | v_3), \quad \forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V.$$

LEMMA XXI.2.5. *Il prodotto scalare (21.2.6) è un tensore algebrico di curvatura.*

DIMOSTRAZIONE. Occorre verificare che il prodotto scalare (21.2.6) su  $\Lambda^2 V$  verifichi l'identità di Bianchi. Abbiamo

$$(v_1 \wedge v_2 | v_3 \wedge v_4) = (v_1 | v_3)(v_2 | v_4) - (v_1 | v_4)(v_2 | v_3),$$

$$(v_1 \wedge v_3 | v_4 \wedge v_2) = (v_1 | v_4)(v_2 | v_3) - (v_1 | v_2)(v_3 | v_4),$$

$$(v_1 \wedge v_4 | v_2 \wedge v_3) = (v_1 | v_2)(v_3 | v_4) - (v_1 | v_3)(v_2 | v_4)$$

e sommando membro a membro otteniamo la (21.2.2).  $\square$

Fissato un prodotto scalare su  $V$ , possiamo associare ad ogni tensore algebrico di curvatura  $R$  una funzione reale definita sui 2-piani  $\alpha$  di  $V$ , ponendo

$$(21.2.7) \quad K^R(\alpha) = \frac{R(v_1, v_2, v_2, v_1)}{(v_1 | v_1)(v_2 | v_2) - (v_1 | v_2)^2} \quad \text{se } \langle v_1, v_2 \rangle = \alpha.$$

La (21.2.7) si semplifica nella

$$(21.2.8) \quad K^R(\alpha) = R(v_1, v_2, v_2, v_1) \quad \text{se } v_1, v_2 \text{ è una base ortonormale di } \alpha.$$

DEFINIZIONE XXI.2.6. La  $K^R(\alpha)$ , definita dalla (21.2.7), si dice la *curvatura sezionale*.

Per il Lemma XXI.2.3 la curvatura sezionale determina completamente il relativo tensore di curvatura.

La curvatura sezionale è costante ed uguale a  $-1$  per il prodotto scalare di  $\Lambda^2 V$ . Per il Lemma XXI.2.3 abbiamo

PROPOSIZIONE XXI.2.7. *Una forma algebrica di curvatura che abbia curvatura sezionale costante è un multiplo del prodotto scalare su  $\Lambda^2 V$ .*  $\square$

DEFINIZIONE XXI.2.8. La *contrazione di Ricci* è l'applicazione  $\mathbf{O}(V)$ -equivariante

$$(21.2.9) \quad \mathcal{R}ic : \mathfrak{R}(V) \ni R \longrightarrow S_R \in S^2(V), \quad \text{con } S_R(v, w) = \text{tr } R(v, \cdot, w, \cdot),$$

ove la traccia si calcola, a partire da una qualsiasi base ortonormale  $e_1, \dots, e_n$  di  $V$  mediante

$$\text{tr } R(v, \cdot, w, \cdot) = \sum_{i=1}^n R(v, e_i, w, e_i).$$

La forma  $S_R$  si dice il *tensore di Ricci* associato al tensore di curvatura  $R$ .

OSSERVAZIONE XXI.2.9. Fissato un vettore  $v \in V$ , con  $(v|v) = 1$ , possiamo determinare vettori  $v_2, \dots, v_n$  che formino con  $v_1 = v$  una base ortonormale. Detto  $\alpha_i$ , per  $i = 2, \dots, n$  il piano generato da  $v$  e  $v_i$ , abbiamo allora:

$$(21.2.10) \quad S_R(v, v) = \sum_{i=2}^n K(\alpha_i).$$

DEFINIZIONE XXI.2.10. Chiamiamo *curvatura scalare* di  $R \in \mathfrak{R}(V)$  la traccia del suo tensore di Ricci

$$(21.2.11) \quad s_R = \text{tr}(\mathcal{R}ic(R)) = \sum_{i,j=1}^n R(e_i, e_j, e_i, e_j),$$

ove  $e_1, \dots, e_n$  è una qualsiasi base ortonormale di  $V$ .

OSSERVAZIONE XXI.2.11. La curvatura scalare è il doppio della traccia di  $R$  considerato come una forma bilineare simmetrica su  $\Lambda^2 V$ .

DEFINIZIONE XXI.2.12 (Prodotto di Kulkarni-Nomizu). Il *prodotto di Kulkarni-Nomizu*  $s_1 \otimes s_2$  di due forme bilineari simmetriche  $s_1, s_2$  su  $V$  è il tensore 4-controvariante definito da

$$(21.2.12) \quad \begin{aligned} s_1 \otimes s_2(v_1, v_2, w_1, w_2) &= \sum_{h,k \in S_2} \varepsilon(h)\varepsilon(k) s_1(v_{h_1}, w_{k_1}) s_2(v_{h_2}, w_{k_2}) \\ &= s_1(v_1, w_1) s_2(v_2, w_2) + s_1(v_2, w_2) s_1(v_1, w_1) \\ &\quad - s_1(v_1, w_2) s_2(v_2, w_1) - s_1(v_2, w_1) s_2(v_1, w_2). \end{aligned}$$

LEMMA XXI.2.13. *Il prodotto  $s_1 \otimes s_2$  di due forme  $s_1, s_2 \in S^2(V)$  è un tensore algebrico di curvatura.*

DIMOSTRAZIONE. Si verifica con calcolo diretto che  $s_1 \otimes s_2$  soddisfa le (i), (ii), (iii), (iv) della Definizione XXI.2.1.  $\square$

OSSERVAZIONE XXI.2.14. Se indichiamo con  $g$  il prodotto scalare di  $V$ , e con  $G$  il suo corrispondente su  $\Lambda^2 V$ , abbiamo

$$G = \frac{1}{2} g \otimes g.$$

LEMMA XXI.2.15. *Sia  $s$  una forma bilineare simmetrica su  $V$ . Allora*

$$(21.2.13) \quad \mathcal{R}ic(s \otimes g) = (n-2)s + \text{tr}(s) \cdot g.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $e_1, \dots, e_n$  una base ortonormale di  $V$ . Allora :

$$\begin{aligned} S_{s \otimes g}(v_1, v_2) &= \sum_{i=1}^n (s \otimes g)(v_1, e_i, v_2, e_i) = \sum_{i=1}^n (s(v_1, v_2)g(e_i, e_i) + s(e_i, e_i)g(v_1, v_2) \\ &\quad - s(v_1, e_i)g(v_2, e_i) - s(v_2, e_i)g(v_1, e_i)) \\ &= n s(v_1, v_2) + \text{tr}(s)g(v_1, v_2) - s(v_1, v_2) - s(v_2, v_1) \\ &= (n-2)s(v_1, v_2) + \text{tr}(s)g(v_1, v_2). \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE XXI.2.16. In particolare,

$$(21.2.14) \quad \mathcal{R}ic(g \otimes g) = 2(n-1)g.$$

Se  $R \in \mathfrak{R}(V)$  ed  $S_R$  il suo tensore di Ricci, abbiamo

$$\mathcal{R}ic(R - a S_R \otimes g + b g \otimes g) = (1 - a(n-2))S_R + (2b(n-1) - a S_R)g.$$

Se  $n \geq 3$ , possiamo porre  $a = (n-2)^{-1}$  e  $b = S_R \frac{1}{2(n-1)(n-2)}$ . Otteniamo così un tensore di curvatura

$$(21.2.15) \quad W_R = R - \frac{1}{n-2}S_R \otimes g + \frac{1}{2(n-1)(n-2)}S_R \cdot g \otimes g \in \ker \mathcal{R}ic.$$

DEFINIZIONE XXI.2.17. Si chiamano *tensori di Weyl* i tensori di curvatura  $W$  che hanno contrazione di Ricci nulla. Il tensore  $W_R$  di (21.2.15) si dice la *parte di Weyl* di  $R$ .

La differenza  $z_R = S_R - \frac{1}{n}S_R \cdot g$  si dice il *tensore di Ricci a traccia nulla* di  $R$ .

Abbiamo

$$(21.2.16) \quad R = \frac{-1}{2(n-1)(n-2)}S_R \cdot g \otimes g + \frac{1}{n-2}S_R \otimes g + W_R$$

$$(21.2.17) \quad R = \frac{1}{2n(n-1)}S_R \cdot g \otimes g + \frac{1}{n-2}z_R \otimes g + W_R$$

La (21.2.17) è la *decomposizione irriducibile del tensore algebrico di curvatura*.

TEOREMA XXI.2.18 (decomposizione algebrica del tensore di curvatura). *Sia  $R$  un tensore algebrico di curvatura sullo spazio vettoriale reale  $V$ , di dimensione  $n > 2$ . Sono allora univocamente determinati: un numero reale  $s$  (curvatura scalare), una forma bilineare simmetrica  $S_R$  (curvatura di Ricci), una forma bilineare simmetrica con traccia nulla  $z_R$ , e una forma di curvatura  $W$  (la curvatura di Weyl) con  $S_W = 0$  tali che valgano le decomposizioni (21.2.16), (21.2.17).*

*Se  $n = 2$ , abbiamo  $R = \frac{1}{2} \cdot s \cdot g \otimes g$ . Se  $n = 3$ , allora  $W = 0$ .*

### XXI.3. La curvatura sezionale

Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana di dimensione  $n \geq 2$ . Definiamo il *tensore di curvatura* su  $M$  mediante :

$$(21.3.1) \quad \begin{aligned} R(X_1, X_2, X_3, X_4) &= g(R(X_3, X_4)X_1, X_2), \\ \forall X_1, X_2, X_3, X_4 &\in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

PROPOSIZIONE XXI.3.1. *Il tensore di curvatura definisce in ogni punto di  $M$  un tensore algebrico di curvatura.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo facilmente

$$R(X_1, X_2, X_4, X_4) = -R(X_1, X_2, X_3, X_4).$$

Osserviamo poi che, essendo nulla la torsione della connessione di Levi-Civita :

$$\begin{aligned} & R(X_1, X_2)X_3 + R(X_2, X_3)X_1 + R(X_3, X_1)X_2 \\ &= \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3 - \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_3 - \nabla_{[X_1, X_2]} X_3 \\ &+ \nabla_{X_2} \nabla_{X_3} X_1 - \nabla_{X_3} \nabla_{X_2} X_1 - \nabla_{[X_2, X_3]} X_1 \\ &+ \nabla_{X_3} \nabla_{X_1} X_2 - \nabla_{X_1} \nabla_{X_3} X_2 - \nabla_{[X_3, X_1]} X_2 \\ &= \nabla_{X_1} [X_2, X_3] + \nabla_{X_2} [X_3, X_1] + \nabla_{X_3} [X_1, X_2] \\ &- \nabla_{[X_1, X_2]} X_3 - \nabla_{[X_2, X_3]} X_1 - \nabla_{[X_3, X_1]} X_2 \\ &= [X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0 \end{aligned}$$

Da questa ricaviamo l'identità di Bianchi :

$$\begin{aligned} & R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_1, X_4, X_2, X_3) + R(X_1, X_3, X_4, X_2) = 0 \\ & \forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che  $R(X_2, X_1, X_3, X_4) = -R(X_1, X_2, X_3, X_4)$ . A questo scopo è sufficiente verificare che  $R(X_1, X_1, X_3, X_4) = 0$  per ogni  $X_1, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M)$ . Abbiamo :

$$\begin{aligned} R(X_1, X_1, X_3, X_4) &= g(R(X_3, X_4)X_1, X_1) \\ &= g((\nabla_{X_3} \nabla_{X_4} - \nabla_{X_4} \nabla_{X_3} - \nabla_{[X_3, X_4]}) X_1, X_1) \\ &= X_3 g(\nabla_{X_4} X_1, X_1) - g(\nabla_{X_4} X_1, \nabla_{X_3} X_1) \\ &- X_4 g(\nabla_{X_3} X_1, X_1) + g(\nabla_{X_3} X_1, \nabla_{X_4} X_1) \\ &- \frac{1}{2} [X_3, X_4] g(X_1, X_1) \\ &= \frac{1}{2} X_3 X_4 g(X_1, X_1) - \frac{1}{2} X_4 X_3 g(X_1, X_1) \\ &- \frac{1}{2} [X_3, X_4] g(X_1, X_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo verificato le proprietà (i), (ii) e (iv) di un tensore algebrico di curvatura e segue quindi che vale anche la proprietà (iii), cioè che

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = R(X_3, X_4, X_1, X_2) \quad \text{per ogni } X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M).$$

In particolare è anche  $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4)$ .  $\square$

Sia  $p \in M$ . Per ogni piano  $\alpha \subset T_p M$ , definiamo la *curvatura sezionale* di  $M$  rispetto al piano  $\alpha$  come la quantità  $K(\alpha)$  relativa al tensore algebrico di curvatura

$R_p$ :

$$(21.3.2) \quad K(\alpha) = \frac{-R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{\|v_1 \wedge v_2\|^2} = \frac{-R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{g(v_1, v_1)g(v_2, v_2) - |g(v_1, v_2)|^2} \quad \text{se } \alpha = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Fissato il punto  $p$ , l'esponenziale  $\exp_p$  definisce un diffeomorfismo di un intorno convesso  $N_0(p)$  di  $0$  in  $p$  su un intorno normale  $U_p$  di  $p$  in  $M$ . Inoltre, per un  $r_0 > 0$ , l'esponenziale trasforma, per ogni  $0 < r \leq r_0$ , la palla  $B_p(0, r)$  di centro  $0$  e raggio  $r$  di  $T_p M$  rispetto alla metrica definita dal prodotto scalare  $g_p$  nella palla  $B_p(r)$  della distanza definita dalla metrica Riemanniana su  $M$ . Consideriamo un 2-piano  $\alpha \subset T_p M$ . L'immagine  $\exp_p(\alpha \cap N_0(p))$  è una sottovarietà  $V_\alpha$  di  $U_p$  di dimensione reale 2, su cui la restrizione di  $g$  definisce una metrica Riemanniana. Utilizzando tale metrica possiamo calcolare l'area  $A(r)$  di  $V_\alpha \cap B_p(r)$  per  $0 < r \leq r_0$ . Avremo  $A(r) = \pi r^2 + o(r^2)$  per  $r \searrow 0$ . La curvatura sezionale misura il modo in cui  $A(r)$  approssima l'area del disco piano dello stesso raggio :

$$(21.3.3) \quad K(\alpha) = 12 \cdot \lim_{r \searrow 0} \frac{\pi r^2 - A(r)}{\pi r^4}.$$



## Operatori differenziali sulle varietà Riemanniane

### XXII.1. Elemento di volume ed operatore di Hodge

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$ . Ad una forma  $\omega \in \Omega^m(M)$  possiamo associare una funzione

$$(22.1.1) \quad L(M) \ni \sigma \longrightarrow \omega(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathbb{R},$$

ove  $\sigma_i = \sigma(e_i) \in T_{\pi(\sigma)}M$ , per la base canonica  $e_1, \dots, e_m$  di  $\mathbb{R}^m$ . La (22.1.1) definisce una sezione del fibrato in rette che corrisponde alla rappresentazione determinante  $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \ni a \rightarrow \det a \in \mathbb{R}_*$ , e stabilisce un isomorfismo di  $\Omega^m(M)$  con  $\Omega_{\det}^0(L(M))$ .

Una *densità positiva* su  $M$  è localmente il valore assoluto di una  $m$ -forma. Possiamo definirla in modo invariante come una funzione  $\mu$ , definita sullo spazio  $L(M)$  dei sistemi di riferimento di  $M$ .

DEFINIZIONE XXII.1.1. Una *densità* di classe  $\mathcal{C}^\infty$  su  $M$  è una funzione  $\mu \in \mathcal{C}^\infty(L(M))$  che soddisfa

$$(22.1.2) \quad \mu(\sigma a) = |\det a| \cdot \mu(\sigma), \quad \forall \sigma \in L(M), \forall a \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}).$$

Ad una densità  $\mu$  di classe  $\mathcal{C}^\infty$  su  $M$  possiamo associare una misura regolare. Se  $(U, x)$  è una carta locale in  $M$  ed  $f$  una funzione continua con supporto compatto in  $U$  definiamo

$$\int f d\mu = \int f(x) \mu(\partial/\partial x) d\lambda(x),$$

dove  $\partial/\partial x$  è la sezione  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m})$  di  $L(M)$  su  $U$  e  $d\lambda$  la misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}^m$ . La definizione si estende, mediante partizione dell'unità, a tutte le funzioni continue a supporto compatto su  $M$ .

Sia  $(M, g)$  una varietà pseudo-Riemanniana.

DEFINIZIONE XXII.1.2. L'*elemento di volume* di  $(M, g)$  è la *densità*  $\mu_g$  definita da

$$(22.1.3) \quad \mu_g(\sigma) = \sqrt{|\det g(\sigma_i, \sigma_j)|}, \quad \forall \sigma \in L(M).$$

DEFINIZIONE XXII.1.3. Se  $M$  è orientata, definiamo *forma di volume* di  $(M, g)$  l'unico elemento  $\omega_g \in \Omega^m(M)$  che definisce l'orientazione di  $M$  e soddisfa

$$(22.1.4) \quad \mu_g(\sigma) = |\omega_g(\sigma_1, \dots, \sigma_m)|, \quad \forall \sigma \in L(M).$$

Ricordiamo che abbiamo esteso la pseudo-metrica ai fibrati tensoriali di  $M$ , in particolare alle forme differenziali esterne. Sulle forme di grado zero si tratta

semplicemente del prodotto di numeri reali. Le  $m$ -forme alternate formano uno spazio vettoriale di dimensione uno. Ogni varietà è localmente orientabile e quindi possiamo definire, almeno localmente, la forma di volume  $\omega_g$ . Abbiamo

$$(22.1.5) \quad g(\omega_g, \omega_g) = (-1)^q$$

se  $q$  è il numero di valori propri negativi di  $g$ . Poiché la derivata covariante di una forma alternata è ancora una forma alternata, deduciamo da questa identità che

$$(22.1.6) \quad \nabla \omega_g = 0.$$

Supporremo nel seguito che  $(M, g)$  sia una varietà pseudo-Riemanniana orientata.

DEFINIZIONE XXII.1.4. Per ogni  $0 \leq k \leq m$  definiamo l'operatore di Hodge

$$(22.1.7) \quad * : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{m-k}(M)$$

come l'unico operatore lineare tale che

$$(22.1.8) \quad \alpha \wedge (*\beta) = g(\alpha, \beta) \omega_g, \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^k(M).$$

PROPOSIZIONE XXII.1.5. L'operatore di Hodge è caratterizzato da

$$(22.1.9) \quad \int_M g(\alpha, \beta) \omega_g = \int_M (*\alpha) \wedge \beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^k(M) \text{ con } \text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta \text{ compatto.}$$

PROPOSIZIONE XXII.1.6. L'operatore di Hodge gode delle seguenti proprietà<sup>1</sup>

- (1)  $*1 = \omega_g, \quad *\omega_g = (-1)^q;$
- (2) se  $\alpha \in \Omega^k(M), \beta \in \Omega^{m-k}(M)$ , allora

$$(22.1.10) \quad g(\alpha, *\beta) = (-1)^{k(m-k)} g(*\alpha, \beta);$$

- (3) se  $\alpha \in \Omega^k(M)$ , allora

$$(22.1.11) \quad **\alpha = (-1)^{k(n-k)+q} \alpha.$$

## XXII.2. Codifferenziale, operatore di Laplace-Beltrami, divergenza

Sia  $(M, g)$  una varietà pseudo-Riemanniana.

**XXII.2.1. Isomorfismi di dualità.** Poiché la  $g$  è non degenere, vale il

LEMMA XXII.2.1. Per ogni forma differenziale  $\xi \in \Omega^1(M)$  esiste un unico campo di vettori  $\xi^\sharp$  tale che

$$(22.2.1) \quad g(\xi^\sharp, X) = \xi(X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \quad \square$$

L'applicazione

$$(22.2.2) \quad \sharp : \Omega^1(M) \ni \xi \rightarrow \xi^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$$

<sup>1</sup>Ricordiamo che  $q$  è il numero di valori propri negativi di  $g$ .

DEFINIZIONE XXII.2.2. L'isomorfismo (22.2.2) è l'*isomorfismo di dualità* di  $(M, g)$ . Indichiamo con

$$(22.2.3) \quad \flat : \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow X^\flat \in \mathcal{O}(M)$$

l'isomorfismo inverso.

Poiché la metrica sul fibrato cotangente è definita in modo tale che  $\sharp$  e  $\flat$  siano isometrie, vale la

$$(22.2.4) \quad g(\xi^\sharp, X) = g(\xi, X^\flat) = \xi(X), \quad \forall \xi \in \mathcal{O}^1(M), \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

LEMMA XXII.2.3. *La derivazione covariante commuta con gl'isomorfismi di dualità.*

DIMOSTRAZIONE. Siano  $\xi \in \mathcal{O}^1(M)$ ,  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} g(\nabla_X(\xi^\sharp), Y) &= Xg(\xi^\sharp, Y) - g(\xi^\sharp, \nabla_X Y) = X(\xi(Y)) - \xi(\nabla_X Y) = (\nabla_X \xi)(Y) \\ &= g((\nabla_X \xi)^\sharp, Y). \end{aligned}$$

Questo dimostra che  $\nabla_X(\xi^\sharp) = (\nabla_X \xi)^\sharp = \nabla_X \xi^\sharp$ . Si verifica in modo analogo che  $\nabla_X(Y^\flat) = (\nabla_X Y)^\flat = \nabla_X Y^\flat$ .  $\square$

Gli elementi di  $\mathfrak{T}^{k,q}$  sono localmente somme finite di termini della forma

$$\tau = X_1 \otimes \cdots \otimes X_q \otimes \xi^1 \otimes \cdots \otimes \xi^k \quad \text{con } X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), \xi^1, \dots, \xi^k \in \mathcal{O}^1(M).$$

Possiamo estendere la definizione degli isomorfismi di dualità descrivendo applicazioni  $\sharp : \mathfrak{T}^{k,q}(M) \rightarrow \mathfrak{T}^{k-1,q+1}(M)$  per  $k \geq 1$  e  $\flat : \mathfrak{T}^{k,q}(M) \rightarrow \mathfrak{T}^{k+1,q-1}(M)$  per  $q \geq 1$  con

$$\begin{aligned} \tau^\sharp &= X_1 \otimes \cdots \otimes X_{q-1} \otimes X_q \otimes \xi^1 \otimes \xi^2 \otimes \cdots \otimes \xi^k & (k \geq 1), \\ \tau^\flat &= X_1 \otimes \cdots \otimes X_{q-1} \otimes X_q^\flat \otimes \xi^1 \otimes \xi^2 \otimes \cdots \otimes \xi^k & (q \geq 1). \end{aligned}$$

Poiché la derivazione covariante è una derivazione dell'algebra tensoriale, anche gli isomorfismi  $\sharp$  e  $\flat$  definiti sui campi tensoriali commutano con la derivazione covariante.

### XXII.2.2. Gradiente, Hessiano, Operatore di Laplace-Beltrami.

DEFINIZIONE XXII.2.4. Il *gradiente* di una funzione  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  è il campo di vettori

$$(22.2.5) \quad \nabla f = df^\sharp.$$

La (22.2.5) è equivalente a

$$(22.2.6) \quad g(\nabla f, X) = Xf, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Se  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$  è un sistema di riferimento su un aperto  $U$  di  $M$ , posto  $g_{i,j} = g(X_i, X_j)$ , ed indicando con  $(g^{i,j})$  la matrice inversa della  $(g_{i,j})$ , abbiamo

$$(22.2.7) \quad \nabla f = \sum_{i,j} g^{i,j} (X_i f) X_j.$$

In particolare, se  $(M, g)$  è Riemanniana e  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$  un riferimento ortonormale su un aperto  $U$  di  $M$ , è

$$(22.2.8) \quad \nabla f = \sum_{i=1}^m (X_i f) X_i \quad \text{su } U, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

DEFINIZIONE XXII.2.5. L'Hessiano di  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  è la derivata covariante di  $df$

$$(22.2.9) \quad \nabla^2 f = \nabla df, \quad \text{cioè} \quad \nabla^2 f(X, Y) = XYf - (\nabla_X Y)f, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Osserviamo che

$$\nabla^2 f(Y, X) = (YX - \nabla_Y X)f = (XY - [X, Y] - \nabla_Y X)f = (XY - \nabla_X Y)f,$$

perché la connessione di Levi-Civita è simmetrica. Quindi l'Hessiano è un tensore simmetrico.

DEFINIZIONE XXII.2.6. L'operatore di Laplace-Beltrami sulle funzioni è l'opposto della traccia rispetto a  $g$  dell'Hessiano:

$$(22.2.10) \quad \Delta f = -\text{tr}_g(\nabla^2 f).$$

Se  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$  è un sistema di riferimento su un aperto  $U$  di  $M$ , posto  $g_{i,j} = g(X_i, X_j)$ , ed indicando con  $(g^{i,j})$  la matrice inversa della  $(g_{i,j})$ , abbiamo

$$(22.2.11) \quad \nabla^2 f(X_i, X_j) = (X_i X_j - \Gamma_{i,j}^h X_h)f,$$

$$(22.2.12) \quad \Delta f = -\left(\sum_{i,j} g^{i,j} (X_i X_j - \sum_h \Gamma_{i,j}^h X_h)\right)f.$$

Osserviamo che  $\Delta$  è ellittico se e soltanto se la  $g$  è una metrica Riemanniana, cioè se  $g$  è definita positiva. In questo caso, se scegliamo un riferimento ortonormale  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$  su un aperto  $U$  di  $M$ , abbiamo in  $U$

$$(22.2.13) \quad \Delta f = -\text{tr}_g(\nabla df) = -\left(\sum_{i=1}^m X_i^2 - \nabla_{X_i} X_i\right)f \quad \text{in } U.$$

**XXII.2.3. Divergenza di un campo di vettori.** Supporremo in tutto questo sottoparagrafo che  $(M, g)$  sia una varietà Riemanniana orientata, con forma di volume  $\omega_g \in \mathcal{Q}^m(M)$ .

DEFINIZIONE XXII.2.7. La *divergenza*<sup>2</sup> in  $p \in M$  di un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  è la traccia dell'applicazione lineare  $T_p M \ni Y_p \rightarrow \nabla_{Y_p} X \in T_p M$ :

$$(22.2.14) \quad \text{div } X = \text{tr}(Y \rightarrow \nabla_Y X).$$

LEMMA XXII.2.8. Supponiamo che  $(X, g)$  sia Riemanniana. Se  $\sigma = (Y_1, \dots, Y_m)$  è un sistema di riferimento ortonormale su un aperto  $U$  di  $M$ , allora

$$(22.2.15) \quad \text{div } X = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{Y_i} X, Y_i) \quad \text{su } U, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(U).$$

Cioè, se  $X = \sum_{i=1}^m f^i Y_i$ , con  $f^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ , allora

$$(22.2.16) \quad \text{div } X = \sum_{i=1}^m Y_i f^i + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{i,j}^i f^j \quad \text{in } U,$$

dove i simboli di Christoffel  $\Gamma_{j,h}^i$  sono definiti da  $\nabla_{Y_j} Y_h = \sum_{i=1}^m \Gamma_{j,h}^i Y_i$ .

<sup>2</sup>Per definire la divergenza di un campo di vettori è sufficiente avere assegnato su  $M$  una connessione affine.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\nabla_{Y_i} X = \sum_{h=1}^m (Y_i f^h + \sum_{j=1}^m \Gamma_{i,j}^h f^j) Y_h$$

e quindi otteniamo la (22.2.16), che è equivalente alla (22.2.15).  $\square$

PROPOSIZIONE XXII.2.9. *Supponiamo che  $(M, g)$  sia Riemanniana orientata, con forma di volume  $\omega_g$ . Allora (indichiamo con  $L_X$  la derivata di Lie)*

$$(22.2.17) \quad L_X \omega_g = (\operatorname{div} X) \cdot \omega_g, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\sigma = (Y_1, \dots, Y_m)$  un riferimento ortonormale locale, orientato positivamente. Allora

$$0 = X \cdot 1 = X \omega_g(Y_1, \dots, Y_m) = (L_X \omega_g)(Y_1, \dots, Y_m) + \sum_i \omega_g(\dots, [X, Y_i], \dots).$$

Posto  $X = \sum_{i=1}^m f^i Y_i$ , con  $f^i$  funzioni  $\mathcal{C}^\infty$ , abbiamo

$$\begin{aligned} [X, Y_i] &= \sum_{j=1}^m f^j [Y_j, Y_i] - \sum_{j=1}^m (Y_i f^j) Y_j \\ &= \sum_{j=1}^m f^j (\nabla_{Y_j} Y_i - \nabla_{Y_i} Y_j) - \sum_{j=1}^m (Y_i f^j) Y_j \\ &= \sum_{j,h=1}^m f^j (\Gamma_{j,i}^h - \Gamma_{i,j}^h) Y_h - \sum_{h=1}^m (Y_i f^h) Y_h. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} &\omega_g(Y_1, \dots, [X, Y_i], \dots, Y_m) \\ &= g\left(Y_1, \dots, \left(\sum_{j,h=1}^m f^j (\Gamma_{j,i}^h - \Gamma_{i,j}^h) Y_h - \sum_{h=1}^m (Y_i f^h) Y_h\right), \dots, Y_m\right) \\ &= g\left(Y_1, \dots, \left(\sum_{j=1}^m f^j (\Gamma_{j,i}^i - \Gamma_{i,j}^i) - (Y_i f^i)\right) Y_i, \dots, Y_m\right) \\ &= -g\left(Y_1, \dots, \left(Y_i f^i + \sum_{j=1}^m f^j \Gamma_{i,j}^i\right) Y_i, \dots, Y_m\right) \\ &= -\left(Y_i f^i + \sum_{j=1}^m f^j \Gamma_{i,j}^i\right) \end{aligned}$$

La (22.2.17) segue allora dalla (22.2.16).  $\square$

Osserviamo che, per ogni intero non negativo  $k$ , vale la

$$(22.2.18) \quad L_X \alpha = X \lrcorner d\alpha + d(X \lrcorner \alpha), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall \alpha \in \Omega^k(M).$$

Se  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , ed  $\alpha = f \omega_g$  con  $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} X$  compatto in  $M$ , otteniamo

$$\int_M L_X(f \omega_g) = \int_M d(f X \lrcorner \omega_g) = 0$$

e quindi

$$\int_M g(\nabla f, X) \omega_g = \int_M X f \omega_g = \int_M L_X(f \omega_g) - \int_M f L_X \omega_g = - \int_M f \operatorname{div} X \omega_g.$$

Abbiamo dimostrato cioè che l'opposto della divergenza sui campi di vettori è l'aggiunto formale del gradiente delle funzioni:

PROPOSIZIONE XXII.2.10. *Se  $(M, g)$  è una varietà Riemanniana orientabile, allora*

$$(22.2.19) \quad \int_M g(\nabla f, X) \omega_g = - \int_M f \operatorname{div} X \omega_g,$$

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall X \in \mathfrak{X}(M), \text{ con } \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} X \Subset M. \quad \square$$

Da questa ricaviamo

PROPOSIZIONE XXII.2.11 (Formula d'integrazione per parti). *Se  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g \cap \operatorname{supp} X \Subset M$ , allora*

$$(22.2.20) \quad \int_M f(Xg) \omega_g = - \int_M g(Xf + f \operatorname{div} X) \omega_g.$$

DEFINIZIONE XXII.2.12. L'operatore differenziale lineare del prim'ordine

$$(22.2.21) \quad X^* f = -Xf - f \operatorname{div} X$$

si dice l'*aggiunto formale* del campo di vettori  $X$ .

### XXII.3. Co-differenziazione covariante di forme differenziali

**XXII.3.1. Forme differenziali.** Indichiamo con  $\mathcal{F}^k(M)$  lo spazio delle forme differenziali di grado  $k$  su  $M$ . I suoi elementi sono le applicazioni  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineari

$$(22.3.1) \quad \alpha : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ volte}} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M).$$

Le  $\alpha \in \mathcal{F}^k(M)$  sono cioè le applicazioni (22.3.1) caratterizzate da:

$$\begin{cases} \alpha(X_1, \dots, X_i + Y_i, \dots, X_k) = \alpha(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k) + \alpha(X_1, \dots, Y_i, \dots, X_k), \\ \alpha(f_1 X_1, \dots, f_k X_k) = f_1 \cdots f_k \alpha(X_1, \dots, X_k), \\ \forall X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{X}(M), \forall i = 1, \dots, k, \forall f_1, \dots, f_k \in \mathcal{C}^\infty(M), \end{cases}$$

Porremo

$$\mathcal{F}(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{F}^k(M).$$

Osserviamo che  $\mathcal{F}(M)$  è un'algebra associativa graduata per il prodotto tensoriale di forme, definito sugli elementi omogenei da

$$\begin{aligned} (\alpha \otimes \beta)(X_1, \dots, X_{h+k}) &= \alpha(X_1, \dots, X_h) \beta(X_{h+1}, \dots, X_{h+k}) \\ \forall \alpha \in \mathcal{F}^h(M), \forall \beta \in \mathcal{F}^k(M), \forall X_1, \dots, X_{h+k} \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

**XXII.3.2. Differenziazione covariante.** Ricordiamo che, se  $\nabla$  è la differenziazione covariante di una connessione affine su  $M$ , allora

$$\nabla \alpha(X_0, X_1, \dots, X_k) = (\nabla_{X_0} \alpha)(X_1, \dots, X_k), \quad \forall \alpha \in \mathcal{F}^k(M), \forall X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M),$$

e quindi

$$\nabla : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), \quad \text{con } \nabla : \mathcal{F}^k(M) \rightarrow \mathcal{F}^{k+1}(M), \quad \forall k \geq 0.$$

PROPOSIZIONE XXII.3.1. *La derivazione covariante definisce una derivazione di grado 1 dell'algebra associativa graduata  $\mathcal{F}(M)$ .*

**XXII.3.3. Forme differenziali a valori in un fibrato vettoriale.**

Se  $\eta = (E \xrightarrow{\pi} M)$  è un fibrato vettoriale, denoteremo con  $\mathcal{F}^k(M, E)$  lo spazio delle forme differenziali, omogenee di grado  $k$ , a coefficienti in  $E$ :

$$\mathcal{F}^k(M, E) = \left\{ \alpha : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ volte}} \longrightarrow \Gamma(M, E), \text{ } \mathcal{C}^\infty(M)\text{-multilineari} \right\}$$

Porremo, ancora,

$$\mathcal{F}(M, E) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{F}^k(M, E).$$

Osserviamo che  $\mathcal{F}(M, E)$  è, in modo naturale, un  $\mathcal{F}(M)$ -modulo per il prodotto tensoriale di forme.

**XXII.3.4. Contrazione.** Se  $\alpha \in \mathcal{F}^k(M, TM)$ , con  $k \geq 1$ , per ogni  $X_2, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$  fissati, la

$$\mathfrak{X}(M) \ni X \longrightarrow \alpha(X, X_2, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}(M)$$

definisce una sezione del fibrato  $TM \otimes_M T^*M \rightarrow M$  degli endomorfismi lineari delle fibre di  $TM$ . Abbiamo quindi un isomorfismo naturale

$$\mathcal{F}^k(M, TM) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{k-1}(M, \text{End}(TM))$$

DEFINIZIONE XXII.3.2. Sia  $k \geq 1$ . Indicheremo con

$$(22.3.2) \quad \text{tr}_1 : \mathcal{F}^k(M, TM) \longrightarrow \mathcal{F}^{k-1}(M)$$

l'operatore di contrazione, che associa ad  $\alpha \in \mathcal{F}^k(M, TM)$  l'elemento

$$\text{tr}_1 \alpha(X_2, \dots, X_k) = \text{tr}(X \rightarrow \alpha(X, X_2, \dots, X_k)), \quad \forall X_2, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M).$$

**XXII.3.5. Il co-differenziale covariante.** Fissiamo su  $M$  una metrica pseudo-Riemanniana  $g$ .

DEFINIZIONE XXII.3.3. Se  $k \geq 1$  definiamo un'applicazione

$$(22.3.3) \quad \sharp : \mathcal{F}^k(M) \ni \alpha \longrightarrow \alpha^\sharp \in \mathcal{F}^{k-1}(M, TM)$$

mediante

$$(22.3.4) \quad g(X_1, \alpha^\sharp(X_2, \dots, X_k)) = \alpha(X_1, \dots, X_k), \quad \forall X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M).$$

Osserviamo che questa definizione coincide con la Definizione XXII.2.2 su  $\Omega^1(M) = \mathcal{S}^1(M) = \mathcal{F}^1(M)$ .

Se  $Y_1, \dots, Y_m$  è un riferimento ortonormale su un aperto  $U$  di  $M$ , ed  $\alpha \in \mathcal{F}^k(M, TM)$ , allora

$$\text{tr}_1 \alpha(X_2, \dots, X_k) = \sum_{i=1}^m g(Y_i, \alpha(Y_i, X_2, \dots, X_k)).$$

DEFINIZIONE XXII.3.4. Sia  $k \geq 1$ . Chiamiamo *co-differenziale* della forma  $\alpha \in \mathcal{F}^k(M)$  la forma  $\nabla^* \alpha \in \mathcal{F}^{k-1}(M)$  definita da

$$(22.3.5) \quad \nabla^* \alpha = -\text{tr}_1(\nabla \alpha)^\sharp.$$

Poniamo  $\nabla^* \mathcal{F}^0(M) = 0$ . La divergenza definisce allora un operatore differenziale

$$(22.3.6) \quad \nabla^* : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M),$$

di ordine uno, omogeneo di grado  $-1$ .

**PROPOSIZIONE XXII.3.5.** *Se  $(M, g)$  è orientabile, la differenziazione covariante e la co-differenziazione covariante sulle forme differenziali sono l'una l'aggiunta formale dell'altra.*

Se  $Y_1, \dots, Y_m$  è un sistema di riferimento ortonormale sull'aperto  $U$  di  $M$ , abbiamo

$$\begin{aligned} (\nabla^* \alpha)(X_1, \dots, X_{k-1}) &= - \sum_{i=1}^m (\nabla_{Y_i} \alpha)(Y_i, X_1, \dots, X_{k-1}), \text{ su } U, \\ \forall \alpha \in \mathcal{F}^k(M), \forall X_1, \dots, X_{k-1} \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

#### XXII.4. Divergenza di tensori simmetrici

**XXII.4.1. Forme differenziali simmetriche.** Indichiamo con  $\mathcal{S}^k(M)$  lo spazio delle forme simmetriche di grado  $k$  su  $M$ . Un elemento  $\alpha \in \mathcal{S}^k(M)$  è una forma di  $\mathcal{F}^k(M)$  che soddisfa

$$\alpha(X_1, X_2, \dots, X_k) = \alpha(X_{a_1}, X_{a_2}, \dots, X_{a_k}), \quad \forall a \in \mathbf{S}_k,$$

ove abbiamo indicato con  $\mathbf{S}_k$  il gruppo delle permutazioni di  $\{1, \dots, k\}$ .

Denotiamo con

$$(22.4.1) \quad \mathcal{S}(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{S}^k(M)$$

lo spazio di tutte le forme simmetriche. Ricordiamo che  $\mathcal{S}(M)$  è un'algebra associativa graduata con il prodotto, definito sugli elementi omogenei mediante

$$\begin{aligned} \alpha \vee \beta(X_1, \dots, X_{h+k}) &= \sum_{\substack{a \in \mathbf{S}_{h+k} \\ 1 \leq a_1 < \dots < a_h \leq h+k \\ 1 \leq a_{h+1} < \dots < a_{h+k} \leq h+k}} \alpha(X_{a_1}, \dots, X_{a_h}) \beta(X_{a_{h+1}}, \dots, X_{a_{h+k}}), \\ \forall \alpha \in \mathcal{S}^h(M), \forall \beta \in \mathcal{S}^k(M), \quad \forall X_1, \dots, X_{h+k} \in \mathfrak{X}(M), \end{aligned}$$

se  $\alpha \in \mathcal{S}^h(M)$ ,  $\beta \in \mathcal{S}^k(M)$ .

**DEFINIZIONE XXII.4.1.** Indichiamo con *sim* la proiezione

$$(22.4.2) \quad \begin{aligned} \text{sim} : \mathcal{F}^k(M) \ni \alpha &\longrightarrow \text{sim}(\alpha) \in \mathcal{S}^k(M), \text{ definita da} \\ \text{sim}(\alpha)(X_1, \dots, X_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{a \in \mathbf{S}_k} \alpha(X_{a_1}, \dots, X_{a_k}). \end{aligned}$$

Si verifica facilmente:

**LEMMA XXII.4.2.** *Estesa per linearità, l'applicazione  $\text{sim} : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{S}(M)$  è un epimorfismo di algebre associative graduate. Il suo nucleo è l'ideale bilatero di  $(\mathcal{F}(M), \otimes)$  generato dagli elementi della forma  $\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$ , al variare di  $\alpha, \beta$  in  $\mathcal{F}^1(M)$ .  $\square$*



OSSERVAZIONE XXII.4.3. Questo lemma ci permette di identificare  $\mathcal{S}(M)$  allo spazio delle forme simmetriche su  $M$ , definito usualmente come quoziente di  $\mathcal{F}(M)$  rispetto all'ideale bilatero definito nell'enunciato del Lemma.

Se  $\eta = (E \xrightarrow{\pi} M)$  è un fibrato vettoriale, denoteremo con  $\mathcal{S}^k(M, E)$  lo spazio delle forme differenziali simmetriche, omogenee di grado  $k$ , a coefficienti in  $E$ :

$$\mathcal{S}^k(M, E) = \left\{ \alpha \in \mathcal{F}^k(M, E) \left| \begin{array}{l} \alpha(X_1, \dots, X_k) = \alpha(X_{a_1}, \dots, X_{a_k}), \\ \forall X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M), \forall a \in \mathbf{S}_k. \end{array} \right. \right\}$$

Porremo, ancora,

$$\mathcal{S}(M, E) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{S}^k(M, E).$$

Osserviamo che  $\mathcal{S}(M, E)$  è un  $\mathcal{S}(M)$ -modulo per l'azione definita, sugli elementi omogenei, da

$$\begin{aligned} \alpha \vee \beta(X_1, \dots, X_{h+k}) &= \sum_{\substack{a \in \mathbf{S}_{h+k} \\ 1 \leq a_1 < \dots < a_h \leq h+k \\ 1 \leq a_{h+1} < \dots < a_{h+k} \leq h+k}} \alpha(X_{a_1}, \dots, X_{a_h}) \beta(X_{a_{h+1}}, \dots, X_{a_{h+k}}), \\ \forall \alpha \in \mathcal{S}^h(M, E), \forall \beta \in \mathcal{S}^k(M), \quad \forall X_1, \dots, X_{h+k} \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

**XXII.4.2. Forme simmetriche su una varietà pseudo-Riemanniana.** Fissiamo su  $M$  una metrica pseudo-Riemanniana  $g$ .

Se  $\alpha \in \mathcal{F}^k(M)$ , con  $k \geq 0$ , allora  $\nabla_X \alpha \in \mathcal{F}^{k+1}(M)$  è definito da

$$\nabla \alpha(X_0, X_1, \dots, X_k) = (\nabla_{X_0} \alpha)(X_1, \dots, X_k), \quad \forall X_0, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M).$$

DEFINIZIONE XXII.4.4. Chiamiamo *divergenza* della forma simmetrica  $\alpha \in \mathcal{S}^k(M)$  la forma simmetrica  $\delta \alpha \in \mathcal{S}^{k-1}(M)$  definita da

$$(22.4.3) \quad \delta \alpha = \nabla^* \alpha = -\text{tr}_1(\nabla \alpha)^\sharp.$$

La divergenza definisce un operatore differenziale

$$(22.4.4) \quad \delta : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{S}(M),$$

di ordine uno, omogeneo di grado  $-1$ .

Calcoliamo l'aggiunto formale della divergenza sulle forme simmetriche. Osserviamo che  $\mathcal{S}^1(M) = \mathcal{Q}^1(M)$  e quindi possiamo considerare il differenziale covariante dei tensori simmetrici come un'applicazione

$$\nabla : \mathcal{S}^k(M) \longrightarrow \mathcal{S}^1(M) \otimes \mathcal{S}^k(M) \subset \mathcal{F}^{k+1}(M).$$

Componendo con la simmetrizzazione, otteniamo un operatore differenziale di ordine uno e grado uno

$$(22.4.5) \quad \delta^* : \mathcal{S}^k(M) \ni \alpha \longrightarrow \text{simm}(\nabla \alpha) \in \mathcal{S}^{k+1}(M).$$

LEMMA XXII.4.5 (co-divergenza di un tensore simmetrico). *Supponiamo che  $(M, g)$  sia orientata. La divergenza sui vettori simmetrici e l'operatore differenziale definito dalla (22.4.5) sono l'uno l'aggiunto formale dell'altro.*  $\square$

Sia  $\alpha \in \Omega^1(M) = \mathcal{S}^1(M)$ . Ricordiamo che  $\alpha^\sharp$  è il campo di vettori definito da

$$\alpha(X) = g(\alpha^\sharp, X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

LEMMA XXII.4.6. Se  $\alpha \in \Omega^1(M)$ , allora

$$(22.4.6) \quad \delta^* \alpha = \frac{1}{2} L_{\alpha^\sharp} g.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , abbiamo

$$d^\nabla \alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - \alpha(\nabla_X Y)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \delta^* \alpha(X, Y) &= \frac{1}{2} (X\alpha(Y) + Y\alpha(X)) - \alpha(\nabla_X Y + \nabla_Y X) \\ &= \frac{1}{2} (Xg(\alpha^\sharp, Y) + Yg(X, \alpha^\sharp) - g(\alpha^\sharp, \nabla_X Y) - g(\alpha^\sharp, \nabla_Y X)) \\ &= \frac{1}{2} (g(\nabla_X \alpha^\sharp, Y) + g(X, \nabla_Y \alpha^\sharp)). \end{aligned}$$

È poi

$$\begin{aligned} (L_{\alpha^\sharp} g)(X, Y) &= \alpha^\sharp g(X, Y) - g([\alpha^\sharp, X], Y) - g(X, [\alpha^\sharp, Y]) \\ &= \alpha^\sharp g(X, Y) - g(\nabla_{\alpha^\sharp} X, Y) - g(X, \nabla_{\alpha^\sharp} Y) + g(\nabla_X \alpha^\sharp, Y) + g(X, \nabla_Y \alpha^\sharp) \\ &= (\nabla_{\alpha^\sharp} g)(X, Y) + g(\nabla_X \alpha^\sharp, Y) + g(X, \nabla_Y \alpha^\sharp) \\ &= g(\nabla_X \alpha^\sharp, Y) + g(X, \nabla_Y \alpha^\sharp), \end{aligned}$$

da cui segue la tesi.  $\square$

OSSERVAZIONE XXII.4.7. I campi di vettori  $X$  per cui  $L_X g = 0$  sono generatori infinitesimali di gruppi locali a un parametro di diffeomorfismi che preservano la metrica  $g$  su  $M$  e si dicono *campi di Killing*. È conseguenza del Lemma il fatto che la divergenza della 1-forma  $\alpha$  si annulla se e soltanto se il corrispondente campo  $\alpha^\sharp$  è di Killing.

Concludiamo il paragrafo con la verifica esplicita del fatto che la divergenza sia l'aggiunto formale della co-divergenza  $\delta^*$  nel caso delle forme simmetriche di grado due.

LEMMA XXII.4.8. Se  $\alpha \in \mathcal{S}^2(M)$ , allora, per ogni  $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$  vale la formula

$$(22.4.7) \quad (\nabla_X \alpha - L_X \alpha)(X_1, X_2) = \alpha(\nabla_{X_1} X, X_2) + \alpha(X_1, \nabla_{X_2} X).$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} (L_X \alpha)(X_1, X_2) &= X(\alpha(X_1, X_2)) - \alpha([X, X_1], X_2) - \alpha(X_1, [X, X_2]) \\ &= (\nabla_X \alpha)(X_1, X_2) - ([X, X_1] - \nabla_X X_1, X_2) - \alpha(X_1, [X, X_2] - \nabla_X X_2) \\ &= (\nabla_X \alpha)(X_1, X_2) - \alpha(\nabla_X X, X_2) - \alpha(X_1, \nabla_{X_2} X), \end{aligned}$$

perché la connessione di Levi-Civita è priva di torsione.  $\square$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$  con supporto compatto in  $M$  abbiamo

$$\int_M g(\delta\alpha, X^\flat)\omega_g = \int_M g(\alpha, \delta^*X^\flat) = \frac{1}{2} \int_M g(\alpha, L_X g)\omega_g.$$

Osserviamo che

$$g(\alpha, L_X g) = Xg(\alpha, g) - g(L_X\alpha, g) = g(\nabla_X\alpha - L_X\alpha, g).$$

Per calcolare l'espressione locale di questo prodotto, possiamo utilizzare un sistema di riferimento ortonormale locale  $X_1, \dots, X_m$ . Otteniamo

$$g(\alpha, L_X g) = \sum_{i,j=1}^m (\nabla_X\alpha - L_X\alpha)(X_i, X_j)g(X_i, X_j) = 2 \sum_{i=1}^m \alpha(\nabla_{X_i}X, X_i).$$

Poiché

$$\alpha(\nabla_{X_i}X, X_i) = X_i\alpha(X, X_i) - (\nabla_{X_i}\alpha)(X, X_i) - \alpha(X, \nabla_{X_i}X_i),$$

otteniamo, prendendo  $X$  con supporto compatto nell'aperto in cui  $X_1, \dots, X_m$  definiscono un sistema ortonormale,

$$\begin{aligned} \int_M g(\delta\alpha, X^\flat)\omega_g &= \sum_{i=1}^m \int_M (X_i\alpha(X, X_i) - (\nabla_{X_i}\alpha)(X, X_i) - \alpha(X, \nabla_{X_i}X_i))\omega_g \\ &= - \sum_{i=1}^m \int_M ((\nabla_{X_i}\alpha)(X, X_i) - \alpha(X, \nabla_{X_i}X_i) - \alpha(X, X_i)\operatorname{div} X_i)\omega_g. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che

$$\operatorname{div} X_i = \sum_{j=1}^m g(\nabla_{X_j}X_i, X_j) = - \sum_{j=1}^m g(X_i, \nabla_{X_j}X_j)$$

e dunque

$$\sum_{i=1}^m \alpha(X, X_i)\operatorname{div} X_i = - \sum_{i,j=1}^m \alpha(X, X_i)g(X_i, \nabla_{X_j}X_j) = - \sum_{j=1}^m \alpha(X, \nabla_{X_j}X_j).$$

Sostituendo nelle formule precedenti otteniamo

$$\int_M g(\delta\alpha, X^\flat)\omega_g = - \int_M \sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i}\alpha)(X, X_i)\omega_g.$$

□

## XXII.5. L'operatore di Laplace-Beltrami

PROPOSIZIONE XXII.5.1. *Abbiamo*

$$(22.5.1) \quad \Delta f = -\operatorname{div}(\nabla f), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , otteniamo

$$g(\nabla_X(\nabla f), Y) = Xg(\nabla f, Y) - g(\nabla f, \nabla_X Y) = XYf - \nabla_X Yf.$$

Per calcolare l'espressione locale della divergenza di  $\nabla f$ , possiamo utilizzando un riferimento ortonormale  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ , definito su un aperto  $U$  di  $M$ . Per la (22.2.15) abbiamo in  $U$

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{X_i}\nabla f, X_i) = \sum_{i=1}^m (X_i^2 - \nabla_{X_i}X_i)f = -\Delta f.$$

□

Come conseguenza delle (22.2.19) e (22.5.1) abbiamo

PROPOSIZIONE XXII.5.2. *Vale la*

$$(22.5.2) \quad \int_M g(\nabla f, \nabla \phi) \omega_g = \int_M f \Delta \phi \omega_g, \\ \forall f, \phi \in \mathcal{C}^\infty(M), \text{ con } \text{supp } f \cap \text{supp } \phi \Subset M. \quad \square$$

Se  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$  è un riferimento ortonormale su un aperto  $U$  di  $M$ , allora

$$g\left(\sum_{i=1}^m \nabla_{X_i} X_i, X_j\right) = -\sum_{i=1}^m g(X_i, \nabla_{X_i} X_j) = -\text{div } X_j.$$

Otteniamo quindi

$$(22.5.3) \quad \sum_{i=1}^n \nabla_{X_i} X_i = -\sum_{i=1}^m (\text{div } X_i) X_i$$

e dunque l'espressione del Laplaciano sulle funzioni rispetto ad un riferimento ortonormale:

$$(22.5.4) \quad \Delta = -\sum_{i=1}^m (X_i^2 + (\text{div } X_i) X_i).$$

Siano  $\alpha \in \mathfrak{T}^{1,q}(M)$  e  $\beta \in \mathfrak{T}^{0,q}(M)$ , con  $\text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta \Subset U$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_M g(\alpha, \nabla \beta) &= \sum_{i=1}^m \int_M g(\alpha(X_i), \nabla_{X_i} \beta) \omega_g \\ &= \sum_{i=1}^m \int_M [X_i g(\alpha(X_i), \beta) - g((\nabla_{X_i} \alpha)(X_i), \beta) - g(\alpha(\nabla_{X_i} X_i), \beta)] \omega_g \\ &= \sum_{i=1}^m \int_M [-(\text{div } X_i) g(\alpha(X_i), \beta) - g((\nabla_{X_i} \alpha)(X_i), \beta) - g(\alpha(\nabla_{X_i} X_i), \beta)] \omega_g \\ &= \int_M g\left(\sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i} \alpha)(X_i), \beta\right) \omega_g, \end{aligned}$$

perché, per la (22.5.3) la sommatoria dei primi e dei terzi addendi sono l'una l'opposta dell'altra.

**XXII.5.1. Codifferenziale.** Poiché la derivazione covariante commuta con gli isomorfismi  $\flat$  e  $\sharp$ , utilizzando la partizione dell'unità otteniamo la seguente:

PROPOSIZIONE XXII.5.3. *Siano  $k, q$  due interi non negativi. Risulta univocamente determinato un operatore differenziale lineare del prim'ordine  $\flat : \mathfrak{T}^{k+1,q} \rightarrow \mathfrak{T}^{k,q}$  tale che*

$$(22.5.5) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_M g(\flat \alpha, \beta) d\mu_g &= \int_M g(\alpha, \nabla \beta) d\mu_g, \\ \forall \alpha \in \mathfrak{T}^{k+1,q}(M), \forall \beta \in \mathfrak{T}^{k,q}(M), &\text{ con } \text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta \text{ compatto.} \end{aligned} \right.$$

Se  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$  è un riferimento ortonormale su un aperto  $U$  di  $M$ , abbiamo

$$(22.5.6) \quad \flat \alpha = -\sum_{i=1}^m X_i \lrcorner (\nabla_{X_i} \alpha) \text{ su } U. \quad \square$$

DEFINIZIONE XXII.5.4. Il *codifferenziale* di  $\alpha \in \mathfrak{T}^{k+1,q}(M)$  è il tensore  $\flat \alpha$  definito da (22.5.6).

Porremo  $\flat \alpha = 0$  se  $\alpha \in \mathfrak{T}^{0,q}(M)$ .

**XXII.5.2. Codifferenziale sulle forme alternate e Laplaciano di Hodge-deRham.** Supponiamo nel seguito che  $(M, g)$  sia Riemanniana orientata, con forma di volume  $\omega_g$ .

PROPOSIZIONE XXII.5.5. *Il codifferenziale definisce un operatore  $\mathfrak{d} : \Omega^{k+1} \rightarrow \Omega^k(M)$ , che si può esprimere utilizzando il differenziale e l'operatore di Hodge mediante la formula*

$$(22.5.7) \quad \mathfrak{d}\alpha = (-1)^{k+1} * d(*\alpha), \quad \forall \alpha \in \Omega^k(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \int_M g(\mathfrak{d}\alpha, \beta)\omega_g &= \int_M g(\alpha, d\beta)\omega_g = \int_M (*\alpha) \wedge d\beta \\ &= (-1)^{k+1} \int_M (d(*\alpha)) \wedge \beta = (-1)^{k+1} \int_M g(*d*\alpha, \beta)\omega_g. \end{aligned}$$

□

DEFINIZIONE XXII.5.6. Il *Laplaciano di Hodge-deRham* sulle  $k$ -forme è l'operatore differenziale

$$(22.5.8) \quad \Delta = (\mathfrak{d} \circ d + d \circ \mathfrak{d}) : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M).$$

### XXII.5.3. Differenziazione di forme simmetriche.

NOTAZIONE XXII.5.7. Indichiamo con  $S^k M$  il fibrato vettoriale dei tensori simmetrici  $k$ -controvarianti su  $M$  e con  $\mathcal{S}^k(M)$  lo spazio delle sue sezioni, cioè delle  $k$ -forme simmetriche su  $M$ .

La differenziazione covariante  $\nabla$  definisce un'applicazione  $\nabla : \mathcal{S}^k(M) \rightarrow \mathcal{Q}^1(M, S^k M)$ .

DEFINIZIONE XXII.5.8. Il differenziale simmetrico  $\mathfrak{d}^* : \mathcal{S}^k(M) \rightarrow \mathcal{S}^{k+1}(M)$  è l'operatore differenziale

$$(22.5.9) \quad (\mathfrak{d}^*\alpha)(X_0, \dots, X_k) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (\nabla_{X_i}\alpha)(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k).$$

Se  $\alpha \in \mathcal{S}^1(M) = \Omega^1(M)$ , posto  $A = \alpha^\sharp$ , abbiamo

$$\begin{aligned} (\mathfrak{d}^*\alpha)(X, Y) &= \frac{1}{2} [(\nabla_X\alpha)(Y) + (\nabla_Y\alpha)(X)] \\ &= \frac{1}{2} (X\alpha(Y) - \alpha(\nabla_X Y) + Y\alpha(X) - \alpha(\nabla_Y X)) \\ &= \frac{1}{2} (Xg(A, Y) - g(A, \nabla_X Y) + Yg(A, X) - g(A, \nabla_Y X)) \\ &= \frac{1}{2} (g(\nabla_X A, Y) + g(\nabla_Y A, X)). \end{aligned}$$

Abbiamo poi

$$\begin{aligned} (L_A g)(X, Y) &= Ag(X, Y) - g([A, X], Y) - g([A, Y], X) \\ &= Ag(X, Y) - g(\nabla_A X - \nabla_X A, Y) - g(\nabla_A Y - \nabla_Y A, X) \\ &= g(\nabla_X A, Y) + g(\nabla_Y A, X) \end{aligned}$$

perché  $\nabla_A g = 0$ . Abbiamo perciò

LEMMA XXII.5.9. Se  $\alpha \in \mathcal{S}^1(M)$ , allora

$$(22.5.10) \quad (d^*\alpha)(X, Y) = -\frac{1}{2}(L_{\alpha^\#}g)(X, Y).$$

DEFINIZIONE XXII.5.10. Chiamiamo *divergenza* di una forma simmetrica l'aggiunto formale del differenziale covariante sulle forme simmetriche, cioè l'applicazione  $\mathfrak{d} : \mathcal{S}^{k+1}(M) \rightarrow \mathcal{S}^k(M)$  definita da

$$(22.5.11) \quad \int_M g(\mathfrak{d}\alpha, \beta) d\mu_g = \int_M g(\alpha, \mathfrak{d}^*\beta) d\mu_g$$

per ogni  $\alpha \in \mathcal{S}^{k+1}(M)$  e  $\beta \in \mathcal{S}^k(M)$  con  $\text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta \Subset M$ .

Osserviamo che la divergenza è la restrizione alle forme simmetriche del co-differenziale covariante della Definizione XXII.5.4.

### XXII.6. Il Laplaciano naturale

Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana. Ad ogni rappresentazione lineare di dimensione finita  $(\rho, V)$  di  $\mathbf{O}(m)$  è associato un fibrato vettoriale  $\eta = (E \xrightarrow{\pi_E} M)$ , su cui la connessione di Levi-Civita definisce una differenziazione covariante. Indichiamo con  $\mathcal{E}(M)$  lo spazio  $\Gamma(M, E)$  delle sue sezioni, con  $\mathcal{E}^{(1)}(M)$  lo spazio delle forme differenziali a coefficienti in  $E$ , cioè delle sezioni delle sezioni  $\mathcal{C}^\infty$  del fibrato  $\eta \otimes \tau_M^* = (E \otimes_M T^*M \rightarrow M)$ , e con

$$(22.6.1) \quad \nabla : \mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathcal{E}^{(1)}(M),$$

la differenziazione covariante.

Possiamo definire su  $V$  un prodotto scalare<sup>3</sup>  $h_V$  per cui  $\rho(\mathbf{O}(m)) \subset \mathbf{O}_{h_V}(V)$ . Indichiamo con  $(\cdot | \cdot)_0$  il corrispondente prodotto scalare sulle fibre di  $\eta$ . Vale allora

$$(22.6.2) \quad X(s_1, s_2)_0 = (\nabla_X s_1, s_2)_0 + (s_1, \nabla_X s_2)_0.$$

Risulta allora definito un prodotto scalare naturale sulle fibre di  $\eta \otimes \tau_M^*$ , che indicheremo con  $(\cdot | \cdot)_1$ . Se  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$  è un riferimento ortonormale su un aperto  $U$  di  $M$  ed  $\alpha, \beta \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$ , allora

$$(22.6.3) \quad (\alpha | \beta)_1(p) = \sum_{i=1}^m (\alpha(\sigma_i) | \beta(\sigma_i))_0 \quad \text{su } U.$$

Siano  $s \in \mathcal{E}(M)$ ,  $\alpha \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$  tali che  $\text{supp } s \cap \text{supp } \alpha \Subset U$ . Integrando per parti, otteniamo, indicando con  $\omega_g$  la forma di volume su  $U$  per cui  $\sigma$  è orientato positivamente,

$$\begin{aligned} \int_M (\nabla s | \alpha)_1 \omega_g &= \sum_{i=1}^m \int_M (\nabla_{X_i} s | \alpha(X_i))_0 \omega_g \\ &= \sum_{i=1}^m \int_M (X_i(s | \alpha(X_i))_0 - (s | \nabla_{X_i} [\alpha(X_i)]))_0 \omega_g \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Questo prodotto scalare non è univocamente determinato. Lo è, a meno di una costante moltiplicativa, sui fattori irriducibili della rappresentazione  $(\rho, V)$ .

$$\begin{aligned}
&= \int_M L_{X_i}[(s|\alpha(X_i))_0 \omega_g] - \int_M (s|\alpha(X_i))_0 L_X \omega_g - \int_M \left( s \left| \sum_i \nabla_{X_i} [\alpha(X_i)] \right| \right)_0 \omega_g \\
&= - \int_M (s|\nabla^* \alpha)_0 \omega_g
\end{aligned}$$

ove

$$(22.6.4) \quad \nabla^* \alpha = - \sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i} + \operatorname{div} X_i) [\alpha(X_i)] \quad \text{su } U.$$

Osserviamo che un cambiamento di orientazione cambia il segno di  $\omega_g$  e quindi di tutti i termini delle equazioni precedenti. La (22.6.4) è quindi ben definita, a prescindere dal dato di un'orientazione globale su  $M$ .

DEFINIZIONE XXII.6.1. L'operatore differenziale  $\nabla^* : \mathcal{E}^{(1)}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M)$  definito da (22.6.4) si dice *l'aggiunto formale della differenziazione covariante*.

L'operatore differenziale

$$(22.6.5) \quad \nabla^* \nabla : \mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathcal{E}(M)$$

è il *Laplaciano naturale* sulle sezioni di  $\eta$  rispetto alla metrica Riemanniana  $g$ .

PROPOSIZIONE XXII.6.2. *Vale la formula d'integrazione per parti*

$$(22.6.6) \quad \int_M g(\nabla s_1, \nabla s_2) d\mu_g = \int_M g(\nabla^* \nabla s_1, s_2) d\mu_g,$$

$\forall s_1, s_2 \in \mathcal{E}(M) \text{ con } \operatorname{supp} s_1 \cap \operatorname{supp} s_2 \Subset M.$

*In particolare, se  $M$  è compatta, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea*

$$(22.6.7) \quad \nabla^* \nabla s = 0$$

*sono parallele su  $M$ .*

## XXII.7. Il Laplaciano di Lichnerowicz

Descriviamo in questo paragrafo una nozione generale di Laplaciano sulle varietà Riemanniane, dovuta a Lichnerowicz<sup>4</sup>.

Introduciamo gli operatori di curvatura di Weitzenböck<sup>5</sup>.

Sia  $\mathfrak{o}_M = (\mathfrak{o}(M) \xrightarrow{\pi} M)$  il fibrato vettoriale corrispondente alla rappresentazione aggiunta di  $\mathbf{O}(m)$ . Gli elementi di  $\mathfrak{o}_p(M)$  sono gli endomorfismi  $\mathbb{R}$ -lineari di  $T_p M$  che sono antisimmetrici per  $g_p$ :

$$A \in \mathfrak{o}_p(M) \iff (A \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(T_p M), \quad g_p(AX_p, Y_p) + g_p(X_p, AY_p) = 0, \quad \forall X_p, Y_p \in T_p M).$$

<sup>4</sup>André Lichnerowicz (1915-1998) è stato un matematico francese, allievo di Élie Cartan. Ha insegnato a Strasburgo e Parigi, dal 1952 al Collège de France. Si è occupato di geometria differenziale, relatività generale ed ha avuto un ruolo importante nella formulazione dei programmi di insegnamento della matematica in Francia.

<sup>5</sup>Roland Weitzenböck (1885-1955). Matematico austriaco, ha studiato a Vienna, Bonn e Göttingen. Ha insegnato a Praga, e dal 1923 al 1945 ad Amsterdam. Per la sua attività filo-nazista, fu internato al termine della guerra, fino al 1948. Si occupò di teoria degli invarianti, di invarianti spaziali e di teoria dei campi. Ottenne le formule per il Laplaciano di Hodge-deRham nel 1923. [Invariantentheorie, Groningen, Noordhoff]

Se  $\alpha \in \mathcal{Q}^2(M)$  ed  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , allora

$$g([X]\alpha]^\sharp, Y) = [X]\alpha](Y) = \alpha(X, Y) = -\alpha(Y, X) = -g(X, [Y]\alpha]^\sharp).$$

Quindi  $\alpha$  definisce la sezione  $A_\alpha$  del fibrato  $\mathfrak{o}(M)$

$$(22.7.1) \quad A_\alpha(X) = [X]\alpha]^\sharp.$$

LEMMA XXII.7.1. *La corrispondenza  $A : \mathcal{Q}^2(M) \ni \alpha \rightarrow A_\alpha \in \Gamma(M, \mathfrak{o}(M))$  è un isomorfismo lineare.*  $\square$

Possiamo associare ad  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  la sezione di  $A_{X,Y}$  di  $\mathfrak{o}(M)$  definita da

$$(22.7.2) \quad A_{X,Y}(Z) = g(X, Z)Y - g(Y, Z)X, \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} g(A_{X,Y}Z_1, Z_2) &= g(g(X, Z_1)Y - g(Y, Z_1)X, Z_2) \\ &= g(X, Z_1)g(Y, Z_2) - g(Y, Z_1)g(X, Z_2) \\ &= g(Z_1, g(Y, Z_2)X - g(X, Z_2)Y) = -g(Z_1, A_{X,Y}Z_2). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE XXII.7.2. È  $A_{X,Y} = A_{(X \wedge Y)^\flat}$ .

Sia ora  $(\rho, V)$  una rappresentazione lineare di  $\mathbf{O}(m)$  ed  $\eta = (E \xrightarrow{\pi_E} M)$  il corrispondente fibrato vettoriale. Lo spazio totale  $E$  è il quoziente di  $\mathbf{O}(M) \times V$  rispetto alla relazione di equivalenza

$$(\sigma_1, v_1) \sim (\sigma_2, v_2) \iff (\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2), v_2 = \rho(\sigma_2^{-1}\sigma_1)(v_1)).$$

Indichiamo con  $\varpi : \mathbf{O}(M) \times V \rightarrow E$  la proiezione nel quoziente. Ricordiamo ancora che possiamo definire un prodotto scalare  $h_V$  su  $V$  per cui  $\rho(\mathbf{O}(m)) \subset \mathbf{O}_{h_V}(V)$  e che questo definisce un prodotto scalare invariante sulle fibre di  $\eta$ . Il differenziale di  $\rho$  nell'origine definisce una rappresentazione lineare  $\rho_* : \mathfrak{o}(m) \rightarrow \mathfrak{o}_{h_V}(V)$  dell'algebra di Lie, che definisce un morfismo lineare di fibrati

$$(22.7.3) \quad [\rho]_* : \mathfrak{o}(M) \longrightarrow \mathfrak{o}(E)$$

ove abbiamo indicato con  $\mathfrak{o}(E)$  lo spazio degli endomorfismi lineari antisimmetrici sulle fibre di  $\eta$ . Esso si definisce nel modo seguente. Siano  $p \in M$  e  $T$  un endomorfismo  $g_p$ -antisimmetrico di  $T_pM$ . Se  $\sigma \in \mathbf{O}_p(M)$ , allora  $\sigma^{-1} \circ T \circ \sigma \in \mathfrak{o}(m)$ . Definiamo  $[\rho]_*(T)$  in modo che

$$[\rho]_*(T)\varpi(\sigma, v) = \varpi(\sigma, \rho_*(\sigma^{-1} \circ T \circ \sigma)(v)), \quad \forall v \in V.$$

Definiamo quindi una forma  $c_\rho \in \mathcal{Q}^2(M, \mathfrak{o}(E))$  ponendo

$$(22.7.4) \quad c_\rho(X, Y) = [\rho]_*(A_{X,Y}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

DEFINIZIONE XXII.7.3. Chiamiamo la  $c_\rho \in \mathcal{Q}^2(M, \mathfrak{o}(E))$ , definita dalla (22.7.4), la *forma caratteristica* del fibrato  $\eta$ .

Ricordiamo che su ogni spazio tensoriale  $\mathfrak{T}^{r,s}(M)$  è definita la curvatura

$$(22.7.5) \quad R(X, Y)\tau = \nabla_X \nabla_Y \tau - \nabla_Y \nabla_X \tau - \nabla_{[X, Y]}\tau, \quad \forall \tau \in \mathfrak{T}^{r,s}(M), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$



Ad esempio, se  $\alpha \in \Omega^1(M)$  ed  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , otteniamo

$$(22.7.6) \quad (R(X, Y)\alpha)(Z) = -\alpha(R(X, Y)Z).$$

Infatti

$$\begin{aligned} (R(X, Y)\alpha)(Z) &= (\nabla_X \nabla_Y \alpha)(Z) - (\nabla_Y \nabla_X \alpha)(Z) - (\nabla_{[X, Y]}\alpha)(Z) \\ &= X((\nabla_Y \alpha)(Z)) - (\nabla_Y \alpha)(\nabla_X Z) - Y((\nabla_X \alpha)(Z)) + (\nabla_X \alpha)(\nabla_Y Z) \\ &\quad - [X, Y]\alpha(Z) + \alpha(\nabla_{[X, Y]}Z) \\ &= X(Y\alpha(Z) - \alpha(\nabla_Y Z)) - (\nabla_Y \alpha)(\nabla_X Z) \\ &\quad - Y(X\alpha(Z) - \alpha(\nabla_X Z)) + (\nabla_X \alpha)(\nabla_Y Z) \\ &\quad - [X, Y]\alpha(Z) + \alpha(\nabla_{[X, Y]}Z) \\ &= XY\alpha(Z) - (\nabla_X \alpha)(\nabla_Y Z) - (\nabla_Y \alpha)(\nabla_X Z) - \alpha(\nabla_X \nabla_Y Z) \\ &\quad - YX\alpha(Z) + (\nabla_Y \alpha)(\nabla_X Z) + (\nabla_X \alpha)(\nabla_Y Z) + \alpha(\nabla_Y \nabla_X Z) \\ &\quad - [X, Y]\alpha(Z) + \alpha(\nabla_{[X, Y]}Z) \end{aligned}$$

da cui, poiché la connessione di Levi-Civita è simmetrica, otteniamo la (22.7.6).

DEFINIZIONE XXII.7.4. Il *tensore di Ricci generalizzato*, od *operatore di curvatura di Weitzenböck*, sui tensori  $k$ -controvarianti, con  $k \geq 1$ , è definito da

$$(22.7.7) \quad \mathcal{R}ic(\tau)(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (R(Y_i, X_j)\tau)(X_1, \dots, X_{j-1}, Y_i, X_{j+1}, \dots, X_k),$$

ove  $(Y_1, \dots, Y_m)$  è un qualsiasi riferimento ortonormale.

In particolare, se  $\alpha$  è una 1-forma differenziale, abbiamo

$$(22.7.8) \quad \mathcal{R}ic(\alpha)(X) = \sum_{i=1}^m R(Y_i, X)\alpha(Y_i) = -\alpha(R(Y_i, X)Y_i)$$

DEFINIZIONE XXII.7.5. Un *Laplaciano di Lichnerowicz* è della forma

$$(22.7.9) \quad \Delta_L \tau = \nabla^* \nabla \tau + c \mathcal{R}ic(\tau),$$

per una costante  $c > 0$ .

## XXII.8. Laplaciano sulle forme differenziali alternate

**XXII.8.1. Espressione del differenziale mediante la derivazione covariante.** La derivazione covariante rispetto ad una connessione simmetrica ci permette di calcolare il differenziale di una forma alternata con una formula che è diretta generalizzazione di quella, in coordinate, valida per gli spazi Euclidei.

PROPOSIZIONE XXII.8.1. Se  $\nabla$  è la derivazione covariante di una connessione affine simmetrica su  $M$ , allora, per ogni  $\alpha \in \Omega^k(M)$  ed  $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$  vale la

$$(22.8.1) \quad d\alpha(X_0, \dots, X_k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j (\nabla_{X_j} \alpha)(X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k).$$

Se  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$  è un sistema di riferimento su un aperto  $U$  di  $M$  e  $(\xi^1, \dots, \xi^m)$  il coriferimento duale, definito da  $\xi^i(X_j) = \delta_j^i$  per  $1 \leq i, j \leq m$ , abbiamo

$$(22.8.2) \quad d\alpha = \sum_{i=1}^m \xi^i \wedge \nabla_{X_i} \alpha \quad \text{in } U.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} d\alpha(X_0, \dots, X_k) &= \sum_j (-1)^j X_j \alpha(\dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &= \sum_j (-1)^j (\nabla_{X_j} \alpha)(\dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad - \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha(\nabla_{X_i} X_j, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha(\nabla_{X_j} X_i, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &= \sum_j (-1)^j (\nabla_{X_j} \alpha)(\dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad - \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha(T(X_i, X_j), \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots), \end{aligned}$$

dove  $T$  è la torsione. Otteniamo quindi la (22.8.1) se supponiamo  $T = 0$ .

Verifichiamo ora la (22.8.2). Basta verificare che i due membri dell'equazione assumono gli stessi valori sulle  $k$ -uple di elementi del sistema di riferimento  $\sigma$ . Se  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^m \xi^i \wedge \nabla_{X_i} \alpha \right) (X_{i_0}, \dots, X_{i_k}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^k (-1)^j \xi^i(X_{i_j}) (\nabla_{X_i} \alpha)(\dots, \widehat{X}_{i_j}, \dots) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j (\nabla_{X_{i_j}} \alpha)(\dots, \widehat{X}_{i_j}, \dots) \end{aligned}$$

e l'ultimo termine dell'uguaglianza è uguale a  $d\alpha(X_{i_0}, \dots, X_{i_k})$  per la (22.8.1).  $\square$

**XXII.8.2. Aggiunto formale del differenziale.** Utilizziamo la Proposizione XXII.8.1 per calcolare l'aggiunto formale del differenziale esterno. Osserviamo che, se  $\beta \in \Omega^{k+1}(M)$  ed  $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ , allora

$$(X_i \lrcorner \beta)(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) = (-1)^i \beta(X_0, \dots, X_k), \quad \forall i = 0, 1, \dots, k.$$

Supponiamo ora che  $(M, g)$  sia una varietà Riemanniana e  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$  un sistema di riferimento ortonormale su un aperto  $U$  di  $M$ . Siano  $\alpha \in \Omega^k(M)$  e  $\beta \in \Omega^{k+1}(M)$ , con  $\text{supp } \alpha \subseteq U$ . Otteniamo allora

$$\begin{aligned} &\int_M g(d\alpha, \beta) d\mu_g \\ &= \sum_{i_0 < \dots < i_k} \sum_j (-1)^j \int_M (\nabla_{X_{i_j}} \alpha)(X_{i_0}, \dots, \widehat{X}_{i_j}, \dots, X_{i_k}) \cdot \beta(X_{i_0}, \dots, X_{i_j}, \dots, X_{i_k}) d\mu_g \\ &= \sum_{i_0 < \dots < i_k} \sum_j \int_M (\nabla_{X_{i_j}} \alpha)(X_{i_0}, \dots, \widehat{X}_{i_j}, \dots, X_{i_k}) \cdot X_{i_j} \lrcorner \beta(X_{i_0}, \dots, \widehat{X}_{i_j}, \dots, X_{i_k}) d\mu_g \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^m \int_M g(\nabla_{X_j} \alpha, X_j \lrcorner \beta) d\mu_g$$

Osserviamo che, se  $X, Y, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ , è

$$\begin{aligned} (\nabla_X(Y \lrcorner \beta))(X_1, \dots, X_k) &= X\beta(Y, X_1, \dots, X_k) - \sum \beta(Y, \dots, \nabla_X X_j, \dots) \\ &= (\nabla_X \beta)(Y, X_1, \dots, X_k) + \beta(\nabla_X Y, X_1, \dots, X_k), \end{aligned}$$

abbiamo cioè

$$(22.8.3) \quad \nabla_X(Y \lrcorner \beta) = Y \lrcorner \nabla_X \beta + (\nabla_X Y) \lrcorner \beta.$$

Supponiamo ora di aver fissato un'orientazione su  $U$ , ed indichiamo con  $\omega_g$  la corrispondente forma di volume. Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_M g(\nabla_X \alpha, Y \lrcorner \beta) \omega_g &= \int_M (Xg(\alpha, Y \lrcorner \beta)) \omega_g - \int_M g(\alpha, \nabla_X(Y \lrcorner \beta)) \omega_g \\ &= \int_M L_X(g(\alpha, Y \lrcorner \beta) \omega_g) - \int_M g(\alpha, Y \lrcorner \beta) L_X \omega_g \\ &\quad - \int_M g(\alpha, Y \lrcorner \nabla_X \beta) \omega_g - \int_M g(\alpha, \nabla_X Y \lrcorner \beta) \omega_g \\ &= - \int_M g(\alpha, Y \lrcorner \nabla_X \beta) \omega_g - \int_M g(\alpha, (\nabla_X Y + (\operatorname{div} X)Y) \lrcorner \beta) \omega_g. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi, per l'aggiunto formale del differenziale, l'espressione

$$d^* \beta = - \sum_i X_i \lrcorner \nabla_{X_i} \beta - \left( \sum_i (\nabla_{X_i} X_i + (\operatorname{div} X_i) X_i) \right) \lrcorner \beta.$$

Poiché

$$\sum_i (\operatorname{div} X_i) X_i = \sum_{i,j} g(\nabla_{X_j} X_i, X_j) X_i = - \sum_{i,j} g(X_i, \nabla_{X_j} X_j) X_i = - \sum_j \nabla_{X_j} X_j,$$

l'ultima sommatoria al secondo membro dell'espressione che abbiamo ottenuto per  $d^* \beta$  si annulla ed otteniamo perciò

**PROPOSIZIONE XXII.8.2.** *Se  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$  è un riferimento ortogonale su un aperto  $U$  di  $M$  e  $\beta \in \Omega^{k+1}(M)$ , allora*

$$(22.8.4) \quad d^* \beta = \sum_{i=0}^m X_i \lrcorner \nabla_{X_i} \beta \quad \text{in } U. \quad \square$$

**XXII.8.3. Aggiunti formali della derivazione covariante e del prodotto esterno.** Raccogliamo in questo breve paragrafo alcune formule che ci saranno utili nel seguito.

**LEMMA XXII.8.3.** *Se  $(M, g)$  è una varietà Riemanniana orientata, allora*

$$(22.8.5) \quad \nabla_X^* \alpha = -\nabla_X \alpha - (\operatorname{div} X) \cdot \alpha, \quad \forall \alpha \in \Omega^k(M), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\beta \in \Omega^k(M)$  e  $\operatorname{supp} \alpha \cap \operatorname{supp} \beta \Subset M$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \int_M g(\alpha, \nabla_X \beta) \omega_g &= \int_M (Xg(\alpha, \beta)) \omega_g - \int_M g(\nabla_X \alpha, \beta) \omega_g \\ &= - \int_M g(\alpha, \beta) (\operatorname{div} X) \omega_g - \int_M g(\nabla_X \alpha, \beta) \omega_g, \end{aligned}$$

da cui segue la (22.8.5). □

LEMMA XXII.8.4. Sia  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . L'applicazione

$$(22.8.6) \quad \mathcal{Q}^k(M) \ni \alpha \longrightarrow X^b \wedge \alpha \in \mathcal{Q}^{k+1}(M)$$

è l'aggiunta formale del prodotto interno

$$(22.8.7) \quad \mathcal{Q}^{k+1}(M) \ni \beta \longrightarrow X \lrcorner \beta \in \mathcal{Q}^k(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$  un riferimento ortonormale su un aperto  $U$  di  $M$ . Abbiamo in  $U$ , per  $\alpha \in \mathcal{Q}^k(M)$ ,  $\beta \in \mathcal{Q}^{k+1}(M)$ ,

$$\begin{aligned} g(\alpha, X \lrcorner \beta) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \beta(X, X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \\ &= \sum_{i_0} \sum_{i_1 < \dots < i_k} g(X, X_{i_0}) \alpha(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \beta(X_{i_0}, X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \\ &= \sum_{i_0 < i_1 < \dots < i_k} \sum_{h=0}^k (-1)^h g(X, X_{i_h}) \alpha(\dots, \widehat{X_{i_h}}, \dots) \beta(X_{i_0}, X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \\ &= g(X^b \wedge \alpha, \beta). \end{aligned}$$

Questa uguaglianza dimostra il Lemma. □

**XXII.8.4. La formula di Weitzenböck.** Dalla (22.8.2) della Proposizione XXII.8.1 abbiamo:

PROPOSIZIONE XXII.8.5. Sia  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$  un riferimento ortonormale su un aperto  $U$  di  $M$ . Se  $\alpha \in \mathcal{Q}^k(M)$ , abbiamo

$$(22.8.8) \quad d\alpha = \sum_{i=1}^m X_i^b \wedge \nabla_{X_i} \alpha \quad \text{in } U.$$

Ricordiamo che la derivazione covariante è una derivazione dell'algebra esterna. È cioè

$$(22.8.9) \quad \nabla_X(\alpha \wedge \beta) = (\nabla_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \nabla_X \beta, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall \alpha, \beta \in \mathcal{Q}^*(M).$$

## Metriche invarianti

### XXIII.1. Metriche pseudo-Riemanniane su spazi omogenei

Siano  $\mathbf{K}$  un gruppo di Lie connesso,  $\mathbf{H}$  un suo sottogruppo chiuso,  $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ . Indichiamo con  $p_0$  il punto base  $\pi(\mathbf{H})$  ed identifichiamo  $T_0M$  al quoziente  $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$  delle algebre di Lie  $\mathfrak{k}$  di  $\mathbf{K}$  ed  $\mathfrak{h}$  di  $\mathbf{H}$ . Ricordiamo che, per  $X \in \mathfrak{k}$ ,  $X^M \in \mathfrak{X}(M)$  è il generatore infinitesimale del gruppo a un parametro  $(t, p) \rightarrow \exp(tX) \cdot p$ .

Indichiamo con  $\overline{\text{Ad}}(h)$  la rappresentazione aggiunta di  $\mathbf{H}$  sul quoziente  $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$ , e con  $\bar{X}$  l'elemento di  $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$  corrispondente ad  $X \in \mathfrak{k}$ .

Supponiamo che  $\mathbf{K}$  operi effettivamente su  $M$ .

**PROPOSIZIONE XXIII.1.1.** *Vi è una corrispondenza biunivoca tra le metriche pseudo-Riemanniane  $g$ ,  $\mathbf{K}$ -invarianti su  $M$ , e le forme bilineari simmetriche non degeneri  $b$  su  $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$ , invarianti rispetto ad  $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{H})$ , data da*

$$(23.1.1) \quad g_0(X^M, Y^M) = b(\bar{X}, \bar{Y}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

La  $g$  è definita positiva se e soltanto se lo è la  $b$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La condizione necessaria e sufficiente affinché  $g$  sia una metrica pseudo-Riemanniana  $\mathbf{K}$ -invariante è che, per ogni  $a \in \mathbf{K}$ , risulti

$$g_{\pi(a)}(a_*X^M, a_*Y^M) = g_0(X^M, Y^M), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

Se  $b \in \mathbf{K}$  e  $\pi(b) = \pi(a)$ , allora  $a^{-1}b = h \in \mathbf{H}$  ed abbiamo allora

$$\begin{aligned} g_0(X^M, Y^M) &= g_{\pi(b)}(b_*X^M, b_*Y^M) = g_{\pi(a)}(b_*X^M, b_*Y^M) \\ &= g_0(a_*^{-1}b_*X^M, a_*^{-1}b_*Y^M) = g_0(h_*X^M, h_*Y^M). \end{aligned}$$

Questo dimostra che possiamo definire una forma bilineare  $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{H})$ -invariante ponendo:

$$b(\bar{X}, \bar{Y}) = g_0(X^M, Y^M).$$

Vice versa, poiché  $h_*X^M = (\text{Ad}(h)(X))^M$  per ogni  $X \in \mathfrak{k}$ , la (23.1.1) definisce una metrica  $\mathbf{K}$ -invariante, purché la  $b$  sia  $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{H})$ -invariante.  $\square$

**COROLLARIO XXIII.1.2.** *Supponiamo che  $M$  sia riduttiva, con decomposizione*

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}.$$

Allora la

$$(23.1.2) \quad g_0(X^M, Y^M) = b(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}$$

definisce una corrispondenza biunivoca tra le metriche pseudo-Riemanniane  $g$ ,  $\mathbf{K}$ -invarianti su  $M$ , e le forme bilineari simmetriche non degeneri  $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invarianti su  $\mathfrak{m}$ . Abbiamo

$$(23.1.3) \quad b([Z, X], Y) + b(X, [Z, Y]) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}, \forall Z \in \mathfrak{h},$$

e la condizione (23.1.3) è equivalente all'invarianza di  $b$  rispetto ad  $\text{Ad}(\mathbf{H})$  se  $\mathbf{H}$  è connesso.

### XXIII.2. La connessione di Levi-Civita sugli spazi omogenei

Data una connessione affine  $\Gamma$  su  $M$ , associamo ad ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$  il tensore 1-covariante ed 1-contravariante  $A_X$ , definito da

$$(23.2.1) \quad A_X Y = [X, Y] - \nabla_X Y = -\nabla_Y X - T(X, Y), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

LEMMA XXIII.2.1. Se  $g$  è una metrica pseudo-Riemanniana  $\mathbf{K}$ -invariante su  $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ , allora per ogni  $X \in \mathfrak{K}$ , il tensore  $A_{X^M}$  è  $g$ -antisimmetrico.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni  $X \in \mathfrak{K}$ , il gruppo a un parametro  $\exp(tX)$  definisce un gruppo a un parametro di isometrie di  $(M, g)$ . Quindi la derivata di Lie  $L_{X^M} g$  della metrica è nulla. Otteniamo quindi, per ogni  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ :

$$\begin{aligned} X^M g(Y, Z) &= (L_{X^M} g)(Y, Z) + g([X^M, Y], Z) + g(Y, [X^M, Z]) \\ &= g([X^M, Y], Z) + g(Y, [X^M, Z]). \end{aligned}$$

D'altra parte, vale anche la

$$\begin{aligned} X^M g(Y, Z) &= (\nabla_{X^M} g)(Y, Z) + g(\nabla_{X^M} Y, Z) + g(Y, \nabla_{X^M} Z) \\ &= g(\nabla_{X^M} Y, Z) + g(Y, \nabla_{X^M} Z). \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro otteniamo

$$(23.2.2) \quad g(A_{X^M} Y, Z) + g(Y, A_{X^M} Z) = 0, \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

ed il Lemma è dimostrato.  $\square$

TEOREMA XXIII.2.2. Supponiamo che  $M$  sia riduttiva, con decomposizione

$$(23.2.3) \quad \mathfrak{K} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}.$$

Se  $g$  è la metrica pseudo-Riemanniana  $\mathbf{K}$ -invariante su  $M$ , associata alla forma bilineare simmetrica  $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante  $b$ , allora la sua connessione di Levi-Civita è definita da

$$(23.2.4) \quad \Lambda_{\mathfrak{m}}(X)(Y) = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + \beta(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

ove  $\beta$  è la forma bilineare simmetrica definita da

$$(23.2.5) \quad 2b(\beta(X, Y), Z) = b(X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}) + b([Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}.$$

In particolare, la connessione di Levi-Civita coincide con la connessione naturale priva di torsione se e soltanto se il secondo membro della (23.2.5) è uguale a 0 per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ .

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che  $\Lambda_m(X) = -A_{X_0^M}$  per ogni  $X \in \mathfrak{m}$ , e quindi  $\Lambda_m(X)$  è antisimmetrica per ogni  $X \in \mathfrak{m}$ . Per la (16.4.3) del Teorema XVI.4.2, abbiamo

$$\Lambda_m(X)Y - \Lambda_m(Y)X = [X, Y]_m, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

Quindi

$$\beta(X, Y) - \beta(Y, X) = [X, Y]_m - (\Lambda_m(X)Y - \Lambda_m(Y)X) = 0$$

e dunque  $\beta$  è simmetrica e soddisfa

$$b(\beta(X, Y), Z) + b(Y, \beta(X, Z)) = \frac{1}{2}(b([Y, X]_m, Z) + b(Y, [Z, X]_m)).$$

Da questa, dalle uguaglianze che da questa si ottengono mediante le permutazioni cicliche di  $X, Y, Z$  e dalla simmetria di  $\beta$  ricaviamo finalmente la (23.2.5).  $\square$

DEFINIZIONE XXIII.2.3. Uno spazio omogeneo riduttivo  $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ , con (23.2.3) ed una metrica pseudo-Riemanniana associata ad una forma bilineare simmetrica non degenera  $b$  su  $\mathfrak{m}$  si dice *naturalmente riduttivo* se

$$(23.2.6) \quad b(X, [Z, Y]_m) + b([Z, X]_m, Y) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}.$$

PROPOSIZIONE XXIII.2.4. Supponiamo che  $M$  sia *naturalmente riduttivo*, con una metrica pseudo-Riemanniana invariante associata alla forma bilineare  $b$ . Allora la sua curvatura soddisfa

$$(23.2.7) \quad g_0(R(X^M, Y^M)Y^M, X^M) = \frac{1}{4}b([X, Y]_m, [X, Y]_m) - b([X, Y]_b, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} R_0(X, Y)Z &= \frac{1}{4}[X, [Y, Z]_m]_m - \frac{1}{4}[Y, [X, Z]_m]_m \\ &\quad - \frac{1}{2}[[X, Y]_m, Z]_m - [[X, Y]_b, Z], \\ &\quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}. \end{aligned}$$

La tesi segue allora dal Teorema XXIII.2.2.  $\square$

Un caso importante in cui si applicano i risultati precedenti è il seguente:

TEOREMA XXIII.2.5. Sia  $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$  e supponiamo che vi sia una forma bilineare simmetrica non degenera  $\text{Ad}(\mathbf{K})$ -invariante  $\mathbf{f}$  su  $\mathfrak{k}$  la cui restrizione ad  $\mathfrak{h}$  sia non degenera.

Poniamo

$$(23.2.8) \quad \mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{k} \mid \mathbf{f}(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}.$$

Allora vale la decomposizione (23.2.3) ed inoltre la

$$(23.2.9) \quad b(X, Y) = \mathbf{f}(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

è una forma bilineare simmetrica non degenera ed  $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante su  $\mathfrak{m}$ .

Rispetto a questa decomposizione ed alla metrica pseudo-Riemanniana  $\mathbf{K}$ -invariante associata a questa scelta di  $b$  lo spazio omogeneo  $M$  è *naturalmente riduttivo*.

*Il tensore di curvatura rispetto a questa metrica soddisfa*

$$(23.2.10) \quad g_{\mathfrak{o}}(R(X^M, Y^M)Y^M, X^M) = \frac{1}{4}\mathbf{f}([X, Y]_{\mathfrak{m}}, [X, Y]_{\mathfrak{m}}) + \mathbf{f}([X, Y]_{\mathfrak{h}}, [X, Y]_{\mathfrak{h}}),$$

$$\forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

OSSERVAZIONE XXIII.2.6. Se possiamo scegliere la  $\mathbf{f}$  definita positiva, allora la metrica  $g$  definita nel teorema precedente è Riemanniana, con curvatura sezionale non negativa.

ESEMPIO XXIII.2.7. Supponiamo che  $\mathbf{K}$  ammetta una forma bilineare simmetrica  $\text{Ad}(\mathbf{K})$ -invariante e definita positiva e poniamo  $\mathbf{H} = \{e\}$ . Allora la connessione di Levi-Civita associata alla metrica descritta nel teorema precedente coincide con la 0-connessione ed ha curvatura  $R_e(X^*, Y^*) = -\frac{1}{4}\text{ad}([X, Y])$ .



## Metriche di Einstein

### XXIV.1. Proprietà del tensore di curvatura

Sia  $(M, g)$  una varietà pseudo-Riemanniana di dimensione reale  $m$ . Sia  $D$  la differenziazione covariante su  $M$  associata alla sua connessione di Levi-Civita ed indichiamo con  $R$  la sua curvatura. Ricordiamo che

$$T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y] = 0, \quad R(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z.$$

La curvatura  $R$  è un tensore di tipo  $(3, 1)$  che, per ogni  $X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M)$ , soddisfa le condizioni di simmetria

$$(24.1.1) \quad \begin{cases} R(X, Y) = -R(Y, X), & \text{(antisimmetrico in } X, Y), \\ R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 & \text{(I identità di Bianchi),} \\ g(R(X, Y)Z, U) + g(Z, R(X, Y)U) = 0, & \text{(} g\text{-antisimmetrico in } Z), \\ g(R(X, Y)Z, U) = g(R(Z, U)X, Y) & \text{(} g\text{-simmetria).} \end{cases}$$

La  $g$ -simmetria è conseguenza delle proprietà di antisimmetria e della prima identità di Bianchi. Abbiamo infatti, utilizzando le prime tre delle (24.1.1),

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, U) &= -g(R(Y, Z)X, U) - g(R(Z, X)Y, U) \\ &= g(R(Y, Z)U, X) + g(R(Z, X)U, Y) \\ &= -g(R(Z, U)Y, X) - g(R(U, Y)Z, X) \\ &\quad - g(R(X, U)Z, Y) - g(R(U, Z)X, Y) \\ &= 2g(R(Z, U)X, Y) + g(R(U, Y)X, Z) + g(R(X, U)Y, Z) \\ &= 2g(R(Z, U)X, Y) - g(R(X, Y)Z, U), \end{aligned}$$

da cui segue la quarta.

Il tensore di curvatura soddisfa inoltre l'identità differenziale

$$(24.1.2) \quad (D_X R)(Y, Z) + (D_Y R)(Z, X) + (D_Z R)(X, Y) = 0, \quad (\text{II identità di Bianchi}).$$

Utilizzando il tensore della metrica  $g$  possiamo considerare la curvatura anche come un tensore di tipo  $(4, 0)$ , ponendo

$$R(X, Y, Z, U) = g(R(X, Y)U, Z).$$

Le simmetrie fondamentali del tensore di curvatura di tipo  $(4, 0)$  sono allora

$$(24.1.3) \quad \begin{cases} R(X, Y, Z, U) = -R(Y, X, Z, U), \\ R(X, Y, Z, U) = -R(X, Y, U, Z), \\ R(X, Y, Z, U) + R(Y, Z, X, U) + R(Z, X, Y, U) = 0, \\ R(X, Y, Z, U) = R(Z, U, X, Y), \\ \forall X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M). \end{cases}$$

### XXIV.2. Curvatura sezionale

Per le simmetrie (24.1.1), o, in modo equivalente, (24.1.3), del tensore di curvatura, esso definisce un'applicazione

$$\mathcal{R} : \Lambda^2 M \longrightarrow \Lambda^2 M,$$

che sui tensori alternati di rango due si può descrivere mediante

$$g(\mathcal{R}(X \wedge Y), Z \wedge U) = R(X, Y, Z, U) = g(R(X, Y)U, Z).$$

DEFINIZIONE XXIV.2.1. Se  $\sigma$  è un due-piano anisotropo di  $T_p M$ , la *curvatura sezionale* in  $\sigma$  è data da

$$K(\sigma) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - [g(X, Y)]^2}, \quad \text{se } X, Y \in \sigma, X \wedge Y \neq 0.$$

OSSERVAZIONE XXIV.2.2. Poiché la forma quadratica associata ad una forma bilineare simmetrica la determina completamente, la curvatura sezionale determina completamente la curvatura Riemanniana.

In particolare, se in un punto  $p \in M$  la curvatura sezionale è costante, non dipende cioè dal due piano  $\sigma$  che si considera, dalla

$$R(X, Y, X, Y) = k\{g(X, X)g(Y, Y) - g^2(X, Y)\} \quad \text{in } p$$

ricaviamo che

$$R(X, Y, Z, U) = k\{g(X, Z)g(Y, U) - g(X, U)g(Y, Z)\}, \quad \text{in } p$$

cioè

$$g(R(X, Y)U, Z) = k\{g(X, Z)g(Y, U) - g(X, U)g(Y, Z)\} \quad \text{in } p$$

e quindi

$$R(X, Y)U = k\{g(Y, U)X - g(X, U)Y\} \quad \text{in } p.$$

TEOREMA XXIV.2.3 (F.Schur). *Supponiamo che  $M$  sia connessa. Se  $m \geq 3$  e, per ogni  $p \in M$  la curvatura sezionale dei due piani in  $T_p M$  è costante, allora  $(M, g)$  ha curvatura costante, esiste cioè una costante reale  $k$  tale che*

$$(24.2.1) \quad R(X, Y)Z = k(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi, la (24.2.1) vale per una funzione  $k \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . Consideriamo il tensore  $\alpha(X, Y, Z) = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$  e consideriamone la derivata covariante rispetto a un campo di vettori  $U \in \mathfrak{X}(M)$ . Otteniamo

$$\begin{aligned} (\nabla_U \alpha)(X, Y, Z) &= \nabla_U(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) - g(\nabla_U Y, Z)X - g(Y, \nabla_U Z)X \\ &\quad - g(Y, Z)\nabla_U X + g(\nabla_U X, Z)Y + g(X, \nabla_U Z)Y + g(X, Z)\nabla_U Y = 0, \end{aligned}$$

perché  $\nabla_U g = 0$ . Utilizzando quindi la seconda identità di Bianchi otteniamo che, per ogni scelta di  $X_0, X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M)$ , è (l'apice sul simbolo di sommatoria significa che essa è estesa alle terne  $(i, j, k)$  che formano una permutazione con segnatura positiva di  $\{0, 1, 2\}$ ):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum'_{i,j,k=0,1,2} \nabla_{X_i} R(X_j, X_k) X_3 \\ &= \sum'_{i,j,k=0,1,2} (X_i k) \{g(X_j, X_3) X_k - g(X_k, X_3) X_j\} \\ &= \{(X_1 k) g(X_2, X_3) - (X_2 k) g(X_1, X_3)\} X_0 \\ &\quad + \{(X_2 k) g(X_0, X_3) - (X_1 k) g(X_2, X_3)\} X_1 \\ &\quad + \{(X_0 k) g(X_1, X_3) - (X_1 k) g(X_0, X_3)\} X_2. \end{aligned}$$

Poiché la dimensione  $m$  di  $M$  è maggiore o uguale a tre, fissato un qualsiasi punto  $p$  di  $M$ , possiamo scegliere i campi  $X_0, X_1, X_2$  in modo che siano ortonormali in un intorno di  $p$  e prendere poi  $X_3 = X_2$ . I tre addendi all'ultimo membro dell'uguaglianza scritta sopra sono allora linearmente indipendenti in un intorno di  $p$  ed abbiamo quindi, in particolare, poiché il coefficiente di  $X_0$  è nullo in un intorno di  $p$ , che  $X_1 k = 0$  in  $p$ . Poiché sia il punto  $p$  che il valore di  $X_1$  in  $p$ , possono essere scelti arbitrariamente, con l'unico vincolo che  $g(X_1, X_1) = 1$  in  $p$ , ne ricaviamo che  $dk = 0$  e quindi  $k$  è costante su  $M$ .  $\square$

ESEMPIO XXIV.2.4. Sia  $g_p$  una forma quadratica in  $\mathbb{R}^{m+1}$  con segnatura  $(p, m+1-p)$  e definiamo le sottovarietà

$$\begin{aligned} S_p^m &= \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid g(x, x) = 1\}, \\ H_p^m &= \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid g(x, x) = -1\}. \end{aligned}$$

Se  $1 \leq p \leq m+1$ , la restrizione ad  $S_p^m$  di  $g_p$  definisce una metrica pseudo-Riemanniana di segnatura  $(p, m-p)$  e curvatura sezionale costante 1. Se  $0 \leq p \leq m$ , la restrizione di  $g_{p+1}$  definisce su  $H_p^m$  una metrica pseudo-Riemanniana di segnatura  $(p, m-p)$  e curvatura sezionale costante  $-1$ .

Per ogni  $0 \leq p \leq m+1$ , la  $g_p$  definisce su  $\mathbb{R}^{m+1}$  una metrica pseudo-Riemanniana di segnatura  $(p, m+1-p)$  e curvatura sezionale costante nulla.

### XXIV.3. Il tensore di Ricci

Si possono ottenere nuovi tensori a partire dal tensore di curvatura utilizzando le contrazioni. Per le simmetrie del tensore di curvatura, vi è essenzialmente un solo tensore interessante che si possa ottenere in questo modo.

DEFINIZIONE XXIV.3.1. La *curvatura di Ricci* di  $(M, g)$  è il tensore di tipo  $(2, 0)$

$$r(X, Y) = \text{tr}(Z \rightarrow R(X, Z)Y).$$

Se  $Z_1, \dots, Z_m$  è una base ortonormale per  $g$  in un punto  $p \in M$ , se cioè

$$g(Z_i, Z_j) = \epsilon_i \delta_{i,j}, \quad \text{con } \epsilon_i^2 = 1,$$

allora

$$r(X, Y)(p) = \sum_{i=1}^m \epsilon_i R(X, Z_i, Y, Z_i).$$

Il tensore di Ricci può essere anche considerato come un tensore di tipo  $(1, 1)$ ,  $\mathcal{R}ic : TM \rightarrow TM$ , mediante:

$$r(X, Y) = g(\mathcal{R}ic(X), Y).$$

OSSERVAZIONE XXIV.3.2. Il tensore di Ricci è simmetrico: abbiamo cioè  $r(X, Y) = r(Y, X)$ , ovvero  $g(\mathcal{R}ic(X), Y) = g(X, \mathcal{R}ic(Y))$ . Ciò è conseguenza del fatto che la connessione di Levi-Civita è simmetrica (cioè priva di torsione). In particolare, quando  $g$  sia una metrica Riemanniana,  $\mathcal{R}ic$  ha in ogni punto autovalori reali ed è diagonalizzabile.

OSSERVAZIONE XXIV.3.3. Se la dimensione  $m$  di  $M$  è due, il tensore di Ricci determina completamente il tensore della metrica. Infatti, se  $X_1, X_2$  è un sistema di riferimento ortonormale, abbiamo nell'intorno di un punto di  $M$ , otteniamo

$$\begin{aligned} r(X_1, X_1) &= R(X_1, X_1, X_1, X_1) + R(X_1, X_2, X_1, X_2) = R(X_1, X_2, X_1, X_2), \\ r(X_1, X_2) &= R(X_1, X_1, X_2, X_1) + R(X_1, X_2, X_2, X_2) = 0, \\ r(X_2, X_2) &= R(X_2, X_1, X_2, X_1) + R(X_2, X_2, X_2, X_2) = R(X_1, X_2, X_1, X_2). \end{aligned}$$

Notiamo che, per  $m = 2$ , il fibrato  $\Lambda^2 M$  ha rango 1 e quindi il tensore di curvatura  $R$  è completamente determinato dal valore  $R(X_1, X_2, X_1, X_2)$  che assume su un qualsiasi sistema di riferimento ortonormale.

Supponiamo sia  $m = 3$ . Fissiamo un riferimento ortonormale  $X_1, X_2, X_3$  su un aperto di  $M$  e consideriamo le componenti del tensore di Ricci:

$$\begin{aligned} r(X_1, X_1) &= R(X_1, X_2, X_1, X_2) + R(X_1, X_3, X_1, X_3), \\ r(X_1, X_2) &= R(X_1, X_3, X_2, X_3), \\ r(X_1, X_3) &= -R(X_1, X_2, X_2, X_3), \\ r(X_2, X_2) &= R(X_1, X_2, X_1, X_2) + R(X_2, X_3, X_2, X_3), \\ r(X_2, X_3) &= R(X_1, X_2, X_1, X_3), \\ r(X_3, X_3) &= R(X_1, X_3, X_1, X_3) + R(X_2, X_3, X_2, X_3). \end{aligned}$$

Possiamo quindi ricavare dai coefficienti del tensore di Ricci quelli del tensore di Riemann. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} R(X_1, X_2, X_1, X_2) &= \frac{1}{2}(r(X_1, X_1) + R(X_2, X_2) - R(X_3, X_3)), \\ R(X_1, X_2, X_1, X_3) &= r(X_2, X_3), \\ R(X_1, X_2, X_2, X_3) &= -r(X_1, X_3), \\ R(X_1, X_3, X_1, X_3) &= \frac{1}{2}(r(X_1, X_1) + r(X_3, X_3) - r(X_2, X_2)), \\ R(X_1, X_3, X_2, X_3) &= r(X_1, X_2), \\ R(X_2, X_3, X_2, X_3) &= \frac{1}{2}(r(X_2, X_2) + R(X_3, X_3) - R(X_1, X_1)). \end{aligned}$$

Quindi in dimensione tre il tensore di Ricci determina completamente il tensore di Riemann.

Possiamo riscrivere le formule che legano il tensore di Riemann ed il tensore di Ricci in dimensione due e tre mediante

$$(24.3.1) \quad \begin{cases} 2R(X_1, X_2, X_3, X_4) = r(X_1, X_3)g(X_2, X_4) + r(X_2, X_4)g(X_1, X_3) \\ \quad - r(X_1, X_4)g(X_2, X_3) - r(X_2, X_3)g(X_1, X_4), \\ \forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M), \text{ se } m = \dim M = 2, 3. \end{cases}$$

Infatti, i due membri dell'uguaglianza definiscono tensori di tipo  $(0, 4)$  e basta dunque verificare l'uguaglianza quando  $X_1, X_2, X_3, X_4$  siano campi di un sistema di riferimento locale.

#### XXIV.4. Un Teorema di Myers

Supponiamo che la metrica  $g$  sia Riemanniana.

Fissiamo un punto  $p \in M$  e un sistema di riferimento ortonormale  $\sigma_p = (v_1, \dots, v_m)$  in  $T_pM$ . Ad esso associamo coordinate normali  $x = (x^1, \dots, x^m)$  definite in un intorno  $U$  di  $p$  da

$$p(x) = \exp_p(x^1 v_1 + \dots + x^m v_m).$$

Il tensore della metrica ha in queste coordinate componenti

$$g_{i,j} = g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j), \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

LEMMA XXIV.4.1. *La funzione*

$$(24.4.1) \quad F_p(q) = \sqrt{|\det(g_{i,j}(x))|}, \quad p(x) = q,$$

*non dipende dalla scelta della base ortonormale  $\sigma_p$ .*

DIMOSTRAZIONE. Se  $\sigma'_p = (w_1, \dots, w_m)$  è un'altra base ortonormale di  $T_pM$ , ed  $y = (y^1, \dots, y^m)$  le corrispondenti coordinate normali, abbiamo che  $x = ay$ , con  $a = \sigma_p^{-1} \sigma'_p \in \mathbf{O}_b(m)$ . Le componenti  $g'_{i,j}$  della metrica nelle coordinate  $y$  sono allora

$$g'_{i,j} = \sum_{h,k=1}^m a_i^h a_j^k g_{h,k}.$$

Quindi,

$$\sqrt{|\det(g'_{i,j})|} = \sqrt{|\det a|^2 |\det(g_{i,j})|} = F_p,$$

perché  $|\det a| = 1$ . □

Sia  $N_p$  un intorno normale di 0 in  $T_pM$ . Ricordiamo che  $N_p$  è stellato rispetto all'origine ed  $\text{Exp}_p : N_p \rightarrow U_p = \text{Exp}_p(N_p)$  un diffeomorfismo di  $N_p$  su un intorno aperto  $U_p$  di  $p$  in  $M$ .

Fissato un vettore non nullo  $w \in N_p$ , indichiamo con  $\gamma_w \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$  la geodetica uscente da  $p$  con velocità  $w$ . Fissiamo un riferimento ortonormale  $\sigma_p = (v_1, \dots, v_m)$  in  $T_pM$  con  $v_m = w/|w|$  ed indichiamo con  $J_1^w, \dots, J_m^w$  i campi di Jacobi che soddisfano il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{D^2 J_h^w}{dt^2} + R(J_h^w(t), \dot{\gamma}_w(t)) \dot{\gamma}_w(t) = 0, \\ J_h^w(0) = 0, \quad \frac{DJ_h^w(0)}{dt} = v_h, \end{cases} \quad 1 \leq h \leq m.$$

Nota che  $J_m^w(t) = t|w|^{-1}\dot{\gamma}_w(t)$  per  $0 \leq t \leq 1$ .

Ricordiamo che i valori  $J_h^w(1) \in T_{\exp(w)}M$  sono le immagini dei vettori  $v_h$  mediante il differenziale dell'applicazione esponenziale nel punto  $w$ . Con queste notazioni, abbiamo

LEMMA XXIV.4.2. *Con le notazioni introdotte sopra, abbiamo*

$$(24.4.2) \quad F_p(\text{Exp}_p(w)) = \sqrt{|\det(J_1, \dots, J_{m-1})(1)|}.$$

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione segue dal fatto che i campi  $J_h^w$  sono ortogonali alla velocità  $\dot{\gamma}_w$  lungo la geodetica e  $g_{i,j}(\text{Exp}_p(w)) = g_{i,j}(J_i^w(1), J_j^w(1))$  per  $1 \leq i, j \leq m$ .  $\square$

La funzione introdotta nel Lemma XXIV.4.1 soddisfa una disuguaglianza relativa alla curvatura di Ricci. Vale infatti la

PROPOSIZIONE XXIV.4.3. *Sia  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, t_0], M)$  una geodetica uscente dal punto  $p \in M$ , con supporto contenuto in un suo intorno normale, ed  $F_p$  la funzione definita nel Lemma XXIV.4.1. Posto*

$$\phi(q) = \frac{1}{t} \sqrt{m-1} \sqrt{\gamma(t)},$$

vale la disuguaglianza

$$(24.4.3) \quad \frac{D^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{m-1} r(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\phi \leq 0.$$

COROLLARIO XXIV.4.4. *Supponiamo che  $(M, g)$  sia completa e che esista una costante  $a > 0$  tale che*

$$(24.4.4) \quad r(X, X) \geq (m-1)a^2 g(X, X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Allora ogni geodetica  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$ , con  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$  ha un punto coniugato  $\gamma(t_0)$  di  $\gamma(0)$  con  $0 < t_0 \leq \pi/a$ .

Da questa ricaviamo il <sup>1</sup>

TEOREMA XXIV.4.5 (Myers). *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana completa, la cui curvatura di Ricci soddisfi, per una costante  $c > 0$ , la disuguaglianza*

$$(24.4.5) \quad r(X, X) \geq cg(X, X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Allora  $M$  è compatta, con diametro  $\leq \pi/c$ , ed il suo gruppo fondamentale è finito.

## XXIV.5. Curvatura scalare

DEFINIZIONE XXIV.5.1. La *curvatura scalare* di una varietà Riemanniana  $(M, g)$  è la traccia del suo tensore di Ricci, cioè la funzione

$$(24.5.1) \quad s(p) = \text{tr Ric}_p = \sum_{i=1}^m r(X_i, X_i), \quad \text{con } (X_1, \dots, X_p) \in \mathbf{O}_p(M).$$

OSSERVAZIONE XXIV.5.2. Su ogni varietà  $M$  è possibile definire una metrica con curvatura scalare costante.

<sup>1</sup>S.B. Myers: *Riemannian manifolds in the large*, Duke Math.J. **1**, 39-49, (1935).

PROPOSIZIONE XXIV.5.3. *Il tensore di Ricci e la curvatura scalare sono legati dalla relazione*

$$(24.5.2) \quad \delta r = -\frac{1}{2}ds.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un riferimento ortonormale  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ , definito in un intorno aperto  $U$  di un punto  $p_0 \in M$ . La curvatura scalare si può allora scrivere nella forma

$$s = \sum_{i,j=1}^m R(X_i, X_j, X_i, X_j).$$

Il suo differenziale è

$$\begin{aligned} ds(X) &= \sum (\nabla_X R)(X_i, X_j, X_i, X_j) \\ &\quad - 2 \sum R(\nabla_X X_i, X_j, X_i, X_j) - 2 \sum R(X_i, \nabla_X X_j, X_i, X_j) \\ &= - \sum (\nabla_{X_i} R)(X_j, X, X_i, X_j) - \sum (\nabla_{X_j} R)(X, X_i, X_i, X_j) \\ &\quad - 2 \sum R(\nabla_X X_i, X_j, X_i, X_j) - 2 \sum R(X_i, \nabla_X X_j, X_i, X_j) \\ &= 2 \sum (\nabla_{X_i} R)(X, X_j, X_i, X_j) - 2R(\nabla_X X_i, X_j, X_i, X_j) \end{aligned}$$

□

### XXIV.6. Metriche di Einstein

DEFINIZIONE XXIV.6.1. Una metrica pseudo-Riemanniana  $g$  su  $M$  si dice *di Einstein* il suo tensore di Ricci è un multiplo costante della metrica, se cioè esiste una costante  $\lambda$  tale che

$$(24.6.1) \quad r = \lambda g.$$

OSSERVAZIONE XXIV.6.2. La nozione di metrica di Einstein è interessante quando la dimensione  $m$  di  $M$  è maggiore o uguale a quattro. Infatti la curvatura è sempre nulla se  $m = 1$  e, nei casi  $m = 2, 3$  la nozione di metrica di Einstein coincide con quella di curvatura sezionale costante. Abbiamo infatti, per le (24.3.1) ed (24.6.1),

$$R(X_1, X_2, X_1, X_2) = \lambda(g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - |g(X_1, X_2)|^2).$$

OSSERVAZIONE XXIV.6.3. Se  $c$  è una costante positiva, il tensore di Ricci della metrica  $c \cdot g$  è lo stesso di quello della metrica  $g$ . La costante  $\lambda$  si cambia quindi in  $\lambda/c$ . A meno di un cambiamento conforme della metrica, potremo quindi supporre sempre, se vogliamo, che la costante  $\lambda$  in (24.6.1) sia uguale ad 1, o  $-1$ , o 0.





## Spazi simmetrici

### XXV.1. Spazi affini localmente simmetrici

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$ , con una connessione affine definita dalla derivazione covariante  $\nabla$ . Fissiamo un punto  $p$  di  $M$  ed intorno  $V_0(p)$  di  $0$  in  $T_pM$ , ed  $U_p$  di  $p$  in  $M$  tali che l'esponenziale in  $p$  sia definito su  $V_0(p)$  e sia un diffeomorfismo di  $V_0(p)$  su  $U_p$ . Ricordiamo che l'esponenziale  $\exp_p : V_0(p) \rightarrow U_p$  è definito da  $\exp_p(X) = \phi_{p,X}(1)$ , se  $\phi_{p,X}(t)$  è la geodetica di punto iniziale  $p$  e velocità iniziale  $X \in T_pM$ . Possiamo supporre che  $V_0(p)$  sia simmetrico rispetto all'origine e definire quindi la *simmetria geodetica rispetto al punto  $p$*  mediante la corrispondenza:

$$(25.1.1) \quad U_p \ni q = \exp_p(X) \xrightarrow{s_p} q' = \exp_p(-X) \in U_p.$$

Osserviamo che  $s_p$  è un diffeomorfismo di  $U_p$ , con  $ds_p(p) = -I$  ( $I$  è qui l'identità su  $T_pM$ ) ed  $s_p^2 = s_p \circ s_p = \text{id}_{U_p}$ .

**DEFINIZIONE XXV.1.1.** Diciamo che  $(M, \nabla)$  è una *varietà affine localmente simmetrica* se per ogni punto  $p$  di  $M$  esiste un intorno aperto  $U_p$  di  $p$  in  $M$  su cui la simmetria affine sia definita e sia una trasformazione affine.

Ricordiamo brevemente la definizione di trasformazione affine. Consideriamo in primo luogo il concetto di trasporto parallelo. Se  $(M, \nabla)$  è uno spazio affine ed  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ , con  $\alpha(0) = p_0$  e  $\alpha(1) = p_1$ , una curva differenziabile, per ogni vettore  $X_0 \in T_{p_0}M$  indichiamo con  $[\alpha]_*(X_0)$  il vettore  $X_1 \in T_{p_1}M$ , definito dal valore  $X_1 = X(1)$  del campo di vettori  $[0, 1] \ni t \rightarrow X(t) \in TM$  lungo  $\alpha$ , con valore iniziale  $X(0) = X_0$ , definito dal problema di Cauchy per il sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \frac{DX(t)}{dt} = \nabla_{\dot{\alpha}(t)}X(t) = 0, \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Se ora  $(N, \nabla')$  è un'altra varietà affine, un'applicazione differenziabile  $f : M \rightarrow N$  si dice *affine* se preserva il trasporto parallelo, se cioè, per ogni coppia di punti  $p_0, p_1$  di  $M$  che siano estremi di un cammino differenziabile  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ , per ogni  $X_0 \in T_{p_0}M$  risulta:

$$df(p_1)([\alpha]_*(X_0)) = [f \circ \alpha]_*(df(p_0)(X_0)).$$

Se  $f : M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo, esso definisce un'applicazione bigettiva  $\mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow f_*(X) \in \mathfrak{X}(N)$ . In questo caso, la  $f$  è una trasformazione affine se e soltanto se preserva la derivazione covariante, cioè se e soltanto se  $f_*(\nabla_X Y) = \nabla'_{f_*(X)} f_*(Y)$  per ogni coppia  $X, Y$  di campi di vettori di  $M$ .

**TEOREMA XXV.1.2.** *Uno spazio affine  $(M, \nabla)$  è localmente simmetrico se e soltanto se il suo tensore di torsione  $T$  e il suo tensore di curvatura  $R$  soddisfano le*

equazioni:

$$(25.1.2) \quad T = 0, \quad \nabla_X R = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che  $(M, \nabla)$  sia localmente simmetrica. In particolare, per ogni punto  $p \in M$ , il differenziale in  $p$  della simmetria rispetto al punto  $p$  è il differenziale di un'affinità. Preserva quindi torsione e curvatura. Ricordiamo che la torsione  $T$  è definita da:  $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . In un qualsiasi punto  $p$  avremo, applicando il differenziale  $ds_p = -I$ :

$$T(X_p, Y_p) = -(T(-X_p, -Y_p)) = -T(X_p, Y_p)$$

e quindi  $T(X_p, Y_p) = 0$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  ed ogni  $p \in M$ . Ciò dimostra che la torsione è nulla. Analogamente, se  $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$  e  $p \in M$ , otteniamo:

$$[(\nabla_X R)(Y, Z)T]_p = -[(\nabla_{-X} R)(-Y, -Z)(-T)]_p = -[(\nabla_X R)(Y, Z)T]_p$$

e quindi anche  $\nabla_X R = 0$ . □

Per concludere la dimostrazione, proveremo più in generale il:

LEMMA XXV.1.3. *Siano  $(M, \nabla)$  ed  $(M', \nabla')$  due spazi affini. Supponiamo che, dette  $T$  ed  $R$  torsione e curvatura di  $(M, \nabla)$  e  $T'$  ed  $R'$  quelle di  $(M', \nabla')$ , risulti:*

$$\nabla_X T = 0, \quad \nabla_{X'} T' = 0, \quad \nabla_X R = 0, \quad \nabla_{X'} R' = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall X' \in \mathfrak{X}(N).$$

Siano  $p \in M, q \in N$  due punti per cui esista un isomorfismo lineare  $L: T_p M \rightarrow T_q N$  tale che:

$$\begin{cases} L(T(v_1, v_2)) = T'(L(v_1), L(v_2)), \\ L(R(v_1, v_2)v_3) = R'(L(v_1), L(v_2))L(v_3) \\ \forall v_1, v_2, v_3 \in T_p M. \end{cases}$$

Allora esistono intorno aperti  $U_p$  di  $p$  in  $M, W_q$  di  $q$  in  $N$  ed un diffeomorfismo affine  $f: U_p \rightarrow U_q$  con  $df(p) = L$ . Tale  $f$  è essenzialmente unica, è cioè univocamente determinata da  $L$  nella componente connessa di  $p$  dell'intorno aperto di  $p$  in  $M$  su cui è definita.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $U_p = \exp_p(V_0(p))$  un intorno normale di  $p$  in  $M$ . Siano  $X_1, \dots, X_m$  campi di vettori in  $U_p$  ottenuti mediante il trasporto parallelo, lungo le geodetiche uscenti da  $p$ , di una base  $X_1(p), \dots, X_m(p)$  di  $T_p M$ . L'ipotesi che curvatura e torsione abbiano differenziale covariante nullo ci dice che le componenti della torsione  $T$  e della curvatura  $R$ , calcolate rispetto ai campi  $X_1, \dots, X_m$ , sono costanti in  $U_p$ .

Siano ora  $X'_1, \dots, X'_m$  i campi di vettori, definiti in un intorno normale  $U_{p'} = \exp_{p'}(V'_0(p'))$ , paralleli lungo le geodetiche uscenti da  $p'$ , con  $X'_j(p') = L(X_j(p))$ . Per l'ipotesi che torsione e curvatura abbiano differenziale covariante nullo, le componenti della torsione  $T'$  e della curvatura  $R'$ , calcolate rispetto ai campi  $X'_1, \dots, X'_m$ , sono costanti. Poiché tali componenti coincidono con quelle di  $T$  e di  $R$  in  $p'$ , esse coincidono, essendo costanti, su tutto  $U_{p'}$ . Siano  $\Phi_p$  e  $\Phi_{p'}$  le applicazioni  $\Phi_p(t_1, \dots, t_m) = \exp_p(t_1 X_1(p) + \dots + t_m X_m(p))$  e  $\Phi_{p'}(t_1, \dots, t_m) = \exp_{p'}(t_1 X'_1(p') + \dots + t_m X'_m(p'))$ . A meno di restringere gli intorni normali  $U_p$  e  $U_{p'}$ , posto  $A =$

$\{\sum_{i=1}^m t_i^2 < r^2\} \subset \mathbb{R}^m$ , l'affinità locale cercata si può definire mediante il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi_p} & U_p \\ \Phi_{p'} \downarrow & \nearrow f & \\ U'_{p'} & & \end{array}$$

Il fatto che la  $f$  così costruita sia un'affinità, segue dall'unicità della soluzione delle equazioni di struttura<sup>1</sup>.  $\square$

**DEFINIZIONE XXV.1.4.** Diciamo che una varietà Riemanniana  $(M, g)$  è localmente simmetrica se ogni punto  $p$  di  $M$  ammette un intorno normale in cui la simmetria geodetica (rispetto alla connessione di Levi-Civita) sia un'isometria locale.

**TEOREMA XXV.1.5.** Una varietà Riemanniana  $(M, g)$  è localmente simmetrica se e soltanto se la sua curvatura sezionale è invariante rispetto al trasporto parallelo.

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $(M, g)$  è localmente simmetrica, allora il suo tensore di curvatura, e quindi a maggior ragione la sua curvatura sezionale, è invariante per trasporto parallelo. Il viceversa segue dalle proprietà algebriche del tensore di curvatura: se  $s_p$  è la simmetria geodetica rispetto al punto  $p$ , consideriamo il tensore  $B(X, Y, Z, T) = R(X, Y, Z, T) - R(s_p(X), s_p(Y), s_p(Z), s_p(T))$ , definito quando  $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(U_p)$  per un intorno normale simmetrico  $U_p$  di  $p \in M$ . Esso è antisimmetrico rispetto alla prima e alla seconda coppia di indici e simmetrico per lo scambio della prima con la seconda coppia di indici. Quindi esso si annulla identicamente perché, per l'ipotesi dell'invarianza rispetto alla simmetria geodetica della curvatura sezionale, abbiamo  $B(X, Y, X, Y) = 0$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(U_p)$ . Da questo si deduce l'invarianza di  $R$  rispetto al trasporto parallelo. Resta da verificare che le simmetrie geodetiche di una varietà Riemanniana, quando siano trasformazioni affini, sono anche isometrie. Questo è il contenuto del lemma seguente.  $\square$

**LEMMA XXV.1.6.** Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana connessa e sia  $\phi : M \rightarrow M$  un'affinità per la connessione di Levi-Civita. Se, per un punto  $p_0$  di  $M$ , il differenziale  $d\phi(p_0) : T_{p_0}M \rightarrow T_{\phi(p_0)}M$  è un'isometria di spazi Euclidei, allora  $\phi : M \rightarrow M$  è un'isometria.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $q$  un qualsiasi punto di  $M$  e sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  una curva differenziabile con  $\gamma(0) = q, \gamma(1) = p_0$ . Sia  $\tau : T_qM \rightarrow T_{p_0}M$  il trasporto parallelo

<sup>1</sup>Ricordiamo che le equazioni di struttura sono le:

$$\begin{cases} d\omega^i = -\omega_h^i \wedge \omega^h + \frac{1}{2}T_{j,h}^i \omega^j \wedge \omega^h \\ d\omega_j^i = -\omega_h^i \wedge \omega_j^h + \frac{1}{2}R_{j,h,k}^i \omega^h \wedge \omega^k \end{cases}$$

con  $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{i,j}^h X_h, T(X_i, X_j) = T_{i,j}^h X_h, R(X_h, X_k)X_j = R_{j,h,k}^i X_i, \omega^i(X_j) = \delta_j^i, \omega_j^i = \Gamma_{h,j}^i \omega^h$ . Le forme  $\omega^i$  ci consentono di calcolare le coordinate normali nell'intorno del punto  $p$ , quando i campi di vettori  $X_i$  siano scelti come nella dimostrazione del lemma.

lungo la curva  $\gamma$ . Se  $X, Y \in T_{p_0}M$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} g_q(X, Y) &= g_{p_0}(\tau(X), \tau(Y)) \\ &\text{perché il trasporto parallelo preserva il prodotto scalare,} \\ &= g_{\phi(p_0)}(d\phi(p_0)(\tau(X)), d\phi(p_0)(\tau(Y))) \\ &\text{per l'ipotesi che } d\phi(p_0) \text{ sia un'isometria,} \\ &= g_{\phi(q)}(d\phi(q)(X), d\phi(q)(Y)) \end{aligned}$$

perché, essendo una trasformazione affine, la  $d\phi$  commuta con l'operazione di trasporto parallelo, trasporta cioè vettori paralleli lungo la curva  $\gamma$  in vettori paralleli lungo la curva  $\phi \circ \gamma$ .  $\square$

### XXV.2. Alcuni risultati sui gruppi di trasformazioni

Premettiamo allo studio del gruppo  $\mathbf{I}(M, g)$  delle isometrie di una varietà Riemanniana  $(M, g)$  alcuni risultati generali sui gruppi di trasformazioni di una varietà differenziabile. Vale il:

**TEOREMA XXV.2.1.** *Siano  $M$  una varietà differenziabile numerabile all'infinito e  $\mathbf{G}$  un gruppo di diffeomorfismi di  $M$  in sé. Denotiamo con  $\mathfrak{G}$  l'insieme dei campi di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  che generano sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{G}$ .*

*Se la sottoalgebra di Lie reale di  $\mathfrak{X}(M)$  generata da  $\mathfrak{G}$  ha dimensione finita, allora  $\mathfrak{G}$  è un'algebra di Lie e possiamo definire su  $\mathbf{G}$  una struttura di gruppo di Lie di trasformazioni di  $M$ , con algebra di Lie (isomorfa a)  $\mathfrak{G}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $X \in \mathfrak{G}$ , indichiamo con  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \text{Exp}(tX) \in \mathbf{G}$  il gruppo a un parametro di diffeomorfismi generato da  $X$ . Siano  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  la sottoalgebra di Lie reale di  $\mathfrak{X}(M)$  generata da  $\mathfrak{G}$ ,  $\tilde{\mathbf{G}}$  un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ , ed  $\exp : \mathfrak{G} \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}$  la corrispondente applicazione esponenziale. Ogni  $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  è generatore infinitesimale di un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di  $M$ , che denoteremo ancora con  $\text{Exp}(tX)$ :

$$\begin{aligned} V_X \ni (t, p) &\longrightarrow \text{Exp}(tX)p \in M, \quad \{0\} \times M \subset V_X^{\text{aperto}} \subset \mathbb{R} \times M, \\ \text{Exp}(0X)p &= p, \quad \frac{d}{dt} \text{Exp}(tX)p = X_{\text{Exp}(tX)p}, \quad \forall p \in M, \quad \forall (t, p) \in V_X. \end{aligned}$$

I campi  $X$  di  $\mathfrak{G}$  sono completi e quindi porremo  $V_X = (\mathbb{R} \times M)$ , se  $X \in \mathfrak{G}$ .

Poiché abbiamo supposto che  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  sia di dimensione finita, per i teoremi di esistenza e unicità e dipendenza  $\mathcal{C}^\infty$  dai dati iniziali per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie, possiamo trovare un intorno aperto  $\mathcal{U}$  di  $(\{e\} \times M)$  in  $(\tilde{\mathbf{G}} \times M)$  tale che, se  $(g, p) \in \mathcal{U}$ , allora vi sono  $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  e  $t \in \mathbb{R}$  tali che  $(t, p) \in V_X$  e  $g = \text{Exp}(tX)$ .

Per completare la dimostrazione, proviamo ora alcuni lemmi.  $\square$

**LEMMA XXV.2.2.** *Siano  $X, Y \in \mathfrak{G}$ . Allora  $Z = \text{Ad}(\text{Exp}(X))(Y) \in \mathfrak{G}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo verificare che  $Z$  genera un sottogruppo a un parametro di  $\mathbf{G}$ . Poiché

$$M \ni p \rightarrow \text{Exp}(tZ)p = \text{Exp}(X) \circ \text{Exp}(tY) \circ \text{Exp}(-X)p \in M$$

definisce per ogni  $t \in \mathbb{R}$  una trasformazione di  $\mathbf{G}$ , il campo  $Z$  è completo ed appartiene a  $\mathfrak{G}$ .  $\square$

LEMMA XXV.2.3.  $\mathfrak{G}$  genera  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  come spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con  $W$  il sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  generato da  $\mathfrak{G}$ . Per il lemma precedente, abbiamo  $\text{Ad}(\exp(\mathfrak{G}))(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G}$  e quindi, per linearità, abbiamo anche  $\text{Ad}(\exp(\mathfrak{G}))(W) \subset W$ . Poiché  $\mathfrak{G}$  genera  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  come algebra di Lie,  $\exp(\mathfrak{G})$  genera  $\tilde{\mathbf{G}}$  come gruppo. L'insieme degli elementi  $g \in \tilde{\mathbf{G}}$  per cui  $\text{Ad}(g)(W) \subset W$  è un sottogruppo di  $\tilde{\mathbf{G}}$ . Ne segue che  $\text{Ad}(\tilde{\mathbf{G}})(W) \subset W$ . Otteniamo in particolare che  $\text{Ad}(\exp(W))(W) \subset W$ , che ci dà, differenziando,  $[W, W] \subset W$ . Quindi  $W$  è un'algebra di Lie e perciò coincide con  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ .  $\square$

LEMMA XXV.2.4.  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$ .

DIMOSTRAZIONE. Siano  $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{G}$  una base di  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  come spazio vettoriale. Allora l'applicazione

$$t_1 X_1 + \dots + t_n X_n \rightarrow \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_n X_n)$$

è un diffeomorfismo di un intorno  $N_0$  di 0 in  $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$  su un intorno  $U_\epsilon$  dell'identità  $e$  di  $\tilde{\mathbf{G}}$ . Quindi, se  $Y \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ , possiamo trovare un  $\epsilon > 0$  e funzioni  $a_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $\sum_{i=1}^n a_i(t) X_i \in N_0$  ed

$$\exp(tY) = \exp(a_1(t) X_1) \cdots \exp(a_n(t) X_n) \quad \text{in } \tilde{\mathbf{G}} \text{ se } |t| < \epsilon.$$

Questa uguaglianza ci dà la

$$\text{Exp}(tY) = \text{Exp}(a_1(t) X_1) \circ \cdots \circ \text{Exp}(a_n(t) X_n) \quad \text{su } M \text{ se } |t| < \epsilon.$$

Definendo  $\text{Exp}(tY) = (\text{Exp}[(t/\nu)Y])^\nu$  se  $|t| < \nu\epsilon$ , otteniamo che  $Y \in \mathfrak{G}$ . Questo completa la dimostrazione del lemma.  $\square$

Proseguiamo nella dimostrazione del Teorema XXV.2.1.

Sia  $\mathbf{G}^*$  il gruppo di diffeomorfismi di  $M$  generato da  $\exp(\mathfrak{G})$ . Poiché  $\mathbf{G}^*$  è generato dai sottogruppi a un parametro contenuti in  $\mathbf{G}$ , abbiamo  $\mathbf{G}^* \subset \mathbf{G}$ . Poiché per ogni  $g \in \mathbf{G}$  ed ogni sottogruppo a un parametro  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow a_t \in \mathbf{G}$  anche  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \text{ad}(g)(a_t) \in \mathbf{G}$  è ancora un sottogruppo a un parametro di  $\mathbf{G}$ , il sottogruppo  $\mathbf{G}^*$  è normale in  $\mathbf{G}$ . Inoltre, l'applicazione  $\text{ad}(g) : \mathbf{G}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$  è continua<sup>2</sup> per la topologia di gruppo di Lie di  $\mathbf{G}^*$ , perché trasforma sottogruppi a un parametro in sottogruppi a un parametro.

Il Teorema XXV.2.1 è conseguenza del lemma seguente.

<sup>2</sup> Un teorema di Chevalley ([Theory of Lie groups. Princeton Univ. Press, 1946], p.128) ci dice che, se  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{G}'$  sono due gruppi di Lie, un omomorfismo algebrico  $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}'$  è un omomorfismo di gruppi di Lie se e soltanto se trasforma sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{G}$  in sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{G}'$ .

LEMMA XXV.2.5. Sia  $\mathbf{G}^*$  un sottogruppo normale di un gruppo  $\mathbf{G}$ . Se  $\mathbf{G}^*$  è un gruppo topologico e le applicazioni  $\text{ad}(g) : \mathbf{G}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$  sono continue per ogni  $g \in \mathbf{G}$ , allora vi è un'unica topologia di gruppo topologico su  $\mathbf{G}$  per cui  $\mathbf{G}^*$  sia aperto in  $\mathbf{G}$ .

DIMOSTRAZIONE. Definiamo su  $\mathbf{G}$  la topologia meno fine per cui sono aperti tutti gli insiemi  $L_g(A)$  con  $A$  aperto di  $\mathbf{G}^*$ . Si verifica facilmente che questa topologia è l'unica con le proprietà richieste nell'enunciato del lemma.  $\square$

OSSERVAZIONE XXV.2.6. In generale la topologia su  $\mathbf{G}$  è più fine della topologia compatta-aperta. Inoltre, non è detto che le componenti connesse di  $\mathbf{G}$ , con la topologia che abbiamo definito, formino un insieme di cardinalità al più numerabile. Possiamo ad esempio considerare l'azione sul gruppo additivo  $\mathbb{R}$ , che identifichiamo alla varietà  $M$ , di un qualsiasi suo sottogruppo  $\mathbf{G}$  totalmente sconnesso: in questo caso  $\mathcal{G} = \{0\}$  e la costruzione che abbiamo fatto ci dà su  $\mathbf{G}$  la topologia discreta.

Ricordiamo che un *parallelismo assoluto* su una varietà differenziabile  $M$  è una sezione  $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{F}(M))$  del fibrato dei suoi sistemi di riferimento. In modo equivalente, è il dato di  $m$  campi di vettori  $X_1, \dots, X_m$  che definiscono in ogni punto  $p \in M$  una base  $(X_1(p), \dots, X_m(p))$  di  $T_p M$ . Un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  definisce un diffeomorfismo di fibrati principali  $\hat{f} : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ .

DEFINIZIONE XXV.2.7. Se  $(M, \sigma)$  è la coppia formata da una varietà differenziabile  $M$  e da un parallelismo assoluto  $\sigma$  assegnato su  $M$ , chiameremo *automorfismi* di  $(M, \sigma)$  i diffeomorfismi  $f : M \rightarrow M$  tali che  $\hat{f} \circ \sigma = \sigma \circ f$ .

Gli automorfismi di  $(M, \sigma)$  formano un gruppo, che denoteremo  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ .

TEOREMA XXV.2.8. Sia  $(M, \sigma)$  la coppia formata da una varietà differenziabile connessa  $M$  numerabile all'infinito e da un parallelismo assoluto  $\sigma$  su  $M$ . Allora  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$  è un gruppo di Lie di trasformazioni con  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{Aut}(M, \sigma) \leq \dim_{\mathbb{R}} M$ . Più precisamente, per ogni  $p \in M$ , l'applicazione

$$(*) \quad \mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni g \rightarrow g(p) \in M$$

è iniettiva e la sua immagine è una sottovarietà chiusa di  $M$ . Vi è un'unica struttura di gruppo di Lie su  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$  per cui la (\*) sia un diffeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\sigma(p) = (X_1(p), \dots, X_m(p))$  e sia  $\mathfrak{B}$  il sottospazio vettoriale reale di  $\mathfrak{X}(M)$  generato da  $X_1, \dots, X_m$ . Per definizione, le trasformazioni di  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$  lasciano  $\mathfrak{B}$  invariante. In particolare gli elementi di  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$  commutano con gli elementi dei sottogruppi a un parametro  $\phi_v(t)$  di diffeomorfismi di  $M$  generati dagli elementi  $v$  di  $\mathfrak{B}$ . Poniamo  $\tau_v = \phi_v(1)$ . Osserviamo che, per ogni punto  $p \in M$ ,  $\tau_v(q)$  è definita per  $v$  in un intorno di 0 in  $\mathfrak{B}$  e  $q$  in un intorno di  $p$  in  $M$ .

LEMMA XXV.2.9. Per ogni  $p \in M$  l'applicazione  $\mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni g \rightarrow g(p) \in M$  è iniettiva.

**DIMOSTRAZIONE.** Per ogni  $g \in \mathbf{Aut}(M, \sigma)$  l'insieme  $F_g = \{q \in M \mid g(q) = q\}$  dei punti fissi di  $g$  è un sottoinsieme chiuso di  $M$ . Fissato un punto  $q \in M$ , al variare di  $v$  in un intorno di 0 in  $\mathfrak{B}$ , gli elementi  $\tau_v(q)$  sono definiti e formano un intorno di  $q$  in  $M$ . Poiché, come abbiamo osservato,  $g \circ \tau_v = \tau_v \circ g$ , otteniamo che  $F_g$  contiene un intorno di  $q$ . Dunque  $F_g$  risulta aperto e chiuso in  $M$  e quindi o è vuoto, o coincide con  $M$  per l'ipotesi che  $M$  sia connesso.  $\square$

Sia  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  ( $T > 0$ ) una curva differenziabile. Risultano allora determinate  $m$  funzioni scalari  $a_\gamma^i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^m a_\gamma^i(t) X_i(\gamma(t))$  per ogni  $t \in [0, T]$ . Due curve differenziabili  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, T] \rightarrow M$  si diranno *parallele nel parallelismo completo*  $\sigma$  se  $a_{\gamma_1}^i(t) = a_{\gamma_2}^i(t)$  per ogni  $t \in [0, T]$ . Osserviamo che, data una curva differenziabile  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  ed un punto  $q_0$ , vi è al più una curva differenziabile  $\gamma'$  parallela a  $\gamma$  ed uscente dal punto  $q_0$ ; esisterà poi comunque, per qualche  $0 < \epsilon \leq T$  sufficientemente piccolo, una  $\gamma' : [0, \epsilon] \rightarrow M$  uscente da  $p_0$  e parallela alla restrizione di  $\gamma$  a  $[0, \epsilon]$ .

**LEMMA XXV.2.10.** *Per ogni  $p_0 \in M$ , l'insieme  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)(p_0)$  è chiuso in  $M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\{a_k\}$  una successione di elementi di  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$  tali che  $\{a_k(p_0)\}$  converga a un elemento  $q_0 \in M$ .

Dimostriamo che ogni curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  uscente dal punto  $p_0$  ammette una parallela  $\gamma' : [0, 1] \rightarrow M$  uscente da  $q_0$ .

A questo scopo, indichiamo con  $T$  l'estremo superiore dei numeri reali  $a > 0$  per cui la restrizione di  $\gamma$  a  $[0, a]$  ammette una parallela  $\gamma'_a$  con punto iniziale  $q_0$ . Vogliamo dimostrare che esiste la parallela  $\gamma'_T$ . A questo scopo, osserviamo che esistono le parallele  $\gamma'_{T'}$  per ogni  $0 < T' < T$  e che per ogni  $t$  con  $0 \leq t < T$ , abbiamo  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\gamma(t)) = \gamma'_{T'}(t)$  per  $0 \leq t \leq T' < T$ .

Fissiamo poi un intorno  $\mathfrak{B}_0$  di 0 in  $\mathfrak{B}$  e un intorno  $U$  di  $\gamma(T)$  in  $M$  tali che  $\tau_v(p)$  sia definita per  $v \in \mathfrak{B}_0$  e  $p \in U$ . Allora  $\tau_v$  è anche definita, per  $v \in \mathfrak{B}_0$ , su tutti gli insiemi  $a_k(U)$ . Sia  $t_0 < T$  tale che  $a_k(\gamma(t_0)) \in U$  per ogni  $k \gg 1$  e  $\gamma(T) = \tau_{v_0}(\gamma(t_0))$  per qualche  $v_0 \in \mathfrak{B}_0$ .

Possiamo allora definire  $\gamma'_T$  ponendo  $\gamma'_T(t) = \gamma'_{T'}(t)$  se  $0 \leq t \leq T' < T$  e  $\gamma'_T(T) = \tau_{v_0}(\gamma'_{T'}(t_0))$  se  $t_0 \leq T' < T$ .

Se fosse  $T < 1$ , potremmo prolungare  $\gamma'_T$  con una parallela a  $\gamma(t - T)$  uscente dal punto  $\gamma'_T(T)$ , contraddicendo la definizione di  $T$ . Quindi  $T = 1$  e questo dimostra l'esistenza della parallela. Poiché  $\gamma'(1) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\gamma(1))$ , l'estremo  $\gamma'(1)$  non dipende dalla scelta del cammino  $\gamma$ , ma soltanto dal suo punto finale  $\gamma(1)$ .

Dimostriamo in questo modo che  $\{a_k(q)\}$  converge per ogni  $q \in M$  e otteniamo quindi un'applicazione  $a : M \rightarrow M$  mediante  $a(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(q)$  per ogni  $q \in M$ . Poiché  $\tau_v(a(q)) = a(\tau_v(q))$  per ogni  $q \in M$ , la  $a$  è chiaramente differenziabile. Si può dimostrare che è invertibile, ripetendo i ragionamenti appena svolti per la successione delle applicazioni inverse  $\{a_k^{-1}\}$ .  $\square$

Abbiamo facilmente:

**LEMMA XXV.2.11.** *Sia  $\mathfrak{l}$  l'algebra di Lie dei campi di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tali che  $[X, \mathfrak{B}] = \{0\}$ . Per ogni  $p \in M$ , l'applicazione  $\mathfrak{l} \ni X \rightarrow X(p) \in T_p M$  è iniettiva.*

**DIMOSTRAZIONE.** I generatori di sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$  sono gli elementi di  $\mathfrak{l}$  che generano sottogruppi a un parametro di diffeomorfismi di  $M$ . Quindi, per il Teorema XXV.2.1, il gruppo  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$  è un gruppo di Lie, e l'applicazione  $\mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni a \rightarrow a(p) \in M$  definisce per ogni  $p \in M$  un diffeomorfismo di  $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$  con una sottovarietà differenziabile chiusa di  $M$ .  $\square$

Completiamo ora la dimostrazione del Teorema XXV.2.8. L'insieme  $\mathfrak{G}$  dei campi di vettori  $X \in \mathfrak{l}$  che generano sottogruppi a un parametro di trasformazioni di  $M$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{l}$ , e quindi ha dimensione finita. Possiamo perciò applicare il Teorema XXV.2.1 al gruppo  $\mathbf{G} = \mathbf{Aut}(M, \sigma)$  e a  $\mathfrak{G}$ , e concludere che  $\mathbf{G}$  ha una struttura di gruppo di Lie con algebra di Lie  $\mathfrak{G}$ . Poiché l'azione  $\mathbf{G} \times M \rightarrow M$  è differenziabile, fissato un qualsiasi punto  $p_0 \in M$ , l'immersione differenziabile  $\mathbf{G} \ni g \rightarrow g(p_0) \in M$  è un diffeomorfismo di  $\mathbf{G}$  con una sottovarietà differenziabile chiusa di  $M$ .  $\square$

Ricordiamo che vale il teorema<sup>3</sup> :

**TEOREMA XXV.2.12 (Bochner-Montgomery).** *Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico localmente compatto e numerabile all'infinito di trasformazioni differenziabili di una varietà differenziabile paracompatta  $M$ . Allora  $\mathbf{G}$  è un gruppo di Lie.*

Ricordiamo ancora<sup>4</sup> il :

**TEOREMA XXV.2.13 (Dantzig-van der Waerden).** *Sia  $(E, d)$  uno spazio metrico localmente compatto. Sia  $\mathbf{Isom}(E, d)$  il gruppo delle isometrie di  $(E, d)$  e, per  $x \in E$ , indichiamo con  $\mathbf{Isom}_x(E, d)$  lo stabilizzatore di  $x$  in  $\mathbf{Isom}(E, d)$ . Consideriamo su  $\mathbf{Isom}(E, d)$  la topologia compatta-aperta. Allora  $\mathbf{Isom}(E, d)$  è localmente compatto e  $\mathbf{Isom}_x(E, d)$  è compatto per ogni  $x \in E$ . Se  $M$  è compatto, anche  $\mathbf{Isom}(E, d)$  è compatto.*

**OSSERVAZIONE XXV.2.14.** Ricordiamo ancora che, se  $(M, g)$  è una varietà Riemanniana e  $d$  è la distanza nella metrica corrispondente, allora le isometrie  $f : M \rightarrow M$  per la metrica  $d$  sono applicazioni differenziabili che preservano il tensore  $g$  della metrica. Indicheremo nel seguito con  $\mathbf{O}(M, g)$  il gruppo delle isometrie della varietà Riemanniana  $(M, g)$ , cioè :

$$\mathbf{O}(M, g) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, M) \mid f^*g = g\}.$$

Se  $d$  è la distanza su  $M$  definita dalla metrica  $g$ , allora  $\mathbf{Isom}(M, d) = \mathbf{O}(M, g)$ .

<sup>3</sup>S.Bochner, D.Montgomery *Locally compact groups of differentiable transformations*, Ann. of Math. **47** (1946), pp.639-657.

<sup>4</sup>D.Dantzig, B.L.van der Waerden *Über metrisch homogene Räume*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6** (1928) pp.374-376. Una dimostrazione completa si può trovare anche in: Kobayashi-Nomizu *Foundations of Differential Geometry*, New York: John Wiley & Sons, vol.1, 1963, alle pagine 46-50.



### XXV.3. Automorfismi affini e isometrie

Per utilizzare i risultati del §XXV.2 nella discussione del gruppo delle affinità di una varietà affine  $(M, \nabla)$  e delle isometrie di una varietà Riemanniana  $(M, g)$ , è conveniente riformulare le nozioni di varietà affini e riemanniane nel contesto della teoria delle **G**-strutture.

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$ . Indichiamo con :

$$\mathfrak{F}(M) \xrightarrow[\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})]{\pi} M$$

il fibrato principale dei sistemi di riferimento su  $M$ .

Gli elementi della fibra  $\mathfrak{F}_p(M) = \pi^{-1}(p)$  sono le basi  $(v_1, \dots, v_m)$  di  $T_p M$ . Il gruppo  $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$  opera a destra su  $\mathfrak{F}(M)$  mediante :

$$(v_1, \dots, v_m) \cdot a = \left( \sum_{i=1}^m a_1^i v_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_m^i v_i \right) \quad \text{se} \quad a = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Se  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$  è una  $m$ -upla di campi di vettori che definiscono una base di  $T_p M$  in ogni punto  $p$  di un aperto  $U$  di  $M$ , allora l'applicazione :

$$U \times \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \ni (p, a) \rightarrow \sigma(p) \cdot a \in \pi^{-1}(U)$$

è un diffeomorfismo per la struttura differenziabile di  $\mathfrak{F}(M)$ .

In modo equivalente, possiamo definire la fibra  $\mathfrak{F}_p(M)$  sopra il punto  $p \in M$  come l'insieme di tutte le applicazioni lineari invertibili  $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$ , identificando una base  $(v_1, \dots, v_m)$  di  $T_p M$  all'isomorfismo lineare  $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$  che associa al vettore  $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{\rightarrow} 1, 0, \dots, 0)$  della base canonica di  $\mathbb{R}^m$  il vettore  $v_i$  di  $T_p M$ .

Definiamo allora in modo affatto naturale la forma canonica  $\theta \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m)$  mediante :

$$\theta(v) = \xi^{-1}(d\pi(v)) \quad \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \quad \forall v \in T_\xi \mathfrak{F}(M).$$

Osserviamo che :

$$(R_a)^* \theta = a^{-1} \circ \theta \quad \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Infatti, se  $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$ , allora  $dR_a(v) \in T_{\xi \cdot a} \mathfrak{F}(M)$  e  $d\pi(dR_a(v)) = d\pi(v)$ . Quindi :

$$(R_a)^* \theta(v) = \theta(dR_a(v)) = (\xi \cdot a)^{-1}(d\pi(dR_a(v))) = a^{-1} \circ \xi^{-1}(d\pi(v)) = a^{-1} \circ \theta(v).$$

**PROPOSIZIONE XXV.3.1.** *Ogni diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  si solleva in modo unico ad un diffeomorfismo  $\hat{f} : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  che lascia  $\theta$  invariante. Viceversa, ogni automorfismo di  $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ -fibrato principale  $F : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  che lasci  $\theta$  invariante è il sollevamento di un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $f : M \rightarrow M$  un diffeomorfismo. Definiamo allora il suo sollevamento  $\hat{f}$  mediante :

$$\hat{f} : \mathfrak{F}(M) \ni \xi \rightarrow df(\pi(\xi)) \circ \xi \in \mathfrak{F}(M).$$

Abbiamo allora, se  $\xi \in \mathfrak{F}(M)$  e  $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$  :

$$\begin{aligned} \theta(d\hat{f}(v)) &= (df(\pi(\xi)) \circ \xi)^{-1} (d\pi(d\hat{f}(\xi)(v))) \\ &= (\xi^{-1} \circ (df(\pi(\xi)))^{-1}) (df(\pi(\xi)) \circ d\pi(v)) = \theta(v). \end{aligned}$$

Infatti, poiché  $\hat{f}$  preserva le fibre, abbiamo  $f \circ \pi = \pi \circ \hat{f}$  e quindi  $df \circ d\pi = d\pi \circ d\hat{f}$ .

Viceversa, se  $F : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  preserva le fibre e lascia  $\theta$  invariante, detto  $f : M \rightarrow M$  il diffeomorfismo definito da  $\pi \circ F = f \circ \pi$ , osserviamo che  $\Phi = \hat{f}^{-1} \circ F$  è un automorfismo differenziabile di  $\mathfrak{F}(M)$  che preserva la fibra, lascia  $\theta$  invariante e induce l'identità su  $M$ . Perciò abbiamo :

$$\begin{aligned} \xi^{-1}(d\pi(v)) &= \theta(v) = \Phi^*(\theta(v)) = \theta(d\Phi(v)) \\ &= (\Phi(\xi))^{-1}(d\pi(d\Phi(v))) = (\Phi(\xi))^{-1}(d\pi(v)) \\ &\quad \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \quad \forall v \in T_\xi \mathfrak{F}(M). \end{aligned}$$

Otteniamo dunque  $(\Phi(\xi))^{-1}(w) = \xi^{-1}(w)$  per ogni  $w \in T_{\pi(\xi)}M$ , e questo dimostra che  $\Phi$  è l'identità su  $\mathfrak{F}(M)$ .  $\square$

**DEFINIZIONE XXV.3.2.** Per ogni  $A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ , definiamo il *campo di vettori fondamentale*  $A^* \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M))$  associato ad  $A$  come il generatore infinitesimale del gruppo a un parametro di diffeomorfismi  $\mathfrak{F}(M) \times \mathbb{R} \ni (\xi, t) \rightarrow \xi \cdot \exp(tA) \in \mathfrak{F}(M)$ .

Una *connessione affine* su  $M$  si può definire, oltre che per mezzo della derivazione covariante, mediante l'assegnazione di una *forma di connessione*, cioè di una forma differenziale  $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$  che goda delle proprietà :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \omega(A^*) = A \quad \forall A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \\ (2) \quad & R_a^* \omega = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega \quad \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Un vettore  $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$  con  $\omega(v) = 0$  si dice *orizzontale*. Poiché  $\omega(\xi) : T_\xi \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$  ha rango  $m^2$  e  $\ker d\pi(\xi) \cap \ker \omega(\xi) = \{0\}$  per la proprietà (1), la forma di connessione  $\omega$  ci permette di decomporre lo spazio tangente a  $\mathfrak{F}(M)$  in un punto  $\xi$  nella somma diretta dei due sottospazi  $\mathfrak{V}_\xi(M) = \ker d\pi(\xi)$  dei *vettori verticali in  $\xi$*  e  $\mathfrak{H}_\xi(M)$  dei<sup>5</sup> *vettori orizzontali in  $\xi$* .

Poiché  $d\pi(\xi) : \mathfrak{H}_\xi(M) \rightarrow T_{\pi(\xi)}M$  è per ogni  $\xi \in \mathfrak{F}(M)$  un isomorfismo lineare, possiamo associare ad ogni campo di vettori  $X$  definito su un aperto  $U$  di  $M$  un campo di vettori orizzontale  $\tilde{X}$  su  $\pi^{-1}(U)$ , caratterizzato dalle :

$$\begin{cases} \omega(\tilde{X}) = 0 \\ d\pi(\tilde{X}) = X. \end{cases}$$

La derivazione covariante associata alla connessione affine è definita dalla formula :

$$(\dagger) \quad \nabla_X Y(\pi(\xi)) = \xi \circ \tilde{X}_\xi(\xi^{-1}(Y)) = \xi \circ \tilde{X}(\theta(\tilde{Y})) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall \xi \in \mathfrak{F}(M),$$

dove osserviamo che, fissato  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , la  $\xi \rightarrow \Psi_Y(\xi) = \xi^{-1}(Y(\pi(\xi)))$  è una funzione differenziabile su  $\mathfrak{F}(M)$  a valori in  $\mathbb{R}^m$ . Chiaramente :

$$\begin{cases} R_a^* \Psi_Y(\xi) = \Psi_Y(\xi \cdot a) = (\xi \cdot a)^{-1} Y(\pi(\xi \cdot a)) = a^{-1} \xi^{-1} Y(\pi(\xi)) = a^{-1} \Psi_Y(\xi) \\ \forall Y \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \quad \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}), \end{cases}$$

<sup>5</sup> Un modo equivalente di definire una connessione affine è quello di assegnare una distribuzione vettoriale  $\mathfrak{H}$  su  $\mathfrak{F}(M)$ , complementare della distribuzione verticale.

e quindi :

$$\begin{aligned} R_a^*(\xi \circ \tilde{X}(\Psi_Y)) &= (\xi \circ a) \circ (R_{a*}\tilde{X})(\Psi_Y) = (\xi \circ a) \circ \tilde{X}(R_a^*\Psi_Y) \\ &= \xi \circ a \circ \tilde{X}(a^{-1}\Psi_Y) = \xi \circ a \circ a^{-1} \circ \tilde{X}(\Psi_Y) = \xi \circ \tilde{X}(\Psi_Y) \end{aligned}$$

mostra che la derivata covariante  $\nabla_X Y$  è ben definita dalla ( $\dagger$ ), perché il valore del secondo membro è costante quando  $\xi$  varia sulla fibra  $\mathfrak{F}_p(M)$  del punto  $p \in M$ .

Viceversa, si può dimostrare che, data di una derivazione covariante  $\nabla$ , vi è un'unica forma di connessione  $\omega$  per cui vale la ( $\dagger$ ).

Abbiamo infatti :

$$\xi \circ (X - [\omega(X)]^*)(\theta(\tilde{Y})) = \nabla_{d\pi(X)} Y \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M)), \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Quindi:

$$(\ddagger) \quad [\omega(X)]^*(\theta(\tilde{Y})) = X(\theta(\tilde{Y})) - \xi^{-1} \nabla_{d\pi(X)} Y \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M)), \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$$

ci permette di calcolare  $\omega$  utilizzando la forma canonica  $\theta$  e la derivazione covariante.

**TEOREMA XXV.3.3.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile, dotata di una connessione affine definita dalla forma di connessione  $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ . Un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  è un'affinità se e soltanto se il suo sollevamento  $\hat{f}$  lascia invariante la forma di connessione  $\omega$ .*

*Viceversa, un diffeomorfismo di fibrati principali  $F : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  è il sollevamento di un'affinità se e soltanto se lascia invarianti la forma canonica  $\theta$  e la forma di connessione  $\omega$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Le ( $\dagger$ ) e ( $\ddagger$ ) ci dicono che le trasformazioni affini di  $M$  sono tutte e sole quelle il cui sollevamento lascia  $\omega$  invariante. L'ultima affermazione segue dal fatto che un diffeomorfismo di  $\mathfrak{F}(M)$  in sé è un sollevamento di un diffeomorfismo di  $M$  in sé se e soltanto se preserva le fibre e lascia invariante la forma canonica  $\theta$ .  $\square$

**TEOREMA XXV.3.4.** *Il gruppo delle affinità di una varietà differenziabile  $M$ , dotata di una connessione affine, è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale a  $m(m+1)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$  la forma della connessione. Allora la forma

$$\theta \oplus \omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$$

definisce un parallelismo completo su  $\mathfrak{F}(M)$ . La tesi è allora conseguenza del Teorema XXV.2.8.  $\square$

Sia  $\mathbf{G}$  un sottogruppo chiuso del gruppo lineare  $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ . Una  $\mathbf{G}$ -struttura su  $M$  è il dato di un fibrato principale  $\mathbf{P} \xrightarrow{\frac{\sigma}{\mathbf{G}}} M$  e di un'immersione differenziabile

$\iota : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathfrak{F}(M)$ , in modo che sia commutativo il diagramma :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} \times \mathbf{G} & \longrightarrow & \mathfrak{F}(M) \times \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P} & \longrightarrow & \mathfrak{F}(M) \\ \varpi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xlongequal{\quad} & M \end{array}$$

in cui le prime due frecce orizzontali sono definite dalle inclusioni  $\iota : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathfrak{F}(M)$  e  $\mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ .

Osserviamo che  $\mathbf{P}$  è una sottovarietà chiusa di  $\mathfrak{F}(M)$ . Infatti, fissata una sezione differenziabile  $\sigma$  di  $\mathbf{P}$ , definita in un aperto  $U$  di  $M$ , abbiamo  $\mathbf{P} \cap \pi^{-1}(U) = \{\xi \in \pi^{-1}(U) \mid \xi^{-1} \circ \sigma(\pi(\xi)) \in \mathbf{G}\}$  e l'applicazione  $\pi^{-1}(U) \ni \xi \rightarrow \xi^{-1} \circ \sigma(\pi(\xi)) \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$  è continua. Quindi  $\mathbf{P} \cap \pi^{-1}(U)$  è chiuso in  $\pi^{-1}(U)$  per l'ipotesi che  $\mathbf{G}$  fosse chiuso in  $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ . Poiché gli insiemi  $\pi^{-1}(U)$ , al variare di  $U$  tra gli aperti di trivializzazione di  $\mathbf{P}$ , formano un ricoprimento aperto di  $\mathfrak{F}(M)$ , otteniamo che  $\mathbf{P}$  è chiuso in  $\mathfrak{F}(M)$ .

Gli elementi  $X$  dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $\mathbf{G}$  definiscono campi di vettori su  $\mathbf{P}$  che sono la restrizione dei corrispondenti campi di vettori verticali  $X^*$  definiti su  $\mathfrak{F}(M)$ , e che indicheremo ancora con  $X^*$ .

Una  $\mathbf{G}$ -connessione affine su  $M$  è il dato di una  $\mathbf{G}$ -struttura  $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$  su  $M$ , e di una forma differenziale  $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$  con le proprietà :

- (1)  $\omega'(A^*) = A \quad \forall A \in \mathfrak{g}$
- (2)  $R_a^* \omega' = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega' \quad \forall a \in \mathbf{G}$ .

Indichiamo con  $\mathfrak{H}' = \ker \omega' \subset \mathfrak{X}(\mathbf{P})$  la distribuzione orizzontale associata alla  $\mathbf{G}$ -connessione affine. Abbiamo :

$$dR_a(\mathfrak{H}'_\xi) = \mathfrak{H}'_{\xi \cdot a} \quad \forall \xi \in \mathbf{P}, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Possiamo quindi estendere la distribuzione orizzontale  $\mathfrak{H}'$  su  $\mathbf{P}$  a una distribuzione orizzontale  $\mathfrak{H}$  su  $\mathfrak{F}(M)$  ponendo

$$\mathfrak{H}_{\xi \cdot a} = dR_a(\mathfrak{H}'_\xi) \quad \text{se } \xi \in \mathbf{P}, a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Estendiamo così la  $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$  a una forma di connessione affine di Cartan  $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ , ponendo :

$$\omega(X) = A \quad \text{se } X \in T_\xi \mathfrak{F}(M) \text{ e } X = A^*_\xi + Y \text{ con } A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \text{ e } Y \in \mathfrak{H}'_\xi.$$

Possiamo quindi definire in modo equivalente una  $\mathbf{G}$ -connessione affine mediante il dato di una forma di connessione affine  $\omega$  su  $\mathfrak{F}(M)$  tale che, per una  $\mathbf{G}$ -struttura  $\mathbf{P} @ \varpi @ \mathbf{G} > M$ , detta  $\iota : \mathbf{P} \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  l'inclusione, risulti  $\iota^* \omega \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ , tale cioè che la sua restrizione a  $\mathbf{P}$  sia una forma a valori nell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $\mathbf{G}$ .

LEMMA XXV.3.5. Siano  $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$  una  $\mathbf{G}$ -struttura,  $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$  una  $\mathbf{G}$ -connessione affine e  $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$  la sua estensione a  $\mathfrak{F}(M)$ . Sia  $f : M \rightarrow M$  un diffeomorfismo. Supponiamo che  $M$  sia connessa. Sono equivalenti:

- (a)  $\hat{f}^* \omega = \omega$  ed esiste  $\xi_0 \in \mathbf{P}$  tale che  $\hat{f}(\xi_0) \in \mathbf{P}$ .  
 (b)  $\hat{f}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$  e, detta  $\hat{f}^{\mathbf{G}} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$  la restrizione di  $\hat{f}$  a  $\mathbf{P}$ , abbiamo

$$(\hat{f}^{\mathbf{G}})^* \omega' = \omega'.$$

DIMOSTRAZIONE. (a)  $\implies$  (b). Sia  $\text{pr} : \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \rightarrow V = \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})/\mathfrak{g}$  la proiezione nel quoziente. Consideriamo la forma differenziale  $\text{pr} \circ \omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), V)$  e la corrispondente distribuzione vettoriale  $\mathfrak{D} = \ker(\text{pr} \circ \omega)$  in  $\mathfrak{F}(M)$ . Ricordiamo che una *varietà integrale* di  $\mathfrak{D}$  è una sottovarietà differenziabile  $N$  di  $\mathfrak{F}(M)$  con  $T_\xi N \subset \mathfrak{D}_\xi$  per ogni  $\xi \in N$ . Poiché  $\hat{f}$  lascia fissa la forma  $\omega$ , essa lascia fissa a maggior ragione la forma  $\text{pr} \circ \omega$  e trasforma quindi varietà integrali di  $\mathfrak{D}$  in varietà integrali di  $\mathfrak{D}$ . La tesi segue allora dal fatto che  $\mathbf{P}$  è una sottovarietà integrale massimale di  $\mathfrak{D}$ .

(b)  $\implies$  (a). Segue dal fatto che  $\hat{f}(\xi \cdot a) = \hat{f}^{\mathbf{G}}(\xi) \cdot a$  e  $\omega(\xi \cdot a) = R_a^* \omega'(\xi)$  se  $\xi \in \mathbf{P}$  e  $a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ .  $\square$

DEFINIZIONE XXV.3.6. Un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  che soddisfi le condizioni equivalenti (a) e (b) del Lemma XXV.3.5 si dice una *trasformazione  $\mathbf{G}$ -affine*, o una  *$\mathbf{G}$ -affinità*, di  $M$ .

Sia  $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$  una  $\mathbf{G}$  struttura su  $M$ . Indichiamo ancora con  $\theta$  la restrizione a  $\mathbf{P}$  della forma canonica di  $\mathfrak{F}(M)$ . La forma di connessione  $\omega'$  di una  $\mathbf{G}$ -connessione affine definisce un parallelismo completo, mediante la forma  $\theta \oplus \omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$ .

Per il Teorema XXV.2.8 abbiamo:

COROLLARIO XXV.3.7. Il gruppo delle trasformazioni  $\mathbf{G}$ -affini di  $M$ , per un'assegnata connessione affine  $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$  relativa a una  $\mathbf{G}$ -struttura  $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$  è un gruppo di Lie di dimensione  $\leq \dim_{\mathbb{R}} M + \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{G}$ .  $\square$

COROLLARIO XXV.3.8. Due trasformazioni  $\mathbf{G}$ -affini  $f, g$  di  $M$ , per un'assegnata connessione affine  $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$  relativa a una  $\mathbf{G}$ -struttura  $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ , coincidono se sono uguali con i loro differenziali in un punto  $p_0 \in M$ .

Una metrica Riemanniana  $g$  su  $M$  definisce una  $\mathbf{O}(m)$ -struttura  $\mathfrak{D}(M)$  su  $M$ , in cui gli elementi della fibra  $\mathfrak{D}_p(M)$  sono le basi ortonormali di  $T_p M$  rispetto al prodotto scalare  $g_p$ . Viceversa, una  $\mathbf{O}(m)$ -struttura su  $M$  definisce univocamente una metrica Riemanniana  $g$  su  $M$ .

Il Lemma XXV.1.6 ci dice che le isometrie di  $(M, g)$  sono tutte e sole le trasformazioni affini  $f$  rispetto alla connessione di Levi-Civita per cui  $df(p_0) : T_{p_0} M \rightarrow T_{f(p_0)} M$  è un'isometria in qualche punto  $p_0 \in M$ .

La restrizione  $\omega'$  della forma  $\omega$  della connessione di Levi-Civita è una  $\mathbf{O}(m)$ -connessione affine.

Otteniamo perciò:

**TEOREMA XXV.3.9.** *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana. Un'isometria di  $M$  è un automorfismo differenziabile  $f : M \rightarrow M$  il cui sollevamento è un'affinità per la connessione di Levi-Civita e per cui  $\hat{f}(\mathfrak{D}(M)) = \mathfrak{D}(M)$ .*

*Il gruppo delle isometrie  $\mathbf{O}(M, g)$  è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale di  $m(m+1)/2$ .*

*Lo stabilizzatore  $\mathbf{O}_p(M, g)$  di un punto  $p \in M$  nel gruppo  $\mathbf{O}(M, g)$  delle isometrie di  $(M, g)$  è un gruppo compatto.*

**DIMOSTRAZIONE.** Il teorema è una conseguenza delle osservazioni precedenti e del Corollario XXV.3.7. Infatti  $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{o}(m) = m(m-1)/2$  e quindi  $\mathfrak{D}(M)$  è una varietà differenziabile di dimensione  $[m(m-1)/2] + m = m(m+1)/2$ .  $\square$

Citiamo a questo punto, senza dimostrazione<sup>6</sup>, il seguente :

**TEOREMA XXV.3.10.** *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana di dimensione  $m$ . Se il suo gruppo delle isometrie  $\mathbf{O}(M, g)$  ha dimensione massima  $m(m+1)/2$ , allora  $(M, g)$  è isometrico a uno dei seguenti spazi a curvatura costante :*

- (a) *Lo spazio Euclideo  $\mathbb{R}^m$  ;*
- (b) *La sfera  $m$ -dimensionale  $S^m$  ;*
- (c) *Lo spazio proiettivo  $m$ -dimensionale  $\mathbb{R}P^m$  ;*
- (d) *Lo spazio iperbolico semplicemente connesso  $m$ -dimensionale  $H^m$ .*

Descriviamo brevemente un modello dello spazio iperbolico  $m$ -dimensionale  $H^m$ . Consideriamo l'ipersuperficie regolare di  $\mathbb{R}^{m+1}$  :

$$H^m = \left\{ x = (x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_0^2 = 1 + \sum_{i=1}^m x_i^2 \right\}$$

Abbiamo :

$$T_x H^m = \left\{ v = (v_0, v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_0 v_0 = \sum_{i=1}^m x_i v_i \right\}$$

e definiamo la metrica iperbolica  $g$  su  $H^m$  ponendo :

$$g_x(v, v) = c \cdot \left( -v_0^2 + \sum_{i=1}^m v_i^2 \right) \quad \forall x \in H^m, \forall v \in T_x H^m$$

per una costante  $c > 0$ . Osserviamo che  $H^m$  è l'orbita del punto  $(1, 0, \dots, 0)$  rispetto al gruppo  $\mathbf{O}(1, m)$  delle trasformazioni lineari di  $\mathbb{R}^{m+1}$  che preservano la forma bilineare simmetrica definita dalla matrice  $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ . Il gruppo  $\mathbf{O}(1, m)$  è il gruppo delle isometrie di  $H^m$ , che si identifica allo spazio omogeneo  $\mathbf{O}(1, m)/(\mathbf{O}(1) \times \mathbf{O}(m))$ , dove :

$$\mathbf{O}(1) \times \mathbf{O}(m) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{O}(m) \right\}$$

è lo stabilizzatore in  $\mathbf{O}(1, m)$  del punto  $(1, 0, \dots, 0)$ .

<sup>6</sup>Vedi ad esempio: [S.Kobayashi *Transformation groups in Differential Geometry*, New York, Springer 1972] a pag.46.

### XXV.4. Spazi Riemanniani globalmente simmetrici

Sia  $(M, g)$  uno spazio Riemanniano. Diciamo che  $(M, g)$  è uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico se, per ogni punto  $p \in M$  esiste un'isometria involutiva  $s_p \in \mathbf{O}(M, g)$  che abbia  $p$  come punto fisso isolato.

Osserviamo che vale il seguente :

LEMMA XXV.4.1. *Sia  $(M, g)$  uno spazio Riemanniano e  $p \in M$ . Allora esiste al più un'isometria involutiva  $s_p$  che abbia  $p$  come punto fisso isolato. Se una tale  $s_p$  esiste, allora  $ds_p(p) = -\text{Id}$  su  $T_pM$  ed  $s_p$  coincide, in un intorno di  $p$ , con la simmetria geodetica rispetto alla connessione di Levi-Civita.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $s_p$  un'isometria involutiva di  $(M, g)$  con  $p$  come punto fisso isolato. Abbiamo  $(ds_p(p))^2 = \text{Id}$  su  $T_pM$  e quindi  $T_pM$  si decompone nella somma diretta dei sottospazi corrispondenti agli autovalori 1 e  $-1$  di  $(ds_p(p))$ . Se ci fosse un  $v \in T_pM \setminus \{0\}$  con  $ds_p(p)(v) = v$ , allora  $s_p$  lascerebbe fissi tutti i punti della geodetica uscente da  $p$  con vettore tangente  $v$  e quindi  $p$  non sarebbe punto fisso isolato. Perciò  $ds_p(p) = -\text{Id}$ . Poiché, essendo un'isometria,  $s_p$  trasforma geodetiche in geodetiche, essa è allora, in un intorno di  $p$ , la simmetria geodetica rispetto a  $p$ .  $\square$

LEMMA XXV.4.2. *Ogni spazio Riemanniano globalmente simmetrico è completo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $(M, g)$  uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico. Sia  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  una geodetica massimale. Se fosse ad esempio  $b < +\infty$ , fissato  $\epsilon$  con  $0 < 2\epsilon < b - a$ , posto  $p = \gamma(b - \epsilon)$ , la simmetria  $s_p$  ci permette di prolungare la geodetica  $\gamma$  a una geodetica  $\tilde{\gamma}$  definita su  $(a, 2b - a - 2\epsilon)$ :

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } a < t < b \\ s_p(\gamma(2b - 2\epsilon - t)) & \text{se } b \leq t < 2b - a - 2\epsilon, \end{cases}$$

contraddicendone la massimalità. Deve quindi essere  $b = +\infty$ , e con ragionamento analogo si dimostra che  $a = -\infty$ .  $\square$

Osserviamo che, se  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  è una geodetica massimale con  $\gamma(0) = p$ , allora  $s_p \circ \gamma(t) = \gamma(-t)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Da questo fatto ricaviamo subito che :

TEOREMA XXV.4.3. *Il gruppo delle isometrie di uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico connesso è un gruppo transitivo di trasformazioni.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $(M, g)$  uno spazio Riemanniano connesso globalmente simmetrico. Indichiamo con  $d_g$  la distanza definita dalla metrica  $g$ . Siano  $p_0, p_1$  due qualsiasi punti di  $M$ . Poiché  $(M, g)$  è completo, esiste una geodetica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ , di lunghezza  $\ell(\gamma) = d_g(p_0, p_1)$ . Abbiamo allora  $p_1 = s_{\gamma(\frac{1}{2})}(p_0)$ . Infatti  $s_{\gamma(\frac{1}{2})}$  è la simmetria geodetica rispetto al punto  $\gamma(\frac{1}{2})$  e quindi trasforma la geodetica  $\gamma(t)$  nella geodetica  $\gamma(1 - t)$ .  $\square$

TEOREMA XXV.4.4. *Sia  $(M, g)$  uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico, connesso. Indichiamo con  $\mathbf{G}$  la componente connessa dell'identità nel gruppo*

di Lie  $\mathbf{O}(M, g)$  delle isometrie di  $(M, g)$ . Fissiamo un punto  $p_0 \in M$  e sia  $\mathbf{K}$  lo stabilizzatore di  $p_0$  in  $\mathbf{G}$ .

(i) Lo stabilizzatore  $\mathbf{K}$  di  $p_0$  in  $\mathbf{G}$  è un sottogruppo di Lie compatto di  $\mathbf{G}$  e il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \longrightarrow & M \\ \downarrow & \nearrow f & \\ \mathbf{G}/\mathbf{K} & & \end{array}$$

in cui la freccia orizzontale è l'applicazione  $\pi : \mathbf{G} \ni a \rightarrow a(p_0) \in M$  e la freccia verticale la proiezione nel quoziente, definisce un diffeomorfismo  $f$  dello spazio omogeneo  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  su  $M$ .

(ii) L'applicazione  $\sigma = \text{ad}(s_{p_0}) : \mathbf{G} \ni a \rightarrow s_{p_0} \circ a \circ s_{p_0} \in \mathbf{G}$  è un automorfismo involutivo di  $\mathbf{G}$  tale che, detto  $\mathbf{K}_\sigma$  l'insieme dei punti fissi di  $\sigma$  e  $\mathbf{K}_\sigma^0$  la componente connessa dell'identità in  $\mathbf{K}_\sigma$ , risulta:

$$\mathbf{K}_\sigma^0 \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_\sigma.$$

Il gruppo  $\mathbf{K}$  non contiene sottogruppi normali non banali di  $\mathbf{G}$ .

(iii) Siano  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{k}$  le algebre di Lie di  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{K}$ , rispettivamente. Allora

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(p_0)(X) = X\}$$

e, posto

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(p_0)(X) = -X\}$$

abbiamo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}.$$

Abbiamo poi  $d\pi(e)(\mathfrak{k}) = \{0\}$  e  $d\pi(e) : \mathfrak{p} \rightarrow T_{p_0}M$  è un isomorfismo. Se  $X \in \mathfrak{p}$ , allora:

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tX)(p_0) \in M$$

è la geodetica uscente da  $p_0$  con velocità  $d\pi(e)(X)$ . Per ogni  $v \in T_{p_0}M$ , il vettore  $[d\exp(tX)](p_0)(v)$  è il traslato di  $v$  parallelamente lungo la geodetica.

**DIMOSTRAZIONE.** L'affermazione (i) è conseguenza del Teorema XXV.3.9.

(ii) Per ogni  $k \in \mathbf{K}$ , le due isometrie  $k$  e  $\sigma(k) = \text{ad}(s_{p_0})(k) = (s_{p_0} \circ k \circ s_{p_0})$  di  $(M, g)$  coincidono con il loro differenziale in  $p_0$ . È quindi, per il Corollario XXV.3.8,  $\sigma(k) = \text{ad}(s_{p_0})(k) = k$  per ogni  $k \in \mathbf{K}$ . In particolare,  $d\sigma(e)(\mathfrak{k}) = \text{Ad}(s_{p_0})(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$ , e  $d\sigma(e)$  è l'identità su  $\mathfrak{k}$ . D'altra parte, se  $X \in \mathfrak{g}$  è un punto fisso di  $d\sigma(e)$ , avremo anche:

$$s_{p_0} \circ \exp_{\mathbf{G}}(tX) \circ s_{p_0} = \text{ad}(s_{p_0})(\exp_{\mathbf{G}}(tX)) = \exp_{\mathbf{G}}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(s_{p_0})(X)) = \exp_{\mathbf{G}}(tX),$$

onde  $s_{p_0}(\exp_{\mathbf{G}}(tX)(p_0)) = \exp_{\mathbf{G}}(tX)(p_0)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e quindi  $\exp_{\mathbf{G}}(tX)(p_0) = p_0$ , perché  $p_0$  è un punto fisso isolato di  $s_{p_0}$ . Quindi  $\mathfrak{k}$  è proprio l'insieme dei punti fissi di  $d\sigma(e)$ . Poiché il gruppo delle isometrie  $\mathbf{O}(M, g)$  e  $\mathbf{G}$  operano su  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  in modo effettivo,  $\mathbf{K}$  non contiene sottogruppi normali non banali di  $\mathbf{G}$ .



(iii) Poiché  $d\sigma(e)$  è un'involuzione e  $\mathfrak{f}$  è il sottospazio dei suoi punti fissi, abbiamo la decomposizione  $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{p}$ .

Poiché  $d\pi(e)$  ha nucleo uguale a  $\mathfrak{f}$ , ne segue che la sua restrizione a  $\mathfrak{p}$  è un isomorfismo su  $T_{p_0}M$ .

Sia ora  $X \in \mathfrak{p}$  e sia  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  la geodetica uscente da  $p_0$  con velocità  $d\pi(e)(X)$ . Consideriamo, per ogni numero reale  $t$ , l'isometria  $u_t = s_{\gamma(t/2)} \circ s_{p_0}$ . Dico che  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow u_t \in \mathbf{O}(M, g)$  è un sottogruppo a un parametro di  $\mathbf{O}(M, g)$ . Infatti, se  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , abbiamo :

$$\begin{aligned} u_{t_1} \circ u_{t_2}(p_0) &= u_{t_1} \circ s_{\gamma(t_2/2)}(p_0) = s_{\gamma(t_1/2)} \circ s_{p_0}(\gamma(t_2)) \\ &= s_{\gamma(t_1/2)}(\gamma(-t_2)) = \gamma(t_1 + t_2) \\ &= s_{\gamma[(t_1+t_2)/2]}(p_0) = u_{t_1+t_2}(p_0). \end{aligned}$$

Inoltre,  $du_t : T_{\gamma(s)} \rightarrow T_{\gamma(t+s)}$  definisce, per ogni coppia di numeri reali  $t, s$ , il trasporto parallelo lungo la geodetica  $\gamma$ .

Per verificare questo fatto, osserviamo in primo luogo che, per ogni numero reale  $s$ , la  $-ds_{p_0}(\gamma(s))$  definisce il trasporto parallelo da  $T_{\gamma(s)}$  a  $T_{\gamma(-s)}$  lungo la geodetica  $\gamma$ . A questo scopo, indichiamo con  $\tau_{s_1, s_2}^\gamma : T_{\gamma(s_1)}M \rightarrow T_{\gamma(s_2)}M$  il trasporto parallelo da  $\gamma(s_1)$  a  $\gamma(s_2)$  lungo  $\gamma$ . Abbiamo allora un diagramma commutativo :

$$\begin{array}{ccc} T_{p_0}M & \xrightarrow{\tau_{0,s}^\gamma} & T_{\gamma(s)}M \\ ds_{p_0}(p_0) \downarrow & & \downarrow ds_{p_0}(\gamma(s)) \\ T_{p_0}M & \xrightarrow{\tau_{0,-s}^\gamma} & T_{\gamma(-s)}M \end{array}$$

Da questa ricaviamo che

$$\begin{aligned} \tau_{0,-s} \circ ds_{p_0}(p_0) &= ds_{p_0}(\gamma(s)) \circ \tau_{s,0}^\gamma \quad \text{e, poiché } -ds_{p_0}(p_0) = I, \\ \tau_{0,-s}^\gamma &= -ds_{p_0}(\gamma(s)) \circ \tau_{s,0}^\gamma, \quad \text{da cui otteniamo :} \\ -ds_{p_0}(\gamma(s)) &= \tau_{0,-s}^\gamma \circ [\tau_{0,s}^\gamma]^{-1} = \tau_{0,-s}^\gamma \circ \tau_{s,0}^\gamma = \tau_{s,-s}^\gamma. \end{aligned}$$

Analogamente,  $-ds_{\gamma(s)}$  definisce, per ogni coppia di numeri reali  $s, t$ , il trasporto parallelo da  $T_{\gamma(t)}M$  a  $T_{\gamma(2s-t)}M$  lungo la geodetica  $\gamma$ . Quindi, per composizione,  $du_t = (-ds_{\gamma(t/2)}) \circ (-ds_{p_0})$  definisce il trasporto parallelo lungo  $\gamma$  da  $\gamma(s)$  a  $\gamma(t+s)$ . È perciò  $du_{t_1} \circ du_{t_2} = du_{t_1+t_2}$ , perché il trasporto parallelo da  $\gamma(s)$  a  $\gamma(s+t_1+t_2)$  si può ottenere componendo il trasporto parallelo da  $\gamma(s)$  a  $\gamma(s+t_2)$  con quello da  $\gamma(s+t_2)$  a  $\gamma(s+t_1+t_2)$ .

In particolare  $(u_{t_1} \circ u_{t_2})$  ed  $u_{t_1+t_2}$  coincidono con i loro differenziali in  $p_0$  ed, essendo isometrie, coincidono dappertutto :  $u_{t_1} \circ u_{t_2} = u_{t_1+t_2}$  e  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow u_t \in \mathbf{O}(M, g)$  è un gruppo a un parametro di isometrie. Possiamo quindi trovare  $Y \in \mathfrak{g}$  tale che  $u_t = \exp_{\mathbf{G}}(tY)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Risulta poi

$$\sigma \circ u_t = s_{p_0} \circ s_{\gamma(t/2)} = s_{\gamma(-t/2)} \circ s_{p_0} = u_{-t}.$$

Da questa ricaviamo che  $d\sigma(e)(Y) = -Y$ , quindi  $Y \in \mathfrak{p}$  e perciò  $Y = X$ .  $\square$

### XXV.5. Coppie simmetriche e simmetriche Riemanniane

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie connesso ed  $\mathbf{H}$  un suo sottogruppo chiuso. La coppia  $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$  si dice una *coppia simmetrica* se esiste un automorfismo analitico involutivo  $\sigma : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  con

$$\mathbf{G}_\sigma^0 \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{G}_\sigma,$$

ove  $\mathbf{G}_\sigma = \{a \in \mathbf{G} \mid \sigma(a) = a\}$  e  $\mathbf{G}_\sigma^0$  è la componente connessa dell'identità di  $\mathbf{G}_\sigma$ .

Se  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{H})$  è compatto<sup>7</sup> in  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{G})$ , la coppia  $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$  si dice *simmetrica Riemanniana*.

**TEOREMA XXV.5.1.** *Sia  $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$  una coppia simmetrica Riemanniana e sia  $M$  lo spazio omogeneo  $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$ . Siano  $\pi : \mathbf{G} \rightarrow M$  la proiezione naturale nel quoziente e  $\tau : \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(M)$  la rappresentazione di  $\mathbf{G}$  come gruppo di diffeomorfismi di  $M$ , indotta dalla traslazione a sinistra su  $M$ :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} \times \mathbf{G} & \xrightarrow{(a,b) \rightarrow (a,\pi(b))} & \mathbf{G} \times M \\ (a,b) \rightarrow ab \downarrow & & \downarrow (a,p) \rightarrow \tau(a)(p) \\ \mathbf{G} & \xrightarrow{a \rightarrow \pi(a)} & M. \end{array}$$

*Sia  $\sigma$  un automorfismo analitico involutivo di  $\mathbf{G}$  tale che  $\mathbf{K}_\sigma^0 \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_\sigma$  (ove  $\mathbf{K}_\sigma$  è il sottogruppo dei punti fissi di  $\sigma$  e  $\mathbf{K}_\sigma^0$  la sua componente dell'identità). Allora esistono metriche Riemanniane  $\mathbf{G}$ -invarianti  $g$  su  $M$ . Rispetto a una qualsiasi metrica  $\mathbf{G}$ -invariante  $g$ , lo spazio  $(M, g)$  è globalmente simmetrico Riemanniano. Sia  $\mathbf{o} = \pi(e)$  e sia  $s_{\mathbf{o}}$  la corrispondente simmetrica geodetica. Essa soddisfa:*

$$\begin{aligned} s_{\mathbf{o}} \circ \pi &= \pi \circ \sigma \\ \tau(\sigma(a)) &= s_{\mathbf{o}} \circ \tau(a) \circ s_{\mathbf{o}} \quad \forall a \in \mathbf{G}. \end{aligned}$$

**OSSERVAZIONE XXV.5.2.** Osserviamo che, in particolare, la simmetria geodetica  $s_{\mathbf{o}}$  è indipendente dalla scelta della metrica Riemanniana  $\mathbf{G}$ -invariante. In effetti, la connessione di Levi-Civita su  $M$  risulta indipendente dalla particolare scelta della metrica  $\mathbf{G}$ -invariante su  $M$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{k}$  le algebre di Lie di  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{K}$ , rispettivamente e poniamo  $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(e)(X) = -X\}$ . Allora  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ . Se  $X \in \mathfrak{p}$  e  $k \in \mathbf{K}$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} \sigma(\exp_{\mathbf{G}}(t\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X))) &= \sigma(\text{ad}(k)(\exp_{\mathbf{G}}(tX))) = \text{ad}(k)(\exp_{\mathbf{G}}(-tX)) \\ &= \exp_{\mathbf{G}}(-t\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X)), \end{aligned}$$

da cui otteniamo subito che  $d\sigma(e)(\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X)) = -\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X)$ . Quindi  $\mathfrak{p}$  è invariante rispetto ad  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ . L'applicazione  $d\pi(e)$  manda  $\mathfrak{g}$  su  $T_{\mathbf{o}}M$  ed ha come nucleo  $\mathfrak{k}$ . Se  $X \in \mathfrak{p}$ , abbiamo:

$$\pi(\exp_{\mathbf{G}}(\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(tX))) = \pi(\text{ad}(k)(\exp(tX))) = \tau(k)(\exp(tX)).$$

<sup>7</sup> Questo è vero in particolare se  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo compatto di  $\mathbf{G}$ .

Differenziando quest'espressione per  $t = 0$ , otteniamo :

$$d\pi(e) \circ \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(X) = d\tau(k) \circ d\pi(e)(X) \quad \forall k \in \mathbf{K} \quad \forall X \in \mathfrak{p}.$$

Poiché  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(K)$  è compatto il  $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ , esiste un prodotto scalare  $\mathbf{b}$  su  $\mathfrak{p}$ , invariante rispetto alla restrizione a  $\mathfrak{p}$  di  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ . Allora  $g_{\mathbf{o}} = \mathbf{b} \circ (d\pi(e)|_{\mathfrak{p}})^{-1}$  è un prodotto scalare su  $T_{\mathbf{o}}M$ , invariante rispetto a  $\tau(k)$  per ogni  $k \in \mathbf{K}$ . Definiamo allora una metrica Riemanniana su  $M$  ponendo :

$$g_{\tau(g)(\mathbf{o})}(d\tau(g)(v), d\tau(g)(w)) = g_{\mathbf{o}}(v, w) \quad \forall g \in \mathbf{G}, \quad \forall v, w \in T_{\mathbf{o}}M.$$

Questa definizione è consistente perché  $\mathbf{b}$  è invariante rispetto ad  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ .

Viceversa, ogni metrica Riemanniana  $\mathbf{G}$ -invariante su  $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$  è di questa forma per qualche prodotto scalare invariante  $\mathbf{b}$  su  $\mathfrak{p}$ .

Definiamo ora la simmetria  $s_{\mathbf{o}}$  di  $M$  mediante la condizione :

$$s_{\mathbf{o}} \circ \pi = \pi \circ \sigma.$$

Chiaramente  $s_{\mathbf{o}}$  è un diffeomorfismo involutivo di  $M$  in sé, con  $ds_{\mathbf{o}}(\mathbf{o}) = -\text{Id}$  su  $T_{\mathbf{o}}M$ .

Dimostriamo che  $s_{\mathbf{o}}$  è un'isometria. Sia  $p = \pi(a) = \tau(a)(\mathbf{o}) \in M$ . Se  $X, Y \in T_pM$ , allora  $X_0 = d\tau(a^{-1})(p)(X), Y_0 = d\tau(a^{-1})(p)(Y) \in T_{\mathbf{o}}M$ . Per ogni  $x \in \mathbf{G}$  abbiamo :

$$s_{\mathbf{o}} \circ \tau(a)(\pi(x)) = s_{\mathbf{o}}(\pi(ax)) = \pi(\sigma(ax)) = \pi(\sigma(a)\sigma(x)) = (\tau(\sigma(a)) \circ s_{\mathbf{o}})(\pi(x)).$$

Quindi  $s_{\mathbf{o}} \circ \tau(a) = \tau(\sigma(a)) \circ s_{\mathbf{o}}$ . Ricaviamo :

$$\begin{aligned} g(ds_{\mathbf{o}}(X), ds_{\mathbf{o}}(Y)) &= g(ds_{\mathbf{o}} \circ d\tau(a)(X_0), ds_{\mathbf{o}} \circ d\tau(a)(Y_0)) \\ &= g(d\tau(\sigma(a)) \circ ds_{\mathbf{o}}(X_0), d\tau(\sigma(a)) \circ ds_{\mathbf{o}}(Y_0)) \\ &= g(ds_{\mathbf{o}}(X_0), ds_{\mathbf{o}}(Y_0)) = g(X_0, Y_0) = g(X, Y). \end{aligned}$$

Quindi  $s_{\mathbf{o}}$  è un'isometria e, poiché  $s_{\mathbf{o}}(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$  e  $ds_{\mathbf{o}}(\mathbf{o}) = -\text{Id}$  su  $T_{\mathbf{o}}M$ , coincide con la simmetria geodetica rispetto a  $\mathbf{o}$ . Per un qualsiasi punto  $p = \pi(a)$ , la simmetria geodetica rispetto a  $p$  è l'isometria  $s_p = \tau(a) \circ s_{\mathbf{o}} \circ \tau(a^{-1})$ . Questo dimostra che  $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$  è globalmente simmetrico.  $\square$

La  $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \tau(a) \in \mathbf{O}(M, g)$  è un omomorfismo di gruppi di Lie. Il suo nucleo  $\mathbf{N}$  è un sottogruppo chiuso normale di  $\mathbf{G}$ , contenuto in  $\mathbf{K}$ . Se  $\mathbf{Z}$  è il centro di  $\mathbf{G}$ , i gruppi  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$  e  $\mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{Z})$  sono isomorfi. Poiché  $\mathbf{K} \cap \mathbf{Z} \subset \mathbf{N}$ , ne segue che  $\mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{N})$  è compatto. Chiaramente la  $(\mathbf{G}/\mathbf{N}, \mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{N}))$  è un'altra coppia simmetrica Riemanniana, che definisce lo stesso spazio simmetrico della coppia  $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ .

**TEOREMA XXV.5.3.** *Sia  $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$  una coppia simmetrica Riemanniana. Sia  $\mathfrak{k}$  l'algebra di Lie di  $\mathbf{K}$  e  $\mathfrak{z}$  quella del centro  $\mathbf{Z}$  di  $\mathbf{G}$ . Se  $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$ , allora esiste un unico automorfismo involutivo  $\sigma : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  tale che  $\mathbf{K}_{\sigma}^0 \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_{\sigma}$  (dove  $\mathbf{K}_{\sigma}$  è il sottogruppo dei punti fissi di  $\sigma$  e  $\mathbf{K}_{\sigma}^0$  la sua componente connessa dell'identità).*

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che il differenziale in  $e$  dell'involuzione  $\sigma$  cercata è l'identità su  $\mathfrak{k}$ , e l'opposto dell'identità su un sottospazio di  $\mathfrak{g}$  complementare di  $\mathfrak{k}$  in  $\mathfrak{g}$ , e trasforma in sé l'ortogonale  $\mathfrak{k}^{\perp}$  di  $\mathfrak{k}$  rispetto alla forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  di  $\mathfrak{g}$ .

Poiché  $\mathfrak{f} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$ , la forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  è definita negativa su  $\mathfrak{f}$ . Infatti, poiché  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$  è un sottogruppo compatto, gli elementi  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ , per  $X \in \mathfrak{f}$ , si esprimono come matrici antisimmetriche  $(a_{i,j}(X))$ , in una opportuna base<sup>8</sup> di  $\mathfrak{g}$ . Quindi, se  $X \in \mathfrak{f}$ :

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X, X) = - \sum_{i,j} [a_{i,j}]^2 \leq 0$$

e vale l'uguaglianza se e soltanto se  $a_{i,j}(X) = 0$  per ogni  $i, j$ , cioè se  $X \in \mathfrak{f} \cap \mathfrak{z}$ . Quindi  $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{f}^{\perp}$ , dove  $\mathfrak{f}^{\perp}$  è l'ortogonale di  $\mathfrak{f}$  rispetto alla forma di Killing e  $d\sigma(e)$  è completamente determinato perché è l'identità su  $\mathfrak{f}$  e  $-\text{Id}$  su  $\mathfrak{f}^{\perp}$ . A sua volta  $d\sigma(e)$  determina completamente  $\sigma$ .  $\square$

Un'algebra di Lie ortogonale simmetrica è una coppia  $(\mathfrak{g}, \zeta)$ , formata da :

- (i) un'algebra di Lie reale di dimensione finita  $\mathfrak{g}$ ,
- (ii) un automorfismo involutivo  $\zeta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , tale che :  
l'insieme  $\mathfrak{f} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \zeta(X) = X\}$  dei punti fissi
- (iii) di  $\zeta$  sia una sottoalgebra immersa in  $\mathfrak{g}$  in modo compatto.  
Diciamo che la coppia  $(\mathfrak{g}, \zeta)$  è *effettiva* se, detto  $\mathfrak{z}$  il centro di  $\mathfrak{g}$ , è :
- (iv)  $\mathfrak{f} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$ .

Ricordiamo che il fatto che  $\mathfrak{f}$  sia immersa in modo compatto in  $\mathfrak{g}$  significa che la sottoalgebra  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f})$  di  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  genera un sottogruppo compatto del gruppo  $\text{Int}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$  degli automorfismi interni di  $\mathfrak{g}$ . Nel caso in cui la coppia  $(\mathfrak{g}, \zeta)$  sia effettiva, la condizione è equivalente al fatto che la forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  di  $\mathfrak{g}$  sia definita negativa su  $\mathfrak{f}$ .

Abbiamo osservato che, ad una coppia simmetrica Riemanniana  $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ , a cui sia associato un automorfismo involutivo  $\sigma$  di  $\mathbf{G}$ , è associata l'algebra di Lie ortogonale simmetrica  $(\mathfrak{g}, \zeta)$ , ove  $\mathfrak{g}$  è l'algebra di Lie di  $\mathbf{G}$  e  $\zeta = d\sigma(e)$ .

Sia  $(\mathfrak{g}, \zeta)$  un'algebra di Lie simmetrica ortogonale e sia  $\mathfrak{f}$  il luogo dei punti fissi di  $\zeta$ .

Una coppia  $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$  di gruppi di Lie associata a  $(\mathfrak{g}, \zeta)$  è una coppia formata da un gruppo di Lie connesso  $\mathbf{G}$  ed un suo sottogruppo chiuso  $\mathbf{K}$  con algebre di Lie uguali a  $\mathfrak{g}$  e a  $\mathfrak{f}$ , rispettivamente.

Abbiamo:

**TEOREMA XXV.5.4.** *Sia  $(\mathfrak{g}, \zeta)$  un'algebra di Lie ortogonale simmetrica e sia  $\mathfrak{f}$  la sottoalgebra di Lie dei punti fissi di  $\zeta$ .*

(a) *Sia  $\tilde{\mathbf{G}}$  un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  e sia  $\tilde{\mathbf{K}}$  il suo sottogruppo analitico con algebra di Lie  $\mathfrak{f}$ . Allora  $\tilde{\mathbf{K}}$  è un sottogruppo chiuso di  $\tilde{\mathbf{G}}$  e  $(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}})$  è una coppia simmetrica Riemanniana. Lo spazio simmetrico  $\tilde{M} = \tilde{\mathbf{G}}/\tilde{\mathbf{K}}$  è semplicemente connesso.*

<sup>8</sup>È sufficiente considerare una base ortonormale di  $\mathfrak{g}$  rispetto a un prodotto scalare invariante per  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ .

(b) Se  $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$  è una qualsiasi coppia di gruppi di Lie associata a  $(\mathfrak{g}, \varsigma)$ , allora  $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$  è uno spazio Riemanniano localmente simmetrico rispetto a qualsiasi metrica  $\mathbf{G}$ -invariante.

(c)  $\tilde{M}$  è il rivestimento universale di  $M$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $\tilde{\mathbf{G}}$  è semplicemente connesso, l'involutione  $\varsigma$  di  $\mathfrak{g}$  definisce univocamente un automorfismo  $\tilde{\sigma}$  di  $\tilde{\mathbf{G}}$  con  $d\tilde{\sigma}(e) = \varsigma$ . Il luogo  $\tilde{\mathbf{K}}_{\tilde{\sigma}}$  dei punti fissi di  $\tilde{\sigma}$  è chiuso in  $\tilde{\mathbf{G}}$  e quindi è tale anche la sua componente connessa dell'identità  $\tilde{\mathbf{K}}$ . Poiché  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\tilde{\mathbf{K}})$  è il sottogruppo analitico di  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  generato da  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f})$ , è compatto e quindi  $(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}})$  è una coppia Riemanniana simmetrica e  $\tilde{M} = \tilde{\mathbf{G}}/\tilde{\mathbf{K}}$  è uno spazio globalmente simmetrico Riemanniano rispetto a qualsiasi metrica  $\tilde{\mathbf{G}}$ -invariante su  $\tilde{M}$ , definita a partire da un prodotto scalare  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ -invariante su  $T_0\tilde{M}$ .

Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo di Lie con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathbf{K}$  un suo sottogruppo chiuso con algebra di Lie  $\mathfrak{K}$ , il rivestimento  $\tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$  definisce per passaggio al quoziente il rivestimento universale  $\tilde{M} \rightarrow M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$ . La simmetrie geodetiche globali di  $\tilde{M}$  definiscono, per diffeomorfismi locali, simmetrie Riemanniane locale di  $M$ , rispetto a qualsiasi metrica  $\mathbf{G}$ -invariante di  $M$ .  $\square$



## **Appendice: Complementi di topologia generale**





## Fibrati di Steenrod topologici

Richiamiamo in questo capitolo alcune nozioni di topologia che utilizzeremo in seguito.

### XXVI.1. Azione di gruppo

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo ed  $F$  un insieme.

DEFINIZIONE XXVI.1.1. Un'azione a sinistra di  $\mathbf{G}$  su  $F$  è un'applicazione

$$(26.1.1) \quad \mathbf{G} \times F \ni (g, p) \longrightarrow gp \in F$$

tale che

- (i)  $ep = p, \quad \forall p \in F,$
- (ii)  $g_1(g_2p) = (g_1g_2)p, \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbf{G}, \forall p \in F.$

In modo analogo si definisce un'azione a destra di  $\mathbf{G}$  su  $F$  come un'applicazione

$$(26.1.2) \quad F \times \mathbf{G} \ni (p, g) \longrightarrow pg \in F$$

tale che

- (i')  $pe = p, \quad \forall p \in F,$
- (ii')  $(pg_1)g_2 = p(g_1g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbf{G}, \forall p \in F.$

Se (26.1.1) è un'azione a sinistra, la

$$(26.1.3) \quad F \times \mathbf{G} \ni (p, g) \longrightarrow g^{-1}p \in F$$

è un'azione a destra e, se (26.1.2) è un'azione a destra, la

$$(26.1.4) \quad \mathbf{G} \times F \ni (g, p) \longrightarrow pg^{-1} \in F$$

è un'azione a sinistra. Non sarà quindi restrittivo limitarsi, nel trattare le azioni di gruppo in generale, a considerare quelle a sinistra.

Data un'azione a sinistra (26.1.1), possiamo associare all'elemento  $g$  di  $\mathbf{G}$  l'applicazione

$$(26.1.5) \quad \rho(g) : F \ni p \longrightarrow gp \in F.$$

Dalle (i) ed (ii) segue che

$$\rho(e) = \text{id}_F, \quad \rho(g_1g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2), \quad \rho(g^{-1}) = [\rho(g)]^{-1}, \quad \forall g_1, g_2, g \in \mathbf{G}.$$

Quindi

$$(26.1.6) \quad \rho : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{S}(F)$$

è un omomorfismo di  $\mathbf{G}$  nel gruppo  $\mathbf{S}(F)$  delle permutazioni degli elementi di  $F$  e, viceversa, ogni omomorfismo (26.1.6) definisce un'azione a sinistra di  $\mathbf{G}$  su  $F$  mediante

$$(26.1.7) \quad \mathbf{G} \times F \ni (g, p) \longrightarrow \rho(g)(p) \in F.$$

DEFINIZIONE XXVI.1.2. L'omomorfismo  $\rho$  per cui valgano le (26.1.5), (26.1.7) si dice *associato* all'azione (26.1.1).

OSSERVAZIONE XXVI.1.3. Se (26.1.2) è un'azione a destra, allora l'applicazione  $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{S}(F)$  definita da  $\rho(g)(p) = pg$  è un anti-omomorfismo di gruppi; soddisfa cioè la  $\rho(g_1g_2) = \rho(g_2)\rho(g_1)$  per ogni  $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$ .

DEFINIZIONE XXVI.1.4.  $\ker \rho$  è il *nucleo d'infedeltà dell'azione* (26.1.1). Se  $\rho$  è iniettivo chiamiamo l'azione (26.1.1) *fedele* (o *effettiva*).

DEFINIZIONE XXVI.1.5. L'*orbita* di un punto  $p \in F$  (per l'azione di  $\mathbf{G}$ ) è il sottoinsieme  $\mathbf{G}p = \{gp \mid g \in \mathbf{G}\}$  di  $F$ .

Le orbite degli elementi di  $F$  definiscono una partizione di  $F$  e quindi la relazione di appartenere alla stessa orbita è una relazione di equivalenza. Il quoziente corrispondente si indica con  $F/\mathbf{G}$  e si dice *spazio delle orbite*.

Se  $\mathbf{G}p = F$  per ogni  $p \in F$ , se cioè  $F/\mathbf{G}$  contiene un solo punto, diciamo che l'azione è *transitiva*.

Un'azione transitiva e fedele si dice *semplicemente transitiva*.

OSSERVAZIONE XXVI.1.6. Il nucleo d'infedeltà  $\mathbf{K} = \ker \rho$  dell'azione (26.1.1) è un sottogruppo normale di  $\mathbf{G}$ . Poiché  $g_1p = g_2p$  se  $g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{K}$ , fissato  $p \in F$  l'elemento  $gp$  dipende solo dalla classe di equivalenza di  $g$  in  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ . Possiamo quindi far corrispondere all'azione di  $\mathbf{G}$  su  $F$  un'azione fedele di  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  su  $F$  e, viceversa, ad ogni azione fedele di  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  su  $F$  determina un'azione di  $\mathbf{G}$  su  $F$  con nucleo d'infedeltà  $\mathbf{K}$ , dimodoché  $[g]p = gp$  per ogni  $g \in \mathbf{G}$  e  $p \in F$ , ove abbiamo indicato con  $[g]$  la classe laterale di  $g$  in  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ .

OSSERVAZIONE XXVI.1.7. Diciamo che l'azione di  $\mathbf{G}$  su  $F$  è *n-transitiva* se, date due  $n$ -uple di punti distinti  $(p_1, \dots, p_n)$  e  $(q_1, \dots, q_n)$  vi è un elemento  $g$  di  $\mathbf{G}$  tale che  $gp_i = q_i$  per  $1 \leq i \leq n$ .

Ricordiamo che l'azione si dice *primitiva* se è transitiva e non preserva nessuna partizione non banale di  $F$ .

Un'azione doppiamente transitiva è primitiva, ma non vale il vice versa. Ad esempio, il gruppo delle rotazioni piane intorno all'origine agisce sulla circonferenza in modo primitivo, ma non doppiamente transitivo.

OSSERVAZIONE XXVI.1.8. Sia (26.1.1) un'azione di gruppo. Se  $\mathbf{H}$  è un altro gruppo e  $\phi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}$  un omomorfismo di gruppi, allora anche la

$$(26.1.8) \quad \mathbf{H} \times F \ni (h, p) \longrightarrow \phi(h)p \in F$$

è un'azione di gruppo. Se  $\phi$  è iniettiva e (26.1.1) è fedele, allora anche (26.1.8) è fedele. Se  $\phi$  è surgettiva e (26.1.1) è transitiva, allora anche (26.1.8) è transitiva.

Se  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo di  $\mathbf{G}$  e  $\phi$  l'inclusione, allora diciamo che la (26.1.8) è una *restrizione* ad  $\mathbf{H}$  di (26.1.1) e che (26.1.1) è un'*estensione* a  $\mathbf{G}$  di (26.1.8).

DEFINIZIONE XXVI.1.9. Un sottoinsieme  $E$  di  $F$  è *invariante* per l'azione di  $\mathbf{G}$  se  $gp \in E$  per ogni  $p \in E$ . In questo caso la

$$\mathbf{G} \times E \ni (g, p) \longrightarrow gp \in E$$

è ancora un'azione di gruppo.

OSSERVAZIONE XXVI.1.10. Se  $\mathbf{G}_i$  sono gruppi,  $F_i$  insiemi, e  $\mathbf{G}_i \times F_i \ni (g_i, p_i) \rightarrow g_i p_i$  azioni di gruppo (a sinistra), per  $i$  che varia in un insieme  $I$  di indici, allora anche

$$\left( \prod_{i \in I} \mathbf{G}_i \right) \times \left( \prod_{i \in I} F_i \right) \ni ((g_i), (p_i)) \longrightarrow (g_i p_i) \in \prod_{i \in I} F_i$$

è un'azione di gruppo (a sinistra). Se tutte le azioni sono fedeli anche il loro prodotto è fedele e se tutte sono transitive anche il loro prodotto è transitivo.

DEFINIZIONE XXVI.1.11. Chiamiamo **G**-insieme un insieme  $F$  su cui sia assegnata un'azione (26.1.1) del gruppo  $\mathbf{G}$ .

Se  $F_1, F_2$  sono due **G**-insiemi, una **G**-applicazione di  $F_1$  in  $F_2$  è un'applicazione  $f : F_1 \rightarrow F_2$  tale che

$$f(gp) = gf(p), \quad \forall g \in \mathbf{G}, \forall p \in F_1.$$

Più in generale, se  $F_i$  è un  $\mathbf{G}_i$ -spazio, per  $i = 1, 2$  e  $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$  un omomorfismo di gruppi, una  $\phi$ -applicazione di  $F_1$  in  $F_2$  è una  $f : F_1 \rightarrow F_2$  con  $f(gp) = \phi(g)f(p)$  per ogni  $g \in \mathbf{G}_1$  ed  $p \in F_1$ .

DEFINIZIONE XXVI.1.12. Due azioni dello stesso gruppo  $\mathbf{G}$  su due insiemi  $F_1, F_2$  si dicono *equivalenti* se esiste una **G**-applicazione bigettiva  $f : F_1 \rightarrow F_2$ .

DEFINIZIONE XXVI.1.13. Se  $F$  è uno spazio topologico e le applicazioni  $\rho(g)$  corrispondenti all'azione (26.1.1) di  $\mathbf{G}$  su  $F$  sono degli omeomorfismi, diciamo che  $\mathbf{G}$  opera su  $F$  mediante *omeomorfismi*.

Se  $F$  è una varietà differenziabile e le applicazioni  $\rho(g)$  corrispondenti all'azione (26.1.1) di  $\mathbf{G}$  su  $F$  sono dei diffeomorfismi, diciamo che  $\mathbf{G}$  opera su  $F$  mediante *diffeomorfismi*.

Se  $F$  ha una struttura algebrica (un gruppo, un anello, un'algebra ...) e le applicazioni  $\rho(g)$  corrispondenti all'azione (26.1.1) di  $\mathbf{G}$  su  $F$  sono degli automorfismi, diciamo che  $\mathbf{G}$  opera su  $F$  mediante *automorfismi*.

Nel caso di un'azione fedele, parleremo ancora di *gruppo di omeomorfismi*, di *diffeomorfismi* o di *automorfismi*, rispettivamente.

ESEMPIO XXVI.1.14. Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo, le traslazioni a destra  $(g, h) \rightarrow L_g h = gh$  e l'aggiunta  $(g, h) \rightarrow \text{ad}(g)h = hg^{-1}$  sono azioni di gruppo a sinistra su  $\mathbf{G}$ , che si dicono, rispettivamente, *azione canonica a sinistra* ed *azione aggiunta, o interna*. La traslazione a destra  $(h, g) \rightarrow R_g h = hg$  è un'azione a destra, che si dice *azione canonica a destra*.

ESEMPIO XXVI.1.15. Sia  $\mathbf{H}$  un sottogruppo del gruppo  $\mathbf{G}$ . La restrizione ad  $\mathbf{H}$  dell'azione canonica a destra definisce un'azione di  $\mathbf{H}$  su  $\mathbf{G}$  le cui orbite formano lo spazio quoziente  $F = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ . Poiché l'azione canonica a sinistra di  $\mathbf{G}$  opera sulle classi laterali sinistre di  $\mathbf{H}$ , risulta definita un'azione a sinistra canonica di  $\mathbf{G}$  su  $F$ .

DEFINIZIONE XXVI.1.16. Fissiamo un'azione di gruppo (26.1.1). Se  $p_0 \in F$ , l'insieme

$$(26.1.9) \quad \mathbf{G}_{p_0} = \{g \in \mathbf{G} \mid gp_0 = p_0\}$$

è un sottogruppo di  $\mathbf{G}$ , che si dice lo *stabilizzatore* (o *sottogruppo di stabilità*) del punto  $p_0$ .

Se  $p_0, p_1 \in F$ ,  $a \in \mathbf{G}$ , e  $p_1 = ap_0$ , allora

$$g \in \mathbf{G}_{p_1} \iff gap_0 = ap_0 \iff a^{-1}ga p_0 = p_0 \iff a^{-1}ga \in \mathbf{G}_{p_0}$$

e quindi

$$\mathbf{G}_{p_1} = \mathbf{G}_{ap_0} = a\mathbf{G}_{p_0}a^{-1} = \text{ad}(a)(\mathbf{G}_{p_0}).$$

In particolare

LEMMA XXVI.1.17. Se l'azione (26.1.1) di  $\mathbf{G}$  su  $F$  è transitiva, allora gli stabilizzatori dei diversi punti di  $F$  sono coniugati tra loro.  $\square$

PROPOSIZIONE XXVI.1.18. Ogni azione transitiva di un gruppo è equivalente alla sua azione canonica su un suo quoziente.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che il gruppo  $\mathbf{G}$  agisca transitivamente su un insieme  $F$ . Fissiamo un qualsiasi punto  $p_0$  di  $F$  e sia  $\mathbf{G}_{p_0}$  lo stabilizzatore del punto  $p_0$ .

L'applicazione  $\mathbf{G} \ni g \rightarrow gp_0 \in F$  definisce per passaggio al quoziente un'applicazione  $f : \mathbf{G}/\mathbf{G}_{p_0} \rightarrow F$ . Infatti, se  $g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{G}_{p_0}$ , abbiamo

$$g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{G}_{p_0} \iff g_1^{-1}g_2p_0 = p_0 \iff g_2p_0 = g_1p_0.$$

Queste equivalenze dimostrano che la  $f$  è ben definita ed iniettiva. Essa è anche bigettiva perché abbiamo supposto che l'azione fosse transitiva. Poiché  $f(g[h]) = f([gh]) = gh p_0 = gf([h])$  (al solito indichiamo con  $[h]$  la classe di equivalenza di  $h \in \mathbf{G}$  in  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ ), la  $f$  è una  $\mathbf{G}$ -applicazione e quindi, essendo invertibile, una  $\mathbf{G}$ -equivalenza.  $\square$

## XXVI.2. Azioni continue

Siano  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico ed  $F$  uno spazio topologico.

DEFINIZIONE XXVI.2.1. Un'azione (26.1.1) di  $\mathbf{G}$  su  $F$  si dice *continua* se l'applicazione  $\mathbf{G} \times F \ni (g, p) \rightarrow gp \in F$  è continua.

In questo caso  $\mathbf{G}$  agisce su  $F$  mediante omeomorfismi.

DEFINIZIONE XXVI.2.2. Chiamiamo  $\mathbf{G}$ -spazio uno spazio topologico  $F$  su cui sia definita un'azione continua di un gruppo topologico  $\mathbf{G}$ .

LEMMA XXVI.2.3. Se  $F$  è un  $\mathbf{G}$ -spazio, la proiezione  $\pi : F \rightarrow F/\mathbf{G}$  sullo spazio delle orbite è aperta.

Se inoltre  $F$  è uno spazio di Hausdorff compatto e  $\mathbf{G}$  un gruppo compatto, allora la proiezione  $\pi : F \rightarrow F/\mathbf{G}$  è anche chiusa.

DIMOSTRAZIONE. Se  $A$  è un aperto di  $F$ , allora

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{p \in A} \mathbf{G}p = \bigcup_{g \in \mathbf{G}} gA$$

è aperto, perché ciascuno degli insiemi  $gA$ , immagine di  $A$  mediante l'omeomorfismo di  $F$  definito da  $g$ , è aperto. Questo equivale ad affermare che  $\pi(A)$  è aperto.

Supponiamo ora che  $F$  e  $\mathbf{G}$  siano compatti e che, inoltre,  $F$  sia di Hausdorff. Il prodotto topologico  $\mathbf{G} \times F$  è compatto. Quindi ogni chiuso di  $\mathbf{G} \times F$  è compatto, e perciò la sua immagine in  $F$  mediante l'applicazione continua (26.1.1) è compatta e quindi chiusa, perché i compatti di  $F$  sono chiusi per l'ipotesi che  $F$  fosse di Hausdorff. Se  $K$  è un sottoinsieme chiuso di  $F$ , allora  $\pi^{-1}(\pi(K))$  è l'immagine del chiuso  $\mathbf{G} \times K$  mediante la (26.1.1) e quindi un chiuso. Questo dimostra che  $\pi(K)$  è chiuso per ogni chiuso  $K$  di  $F$ , cioè che l'applicazione (26.1.1) è chiusa.  $\square$

DEFINIZIONE XXVI.2.4. Siano  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$  due gruppi topologici e  $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$  un omomorfismo di gruppi topologici. Dati due  $\mathbf{G}_i$ -spazi  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) un  $\phi$ -omomorfismo di  $F_1$  in  $F_2$  è un'applicazione continua  $f : F_1 \rightarrow F_2$  che soddisfa  $f(gp) = \phi(g)f(p)$  per ogni  $p \in F_1$  e  $g \in \mathbf{G}_1$ .

Se  $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}$  e  $\phi$  l'identità, una  $f \in \mathcal{C}(F_1, F_2)$  che commuti con l'azione di  $\mathbf{G}$  si dice un  $\mathbf{G}$ -omomorfismo. Se  $f$  è un omeomorfismo, anche la sua inversa è un  $\mathbf{G}$ -omomorfismo. Diremo, in questo caso, che  $f$  è un  $\mathbf{G}$ -isomorfismo.

OSSERVAZIONE XXVI.2.5. Se  $\mathbf{H}$  è un sottogruppo del gruppo topologico  $\mathbf{G}$ , l'azione di  $\mathbf{G}$  su  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  è transitiva e continua.

OSSERVAZIONE XXVI.2.6. Sia  $F$  un  $\mathbf{G}$ -spazio su cui  $\mathbf{G}$  operi transitivamente. Fissiamo un punto  $p_0 \in F$  e sia  $\mathbf{H}$  lo stabilizzatore di  $p_0$ . Risulta allora definita una  $\mathbf{G}$ -applicazione bigettiva e continua  $f : \mathbf{G}/\mathbf{H} \rightarrow F$ . Non possiamo dire in generale che questo sia un  $\mathbf{G}$ -isomorfismo.

Ciò vale senz'altro nel caso in cui  $\mathbf{G}$  sia compatto ed  $F$  di Hausdorff, perché un'applicazione continua e bigettiva tra spazi di Hausdorff compatti è anche un omeomorfismo.

### XXVI.3. Fibrati di Steenrod e fibrati principali

Siano  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico ed  $F$  un  $\mathbf{G}$ -spazio fedele. Identifichiamo  $\mathbf{G}$  al corrispondente gruppo di omeomorfismi di  $F$ .

DEFINIZIONE XXVI.3.1. Una  $F$ -struttura su uno spazio topologico  $W$  è il dato di una famiglia  $\mathbf{A}(F, W)$  di omeomorfismi  $\sigma : F \rightarrow W$  tali che  $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2 \in \mathbf{G}$  per ogni  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbf{A}(F, W)$ .

DEFINIZIONE XXVI.3.2. Una  $F$ -struttura su un fibrato topologico  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$  è il dato, per ogni fibra  $E_p$ , di una  $F$ -struttura  $\mathbf{A}(F, E_p)$ .

Chiamiamo  $F$  la fibra standard e  $\mathbf{G}$  il gruppo strutturale di  $\xi$ .

Un fibrato  $\xi$  dotato di una  $F$ -struttura si dice un  $F$ -fibrato in senso debole.

Se  $F = \mathbf{G}$  con  $\mathbf{G}$  che opera su sé stesso per traslazioni a sinistra, chiamiamo una tale  $\mathbf{G}$ -struttura principale e  $\xi$  un  $\mathbf{G}$ -fibrato principale in senso debole.

Ad un  $F$ -fibrato in senso debole  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$  possiamo associare in modo canonico un  $\mathbf{G}$ -fibrato principale in senso debole  $P(\xi) = (P(E) \xrightarrow{\pi} B)$  con

$$(26.3.1) \quad P(E) = \{(p, \sigma) \mid p \in B, \sigma \in \mathbf{A}(F, E_p)\}, \quad \pi(p, \sigma) = p$$

ed azione canonica a destra di  $\mathbf{G}$  sulle fibre definita da

$$(26.3.2) \quad (p, \sigma) \cdot a = (p, \sigma \circ a), \quad \forall (p, \sigma) \in P(E), \forall a \in \mathbf{G}.$$

Su  $P(E)$  possiamo considerare la topologia di sottospazio di  $B \times \mathcal{C}(F, E)$ .

**DEFINIZIONE XXVI.3.3.** Il  $\mathbf{G}$ -fibrato principale in senso debole  $P(\xi)$  si dice *associato* a  $\xi$ .

Chiaramente, se  $U$  è un aperto di  $B$ , la restrizione  $\xi|_U$  di  $\xi$  ad  $U$  è ancora un  $F$ -fibrato con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$  se tale era  $\xi$ .

**DEFINIZIONE XXVI.3.4.** Se  $\xi_i = (E_i \xrightarrow{\pi_i} B_i)$ ,  $i = 1, 2$ , sono fibrati topologici con la stessa fibra tipica  $F$  e gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ , un morfismo continuo di fibrati  $(f, \tilde{f}) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$  è un  $F$ -morfismo se

$$(26.3.3) \quad \tilde{f} \circ \sigma \in \mathbf{A}(F, E_{2f(p)}), \quad \forall p \in B_1, \quad \forall \sigma \in \mathbf{A}(F, E_p).$$

Osserviamo che un  $F$ -morfismo si restringe, su ciascuna fibra di  $\xi_1$ , ad un omeomorfismo con la corrispondente fibra di  $\xi_2$ .

**DEFINIZIONE XXVI.3.5.** Se  $B_1 = B_2$ ,  $f = \text{id}$  ed  $\tilde{f}$  è un omeomorfismo, diciamo che  $(f, \tilde{f})$  è una  $F$ -equivalenza.

Una  $F$ -equivalenza è invertibile e l'inversa è ancora una  $F$ -equivalenza.

**DEFINIZIONE XXVI.3.6.** Se  $B$  è uno spazio topologico ed  $F$  un  $\mathbf{G}$ -spazio fedele, chiamiamo *fibrato banale* di base  $B$ , fibra  $F$  e gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ , il fibrato

$$(26.3.4) \quad \pi : B \times F \ni (p, \mu) \rightarrow p \in B, \quad \text{con } \mathbf{A}(F, \{p\} \times F) = \mathbf{G}, \quad \forall p \in F.$$

**DEFINIZIONE XXVI.3.7.** Un  $F$ -fibrato  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$  si dice *di Steenrod* se è localmente  $F$ -equivalente ad un fibrato banale.

Un  $\mathbf{G}$ -fibrato di Steenrod si dice un  *$\mathbf{G}$ -fibrato principale*.

**PROPOSIZIONE XXVI.3.8.** Sia  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$  un  $F$ -fibrato in senso debole. Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\xi$  sia di Steenrod è che  $P(\xi)$  sia principale.

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\phi : U \times F \rightarrow E|_U$  è una trivializzazione di  $\xi$  su un aperto  $U$  di  $B$ , allora  $\hat{\phi} : U \times \mathbf{G} \ni (p, a) \rightarrow \phi \circ a \in P(E)|_U$  è una trivializzazione di  $P(\xi)$  su  $U$ . Viceversa, se  $\psi : U \times \mathbf{G} \rightarrow P(E)|_U$  è una trivializzazione di  $P(\xi)$  su  $U$ , possiamo definire una trivializzazione  $\phi : U \times F \rightarrow E|_U$  ponendo  $\phi(p, \mu) = \psi(p, e_{\mathbf{G}})(\mu)$ .  $\square$

Un *atlante di trivializzazione* di  $\xi$  è il dato di un ricoprimento aperto  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  di  $B$  e, per ogni indice  $i$ , di un'applicazione continua  $\phi_i \in \mathcal{C}(U_i \times F, E|_{U_i})$  per cui  $(\text{id}_{U_i}, \phi_i)$  sia una  $F$ -equivalenza del fibrato banale  $(U_i \times F \rightarrow U_i)$  con  $\xi|_{U_i}$ . Per ogni

$p \in U_i$ , la  $F \ni \mu \rightarrow \phi_i(p, \mu)$  è un elemento di  $\mathbf{A}(F, E_p)$ . Le funzioni di transizione sono quindi della forma

$$(26.3.5) \quad (p, \mu) \rightarrow (p, \phi_{i,j}(p)\mu), \quad \text{con } \phi_{i,j} \in \mathcal{C}(U_{i,j}, \mathbf{G}).$$

Viceversa, abbiamo

**PROPOSIZIONE XXVI.3.9.** *Siano  $F$  un  $\mathbf{G}$ -spazio fedele,  $B$  uno spazio topologico ed  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  un suo ricoprimento aperto. Sia poi assegnata una famiglia  $\{\phi_{i,j} \in \mathcal{C}(U_{i,j}, \mathbf{G})\}$  con*

$$\phi_{i,j}\phi_{j,k}\phi_{k,i} = e_{\mathbf{G}} \text{ su } U_{i,j,k}, \quad \forall i, j, k.$$

*Esiste allora unico, a meno di equivalenze, un  $F$ -fibrato di Steenrod su  $B$ , con gruppo strutturale  $\mathbf{G}$ , che ammetta un atlante di trivializzazione con ricoprimento aperto  $\mathcal{U}$  e funzioni di transizione  $\{\phi_{i,j}\}$ .  $\square$*

Ne segue facilmente la

**PROPOSIZIONE XXVI.3.10.** *Se  $\xi$  è un  $\mathbf{G}$ -fibrato principale ed  $F$  un  $\mathbf{G}$ -spazio fedele, esiste unico, a meno di equivalenze, un  $F$ -fibrato di Steenrod  $\theta$  con  $\xi = P(\theta)$ .  $\square$*

La Proposizione XXVI.3.10 riduce lo studio dei fibrati di Steenrod generali a quello dei fibrati principali.

#### XXVI.4. Un Lemma di trivializzazione

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico ed  $F$  un  $\mathbf{G}$ -spazio fedele.

**LEMMA XXVI.4.1.** *Sia  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$  un  $F$ -fibrato principale e siano  $B_1, B_2$  due sottoinsiemi chiusi di  $B$  tali che  $B_1 \cup B_2 = B$  e  $B_1 \cap B_2$  sia un retratto<sup>1</sup> di  $B_2$  su  $B_1 \cap B_2$ . Se i fibrati  $\xi|_{B_1}$  e  $\xi|_{B_2}$  sono trivializzabili, allora anche  $\xi$  è trivializzabile.*

*Se  $\phi_1 : B_1 \times F \rightarrow E|_{B_1}$  definisce una  $F$ -trivializzazione di  $\xi$  su  $B_1$ , è possibile trovare una trivializzazione di  $\xi$  su  $B$  definita da una  $\phi : B \times F \rightarrow E$  che estende  $\phi_1$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $\rho \in \mathcal{C}(B_2, B_1 \cap B_2)$  una retrazione e  $\phi_i \in \mathcal{C}(U_i \times F, E|_{U_i})$ , per  $i = 1, 2$ , applicazioni di trivializzazione. La funzione di transizione  $\phi_{1,2} \in \mathcal{C}(B_1 \cap B_2, \mathbf{G})$  verifica la

$$\phi_1(p, \mu) = \phi_2(p, \phi_{1,2}(p)\mu), \quad \forall p \in B_1 \cap B_2, \forall \mu \in F.$$

Allora la  $\phi : B \times F \rightarrow E$ , definita da

$$\phi(p, \mu) = \begin{cases} \phi_1(p, \mu) & \text{se } p \in B_1, \mu \in F, \\ \phi_2(p, \phi_{1,2}(\rho(p))\mu) & \text{se } p \in B_2, \mu \in F, \end{cases}$$

è una trivializzazione di  $\xi$  su  $B$ .  $\square$

Possiamo ora dimostrare

**LEMMA XXVI.4.2.** *Sia  $F$  uno spazio  $\mathbf{G}$ -fedele. Ogni  $F$ -fibrato di Steenrod su  $[0, 1]^n$  è trivializzabile.*

<sup>1</sup>Questo significa che esiste un'applicazione continua  $\rho \in \mathcal{C}(B_2, B_1 \cap B_2)$  tale che  $\rho(p) = p$  per ogni  $p \in B_1 \cap B_2$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per un intero positivo  $\nu$  sufficientemente grande possiamo suddividere  $[0, 1]^\nu$  in  $\nu^n$  ipercubi di lato  $1/\nu$ , su ciascuno dei quali  $\xi$  sia trivialisabile. Ordiniamo gli  $\nu^n$  ipercubi  $Q_1, \dots, Q_{\nu^n}$  in ordine lessicografico. In questo modo, per ogni  $h$  con  $2 \leq h \leq \nu^n$  l'ipercubo  $Q_h$  si retrae per deformazione sulla sua intersezione con  $\bigcup_{i < h} Q_i$ . La tesi segue allora per ricorrenza, utilizzando il Lemma XXVI.4.1.  $\square$

### XXVI.5. Richiami sui CW-complexi

Indichiamo con  $D^k$  la palla unitaria chiusa  $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x| \leq 1\}$  di  $\mathbb{R}^k$  e con  $S^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x| = 1\}$  la sua frontiera in  $\mathbb{R}^k$ .

Sia  $M$  uno spazio topologico. Una *cella* di dimensione  $k$  di  $M$  è il dato di un sottoinsieme  $e$  di  $M$  e di un'applicazione continua  $\phi_e : D^k \rightarrow M$  la cui restrizione alla parte interna  $\overset{\circ}{D}^k$  di  $D^k$  definisca un omeomorfismo di  $\overset{\circ}{D}^k$  su  $e$ , con la topologia di sottospazio. La  $\phi_e$  si dice *funzione caratteristica* della cella  $e$ . Chiamiamo  $\bar{e}$  la *cella chiusa* e  $\partial e = \phi_e(S^{k-1})$  la frontiera di  $e$ .

Una *partizione in celle* di  $M$  è un ricoprimento  $\mathbf{K}$  di  $M$  mediante celle (aperte) tale che, per ogni  $e \in \mathbf{K}$ , la frontiera  $\partial e$  sia contenuta in un'unione di celle di  $\mathbf{K}$  di dimensione più piccola.

Diciamo che  $M$  è un *CW-complesso* se è uno spazio di Hausdorff e su di esso è assegnata una partizione in celle  $\mathbf{K}$  con le proprietà:

- (C) ogni cella chiusa interseca un numero finito di celle;
- (W)  $\bar{\mathbf{K}} = \{\bar{e} \mid e \in \mathbf{K}\}$  è un ricoprimento fondamentale<sup>2</sup> di  $M$ .

Indichiamo con  $\mathbf{K}_k$  ed  $\mathbf{K}_{(k)}$ , rispettivamente, l'insieme delle celle di dimensione  $k$  di  $\mathbf{K}$  e delle celle di dimensione  $\leq k$  di  $\mathbf{K}$ . L'unione  $\mathbf{S}_k(M) = \bigcup \mathbf{K}_{(k)}$  delle celle di dimensione minore o uguale di  $k$  si dice *scheletro di dimensione  $k$*  di  $M$ . L'estremo superiore dell'insieme dei numeri interi non negativi  $k$  per cui  $\mathbf{K}_k \neq \emptyset$  si dice la *dimensione* di  $M$ .

Un CW-complesso  $M$  è *localmente finito* se ogni punto ha un intorno aperto che interseca un numero finito di celle. Questo equivale al fatto che ogni cella intersechi soltanto un numero finito di celle chiuse.

Un CW-complesso  $M$  è *compatto* se e soltanto se la sua partizione in celle  $\mathbf{K}$  è finita.

Un CW-complesso  $M$  è *connesso* se e soltanto se il suo scheletro 1-dimensionale  $\mathbf{S}_1(M)$  è connesso. Più in generale, se  $p_0 \in M$  è una cella di dimensione 0, abbiamo  $\pi_q(M) = \pi(\mathbf{S}_{q+1}(M))$  per ogni intero  $q \geq 0$ .

Ricordiamo che uno spazio topologico  $M$  è  *$m$ -connesso*<sup>3</sup> se, per ogni intero  $k$  con  $0 \leq k \leq m$ , ogni  $f \in \mathcal{C}(S^k, M)$  è omotopa ad un'applicazione costante. Una coppia topologica  $(M, A)$  è  *$m$ -connessa* se, per ogni intero  $k$  con  $0 \leq k \leq m$ , ogni applicazione continua  $f \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; M, A)$  è omotopa ad un'applicazione costante. Vale la

<sup>2</sup>Ciò significa che un sottoinsieme  $A$  di  $M$  è chiuso se e soltanto se  $A \cap \bar{e}$  è chiuso per ogni  $e \in \mathbf{K}$ .

<sup>3</sup>Conveniamo che un qualsiasi spazio topologico non vuoto sia  $-1$ -connesso.



PROPOSIZIONE XXVI.5.1. *Ogni applicazione  $f \in \mathcal{C}(M, N)$  di un CW-complesso  $M$  di dimensione minore o uguale ad  $m$  in uno spazio topologico  $m$ -connesso  $N$  è omotopa ad un'applicazione costante.*

*Sia  $A$  un sotto-CW-complesso di un CW-complesso  $M$  ed  $f \in \mathcal{C}(M, A; N, B)$  un'applicazione a valori in una coppia  $m$ -connessa. Se tutte le celle contenute in  $M \setminus A$  hanno dimensione minore o uguale ad  $m$ , allora  $f$  è  $A$ -omotopa<sup>4</sup> ad un'applicazione a valori in  $B$ .*

### XXVI.6. Invarianza omotopica dei fibrati di Steenrod a base CW

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico ed  $F$  uno spazio  $\mathbf{G}$ -fedele.

LEMMA XXVI.6.1. *Sia  $\mathbf{e}$  una cella di uno spazio topologico  $M$  e siano  $\xi_1$  e  $\xi_2$  due  $F$ -fibrati di Steenrod su  $\mathbf{e} \times [0, 1]$ . Sia  $N = (\mathbf{e} \times \{0\}) \cup (\partial \mathbf{e} \times [0, 1])$ . Se  $\xi_1$  e  $\xi_2$  sono  $F$ -equivalenti su  $N$ , allora  $\xi_1$  e  $\xi_2$  sono  $F$ -equivalenti ed ogni  $F$ -equivalenza  $(\text{id}_N, \psi_N) : \xi_1|_N \rightarrow \xi_2|_N$  si estende ad una  $F$ -equivalenza  $(\text{id}_{\mathbf{e} \times [0, 1]}, \psi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\phi : D^n \times [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$  il prodotto della funzione caratteristica della cella  $\mathbf{e}$  per l'identità sull'intervallo  $[0, 1]$ . Poniamo

$$N = (\mathbf{e} \times \{0\}) \cup (\partial \mathbf{e} \times [0, 1]),$$

dimodoché

$$\phi^{-1}(N) = (D^n \times \{0\}) \cup (D^n \times [0, 1]).$$

Per ipotesi, è data un'equivalenza  $(\text{id}_N, \psi_N) : \xi_1|_N \rightarrow \xi_2|_N$ .

Fissiamo una retrazione  $\rho : D^n \times [0, 1] \rightarrow \phi^{-1}(N)$ . Poiché  $D^n \times [0, 1]$  è omeomorfo a  $[0, 1]^{n+1}$ , per il Lemma XXVI.4.2 i fibrati di Steenrod sulla base  $D^n \times [0, 1]$  sono trivializzabili. Se  $\lambda_i : (D^n \times [0, 1]) \times F \rightarrow E_{\phi^*(\xi_i)}$  ed  $\eta_i : (D^n \times [0, 1]) \times F \rightarrow E_{\rho^*(\phi^*(\xi_i))}$  sono omeomorfismi di trivializzazione, la  $\lambda_i \circ \eta_i^{-1} : E_{\rho^*(\phi^*(\xi_i))} \rightarrow E_{\phi^*(\xi_i)}$  definisce una  $F$ -equivalenza tra  $\rho^*(\phi^*(\eta_i))$  e  $\phi^*(\eta_i)$  che è l'identità sopra  $\phi^{-1}(N)$ . Osserviamo ora che la  $F$ -equivalenza  $\psi_N : E_{\xi_1}|_N \rightarrow E_{\xi_2}|_N$  definisce una  $F$ -equivalenza  $\psi_N^* : E_{\phi^*(\xi_1)}|_{\phi^{-1}(N)} \rightarrow E_{\phi^*(\xi_2)}|_{\phi^{-1}(N)}$ , mediante

$$\begin{aligned} \{(x, t; \mu) \in \phi^{-1}(N) \times E_{\xi_1} \mid \phi(x, t) = \pi_1(\mu)\} &\ni (x, t; \mu) \rightarrow \psi_N^*(x, t; \mu) \\ &= (x, t; \psi_N(\phi(x, t), \mu)) \in \{(x, t; \mu) \in \phi^{-1}(N) \times E_{\xi_2} \mid \phi(x, t) = \pi_2(\mu)\}. \end{aligned}$$

La  $\psi_N^*$  si estende in modo naturale ad un'  $F$ -equivalenza tra  $\rho^*(\phi^*(\xi_1))$  e  $\rho^*(\phi^*(\xi_2))$ . Per composizione, otteniamo così un'equivalenza tra  $\phi^*(\xi_1)$  e  $\phi^*(\xi_2)$  che estende quella data tra le loro restrizioni a  $\phi^{-1}(N)$ . Poiché  $\phi$  è un omeomorfismo fuori di  $\phi^{-1}(N)$ , questa  $F$ -equivalenza tra  $\phi^*(\xi_1)$  e  $\phi^*(\xi_2)$  definisce una  $F$ -equivalenza tra  $\xi_1$  e  $\xi_2$  che estende quella assegnata su  $N$ .  $\square$

TEOREMA XXVI.6.2. *Sia  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$  un  $F$ -fibrato di Steenrod,  $M$  un CW-complesso,  $A$  un suo sotto-CW-complesso, ed  $f = \{f_t\} \in \mathcal{C}(M \times [0, 1], B)$  un'  $A$ -omotopia<sup>5</sup>. Allora  $f_0^*(\xi)$  ed  $f_1^*(\xi)$  sono equivalenti e possiamo trovare un'equivalenza  $(\text{id}_M, \phi) : f_0^*(\xi) \rightarrow f_1^*(\xi)$  che sia l'identità su  $f_0^*(\xi)|_A$ .*

<sup>4</sup>Esiste cioè una  $\tilde{f} = \{f_t\} \in \mathcal{C}(M \times [0, 1], N)$  tale che  $f_0 = \tilde{f}$ ,  $f_1(M) \subset B$  ed  $f_t(p) = f_0(p)$  per ogni  $p \in A$  ed ogni  $t \in [0, 1]$ .

<sup>5</sup>Ciò significa che  $t \rightarrow f_t(p)$  è costante per  $p \in A$ .

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo fissata la struttura di  $CW$ -complesso di  $M$ .

Sia  $p_M : M \times [0, 1] \rightarrow M$  la proiezione del prodotto cartesiano sul primo fattore. Consideriamo su  $M \times [0, 1]$  i due  $F$ -fibrati

$$\zeta_0 = p_M^*(f_0^*(\xi)) \quad \text{e} \quad \zeta_1 = f^*(\xi).$$

Essi hanno uguale restrizione ad  $(M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1])$  e l'omeomorfismo  $M \ni p \rightarrow (p, 1) \in M \times [0, 1]$  trasforma  $\zeta_0|_{M \times \{1\}}$  in  $f_0^*(\xi)$  e  $\zeta_1|_{M \times \{1\}}$  in  $f_1^*(\xi)$ . Basterà quindi costruire una  $F$ -equivalenza tra  $\zeta_0$  e  $\zeta_1$  che sia l'identità sopra ad  $(M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1])$ .

Sia  $N_{-1} = (M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1])$  e, per ogni intero non negativo  $q$ , poniamo

$$N_q = (M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1]) \cup (\mathbf{S}_q(M) \times [0, 1]).$$

Dimostriamo per ricorrenza che è possibile definire una successione  $\{\phi_q\}_{q \geq -1}$  tale che

- (1)  $\phi_{-1}$  sia l'identità sulle fibre sopra  $(M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1])$ ;
- (2)  $(\text{id}_{N_q}, \phi_q) : \zeta_0|_{N_q} \rightarrow \zeta_1|_{N_q}$  sia una  $F$ -equivalenza;
- (3)  $\phi_{q+1} = \phi_q$  su  $E_{\zeta_0}|_{N_q}$ .

La  $\phi_{-1}$  è assegnata. Dimostriamo per ricorrenza che, fissato  $q \geq 0$  ed assegnata  $\phi_{q-1}$ , è possibile costruire  $\phi_q$ . Utilizziamo a questo scopo il lemma di Zorn. Indichiamo con  $\Psi$  l'insieme delle coppie  $(Q, \psi)$  formate da un sotto- $CW$ -complesso  $Q$  di  $M$  con

$$N_{q-1} \subset Q \subset N_q$$

e da un'applicazione continua

$$\psi_Q : E_{\zeta_0}|_Q \rightarrow E_{\zeta_1}|_Q \quad \text{t.c.} \quad (\text{id}_Q, \psi_Q) : \zeta_0|_Q \rightarrow \zeta_1|_Q \quad \text{sia una } F\text{-equivalenza.}$$

Definiamo una relazione d'ordine su  $\Psi$  ponendo

$$(Q_1, \psi_{Q_1}) < (Q_2, \psi_{Q_2}) \iff Q_1 \subsetneq Q_2 \quad \text{e} \quad \psi_{Q_2} = \psi_{Q_1} \quad \text{su} \quad E_{\zeta_0}|_{Q_1}.$$

La famiglia  $\Psi$  è non vuota, perché contiene  $(N_{q-1}, \phi_{q-1})$  ed è induttiva perché ogni unione di celle  $Q$  con  $N_{q-1} \subset Q \subset N_q$  è ancora un sotto- $CW$ -complesso di  $M$ . Per il Lemma di Zorn  $\Psi$  contiene un elemento massimale  $(Q, \psi_Q)$ . Dal Lemma XXVI.6.1 segue facilmente che deve risultare  $Q = N_q$ . La tesi è conseguenza del fatto che gli  $N_q$  formano un ricoprimento fondamentale di  $M$ , e quindi gli  $E_{\zeta_0}|_{N_q}$  un ricoprimento fondamentale di  $E_{\zeta_0}$ . Possiamo quindi definire  $\phi : E_{\zeta_0} \rightarrow E_{\zeta_1}$  ponendo  $\phi = \phi_q$  su  $E_{\zeta_0}|_{N_q}$ .  $\square$

### XXVI.7. Fibrati universali

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo topologico ed  $F$  un  $\mathbf{G}$ -spazio fedele. Sia  $m$  un intero non negativo o  $+\infty$ .

DEFINIZIONE XXVI.7.1. Un  $F$ -fibrato di Steenrod  $\zeta = (E_\zeta \xrightarrow{\pi_\zeta} B_\zeta)$  si dice  *$m$ -universale* se per ogni  $F$ -fibrato di Steenrod  $\xi = (E_\xi \xrightarrow{\pi_\xi} B_\xi)$  la cui base  $B_\xi$  sia un  $CW$ -complesso di dimensione minore o uguale ad  $m$  esiste un'applicazione continua  $f \in \mathcal{C}(B_\xi, B_\zeta)$  tale che  $f^*(\zeta)$  sia equivalente a  $\xi$ .

Si verifica facilmente che

PROPOSIZIONE XXVI.7.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un  $F$ -fibrato di Steenrod  $\zeta = (E_\zeta \xrightarrow{\pi_\zeta} B_\zeta)$  sia  $m$ -universale è che il  $\mathbf{G}$ -fibrato principale associato  $P(\zeta)$  sia  $m$ -universale.  $\square$*

Possiamo quindi limitarci, nel seguito di questo paragrafo, a considerare  $\mathbf{G}$ -fibrati principali.

TEOREMA XXVI.7.3. *Sia  $\zeta = (E_\zeta \xrightarrow{\pi_\zeta} B_\zeta)$  un  $\mathbf{G}$ -fibrato principale, il cui spazio totale  $E_\zeta$  sia  $(m-1)$ -connesso. Allora, per ogni  $\mathbf{G}$ -fibrato principale  $\xi = (E_\xi \xrightarrow{\pi_\xi} B_\xi)$ , la cui base sia un  $CW$ -complesso di dimensione minore o uguale ad  $m$ , esiste un'applicazione continua  $f \in \mathcal{C}(B_\xi, B_\zeta)$  tale che  $\xi$  sia equivalente ad  $f^*(\zeta)$ .*

Questo teorema è conseguenza della

PROPOSIZIONE XXVI.7.4. *Siano  $\zeta$  e  $\xi$  come nell'enunciato del Teorema XXVI.7.3. Se  $A$  è un sotto- $CW$ -complesso di  $B_\xi$  ed  $(f_A, \tilde{f}_A) : \xi|_A \rightarrow \zeta$  un morfismo di  $\mathbf{G}$ -fibrati principali, allora esiste un morfismo  $(f, \tilde{f}) : \xi \rightarrow \zeta$  di  $\mathbf{G}$ -fibrati principali con  $\tilde{f} = \tilde{f}_A$  su  $\pi_\xi^{-1}(A)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo fissata la struttura di  $CW$ -complesso di  $B_\xi$ . Dimostriamo per ricorrenza che è possibile definire, per ogni intero  $k$  con  $0 \leq k \leq m$ , un'estensione  $(f_k, \tilde{f}_k) : \xi|_{A \cup S_k(B_\xi)} \rightarrow \zeta$  di  $(f_A, \tilde{f}_A) : \xi|_A \rightarrow \zeta$ .

Per l'argomento che utilizzeremo, è utile osservare che, per ogni intero  $k \geq 0$  ed ogni sottoinsieme  $\mathbf{J}$  di  $\mathbf{K}_{k+1}$ , l'unione  $A \cup S_k(B_\xi) \cup (\cup \mathbf{J})$  è ancora un sotto- $CW$ -complesso di  $B_\xi$ .

Poiché  $S_0(B_\xi) \setminus A$  è un sottospazio discreto, l'esistenza di  $(f_0, \tilde{f}_0)$  è banale. Sia  $0 \leq k < m$ ; supponiamo di aver costruito l'estensione  $(f_k, \tilde{f}_k)$ .

Per ogni  $\mathbf{J} \subset \mathbf{K}_{k+1}$  poniamo  $A_{\mathbf{J}} = A \cup S_k(B_\xi) \cup (\cup \mathbf{J})$ . Sia  $\mathcal{J}$  la famiglia delle  $(\mathbf{J}, f_{\mathbf{J}}, \tilde{f}_{\mathbf{J}})$  che consistono di un sottoinsieme  $\mathbf{J}$  di  $\mathbf{K}_{k+1}$  e di un omomorfismo di  $\mathbf{G}$ -fibrati principali  $(f_{\mathbf{J}}, \tilde{f}_{\mathbf{J}}) : \xi|_{A_{\mathbf{J}}} \rightarrow \zeta$  che coincide con  $(f_k, \tilde{f}_k)$  su  $A \cup S_k(B_\xi) = A_0$ . Introduciamo su  $\mathcal{J}$  l'ordinamento

$$(\mathbf{J}_1, f_{\mathbf{J}_1}, \tilde{f}_{\mathbf{J}_1}) < (\mathbf{J}_2, f_{\mathbf{J}_2}, \tilde{f}_{\mathbf{J}_2}) \iff \mathbf{J}_1 \subsetneq \mathbf{J}_2 \text{ ed } \tilde{f}_{\mathbf{J}_2}|_{\pi_\xi^{-1}(A_{\mathbf{J}_1})} = \tilde{f}_{\mathbf{J}_1}.$$

La famiglia  $\mathcal{J}$  è non vuota perché contiene  $(A_0, f_k, \tilde{f}_k)$  ed è induttiva. Per il Lemma di Zorn ammette un elemento massimale  $(\mathbf{J}_0, f_{\mathbf{J}_0}, \tilde{f}_{\mathbf{J}_0})$ . Supponiamo per assurdo che questo elemento massimale sia diverso da  $\mathbf{K}_{k+1}$ . Scriviamo per semplicità di notazione  $A_{\mathbf{J}_0} = B$ ,  $f_{\mathbf{J}_0} = g$  ed  $\tilde{f}_{\mathbf{J}_0} = \tilde{g}$ .

Dunque  $B$  è un sotto- $CW$ -complesso di  $B_\xi$  che contiene  $S_k(B_\xi)$ , ed è definito un omomorfismo di  $\mathbf{G}$ -fibrati principali  $(g, \tilde{g}) : \xi|_B \rightarrow \zeta$ .

Per ipotesi, vi è almeno una cella  $\mathbf{e} \in \mathbf{K}_{k+1}$  non contenuta in  $B$ . Sia  $\phi_{\mathbf{e}} \in \mathcal{C}(D^{k+1}, M)$  la sua funzione caratteristica. Poiché  $\bar{\mathbf{e}}$  è contrattile, la restrizione di  $\xi$  ad  $\bar{\mathbf{e}}$  è banale. Fissiamo una trivializzazione  $\lambda_{\bar{\mathbf{e}}} : \bar{\mathbf{e}} \times \mathbf{G} \rightarrow \pi_\xi^{-1}(\bar{\mathbf{e}})$  e consideriamo l'applicazione continua  $\gamma \in \mathcal{C}(S^k, E_\zeta)$  definita dalla composizione

$$S^k \xrightarrow{\phi_{\mathbf{e}}} \partial e \xrightarrow{\lambda_{\bar{\mathbf{e}}}(\cdot, e_{\mathbf{G}})} \pi_\xi^{-1}(\partial e) \xrightarrow{\tilde{g}} E_\zeta.$$

Poiché abbiamo supposto che  $E_\zeta$  fosse  $k$ -connesso, la  $\gamma$  si estende ad un'applicazione continua  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{C}(D^{k+1}, E_\zeta)$ . La

$$\tilde{u}(\sigma) = \begin{cases} \tilde{g}(\sigma) & \text{se } \pi_\xi(\sigma) \in B, \\ \tilde{\gamma}(\phi_e^{-1}(p)) \cdot \lambda_e^{-1}(\sigma) & \text{se } p = \pi_\xi(\sigma) \in \mathbf{e}, \end{cases}$$

con  $u = \pi_\zeta \circ \tilde{u}$ , la  $(u, \tilde{u})$  è un morfismo di  $\mathbf{G}$ -fibrati principali che estende  $(g, \tilde{g})$  a  $\xi|_{B \cup \mathbf{e}}$ . Poiché  $(\mathbf{J}_0 \cup \{\mathbf{e}\}, u, \tilde{u}) \in \mathcal{J}$  e

$$(\mathbf{J}_0, g, \tilde{g}) < (\mathbf{J}_0 \cup \{\mathbf{e}\}, u, \tilde{u}),$$

questo contraddice la massimalità di  $(\mathbf{J}_0, g, \tilde{g})$ . Ciò dimostra l'esistenza dell'estensione  $(f_{k+1}, \tilde{f}_{k+1})$  e dunque, per ricorrenza, se  $m < \infty$ , dell'estensione  $(f_m, \tilde{f}_m) = (f, \tilde{f})$ . Se  $m = \infty$ , osserviamo che, dal momento che gli  $A \cup \mathbf{S}_k(M)$  formano un ricoprimento fondamentale di  $M$  e gli  $E_\xi|_{A \cup \mathbf{S}_k(M)}$  un ricoprimento fondamentale di  $E_\xi$ , la  $(f, \tilde{f}) : \xi \rightarrow \zeta$  definita da  $(f, \tilde{f}) = (f_k, \tilde{f}_k)$  su  $\xi|_{A \cup \mathbf{S}_k(M)}$  è un omomorfismo di  $\mathbf{G}$ -fibrati principali. La dimostrazione è completa.  $\square$

**OSSERVAZIONE XXVI.7.5.** Si verifica facilmente che la condizione che  $E_\zeta$  sia  $(m-1)$ -connesso è necessaria perché l'enunciato della Proposizione sia valido per ogni  $\mathbf{G}$ -fibrato principale  $\xi$  la cui base sia un  $CW$ -complesso di dimensione minore o uguale ad  $m$ . Infatti ogni applicazione continua  $\phi \in \mathcal{C}(S^n, E_\zeta)$  definisce un  $\mathbf{G}$ -omomorfismo  $(f_{S^{n-1}}, \tilde{f}_{S^{n-1}})$  del fibrato banale  $S^n \times \mathbf{G} \rightarrow S^n$  in  $\zeta$ , ove si ponga  $\tilde{f}(x, a) = \phi(x)a$  per ogni  $x \in S^n$  ed  $a \in \mathbf{G}$ . Un'estensione  $(f, \tilde{f})$  di  $(f_{S^{n-1}}, \tilde{f}_{S^{n-1}})$  ad un  $\mathbf{G}$ -omomorfismo del fibrato banale  $D^{n+1} \times \mathbf{G} \rightarrow D^{n+1}$  in  $\zeta$  definisce un'estensione  $\tilde{f}(x, e_{\mathbf{G}})$  di  $\phi$  ad un'applicazione continua da  $D^{n+1}$  in  $E_\zeta$ .

**DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA XXVI.7.3.** Fissiamo una cella  $A = \{p_0\}$  di dimensione 0 di  $B_\xi$  e consideriamo l'applicazione che fa corrispondere al punto  $p_0$  un qualsiasi punto  $z_0$  di  $B_\zeta$ . Fissati un punto  $\sigma_0 \in \pi_\xi^{-1}(p_0)$  ed un punto  $\tau_0 \in \pi_\zeta^{-1}(z_0)$ , la  $\sigma_0 a \rightarrow \tau_0 a$ , per ogni  $a \in \mathbf{G}$ , definisce un morfismo di  $\mathbf{G}$ -fibrati principali  $\xi|_{p_0} \rightarrow \zeta$ . Per la Proposizione XXVI.7.4 esso si estende ad un omomorfismo di  $\mathbf{G}$ -fibrati principali  $(f, \tilde{f}) : \xi \rightarrow \zeta$ , che definisce l'equivalenza  $\xi \simeq f^*(\zeta)$ .  $\square$

**TEOREMA XXVI.7.6.** Sia  $\zeta = (E_\zeta \xrightarrow{\pi_\zeta} B_\zeta)$  un fibrato  $\mathbf{G}$ -principale il cui spazio totale  $E_\zeta$  sia  $m$ -connesso. Sia  $M$  un  $CW$ -complesso di dimensione minore o uguale ad  $m$  e siano  $f_0, f_1 \in \mathcal{C}(M, B_\zeta)$  due applicazioni continue. Se  $f_0^*(\zeta)$  ed  $f_1^*(\zeta)$  sono equivalenti, allora  $f_0$  ed  $f_1$  sono omotope.

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $f_i^*(\zeta) = (E_i \xrightarrow{\pi_i} M)$  con

$$E_i = \{(p, \tau) \in M \times E_\zeta \mid f_i(p) = \pi_\zeta(\tau)\}, \quad \pi_i : E_i \ni (p, \tau) \rightarrow p \in M.$$

Gli omomorfismi standard  $(f_i, \tilde{f}_i) : f_i^*(\zeta) \rightarrow \zeta$  sono definiti da  $f_i(p, \tau) = \tau$  per ogni  $(p, \tau) \in E_i$ . Per ipotesi esiste un'equivalenza  $(\phi, \tilde{\phi}) : f_1^*(\zeta) \rightarrow f_2^*(\zeta)$  di  $\mathbf{G}$ -fibrati principali, con  $\phi(p) = p$  e  $\tilde{\phi}(p, \tau) = (p, \hat{\phi}(p, \tau))$  per  $(p, \tau) \in E_1$ , ove  $\hat{\phi} \in \mathcal{C}^\infty(E_1, E_\zeta)$  e  $\hat{\phi}(p, \tau a) = \hat{\phi}(p, \tau)a$  per ogni  $(p, \tau) \in E_1$  ed  $a \in \mathbf{G}$ .

Il prodotto  $M \times [0, 1]$  è un  $CW$ -complesso di dimensione minore o uguale ad  $(m+1)$ . Sia  $\varpi : M \times [0, 1] \rightarrow M$  la proiezione sul primo fattore e  $\xi = \varpi^*(f_0^*(\zeta))$

l'immagine inversa su  $M \times [0, 1]$  di  $f_0^*(\zeta)$ . Osserviamo che  $A_i = M \times \{i\}$ , per  $i = 0, 1$ , ed  $A = A_0 \cup A_1$ , sono sottospazi cellulari di  $M \times [0, 1]$ . Definiamo  $(f_A, \tilde{f}_A) : \xi|_A \rightarrow \zeta$  ponendo

$$f_A(p, i) = f_i(p) \quad \text{se } p \in M, i = 0, 1, \text{ e}$$

$$\tilde{f}_A(p, i, \tau) = \begin{cases} \tilde{f}_1(p, \tau) & \text{se } (p, \tau) \in E_1, i = 0, \\ \tilde{f}_2(p, \hat{\phi}(p, \tau)) & \text{se } (p, \tau) \in E_1, i = 1. \end{cases}$$

Per la Proposizione XXVI.7.4  $(f_A, \tilde{f}_A)$  si estende ad una  $(f, \tilde{f}) : \xi \rightarrow \zeta$ . In particolare,  $f = \{f_i\} \in \mathcal{C}(M \times [0, 1], B_\zeta)$  definisce un'omotopia tra  $f_0$  ed  $f_1$ .  $\square$

Come conseguenza dei Teoremi XXVI.7.3 e XXVI.7.6 abbiamo

**TEOREMA XXVI.7.7.** *Sia  $\zeta = (E_\zeta \xrightarrow{\pi_\zeta} B_\zeta)$  un  $\mathbf{G}$ -fibrato principale il cui spazio totale  $E_\zeta$  sia  $m$ -connesso ed  $M$  un CW-complesso di dimensione minore o uguale ad  $m$ . La corrispondenza*

$$\mathcal{C}(M, B_\zeta) \ni f \longrightarrow f^*(\zeta)$$

*definisce per passaggio ai quozienti una bigezione tra l'insieme  $\pi(M, B_\zeta)$  delle classi di omotopia di applicazioni continue da  $M$  in  $B_\zeta$  e l'insieme dei  $\mathbf{G}$ -fibrati principali con base  $M$ , modulo equivalenza.*  $\square$

### XXVI.8. Fibrati di Milnor

J. Milnor<sup>6</sup> ha descritto una costruzione canonica di fibrati  $m$ -universali, che si basa sulle proprietà dei *giunti* di spazi topologici.

**Giunto di spazi topologici.** Ricordiamo la costruzione del *giunto* di due spazi topologici. Se  $A, B$  sono due spazi topologici non vuoti, consideriamo lo spazio vettoriale libero generato dall'unione disgiunta di  $A$  e  $B$ , ed indichiamo con  $A * B$  l'insieme<sup>7</sup>

$$(26.8.1) \quad A * B = \{(1-t)a + tb \mid a \in A, b \in B, 0 \leq t \leq 1\}.$$

L'applicazione

$$\pi : A \times B \times [0, 1] \ni (a, b, t) \longrightarrow (1-t)a + tb \in A * B$$

è surgettiva e possiamo quindi considerare su  $A * B$  la topologia quoziente:  $A * B$  si ottiene da  $A \times B \times [0, 1]$  identificando ad un punto ciascuno dei sottoinsiemi  $\{a\} \times B \times 0$  ed  $A \times \{b\} \times 1$ . Il giunto  $A * B$  è connesso per archi e contiene i sottospazi chiusi  $\pi(A \times B \times \{0\})$ , omeomorfo ad  $A$ ,  $\pi(A \times B \times \{1\})$  omeomorfo a  $B$ ,  $\pi(A \times B \times \{\frac{1}{2}\})$ , omeomorfo ad  $A \times B$ . Identificheremo a volte nel seguito, per semplicità di scrittura,  $A, B, A \times B$  ai corrispondenti sottospazi di  $A * B$ .

<sup>6</sup>John Milnor, *Construction of universal bundles, II*, Annals of Mathematics, (63) 1956, pp. 430-436.

<sup>7</sup>Supponiamo per semplicità di scrittura che  $A$  e  $B$  siano disgiunti. Altrimenti, dovremmo considerare l'unione disgiunta  $A \sqcup B$  come il sottoinsieme di  $(A \cup B) \times \{0, 1\}$  formato dalle coppie  $(a, 0)$  con  $a \in A$  e  $(b, 1)$  con  $b \in B$  e scrivere, in (26.8.1),  $(1-t)(a, 0) + t(b, 1)$  invece di  $(1-t)a + tb$ .

Casi particolari sono il *cono di base*  $A$ , che è il giunto  $A * D^0$  di  $A$  con l'insieme formato da un solo punto e la *sospensione di*  $A$ , che è il giunto  $A * S^0$  di  $A$  con lo spazio formato da due punti.

La giunzione di spazi topologici è un'applicazione associativa: si verifica facilmente che, se  $A_1, A_2, A_3$  sono tre spazi topologici, allora  $(A_1 * A_2) * A_3$  è omeomorfo ad  $A_1 * (A_2 * A_3)$ . Potremo quindi indicare senza ambiguità con  $A_1 * \cdots * A_n$  il giunto di  $n$  spazi topologici. Possiamo ancora scrivere

$$(26.8.2) \quad A_1 * \cdots * A_n = \{t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n \mid a_i \in A_i, t_i \geq 0, t_1 + \cdots + t_n = 1\}.$$

Identificheremo  $A_i$  al sottospazio formato dai punti con  $t_i = 1$ . Vale la

PROPOSIZIONE XXVI.8.1. *Il giunto  $A_1 * \cdots * A_n$  di  $n$  spazi topologici è  $(n - 2)$ -connesso.*

Premettiamo il

LEMMA XXVI.8.2. *Se  $A_1$  è connesso per archi ed  $A_2 \neq \emptyset$ , allora  $A_1 * A_2$  è semplicemente connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $f \in \mathcal{C}(S^1, A_1 * A_2)$ . Possiamo scrivere  $f$  nella forma

$$f(s) = (1 - t(s))a_1(s) + t(s)a_2(s), \quad \text{con } t \in \mathcal{C}(S^1, [0, 1]), \\ a_1 \in \mathcal{C}(S^1 \setminus \{t(s) = 1\}), \quad a_2 \in \mathcal{C}(S^1 \setminus \{t(s) = 0\}).$$

Definiamo una funzione continua  $b_1 \in \mathcal{C}(S^1, A_1)$  che coincida con  $a_1$  quando  $t(s) \leq \frac{1}{2}$ . L'insieme  $\{s \in S^1 \mid t(s) > \frac{1}{2}\}$  è unione, al più numerabile, di archi aperti  $\widehat{s's''}$ . Poiché  $A_1$  è connesso per archi, possiamo trovare per ciascuno di essi un'applicazione continua  $b_{\widehat{s's''}} \in \mathcal{C}(\widehat{s's''}, A_1)$  con  $b_{\widehat{s's''}}(s') = a_1(s')$  e  $b_{\widehat{s's''}}(s'') = a_1(s'')$ . Definiamo allora

$$b_1(s) = \begin{cases} a_1(s) & \text{se } t(s) \leq \frac{1}{2}, \\ b_{\widehat{s's''}}(s) & \text{se } \widehat{s's''} \text{ è una componente connessa di } \{t(s) > \frac{1}{2}\}. \end{cases}$$

Poniamo

$$t(s, \tau) = \min\{1, (1 + \tau)t(s)\}, \quad f_\tau(s) = (1 - t(s, \tau))a_1(s) + t(s, \tau)a_2(s).$$

Poiché  $t(s, \tau) = 0$  quando  $t(s) = 0$  e  $t(s, \tau) = 1$  quando  $t(s) = 1$ , la  $f_\tau(s)$  è definita e continua su  $S^1 \times [0, 1]$  e descrive perciò un'omotopia tra la  $f$  assegnata ed

$$f_1(s) = (1 - t_1(s))b_1(s) + t_1(s)a_2(s), \quad \text{con } t_1(s) = \min\{1, 2t(s)\}.$$

Poiché  $b_1 \in \mathcal{C}(S^1, A_1)$ , la

$$S^1 \times [0, 1] \ni (s, \tau) \longrightarrow (1 - \tau t_1(s))b_1(s) + \tau t_1(s)a_2(s) \in A_1 * A_2$$

è definita e continua e descrive un'omotopia di  $f_1$  con un laccetto continuo  $f_2$  a valori in  $A_1$ . Fissiamo ora un punto  $p_2 \in A_2$ . La

$$S^1 \times [0, 1] \ni (s, \tau) \longrightarrow (1 - \tau)b_1(s) + \tau p_2 \in A_1 * A_2$$

è un'omotopia tra  $f_2$  e un'applicazione costante. La dimostrazione è completa.  $\square$

Indichiamo con  $\tilde{H}_q(A)$  il  $q$ -esimo gruppo di omologia *ridotta* (a coefficienti in  $\mathbb{Z}$ ) di  $A$ . È  $H_q(A) = \tilde{H}_q(A)$  se  $q > 0$  ed  $H_0(A) = \tilde{H}_0(A) \oplus \mathbb{Z}$ .

LEMMA XXVI.8.3. *Siano  $A_1$  ed  $A_2$  spazi topologici non vuoti e siano  $k_1, k_2 \geq -1$  due interi per cui  $\tilde{H}_q(A_i) = 0$  se  $0 \leq q \leq k_i$ ,  $i = 1, 2$ . Allora  $\tilde{H}_q(A_1 * A_2) = 0$  per  $q \leq k_1 + k_2 + 2$ .*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che  $A_1$  è un retratto di deformazione di  $U_1 = A_1 * A_2 \setminus A_2$  ed  $A_2$  un retratto di deformazione di  $U_2 = A_1 * A_2 \setminus A_1$  e che  $U_1 \cap U_2$  è omotopicamente equivalente ad  $A \times B$ . Otteniamo quindi la successione esatta di Mayer-Vietoris

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \tilde{H}_q(A_1 \times A_2) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(A_1) \oplus \tilde{H}_q(A_2) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(A_1 * A_2) \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \cdots \end{array}$$

Le inclusioni  $A_i \rightarrow A_1 * A_2$  sono omotope ad applicazioni costanti e quindi dalla successione di Mayer-Vietoris ricaviamo le successioni esatte corte

$$0 \rightarrow \tilde{H}_{q+1}(A_1 * A_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(A_1 \times A_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(A_1) \oplus \tilde{H}_q(A_2) \rightarrow 0.$$

Per la formula di Künnet, se  $\tilde{H}_q(A_i) = 0$  per  $q \leq k_i$ , otteniamo che  $\tilde{H}_q(A_1 \times A_2) = 0$  per  $q \leq k_1 + k_2 + 1$  e quindi  $\tilde{H}_q(A_1 * A_2) = 0$  se  $q \leq k_1 + k_2 + 2$ .  $\square$

Poiché per un teorema di Hurewicz<sup>8</sup> uno spazio topologico semplicemente connesso  $A$  è  $k$ -connesso se e soltanto se  $\tilde{H}_q(A) = 0$  per ogni  $q \leq k$ , otteniamo la

PROPOSIZIONE XXVI.8.4. *Se  $A_i$  è  $k_i$ -connesso, per  $i = 1, 2$ , allora  $A_1 * A_2$  è  $k_1 + k_2 + 2$  connesso.*  $\square$

Da questa segue la Proposizione XXVI.8.1.

Consideriamo ora una successione  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  di spazi topologici non vuoti. Possiamo identificare il limite diretto (o induttivo)

$$J(\{A_n\}) = \operatorname{inj} \lim_{n \rightarrow \infty} A_1 * \cdots * A_n$$

con l'insieme

$$J(\{A_n\}) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1, \#\{i \mid t_i \neq 0\} < \infty, a_i \in A_i \right\}.$$

Per ogni  $n$  abbiamo un'inclusione naturale  $\iota_n : A_1 * \cdots * A_n \hookrightarrow J(\{A_n\})$ , che ci permette di considerare ogni giunto  $A_1 * \cdots * A_n$  come un sottoinsieme di  $J(\{A_n\})$ .

<sup>8</sup>Witold Hurewicz (1904 -1956), matematico polacco. Dopo la formazione a Vienna, fu assistente di Brouwer ad Amsterdam dal 1928 al 1936. Si trasferì poi negli Stati Uniti. A lui si deve la definizione dei gruppi di omotopia di ordine superiore (1935-36), la successione esatta lunga delle fibrazioni e il teorema che mette in relazione omotopia ed omologia.

Sia  $M$  è uno spazio topologico. Ad ogni applicazione  $f \in \mathcal{C}(S^n, M)$  corrisponde un omomorfismo  $f_* : H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z} \rightarrow H_n(M)$ . L'immagine  $f_*(1)$  dipende soltanto dalla classe di omotopia di  $f$  e definisce quindi un'applicazione  $\lambda_n : \pi_n(M) \ni [f] \rightarrow f_*(1) \in H_n(M)$ , che è un omomorfismo (*l'omomorfismo di Hurewicz*) per ogni  $n \geq 1$ . Poniamo  $\pi_1^*(M) = \pi_1(M)/[\pi_1(M), \pi_1(M)]$  (*l'abelianizzato del gruppo fondamentale*), e  $\pi_n^*(M) = \pi_n(M)$  se  $n \geq 2$ . Il Teorema di Hurewicz ci dice che:

Se  $n \geq 1$  ed  $M$  è  $(n-1)$ -connesso, allora l'applicazione  $\lambda_n : \pi_n^*(M) \rightarrow H_n(M)$  è un isomorfismo.

Possiamo considerare su  $J(\{A_n\})$  la topologia limite induttivo, per cui il ricoprimento  $\{A_1 * \cdots * A_n\}_{n \geq 1}$  è chiuso e fondamentale. Un sottoinsieme  $E$  di  $J(\{A_n\})$  è cioè chiuso se interseca ogni  $A_1 * \cdots * A_n$  in un chiuso. Abbiamo

**PROPOSIZIONE XXVI.8.5.** *Se tutti gli spazi topologici  $A_n$  sono di Hausdorff, anche  $J(\{A_n\})$  è di Hausdorff ed è uno spazio topologico  $\infty$ -connesso.*

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo due punti  $a = \sum \tau_i a_i$  e  $b = \sum \lambda_i b_i$  di  $J(\{A_n\})$ . Se  $\tau_{i_0} \neq \lambda_{i_0}$  per qualche indice  $i_0$ , allora  $\{t_{i_0} < \frac{1}{2}(\tau_{i_0} + \lambda_{i_0})\}$  e  $\{t_{i_0} > \frac{1}{2}(\tau_{i_0} + \lambda_{i_0})\}$  sono intorni disgiunti dei due punti. Se  $\tau_i = \lambda_i$  per ogni  $i$ , allora  $\tau_{i_0} > 0$  ed  $a_{i_0} \neq b_{i_0}$  per un indice  $i_0$ . Fissiamo quindi intorni disgiunti  $U_a$  ed  $U_b$  di  $a_{i_0}$  e  $b_{i_0}$  in  $A_{i_0}$ . Allora gli insiemi  $\{t_{i_0} > 0, x_i \in U_a\}$  e  $\{t_{i_0} > 0, x_i \in U_b\}$ , ove abbiamo indicato con  $\sum t_i x_i$  il generico punto di  $J(\{A_n\})$ , sono intorni aperti disgiunti di  $a$  e  $b$  in  $J(\{A_n\})$ .

Osserviamo ora che ogni compatto  $K$  di  $J(\{A_n\})$  è contenuto in uno dei sottospazi  $A_1 * \cdots * A_n$ . Infatti, se così non fosse, potremmo trovare una successione  $\{x^{(n)}\}$  di punti di  $K$  con  $x^{(n)} \notin A_1 * \cdots * A_n$  per ogni intero positivo  $n$ . Questa successione sarebbe chiusa e discreta, perché ogni sua sottosuccessione interseca ciascun  $A_1 * \cdots * A_n$  al più in un numero finito di punti. Ma  $\{\{x^{(\nu)} \mid \nu > 0\} \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$  è allora una famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita che ha intersezione vuota. Abbiamo ottenuto una contraddizione che dimostra che  $K$  è contenuto in uno dei sottospazi  $A_1 * \cdots * A_n$ .

Da questa osservazione segue la tesi. Infatti, se  $f \in \mathcal{C}(S^n, J(\{A_n\}))$ , allora  $f(S^n)$  è contenuta in  $A_1 * \cdots * A_\nu$ , per qualche  $\nu \geq n + 2$ . Per la Proposizione XXVI.8.1  $A_1 * \cdots * A_\nu$  è  $n$ -connesso, e quindi  $f$  è omotopa ad un'applicazione costante.  $\square$

**Costruzione del fibrato standard.** Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo topologico, possiamo definire un'azione di  $\mathbf{G}$  sul giunto

$$J^n(\mathbf{G}) = \underbrace{\mathbf{G} * \cdots * \mathbf{G}}_{n \text{ volte}}$$

di  $n$  copie di  $\mathbf{G}$  mediante

$$g \cdot (t_1 g_1 + \cdots + t_n g_n) = t_1 (g g_1) + \cdots + t_n (g g_n).$$

La proiezione nel quoziente  $\pi : J^n(\mathbf{G})/\mathbf{G}$  rispetto a quest'azione di gruppo definisce un  $\mathbf{G}$ -fibrato principale con spazio totale  $(n - 2)$ -connesso.

**DEFINIZIONE XXVI.8.6.** Il fibrato  $J^{n+2}(\mathbf{G}) \rightarrow J^{n+2}(\mathbf{G})/\mathbf{G}$  si dice il *fibrato di Milnor* con spazio totale  $n$ -connesso del gruppo topologico  $\mathbf{G}$ .

Come nel paragrafo precedente, possiamo considerare il limite diretto  $J^\infty(\mathbf{G})$  dei giunti  $J^n(\mathbf{G})$ . Risulta definita un'azione di  $\mathbf{G}$  su  $J^\infty(\mathbf{G})$ , che sui sottospazi  $J^n(\mathbf{G})$  coincide con quella precedentemente descritta. La proiezione nel quoziente

$$(26.8.3) \quad \mathfrak{M}(\mathbf{G}) = J^\infty(\mathbf{G}) \longrightarrow J^\infty(\mathbf{G})/\mathbf{G}$$

è un  $\mathbf{G}$ -fibrato principale con spazio totale  $\infty$ -connesso.

**DEFINIZIONE XXVI.8.7.** Il fibrato (26.8.3) si dice il *fibrato universale* di Milnor del gruppo topologico  $\mathbf{G}$ .



Per il Teorema XXVI.7.7 abbiamo

TEOREMA XXVI.8.8. *Sia  $M$  un CW-complesso. La corrispondenza*

$$f \in \mathcal{C}(M, J^\infty(\mathbf{G})/\mathbf{G}) \longleftrightarrow f^*(\mathfrak{M}(\mathbf{G}))$$

*definisce per passaggio ai quozienti una bigezione tra l'insieme  $\pi(M, J^\infty(\mathbf{G})/\mathbf{G})$  delle applicazioni continue da  $M$  in  $J^\infty(\mathbf{G})/\mathbf{G}$  modulo omotopia e l'insieme dei  $\mathbf{G}$ -fibrati principali con base  $M$ , modulo equivalenza.  $\square$*



## **Appendice: Gruppi classici**



## Gruppi lineari e loro algebre di Lie

Un *gruppo lineare* è un sottogruppo chiuso  $\mathbf{G}$  di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  (per qualche intero positivo  $n$ ). In questo capitolo iniziamo lo studio della struttura dei gruppi lineari.

### XXVII.1. Algebre di Lie

DEFINIZIONE XXVII.1.1. Si dice *algebra di Lie* su un campo  $\mathbb{k}$  un'algebra  $\mathfrak{g}$  su  $\mathbb{k}$  il cui prodotto<sup>1</sup>, che indichiamo con

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \longrightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g},$$

sia antisimmetrico e soddisfi l'*identità di Jacobi*:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

OSSERVAZIONE XXVII.1.2. Se il prodotto in  $\mathfrak{g}$  è antisimmetrico, il primo membro dell'identità di Jacobi è un'applicazione trilineare alternata. Per verificare che  $\mathfrak{g}$  sia un'algebra di Lie sarà quindi sufficiente verificare

- (1) che  $[X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$
- (2) che l'identità di Jacobi valga per ogni terna di vettori distinti di una base di  $\mathfrak{g}$  come spazio vettoriale.

ESEMPIO XXVII.1.3. Sia  $V$  un qualsiasi spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{k}$ . Allora  $V$  è un'algebra di Lie con il prodotto

$$V \times V \ni (v_1, v_2) \longrightarrow 0 \in V.$$

Un'algebra di Lie in cui il prodotto di due qualsiasi elementi sia 0 si dice *abeliana*.

ESEMPIO XXVII.1.4. Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{k}$  e sia  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  lo spazio vettoriale su  $\mathbb{k}$  di tutti gli endomorfismi lineari di  $V$ . Allora  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  è un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  rispetto all'operazione di commutazione di endomorfismi  $\mathbb{k}$ -lineari:

$$\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V) \times \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V) \ni (X, Y) \longrightarrow [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V).$$

Abbiamo infatti, se  $X, Y, Z \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ :

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]] &= X \circ (Y \circ Z - Z \circ Y) - (Y \circ Z - Z \circ Y) \circ X \\ &= X \circ Y \circ Z - X \circ Z \circ Y - Y \circ Z \circ X + Z \circ Y \circ X \end{aligned}$$

e analogamente

$$[Y, [Z, X]] = Y \circ Z \circ X - Y \circ X \circ Z - Z \circ X \circ Y + X \circ Z \circ Y,$$

<sup>1</sup>Ricordiamo che un'algebra su un campo  $\mathbb{k}$  è il dato di uno spazio vettoriale  $A$  su  $\mathbb{k}$  e di un'applicazione bilineare  $A \times A \ni (a, b) \longrightarrow a \cdot b \in A$ .

$$[Z, [X, Y]] = Z \circ X \circ Y - Z \circ Y \circ X - X \circ Y \circ Z + Y \circ X \circ Z.$$

Sommando membro a membro, da queste tre uguaglianze otteniamo l'identità di Jacobi.

In particolare,  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) = \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^n)$  è un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  rispetto all'operazione di commutazione di matrici:

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) \times \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) \ni (X, Y) \longrightarrow [X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}).$$

Se il campo  $\mathbb{k}$  è una estensione del campo  $\mathbb{F}$ , considereremo a volte  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$  come un'algebra di Lie su  $\mathbb{F}$  per *restrizione del campo degli scalari*.

Un'applicazione lineare  $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$  tra due algebre di Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  sullo stesso campo  $\mathbb{k}$  si dice un *omomorfismo di algebre di Lie* se

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  e  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{k}$ , si dice *rappresentazione lineare* di  $\mathfrak{g}$  in  $V$  un omomorfismo di algebre di Lie

$$\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V).$$

Se  $\ker \phi = \{0\}$ , la rappresentazione  $\phi$  si dice *fedele*.

Una rappresentazione fedele permette di identificare  $\mathfrak{g}$  ad una sottoalgebra dell'algebra di Lie degli endomorfismi di uno spazio vettoriale.

ESEMPIO XXVII.1.5. Sia  $A$  sia un'algebra associativa sul campo  $\mathbb{k}$ , con prodotto  $A \times A \ni (a, b) \longrightarrow a \cdot b \in A$ . Otteniamo su  $A$  una struttura di algebra di Lie su  $\mathbb{k}$ , che indichiamo con  $A_{\mathfrak{L}}$ , considerando su di essa il prodotto:

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a \quad \forall a, b \in A.$$

Supponiamo che  $\mathfrak{g}$  sia un'algebra di Lie di dimensione finita  $N$  su un campo  $\mathbb{k}$ . Fissata una base  $E_1, \dots, E_N$  di  $\mathfrak{g}$ , si definiscono *costanti di struttura* dell'algebra  $\mathfrak{g}$  in tale base gli scalari  $(c_{j,k}^i)_{1 \leq i, j, k \leq N}$  definiti da

$$[E_j, E_k] = \sum_{i=1}^N c_{j,k}^i E_i \quad \forall 1 \leq j, k \leq N.$$

Le costanti di struttura verificano le relazioni:

$$c_{j,k}^i = -c_{k,j}^i \quad (\text{antisimmetria})$$

$$\sum_{i=1}^N c_{j,k}^i c_{i,h}^r + c_{k,h}^i c_{i,j}^r + c_{h,j}^i c_{i,k}^r = 0 \quad (\text{identità di Jacobi}).$$

Viceversa, dato uno spazio vettoriale  $\mathfrak{g}$  su  $\mathbb{k}$ , una sua base  $E_1, \dots, E_N$  e coefficienti  $(c_{j,k}^i)_{1 \leq i, j, k \leq N}$  che verificano queste relazioni, vi è un'unica struttura di algebra di Lie su  $\mathfrak{g}$  per cui tali coefficienti siano le costanti di struttura nella base  $E_1, \dots, E_N$ .

ESEMPIO XXVII.1.6. Sia  $\mathbb{R}^3$  lo spazio Euclideo di dimensione 3. Il *prodotto vettore*

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (v, w) \longrightarrow v \times w \in \mathbb{R}^3$$

è definito dall'identità:

$$\det(v, w, z) = (v \times w|z) \quad \forall v, w, z \in \mathbb{R}^3,$$

dove abbiamo indicato con  $(v, w, z)$  la matrice  $3 \times 3$  che ha come colonne i vettori  $v, w, z$ . Le regole di calcolo del prodotto vettore si esprimono nei vettori  $e_1, e_2, e_3$  della base canonica mediante:

$$e_i \times e_i = 0, \quad e_i \times e_j = \epsilon(i, j, k)e_k$$

per ogni  $i = 1, 2, 3$  ed ogni permutazione  $(i, j, k)$  di  $\{1, 2, 3\}$ . Lo spazio Euclideo  $\mathbb{R}^3$  con il prodotto vettore è un'algebra di Lie reale. Infatti il prodotto vettore è antisimmetrico perché, scambiando le prime due colonne di una matrice, il determinante cambia segno. Infine, per verificare l'identità di Jacobi basta verificare che

$$e_1 \times (e_2 \times e_3) + e_2 \times (e_3 \times e_1) + e_3 \times (e_1 \times e_2) = 0$$

Questa relazione è banale perché ciascuno degli addendi a primo membro è uguale a zero.

In modo equivalente, possiamo identificare  $\mathbb{R}^3$  allo spazio vettoriale reale formato dai quaternioni puramente immaginari. In questa identificazione, la parte reale e la parte immaginaria del prodotto di due quaternioni puramente immaginari sono rispettivamente il prodotto scalare e il prodotto vettore dei vettori corrispondenti.

Se  $a$  e  $b$  sono sottospazi vettoriali di un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  sul campo  $\mathbb{k}$ , indichiamo con  $[a, b]$  il sottospazio vettoriale generato dagli elementi  $[X, Y]$  al variare di  $X$  in  $a$  e di  $Y$  in  $b$ . Poiché il prodotto è antisimmetrico,  $[a, b] = [b, a]$ .

Un sottospazio vettoriale  $a$  di  $\mathfrak{g}$  si dice una *sottoalgebra di Lie* di  $\mathfrak{g}$  se

$$[a, a] \subset a.$$

Un sottospazio vettoriale  $\mathfrak{h}$  di  $\mathfrak{g}$  si dice un *ideale dell'algebra di Lie*  $\mathfrak{g}$  se

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}.$$

Si verifica facilmente:

LEMMA XXVII.1.7. *Se  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  è un omomorfismo di algebre di Lie, allora  $\ker \phi$  è un ideale di  $\mathfrak{g}$ .*

*Se  $\mathfrak{h}$  è un ideale dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , allora vi è un'unica struttura di algebra di Lie su  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  che renda la proiezione nel quoziente*

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

*un omomorfismo di algebre di Lie.*

Sia  $A$  un'algebra su un campo  $\mathbb{k}$ . Un endomorfismo  $\mathbb{k}$ -lineare

$$D : A \rightarrow A$$

si dice una *derivazione* di  $A$  se verifica l'identità di Leibnitz:

$$D(a \cdot b) = (Da) \cdot b + a \cdot (Db).$$

LEMMA XXVII.1.8. *L'insieme  $\text{Der}(A)$  di tutte le derivazioni di un'algebra  $A$  su  $\mathbb{k}$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(A)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzi tutto che  $\text{Der}(A)$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(A)$  perché il prodotto  $A \times A \ni (a, b) \rightarrow a \cdot b \in A$  è  $\mathbb{k}$ -bilineare.

Se  $D_1, D_2 \in \text{Der}(A)$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} [D_1, D_2](a \cdot b) &= D_1(D_2a \cdot b + a \cdot D_2b) - D_2(D_1a \cdot b + a \cdot D_1b) \\ &= D_1D_2a \cdot b + D_2a \cdot D_1b + D_1a \cdot D_2b + a \cdot D_1D_2b \\ &\quad - D_2D_1a \cdot b - D_1a \cdot D_2b - D_2a \cdot D_1b - a \cdot D_2D_1b \\ &= (D_1D_2 - D_2D_1)a \cdot b + a \cdot (D_1D_2 - D_2D_1)b \\ &= [D_1, D_2]a \cdot b + a \cdot [D_1, D_2]b \end{aligned}$$

e quindi  $\text{Der}(A)$  è un'algebra di Lie.  $\square$

Se  $A$  è un'algebra associativa, allora per ogni  $a \in A$  l'applicazione

$$D_a : A \ni b \rightarrow a \cdot b - b \cdot a \in A$$

è una derivazione di  $A$ .

Si verifica facilmente che vale il seguente:

LEMMA XXVII.1.9. *Sia  $A$  un'algebra associativa su  $\mathbb{k}$ . Allora l'applicazione*

$$A \ni a \rightarrow D_a \in \text{Der}(A)$$

*è un omomorfismo dell'algebra di Lie  $A_{\mathfrak{L}}$  nell'algebra di Lie  $\text{Der}(A)$  delle derivazioni di  $A$ .*

Data un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  sul campo  $\mathbb{k}$ , ed un elemento  $X \in \mathfrak{g}$ , indichiamo con  $\text{ad}(X)$  l'endomorfismo lineare

$$\text{ad}(X) : \mathfrak{g} \ni Y \rightarrow \text{ad}(X)Y = [X, Y] \in \mathfrak{g}.$$

TEOREMA XXVII.1.10. *L'applicazione*

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \ni X \rightarrow \text{ad}(X) \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$$

*è una rappresentazione di  $\mathfrak{g}$  nell'algebra  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  delle derivazioni di  $\mathfrak{g}$ .*

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione  $\text{ad}$  è lineare perché il prodotto  $[\cdot, \cdot]$  è bilineare. Dall'identità di Jacobi ricaviamo:

$$\begin{aligned} \text{ad}(X)[Y, Z] &= [X, [Y, Z]] \\ &= -[Y, [Z, X]] - [Z, [X, Y]] \\ &= [Y, \text{ad}(X)Z] + [\text{ad}(X)Y, Z] \end{aligned}$$

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

e quindi  $\text{ad}(X)$  è, per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ , una derivazione dell'algebra  $\mathfrak{g}$ . Abbiamo inoltre

$$\begin{aligned} [\text{ad}(X), \text{ad}(Y)]Z &= \text{ad}(X)[Y, Z] - \text{ad}(Y)[X, Z] \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] \\ &= -[Z, [X, Y]] = \text{ad}([X, Y])Z, \end{aligned} \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g},$$

e quindi  $\text{ad}$  è un omomorfismo di algebre di Lie.  $\square$



L'applicazione

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \text{ad}(X) \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$$

si dice la *rappresentazione aggiunta* di  $\mathfrak{g}$ .

Gli elementi dell'immagine  $\text{Int}(\mathfrak{g}) = \text{ad}(\mathfrak{g})$  si dicono *derivazioni interne* di  $\mathfrak{g}$ .

Ogni algebra di Lie di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  si può identificare a una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$  per qualche intero positivo  $n$ : infatti è stato dimostrato da I.D.Ado<sup>2</sup> nel caso di campi di caratteristica zero e K.Iwasawa<sup>3</sup> nel caso generale che vale il seguente:

**TEOREMA XXVII.1.11 (Ado-Iwasawa).** *Ogni algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  ammette una rappresentazione  $\mathbb{k}$ -lineare fedele.*

Nel seguito potremo quindi limitarci a considerare algebre di Lie  $\mathfrak{g}$  che sono sottoalgebre di  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ .

### XXVII.2. Jacobiano dell'applicazione esponenziale

In questo paragrafo studieremo la relazione tra sottoalgebre di Lie di  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  e sottogruppi di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ . Dimostriamo innanzi tutto il seguente:

**LEMMA XXVII.2.1.** *Per ogni  $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  valgono le seguenti formule di commutazione:*

- (1) (i)  $\text{ad}(X)(XY) = X\text{ad}(X)Y$ .
- (2) (ii)  $X^k Y = YX^k + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \text{ad}^j(X) Y X^{k-j} \quad \forall k \geq 1$ .
- (3) (iii)  $YX^k = X^k Y + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (-1)^j X^{k-j} \text{ad}^j(X) Y \quad \forall k \geq 1$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo la (i). Abbiamo:

$$\text{ad}(X)(XY) = [X, XY] = X^2 Y - XYX = X\text{ad}(X)Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}).$$

La dimostrazione delle (ii) e (iii) sono simili. Mostriamo ad esempio che vale la (iii).

Ragioniamo per induzione sull'intero  $k \geq 1$ . Se  $k = 1$ , la

$$YX = XY - \text{ad}(X)Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$$

segue dalla definizione di  $\text{ad}$ . Fissiamo quindi un intero  $m \geq 2$  e supponiamo che la formula (iii) valga per  $k = m - 1$ . Allora

$$\begin{aligned} YX^m &= YX^{m-1}X \\ &= X^{m-1}YX + \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-1)^j X^{m-1-j} \text{ad}^j(X) YX \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Ado, I. D. (1947), *The representation of Lie algebras by matrices*, Akademiya Nauk SSSR i Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo. Uspekhi Matematicheskikh Nauk (in Russo) 2 (6)(1947), pp. 159-173, traduzione inglese in: Ado, I. D. (1949), *The representation of Lie algebras by matrices*, American Mathematical Society Translations 1949 (2): 21 pp.

<sup>3</sup> Kenkichi Iwasawa, (1948), *On the representation of Lie algebras*, Japanese Journal of Mathematics 19 (1948), pp. 405-426,

$$\begin{aligned}
&= X^m Y - X^{m-1} \operatorname{ad}(X)Y + \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-1)^j X^{m-j} \operatorname{ad}^j(X)Y \\
&\quad - \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-1)^j X^{m-j-1} \operatorname{ad}^{j+1}(X)Y \\
&= X^m Y - X^{m-1} \operatorname{ad}(X)Y + (-1)^m \operatorname{ad}^m(X)Y \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \left\{ \binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j-1} \right\} X^{m-j} \operatorname{ad}^j(X)Y - \binom{m-1}{1} X^{m-1} \operatorname{ad}(X)Y
\end{aligned}$$

perché i due endomorfismi  $\operatorname{ad}(X)$  e  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ni Y \rightarrow XY \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  commutano per la (i), da cui, tenuto conto della formula di somma dei binomiali:

$$\binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j-1} = \binom{m}{j},$$

otteniamo la (iii). □

**TEOREMA XXVII.2.2** (Formula dello Jacobiano). *L'applicazione esponenziale  $\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  è differenziabile in ogni punto e il suo differenziale in  $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  è dato da:*

$$d \exp(A) : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ni X \rightarrow \frac{I - \exp(-\operatorname{ad}(A))}{\operatorname{ad}(A)} \exp(A)X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}),$$

ove

$$\frac{I - \exp(-\operatorname{ad}(A))}{\operatorname{ad}(A)} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(h+1)!} \operatorname{ad}^h(A).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo  $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . Per ogni  $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  abbiamo:

$$\exp(A + X) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(A + X)^h}{h!}.$$

Ora, risulta:

$$(A + X)^h = A^h + \sum_{r=0}^{h-1} A^r X A^{h-r-1} + o(X).$$

Per la formula di commutazione (iii) abbiamo:

$$A^r X A^s = \sum_{j=0}^s (-1)^j \binom{s}{j} A^{h-j-1} \operatorname{ad}^j(A)X.$$

Sostituendo troviamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{r+s=h-1} A^r X A^s &= \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{j=0}^s (-1)^j \binom{s}{j} A^{h-j-1} \operatorname{ad}^j(A)X \\
&= \sum_{j=0}^{h-1} (-1)^j \left( \sum_{k=0}^{h-j-1} \binom{j+k}{j} \right) A^{h-j-1} \operatorname{ad}^j(A)X
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{h-1} (-1)^j \binom{h}{j+1} A^{h-j-1} \operatorname{ad}^j(A)X.$$

Otteniamo perciò:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} \sum_{r+s=h-1} A^r X A^s &= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{h-1} \frac{A^{h-j-1}}{(h-j-1)!} \frac{(-1)^j \operatorname{ad}^j(A)}{(j+1)!} X \\ &= \exp(A) \frac{I - \exp(-\operatorname{ad}(A))}{\operatorname{ad}(A)} X = \frac{I - \exp(-\operatorname{ad}(A))}{\operatorname{ad}(A)} \exp(A)X, \end{aligned}$$

e quindi:

$$\exp(A + X) = \exp(A) + \frac{I - \exp(-\operatorname{ad}(A))}{\operatorname{ad}(A)} \exp(A)X + O(|X|^2),$$

che dà la formula desiderata per il differenziale.  $\square$

Ricordiamo il

**TEOREMA XXVII.2.3** (Teorema delle funzioni implicite). *Sia  $\Omega$  un aperto di uno spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un'applicazione differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  (con  $1 \leq k \leq \omega$ ). Sia  $x_0 \in \Omega$  un punto in cui*

$$df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*sia un isomorfismo lineare. Allora esiste un intorno aperto  $U$  di  $x_0$  in  $\Omega$  tale che  $f(U)$  sia aperto in  $\mathbb{R}^n$  e*

$$f|_U^{f(U)} : U \rightarrow f(U)$$

*sia un omeomorfismo, con inversa  $[f|_U^{f(U)}]^{-1}$  differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$ .*

Un omeomorfismo tra due aperti di  $\mathbb{R}^n$  che sia differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  (con  $1 \leq k \leq \omega$ ) ed abbia inversa differenziabile di classe  $\mathcal{C}^k$  si dice un *diffeomorfismo di classe  $\mathcal{C}^k$* .

Dal teorema delle funzioni implicite ricaviamo:

**TEOREMA XXVII.2.4.** *L'applicazione  $\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  definisce un diffeomorfismo di classe  $\mathcal{C}^\infty$  di un intorno aperto di 0 in  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  su un intorno aperto di e in  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti il differenziale di  $\exp$  in 0 è l'applicazione identica:

$$d\exp(0) : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ni X \rightarrow X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}).$$

$\square$

**TEOREMA XXVII.2.5** (Coordinate di seconda specie). *Siano  $V, W$  due sottospazi vettoriali reali di  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ , considerato come spazio vettoriale reale di dimensione  $2n^2$ , tali che*

$$V \oplus W = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}).$$

*Allora possiamo trovare un intorno aperto  $U_1$  di 0 in  $V$  e un intorno aperto  $U_2$  di 0 in  $W$  tali che*

$$U_1 \times U_2 \ni (X, Y) \rightarrow \exp(X) \exp(Y) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

sia un diffeomorfismo di classe  $\mathcal{C}^\omega$  su un intorno aperto di  $e$  in  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $X = X_1 + X_2 \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  con  $X_1 \in V$  e  $X_2 \in W$ . Allora, per la formula dello Jacobiano,

$$\begin{aligned} \exp(X_1) \exp(X_2) &= (e + X_1 + O(\|X_1\|^2))(e + X_2 + O(\|X_2\|^2)) \\ &= e + X + O(\|X\|^2) \end{aligned}$$

e quindi l'applicazione

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ni X \longrightarrow \exp(X_1) \exp(X_2) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

ha in 0 differenziale uguale all'identità. La tesi segue quindi dal teorema delle funzioni implicite.  $\square$

**PROPOSIZIONE XXVII.2.6.** *Sia  $U$  l'aperto di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  formato dalle matrici i cui autovalori sono contenuti nel disco  $|\lambda - 1| < 1$ . La serie*

$$(27.2.1) \quad \log(a) = \log(e + (a - e)) = - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(e - a)^h}{h}$$

converge in norma per ogni  $a \in U$  ed uniformemente su tutti i compatti contenuti in  $U$ . Abbiamo  $\exp(\log(a))$  per ogni  $a \in U$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo scrivere  $a$  come una somma  $a = S + N$ , con  $S$  semisemplice (cioè diagonalizzabile) ed  $N$  nilpotente, con  $[S, N] = SN - NS = 0$ . Osserviamo che  $a \in U$  se e soltanto se  $S \in U$ . Per  $h \geq n$ , abbiamo

$$(a - e)^h = \sum_{j=0}^n (S - e)^{h-j} N^j.$$

La tesi segue quindi dal fatto che ciascuna delle serie

$$\sum_{h=\max\{1, j\}}^{\infty} \frac{(e - S)^{h-j}}{h}$$

converge in norma se  $S \in U$  ed uniformemente quando  $S$  varia in un compatto di  $U$ . Poiché gli elementi semisemplici formano un sottoinsieme denso di  $U$  e l'uguaglianza  $\exp(\log(a)) = a$  è banalmente vera per gli elementi semisemplici, essa vale per tutti gli elementi di  $U$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE XXVII.2.7.** Se  $a$  non ha autovalori reali negativi, allora la matrice  $a(t) = I + t(a - I)$  è invertibile per ogni  $t \in [0, 1]$  e possiamo calcolare l'integrale

$$\log a = \int_0^1 (I + t(a - I))^{-1} (a - I) dt.$$

Otteniamo così un diffeomorfismo analitico di  $U$  sull'aperto  $V$  di  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  delle matrici che non hanno autovalori la cui parte immaginaria sia multiplo dispari di  $\pi$ , che inverte l'esponenziale ed è uguale alla somma della serie (27.2.1) se gli autovalori di  $a$  sono contenuti nel disco  $\{|\lambda - 1| < 1\}$ .

Più in generale, se  $a$  è una qualsiasi matrice di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ , possiamo trovare un cammino  $a(t) \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}))$  con  $a(0) = e$  ed  $a(1) = a$ . Allora

$$A = \int_0^1 [a(t)]^{-1} [da(t)] \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \quad \text{ed} \quad \exp(A) = a.$$

LEMMA XXVII.2.8. Se  $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  allora

$$\exp(tA) \exp(tB) = \exp(t(A+B) + (t^2/2)[A, B]) + O(t^3), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che le due applicazioni

$$F_1 : \mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tA) \exp(tB) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \text{ed}$$

$$F_2 : \mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(t(A+B) + (t^2/2)[A, B]) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

assumono per  $t = 0$  gli stessi valori ed hanno uguali, per  $t = 0$ , le loro derivate prime e seconde.

Abbiamo  $F_1(0) = e = F_2(0)$ . Inoltre:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= (e + tA + (t^2/2)A^2 + O(t^3))(e + tB + (t^2/2)B^2 + O(t^3)) \\ &= e + t(A+B) + t^2(A^2/2 + AB + B^2/2) + O(t^3) \end{aligned}$$

ci dà

$$F_1'(0) = A + B, \quad F_1''(0) = A^2 + 2AB + B^2.$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned} F_2(t) &= e + t(A+B) + (t^2/2)[A, B] + (1/2)(t(A+B) + (t^2/2)[A, B])^2 + O(t^3) \\ &= e + t(A+B) + (t^2/2)([A, B] + A^2 + AB + BA + B^2) + O(t^3) \\ &= e + t(A+B) + (t^2/2)(A^2 + 2AB + B^2) + O(t^3) \end{aligned}$$

e quindi anche

$$F_2'(0) = A + B, \quad F_2''(0) = A^2 + 2AB + B^2.$$

□

COROLLARIO XXVII.2.9. Se  $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ , allora

$$\exp(tA) \exp(tB) \exp(-tA) \exp(-tB) = \exp(t^2[A, B]) + O(t^3), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

### XXVII.3. Algebra di Lie di un gruppo lineare

Il Lemma XXVII.2.8 e il Corollario XXVII.2.9 ci permettono di esplicitare la relazione tra sottogruppi chiusi di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  e sottoalgebre di Lie reali di  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ .

TEOREMA XXVII.3.1. Sia  $\mathbf{G}$  un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ . Poniamo

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in \mathbf{G} \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Allora  $\mathfrak{g}$  è una sottoalgebra di Lie reale di  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . Inoltre

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{G}$$

definisce un omeomorfismo di un intorno aperto di 0 in  $\mathfrak{g}$  su un intorno aperto di  $e$  in  $\mathbf{G}$ .

DIMOSTRAZIONE. È chiaro che, se  $X \in \mathfrak{g}$ , allora  $tX \in \mathfrak{g}$  per ogni numero reale  $t$ . Dimostriamo ora che, se  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , anche  $X + Y \in \mathfrak{g}$ . Abbiamo:

$$(\exp(tX/n) \exp(tY/n))^n \in \mathbf{G} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per il lemma

$$\exp(tX/n) \exp(tY/n) = \exp(t(X + Y)/n + O(t^2/n^2))$$

e quindi

$$(\exp(tX/n) \exp(tY/n))^n = \exp(t(X + Y) + O(t^2/n)).$$

Passando al limite per  $n \rightarrow \infty$ , poiché  $\mathbf{G}$  è chiuso, troviamo  $\exp(t(X + Y)) \in \mathbf{G}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Quindi  $X + Y \in \mathfrak{g}$ .

Per il Corollario XXVII.2.9 otteniamo che, se  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , allora

$$\mathbf{G} \ni [\exp(tX/n) \exp(tY/n) \exp(-tX/n) \exp(-tY/n)]^{n^2} = \exp(t^2[X, Y]) + O(t^3/n).$$

Passando al limite per  $n \rightarrow \infty$ , poiché abbiamo supposto che  $\mathbf{G}$  fosse chiuso, troviamo che  $\exp(s[X, Y]) \in \mathbf{G}$  per ogni  $s \geq 0$ . Poiché  $\mathbf{G}$  è un gruppo, anche  $\exp(-s[X, Y]) = (\exp(s[X, Y]))^{-1} \in \mathbf{G}$  e quindi  $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ .

Sia  $\mathbf{G}'$  il sottogruppo di  $\mathbf{G}$  generato da

$$\exp(\mathfrak{g}) = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

Dico che  $\mathbf{G}'$  è un intorno di  $e$  in  $\mathbf{G}$ . Se così non fosse, potremmo trovare una successione  $\{g_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{G} \setminus \mathbf{G}'$  tale che  $g_\nu \rightarrow e$  per  $\nu \rightarrow \infty$ . Scegliamo un sottospazio vettoriale reale  $V$  di  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  complementare di  $\mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . Possiamo allora trovare intorni aperti  $U$  di  $0$  in  $\mathfrak{g}$  e  $U'$  di  $0$  in  $V$  tali che

$$U \times U' \ni (X, Y) \rightarrow \exp(X) \exp(Y) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

sia un diffeomorfismo di classe  $\mathcal{C}^\omega$  su un intorno  $W$  di  $e$  in  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ . In particolare, possiamo supporre, a meno di passare a una sottosuccessione estratta, che

$$g_\nu = \exp(X_\nu) \exp(Y_\nu) \quad \text{con} \quad X_\nu \in U, Y_\nu \in U', \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo:

$$X_\nu \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad Y_\nu \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad \nu \rightarrow \infty.$$

Inoltre,  $Y_\nu \neq 0$  ed  $\exp(Y_\nu) \in \mathbf{G}$  per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ . Sia  $m_\nu$  un intero tale che

$$m_\nu \leq \|Y_\nu\|^{-1} < m_\nu + 1.$$

A meno di passare a una sottosuccessione, possiamo allora supporre che

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} m_\nu Y_\nu = Y \in V \setminus \{0\}.$$

Per ogni coppia di interi  $p, q$  con  $q > 0$  poniamo

$$pm_\nu = qs_\nu + r_\nu \quad \text{con} \quad 0 \leq r_\nu < q.$$

Poiché

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} r_\nu Y_\nu = 0$$

otteniamo

$$\exp\left(\frac{p}{q}Y\right) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{pm_\nu}{q}Y_\nu\right) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\exp(Y_\nu))^{s_\nu} \in \mathbf{G}.$$

Quindi  $\mathbf{G}$  contiene gli elementi  $\exp(tY)$  per ogni razionale positivo  $t$ . Poiché  $\mathbf{G}$  è chiuso,  $\exp(tY) \in \mathbf{G}$  per ogni  $t$  reale non negativo, e poiché  $\mathbf{G}$  è un gruppo ciò vale anche per i  $t$  reali negativi. Abbiamo allora  $Y \in \mathfrak{g}$ , che contraddice la scelta di  $V$ . Ne segue che  $\mathbf{G}'$  è un intorno aperto di  $e$  in  $\mathbf{G}$  e quindi coincide con la componente connessa  $G_e$  dell'identità in  $\mathbf{G}$ . Inoltre, la dimostrazione mostra che l'esponenziale definisce un omeomorfismo dell'intorno aperto  $U$  di 0 in  $\mathfrak{g}$  sull'intorno aperto  $W \cap \mathbf{G}$  dell'identità in  $\mathbf{G}$ .  $\square$

Se  $\mathbf{G}$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ , chiamiamo

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in \mathbf{G} \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$$

l'algebra di Lie del gruppo  $\mathbf{G}$ . La dimensione di  $\mathfrak{g}$  come spazio vettoriale reale si dice *dimensione* del gruppo  $\mathbf{G}$ .

**TEOREMA XXVII.3.2 (Rappresentazione aggiunta).** *Sia  $\mathbf{G}$  un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  e sia  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  la sua algebra di Lie. Allora*

$$\text{ad}(g)X = gXg^{-1} \in \mathfrak{g} \quad \forall g \in \mathbf{G}, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Per ogni  $g \in \mathbf{G}$  l'applicazione

$$\text{ad}(g) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

è un isomorfismo di algebre di Lie.

L'applicazione

$$\text{ad} : \mathbf{G} \ni g \longrightarrow \text{ad}(g) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$$

è un omomorfismo di gruppi.

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $X \in \mathfrak{g}$  e  $g \in \mathbf{G}$ , abbiamo

$$\exp(tgXg^{-1}) = g \exp(tX)g^{-1} \in \mathbf{G} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e quindi  $\text{ad}(g)X \in \mathfrak{g}$ . L'applicazione  $\text{ad}(g) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  è lineare.

Siano ora  $g \in \mathbf{G}$  e  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Abbiamo:

$$\begin{aligned} [\text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y] &= (\text{Ad}(g)X)(\text{Ad}(g)Y) - (\text{Ad}(g)Y)(\text{Ad}(g)X) \\ &= (gXg^{-1})(gYg^{-1}) - (gYg^{-1})(gXg^{-1}) = g(XY - YX)g^{-1} = \text{Ad}(g)[X, Y] \end{aligned}$$

e quindi  $\text{Ad}(g) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  è un automorfismo dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ .

Infine, abbiamo:

$$\text{Ad}(g_1) \circ \text{Ad}(g_2)X = g_1 (g_2 X g_2^{-1}) g_1^{-1} = (g_1 g_2) X (g_1 g_2)^{-1} = \text{Ad}(g_1 g_2)X$$

per ogni  $X \in \mathfrak{g}$  ed ogni  $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$ ; questo dimostra che  $\mathbf{G} \ni g \longrightarrow \text{Ad}(g) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$  è un omomorfismo di gruppi.  $\square$

L'applicazione

$$\text{Ad} : \mathbf{G} \ni g \longrightarrow \text{Ad}(g) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$$

si dice *rappresentazione lineare aggiunta* di  $\mathbf{G}$ .

#### XXVII.4. Algebre di Lie dei gruppi lineari e dei gruppi lineari speciali

L'esponenziale di una qualsiasi matrice di  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n \times n}$  è una matrice invertibile. Quindi  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  è l'algebra di Lie del gruppo lineare  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ . L'applicazione esponenziale è in questo caso surgettiva (cf. Osservazione XXVII.2.7).

Abbiamo poi:

**TEOREMA XXVII.4.1.** *L'algebra di Lie del gruppo speciale lineare complesso  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$  è*

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \text{trac}(A) = 0\}.$$

*L'algebra di Lie del gruppo lineare reale  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  è  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ .*

*L'algebra di Lie del gruppo speciale lineare reale  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$  è*

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \text{trac}(A) = 0\}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $A$  una matrice di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  tale che  $\det \exp(tA) = 1$  per ogni numero reale  $t$ . Allora  $t \cdot \text{trac} A \in (2\pi)\mathbb{Z}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , e questo equivale al fatto che  $\text{trac} A = 0$ .

Se  $A$  è una matrice di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  tale che  $\exp(tA)$  sia reale per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , allora anche  $(d/dt) \exp(tA)|_{t=0} = A$  è una matrice reale.

Da queste osservazioni segue la tesi.  $\square$

#### XXVII.5. Endomorfismi semisemplici e decomposizione di Wedderburn

Denotiamo con  $\mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V)$  l'insieme degli endomorfismi  $\mathbb{k}$ -lineari di uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{k}$ , con la struttura di algebra associativa data dal prodotto di composizione di endomorfismi. Scriveremo anche  $\mathcal{E}nd_n(\mathbb{k})$  invece di  $\mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^n)$ .

**DEFINIZIONE XXVII.5.1.** Un endomorfismo  $A \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V)$  si dice *semisemplice*, o *completamente decomponibile* se ogni sottospazio  $A$ -invariante  $U$  di  $V$  ammette un complemento  $A$ -invariante  $W$  in  $V$ .

Questa condizione è equivalente al fatto che  $A$  sia diagonalizzabile in un'estensione algebrica di  $\mathbb{k}$ , ovvero che il suo polinomio minimo  $\mu_A(\lambda)$  sia prodotto di fattori primi semplici in  $\mathbb{k}[\lambda]$ .

Questa caratterizzazione ci dà immediatamente:

**PROPOSIZIONE XXVII.5.2.** *Sia  $\rho : \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V) \rightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(W)$  un omomorfismo di algebre associative. Allora  $\rho$  trasforma endomorfismi semisemplici (risp. nilpotenti) di  $V$  in endomorfismi semisemplici (risp. nilpotenti) di  $W$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $f \in \mathbb{k}[\lambda]$ , allora  $\rho(f(A)) = f(\rho(A))$  per ogni  $A \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V)$ . In particolare, se  $A$  è annullato da un polinomio di  $\mathbb{k}[\lambda]$  che non ha fattori primi multipli, anche  $\rho(A)$  è annullato da un polinomio di  $\mathbb{k}[\lambda]$  privo di fattori primi multipli. Quindi  $\rho(A)$  è semisemplice se  $A$  è semisemplice. È immediato che  $\rho$  trasformi endomorfismi nilpotenti in endomorfismi nilpotenti.  $\square$

**LEMMA XXVII.5.3.** *Siano  $S_1, S_2 \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V)$  due endomorfismi diagonalizzabili. Se  $[S_1, S_2] = S_1 S_2 - S_2 S_1 = 0$ , allora  $S_1$  ed  $S_2$  possono essere diagonalizzate entrambe rispetto ad una stessa base.*



**DIMOSTRAZIONE.** Per ipotesi i polinomi minimi di  $S_1$  ed  $S_2$  sono prodotti di fattori di primo grado distinti. Sia  $V_\lambda = \{v \in V \mid S_1 v = \lambda v\}$ . Allora  $S_2(V_\lambda) \subset V_\lambda$ . È infatti  $S_1(S_2 v) = S_2(\lambda v) = \lambda(S_2 v)$  se  $v \in V_\lambda$ . Il polinomio minimo della restrizione di  $S_2$  a  $V_\lambda$  divide il polinomio minimo di  $S_2$ . Esso è quindi un prodotto di fattori di primo grado distinti e perciò la restrizione di  $S_2$  a  $V_\lambda$  è ancora diagonalizzabile.

Decomponiamo  $V$  nella somma diretta  $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$  degli autospazi relativi agli autovalori distinti  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  di  $S_1$ . Per l'osservazione precedente è possibile trovare basi di  $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$  di autovettori delle restrizioni di  $S_2$ . Messe insieme, queste basi formano una base di  $V$  in cui gli endomorfismi  $S_1$  ed  $S_2$  si rappresentano entrambi mediante matrici diagonali.  $\square$

**LEMMA XXVII.5.4.** *Sia  $\tilde{\mathbb{k}}$  un'estensione del campo  $\mathbb{k}$ .*

*Un endomorfismo  $S \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V)$  è semisemplice se e soltanto se la sua estensione  $\tilde{S} = 1_{\tilde{\mathbb{k}}} \otimes_{\mathbb{k}} S \in \mathcal{E}nd_{\tilde{\mathbb{k}}}(\tilde{\mathbb{k}} \otimes_{\mathbb{k}} V)$  è semisemplice.*  $\square$

**COROLLARIO XXVII.5.5.** *Se  $S_1, S_2 \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$  sono endomorfismi semisemplici. Se  $[S_1, S_2] = S_1 S_2 - S_2 S_1 = 0$ , allora anche  $S_1 + S_2$  è semisemplice.*

**DIMOSTRAZIONE.** È facile conseguenza dei Lemmi XXVII.5.3 e XXVII.5.4.  $\square$

**PROPOSIZIONE XXVII.5.6** (decomposizione di Wedderburn<sup>4</sup>). *Se  $\mathbb{k}$  ha caratteristica 0, allora ogni endomorfismo  $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$  si decompone in modo unico nella forma*

$$A = A_s + A_n, \quad \text{con } A_s \text{ semisemplice, } A_n \text{ nilpotente, e } [A_s, A_n] = A_s A_n - A_n A_s = 0.$$

*Inoltre  $A_s, A_n \in \mathbb{k}[A]$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$  e  $\mu_A(\lambda) = f_1^{k_1}(\lambda) \cdots f_m^{k_m}(\lambda)$  la decomposizione del suo polinomio minimo nel prodotto di potenze di fattori primi distinti. Gli elementi nilpotenti dell'anello  $\mathbb{k}[A]$  formano un suo ideale nilpotente che è principale e generato da  $f(A) = f_1(A) \cdots f_m(A)$ . Costruiamo la decomposizione per ricorrenza, mostrando che, per ogni intero  $h = 0, 1, \dots, n$ , possiamo trovare  $A_h \in \mathbb{k}[A]$  tale che

$$A - A_h \in \mathfrak{n}, \quad f(A_h) \in \mathfrak{n}^h.$$

Per  $h = 0$ , possiamo scegliere  $A_0 = A$ . Supponiamo di aver costruito  $A_h$  per qualche  $0 \leq h < n$ . Cerchiamo  $A_{h+1}$  nella forma  $A_h + X$ , con  $X \in \mathfrak{n}^h$ . Poiché il campo ha caratteristica 0, possiamo utilizzare la derivazione di polinomi. Per la formula di Taylor è

$$f(A_{h+1}) = f(A_h + X) = f(A_h) + f'(A_h)X + Y, \quad \text{con } Y \in \mathfrak{n}^{h+1} \text{ se } X \in \mathfrak{n}^h.$$

Poiché  $f$  è un prodotto di primi semplici,  $f$  ed  $f'$  sono primi tra loro. La condizione che  $f(A_h) \in \mathfrak{n}^h$  ci dice che il polinomio minimo di  $f(A_h)$  può contenere solo i fattori primi  $f_1, \dots, f_m$ . Quindi  $f'(A_h)$  è invertibile. Possiamo perciò trovare  $A_{h+1}$  ponendo  $X = -[f'(A_h)]^{-1} f(A_h)$ . Osserviamo che  $X \in \mathfrak{n}^h$  perché  $f(A_h) \in \mathfrak{n}^h$ , ed  $f(A_h)$  commuta con  $[f'(A_h)]^{-1}$ . Abbiamo così, con  $A_s = A_n$  ed  $A_n = A - A_n$ ,

<sup>4</sup> Joseph Henry Maclagan Wedderburn (Forfar, 2 febbraio 1882 - Princeton, 9 ottobre 1948). Algebrista scozzese. Ha dimostrato che i corpi finiti sono campi ed un importante teorema sulla struttura degli anelli semisemplici.

la decomposizione cercata. Infatti  $f(A_n) \in \mathfrak{n}^n = \{0\}$  e quindi  $f$  è il polinomio minimo di  $A_n$ , e dunque  $A_n$  è semisemplice, mentre, per ipotesi,  $A_n = A - A_n \in \mathfrak{n}$  è nilpotente.

Se  $A = A'_s + A'_n$  con  $A'_s$  semisemplice,  $A'_n$  nilpotente ed  $[A'_s, A'_n] = 0$ , allora  $A'_s$  ed  $A'_n$  commutano con  $A$  e quindi anche con le  $A_s, A_n \in \mathbb{k}[A]$  costruite sopra. Quindi  $A_s - A'_s$  è semisemplice ed  $A_n - A'_n$  nilpotente e dall'uguaglianza  $A_s - A'_s = A'_n - A_n$  segue allora che  $A'_s = A_s$  ed  $A'_n = A_n$ .  $\square$

### XXVII.6. Matrici triangolari

Indichiamo con

$$\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k}) = \left\{ \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,n} \\ & 1 & x_{2,3} & \cdots & x_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & x_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{array} \right) \mid x_{i,j} \in \mathbb{k} \right\}$$

$\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$  il gruppo delle matrici triangolari superiori unipotenti di  $\mathbb{k}^{n \times n}$ , con coefficienti nel campo  $\mathbb{k}$  e con

$$\mathfrak{z}_n^+(\mathbb{k}) = \left\{ \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,n} \\ & 0 & x_{2,3} & \cdots & x_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & x_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{array} \right) \mid x_{i,j} \in \mathbb{k} \right\}$$

l'algebra di Lie delle matrici triangolari superiori nilpotenti con coefficienti in  $\mathbb{k}$ .

**PROPOSIZIONE XXVII.6.1.** *Supponiamo  $\mathbb{k}$  abbia caratteristica zero. Allora*

$$\exp(X) = \sum_{h=0}^n \frac{1}{h!} X^h, \quad X \in \mathfrak{z}_n^+(\mathbb{k}) \quad e \quad \log(x) = -\sum_{h=1}^n \frac{1}{h} (e-x)^h, \quad x \in \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$$

sono funzioni polinomiali che definiscono una corrispondenza biunivoca tra  $\mathfrak{z}_n^+(\mathbb{k})$  e  $\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$ .  $\square$

**COROLLARIO XXVII.6.2.** *Se  $\mathbb{k}$  è uguale ad  $\mathbb{R}$  o a  $\mathbb{C}$ , allora  $\mathfrak{z}_n^+(\mathbb{k})$  è l'algebra di Lie di  $\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$  e l'applicazione esponenziale  $\exp : \mathfrak{z}_n^+(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$  un omeomorfismo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Basta verificare che  $\mathfrak{z}_n^+(\mathbb{k})$  è l'algebra di Lie di  $\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$ . Sia  $e^1, \dots, e^n$  la base duale della base canonica di  $\mathbb{k}^n$ . La condizione che  $x \in \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$  si può scrivere nella forma  $e^i(x(e_j)) = \delta_{i,j}$  se  $i \geq j$ . Se  $X = (X_{i,j}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$  ed  $\exp(tX) \in \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , differenziando in  $t=0$  la  $e^i(\exp(tX)(e_j)) = \delta_{i,j}$  per  $i \geq j$ , otteniamo che  $X_{i,j} = \frac{d}{dt} e^i(\exp(tX)(e_j))|_{t=0} = 0$  se  $i \geq j$ . Viceversa, è chiaro che  $\exp(\mathfrak{z}_n^+(\mathbb{k})) \subset \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$ . Quindi  $\mathfrak{z}_n^+(\mathbb{k})$  è l'algebra di Lie di  $\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$  e la tesi segue dalla Proposizione XXVII.6.1.  $\square$

Indichiamo con

$$\mathbf{T}_n^+(\mathbb{k}) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,n} \\ & x_{2,2} & x_{2,3} & \cdots & x_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & x_{n-1,n-1} & x_{n-1,n} \\ & & & & x_{n,n} \end{pmatrix} \mid x_{i,j} \in \mathbb{k}, \det x \neq 0 \right\}$$

il gruppo delle matrici triangolari superiori invertibili, con

$$\mathbf{ST}_n^+(\mathbb{k}) = \{x \in \mathbf{T}_n^+(\mathbb{k}) \mid \det x = 1\}$$

il suo sottogruppo formato da quelle con determinante uno. Consideriamo quindi le algebre di Lie delle matrici triangolari superiori e di quelle con traccia nulla a coefficienti in  $\mathbb{k}$ :

$$\mathfrak{t}_n^+(\mathbb{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,n} \\ & x_{2,2} & x_{2,3} & \cdots & x_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & x_{n-1,n-1} & x_{n-1,n} \\ & & & & x_{n,n} \end{pmatrix} \mid x_{i,j} \in \mathbb{k} \right\}$$

$$\mathfrak{st}_n^+(\mathbb{k}) = \{X \in \mathfrak{t}_n^+(\mathbb{k}) \mid \text{traccia}(X) = 0\}.$$

Indichiamo con  $\Delta_n(\mathbb{k})$  il gruppo delle matrici diagonali invertibili con coefficienti in  $\mathbb{k}$ .

**PROPOSIZIONE XXVII.6.3.** *Il gruppo  $\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$  è un sottogruppo normale di  $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{k})$  ed abbiamo una decomposizione in prodotto diretto*

$$\mathbf{T}_n^+(\mathbb{k}) = \Delta_n(\mathbb{k}) \ltimes \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k}).$$

*Ogni matrice semisemplice in  $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{k})$  è coniugata a una matrice di  $\Delta_n(\mathbb{k})$  mediante un elemento di  $\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $x = (x_{i,j}) \in \mathbf{T}_n^+(\mathbb{k})$  un endomorfismo semisemplice. Gli elementi  $\lambda_i = x_{i,i}$  della sua diagonale principale sono i suoi autovalori. Osserviamo che  $e_1$  è un autovettore di  $x$  corrispondente all'autovalore  $\lambda_1$ . Possiamo completare  $e_1 = e_1$  ad una base di autovettori  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  di  $x$ , con  $x(\epsilon_i) = \lambda_i \epsilon_i$  ed  $\epsilon_i - e_i \in \ell_{i-1}$  per  $1 < i \leq n$ , ove abbiamo posto  $\ell_h = \langle \{e_j\}_{j \leq h} \rangle$  per  $1 \leq h \leq n$ .

Infatti, i sottospazi  $\ell_h$  sono  $x$ -invarianti e la restrizione di  $x$  a ciascun  $\ell_h$  è semisemplice. Quindi, per ogni  $1 < i \leq n$  il sottospazio  $\ell_{i-1}$  ha un complemento  $x$ -invariante  $W_i$  in  $\ell_i$ . Il sottospazio  $W_i$  ha dimensione uno, è un sottospazio di autovettori relativi all'autovalore  $\lambda_i$ , e contiene un vettore della forma  $\epsilon_i = e_i + \sum_{j < i} a_{j,i} e_j$ .

Costruiamo una matrice  $a$  di  $\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$ , utilizzando i coefficienti  $a_{i,j}$  così ottenuti quando  $i < j$ , e ponendo  $a_{i,i} = 1$  per  $i = 1, \dots, n$  ed  $a_{i,j} = 0$  se  $i > j$ . Allora  $axa^{-1}$  è la matrice  $x_\delta = \text{diag}(x_{1,1}, \dots, x_{n,n})$ . Questo dimostra l'ultima affermazione dell' enunciato.

Per dimostrare la prima, fissiamo un qualsiasi elemento  $x = (x_{i,j})$  di  $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{k})$ . Sia  $x_s + x_n$  la sua decomposizione di Wedderburn. Osserviamo che  $x_s$  e  $x_n$  sono matrici

triangolari superiori perché sono polinomi di  $x$ . Inoltre  $x_s$  è invertibile e la  $x = x_s(e + x_s^{-1}x_n)$  è la decomposizione di  $x$  nel prodotto di un elemento semisemplice di  $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{k})$  e di un elemento unipotente  $x'_n = e + x_s^{-1}x_n \in \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$ . Abbiamo, per la prima parte della dimostrazione,  $x'_n = ax_\delta a^{-1}$  con  $x_\delta = \text{diag}(x_{1,1}, \dots, x_{n,n})$ , per un elemento  $a \in \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$ . Allora

$$x = a^{-1}x_\delta a x'_n = x_\delta \left( (x_\delta^{-1} a^{-1} x_\delta) a x'_n \right) = x_\delta x''_n, \quad \text{con } x_\delta \in \Delta_n(\mathbb{k}), x''_n \in \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k}).$$

La decomposizione è unica perché l'identità è l'unica matrice diagonale di  $\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$ . Questo completa la dimostrazione.  $\square$

OSSERVAZIONE XXVII.6.4. Abbiamo dimostrato che  $\bigcup_{a \in \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})} \text{ad}(a)(\Delta_n(\mathbb{k}))$  è l'insieme di tutti gli elementi semisemplici di  $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{k})$ .

PROPOSIZIONE XXVII.6.5. *Se  $\mathbb{k}$  è uguale a  $\mathbb{C}$  o a  $\mathbb{R}$ , allora  $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{k})$  ed  $\mathbf{ST}_n^+(\mathbb{k})$  sono gruppi di Lie con algebre di Lie  $\mathfrak{t}_n^+(\mathbb{k})$  ed  $\mathfrak{st}_n^+(\mathbb{k})$ , rispettivamente. I gruppi  $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{C})$  ed  $\mathbf{ST}_n^+(\mathbb{C})$  sono connessi. I gruppi  $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{R})$  ed  $\mathbf{ST}_n^+(\mathbb{R})$  non sono connessi se  $n \geq 2$ . L'applicazione esponenziale  $\exp : \mathfrak{t}_n^+(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{T}_n^+(\mathbb{k})$  ed  $\exp : \mathfrak{st}_n^+(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{ST}_n^+(\mathbb{k})$  sono surgettive sulle componenti connesse dell'identità.*

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando la Proposizione XXVII.6.3, ci riconduciamo allo studio dell'applicazione esponenziale sulle matrici diagonali.  $\square$

COROLLARIO XXVII.6.6. *L'applicazione  $\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  è surgettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Ogni matrice di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  è coniugata ad una matrice triangolare superiore. La tesi è quindi conseguenza della Proposizione XXVII.6.5.  $\square$

OSSERVAZIONE XXVII.6.7. Le considerazioni svolte sopra si possono ripetere per matrici triangolari inferiori.

## XXVII.7. Sottogruppi di Lie del gruppo lineare

I gruppi lineari hanno una struttura naturale di *gruppi di Lie*, di dimensione uguale a quella della loro algebra di Lie. In questo paragrafo consideriamo sottogruppi di Lie, non necessariamente chiusi, del gruppo lineare.

Premettiamo alcune considerazioni di carattere generale.

**XXVII.7.1. Il teorema di Frobenius.** Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$ . Indichiamo con  $\mathcal{E}(M)$  l'anello delle funzioni reali di classe  $\mathcal{C}^\infty$  definite su  $M$  e con  $\mathfrak{X}(M) = \mathcal{C}^\infty(M, TM)$  l' $\mathcal{E}(M)$ -modulo dei campi di vettori di classe  $\mathcal{C}^\infty$  su  $M$ .

Una *distribuzione vettoriale* su  $M$  è un sotto- $\mathcal{E}(M)$ -modulo  $\mathcal{D}$  di  $\mathfrak{X}(M)$ . Per ogni punto  $p \in M$  indichiamo con  $\mathcal{D}_p$  il sottospazio vettoriale di  $T_p M$  formato dai valori in  $p$  dei campi di vettori di  $\mathcal{D}$ :

$$\mathcal{D}_p = \{X_p \mid X \in \mathcal{D}\}.$$

La sua dimensione si dice il *rango* di  $\mathcal{D}$  in  $p$ .

Una sottovarietà differenziabile connessa  $N$  di  $M$  si dice una *sottovarietà integrale* di  $\mathcal{D}$  se  $T_p N \subset \mathcal{D}_p$  per ogni  $p \in N$ . Chiaramente una tale  $N$  non può avere in alcun suo punto  $p$  dimensione maggiore del rango della distribuzione  $\mathcal{D}$  in  $p$ .

Se  $T_p N = \mathcal{D}_p$  per ogni punto  $p \in N$  diciamo che  $N$  è una *sottovarietà integrale completa* di  $\mathcal{D}$ .

Vale il

**TEOREMA XXVII.7.1 (Frobenius<sup>5</sup>).** *Sia  $\mathcal{D}$  una distribuzione vettoriale su  $X$  di rango costante  $n$ . Sono condizioni equivalenti:*

- (i) *per ogni punto  $p$  di  $M$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $p$  in  $M$  e una sottovarietà differenziabile chiusa  $N$  di  $U$  che contiene  $p$  ed è una sottovarietà integrale completa di  $\mathcal{D}$ ;*
- (ii) *la distribuzione  $\mathcal{D}$  è formalmente integrabile, tale cioè che*

$$[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** (i)  $\Rightarrow$  (ii) Siano  $X, Y \in \mathcal{D}$ , sia  $p \in M$  e sia  $N$  una sottovarietà integrale completa di  $\mathcal{D}$  passante per il punto  $p$ . Poiché le restrizioni di  $X$  e  $Y$  ad  $N$  sono per ipotesi campi di vettori tangenti ad  $N$ , anche il loro commutatore  $[X, Y]$  è un campo di vettori tangente ad  $N$ . Questo dimostra che  $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_x$ . Poiché questa proprietà è verificata per ogni  $p \in M$ , otteniamo che  $[X, Y] \in \mathcal{D}$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Dimostriamo, per induzione sul rango  $n$  della distribuzione  $\mathcal{D}$ , che per ogni punto  $p$  di  $M$  possiamo trovare un intorno aperto  $U$  di  $p$  e coordinate locali  $y^1, \dots, y^m$  in  $U$  tali che  $\mathcal{D}|_U$  sia generata dalle derivate parziali rispetto alle prime  $n$  coordinate:

$$\mathcal{D}|_U = \mathcal{E}(U) \frac{\partial}{\partial y^1} + \dots + \mathcal{E}(U) \frac{\partial}{\partial y^n}.$$

Ciò è vero per  $m = 1$ . Fissiamo infatti coordinate locali  $x^1, \dots, x^m$  in un intorno  $U$  di  $p$  tali che  $\mathcal{D}$  sia generato in  $U$  dal campo di vettori:

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{j=2}^m a^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\phi}^1(t) = 1 \\ \dot{\phi}^j(t) = a^j(\phi(t)) & \text{se } j = 2, \dots, m \\ \phi^1(0) = 0 \\ \phi^j(0) = x^j & \text{se } j = 2, \dots, m. \end{cases}$$

ha soluzione unica  $\phi^i(t; x^2, \dots, x^m)$  per  $|(x^2, \dots, x^m)|$  piccolo e la posizione:

$$x^i = \phi^i(y^1; y^2, \dots, y^n) \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, m$$

definisce per il teorema delle funzioni implicite un nuovo sistema di coordinate con centro in  $p$  per cui  $X = \partial/\partial y^1$ .

Supponiamo ora  $n > 1$  e la nostra asserzione valida per distribuzioni formalmente integrabili di rango minore di  $n$ . Possiamo fissare una carta coordinata con

<sup>5</sup>Ferdinand Georg Frobenius (Charlottenburg, 26 ottobre 1849 - Berlino, 3 agosto 1917)

centro nel punto  $p$  assegnato, in modo che nelle coordinate locali  $x^1, \dots, x^m$  la distribuzione  $\mathcal{D}$  sia generata in  $U$  da campi di vettori della forma:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{k=n+1}^n a_i^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{per } i = 1, \dots, n.$$

Per la prima parte della dimostrazione possiamo ancora supporre che  $a_1^k = 0$  in  $U$  per  $k = m+1, \dots, n$ , cioè  $X_1 = \partial/\partial x^1$ . L'integrabilità formale di  $\mathcal{D}$  ci dà allora  $[X_i, X_j] = 0$  in  $U$  per ogni  $i, j = 1, \dots, m$ , e questa ci dice in particolare che

$$\partial a_i^k / \partial x^1 = 0 \quad \text{per } i = 2, \dots, m \quad k = m+1, \dots, n.$$

Perciò  $X_2, \dots, X_n$  generano in  $U' = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |x^j| < R\}$  una distribuzione formalmente integrabile di rango  $(m-1)$ . Per l'ipotesi induttiva possiamo trovare nuove coordinate  $y^2, \dots, y^m$  tali che  $X_j = \partial/\partial y^j$  per  $j = 2, \dots, n$ . Ponendo  $y^1 = x^1$  abbiamo dimostrato la nostra asserzione.

Poiché nelle nuove coordinate abbiamo

$$X_i = \frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{per } i = 1, \dots, m,$$

otteniamo la sottovarietà integrale completa di  $\mathcal{D}$  passante per  $p$  nella forma

$$N \cap U = \{y^{k+1} = 0, \dots, y^n = 0\}.$$

□

### XXVII.7.2. Sottoalgebre di Lie di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ e sottogruppi analitici.

Se  $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ , indichiamo con  $\vec{A}$  il campo di vettori costante su  $\mathbb{R}^{n \times n}$

$$\vec{A} = \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}.$$

Ad ogni matrice  $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  facciamo corrispondere il *campo di vettori invariante a sinistra*  $\underline{A}$ , definito su  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  da

$$\underline{A}_x = \sum_{i,j,h=1}^n x_{i,h} a_{h,j} \frac{\partial}{\partial x_{i,j}}, \quad \forall x = (x_{i,j}) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Il campo  $\underline{A}$  è il generatore infinitesimale del gruppo a un parametro di diffeomorfismi

$$\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \ni (x, t) \longrightarrow x \exp(tA) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Si verifica che

$$[\underline{A}, \underline{B}] = [\underline{A}, \underline{B}], \quad \forall A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}),$$

dove le parentesi a primo membro rappresentano la commutazione dei campi di vettori e quelle a secondo membro il commutatore di due endomorfismi lineari.

Otteniamo in questo modo un omomorfismo iniettivo di algebre di Lie:

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \ni A \longrightarrow \underline{A} \in \mathfrak{X}(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})).$$

I campi di vettori  $\underline{A}$  sono *invarianti a sinistra* su  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ : abbiamo cioè  $L_{x*}(\underline{A}) = \underline{A}$  per ogni  $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  ed  $x \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ .

Associamo a una sottoalgebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  la distribuzione vettoriale  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  su  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  generata dai campi di vettori  $\underline{A}$  al variare di  $A$  in  $\mathfrak{g}$ . La  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  è allora formalmente integrabile e per il teorema di Frobenius esisterà una sottovarietà integrale completa massimale  $\mathbf{G}$  di  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  che contiene l'identità  $I_n$ . Abbiamo:

**TEOREMA XXVII.7.2.** *Se  $\mathfrak{g}$  è una sottoalgebra di Lie reale di  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ , allora la sottovarietà integrale massimale completa  $\mathbf{G}$  di  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  che contiene l'identità  $I_n$  è un sottogruppo del gruppo lineare  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ . Esso è il sottogruppo  $\mathbf{G}$  di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  generato dagli elementi  $\exp(A)$  al variare di  $A$  in  $\mathfrak{g}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che  $\mathbf{G}$  contiene  $\overrightarrow{\exp(X)}$  per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ , in quanto la curva  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tX)$  è tangente a  $\overrightarrow{\exp(tX)} \in \mathcal{D}_{\exp(tX)}(\mathfrak{g})$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Se fissiamo poi una coppia di elementi  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , allora  $\mathbf{G}$  contiene anche  $\overrightarrow{\exp(X)\exp(Y)}$  in quanto la curva  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(X)\exp(tY)$  è, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , tangente a  $\overrightarrow{\exp(X)\exp(tY)} \in \mathcal{D}_{\exp(X)\exp(tY)}(\mathfrak{g})$ , e contiene il punto  $\exp(X)$  di  $\mathbf{G}$ . In modo analogo dimostriamo che  $\mathbf{G}$  contiene ogni prodotto finito  $\exp(X_1) \cdots \exp(X_m)$  con  $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g}$  e quindi il sottogruppo  $\mathbf{G}'$  di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  generato da  $\{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$ .

Fissiamo ora un intorno aperto  $U$  di 0 in  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  tale che l'esponenziale definisca un omeomorfismo di  $U$  su  $\exp(U)$ . Sia  $V = \exp(U \cap \mathfrak{g})$ . Allora  $\mathbf{G}'$  è il sottogruppo di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  generato da  $V$ .

Per dimostrare che  $\mathbf{G} = \mathbf{G}'$ , consideriamo su  $\mathbf{G}$  la topologia di sottovarietà differenziabile di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ , quella cioè per cui per ogni  $g \in \mathbf{G}$  l'applicazione

$$U \cap \mathfrak{g} \ni X \rightarrow g \exp(X) \in gV$$

è un diffeomorfismo. È facile verificare allora che  $\mathbf{G}'$  è aperto e chiuso in  $\mathbf{G}$  e che quindi le due sottovarietà coincidono.  $\square$

Occorre osservare che in generale la topologia di sottovarietà su  $\mathbf{G}$  che si considera nella dimostrazione del teorema è più fine della topologia di sottospazio topologico: le due topologie coincidono quando  $\mathbf{G}$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ .

**DEFINIZIONE XXVII.7.3.** Il gruppo  $\mathbf{G}$  ottenuto nel teorema precedente, con la topologia di sottovarietà differenziabile di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ , si dice il *sottogruppo (di Lie) analitico associato alla sottoalgebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$* .

Un sottogruppo  $\mathbf{G}$  del gruppo lineare  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  che abbia al più un numero finito di componenti connesse e la cui componente connessa dell'identità  $\mathbf{G}_e$  sia un sottogruppo analitico di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  si dirà un *sottogruppo di Lie del gruppo lineare  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$* .

Ad esempio, il sottogruppo analitico  $\mathbf{G}$  di  $\mathbf{GL}(4, \mathbb{R})$  corrispondente all'algebra di Lie  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}A$  con

$$A = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & \pi & \\ & & & -\pi \end{pmatrix}$$

è la curva:

$$\mathbf{G} = \left\{ \left( \begin{array}{cc|cc} \cos t & -\sin t & & \\ \sin t & \cos t & & \\ & & \cos(\pi t) & -\sin(\pi t) \\ & & \sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{array} \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

che è densa nel sottogruppo chiuso:

$$\overline{\mathbf{G}} = \left\{ \left( \begin{array}{cc|cc} \cos t & -\sin t & & \\ \sin t & \cos t & & \\ & & \cos s & -\sin s \\ & & \sin s & \cos s \end{array} \right) \middle| t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Osserviamo che possiamo sempre considerare  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  come un sottogruppo chiuso del gruppo lineare reale  $\mathbf{GL}(2n, \mathbb{R})$ . La discussione che abbiamo sopra sviluppato per semplicità nel caso di sottoalgebre di Lie reali dell'algebra di Lie  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ , si può facilmente ripetere nel caso di sottogruppi di Lie reali di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ .

Abbiamo:

**PROPOSIZIONE XXVII.7.4.** *Siano  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$  sottogruppi analitici del gruppo lineare  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ , con algebre di Lie  $\mathfrak{g}_1$  e  $\mathfrak{g}_2$  rispettivamente. Allora:  $\mathbf{G}_1 \subset \mathbf{G}_2$  se e soltanto se  $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2$ .*

**OSSERVAZIONE XXVII.7.5.** Un sottogruppo di Lie  $\mathbf{G}$  di un gruppo lineare  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  è un gruppo topologico con la topologia  $\tau$  di sottospazio. La sua topologia  $\tau_{\text{Lie}}$  di *sottogruppo di Lie* è comunque completamente determinata: essa è la meno fine tra le topologie localmente connesse che sono più fini di quella di sottospazio: sono aperti nella topologia  $\tau_{\text{Lie}}$  tutte le componenti connesse degli aperti della topologia  $\tau$ . Questi aperti connessi formano una base di  $\tau_{\text{Lie}}$ .

L'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di un sottogruppo di Lie  $\mathbf{G}$  del gruppo lineare  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  è caratterizzata, come nel caso dei sottogruppi chiusi, da:

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in \mathbf{G} \forall t \in \mathbb{R}\}.$$



## Gruppi lineari compatti

Esamineremo in questo capitolo la struttura dei principali gruppi lineari compatti. Ricordiamo la loro definizione:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(n) &= \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid a^* a = I_n\} \quad (\text{gruppo unitario}) \\ \mathbf{SU}(n) &= \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}) \quad (\text{gruppo speciale unitario}) \\ \mathbf{O}(n) &= \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t a a = I_n\} \quad (\text{gruppo ortogonale}) \\ \mathbf{SO}(n) &= \mathbf{O}(n) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \quad (\text{gruppo speciale ortogonale}) \\ \mathbf{Sp}(n) &= \{a \in \mathbf{U}(2n) \mid {}^t a J a = J\} \quad \left( \begin{array}{l} \text{gruppo simplettico compatto,} \\ \text{o unitario quaternionico, o iper-unitario} \end{array} \right) \end{aligned}$$

ove  $I_n$  è la matrice unità  $n \times n$  e si è posto:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Vale il

**TEOREMA XXVIII.0.6.** *Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo lineare compatto e  $\mathfrak{g}$  la sua algebra di Lie, l'applicazione esponenziale  $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{G}$  ha come immagine la componente connessa  $\mathbf{G}_e$  dell'identità di  $\mathbf{G}$ .*

In questo capitolo non daremo la dimostrazione generale di questo teorema, ma ne illustreremo la validità per ciascuno dei gruppi lineari compatti considerati.

### XXVIII.1. Proprietà topologiche di $\mathbf{U}(n)$

**LEMMA XXVIII.1.1.** *Ogni matrice di  $\mathbf{U}(n)$  è diagonalizzabile in una base ortonormale di  $\mathbb{C}^n$ . I suoi autovalori hanno tutti modulo uguale a 1.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $u \in \mathbf{U}(n)$ . Poiché il campo  $\mathbb{C}$  è algebricamente chiuso,  $u$  ha almeno un autovalore  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ , con autovettore  $\epsilon_1$  che possiamo prendere di norma unitaria:  $\|\epsilon_1\| = 1$ . Da  $1 = \|\epsilon_1\|^2 = \|u(\epsilon_1)\|^2 = \|\lambda_1 \epsilon_1\|^2 = |\lambda_1|^2$  ricaviamo che  $|\lambda_1| = 1$ , cioè  $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1^{-1}$ . Se  $v \in \epsilon_1^\perp$ , allora

$$(u(v)|\epsilon_1) = \lambda^{-1}(u(v)|u(\epsilon_1)) = \lambda^{-1}(v|\epsilon_1) = 0.$$

Quindi  $u(\epsilon_1^\perp) = \epsilon_1^\perp$  e la restrizione di  $u$  all'iperpiano  $\epsilon_1^\perp$  è ancora un'applicazione unitaria su uno spazio vettoriale complesso di dimensione  $n - 1$ . Per ricorrenza otteniamo che  $u$  è diagonalizzabile in una base ortonormale.  $\square$

TEOREMA XXVIII.1.2. Il gruppo  $\mathbf{U}(n)$  è un sottogruppo chiuso, compatto e connesso per archi di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ . La sua algebra di Lie  $\mathfrak{u}(n)$  è

$$(28.1.1) \quad \mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\}$$

ed ha dimensione reale  $n^2$ . L'applicazione esponenziale

$$(28.1.2) \quad \mathfrak{u}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{U}(n)$$

è surgettiva.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione  $\phi : \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \ni a \rightarrow a^*a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  è continua e quindi  $U(n) = \phi^{-1}(e)$  è un chiuso, contenuto nel compatto  $\{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \|a\| = 1\}$  e perciò compatto.

Abbiamo già osservato che  $[\exp(A)]^* = \exp(A^*)$  per ogni  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . Fissata  $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , l'applicazione:

$$\alpha_A : \mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tA^*) \exp(tA) = [\exp(tA)]^* \exp(tA) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

è differenziabile e

$$\alpha'_A(t) = \exp(tA^*) (A^* + A) \exp(tA) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quindi: se  $A \in \mathfrak{u}(n)$ , allora  $\alpha_A(t) = I_n$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ; in particolare  $A^* + A = \alpha'_A(0) = 0$ . Viceversa, se  $A^* + A = 0$ , allora  $\alpha'_A(t) = 0$ ; quindi  $\alpha_A(t)$  è costante ed uguale ad  $I_n$  e perciò  $A$  appartiene all'algebra di Lie  $\mathfrak{u}(n)$  di  $\mathbf{U}(n)$ .

Dimostriamo ora che l'applicazione  $\exp : \mathfrak{u}(n) \rightarrow \mathbf{U}(n)$  è surgettiva. Fissiamo  $u \in \mathbf{U}(n)$ . Per il Lemma XXVIII.1.1, possiamo trovare una base ortonormale di  $\mathbb{C}^n$ , e quindi una matrice  $a \in \mathbf{U}(n)$ , tale che

$$aua^{-1} = aua^* = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\theta_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

Allora, posto

$$A = \begin{pmatrix} i\theta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i\theta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\theta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & i\theta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & i\theta_n \end{pmatrix}$$

abbiamo  $A \in \mathfrak{u}(n)$  e quindi  $uAu^* \in \mathfrak{u}(n)$  e

$$\exp(uAu^*) = u \exp(A) u^* = a.$$

Essendo immagine dello spazio vettoriale  $\mathfrak{u}(n)$  mediante l'applicazione continua  $\exp$ , il gruppo  $\mathbf{U}(n)$  è connesso per archi.  $\square$

**XXVIII.2. Il gruppo speciale unitario**

L'applicazione

$$\mathbf{U}(n) \ni u \rightarrow \det u \in \mathbf{S}^1 \subset \mathbb{C}$$

è un omomorfismo continuo del gruppo unitario nel gruppo moltiplicativo  $\mathbf{S}^1$  dei numeri complessi di modulo 1. Il suo nucleo

$$\mathbf{SU}(n) = \{u \in \mathbf{U}(n) \mid \det u = 1\}$$

è un sottogruppo chiuso normale di  $\mathbf{U}(n)$ , che si dice *gruppo unitario speciale* di ordine  $n$ .

**TEOREMA XXVIII.2.1.** *L'algebra di Lie di  $\mathbf{SU}(n)$  è la sottoalgebra di Lie  $\mathfrak{su}(n)$  di  $\mathfrak{u}(n)$ , formata dalle matrici di  $\mathfrak{u}(n)$  che hanno traccia nulla:*

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \text{trac}(X) = 0\}.$$

L'applicazione

$$\mathfrak{su}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{SU}(n)$$

è surgettiva. Il gruppo  $\mathbf{SU}(n)$  ha dimensione reale  $n^2 - 1$ . Esso è compatto e connesso per archi.

**DIMOSTRAZIONE.** La prima affermazione segue dalla formula:  $\det(\exp(X)) = e^{\text{trac}(X)}$ . Infatti, se  $X \in \mathfrak{su}(n)$ , da  $\exp(tX) \in \mathbf{SU}(n)$  per ogni numero reale  $t$ , segue che:

$$\begin{cases} X + X^* = 0 \\ \text{trac}(tX) = t \cdot \text{trac}(X) = 2k\pi i \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{con } k = k(t) \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La seconda relazione implica che  $\text{trac}(X) = 0$ .

Sia ora  $u \in \mathbf{SU}(n)$ . Allora possiamo trovare  $a \in \mathbf{U}(n)$  tale che

$$a u a^{-1} = a u a^* = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\theta_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

La condizione  $\det u = 1$  dà allora

$$\exp(i(\theta_1 + \dots + \theta_n)) = 1$$

e quindi

$$e^{i\theta_n} = \exp(-i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1})).$$

Posto

$$U = \begin{pmatrix} i\theta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i\theta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\theta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & i\theta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1}) \end{pmatrix}$$

abbiamo  $U \in \mathfrak{su}(n)$  e quindi  $aUa^* = aUa^{-1} \in \mathfrak{su}(n)$  per l'invarianza della traccia rispetto al coniugio in  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  e

$$\exp(aUa^*) = a \exp(U)a^* = u.$$

L'applicazione  $\mathfrak{u}(n) \ni X \rightarrow \text{itrac}(X) \in \mathbb{R}$  è un funzionale lineare non identicamente nullo su  $\mathfrak{u}(n)$  e quindi  $\mathfrak{su}(n)$  ha dimensione  $n^2 - 1$ . Il gruppo  $\mathbf{SU}(n)$  è compatto perché è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{U}(n)$  e connesso per archi perché immagine continua, mediante l'applicazione esponenziale, della propria algebra di Lie  $\mathfrak{su}(n)$ .  $\square$

### XXVIII.3. I gruppi $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$

Il gruppo  $\mathbf{O}(n)$  (*gruppo ortogonale di ordine  $n$* ) è il gruppo delle isometrie lineari e  $\mathbf{SO}(n)$  (*gruppo speciale ortogonale o gruppo delle rotazioni di ordine  $n$* ) quello delle isometrie lineari di determinante 1 dello spazio Euclideo  $\mathbb{R}^n$ .

Osserviamo che  $\mathbf{SO}(n)$  è un sottogruppo normale di indice 2 di  $\mathbf{O}(n)$ . Poiché  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ , anche  $\mathbf{O}(n)$  e  $\mathbf{SO}(n)$  sono sottogruppi chiusi di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ .

I gruppi  $\mathbf{O}(n)$  e  $\mathbf{SO}(n)$  sono compatti, in quanto valgono le:

$$\mathbf{O}(n) = \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \mathbf{SO}(n) = \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$$

e quindi  $\mathbf{O}(n)$  e  $\mathbf{SO}(n)$  sono sottogruppi chiusi del gruppo compatto  $\mathbf{U}(n)$ .

**TEOREMA XXVIII.3.1.** *I due gruppi  $\mathbf{O}(n)$  ed  $\mathbf{SO}(n)$  hanno la stessa algebra di Lie*

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + {}^tX = 0\}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $X$  un elemento dell'algebra di Lie  $\mathfrak{o}(n)$  di  $\mathbf{O}(n)$ . Poiché  $\exp(tX) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{U}(n)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , il determinante di  $\exp(tX)$  sarà reale e di modulo 1. Poiché il determinante di una matrice reale è positivo, avremo allora:

$$\det(\exp(tX)) = e^{t \cdot \text{trac}(X)} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e quindi

$$\exp(tX) \in \mathbf{SO}(n) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

dimostra che  $\mathbf{O}(n)$  e  $\mathbf{SO}(n)$  hanno la stessa algebra di Lie. Abbiamo poi

$$I_n = {}^t(\exp(tX)) \exp(tX) = \exp(t \cdot {}^tX) \exp(tX) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Poiché

$$\frac{d}{dt} \left[ {}^t(\exp(tX)) \exp(tX) \right] = \exp(t \cdot {}^tX) ({}^tX + X) \exp(tX) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

la condizione  ${}^tX + X = 0$  è necessaria e sufficiente affinché  $X \in \mathfrak{o}(n)$ .  $\square$

**TEOREMA XXVIII.3.2.** *L'applicazione*

$$\mathfrak{o}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{SO}(n)$$

*è surgettiva.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per ogni rotazione  $a \in \mathbf{SO}(n)$ , possiamo trovare una decomposizione di  $\mathbb{R}^n$  in somma diretta di sottospazi  $a$ -invarianti e due a due ortogonali

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$$

tale che ogni sottospazio  $V_j$  abbia dimensione minore o uguale a 2 e la restrizione di  $a$  ai sottospazi  $V_j$  della decomposizione che hanno dimensione 1 sia l'identità.

Su ciascuno dei sottospazi  $V_j$  di dimensione 2 la  $a$  definisce una rotazione dello spazio Euclideo  $\mathbb{R}^2$ . Sarà quindi sufficiente dimostrare che

$$\mathfrak{o}(2) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{SO}(2)$$

è surgettiva. Un elemento di  $\mathfrak{o}(2)$  è una matrice della forma

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$A(\theta)^{2h} = \begin{pmatrix} (-1)^h \theta^{2h} & 0 \\ 0 & (-1)^h \theta^{2h} \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad A(\theta)^{2h+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{h+1} \theta^{2h+1} \\ (-1)^h \theta^{2h+1} & 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$\exp(A(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Ciò dimostra che  $\exp : \mathfrak{o}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(2)$  è surgettiva. La dimostrazione è completa.  $\square$

**TEOREMA XXVIII.3.3.**  $\mathbf{SO}(n)$  è un gruppo compatto e connesso per archi di dimensione  $n(n-1)/2$ . Il gruppo  $\mathbf{O}(n)$  è unione di due componenti connesse, omeomorfe a  $\mathbf{SO}(n)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Abbiamo già osservato che i gruppi  $\mathbf{SO}(n)$  e  $\mathbf{O}(n)$  sono compatti, in quanto sottogruppi chiusi di  $\mathbf{U}(n)$ . Inoltre  $\mathbf{SO}(n)$  è connesso per archi perché immagine mediante l'esponenziale dello spazio vettoriale  $\mathfrak{o}(n)$ . Questo ha dimensione  $n(n-1)/2$ , in quanto le matrici di  $\mathfrak{o}(n)$  sono le matrici antisimmetriche e queste si parametrizzano con i coefficienti che sono al di sopra della diagonale principale.

In quanto immagine dell'algebra di Lie di  $\mathbf{O}(n)$  mediante l'applicazione esponenziale,  $\mathbf{SO}(n)$  è la componente connessa dell'identità in  $\mathbf{O}(n)$ . La moltiplicazione a sinistra per la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}(n)$$

è un omeomorfismo di  $\mathbf{SO}(n)$  su  $\mathbf{O}(n) \setminus \mathbf{SO}(n)$  e quindi  $\mathbf{O}(n)$  ha esattamente due componenti connesse, omeomorfe ad  $\mathbf{SO}(n)$ .  $\square$

Osserviamo che  $\mathbf{SO}(1)$  è un punto, mentre l'applicazione

$$\mathbf{SO}(2) \ni a \rightarrow a(e_1) \in S^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\|^2 = 1\}$$

definisce un omeomorfismo di  $\mathbf{SO}(2)$  su  $S^1$ .

**XXVIII.4. L'omomorfismo canonico  $\mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$** 

Diamo qui una versione indipendente da quella in §VIII.4.

Le algebre di Lie  $\mathfrak{o}(3)$  e  $\mathfrak{su}(2)$  sono algebre di Lie di dimensione reale 3.

Abbiamo

$$\mathfrak{o}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & -z \\ -y & z & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Poniamo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$B_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad B_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora  $A_1, A_2, A_3$  formano una base di  $\mathfrak{o}(3)$  e  $B_1, B_2, B_3$  una base di  $\mathfrak{su}(2)$  e il prodotto di Lie delle due algebre è descritto nelle due basi dalle tabelle:

$$\begin{aligned} [A_j, A_h] &= A_k, \quad [B_j, B_h] = B_k \\ \iff (j, h, k) &\text{ è una permutazione positiva di } \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Le due algebre sono quindi isomorfe e isomorfe all'algebra di Lie definita su  $\mathbb{R}^3$  dal prodotto vettore.

Indichiamo con

$$s : \mathfrak{o}(3) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$$

l'isomorfismo di algebre di Lie che fa corrispondere ad  $A_j \in \mathfrak{o}(3)$  l'elemento  $B_j \in \mathfrak{su}(2)$ .

Per descrivere una rappresentazione di  $\mathbf{SU}(2)$  nel gruppo delle rotazioni di  $\mathbb{R}^3$ , introduciamo l'isomorfismo  $\mathbb{R}$ -lineare:

$$\lambda : \mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2).$$

Abbiamo

$$\mathbf{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid (\alpha, \beta) \in S^3 \right\} \simeq S^3 \subset \mathbb{C}^2.$$

Facciamo operare  $\mathbf{SU}(2)$  su  $\mathfrak{su}(2)$  mediante la rappresentazione aggiunta:

$$\mathbf{SU}(2) \times \mathfrak{su}(2) \ni (u, X) \rightarrow \text{Ad}(u)X = uXu^{-1} \in \mathfrak{su}(2).$$

L'isomorfismo  $\lambda$  ci permette di definire una rappresentazione lineare

$$\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$$

mediante

$$\rho(u)v = \lambda^{-1}(\text{ad}(u)\lambda(v)) \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

LEMMA XXVIII.4.1. Per ogni  $u \in \mathbf{SU}(2)$ , è  $\rho(u) \in \mathbf{SO}(3)$ .

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che

$$|v|^2 = \det \lambda(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

Abbiamo perciò

$$|\rho(u)v|^2 = \det(u\lambda(v)u^{-1}) = \det \lambda(v) = |v|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

□

TEOREMA XXVIII.4.2. L'applicazione

$$\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$$

è un omomorfismo di gruppi surgettivo. Il suo nucleo è il sottogruppo normale

$$\{\pm I_2\} \subset \mathbf{SU}(2).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano  $a, b \in \mathbf{SU}(2)$ . Allora

$$\begin{aligned} \rho(a) \circ \rho(b)v &= \rho(a)(\lambda^{-1} \text{Ad}(b)\lambda(v)) \\ &= \lambda^{-1} \circ \text{Ad}(a) \circ \lambda \circ \lambda^{-1} \text{Ad}(b)\lambda(v) \\ &= \lambda^{-1} \circ \text{Ad}(a) \circ \text{Ad}(b)\lambda(v) \\ &= \lambda^{-1} \circ \text{Ad}(ab)\lambda(v) \\ &= \rho(ab)v \quad \forall v \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Ciò dimostra che  $\rho$  è un omomorfismo. Calcoliamone il nucleo. Esso è formato dalle trasformazioni  $u \in \mathbf{SU}(2)$  tali che

$$\text{Ad}(u)X = X \quad \forall X \in \mathfrak{su}(2),$$

cioè

$$[u, X] = uX - Xu = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{su}(2).$$

Scrivendo queste identità con  $X = B_j$ , ( $j = 1, 2, 3$ ), si ottiene, per  $u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ :

$$\beta = 0, \quad \alpha = \pm 1.$$

Per completare la dimostrazione, basta osservare che la trasformazione  $\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$  può essere definita dal diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{su}(2) & \xrightarrow{\text{exp}} & \mathbf{SU}(2) \\ s \uparrow & & \downarrow \rho \\ \mathfrak{o}(3) & \xrightarrow{\text{exp}} & \mathbf{SO}(3). \end{array}$$

Da questo diagramma otteniamo immediatamente che  $\rho$  è surgettiva in quanto

$$\rho \circ \text{exp}|_{\mathfrak{su}(2)} \circ \mathbf{s}^{-1} = \text{exp}|_{\mathfrak{o}(3)}$$

è surgettiva.

□

**TEOREMA XXVIII.4.3.** *Il gruppo topologico  $\mathbf{SO}(3)$  è omeomorfo allo spazio proiettivo  $\mathbb{RP}^3$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Il quoziente iniettivo della rappresentazione  $\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$  dà un omeomorfismo

$$\mathbf{SU}(2)/\{\pm I_2\} \rightarrow \mathbf{SO}(3).$$

Il quoziente  $\mathbf{SU}(2)/\{\pm I_2\}$  è omeomorfo al quoziente di  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$  rispetto alla mappa antipodale

$$S^3 \ni \xi \rightarrow -\xi \in S^3$$

e quindi allo spazio proiettivo  $\mathbb{RP}^3$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE XXVIII.4.4.** L'omomorfismo canonico  $\mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$  ha un importante significato fisico: il fattore  $1/2$  che compare nell'isomorfismo  $\mathfrak{su}(2)$  tra l'algebra di Lie delle matrici  $3 \times 3$  antisimmetriche e l'algebra di Lie  $\mathfrak{so}(3)$  delle matrici antihermitiane  $2 \times 2$  a traccia nulla si può interpretare come uno *spin*.

**XXVIII.4.1. Angoli di Eulero.** Per ricavare la surgettività dell'applicazione  $\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$  possiamo utilizzare la rappresentazione di  $\mathbf{SO}(3)$  mediante gli *angoli di Eulero*. Consideriamo gli omomorfismi

$$\tau, \sigma : S^1 \rightarrow \mathbf{SO}(3)$$

definiti da

$$\tau(e^{i\phi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \sigma(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(rotazioni intorno all'asse  $x$  e rotazioni intorno all'asse  $y$ ).

**LEMMA XXVIII.4.5.** *L'applicazione*

$$\alpha : S^1 \times S^1 \times S^1 \ni (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) \rightarrow \tau(e^{i\theta_1}) \circ \sigma(e^{i\theta_2}) \circ \tau(e^{i\theta_3}) \in \mathbf{SO}(3)$$

è surgettiva.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $e_1, e_2, e_3$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ . Un'applicazione  $a \in \mathbf{SO}(3)$  è completamente determinata dall'immagine dei vettori  $e_1, e_2$ . Poniamo  $\epsilon_j = a(e_j)$  per  $j = 1, 2$ . Poiché  $|\epsilon_1| = 1$ , abbiamo per opportuni  $\phi, \psi \in \mathbb{R}$ :

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \phi \sin \psi \\ \cos \phi \sin \psi \end{pmatrix}$$

(coordinate polari in  $\mathbb{R}^3$ ). Una base ortogonale di  $\epsilon_1^\perp$  è data dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \sin \phi \cos \psi \\ \cos \phi \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Quindi  $\epsilon_2 = v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta$  per un opportuno  $\theta \in \mathbb{R}$ . Chiaramente

$$a = \alpha(e^{-i\phi}, e^{i\psi}, e^{i\theta}).$$



□

OSSERVAZIONE XXVIII.4.6. In generale gli angoli di Eulero si riferiscono a una scelta di  $\phi, \psi, \theta$  con  $0 \leq \psi < \pi$  e  $0 \leq \phi, \theta < 2\pi$ .

Definiamo ora

$$\hat{\tau}, \hat{\sigma} : S^1 \rightarrow \mathbf{SU}(2)$$

mediante

$$\hat{\tau}(e^{i\phi}) = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Sia

$$\hat{\alpha} : S^1 \times S^1 \times S^1 \ni (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) \rightarrow \hat{\tau}(e^{i\theta_1}) \circ \hat{\sigma}(e^{i\theta_2}) \circ \hat{\tau}(e^{i\theta_3}) \in \mathbf{SU}(2).$$

Otteniamo allora il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 \times S^1 & \xrightarrow{=} & S^1 \times S^1 \times S^1 \\ \hat{\alpha} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \mathbf{SU}(2) & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{SO}(3). \end{array}$$

### XXVIII.5. Il gruppo unitario simplettico $\mathbf{Sp}(n)$

Abbiamo definito il gruppo  $\mathbf{Sp}(n)$  come il gruppo di tutte le matrici complesse unitarie  $a$  di ordine  $2n$  che soddisfano  ${}^t a J a = J$ , ove  $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$ .

Il gruppo  $\mathbf{Sp}(n)$  si può identificare al gruppo delle matrici  $n \times n$  a coefficienti quaternioni che preservano il prodotto scalare canonico di  $\mathbb{H}^n$ .

Ricordiamo che il corpo (non commutativo)  $\mathbb{H}$  dei quaternioni di Hamilton si può identificare all'anello associativo delle matrici  $2 \times 2$  a coefficienti complessi della forma  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$  con  $z, w \in \mathbb{C}$ . Un numero complesso  $z$  si rappresenta con la matrice  $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$ . Indichiamo con  $j$  la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Possiamo allora scrivere il quaternionone  $\mathbf{q}$  mediante:

$$\mathbf{q} = z + wj = z + j\bar{w}.$$

Il prodotto di due quaternioni si può esprimere mediante:

$$(z_1 + w_1 j) \cdot (z_2 + w_2 j) = (z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2) + (z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2) j \quad \forall z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}.$$

Questa formula si ricava immediatamente da:

$$jz = \bar{z}j \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad j^2 = -1.$$

Il coniugato di un quaternionone (corrispondente all'aggiunta della matrice con cui è definito) è dato da:

$$\overline{z + wj} = \bar{z} - wj.$$

Indichiamo con  $\sigma$  l'isomorfismo:

$$\sigma : \mathbb{C}^{2n} \ni (z^h, w^h)_{1 \leq h \leq n} \longrightarrow (z^h + j w^h)_{1 \leq h \leq n} \in \mathbb{H}^n$$

e con

$$\varsigma : \mathbb{C}^{2n} \ni (z^h, w^h) \rightarrow (\bar{z}^h, \bar{w}^h) \in \mathbb{C}^{2n}$$

il coniugio. Allora, indicando con  $(\cdot j)$  la moltiplicazione a destra di un vettore di  $\mathbb{H}^n$  per il quaternionione  $j$ , abbiamo:

$$\sigma^{-1} \circ (\cdot j) \circ \sigma = -J \circ \varsigma = \begin{pmatrix} & -I_n \\ I_n & \end{pmatrix} \circ \varsigma.$$

Consideriamo una matrice  $B = C + jD = (C_{hk} + jD_{hk})_{1 \leq h, k \leq n}$  con coefficienti  $C_{hk} + jD_{hk} \in \mathbb{H}$ ,  $C_{hk}, D_{hk} \in \mathbb{C}$ . Se  $u = v + jw \in \mathbb{H}^n$ , con  $v, w \in \mathbb{C}^n$ , abbiamo

$$Bu = (Cv - \bar{D}w) + j(Dv + \bar{C}w).$$

Ad essa risulta dunque associata una  $\tilde{B} \in \mathbb{C}^{(2n) \times (2n)}$  rappresentata dalla matrice:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} C & D \\ -\bar{D} & \bar{C} \end{pmatrix}.$$

Le matrici di questa forma sono tutte e sole le matrici  $2n \times 2n$  complesse  $A$  che soddisfano la:

$$(*) \quad AJ = J\bar{A}.$$

Esse formano una sottoalgebra di Lie reale di  $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C})$ , che si indica con  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{H})$ . Gli elementi invertibili di  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{H})$  formano il *gruppo lineare di ordine  $n$  sui quaternioni*, che indichiamo con  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$ .

Consideriamo ora un elemento  $g \in \mathbf{Sp}(n)$ . Esso è rappresentato da una matrice complessa unitaria  $(2n) \times (2n)$ , che verifica  ${}^t g J g = J$ . Poiché  ${}^t g = \bar{g}^{-1}$ , sostituendo otteniamo (\*).

Abbiamo perciò un'inclusione naturale:  $\mathbf{Sp}(n) \hookrightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$ .

Possiamo quindi caratterizzare  $\mathbf{Sp}(n)$  come il gruppo delle trasformazioni  $\mathbb{H}$ -lineari (a destra) su  $\mathbb{H}^n$ , che lasciano invariato il prodotto scalare sui quaternioni:

$$(**) \quad (u_1 | u_2)_{\mathbb{H}} = \sum_{h=1}^n u_1^h \bar{u}_2^h.$$

Se scriviamo le componenti  $u_l^h$  nella forma  $v_l^h + jw_l^h$  con  $v_l^h, w_l^h \in \mathbb{C}$  per  $l = 1, 2$ , troviamo per il prodotto scalare sui quaternioni l'espressione:

$$\begin{aligned} (u_1 | u_2)_{\mathbb{H}} &= \sum_{h=1}^n v_1^h \bar{v}_2^h + \bar{w}_1^h w_2^h + j \sum_{h=1}^n w_1^h \bar{v}_2^h - \bar{v}_1^h w_2^h \\ &= \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ w_1 \end{pmatrix}^* I_{2n} \begin{pmatrix} \bar{v}_2 \\ w_2 \end{pmatrix} + \left[ {}^t \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ w_1 \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \bar{v}_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \right] j, \end{aligned}$$

da cui segue che  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$  consiste esattamente delle matrici di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$  che preservano il prodotto (\*\*).

**TEOREMA XXVIII.5.1.** *Per ogni intero  $n \geq 1$  il gruppo  $\mathbf{Sp}(n)$  è compatto e connesso per archi. La sua algebra di Lie è*

$$\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}) \mid {}^t X J + J X = 0, X^* + X = 0\}.$$

*L'esponenziale definisce un'applicazione surgettiva*

$$\exp : \mathfrak{sp}(n) \rightarrow \mathbf{Sp}(n).$$



TEOREMA XXVIII.6.1.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(1) &\simeq \mathbf{SO}(2) \simeq S^1 \\ \mathbf{SU}(2) &\simeq \mathbf{Sp}(1) \simeq S^3 \\ \mathbf{O}(n)/\mathbf{O}(n-1) &\simeq \mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-1) \simeq S^{n-1} \quad (n > 1) \\ \mathbf{U}(n)/\mathbf{U}(n-1) &\simeq \mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-1) \simeq S^{2n-1} \quad (n > 1) \\ \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-1) &\simeq S^{4n-1} \quad (n > 1) \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Dim In ciascuno dei casi l'omeomorfismo cercato è il quoziente iniettivo dell'applicazione  $g \rightarrow g(e_n)$ .  $\square$

TEOREMA XXVIII.6.2. Per ogni  $n \geq 2$  il gruppo  $\mathbf{U}(n)$  è omeomorfo al prodotto topologico  $\mathbf{SU}(n) \times S^1$ .

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con  $D_n(\lambda)$  la matrice  $n \times n$ :

$$D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiamo allora l'omeomorfismo cercato mediante:

$$\mathbf{SU}(n) \times S^1 \ni (g, \lambda) \rightarrow D_n(\lambda) g \in \mathbf{U}(n);$$

il suo inverso è dato da:

$$\mathbf{U}(n) \ni g \rightarrow (D_n(1/\det g) g, \det g) \in \mathbf{SU}(n) \times S^1.$$

$\square$

Abbiamo le successioni esatte di omotopia dei fibrati:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \cdots & \rightarrow & \pi_2(S^n) & \longrightarrow & \\ & & & & & & \\ \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^n) & \longrightarrow \mathbf{1} \\ & & & & & & \\ & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_2(S^{2n+1}) & \longrightarrow \\ \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SU}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SU}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^{2n+1}) & \longrightarrow \mathbf{1} \\ & & & & & & \\ & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_2(S^{3n+1}) & \longrightarrow \\ \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{Sp}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{Sp}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^{3n+1}) & \longrightarrow \mathbf{1} \end{array}$$

da cui si deduce:

TEOREMA XXVIII.6.3. I gruppi  $\mathbf{SU}(n)$  e  $\mathbf{Sp}(n)$  sono semplicemente connessi per ogni  $n \geq 1$ . Per ogni  $n \geq 2$  il gruppo  $\mathbf{SO}(n)$  non è semplicemente connesso e  $\pi_1(\mathbf{SO}(2)) \simeq \mathbb{Z}$ ,  $\pi_1(\mathbf{SO}(n)) \simeq \mathbb{Z}_2$  per ogni  $n \geq 3$ .

**XXVIII.7. Rivestimenti e gruppo degli spinori**

**TEOREMA XXVIII.7.1.** *Se  $\mathbf{G}$  è un gruppo topologico connesso e localmente connesso per archi, allora il gruppo fondamentale  $\pi_1(\mathbf{G})$  è commutativo.*

Sia  $\hat{\mathbf{G}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}$  un rivestimento connesso di  $\mathbf{G}$ . Fissato un punto  $\hat{e} \in \pi^{-1}(e)$ , vi è un'unica struttura di gruppo topologico su  $\hat{\mathbf{G}}$  per cui  $\hat{e}$  sia l'identità di  $\hat{\mathbf{G}}$  e  $\pi$  sia un omomorfismo di gruppi topologici.

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbf{G}$  sono cammini continui con  $\alpha(0) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(1) = e$ , consideriamo l'applicazione continua:

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \ni (t, s) \rightarrow \alpha(t) \cdot \beta(s) \in \mathbf{G}.$$

Allora

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \begin{cases} F(2t, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(1, 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e

$$(\beta \cdot \alpha)(t) = \begin{cases} F(0, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(2t - 1, 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e possiamo definire un'omotetia tra  $\alpha \cdot \beta$  e  $\beta \cdot \alpha$  mediante:

$$G(s, t) = \begin{cases} F((1-s)2t, 2st) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F((1-s) + s(2t-1), s + (1-s)(2t-1)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ciò dimostra che  $\pi_1(\mathbf{G})$  è un gruppo abeliano.

Sia ora  $\pi : \hat{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$  un rivestimento connesso di  $\mathbf{G}$ . Osserviamo che  $\hat{\mathbf{G}}$  è connesso per archi.

Per ogni  $\hat{g} \in \hat{\mathbf{G}}$  indichiamo con  $\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{g})$  il gruppo fondamentale di  $\hat{\mathbf{G}}$  con punto base  $\hat{g}$ . Dimostriamo innanzitutto il seguente:

**LEMMA XXVIII.7.2.** *Sia  $g \in \mathbf{G}$  e sia  $\hat{g} \in \pi^{-1}(g)$ . Allora per ogni  $\xi \in \pi_*(\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{g}))$  risulta  $L_{g*}(\xi) \in \pi_*(\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{g}))$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\hat{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$  un laccetto con  $\hat{\alpha}(0) = \hat{\alpha}(1) = \hat{e}$  e poniamo  $\alpha = \pi \circ \hat{\alpha}$ . Dobbiamo dimostrare che il laccetto  $L_g \circ \alpha : [0, 1] \ni t \rightarrow L_g(\alpha(t)) \in \mathbf{G}$ , si rialza a un laccetto di punto iniziale  $\hat{g}$ .

Sia  $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$  un cammino continuo con estremi  $\hat{e}$  e  $\hat{g}$  e sia  $\gamma = \pi \circ \hat{\gamma}$ . Consideriamo l'applicazione continua:

$$[0, 1] \times [0, 1] \ni (t, s) \rightarrow G(t, s) = \gamma(s) \cdot \alpha(t) \in \mathbf{G}.$$

Essa si rialza ad un'applicazione continua  $\hat{G}(t, s)$  e  $t \rightarrow \hat{G}(t, 1)$  rialza  $L_g \circ \alpha$ . Per dimostrare che questo è un laccetto, consideriamo l'insieme  $A$  degli  $s \in [0, 1]$  tali che  $\hat{G}(0, s) = \hat{G}(1, s)$ . Esso contiene 0, è chiuso perché  $\hat{\mathbf{G}}$  è uno spazio di Hausdorff, ed è aperto perché  $\pi \circ \hat{G}(0, s) = \gamma(s) = \pi \circ \hat{G}(1, s)$  e  $\hat{\mathbf{G}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}$  è un rivestimento. Coincide quindi con  $[0, 1]$ : in particolare  $\hat{G}(0, 1) = \hat{G}(1, 1)$  e  $t \rightarrow \hat{G}(t, 1)$  è un laccetto.  $\square$

## CONCLUSIONE DELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 7.1

Siano  $\hat{g}_1$  e  $\hat{g}_2$  due elementi di  $\hat{\mathbf{G}}$  e siano  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$  cammini continui con  $\hat{\alpha}_i(0) = \hat{\beta}_i(0) = \hat{e}$ ,  $\hat{\alpha}_i(1) = \hat{\beta}_i(1) = \hat{g}_i$ , per  $i = 1, 2$ . Poniamo  $\alpha_i = \pi \circ \hat{\alpha}_i$ ,  $\beta_i = \pi \circ \hat{\beta}_i$  ( $i = 1, 2$ ). Consideriamo i cammini continui  $\alpha : [0, 1] \ni t \rightarrow \alpha_1(t)\alpha_2(t) \in \mathbf{G}$  e  $\beta : [0, 1] \ni t \rightarrow \beta_1(t)\beta_2(t) \in \mathbf{G}$  e siano  $\hat{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$  e  $\hat{\beta} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$  i loro rialzamenti con punto iniziale  $\hat{e}$ . Dimostriamo che  $\hat{\alpha}(1) = \hat{\beta}(1)$ . A questo scopo osserviamo che

$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha_1(t+st) \cdot \alpha_2(t-st) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_1(s+t-st) \cdot \alpha_2(t+st-s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è un'omotetia tra  $\alpha$  e

$$\alpha' = \alpha_1 \cdot (L_{g_1} \circ \alpha_2) = \begin{cases} \alpha_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1 \cdot \alpha_2(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Se indichiamo con  $\hat{\alpha}'$  il rilevamento di  $\alpha'$  con punto iniziale  $\hat{e}$ , avremo quindi  $\hat{\alpha}'(1) = \hat{\alpha}(1)$ . Analogamente, posto

$$\beta' = \beta_1 \cdot (L_{g_1} \circ \beta_2) = \begin{cases} \beta_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1 \cdot \beta_2(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

i rilevamenti  $\hat{\beta}$  e  $\hat{\beta}'$  di  $\beta$  e  $\beta'$  con punto iniziale  $\hat{e}$  hanno lo stesso punto finale in  $\hat{\mathbf{G}}$ .

Osserviamo ora che i punti finali di  $\hat{\alpha}$  e di  $\hat{\beta}$  sono i punti finali dei rialzamenti dei cammini  $L_{g_1} \circ \alpha_2$  e  $L_{g_1} \circ \beta_2$  con punto iniziale  $\hat{g}_1$ . Questi coincidono perché  $(L_{g_1} \circ \alpha_2) \cdot (L_{g_1} \circ \beta_2)^{-1} = L_{g_1} \circ (\alpha_2 \cdot \beta_2^{-1})$  è l'immagine mediante la traslazione a sinistra per  $g_1$  del laccetto  $\alpha_2 \cdot \beta_2^{-1}$ , che per ipotesi è immagine mediante  $\pi$  di un laccetto in  $\hat{\mathbf{G}}$  di punto iniziale  $\hat{e}$ . Per il Lemma XXVIII.7.2, esso è allora l'immagine di un laccetto di punto iniziale  $\hat{g}_1$  in  $\hat{\mathbf{G}}$ .

Possiamo quindi definire:

$$\hat{g}_1 \hat{g}_2 = \hat{\alpha}(1)$$

in quanto la definizione non dipende dalla scelta dei cammini  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  che congiungono  $\hat{e}$  ai punti  $\hat{g}_1, \hat{g}_2$  rispettivamente.

Si verifica poi senza difficoltà che con questa definizione di prodotto  $\hat{\mathbf{G}}$  è un gruppo topologico con unità  $\hat{e}$  e che  $\pi : \hat{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$  è un omomorfismo di gruppi.  $\square$

Il rivestimento universale di  $\mathbf{SO}(n)$ , per  $n \geq 3$ , è un gruppo topologico che si indica con  $\mathbf{Spin}(n)$  e si dice il *gruppo degli spinori di ordine  $n$* . Il rivestimento  $\mathbf{Spin}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SO}(n)$  è a due fogli ed è un omomorfismo di gruppi. Osserviamo che  $\mathbf{Spin}(3) \simeq \mathbf{SU}(2)$ .

## La lista di Cartan dei gruppi classici

Un *gruppo di Lie* è un gruppo topologico separato localmente isomorfo<sup>1</sup> ad un sottogruppo di Lie del gruppo lineare reale.

La sua *algebra di Lie*  $\mathfrak{g}$  si identifica all'algebra di Lie del corrispondente sottogruppo di Lie del gruppo lineare.

Ogni gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  con un numero finito di componenti connesse è diffeomorfo ad una varietà prodotto  $\mathbf{K} \times \mathbb{R}^k$ , ove  $\mathbf{K}$  è un sottogruppo di Lie compatto massimale di  $\mathbf{G}$ . In questo capitolo introduciamo i gruppi lineari classici della lista di Cartan e per ciascuno di essi descriviamo questa decomposizione.

Per una presentazione opportuna di  $\mathbf{G}$  come gruppo lineare, cioè come sottogruppo chiuso di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ , il sottogruppo compatto massimale  $\mathbf{K}$  sarà l'intersezione  $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$  di  $\mathbf{G}$  con il gruppo delle matrici unitarie.

### XXIX.1. Decomposizione di Cartan dei gruppi classici

Ricordiamo che, l'algebra di Lie di un sottogruppo di Lie  $\mathbf{G}$  di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  è

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in \mathbf{G}, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

DEFINIZIONE XXIX.1.1. Un sottogruppo  $\mathbf{G}$  del gruppo lineare  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  si dice *pseudoalgebrico* se può essere definito mediante un sistema di equazioni:

$$(*) \quad f_1(x, x^*) = 0, \dots, f_N(x, x^*) = 0$$

dove  $f_1, \dots, f_N$  sono polinomi a coefficienti reali delle parti reali e immaginarie dei coefficienti di  $x \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ .

I sottogruppi pseudoalgebrici sono ovviamente chiusi.

I gruppi classici della lista di Cartan che introdurremo nel paragrafo seguente sono tutti pseudoalgebrici e chiusi per aggiunta. Utilizzando il Teorema IX.9.5, potremo quindi rappresentarli come prodotti del loro sottogruppo compatto massimale  $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$  e di uno spazio euclideo. Ricordiamo l'enunciato:

TEOREMA XXIX.1.2. Sia  $\mathbf{G}$  un sottogruppo pseudoalgebrico di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ , con algebra di Lie  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . Se

$$(29.1.1) \quad x^* \in \mathbf{G}, \quad \forall x \in \mathbf{G},$$

<sup>1</sup> $\mathbf{G}$  è un gruppo di Lie se esiste un sottogruppo di Lie  $\mathbf{G}'$  di un gruppo lineare  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  e un omeomorfismo  $\phi : U \rightarrow U'$  di un intorno dell'identità di  $\mathbf{G}$  su un intorno dell'identità  $U'$  di  $\mathbf{G}'$  tale che, se  $g_1, g_2, g_1g_2 \in U$ , allora  $\phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$ .

allora l'applicazione

$$(29.1.2) \quad (\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)) \ni (u, X) \longrightarrow u \exp(X) \in \mathbf{G},$$

ove  $\mathfrak{p}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X^* = X\}$  è lo spazio vettoriale delle matrici Hermitiane, è un omeomorfismo.

Nello studiare i gruppi classici  $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  della lista di Cartan seguiremo quindi il procedimento seguente:

- (1) verificheremo che esso contenga l'aggiunto di ogni suo elemento;
- (2) calcoleremo l'insieme  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)$  delle matrici Hermitiane contenute nella sua algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ ;
- (3) studieremo il sottogruppo compatto  $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ .

Osserviamo ancora che l'algebra di Lie di  $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$  è  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n)$  e che l'applicazione esponenziale

$$\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$$

ha come immagine la componente connessa dell'identità in  $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ . Abbiamo infatti

**TEOREMA XXIX.1.3 (Cartan-Weyl-Hopf).** *Sia  $\mathbf{G}$  un sottogruppo compatto e connesso di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ , con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Allora*

$$\mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \exp(X) \in \mathbf{G}$$

è surgettiva.

Non diamo qui la dimostrazione di questo teorema <sup>2</sup>, la cui validità è stata verificata per ciascuno dei gruppi classici compatti e connessi:  $\mathbf{SO}(n)$ ,  $\mathbf{U}(n)$ ,  $\mathbf{SU}(n)$  e  $\mathbf{Sp}(n)$ .

Osserviamo infine che  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)$  è invariante per l'azione aggiunta degli elementi di  $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ .

## XXIX.2. Alcuni gruppi di matrici e le loro algebre di Lie

Nel capitolo precedente abbiamo esaminato i gruppi classici compatti della lista di Cartan. Completiamo ora la *lista di Cartan* dando l'elenco dei gruppi classici non compatti, con le loro algebre di Lie.

- (1)  $\mathbf{U}(p, q)$  è il gruppo delle matrici complesse  $a \in \mathbf{GL}_{p+q}(\mathbb{C})$  che soddisfano  $a^* K a = K$  per una matrice Hermitiana simmetrica  $K$  di segnatura  $(p, q)$ . Ad esempio, possiamo prendere  $K = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$ . La sua algebra di Lie è

$$\mathfrak{u}(p, q) = \{X \in \mathfrak{gl}_{p+q}(\mathbb{C}) \mid X^* K + K X = 0\}.$$

<sup>2</sup>Possiamo introdurre su  $\mathbf{G}$  una metrica Riemanniana invariante per le traslazioni a destra e a sinistra; allora le geodetiche per l'origine sono tutti e soli i sottogruppi a un parametro di  $\mathbf{G}$ . La tesi segue allora dal fatto che l'identità  $e$  di  $\mathbf{G}$  si può congiungere a un qualsiasi punto  $g \in \mathbf{G}$  mediante una geodetica  $\gamma : [0, 1] \ni t \rightarrow \exp(tX) \in \mathbf{G}$  di lunghezza minima per cui  $\gamma(0) = e$  e  $\gamma(1) = g$ .



- (2)  $\boxed{\mathbf{SU}(p, q)}$  è il gruppo delle matrici complesse  $a \in \mathbf{U}(p, q)$  con determinante 1:  $\mathbf{SU}(p, q) = \mathbf{U}(p, q) \cap \mathbf{SL}_{p+q}(\mathbb{C})$ . L'algebra di Lie corrispondente è

$$\mathfrak{su}(p, q) = \{X \in \mathfrak{u}(p, q) \mid \text{traccia}(X) = 0\} = \mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{sl}_{p+q}(\mathbb{C}).$$

- (3)  $\boxed{\mathbf{SU}^*(2n)}$  è il gruppo delle matrici <sup>3</sup>  $a \in \mathbf{SL}_{2n}(\mathbb{C})$  tali che

$$aJ = J\bar{a}$$

dove  $\bar{a}$  è la matrice i cui coefficienti sono i coniugati dei coefficienti di  $a$  e  $J$  è una matrice reale antisimmetrica di rango  $2n$ . Ad esempio possiamo fissare  $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$ . La sua algebra di Lie è:

$$\mathfrak{su}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C}) \mid XJ = J\bar{X}\}.$$

- (4)  $\boxed{\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})}$  è il gruppo delle matrici  $a$  di  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$  che lasciano invariata una matrice simmetrica non degenera  $Q$ :

$$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}) \mid a^\dagger Q a = Q\}.$$

La sua algebra di Lie è:

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid X^\dagger Q + QX = 0\}.$$

- (5)  $\boxed{\mathbf{SO}(p, q)}$  è il gruppo delle matrici reali  $a \in \mathbf{SL}_{p+q}(\mathbb{R})$  tali che  $a^\dagger K a = K$  per una matrice reale simmetrica  $K \in \mathbb{R}^{(p+q) \times (p+q)}$  di segnatura  $(p, q)$ . La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{o}(p, q) = \{X \in \mathfrak{sl}_{p+q}(\mathbb{R}) \mid X^\dagger K + KX = 0\}.$$

- (6)  $\boxed{\mathbf{SO}^*(2n)}$  è il gruppo delle matrici  $a \in \mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$  tali che  $a^* J a = J$ , ovvero  $a = -J\bar{a}J$ , ove  $J$  è la matrice  $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$ . Osserviamo che  $a \rightarrow -J\bar{a}J$  è un'involuzione in  $\mathbb{C}^{(2n) \times (2n)}$ . Quindi il gruppo lineare  $\mathbf{SO}^*(2n)$  è una *forma reale* di  $\mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$ . L'algebra di Lie corrispondente è:

$$\mathfrak{so}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) \mid X^* J + JX = 0\}.$$

- (7)  $\boxed{\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})}$  è il gruppo delle matrici  $a \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C})$  tali che  $a^\dagger J a = J$  per una matrice antisimmetrica  $J \in \mathfrak{M}(2n, \mathbb{C})$  di rango  $2n$ . La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C}) \mid X^\dagger J + JX = 0\}.$$

- (8)  $\boxed{\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})}$  è il gruppo delle matrici  $a \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{R})$  tali che  $a^\dagger J a = J$  per una matrice antisimmetrica  $J \in \mathbb{R}^{(2n) \times (2n)}$ , di rango  $2n$ . La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R}) \mid X^\dagger J + JX = 0\}.$$

<sup>3</sup>Questo gruppo si può indicare anche mediante  $\mathbf{SL}_n(\mathbb{H})$  e la corrispondente algebra di Lie mediante  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{H})$ .

(9)  $\boxed{\mathbf{Sp}(p, q)}$  è il gruppo delle matrici  $a \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$  (con  $p + q = n$ ) tali che  $a^* K a = K$  per una matrice Hermitiana  $K$  di segnatura  $(2p, 2q)$  che commuta con  $J$ . Se  $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$ , possiamo fissare ad esempio

$$K = \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & \\ & & I_p & \\ & & & -I_q \end{pmatrix}.$$

La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(p, q) = \{X \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \mid X^* K + K X = 0\}.$$

Osserviamo che  $\mathbf{Sp}(n) = \mathbf{Sp}(n, 0) = \mathbf{Sp}(0, n) = \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n)$ .

### XXIX.3. I gruppi $\mathbf{U}(p, q)$ e $\mathbf{SU}(p, q)$

Fissiamo  $K = I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$  e poniamo  $n = p + q$ .

LEMMA XXIX.3.1. Se  $g \in \mathbf{U}(p, q)$ , allora  $g^* \in \mathbf{U}(p, q)$ .

DIMOSTRAZIONE. Per la definizione del gruppo  $\mathbf{U}(p, q)$ , abbiamo

$$g^* I_{p,q} = I_{p,q} g^{-1}.$$

Da questa otteniamo, passando alle inverse:

$$g I_{p,q} = (g^*)^* I_{p,q} = I_{p,q} (g^*)^{-1}$$

e quindi  $g^* \in \mathbf{U}(p, q)$ . □

LEMMA XXIX.3.2.  $\mathbf{U}(p, q) \cap \mathbf{U}(n) \cong \mathbf{U}(p) \times \mathbf{U}(q)$ .

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo un elemento  $g \in \mathbf{U}(p, q) \cap \mathbf{U}(n)$  nella forma

$$g = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$$

con matrici  $a$  di tipo  $p \times p$ ,  $b$  di tipo  $q \times q$ ,  $c$  di tipo  $p \times q$ ,  $d$  di tipo  $q \times p$ . Poiché  $g \in \mathbf{U}(p, q)$ , abbiamo

$$a^* a - d^* d = I_p, \quad a^* c = d^* b, \quad b^* b - c^* c = I_q.$$

Essendo  $g \in \mathbf{U}(n)$ , abbiamo anche:

$$a^* a + d^* d = I_p, \quad a^* c + d^* b = 0, \quad b^* b + c^* c = I_q.$$

Da queste uguaglianze ricaviamo

$$c = 0, \quad d = 0$$

da cui segue la tesi. □

COROLLARIO XXIX.3.3.  $\mathbf{SU}(p, q) \cap \mathbf{U}(n)$  è omeomorfo al prodotto topologico  $\mathbf{SU}(p) \times \mathbf{SU}(q) \times S^1$ .

DIMOSTRAZIONE. Se  $\sigma \in \mathbb{C}$ , per ogni intero positivo  $h$  indichiamo con  $D_h(\sigma)$  la matrice diagonale  $h \times h$ :

$$D_h(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione

$$\mathbf{SU}(p) \times \mathbf{SU}(q) \times S^1 \ni (a, b, \sigma) \longrightarrow \begin{pmatrix} D_p(\sigma)a & 0 \\ 0 & D_q(\sigma^{-1})b \end{pmatrix} \in \mathbf{SU}(p, q) \cap \mathbf{U}(n)$$

è continua e bigettiva e dunque un omeomorfismo perché i due spazi sono compatti di Hausdorff.  $\square$

TEOREMA XXIX.3.4.  $\mathbf{SU}(p, q)$  è omeomorfo al prodotto topologico  $\mathbf{SU}(p) \times \mathbf{SU}(q) \times S^1 \times \mathbb{C}^{pq}$ .  $\mathbf{U}(p, q)$  è omeomorfo al prodotto topologico  $\mathbf{SU}(p, q) \times S^1$ . I due gruppi sono pertanto connessi per archi ma non compatti se  $pq \neq 0$ .

DIMOSTRAZIONE. Calcoliamo l'intersezione  $\mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n)$ . Scriviamo  $X \in \mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n)$  nella forma  $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{pmatrix}$  con  $X_{11} \in \mathfrak{p}(p)$ ,  $X_{22} \in \mathfrak{p}(q)$  e  $X_{12}$  matrice complessa di tipo  $p \times q$ . Allora:

$$\begin{aligned} 0 &= X^* I_{p,q} + I_{p,q} X \\ &= X I_{p,q} + I_{p,q} X \\ &= \begin{pmatrix} 2X_{11} & 0 \\ 0 & 2X_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n) = \mathfrak{su}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{12}^* & 0 \end{pmatrix} \mid X_{12} \in \mathfrak{M}(p \times q, \mathbb{C}) \right\}$$

La tesi è perciò conseguenza dei lemmi precedenti e del Teorema V.1.1.  $\square$

#### XXIX.4. I gruppi $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ e $\mathbf{SU}^*(2n)$

LEMMA XXIX.4.1. Se  $g \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ , allora  $g^* \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ .

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$${}^t g J g = J$$

e dunque

$$J g = g^{-1 \dagger} J$$

da cui, passando alle inverse:

$$g^{-1} J = J g^\dagger.$$

Passando ai coniugati, otteniamo:

$$\bar{g}^{-1} J = J g^*$$

da cui

$$g^{*\dagger} J g^* = J$$

e dunque  $g^* \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ .  $\square$

TEOREMA XXIX.4.2.  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$  è omeomorfo a  $\mathbf{Sp}(n) \times \mathbb{R}^{n(2n+1)}$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $g \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ . Possiamo decomporre  $g$  in modo unico nella forma:

$$g = ab \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n) \quad \text{e} \quad b \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{P}_+(2n).$$

La  $b$  si può rappresentare in modo unico come esponenziale di una matrice  $B \in (\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2n))$ . Scriviamo  $B$  nella forma

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & B_{22} \end{pmatrix}$$

con  $B_{hk}$  matrici complesse  $n \times n$ ,  $B_{11}$  e  $B_{22}$  Hermitiane. Da  $B^\dagger J + JB = 0$  otteniamo allora le uguaglianze:

$$\begin{aligned} B_{11} &= -B_{22}^\dagger \\ B_{12} &= B_{12}^\dagger. \end{aligned}$$

La matrice  $B$  è dunque della forma

$$(*) \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ \bar{B}_{12} & -\bar{B}_{11} \end{pmatrix}$$

con  $B_{11}$  Hermitiana e  $B_{12}$  simmetrica. Le matrici Hermitiane della forma (\*) formano uno spazio vettoriale reale  $L$  di dimensione  $n^2 + n(n+1) = n(2n+1)$  e dunque la tesi segue dall'omeomorfismo del Teorema V.1.1:

$$\mathbf{Sp}(n) \times L \ni (a, B) \longrightarrow a \exp(B) \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}).$$

□

TEOREMA XXIX.4.3. Il gruppo  $\mathbf{SU}^*(2n)$  è omeomorfo a  $\mathbf{Sp}(n) \times \mathbb{R}^{2n^2-n-1}$ .

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che  $g \in \mathbf{SU}^*(2n)$  se  $g \in \mathbf{SL}_{2n}(\mathbb{C})$  e

$$Jg = \bar{g}J.$$

Ne segue che, se  $g \in \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n)$  abbiamo

$${}^t g J g = J$$

e dunque  $g \in \mathbf{Sp}(n)$ .

Si verifica immediatamente che  $g^* \in \mathbf{SU}^*(2n)$  se  $g \in \mathbf{SU}^*(2n)$  e dunque possiamo ripetere il ragionamento fatto nella dimostrazione del teorema precedente, decomponendo  $g$  mediante

$$g = ab \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n) \quad \text{e} \quad b \in \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{P}(2n).$$

La  $b$  è l'esponenziale di una matrice Hermitiana  $B$  in  $\mathfrak{su}^*(2n)$ : questo è lo spazio vettoriale reale  $L$  di dimensione  $2n^2 - n - 1$  delle matrici della forma:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ -\bar{B}_{12} & \bar{B}_{11} \end{pmatrix}$$

con  $B_{11}$  matrice  $n \times n$  Hermitiana con traccia nulla e  $B_{12}$  matrice  $n \times n$  complessa antisimmetrica:  ${}^t B_{12} = -B_{12}$ . Per il Teorema V.1.1 otteniamo un omeomorfismo:

$$\mathbf{Sp}(n) \times L \ni (a, B) \longrightarrow a \exp(B) \in \mathbf{SU}^*(2n),$$

che dimostra la tesi. □

**XXIX.5. I gruppi  $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$  e  $\mathbf{SO}^*(2n)$** 

**TEOREMA XXIX.5.1.**  $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$  è omeomorfo a  $\mathbf{SO}(n) \times \mathbb{R}^{(n^2-n)/2}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo in primo luogo che l'aggiunta  $g^*$  di un elemento  $g$  di  $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$  è ancora un elemento del gruppo. Infatti le equazioni che definiscono il gruppo sono:

$$\det(g) = 1, \quad g^\dagger g = I.$$

Quindi, poiché anche  $gg^\dagger = I$ :

$$\det(g^*) = \overline{\det(g)} = 1 \quad \text{e} \quad {}^t g^* g^* = (g^\dagger g)^* = I.$$

Un elemento  $g$  di  $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n)$  soddisfa

$$g^\dagger = g^{-1} = g^*$$

e dunque è una matrice a coefficienti reali. Otteniamo perciò:

$$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n) = \mathbf{SO}(n).$$

Decomponiamo  $g \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$  in modo unico mediante

$$g = ab \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n) \quad \text{e} \quad b \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{P}(n).$$

Gli elementi di  $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{P}(n)$  sono tutti e soli gli esponenziali delle matrici dello spazio vettoriale reale  $L$  di dimensione  $(n^2 - n)/2$ :

$$L = \{B \mid B \text{ Hermitiana e } B^\dagger = -B\} = i \cdot \mathfrak{o}(n)$$

cioè delle matrici a coefficienti puramente immaginari antisimmetriche. La tesi segue dal Teorema V.1.1.  $\square$

**TEOREMA XXIX.5.2.**  $\mathbf{SO}^*(2n)$  è omeomorfo a  $\mathbf{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-n}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo in primo luogo che il gruppo  $\mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n)$  è isomorfo, come gruppo topologico, a  $\mathbf{U}(n)$ . Infatti, per un elemento  $g$  di tale gruppo, valgono le equazioni:

$$g^\dagger g = I, \quad g^* J g = J, \quad g^* g = I, \quad \det(g) = 1.$$

La prima e la terza di queste equazioni ci dicono che  $g$  è una matrice reale di  $\mathbf{SO}(2n)$ . La seconda ci dice allora che  $g$  commuta con  $J$  e dunque è  $\mathbb{C}$ -lineare per la struttura complessa su  $\mathbb{R}^{2n}$  definita da  $J$ . Si verifica facilmente che, se definiamo l'isomorfismo  $\mathbb{R}$ -lineare  $\sigma : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$  mediante

$$\sigma(e_k) = e_k \quad \text{per} \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{e} \quad \sigma(Je_k) = \sigma(e_{k+n}) = ie_k$$

l'applicazione

$$\mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n) \ni g \longrightarrow \sigma \circ g \circ \sigma^{-1} \in \mathbf{U}(n)$$

è un isomorfismo di gruppi topologici. Per concludere la dimostrazione, osserviamo che il gruppo  $\mathbf{SO}^*(2n)$  è chiuso rispetto all'aggiunzione e dunque, dalla decomposizione

$$g = ab \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n) \quad \text{e} \quad b \in \mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{P}(2n).$$

Troviamo allora che  $b = \exp(B)$  dove  $B \in \mathfrak{so}^*(2n) \cap \mathfrak{p}(2n)$  è univocamente determinata come un elemento dello spazio vettoriale reale  $L$  di dimensione  $n^2 - n$  delle matrici:

$$B = i \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & -X \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad X, Y \in \mathfrak{o}(n).$$

L'omeomorfismo cercato segue dal Teorema V.1.1. □

### XXIX.6. I gruppi $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$

TEOREMA XXIX.6.1. *Abbiamo l'omeomorfismo*

$$\mathbf{Sp}(p, q) \cong \mathbf{Sp}(p) \times \mathbf{Sp}(q) \times \mathbb{R}^{4pq}.$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che il gruppo  $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$  è caratterizzato dalle equazioni:

$$g^\dagger J g = J \quad \text{e} \quad g^* \begin{pmatrix} I_{p,q} & \\ & I_{p,q} \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} I_{p,q} & \\ & I_{p,q} \end{pmatrix}.$$

Come abbiamo visto in precedenza, possiamo considerare un elemento  $g$  dell'intersezione  $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n) \subset \mathbf{Sp}(n)$  come un elemento di  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{H})$ . Scriviamo  $\tilde{g}$  per la matrice a coefficienti quaternioni corrispondente a  $g$ . Troviamo allora: se  $g \in \mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$ , allora

$$\tilde{g}^* \tilde{g} = I$$

$$\tilde{g}^* I_{p,q} g = I_{p,q}.$$

Si ottiene quindi

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} g_1 & \\ & g_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad g_1 \in \mathbf{Sp}(p), \quad g_2 \in \mathbf{Sp}(q).$$

D'altra parte abbiamo al solito l'invarianza di  $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$  rispetto all'aggiunzione. Dal Teorema V.1.1 otteniamo un omeomorfismo

$$\mathbf{Sp}(p) \times \mathbf{Sp}(q) \times L \ni (g_1, g_2, B) \longrightarrow \begin{pmatrix} g_1 & \\ & g_2 \end{pmatrix} \exp(B) \in \mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$$

ove in questo caso  $L = \mathfrak{p}(p, q; \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2n)$  è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $4pq$  di matrici Hermitiane. Le matrici di  $L$  hanno la forma:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & 0 & B_{14} \\ B_{12}^* & 0 & {}^t B_{14} & 0 \\ 0 & \bar{B}_{14} & 0 & -\bar{B}_{12} \\ B_{14}^* & 0 & -{}^t B_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

con  $B_{12}$  e  $B_{14}$  matrici complesse di tipo  $p \times q$ . □

### XXIX.7. I gruppi $\mathbf{SO}(p, q)$

TEOREMA XXIX.7.1. *Siano  $p, q$  due interi positivi con  $p + q = n$ . Allora il gruppo  $\mathbf{SO}(p, q)$  è omeomorfo a  $\{-1, 1\} \times \mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Ragioniamo come nella dimostrazione dei teoremi precedenti. Ricaviamo in primo luogo che  $\mathbf{SO}(p, q) \cap \mathbf{U}(n)$  è formato dalle matrici:

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$$

con  $g_1 \in \mathbf{O}(p)$ ,  $g_2 \in \mathbf{O}(q)$  e  $\det(g_1) \cdot \det(g_2) = 1$ .

Quindi abbiamo l'omeomorfismo:

$$\mathbf{SO}(p, q) \cap \mathbf{U}(n) \cong \{-1, 1\} \times \mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(q).$$

D'altra parte  $\mathbf{SO}(p, q) \cap \mathbf{P}(n)$  è l'immagine iniettiva mediante l'applicazione esponenziale delle matrici

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ {}^t B_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

ove  $B_{12}$  è una matrice reale  $p \times q$ . Concludiamo utilizzando il Teorema V.1.1.  $\square$





## CAPITOLO XXX

### Algebre di Lie

Raccogliamo in questo capitolo alcune delle definizioni generali e delle proprietà più importanti delle algebre di Lie astratte.

#### XXX.1. Nozioni fondamentali

Sia  $\mathbb{k}$  un campo. Un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$  è uno spazio vettoriale  $\mathfrak{g}$  su  $\mathbb{k}$  su cui è assegnata un'operazione binaria (*commutatore*):

$$(30.1.1) \quad \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \longrightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$$

che gode delle seguenti proprietà:

$$(30.1.2) \quad \text{l'operazione } (X, Y) \rightarrow [X, Y] \text{ è } \mathbb{k}\text{-bilineare,}$$

$$(30.1.3) \quad [X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

$$(30.1.4) \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

(IDENTITÀ DI JACOBI).

OSSERVAZIONE XXX.1.1. Osserviamo che (30.1.3) implica che

$$(30.1.5) \quad [X, Y] = -[Y, X] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

e le due condizioni sono equivalenti se  $\mathbb{k}$  ha caratteristica  $\neq 2$ .

ESEMPIO XXX.1.2. Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{k}$ . Se poniamo  $[v, w] = 0$  per ogni  $v, w \in V$ , questo prodotto definisce su  $V$  una struttura di algebra di Lie.

In generale

DEFINIZIONE XXX.1.3. Chiamiamo algebra di Lie *abeliana* o *commutativa* un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  in cui il commutatore di due qualsiasi elementi sia nullo.

Dati due sottospazi vettoriali  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  di un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , indichiamo con  $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$  il sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{g}$  generato dai vettori della forma  $[X, Y]$  con  $X \in \mathfrak{A}$ ,  $Y \in \mathfrak{B}$ .

Per la (30.1.5), abbiamo  $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = [\mathfrak{B}, \mathfrak{A}]$ .

DEFINIZIONE XXX.1.4. Un sottoinsieme  $\mathfrak{a}$  di  $\mathfrak{g}$  si dice una *sottoalgebra di Lie* di  $\mathfrak{g}$  se è un sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{g}$  e  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$ ; un *ideale* di  $\mathfrak{g}$  se è una sottoalgebra ed inoltre  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$ .

Osserviamo che  $\{0\}$  e  $\mathfrak{g}$  sono ideali (banali) di  $\mathfrak{g}$ .

LEMMA XXX.1.5. Se  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  sono ideali di  $\mathfrak{g}$ , anche  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$  e  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$  sono ideali di  $\mathfrak{g}$ .

LEMMA XXX.1.6. Sono ideali di  $\mathfrak{g}$  sono il suo centro  $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  e il suo derivato  $\mathfrak{g}^{(1)}$ , definiti da

$$(30.1.6) \quad Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\},$$

$$(30.1.7) \quad \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

LEMMA XXX.1.7. Se  $\mathfrak{a}$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}$ , il suo normalizzatore in  $\mathfrak{g}$

$$(30.1.8) \quad N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] \in \mathfrak{a} \quad \forall Y \in \mathfrak{a}\}$$

è ancora una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}$ : essa contiene  $\mathfrak{a}$  ed è la più grande sottoalgebra di  $\mathfrak{g}$  che contiene  $\mathfrak{a}$  come ideale.

Analogamente il centralizzatore di  $\mathfrak{a}$  in  $\mathfrak{g}$

$$(30.1.9) \quad C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{a}\}$$

è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}$ .

DEFINIZIONE XXX.1.8. Siano  $\mathfrak{f}$ ,  $\mathfrak{g}$  due algebre di Lie sullo stesso campo  $\mathbb{k}$ . Un'applicazione  $\phi : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$  si dice un *morfismo di algebre di Lie* se è  $\mathbb{k}$ -lineare e soddisfa inoltre:

$$(30.1.10) \quad \phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{f}.$$

LEMMA XXX.1.9. Sia  $\phi : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$  un morfismo di algebre di Lie su  $\mathbb{k}$ . Allora  $\phi(\mathfrak{f})$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}$  e  $\ker \phi$  è un ideale di  $\mathfrak{f}$ .

LEMMA XXX.1.10. Se  $\mathfrak{a}$  è un ideale dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , allora vi è un'unica struttura di algebra di Lie sul quoziente  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  che renda la proiezione naturale  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  un morfismo di algebre di Lie.

DEFINIZIONE XXX.1.11. Con questa struttura  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  si dice l'*algebra di Lie quoziente* di  $\mathfrak{g}$  rispetto all'ideale  $\mathfrak{a}$ .

DEFINIZIONE XXX.1.12. Un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  si dice *semplice* se non è commutativa e non contiene ideali non banali.

### XXX.2. Algebre di Lie lineari, derivazioni, rappresentazione aggiunta

Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{k}$ . Lo spazio vettoriale  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  di tutti gli endomorfismi  $\mathbb{k}$ -lineari di  $V$  è un'algebra di Lie con il prodotto definito da

$$(30.2.1) \quad [A, B] = A \circ B - B \circ A \quad \forall A, B \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V).$$

Con la struttura di algebra di Lie, esso si indica con  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ . Se  $V = \mathbb{k}^n$ , scriviamo  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$  invece di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^n)$ . Ogni sottoalgebra di un'algebra di Lie  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  si dice un'algebra di Lie lineare.

Un teorema di Ado-Iwasawa dice che ogni algebra di Lie di dimensione finita è isomorfa a un'algebra di Lie lineare.

Esempi importanti di algebre di Lie lineari sono i seguenti, ove  $V = \mathbb{k}^n$ ,  $1 \leq n < \infty$ :

$$(A_{\ell}) \quad \mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{k}) = \{X \in \mathfrak{gl}(\ell + 1, \mathbb{k}) \mid \text{tr}(X) = 0\};$$

( $B_\ell$ )  $\mathfrak{so}(\ell, \ell + 1; \mathbb{k})$ : trasformazioni antisimmetriche rispetto a una forma bilineare simmetrica con indice di Witt  $\ell$  in uno spazio vettoriale di dimensione dispari  $n = 2\ell + 1$ ; qui dobbiamo supporre che  $\mathbb{k}$  abbia caratteristica  $\neq 2$ ;

( $C_\ell$ )  $\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{k})$ : trasformazioni simpletiche, cioè che soddisfano

$$a(X(v), w) + a(v, X(w)) = 0 \quad \forall v, w \in V$$

per una forma alternata non degenera  $a$  su uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione pari  $n = 2\ell$  su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica  $\neq 2$ ;

( $D_\ell$ )  $\mathfrak{so}(\ell, \ell; \mathbb{k})$ : trasformazioni antisimmetriche rispetto a una forma bilineare simmetrica con indice di Witt  $\ell$  in uno spazio vettoriale di dimensione pari  $n = 2\ell$ ; anche qui dobbiamo supporre che caratteristica( $\mathbb{k}$ )  $\neq 2$ ;

- l'algebra  $\mathfrak{t}_+(n, \mathbb{k})$  delle matrici triangolari superiori a coefficienti in  $\mathbb{k}$ ;
- l'algebra  $\mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k})$  delle matrici triangolari superiori a coefficienti in  $\mathbb{k}$  con diagonale principale nulla;
- l'algebra  $\mathfrak{t}_-(n, \mathbb{k})$  delle matrici triangolari inferiori a coefficienti in  $\mathbb{k}$ ;
- l'algebra  $\mathfrak{n}_-(n, \mathbb{k})$  delle matrici triangolari inferiori a coefficienti in  $\mathbb{k}$  con diagonale principale nulla;
- l'algebra  $\mathfrak{d}(n, \mathbb{k})$  delle matrici diagonali a coefficienti in  $\mathbb{k}$ .

Notiamo che

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_+(n, \mathbb{k}) &= \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{d}(n, \mathbb{k}), \\ \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k}) &= [\mathfrak{t}_+(n, \mathbb{k}), \mathfrak{t}_+(n, \mathbb{k})], \\ \mathfrak{t}_-(n, \mathbb{k}) &= \mathfrak{n}_-(n, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{d}(n, \mathbb{k}), \\ \mathfrak{n}_-(n, \mathbb{k}) &= [\mathfrak{t}_-(n, \mathbb{k}), \mathfrak{t}_-(n, \mathbb{k})]. \end{aligned}$$

Sia  $\mathfrak{A}$  un'algebra su  $\mathbb{k}$ , con prodotto  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (a, b) \rightarrow a \cdot b \in \mathfrak{A}$ .

DEFINIZIONE XXX.2.1. Una *derivazione* di  $\mathfrak{A}$  è un'applicazione  $\mathbb{k}$ -lineare  $D : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  che soddisfa l'*identità di Leibniz*:

$$(30.2.2) \quad D(a \cdot b) = (D(a)) \cdot b + a \cdot (D(b)) \quad \forall a, b \in \mathfrak{A}.$$

Indichiamo con  $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{A})$  l'insieme delle derivazioni di  $\mathfrak{A}$ .

Si verifica facilmente che

LEMMA XXX.2.2.  $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{A})$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{A})$  e quindi un'algebra di Lie lineare.

Consideriamo in particolare l'algebra di Lie delle derivazioni di una  $\mathbb{k}$ -algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ .

LEMMA XXX.2.3. Fissato  $X \in \mathfrak{g}$ , l'applicazione

$$(30.2.3) \quad \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X) : \mathfrak{g} \ni Y \rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$$

è  $\mathbb{k}$ -lineare ed è una derivazione.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo l'identità di Jacobi:

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)([Y, Z]) &= [X, [Y, Z]] = -[Y, [Z, X]] - [Z, [X, Y]] \\ &= [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \\ &= [\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(Y), Z] + [Y, \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(Z)] \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

□

DEFINIZIONE XXX.2.4. Le derivazioni della forma  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ , al variare di  $X$  in  $\mathfrak{g}$ , si dicono *derivazioni interne* di  $\mathfrak{g}$ .

LEMMA XXX.2.5. *L'applicazione*

$$(30.2.4) \quad \text{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X) \in \text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$$

è un morfismo di algebre di Lie. Le derivazioni interne formano un ideale dell'algebra di Lie  $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ .

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se  $D \in \text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$  e  $X \in \mathfrak{g}$  abbiamo, per ogni  $Y \in \mathfrak{g}$ :

$$\begin{aligned} [D, \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)](Y) &= D([X, Y]) - [X, D(Y)] \\ &= [D(X), Y] + [X, D(Y)] - [X, D(Y)] \\ &= \text{ad}_{\mathfrak{g}}(D(X))(Y). \end{aligned}$$

Quindi

$$(30.2.5) \quad [D, \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)] = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(D(X)) \quad \forall D \in \text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}), \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

dimostra che  $[\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}), \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})] \subset \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ . □

DEFINIZIONE XXX.2.6. La (30.2.4) si dice *rappresentazione aggiunta* di  $\mathfrak{g}$ .

LEMMA XXX.2.7. *Il nucleo della rappresentazione aggiunta è il centro  $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  di  $\mathfrak{g}$ .*

DEFINIZIONE XXX.2.8. Gli elementi di  $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$  che non appartengono ad  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  si dicono *derivazioni esterne* di  $\mathfrak{g}$ .

L'ideale delle derivazioni interne di  $\mathfrak{g}$  si indica anche con  $\text{int}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ .

Un ideale di  $\mathfrak{g}$  è un suo sottospazio vettoriale che è trasformato in sé da tutte le derivazioni interne.

DEFINIZIONE XXX.2.9. Un ideale  $\mathfrak{a}$  di  $\mathfrak{g}$  si dice *caratteristico* se è trasformato in sé da tutte le derivazioni di  $\mathfrak{g}$ .

LEMMA XXX.2.10. *Il centro  $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  e il derivato  $\mathfrak{g}^{(1)}$  sono ideali caratteristici di  $\mathfrak{g}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se  $D \in \text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ , abbiamo

$$\begin{aligned} [D(X), Y] &= D([X, Y]) - [X, D(Y)] = 0, \quad \forall X \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}), \quad \forall Y \in \mathfrak{g} \\ &\implies D(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})) \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}), \end{aligned}$$

$$D([X, Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)] \in \mathfrak{g}^{(1)}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

$$\implies D(\mathfrak{g}^{(1)}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}.$$

□

Osserviamo che, se  $\mathfrak{g}$  è semplice, allora il morfismo  $\text{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{int}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$  è un isomorfismo: quindi

PROPOSIZIONE XXX.2.11. *Ogni algebra di Lie semplice è isomorfa in modo naturale ad un'algebra di Lie lineare.*

ESEMPIO XXX.2.12. Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$ . Lo spazio  $\mathcal{E}(M; \mathbb{R})$  delle funzioni differenziabili di classe  $\mathcal{C}^{\infty}$ , a valori reali, definite su  $M$  è un'algebra reale per il prodotto di funzioni. L'algebra di Lie reale  $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}(M, \mathbb{R}))$  è l'algebra  $\mathfrak{X}(M)$  dei campi di vettori (di classe  $\mathcal{C}^{\infty}$ ) su  $M$ .

### XXX.3. Rappresentazioni lineari

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie sul campo  $\mathbb{k}$ .

DEFINIZIONE XXX.3.1. Una *rappresentazione lineare* di  $\mathfrak{g}$  è il dato di uno spazio vettoriale  $V$  sul campo  $\mathbb{k}$  e di un morfismo di algebre di Lie

$$(30.3.1) \quad \rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V).$$

In questo caso diciamo anche che  $V$ , con la struttura data dall'operazione:

$$(30.3.2) \quad \mathfrak{g} \times V \ni (X, v) \longrightarrow \rho(X)(v) \in V$$

è un  $\mathfrak{g}$ -modulo.

Quando ciò non provochi confusione, scriveremo anche  $X \cdot v$  oppure  $Xv$  invece di  $\rho(X)(v)$ .

La rappresentazione aggiunta, discussa nel paragrafo precedente, è un esempio di rappresentazione.

Un altro esempio di rappresentazione lineare è la *rappresentazione banale*: dato un qualsiasi spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{k}$  si fa corrispondere ad ogni  $X$  di  $\mathfrak{g}$  l'endomorfismo nullo di  $V$ .

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$  e (30.3.1) una sua rappresentazione lineare di dimensione finita.

DEFINIZIONE XXX.3.2. Diciamo che  $\rho$  (o il corrispondente  $\mathfrak{g}$ -modulo  $V$ ) è *riducibile* se esiste un sotto- $\mathfrak{g}$ -modulo proprio non banale  $W$  di  $V$ ; altrimenti la  $\rho$  si dice *irriducibile* o *semplice*.

Diciamo che  $\rho$  (o il corrispondente  $\mathfrak{g}$ -modulo  $V$ ) è *decomponibile* se  $V$  è somma diretta di due sotto- $\mathfrak{g}$ -moduli  $W_1, W_2$  non banali:  $V = W_1 \oplus W_2$  con  $W_1, W_2 \neq \{0\}$ . È *indecomponibile* se non è decomponibile.

Infine, diciamo che  $\rho$  (o il  $\mathfrak{g}$ -modulo  $V$ ) è *completamente riducibile* o *completamente decomponibile* o *semisemplice* se  $V$  è somma diretta di sotto- $\mathfrak{g}$ -moduli semplici.

Vale il:

**TEOREMA XXX.3.3 (Lemma di Schur).** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita  $n$  su  $\mathbb{k}$  e  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una sua rappresentazione lineare di dimensione finita irriducibile. Se  $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  è diversa da 0 e soddisfa:*

$$(30.3.3) \quad [A, \rho(X)] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

*allora è un endomorfismo semisemplice invertibile.*

*Se  $\mathbb{k}$  è algebricamente chiuso, allora  $A$  è un multiplo dell'identità.*

*In generale, il commutatore di  $\rho(\mathfrak{g})$  in  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$*

$$(30.3.4) \quad \mathbb{K}_{\rho} = \{A \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V) \mid [A, \rho(\mathfrak{g})] = 0\}$$

*è un corpo (non necessariamente commutativo) ed è un'estensione di dimensione finita di  $\mathbb{k}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $A \neq 0$ , lo spazio vettoriale  $V$  ha dimensione positiva. Sia  $p$  un fattore primo del polinomio minimo di  $A$  e poniamo

$$V_p = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \ker p(A)^h, \quad W = \ker p(A).$$

Allora  $W$  e  $V_p$  sono sottospazi  $\mathfrak{g}$ -invarianti di  $V$ , di dimensione positiva, con  $W \subset V_p$ . Per l'irriducibilità di  $\rho$ , deve essere  $W = V_p = V$  e questo dimostra che  $A$  è semisemplice e il suo spettro contiene un solo ideale primo di  $\mathbb{k}[x]$ .

Per la prima parte della dimostrazione ogni elemento diverso da 0 di  $\mathbb{K}_{\rho}$  è invertibile e quindi  $\mathbb{K}_{\rho}$  è un corpo.  $\square$

**OSSERVAZIONE XXX.3.4.** Se  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  è il campo dei numeri complessi e (30.3.1) una rappresentazione irriducibile di  $\mathfrak{g}$ , allora  $\mathbb{K}_{\mathfrak{g}} \simeq \mathbb{C}$ .

**OSSERVAZIONE XXX.3.5.** Se  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  è il campo dei numeri reali, il commutatore  $\mathbb{K}_{\rho}$  per una rappresentazione irriducibile  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$  di  $\mathfrak{g}$  può essere  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , oppure  $\mathbb{H}$ . Le rappresentazioni irriducibili di un'algebra di Lie reale si dividono quindi nei tipi *reale, complesso, quaternionico*.

Ad esempio, le rappresentazioni naturali di

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}(n) &\subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \\ \mathfrak{u}(n) &\subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}), \\ \mathfrak{sp}(n) &\subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(4n, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

sono rispettivamente di tipo reale, complesso e quaternionico.

Per distinguere i diversi casi, si considera la *complettizzazione*  $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$  di  $\mathfrak{g}$  e la corrispondente rappresentazione complessa  $\tilde{\rho} : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\tilde{V})$ , dove  $\tilde{V} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$  è la completizzazione dello spazio vettoriale reale  $V$ .

La  $\rho$  è reale se  $\tilde{\rho}$  è irriducibile.

Altrimenti la  $\tilde{\rho}$  si decompone nella somma diretta di due rappresentazioni complesse irriducibili: se esse sono isomorfe, allora la  $\rho$  è di tipo quaternionico; se esse non sono isomorfe, allora la  $\rho$  è di tipo complesso.

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita  $\mathbb{k}$  e  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una rappresentazione lineare di dimensione finita. Allora anche la

$$(30.3.5) \quad \rho^* : \mathfrak{g} \ni X \rightarrow -{}^t\rho(X) \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V^*),$$

ove  $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$  è il duale dello spazio vettoriale  $V$ , è una rappresentazione lineare di dimensione finita.

DEFINIZIONE XXX.3.6. La (30.3.5) si dice la rappresentazione *controgradiente*, o *duale*, di  $\rho$ .

A due rappresentazioni lineari di dimensione finita  $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ ,  $\rho_W : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}_{\mathbb{k}}(W)$  possiamo associare il loro *prodotto tensoriale*

$$(30.3.6) \quad \rho_V \otimes \rho_W : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}_{\mathbb{k}}(V \otimes_{\mathbb{k}} W),$$

definito da

$$\begin{aligned} \rho_V \otimes \rho_W(X)(v \otimes w) &= \rho_V(X)(v) \otimes w + v \otimes \rho_W(X)(w) \\ &\forall X \in \mathfrak{g}, \forall v \in V, \forall w \in W. \end{aligned}$$

Utilizzando la rappresentazione controgradiente e l'identificazione dello spazio  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$  con il prodotto tensoriale  $W \otimes V^*$ , si ottiene la rappresentazione

$$(30.3.7) \quad \rho_{\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}_{\mathbb{k}}(\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W))$$

definita da

$$(30.3.8) \quad \begin{aligned} \rho_{\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)}(X) &= \rho_W(X) \circ A - A \circ \rho_V(X) \\ &\forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall A \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W). \end{aligned}$$

In particolare la  $\rho_V$  induce una rappresentazione  $\rho_{\text{End}_{\mathbb{k}}(V)}$  su  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  definita da

$$(30.3.9) \quad \begin{aligned} \rho_{\text{End}_{\mathbb{k}}(V)}(X)(A) &= \rho_V(X) \circ A - A \circ \rho_V(X) \\ &\forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall A \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V). \end{aligned}$$

#### XXX.4. Forme invarianti

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$ .

DEFINIZIONE XXX.4.1. Una forma bilineare  $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$  si dice *invariante* se soddisfa

$$(30.4.1) \quad \beta([X, Y], Z) + \beta(Y, [X, Z]) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Una forma bilineare  $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$  si dice *completamente invariante* se soddisfa

$$(30.4.2) \quad \beta(D(X), Y) + \beta(X, D(Y)) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall D \in \text{Der}(\mathfrak{g}).$$

ESEMPIO XXX.4.2. L'applicazione

$$(30.4.3) \quad \beta(X, Y) = \text{traccia}(XY), \quad \forall X, Y \in \text{gl}(n, \mathbb{k})$$

è una forma bilineare simmetrica, invariante su  $\text{gl}(n, \mathbb{k})$ .

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \text{traccia}([X, Y]Z) &= \text{traccia}(XYZ) - \text{traccia}(YXZ) \\ &= \text{traccia}(YZX) - \text{traccia}(YXZ) = -\text{traccia}(Y[X, Z]). \end{aligned}$$

Dalla discussione dell'Esempio XXX.4.2 otteniamo subito:

PROPOSIZIONE XXX.4.3. Se  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  è una rappresentazione lineare di dimensione finita di  $\mathfrak{g}$ , allora

$$(30.4.4) \quad \kappa_V(X, Y) = \text{traccia}(\rho(X)\rho(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

è una forma bilineare invariante su  $\mathfrak{g}$ . □

DEFINIZIONE XXX.4.4. Se  $\mathfrak{g}$  ha dimensione finita, la forma invariante

$$(30.4.5) \quad \kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{traccia}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

si dice la *forma di Killing* di  $\mathfrak{g}$ .

LEMMA XXX.4.5. Supponiamo che  $\mathfrak{g}$  abbia dimensione finita. Se  $\alpha$  è un ideale di  $\mathfrak{g}$ , allora la forma di Killing  $\kappa_{\alpha}$  di  $\alpha$  è la restrizione ad  $\alpha$  della forma di Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  di  $\mathfrak{g}$ .

DIMOSTRAZIONE. Se infatti scegliamo una base  $E_1, \dots, E_n$  di  $\mathfrak{g}$  per cui  $E_1, \dots, E_m$  sia una base di  $\alpha$ , le trasformazioni  $\text{ad}(X)$ , con  $X \in \alpha$ , hanno matrici associate

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con  $A$  matrice  $m \times m$ , e matrici nulle  $0$  di tipi  $m \times (n - m)$ ,  $(n - m) \times m$  ed  $(n - m) \times (n - m)$ . Poiché la  $A$  è la matrice di  $\text{ad}_{\alpha}(X)$  nella base  $E_1, \dots, E_m$ , la tesi segue facilmente. □

PROPOSIZIONE XXX.4.6. Supponiamo che  $\mathfrak{g}$  abbia dimensione finita. La sua forma di Killing è completamente invariante.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo  $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \text{Der}(\mathfrak{g})$ . Possiamo definire su  $\tilde{\mathfrak{g}}$  una struttura di algebra di Lie con il prodotto definito dalle:

$$\begin{cases} \llbracket X, Y \rrbracket = [X, Y] & \text{se } X, Y \in \mathfrak{g}, \\ \llbracket D, X \rrbracket = D(X) & \text{se } X \in \mathfrak{g}, D \in \text{Der}(\mathfrak{g}), \\ \llbracket D_1, D_2 \rrbracket = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 & \text{se } D_1, D_2 \in \text{Der}(\mathfrak{g}). \end{cases}$$

Poiché  $\mathfrak{g}$  è allora un ideale di  $\tilde{\mathfrak{g}}$ , la tesi segue dalla Proposizione XXX.4.3 e dal Lemma XXX.4.5. □

### XXX.5. Automorfismi

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{k}$ .

DEFINIZIONE XXX.5.1. Un automorfismo  $\alpha$  di  $\mathfrak{g}$  è un isomorfismo dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  con se stessa. Con il prodotto di composizione, gli automorfismi dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  formano un gruppo, che indicheremo con  $\text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ .

DEFINIZIONE XXX.5.2. Un elemento  $X$  dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  si dice *ad-nilpotente* se  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$  è nilpotente.



Se il campo  $\mathbb{k}$  ha caratteristica 0, ed  $X \in \mathfrak{g}$  è ad-nilpotente possiamo definire l'*esponenziale* di  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$  mediante:

$$(30.5.1) \quad \exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X))^h}{h!}.$$

Poiché abbiamo supposto  $X$  ad-nilpotente, la somma a secondo membro della (30.5.1) contiene solo un numero finito di termini non nulli. Essa definisce quindi un'applicazione  $\mathbb{k}$ -lineare su  $\mathfrak{g}$ , che è un automorfismo di  $\mathfrak{g}$ .

Più in generale vale il:

LEMMA XXX.5.3. *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie sul campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica 0 e  $D$  una derivazione nilpotente di  $\mathfrak{g}$ . Allora*

$$(30.5.2) \quad \exp(D) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{D^h}{h!}$$

è un automorfismo di  $\mathfrak{g}$ .

DIMOSTRAZIONE. Vale la formula di Leibnitz:

$$D^n([X, Y]) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} [D^m(X), D^{n-m}(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \exp(D)([X, Y]) &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{D^h([X, Y])}{h!} \\ &= \sum_{h', h''=0}^{\infty} \frac{1}{h'! h''!} [D^{h'}(X), D^{h''}(Y)] \\ &= [\exp(D)(X), \exp(D)(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

ove tutte le sommatorie hanno significato perché contengono soltanto un numero finito di termini non nulli.

Infine  $\exp(D)$  è invertibile ed  $\exp(D)^{-1} = \exp(-D)$  mostra che anche l'inversa è un morfismo dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  in sé.  $\square$

DEFINIZIONE XXX.5.4. Gli automorfismi che sono composizione di un numero finito di automorfismi della forma  $\exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X))$ , con  $X$  elemento ad-nilpotente di  $\mathfrak{g}$ , si dicono *elementari*.

Indicheremo con  $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$  il gruppo degli automorfismi elementari di  $\mathfrak{g}$ .

LEMMA XXX.5.5. *Il gruppo  $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$  degli automorfismi elementari di  $\mathfrak{g}$  è un sottogruppo normale di  $\text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ .*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se  $X \in \mathfrak{g}$  è un elemento ad-nilpotente ed  $\alpha \in \text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ , allora  $\alpha(X)$  è ancora un elemento ad-nilpotente di  $\mathfrak{g}$  e

$$\alpha \circ \exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)) \circ \alpha^{-1} = \exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\alpha(X))).$$

$\square$

### XXX.6. Algebre di Lie risolubili

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ .

DEFINIZIONE XXX.6.1. La sequenza decrescente di ideali

$$(30.6.1) \quad \mathfrak{g} = D^0\mathfrak{g} \supset D^1\mathfrak{g} \supset \cdots \supset D^h\mathfrak{g} \supset D^{h+1}\mathfrak{g} \supset \cdots$$

definita da

$$(30.6.2) \quad \begin{cases} D^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \\ D^{m+1}\mathfrak{g} = [D^m\mathfrak{g}, D^m\mathfrak{g}] \end{cases} \quad \forall m \geq 0.$$

si dice *serie derivata* di  $\mathfrak{g}$ .

DEFINIZIONE XXX.6.2. Diciamo che  $\mathfrak{g}$  è *risolubile* se  $D^n\mathfrak{g} = \{0\}$  per qualche intero non negativo  $n$ .

Ad esempio, l'algebra  $t(n, \mathbb{k})$  delle matrici triangolari superiori con coefficienti nel campo  $\mathbb{k}$  è un'algebra di Lie risolubile.

TEOREMA XXX.6.3. Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ .

- (1) Se  $\mathfrak{g}$  è risolubile, allora ogni sottoalgebra  $\mathfrak{a}$  di  $\mathfrak{g}$  è risolubile ed ogni immagine di  $\mathfrak{g}$  mediante un morfismo di algebre di Lie è un'algebra di Lie risolubile.
- (2) Se  $\mathfrak{a}$  è un ideale risolubile di  $\mathfrak{g}$  e l'algebra quoziente  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  è risolubile, allora  $\mathfrak{g}$  è risolubile.
- (3) Se  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  sono ideali risolubili di  $\mathfrak{g}$ , allora  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$  è un ideale risolubile di  $\mathfrak{g}$ .

DEFINIZIONE XXX.6.4. In particolare, ogni algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di dimensione finita contiene un ideale risolubile massimale rispetto all'inclusione. Esso si dice il *radicale* di  $\mathfrak{g}$  e si indica con  $\text{rad}(\mathfrak{g})$ .

### XXX.7. Algebre di Lie semisemplici

DEFINIZIONE XXX.7.1. Un'algebra di Lie di dimensione finita  $\mathfrak{g}$  per cui sia  $\text{rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$  si dice *semisemplice*.

Osserviamo che l'algebra quoziente  $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$  è semisemplice.

Vale il fondamentale risultato:

TEOREMA XXX.7.2 (Decomposizione di Levi-Malcev). Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita. Allora  $\mathfrak{g}$  contiene una sottoalgebra semisemplice  $\mathfrak{l}$  tale che

$$(30.7.1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \text{rad}(\mathfrak{g})$$

DEFINIZIONE XXX.7.3. Una sottoalgebra semisemplice  $\mathfrak{l}$  di  $\mathfrak{g}$  per cui valga la (30.7.1) si dice una *sottoalgebra di Levi* di  $\mathfrak{g}$ .

### XXX.8. Algebre di Lie nilpotenti

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo  $\mathbb{k}$ . Si dice *serie centrale discendente* di  $\mathfrak{g}$  la sequenza di ideali di  $\mathfrak{g}$

$$(30.8.1) \quad \mathfrak{g} = C^0\mathfrak{g} \supset C^1\mathfrak{g} \supset \cdots \supset C^h\mathfrak{g} \supset C^{h+1}\mathfrak{g} \supset \cdots$$

definiti per ricorrenza da:

$$(30.8.2) \quad \begin{cases} C^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \\ C^{h+1}\mathfrak{g} = [C^h\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \end{cases} \quad \text{per } h \geq 0.$$

Diciamo che  $\mathfrak{g}$  è *nilpotente* se  $C^n\mathfrak{g} = \{0\}$  per qualche intero non negativo  $n$ . Poiché  $D^m\mathfrak{g} \subset C^m\mathfrak{g}$  per ogni  $m \in \mathbb{N}$ , un'algebra di Lie nilpotente è anche risolubile.

L'algebra di Lie lineare  $\mathfrak{n}(n, \mathbb{k})$  è un esempio di algebra di Lie nilpotente.

**TEOREMA XXX.8.1.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ .*

- (1) *Se  $\mathfrak{g}$  è nilpotente, allora ogni sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}$  ed ogni immagine di  $\mathfrak{g}$  mediante un morfismo di algebre di Lie è nilpotente.*
- (2)  *$\mathfrak{g}$  è nilpotente se e soltanto se  $\mathfrak{g}/Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  è nilpotente.*
- (3) *Se  $\mathfrak{g} \neq \{0\}$  ed è nilpotente, allora  $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** La (1) e la (2) sono immediate. Per la (3) osserviamo che se  $\mathfrak{g}$  è nilpotente ed  $h$  è il più grande intero non negativo per cui  $C^h\mathfrak{g} \neq \{0\}$ , allora  $C^h\mathfrak{g} \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ .  $\square$

### XXX.9. Il teorema di Engel

**LEMMA XXX.9.1.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ . Se  $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  è nilpotente, allora anche  $\text{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)}(A)$  è nilpotente.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $L_A$  e  $R_A$  gli endomorfismi di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  definiti rispettivamente da:

$$\begin{cases} L_A(X) = A \circ X & \forall X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V) \\ R_A(X) = X \circ A & \forall X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V). \end{cases}$$

Chiaramente  $L_A$  ed  $R_A$  sono nilpotenti e commutano tra loro. Quindi anche

$$\text{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)}(A) = L_A - R_A$$

è nilpotente.  $\square$

**TEOREMA XXX.9.2.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n \geq 1$  su  $\mathbb{k}$ . Sia  $\mathfrak{a}$  una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  formata da elementi nilpotenti. Allora esiste un vettore  $v \in V \setminus \{0\}$  tale che  $A(v) = 0$  per ogni  $A \in \mathfrak{a}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Ragioniamo per induzione su  $m = \dim_{\mathbb{k}}(\mathfrak{a})$ . Se  $m \leq 1$ , la tesi è banalmente vera. Supponiamo quindi  $m > 1$  e il teorema valido per algebre di Lie di dimensione  $< m$  di endomorfismi nilpotenti di uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Sia  $\mathfrak{b}$ , con  $\{0\} \subsetneq \mathfrak{b} \subsetneq \mathfrak{a}$ , una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{a}$ . Per il Lemma XXX.9.1,  $\text{ad}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b})$  è un'algebra di Lie di endomorfismi nilpotenti di  $\mathfrak{a}$ . Per passaggio al quoziente, gli elementi di  $\mathfrak{b}$  definiscono un'algebra di Lie di endomorfismi nilpotenti di

$\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ . Per l'ipotesi induttiva esiste allora  $A \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b}$  tale che  $[\mathfrak{b}, A] \subset \mathfrak{b}$ . In particolare  $N_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) \supseteq \mathfrak{b}$ .

Scegliamo ora la sottoalgebra  $\mathfrak{b}$  massimale tra le sottoalgebre di Lie propriamente contenute in  $\mathfrak{a}$ . Per le considerazioni precedenti deve essere  $N_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$  e quindi  $\mathfrak{b}$  è un ideale di  $\mathfrak{a}$ . Consideriamo il morfismo di algebre di Lie  $\pi : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ . Se  $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$  avesse dimensione maggiore di 1, l'immagine inversa  $\pi^{-1}(l)$  di una retta  $l$  di  $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$  sarebbe una sottoalgebra di  $\mathfrak{a}$  con  $\mathfrak{b} \subsetneq \pi^{-1}l \subsetneq \mathfrak{a}$ . Questo è assurdo per la massimalità di  $\mathfrak{b}$  e quindi  $\dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{a}/\mathfrak{b} = 1$ .

Dunque, se  $A \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b}$ , abbiamo

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathbb{k}A.$$

Sia  $W = \{v \in V \mid B(v) = 0, \forall B \in \mathfrak{b}\}$ . Per l'ipotesi induttiva  $\dim_{\mathbb{k}} W > 0$ . Inoltre, poiché  $\mathfrak{b}$  è un ideale di  $\mathfrak{a}$ , abbiamo  $A(W) \subset W$ . Infatti  $B(A(w)) = A(B(w)) + [B, A](w) = 0$  per ogni  $w \in W$  e  $B \in \mathfrak{b}$ . La restrizione di  $A$  a  $W$  è ancora nilpotente e quindi esiste  $v \in W \setminus \{0\}$  tale che  $A(v) = 0$ . Questo implica che  $X(v) = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{a}$ . La dimostrazione è completa.  $\square$

Dal Teorema XXX.9.2 si ottiene il

**TEOREMA XXX.9.3 (Engel).** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su  $\mathbb{k}$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\mathfrak{g}$  sia nilpotente è che tutti i suoi elementi siano ad-nilpotenti.*

**DIMOSTRAZIONE.** La necessità è ovvia. Per dimostrare la sufficienza ragioniamo per ricorrenza su  $m = \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$ . Se  $m \leq 1$  non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo  $m > 1$ . Per il teorema precedente esiste  $X \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$  tale che  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)(X) = 0$  per ogni  $Y \in \mathfrak{g}$ . In particolare  $X \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ . Osserviamo a questo punto che  $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}/Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  ha dimensione  $< m$  ed ogni elemento di  $\mathfrak{a}$  è ad-nilpotente. Per l'ipotesi induttiva  $\mathfrak{a}$  è nilpotente e questo implica che  $\mathfrak{g}$  è nilpotente.  $\square$

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  su  $\mathbb{k}$ . Una *bandiera completa* in  $V$  è una successione di sottospazi vettoriali di  $V$ :

$$(30.9.1) \quad \begin{cases} V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n \\ \text{con } \dim_{\mathbb{k}} V_i = i \text{ per } 0 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Vale il seguente:

**TEOREMA XXX.9.4.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{k}$  e sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di endomorfismi nilpotenti di  $V$ . Allora esiste una bandiera completa  $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$  tale che  $X(V_i) \subset V_{i-1}$  per ogni  $1 \leq i \leq n$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\dim_{\mathbb{k}} V = 0$  non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi  $\dim_{\mathbb{k}}(V) = n > 0$  e il teorema vero per algebre di Lie nilpotenti di endomorfismi di uno spazio vettoriale di dimensione  $< n$  su  $\mathbb{k}$ . Per il Teorema XXX.9.2, esiste  $v_1 \in V \setminus \{0\}$  tale che  $X(v_1) = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ . Sia  $V_1 = \mathbb{k} \cdot v_1$  e consideriamo la rappresentazione  $\rho$  di  $\mathfrak{g}$  su  $W = V/V_1$  ottenuta per passaggio al quoziente. Sia  $\pi : V \rightarrow W$  la proiezione nel quoziente. Poiché  $\rho(\mathfrak{g})$  consiste di endomorfismi nilpotenti di  $W$ , esiste per l'ipotesi induttiva una bandiera completa  $\{W_i\}_{0 \leq i \leq n-1}$  di

$W$  tale che  $\rho(X)(W_i) \subset W_{i-1}$ . Otteniamo allora la bandiera completa  $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$  desiderata aggiungendo a  $\{0\} = V_0$  e a  $V_1 = \mathbb{k} \cdot v_1$  i sottospazi  $V_i = \pi^{-1}(W_{i-1})$  per  $2 \leq i \leq n$ .  $\square$

Applicando questo risultato alla rappresentazione aggiunta otteniamo:

**TEOREMA XXX.9.5.** *Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie nilpotente, allora esiste una successione di ideali di  $\mathfrak{g}$ :*

$$\alpha_0 = \{0\} \subset \alpha_1 \subset \cdots \subset \alpha_{m-1} \subset \alpha_m = \mathfrak{g}$$

*tale che, per ogni  $1 \leq h \leq m$ , l'algebra di Lie  $\alpha_h/\alpha_{h-1}$  sia abeliana e di dimensione uno.*

**TEOREMA XXX.9.6.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  e sia  $\mathfrak{g}$  una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  formata da endomorfismi nilpotenti. Allora  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie nilpotente.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia infatti  $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$  una bandiera completa tale che  $X(V_i) \subset V_{i-1}$  per  $1 \leq i \leq n$ , per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ . Scegliamo una base  $e_1, \dots, e_n$  di  $V$  tale che  $e_i \in V_i \setminus V_{i-1}$ . In tale base ogni elemento di  $\mathfrak{g}$  si rappresenta con una matrice di  $n(n, \mathbb{k})$ . Da questa osservazione segue la tesi.  $\square$

**LEMMA XXX.9.7.** *Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie nilpotente di dimensione finita ed  $\alpha$  un ideale di  $\mathfrak{g}$ , allora  $\alpha \cap Z_{\mathfrak{g}}\mathfrak{g} \neq \{0\}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Facciamo operare  $\mathfrak{g}$  su  $\alpha$  mediante la rappresentazione aggiunta. Tutti gli  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)|_{\alpha}$ , per  $X \in \mathfrak{g}$ , sono nilpotenti e quindi esiste  $A \in \alpha$  tale che  $[\mathfrak{g}, A] = \{0\}$ . È quindi  $A \in \alpha \cap Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ .  $\square$

### XXX.10. Il Teorema di Lie

**TEOREMA XXX.10.1.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n > 0$  su un campo  $\mathbb{k}$ , di caratteristica 0 e algebricamente chiuso. Sia  $\mathfrak{g}$  una sottoalgebra di Lie risolubile di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ . Esiste allora un vettore  $v \in V \setminus \{0\}$  tale che*

$$(30.10.1) \quad \forall A \in \mathfrak{g} \quad \exists \lambda(A) \in \mathbb{k} \quad \text{tale che} \quad A(v) = \lambda(A)v.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Ragioniamo per induzione su  $m = \dim_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ . La tesi è banale se  $m \leq 1$ . Supponiamo quindi  $m > 1$  ed il teorema vero per algebre risolubili, di dimensione minore di  $m$ , di endomorfismi lineari di uno spazio di dimensione finita positiva sul campo  $\mathbb{k}$ .

Osserviamo che  $\mathfrak{g}$  contiene un ideale  $\alpha$  di codimensione 1: a questo scopo basta scegliere  $\alpha$  uguale a un qualsiasi iperpiano di  $\mathfrak{g}$  contenente  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . Per l'ipotesi induttiva, esiste una forma lineare  $\lambda : \alpha \rightarrow \mathbb{k}$  tale che il sottospazio

$$W = \{v \in V \mid \forall A \in \alpha, \exists \lambda_v(A) \in \mathbb{k} \text{ tale che } A(v) = \lambda_v(A)v\}$$

abbia dimensione positiva.

Dimostriamo ora che  $X(W) \subset W$  per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ . Siano  $w \in W$  ed  $X \in \mathfrak{g}$ . Se  $Y \in \alpha$  abbiamo:

$$Y(X(w)) = X(Y(w)) + [Y, X](w) = \lambda_w(Y)(X(w)) + \lambda_w([Y, X])(w).$$

Basterà quindi dimostrare che  $\lambda_w([X, Y]) = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{g}$  ed  $Y \in \mathfrak{a}$ . Fissiamo  $X \in \mathfrak{g}$  e  $w \in W$ . Sia  $k$  il più grande intero non negativo tale che

$$(30.10.2) \quad w, X(w), \dots, X^k(w)$$

siano linearmente indipendenti. Indichiamo con  $W_i$  il sottospazio vettoriale di dimensione  $i$  generato da  $w, X(w), \dots, X^{i-1}(w)$ , per  $1 \leq i \leq k+1$  e poniamo  $W_0 = \{0\}$ . Ogni  $Y \in \mathfrak{a}$  lascia i sottospazi  $W_i$  invarianti e quindi la sua restrizione a  $W_{k+1}$  si scrive come una matrice triangolare superiore nella base (30.10.2). Verifichiamo, per ricorrenza su  $i = 0, \dots, k$  che

$$(30.10.3) \quad w_{i,Y} = Y(X^i(w)) - \lambda_w(Y)X^i(w) \in W_i \quad \forall Y \in \mathfrak{a},$$

per  $i = 0, \dots, k$ .

Per  $i = 0$  questo è conseguenza della definizione di  $W$ . Supponiamo ora che la (30.10.3) valga per  $i = h$ , con  $0 \leq h < k$  e dimostriamo che vale per  $i = h+1$ . Abbiamo:

$$\begin{aligned} Y(X^{h+1}(w)) &= Y(X(X^h(w))) \\ &= XY(X^h(w)) - [X, Y](X^h(w)) \\ &= X(\lambda_w(Y)X^h(w) + w_{h,Y}) - \lambda_w([X, Y])X^h(w) - w_{h,[X,Y]} \\ &= \lambda_w(Y)X^{h+1}(w) + X(w_{h,Y}) - \lambda_w([X, Y])X^h(w) - w_{h,[X,Y]} \\ &= \lambda_w(Y)X^{h+1}(w) + w_{h+1,Y} \end{aligned}$$

e  $w_{h+1,Y} \in W_{h+1}$  perché  $X(w_{h,Y}) \in X(W_h) \subset W_{h+1}$ ,  $X^h(w) \in W_{h+1}$  e  $w_{h,[X,Y]} \in W_h \subset W_{h+1}$ . In particolare, per ogni  $Y$  possiamo considerare la traccia  $\text{tr}_{W_{k+1}}(Y)$  della restrizione di  $Y$  a  $W_{k+1}$  e

$$\text{tr}_{W_{k+1}}(Y) = (k+1)\lambda_w(Y).$$

Ora, anche  $X$  opera su  $W_{k+1}$  e la traccia della restrizione a  $W_{k+1}$  del commutatore  $[X, Y]$  è nulla. Da

$$0 = \text{tr}_{W_{k+1}}([X, Y]) = (k+1)\lambda_w([X, Y])$$

segue che  $\lambda_w([X, Y]) = 0$  perché  $\mathbb{k}$  ha caratteristica zero.

Quindi  $W$  è  $\mathfrak{g}$ -invariante. Se  $A \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{a}$ , abbiamo  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathbb{k}A$ . Osserviamo che, essendo  $\mathbb{k}$  algebricamente chiuso,  $W \ni w \rightarrow A(w) \in W$  ha un autovettore  $v \in W \setminus \{0\}$ . Tale  $v \neq 0$  soddisfa la tesi del teorema.  $\square$

Come corollario del Teorema XXX.10.1, otteniamo il TEOREMA DI LIE:

**TEOREMA XXX.10.2 (Lie).** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  su un campo algebricamente chiuso  $\mathbb{k}$  di caratteristica 0. Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra risolubile di endomorfismi di  $V$ . Allora esiste una bandiera completa  $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$  di  $V$  tale che  $A(V_i) \subset V_i$  per ogni  $A \in \mathfrak{g}$ .*

Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie risolubile (di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  algebricamente chiuso di caratteristica zero) e  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una sua rappresentazione

lineare di dimensione finita,  $\rho(\mathfrak{g})$  è risolubile e quindi stabilizza una bandiera completa di  $V$ . Applicando questa osservazione alla rappresentazione aggiunta di  $\mathfrak{g}$  otteniamo:

**TEOREMA XXX.10.3.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie risolubile di dimensione finita  $n$  su un campo  $\mathbb{k}$  algebricamente chiuso di caratteristica zero. Allora esiste una catena di ideali*

$$(30.10.4) \quad \{0\} = \alpha_0 \subset \alpha_1 \subset \cdots \subset \alpha_{n-1} \subset \alpha_n = \mathfrak{g}$$

di  $\mathfrak{g}$  con  $\dim_{\mathbb{k}}(\alpha_i) = i$  per  $i = 0, 1, \dots, n-1, n$ .

Vale il seguente risultato relativo al cambiamento del campo di base:

**LEMMA XXX.10.4.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$ . Sia  $\tilde{\mathbb{k}}$  un'estensione del campo  $\mathbb{k}$ . Sia  $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathbb{k}} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$  l'algebra di Lie di dimensione finita su  $\tilde{\mathbb{k}}$  ottenuta per estensione  $\tilde{\mathbb{k}}$ -bilinare del commutatore di  $\mathfrak{g}$ . Allora*

- (1)  $\tilde{\mathfrak{g}}$  è risolubile se e soltanto se  $\mathfrak{g}$  è risolubile.
- (2)  $\tilde{\mathfrak{g}}$  è nilpotente se e soltanto se  $\mathfrak{g}$  è nilpotente.

Utilizzando il lemma, dimostriamo il seguente:

**TEOREMA XXX.10.5.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero. L'algebra  $\mathfrak{g}$  è risolubile se e soltanto se il suo ideale derivato  $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  è nilpotente.*

**DIMOSTRAZIONE.** Chiaramente, se  $\mathfrak{g}^{(1)}$  è nilpotente,  $\mathfrak{g}$  è risolubile. Dimostriamo il viceversa.

Per il lemma precedente, possiamo supporre che il campo  $\mathbb{k}$  sia algebricamente chiuso: infatti, detta  $\tilde{\mathbb{k}}$  la chiusura algebrica di  $\mathbb{k}$  e posto  $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathbb{k}} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$ , abbiamo  $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)} = \tilde{\mathbb{k}} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}^{(1)}$ .

Sia dunque  $\mathbb{k}$  algebricamente chiuso; sia  $\{\alpha_i\}_{0 \leq i \leq n}$  una catena crescente di ideali di  $\mathfrak{g}$  con  $\dim_{\mathbb{k}} \alpha_i = i$ . Fissiamo una base  $X_1, \dots, X_n$  di  $\mathfrak{g}$  con  $X_i \in \alpha_i \setminus \alpha_{i-1}$  per  $1 \leq i \leq n$ . Per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ , l'endomorfismo  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$  si rappresenta nella base  $X_1, \dots, X_n$  mediante una matrice di  $t(n, \mathbb{k})$ . Poiché  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}([X, Y]) = [\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X), \text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)]$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , gli elementi di  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{(1)})$  si rappresentano nella base  $X_1, \dots, X_n$  come matrici di  $n(n, \mathbb{k})$  e sono quindi nilpotenti. Ne segue che  $\mathfrak{g}^{(1)}$  è nilpotente per il teorema di Engel.  $\square$

Come corollario deduciamo il seguente:

**TEOREMA XXX.10.6.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie risolubile su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero. Allora possiamo costruire una successione crescente di sottoalgebre di  $\mathfrak{g}$*

$$\{0\} = \alpha_0 \subset \alpha_1 \subset \cdots \subset \alpha_{m-1} \subset \alpha_m = \mathfrak{g},$$

tali che, per ogni  $h$  con  $1 \leq h \leq m$ ,  $\alpha_{h-1}$  sia un ideale in  $\alpha_h$  ed il quoziente  $\alpha_h/\alpha_{h-1}$  sia un'algebra di Lie abeliana di dimensione uno.

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $m = \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$ ,  $m' = \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}^{(1)}$  e  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$  la proiezione nel quoziente. Poiché  $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$  è abeliana, se

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{m-m'} = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$$

è una qualsiasi bandiera completa, le  $\mathfrak{a}_h = \pi^{-1}(V_{h-m'})$ , per  $h = m', \dots, m$  sono sottoalgebre di  $\mathfrak{g}$  di dimensione  $h$ . Ciascuna è un ideale di codimensione uno nella successiva e  $\mathfrak{a}_h/\mathfrak{a}_{h-1}$  è abeliana di dimensione uno per  $h = m' + 1, \dots, m$ .

Per concludere la dimostrazione basta osservare che  $\mathfrak{a}_{m'} = \mathfrak{g}^{(1)}$  è un'algebra di Lie nilpotente e quindi per il teorema di Engel contiene una sequenza di ideali

$$\{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{m'-1} \subset \mathfrak{a}_{m'} = \mathfrak{g}^{(1)},$$

tali che  $\mathfrak{a}_h/\mathfrak{a}_{h-1}$  sia un'algebra di Lie abeliana di dimensione uno, per  $h = 1, \dots, m'$ .  $\square$

Osserviamo che, a differenza del caso in cui avevamo supposto che  $\mathbb{k}$  fosse algebricamente chiuso, qui non possiamo in generale ottenere che gli  $\mathfrak{a}_h$  siano ideali in  $\mathfrak{g}$ , ma soltanto ciascuno un ideale nella successiva sottoalgebra  $\mathfrak{a}_{h+1}$  di  $\mathfrak{g}$ .

### XXX.11. Il più grande ideale di nilpotenza di una rappresentazione

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su un campo  $\mathbb{k}$ .

**LEMMA XXX.11.1.** *Sia  $\mathfrak{a}$  un ideale di  $\mathfrak{g}$  e  $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una rappresentazione lineare irriducibile, di dimensione finita, di  $\mathfrak{g}$ , tale che, per ogni  $X \in \mathfrak{a}$ ,  $\rho_V(X)$  sia nilpotente su  $V$ . Allora  $\rho_V(\mathfrak{a}) = \{0\}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $W = \{v \in V \mid \rho_V(X)(v) = 0, \forall X \in \mathfrak{a}\}$ . Per il teorema di Engel,  $W \neq \{0\}$ . D'altra parte, poiché  $\mathfrak{a}$  è un ideale,  $W$  è un sottospazio  $\rho_V(\mathfrak{g})$ -invariante di  $V$ . Per l'irriducibilità,  $W = V$ .  $\square$

**LEMMA XXX.11.2.** *Sia  $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una rappresentazione lineare di  $\mathfrak{g}$ , e sia*

$$(30.11.1) \quad \{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_\nu = V$$

*una sua serie di Jordan-Hölder<sup>1</sup>. Per un ideale  $\mathfrak{a}$  di  $\mathfrak{g}$  sono equivalenti*

- (1) *per ogni  $X \in \mathfrak{a}$ ,  $\rho_V(X)$  è un endomorfismo nilpotente di  $V$ ;*
- (2)  *$\rho(X)(W_h) \subset W_{h-1}$  per ogni  $X \in \mathfrak{a}$  ed ogni  $h = 1, \dots, \nu$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** L'implicazione (2)  $\Rightarrow$  (1) è ovvia. Mostriamo che vale anche l'implicazione opposta.

Sia  $\mathfrak{a}$  un ideale di  $\mathfrak{g}$  tale che  $\rho_V(\mathfrak{a})$  sia un'algebra di endomorfismi nilpotenti di  $V$ .

Per tutte le rappresentazioni  $\rho_{W_h/W_{h-1}}$  indotte dalla  $\rho_V$  per passaggio al quoziente gli endomorfismi di  $\rho_{W_h/W_{h-1}}(\mathfrak{a})$  sono nilpotenti su  $W/W_{h-1}$ . Poiché le rappresentazioni  $\rho_{W_h/W_{h-1}}$  sono irriducibili, per il lemma precedente  $\rho_{W_h/W_{h-1}}(X) = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{a}$ , e ciò equivale alla (2).  $\square$

<sup>1</sup>Ogni sottospazio  $W_h$  è  $\rho_V(\mathfrak{g})$ -invariante e le rappresentazioni indotte sui quozienti  $W_h/W_{h-1}$  sono irriducibili.



Sia  $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  una rappresentazione lineare di  $\mathfrak{g}$ , e sia (30.11.1) una sua serie di Jordan-Hölder. L'insieme

$$(30.11.2) \quad \mathfrak{n}_V = \{X \in \mathfrak{g} \mid \rho_V(X)(W_h) \subset W_{h-1}, \forall h = 1, \dots, \nu\}$$

è un ideale di  $\mathfrak{g}$ , che non dipende dalla particolare scelta della serie di Jordan-Hölder utilizzata nella sua definizione.

DEFINIZIONE XXX.11.3. L'ideale  $\mathfrak{n}_V$  definito dalla (30.11.2) si dice il *più grande ideale di nilpotenza* della rappresentazione  $\rho_V$ .

### XXX.12. Il radicale nilpotente e il nilradicale

In tutto questo paragrafo supporremo che il campo  $\mathbb{k}$  abbia caratteristica zero. Tutte le algebre di Lie considerate saranno algebre di Lie su  $\mathbb{k}$  di dimensione finita.

DEFINIZIONE XXX.12.1. Si dice *radicale nilpotente* dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  l'intersezione  $\text{nil}(\mathfrak{g})$  dei nuclei delle sue rappresentazioni lineari irriducibili di dimensione finita.

LEMMA XXX.12.2. Sia  $V \neq \{0\}$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{k}$  e  $\mathfrak{g}$  una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ . Supponiamo che  $V$  sia un  $\mathfrak{g}$ -modulo irriducibile. Se  $\mathfrak{a}$  è un ideale abeliano di  $\mathfrak{g}$ , allora  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}^{(1)} = \{0\}$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\mathcal{A}$  la sottoalgebra unitaria (commutativa) di  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  generata da  $\mathbf{1}_V$  ed  $\mathfrak{a}$ . Dimostriamo che

se  $\mathfrak{b}$  è un ideale di  $\mathfrak{g}$  contenuto in  $\mathfrak{a}$  e  $\text{tr}_V(AB) = 0$  per ogni  $A \in \mathcal{A}$  e  $B \in \mathfrak{b}$ , allora  $\mathfrak{b} = \{0\}$ .

Abbiamo infatti, se  $B \in \mathfrak{b}$ ,

$$\text{tr}_V(B^n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > 0,$$

e quindi ogni elemento  $B \in \mathfrak{b}$  è nilpotente. Per il teorema di Engel,

$$W = \bigcap_{B \in \mathfrak{b}} \ker B \neq \{0\}.$$

Poiché  $\mathfrak{b}$  è un ideale di  $\mathfrak{g}$  abbiamo

$$B(X(v)) = X(B(v)) - [X, B](v) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall B \in \mathfrak{b}, \quad \forall v \in W.$$

Quindi  $W$  è  $\mathfrak{g}$ -invariante e perciò  $W = V$  in quanto avevamo supposto che  $V$  fosse un  $\mathfrak{g}$ -modulo irriducibile. Ciò implica che  $\mathfrak{b} = \{0\}$ .

Possiamo applicare questo risultato a  $\mathfrak{b} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$ . Infatti: se  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $Y \in \mathfrak{a}$  ed  $A \in \mathcal{A}$ , otteniamo:

$$\text{tr}_V([X, Y]A) = \text{tr}_V(XYA - YXA) = \text{tr}_V(XYA - XAY) = \text{tr}_V(X[Y, A]) = 0$$

perché  $\mathcal{A}$  è una sottoalgebra commutativa di  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ . Quindi  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = 0$ . Da ciò segue che gli endomorfismi di  $\mathfrak{g}$  commutano con quelli di  $\mathcal{A}$ . Fissiamo quindi  $X, Y \in \mathfrak{g}$  ed  $A \in \mathcal{A}$ . Abbiamo:

$$\text{tr}_V([X, Y]A) = \text{tr}_V(X[Y, A]) = 0$$

perché  $[Y, A] = 0$ . Quindi  $\text{tr}_V(ZA) = 0$  per ogni  $Z \in \mathfrak{g}^{(1)}$ ,  $A \in \mathcal{A}$ . Applicando quindi le considerazioni svolte all'inizio della dimostrazione all'ideale  $\mathfrak{g}^{(1)} \cap \alpha \subset \alpha$ , otteniamo che  $\mathfrak{g}^{(1)} \cap \alpha = \{0\}$ .  $\square$

Dal Lemma XXX.12.2 otteniamo la seguente caratterizzazione del radicale nilpotente:

**TEOREMA XXX.12.3.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero. Allora*

$$(30.12.1) \quad \text{nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g}).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Ogni funzionale lineare  $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$  che si annulla su  $\mathfrak{g}^{(1)}$  definisce una rappresentazione unidimensionale, e quindi irriducibile, di  $\mathfrak{g}$ . Quindi  $\text{nil}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}$ .

Consideriamo la rappresentazione aggiunta di  $\mathfrak{g}$ . Possiamo determinare una sequenza di sottospazi vettoriali  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ -invarianti di  $\mathfrak{g}$ :

$$\mathfrak{g}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_m = \mathfrak{g}$$

tali che la rappresentazione indotta su ciascuno dei quozienti  $\mathfrak{g}_h/\mathfrak{g}_{h-1}$ , per  $1 \leq h \leq m$ , sia irriducibile. In particolare  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$  è nilpotente per ogni  $X \in \text{nil}(\mathfrak{g})$ , in quanto  $[X, \mathfrak{g}_h] \subset \mathfrak{g}_{h-1}$  per ogni  $h = 1, \dots, m$  se  $X \in \text{nil}(\mathfrak{g})$ . Per il teorema di Engel  $\text{nil}(\mathfrak{g})$  è un ideale nilpotente di  $\mathfrak{g}$  e quindi è contenuto in  $\text{rad}(\mathfrak{g})$ .

Abbiamo quindi ottenuto l'inclusione

$$\text{nil}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g}).$$

Per dimostrare l'inclusione opposta, consideriamo una qualsiasi rappresentazione lineare irriducibile di dimensione finita  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ .

Sia  $k \geq 0$  il più piccolo numero naturale tale che  $\rho(D^{k+1}\text{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$ . Poniamo  $\mathfrak{g}' = \rho(\mathfrak{g})$  ed  $\alpha = \rho(D^k\text{rad}(\mathfrak{g}))$ . Allora  $V$  è un  $\mathfrak{g}'$ -modulo irriducibile ed  $\alpha$  un ideale abeliano di  $\mathfrak{g}'$ . Per il Lemma XXX.12.2,

$$\rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap D^k\text{rad}(\mathfrak{g})) \subset D\mathfrak{g}' \cap \alpha = \{0\}.$$

Se fosse  $k > 0$ , avremmo  $D^k\text{rad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}$  e quindi  $\rho(D^k\text{rad}(\mathfrak{g})) = \rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap D^k\text{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$  contraddirebbe la scelta di  $k$ . Deve essere perciò  $k = 0$  e quindi  $\rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$ . Dunque  $\ker \rho \supset \mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g})$  per ogni rappresentazione  $\rho$  irriducibile di dimensione finita: la dimostrazione è completa.  $\square$

**COROLLARIO XXX.12.4.** *Il radicale nilpotente  $\text{nil}(\mathfrak{g})$  è un ideale caratteristico di  $\mathfrak{g}$ .*

**COROLLARIO XXX.12.5.** *Se  $\mathfrak{g}$  è risolubile, allora il suo radicale nilpotente coincide con il suo ideale derivato  $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ .*

*Per ogni rappresentazione semplice di dimensione finita  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$  di un'algebra di Lie risolubile  $\mathfrak{g}$ , la  $\rho(\mathfrak{g})$  è commutativa e la sottoalgebra associativa di  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  generata dall'identità  $I_V$  e da  $\rho(\mathfrak{g})$  è un'estensione algebrica di  $\mathbb{k}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $\mathfrak{g}$  coincide con il proprio radicale  $\mathfrak{r}$ , abbiamo  $\text{nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{g}^{(1)}$ . Quindi  $[\rho(\mathfrak{g}), \rho(\mathfrak{g})] = \rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \{0\}$  e  $\rho(\mathfrak{g})$  è commutativa. La

sottoalgebra associativa  $\mathbb{K}_\rho$  di  $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  generata da  $\rho(\mathfrak{g})$  e da  $I_V$  è quindi un'algebra commutativa in cui ogni elemento diverso da zero è invertibile per il lemma di Schur. Quindi  $\mathbb{K}_\rho$  è un campo. Poiché è uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{K}$ , esso ne è un'estensione algebrica.  $\square$

**COROLLARIO XXX.12.6.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su  $\mathbb{K}$ , con radicale  $\mathfrak{r}$ . Allora i seguenti insiemi sono uguali:*

- (1) *il più grande ideale nilpotente di  $\mathfrak{g}$ ;*
- (2) *il più grande ideale nilpotente di  $\mathfrak{r}$ ;*
- (3) *l'insieme degli  $X \in \mathfrak{r}$  tali che  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$  sia nilpotente;*
- (4) *l'insieme degli  $X \in \mathfrak{r}$  tali che  $\text{ad}_{\mathfrak{r}}(X)$  sia nilpotente.*

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  gli ideali descritti rispettivamente nei punti (1), (2), (3) (4). Abbiamo chiaramente  $\alpha \subset \beta \subset \gamma \subset \delta$ . Poiché  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{r}$  per ogni  $X \in \mathfrak{r}$ , vale anche l'inclusione  $\delta \subset \gamma$  e quindi  $\gamma = \delta$ . Per dimostrare che i quattro ideali sono uguali basterà quindi verificare che  $\gamma \subset \alpha$ . Consideriamo la rappresentazione aggiunta di  $\mathfrak{r}$  in  $\mathfrak{g}$  e sia

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{m-1} \subset V_m = \mathfrak{g}$$

una serie di Jordan-Hölder per  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ , cioè una catena massimale di sottospazi vettoriali  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ -invarianti di  $\mathfrak{g}$ . Indichiamo con  $\rho_h$  la rappresentazione indotta sul quoziente  $V_h/V_{h-1}$  dalla restrizione a  $\mathfrak{r}$  della rappresentazione aggiunta. Poiché essa è irriducibile, abbiamo  $\rho_h(X) = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{r}$  per cui  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$  è nilpotente. Quindi  $\delta = \bigcap_h \ker \rho_h$  è un ideale nilpotente di  $\mathfrak{g}$  e quindi è contenuto in  $\alpha$ .  $\square$

**DEFINIZIONE XXX.12.7.** *L'ideale  $\mathfrak{n}$  formato dagli elementi  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -nilpotenti del radicale  $\mathfrak{r}$  di  $\mathfrak{g}$  si dice il *nilradicale* o *il più grande ideale nilpotente* di  $\mathfrak{g}$ .*

**COROLLARIO XXX.12.8.** *Il nilradicale di  $\mathfrak{g}$  è un suo ideale caratteristico.*

Se indichiamo con  $\mathfrak{n}_0$  il radicale nilpotente<sup>2</sup>  $\text{nil}(\mathfrak{g})$  di  $\mathfrak{g}$ , abbiamo la catena di inclusioni

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{r} \supset \mathfrak{n} \supset \mathfrak{n}_0.$$

### XXX.13. Automorfismi speciali

**PROPOSIZIONE XXX.13.1.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie su un campo  $\mathbb{K}$  di caratteristica zero e siano  $\mathfrak{n}$  il suo ideale nilpotente massimale ed  $\mathfrak{n}_0$  il suo radicale nilpotente. Allora*

$$\text{Aut}_{\mathfrak{n}} = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{n}\} \quad \text{ed} \quad \text{Aut}_{\mathfrak{n}_0} = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{n}_0\}$$

*sono sottogruppi normali di  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  contenuti in  $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Basta osservare che sia  $\mathfrak{n}$  che  $\mathfrak{n}_0$  sono ideali caratteristici di  $\mathfrak{g}$ , cioè invarianti per automorfismi di  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

**DEFINIZIONE XXX.13.2.** *Gli elementi di  $\text{Aut}_{\mathfrak{n}_0}(\mathfrak{g})$  si dicono *automorfismi speciali* di  $\mathfrak{g}$ .*

<sup>2</sup> Anche l'inclusione  $\mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}$  può essere propria. Ad esempio, se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie abeliana, abbiamo  $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{n}_0 = \{0\}$ .

Vale la seguente precisazione del Teorema XXX.7.2:

**TEOREMA XXX.13.3.** *Se  $\mathfrak{l}$ ,  $\mathfrak{l}'$  sono due sottoalgebre di Levi di un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  su un campo  $\mathbb{k}$  di caratteristica zero, allora esiste un automorfismo speciale  $a \in \text{Aut}_{\mathfrak{l}_0}(\mathfrak{g})$  tale che  $\mathfrak{l}' = a(\mathfrak{l})$ .*

## **Appendice: Complementi sulle connessioni**



## Espressioni in coordinate

### XXXI.1. Espressione in coordinate delle equazioni di struttura

Ricordiamo che i tensori di *torsione*  $T \in \mathfrak{T}^{1,2}(M)$  e di *curvatura*  $R \in \mathfrak{T}^{1,3}(M)$  sono definiti da:

$$(31.1.1) \quad T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

$$(31.1.2) \quad R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \\ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Fissiamo un riferimento  $(X_1, \dots, X_m)$  su un aperto  $U$  di  $M$  e consideriamo i simboli di Christoffel e le componenti dei tensori di torsione e di curvatura definiti da:

$$(31.1.3) \quad \nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k X_k,$$

$$(31.1.4) \quad T(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^m T^k_{i,j} X_k,$$

$$(31.1.5) \quad R(X_i, X_j)X_h = \sum_{k=1}^n R^k_{h,i,j} X_k.$$

Definiamo delle 1-forme  $\omega^i, \omega_j^i \in \Omega^1(U)$  (per  $1 \leq i, j \leq m$ ) mediante:

$$(31.1.6) \quad \omega^i(X_j) = \delta_j^i, \quad \omega_j^i = \sum_{k=1}^m \Gamma_{k,j}^i \omega^k.$$

Le forme  $\omega_j^i$  determinano a loro volta i simboli di Christoffel e quindi la connessione lineare.

Diamo una descrizione più intrinseca delle forme  $\omega^i$  e  $\omega_j^i$ . Il dato del sistema di riferimento  $(X_1, \dots, X_n)$  definisce una forma differenziale

$$(31.1.7) \quad B\omega = (\omega^1, \dots, \omega^n) \in \Omega^1(U, \mathbb{R}^m).$$

La differenziazione affine definisce allora una forma  $B\Omega = (\omega_j^i) \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$  tale che

$$(31.1.8) \quad B\omega(\nabla_X Y) = d[B\omega(Y)](X) + B\Omega(Y)X.$$

Se  $X'_1, \dots, X'_n$  è un altro sistema di riferimento in  $U$ , le forme  $B\omega' \in \Omega^1(U, \mathbb{R}^m)$  e  $B\Omega' \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$  ad esso associate sono legate alle  $(B\omega, B\Omega)$  del precedente riferimento dalle *equazioni di gauge*:

$$(31.1.9) \quad \begin{cases} B\omega = aB\omega' & \text{con } a \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})), \\ \Omega' = a^{-1} \circ da + a^{-1} \circ B\Omega \circ a = a^{-1} \circ da + \text{Ad}(a^{-1})(\Omega). \end{cases}$$

TEOREMA XXXI.1.1 (Equazioni di struttura di Cartan). *Le forme  $\omega_j^i$  soddisfano:*

$$(31.1.10) \quad d\omega^i = -\sum_{k=1}^m \omega_k^i \wedge \omega^k + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m T^i_{j,k} \omega^j \wedge \omega^k$$

$$(31.1.11) \quad d\omega_j^i = -\sum_{k=1}^m \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^m R^i_{j,h,k} \omega^h \wedge \omega^k.$$

DIMOSTRAZIONE. Definiamo i coefficienti  $c_{i,j}^k$  mediante :

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^m c_{i,j}^k X_k.$$

Useremo nel seguito la convenzione secondo cui indici uguali in alto e in basso si intendono sommati su tutto il loro insieme di definizione. Abbiamo dunque:

$$d\omega^i(X_j, X_k) = X_j(\omega^i(X_k)) - X_k(\omega^i(X_j)) - \omega^i([X_j, X_k]) = -c_{j,k}^i.$$

Abbiamo poi :

$$\begin{aligned} T(X_j, X_k) &= \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_k} X_j - [X_j, X_k] \\ &= \Gamma_{j,k}^i X_i - \Gamma_{k,j}^i X_i - c_{j,k}^i X_i, \end{aligned}$$

cioè

$$T^i_{j,k} = \Gamma_{j,k}^i - \Gamma_{k,j}^i - c_{j,k}^i$$

e quindi :

$$\begin{aligned} &(-\omega_h^i \wedge \omega^h + T^i_{h,\ell} \omega^h \wedge \omega^\ell)(X_j, X_k) \\ &= -\omega_k^i(X_j) + \omega_j^i(X_k) + \frac{1}{2} (T^i_{j,k} - T^i_{k,j}) \\ &= -\Gamma_{j,k}^i + \Gamma_{k,j}^i + \frac{1}{2} ((\Gamma_{j,k}^i - \Gamma_{k,j}^i - c_{j,k}^i) - (\Gamma_{k,j}^i - \Gamma_{j,k}^i - c_{k,j}^i)) \\ &= -c_{j,k}^i \end{aligned}$$

e quindi abbiamo verificato la (31.1.10).

Per i coefficienti del tensore di curvatura abbiamo l'espressione:

$$(31.1.12) \quad R^i_{j,h,k} = (X_h \Gamma_{k,j}^i) - (X_k \Gamma_{h,j}^i) + \Gamma_{k,j}^\ell \Gamma_{h,\ell}^i - \Gamma_{h,j}^\ell \Gamma_{k,\ell}^i - c_{h,k}^\ell \Gamma_{\ell,j}^i.$$

A partire dalla formula per le componenti della curvatura, la verifica della (31.1.11) è analoga a quella della (31.1.10).  $\square$

In un riferimento  $X_1, \dots, X_n$  su un aperto  $U$  di  $M$  possiamo associare ai tensori di torsione e di curvatura le *forme di torsione e di curvatura* mediante :

$$(31.1.13) \quad T = \left( \sum_{j,k=1}^m T^i_{j,k} \omega^j \wedge \omega^k \right)_{i=1, \dots, n} \in \Omega^2(U, \mathbb{R}^m),$$

$$(31.1.14) \quad R = \left( \sum_{h,k=1}^m R^i_{j,h,k} \omega^h \wedge \omega^k \right)_{h,k=1, \dots, n} \in \Omega^2(U, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})),$$

dove, se  $V$  è uno spazio vettoriale reale,  $\Lambda^p(U, V)$  è lo spazio delle  $p$ -forme differenziali alternate a valori in  $V$ .



Le equazioni di struttura si scrivono allora utilizzando le forme di torsione e di curvatura mediante<sup>1</sup> :

$$(31.1.15) \quad \begin{cases} d\omega = -\Omega \wedge \omega + \frac{1}{2}T \\ d\Omega = -\Omega \wedge \Omega + \frac{1}{2}R. \end{cases}$$

Supponiamo che il sistema di riferimento  $X_1, \dots, X_n$  sia definito su un intorno normale  $U_p$  del punto  $p \in M$  e consideriamo l'applicazione differenziabile, definita in un intorno aperto  $V$  di  $0$  in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ :

$$(31.1.16) \quad \Phi : V \ni (t; a^1, \dots, a^m) \rightarrow \exp_p(ta^1 X \dots, ta^m X_n) \in U_p.$$

Abbiamo allora, per forme  $\bar{\omega}^i, \bar{\omega}_j^i$  definite su  $V$  che sono combinazioni lineari a coefficienti  $\mathcal{C}^\infty$  di  $da^1, \dots, da^m$ :

$$(31.1.17) \quad \begin{cases} \Phi^* \omega^i = a^i dt + \bar{\omega}^i \\ \Phi^* \omega_j^i = \bar{\omega}_j^i \\ 1 \leq i, j \leq n \end{cases}$$

Vale la:

**PROPOSIZIONE XXXI.1.2.** *Indicando ancora con  $T^i_{j,k}$  ed  $R^i_{j,h,k}$  i loro rialzamenti a  $V$ , le forme  $\bar{\omega}^i$  e  $\bar{\omega}_j^i$  soddisfano il sistema differenziale:*

$$(31.1.18) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t} = da^i + a^k \bar{\omega}_k^i + T^i_{h,k} a^h \bar{\omega}^k, & \bar{\omega}^i(0, a^1, \dots, a^m) = 0 \\ \frac{\partial \bar{\omega}_j^i}{\partial t} = R^i_{j,h,k} a^j \bar{\omega}^k, & \bar{\omega}_j^i(0, a^1, \dots, a^m) = 0. \end{cases}$$

In particolare, se il tensore di curvatura è nullo, le forme  $\bar{\omega}_j^i$  sono costanti. Se anche la torsione è nulla, l'esponenziale definisce una trasformazione affine di un intorno di  $0$  in  $T_p M$  su un intorno normale di  $p$  in  $M$ .

### XXXI.2. Espressioni locali

In questo paragrafo ricaveremo diverse espressioni locali per il simboli di Christoffel ed i tensori di curvatura per la connessione di Levi-Civita di una metrica Riemanniana  $g$  su  $M$ .

**Espressione in coordinate locali.** Siano  $x^1, \dots, x^m$  coordinate locali in un aperto  $U$  di  $M$  e poniamo

$$g_{i,j} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

<sup>1</sup>Si può dare una formulazione intrinseca delle equazioni di struttura definendo forme  $\tilde{\omega}, \tilde{\Omega}, \tilde{T}$  ed  $\tilde{R}$  sul fibrato principale  $\mathfrak{F}(M)$  dei sistemi di riferimento di  $M$ .

Per la (15.8.5) i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita si esprimono in funzione dei coefficienti  $g_{i,j}$ . Abbiamo infatti

$$2\Gamma_{i,j}^\ell g_{\ell,k} = \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i,k}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^k}.$$

Indicando con  $g^{i,j}$  i coefficienti della matrice inversa della  $(g_{i,j})_{i,j=1,\dots,m}$ , otteniamo

$$(31.2.1) \quad \Gamma_{i,j}^k = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^m g^{k,\ell} \left( \frac{\partial g_{j,\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i,\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^\ell} \right).$$

L'assenza di torsione equivale al fatto che i simboli di Christoffel, calcolati in un sistema di coordinate locali, siano simmetrici rispetto ai due indici in basso.

**Espressione in un riferimento ortonormale.** Sia  $(X_1, \dots, X_m) \in \Gamma(U, \mathbf{O}(M))$  un sistema di riferimento ortonormale in un aperto  $U$  di  $M$ . Poiché le  $g(X_i, X_j) = \delta_{i,j}$  sono costanti, i simboli di Christoffel nel riferimento  $(X_1, \dots, X_m)$  soddisfano:

$$(31.2.2) \quad \Gamma_{i,j}^k = \frac{1}{2}(c_{i,j}^k + c_{k,i}^j + c_{k,j}^i) = -\Gamma_{i,k}^j, \quad \text{ove } [X_i, X_j] = c_{i,j}^k X_k,$$

e l'uguaglianza  $\Gamma_{i,j}^k = -\Gamma_{i,k}^j$  è conseguenza del fatto che i coefficienti  $c_{j,k}^i$  sono antisimmetrici rispetto agli indici in basso.

Per scrivere le *forme di Christoffel* utilizziamo il co-riferimento  $(\theta^1, \dots, \theta^m)$  associato ad  $(X_1, \dots, X_m)$ . Le forme  $\theta^1, \dots, \theta^m \in \mathcal{Q}^1(U)$  sono caratterizzate da  $\theta^i(X_j) = \delta_j^i$  per  $1 \leq i, j \leq m$ , di modo che

$$g = \sum_{i=1}^m (\theta^i)^2 = \sum_{i=1}^m \theta^i \otimes \theta^i.$$

La forma di Christoffel  $\omega_U = (\omega_k^j)$  è quindi a valori in  $\mathfrak{o}(m)$  e le equazioni di struttura danno

$$(31.2.3) \quad \begin{cases} d\theta^i + \sum_{j=1}^m \omega_j^i \wedge \theta^j = 0, \\ d\omega_j^i + \sum_{k=1}^m \omega_k^i \wedge \omega_j^k = \sum_{h,k=1}^m R_{j,h,k}^i \theta^h \wedge \theta^k, \end{cases}$$

ove  $\sum_{j,k=1}^m R_{j,h,k}^i \theta^h \wedge \theta^k$  è il tensore di curvatura.

**Forma polare.** Fissiamo un punto  $p_0 \in M$  e sia  $U$  un intorno suo intorno normale. Possiamo supporre che, per un  $r > 0$ ,

$$\exp_{p_0} : N_{p_0}(r) = \{x \in T_{p_0}M \mid \|x\|_g < r\} \longrightarrow U$$

sia un diffeomorfismo.

Fissiamo una base ortonormale  $(e_1, \dots, e_m)$  in  $T_{p_0}M$  e costruiamo una sezione  $\sigma_U \in \Gamma(U, \mathbf{O}(M))$  mediante il trasporto parallelo di  $(e_1, \dots, e_m)$  lungo le geodetiche:

$$\sigma_U(\exp_{p_0}(x)) = (d\exp_{p_0}(x)(e_1), \dots, d\exp_{p_0}(x)(e_m)).$$

Poniamo poi

$$(31.2.4) \quad \bar{\theta} = (\bar{\theta}^i)_{1 \leq i \leq m} = \sigma_U^* \theta, \quad \bar{\omega} = (\bar{\omega}_j^i)_{1 \leq i, j \leq m} = \sigma_U^* \omega,$$

ove  $\theta$  ed  $\omega$  sono, rispettivamente, la forma canonica e la forma di Cartan della connessione di Levi-Civita  $\Gamma$ .

Per calcolare queste forme in modo esplicito, introduciamo coordinate polari in  $N_0$ , ponendo, per le componenti  $v^i$  di  $v \in T_{p_0}M$ ,

$$v^i = x^i t, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \sum_{i=1}^m (x^i)^2 = 1.$$

LEMMA XXXI.2.1. *Abbiamo:*

$$(31.2.5) \quad \bar{\theta}^i = x^i dt + \phi^i, \quad \text{con } \phi^i \text{ indipendente da } dt,$$

$$(31.2.6) \quad \text{gli } \bar{\omega}_j^i \text{ sono indipendenti da } dt,$$

$$(31.2.7) \quad d\phi^i = -(dx^i + \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i x^j) \wedge dt + \dots,$$

$$(31.2.8) \quad d\bar{\omega}_j^i = -\sum_{h,k=1}^m \bar{R}_{j,h,k}^i x^h \phi^k \wedge dt + \dots$$

dove i puntini stanno per forme indipendenti da  $dt$  ed  $\bar{R}_{j,h,k}^i$  sono le componenti del tensore di curvatura nel riferimento  $\sigma_U$ .

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la (31.2.5). Per provare che  $\phi^i$  è indipendente da  $dt$  è sufficiente verificare che, se  $\gamma_x = \exp_{p_0}(tx)$  è la geodetica uscente da  $p_0$  con velocità  $x$ , allora  $\bar{\theta}^i(\dot{\gamma}_x) = x^i$ . Osserviamo che, per la definizione della forma canonica,

$$\theta\left(\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}_x\right) = \bar{\theta}(\dot{\gamma}_x) = \tilde{\gamma}_x(t)^{-1}(\dot{\gamma}_x(t)),$$

ove  $\tilde{\gamma}_x$  è il rialzamento orizzontale di  $\gamma_x$  a partire dal punto  $(e_1, \dots, e_m)$ . Poiché  $\tilde{\gamma}_x$  è orizzontale e  $\dot{\gamma}_x$  parallelo lungo  $\gamma_x$ , ne segue che  $\bar{\theta}(\dot{\gamma}_x)$  è costante. Il suo valore in  $0$  è  $x$  e dunque  $\bar{\theta}^i(\dot{\gamma}_x) = x^i$  per ogni  $t$ .

Poiché  $\tilde{\gamma}_x$  e  $\dot{\gamma}_x$  sono paralleli lungo la geodetica  $\gamma_x$ , abbiamo

$$\bar{\omega}_j^i(\dot{\gamma}_x) = \omega_j^i\left(\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}_x\right) = 0,$$

perché  $\tilde{\gamma}_x$  è orizzontale, e questo ci dà la (31.2.6).

Poiché la connessione di Levi-Civita ha torsione nulla, abbiamo

$$d\theta = -\omega \wedge \theta.$$

Quindi

$$d\phi^i = -dx^i \wedge dt - d\bar{\theta}^i = -(dx^i + \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i x^j) \wedge dt + \dots$$

ove i puntini stanno per una forma indipendente da  $dt$ , in quanto

$$d\bar{\theta} = d\sigma_U^* \theta = \sigma_U^* d\theta = -\sigma_U^*(\omega \wedge \theta) = \bar{\omega} \wedge \bar{\theta}$$

e, per le (31.2.5), (31.2.6),

$$\sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i \wedge \bar{\theta}^j = \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i x^j dt + \dots,$$

ove i puntini stanno per una forma indipendente da  $dt$ .

Dalle equazioni di struttura, abbiamo

$$d\bar{\theta}^i = d(x^i dt + \phi^i) = \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i \wedge (x^j dt + \phi^j),$$

$$d\bar{\omega}_j^i = -\sum_{k=1}^m \bar{\omega}_k^i \wedge \bar{\omega}_j^k + \bar{\Omega}_j^i,$$

ove

$$\bar{\Omega}_j^i = \sum_{h,k=1}^m \bar{R}_{j,h,k}^i \bar{\theta}^h \wedge \bar{\theta}^k,$$

da cui sostituendo l'espressione di  $\theta^i$  in (31.2.5) si ottiene la (31.2.8).  $\square$

PROPOSIZIONE XXXI.2.2. *Abbiamo, per il tensore della metrica, l'espressione*

$$(31.2.9) \quad g = dt \otimes dt + \sum_{i=1}^m \phi^i \otimes \phi^i.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché  $\sigma_U$  è un riferimento ortonormale, abbiamo

$$g = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}^i \otimes \bar{\theta}^i.$$

Da questa risulta

$$g = dt \otimes dt + \sum_{i=1}^m \phi^i \otimes \phi^i + \sum_{i,j=1}^m x^i (\phi^i \otimes dt + dt \otimes \phi^i).$$

Dobbiamo verificare che l'ultima sommatoria a secondo membro è nulla. Poiché  $\phi^i = 0$  in  $p_0$ , basterà dimostrare che la forma  $\sum_{i=1}^m x^i \phi^i$  è indipendente da  $t$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{i=1}^m x^i \phi^i\right) &= -\sum_{i=1}^m x^i d\phi^i \\ &= \sum_{i=1}^m x^i (dx^i + \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_{j,i}^i x^j) \wedge dt + \dots, \end{aligned}$$

dove al solito i puntini indicano una forma indipendente da  $dt$ . Abbiamo  $\sum_{i,j} \bar{\omega}_{j,i}^i x^i x^j = 0$  perché la matrice  $\bar{\omega}_{j,i}^i$  è antisimmetrica. Poi, da  $\sum_{j=1}^m |x^j|^2 = 1$  abbiamo  $\sum_{j=1}^m x^j dx^j = 0$ . Quindi il differenziale della forma  $\eta = \sum_{i=1}^m x^i \phi^i$  è indipendente da  $dt$  e, dal momento che  $\eta$  non contiene  $dt$ , ciò significa che la forma è costante rispetto a  $t$ . Questo completa la dimostrazione.  $\square$

### XXXI.3. Forme e simboli di Christoffel

Supponiamo fissata su  $M$  una connessione lineare  $\Gamma$ , con forma di Cartan  $\omega$ .

**XXXI.3.1. Forme di Christoffel.** Ad un atlante di trivializzazione  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  di  $L(M)$  sono associate le *forme di Christoffel*<sup>2</sup>

$$(31.3.1) \quad \omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega \in \Omega^2(U_\alpha, \mathfrak{g}_m(\mathbb{R}))$$

PROPOSIZIONE XXXI.3.1. *Abbiamo:*

$$(31.3.2) \quad \nabla_X Y = \sigma_\alpha(X(\sigma_\alpha^{-1} Y) + \omega_\alpha(X)(\sigma_\alpha^{-1} Y)) \quad \text{su } U_\alpha, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

<sup>2</sup>Vedi il §XIII.6 del Capitolo XIII

**XXXI.3.2. Espressioni dei simboli di Christoffel in coordinate locali.** Ad una carta locale  $(U, x)$  di  $M$ , con  $x = (x^1, \dots, x^m)$ , associamo il sistema di riferimento  $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m)$ .

La corrispondente trivializzazione locale di  $L(M)$  su  $U$  fa corrispondere ad un riferimento  $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$  la matrice  $(x_j^i) \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$  per cui

$$X_j = \sum_{i=1}^m x_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Indichiamo con  $(X^i)$  l'inversa della matrice  $(x_j^i)$ . Abbiamo cioè

$$\sum_{h=1}^m x_h^i X^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Siano  $e_1, \dots, e_m$  i vettori della base canonica di  $\mathbb{R}^m$ .

**LEMMA XXXI.3.2.** *La forma canonica  $\theta \in \Omega^1(L(M), \mathbb{R}^m)$  si esprime nelle coordinate locali mediante*

$$(31.3.3) \quad \theta = \sum \theta^i e_i, \quad \text{con } \theta^i = \sum_{j=1}^m X_j^i dx^j. \quad \square$$

Indichiamo con  $E_j^i$  la base canonica di  $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ . La  $E_j^i$  è la matrice il cui unico coefficiente diverso da 0, ed uguale ad 1, è quello della  $i$ -esima riga e  $j$ -esima colonna.

La forma di Cartan della connessione lineare  $\Gamma$  si scrive nella forma

$$(31.3.4) \quad \omega = \sum_{i,j=1}^m \omega_j^i E_i^j, \quad \text{con } \omega_j^i \in \Omega^1(\mathbb{L}_U).$$

Consideriamo  $\sigma_U = (\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m)$  come una sezione di  $\Gamma(U, L(M))$ , e consideriamo la relativa forma di Christoffel  $\omega_U = \sigma_U^* \omega \in \Omega(U, \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$ . Essa definisce  $m^3$  funzioni  $\Gamma_{j,k}^i$  su  $U$ , tali che

$$(31.3.5) \quad \omega_U = \sum_{i,k=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \Gamma_{j,k}^i dx^j \right) E_i^k.$$

**DEFINIZIONE XXXI.3.3.** Le funzioni  $\Gamma_{j,k}^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$  si dicono le *componenti dei simboli di Christoffel* di  $\Gamma$  nella carta locale  $x^1, \dots, x^m$ .

Le equazioni di gauge danno per i simboli di Christoffel

**PROPOSIZIONE XXXI.3.4.** *Se  $\bar{\Gamma}_{\beta,\gamma}^\alpha$  sono i simboli di Christoffel di  $\Gamma$  in un'altra carta locale  $y^1, \dots, y^m$  su  $U$ , abbiamo*

$$(31.3.6) \quad \bar{\Gamma}_{\beta,\gamma}^\alpha = \sum_{i,j,k=1}^m \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^\beta \partial y^\gamma} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}. \quad \square$$

La forma di Cartan della connessione  $\Gamma$  si esprime anch'essa per mezzo dei simboli di Christoffel. Abbiamo infatti

**PROPOSIZIONE XXXI.3.5.** *La forma di Cartan della connessione  $\Gamma$  si esprime, nelle coordinate locali  $(x^i, x^j)$ , mediante*

$$(31.3.7) \quad \omega = \sum_{i,j=1}^m \omega_j^i E_i^j, \quad \text{con } \omega_j^i = \sum_{k=1}^m X_k^i (dx_j^k + \sum_{h,\ell} \Gamma_{h,\ell}^k x_j^\ell dx^h). \quad \square$$

La derivazione covariante si esprime per mezzo dei simboli di Christoffel:

PROPOSIZIONE XXXI.3.6. *Indicando con  $\nabla_i$  la derivata covariante rispetto al campo di vettori  $\partial/\partial x^i$ , abbiamo*

$$(31.3.8) \quad \nabla_i \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \forall i, j = 1, \dots, m. \quad \square$$

DEFINIZIONE XXXI.3.7. Definiamo le componenti  $T_{j,h}^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$  della torsione ed  $R_{j,h,k}^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$  della curvatura di  $\Gamma$  rispetto alle coordinate locali  $x^1, \dots, x^m$  mediante

$$(31.3.9) \quad T\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^h}\right) = \sum_{i=1}^m T_{j,h}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$(31.3.10) \quad R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^h}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{i=1}^m R_{j,h,k}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

PROPOSIZIONE XXXI.3.8. *Le componenti della torsione e della curvatura di  $\Gamma$  si esprimono, per mezzo dei simboli di Christoffel in una carta locale  $x^1, \dots, x^m$  in  $U \subset M$ , mediante le formule*

$$(31.3.11) \quad T_{j,h}^i = \Gamma_{j,h}^i - \Gamma_{h,j}^i,$$

$$(31.3.12) \quad R_{j,h,k}^i = \frac{\partial \Gamma_{h,k}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial x^h} + \sum_{\ell=1}^m (\Gamma_{j,\ell}^i \Gamma_{hk}^\ell - \Gamma_{h,\ell}^i \Gamma_{j,k}^\ell).$$

**XXXI.3.3. Espressioni rispetto a sistemi di riferimento arbitrari.** Un sistema di riferimento  $(X_1, \dots, X_m)$  su un aperto  $U$  di  $M$  determina funzioni  $\Gamma_{j,h}^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$  tali che

$$(31.3.13) \quad \nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k X_k \quad \text{per } i, j = 1, \dots, m.$$

DEFINIZIONE XXXI.3.9. I coefficienti  $\Gamma_{i,j}^k$  definiti dalla (31.3.13) si dicono i *simboli di Christoffel* di  $\nabla$  nel sistema di riferimento  $(X_1, \dots, X_m)$ .

Ogni campo di vettori  $Y \in \mathfrak{X}(U)$  è combinazione lineare a coefficienti in  $\mathcal{C}^\infty(U)$  dei campi del sistema di riferimento:

$$Y = \sum_{i=1}^m \phi^i X_i.$$

Le sue derivate covarianti rispetto ai campi di riferimento  $X_1, \dots, X_m$  sono allora:

$$(31.3.14) \quad \nabla_{X_i} Y = \sum_{k=1}^m \left( X_i(\phi^k) + \sum_{j=1}^m \Gamma_{i,j}^k \phi^j \right) X_k.$$

Siano  $\bar{\Gamma}_{i,j}^k \in \mathcal{C}^\infty(U)$  i simboli di Christoffel di  $\Gamma$  in un altro riferimento  $(Y_1, \dots, Y_m)$  su  $U$ . È  $Y_i = \sum_{j=1}^m a_i^j X_j$ , con  $(a_i^j) \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}))$ . Indichiamo con  $(A_i^j)$  l'inversa della matrice  $(a_i^j)$ .

Vale allora la formula di trasformazione per i simboli di Christoffel:

$$(31.3.15) \quad \bar{\Gamma}_{i,j}^k = \sum_{r,s,t=1}^m \Gamma_{r,s}^t a_i^r a_j^s A_t^k + \sum_{t=1}^m A_t^k Y_i(a_j^t) \quad \text{per } i, j, k = 1, \dots, m.$$

Se  $X_i = \partial/\partial x^i$  e  $Y_i = \partial/\partial y^i$  questa formula si riduce alla (31.3.6); infatti le matrici  $(a_j^i)$  ed  $(A_j^i)$  sono in questo caso gli Jacobiani dei cambiamenti di coordinate.

Un diffeomorfismo  $\Phi : M \rightarrow M$  definisce un isomorfismo  $\Phi_* : \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow X^\Phi \in \mathfrak{X}(M)$  che fa corrispondere ad un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  il campo di vettori

$$X^\Phi(p) = d\Phi_{\Phi^{-1}(p)}(X_{\Phi^{-1}(p)}) \quad \text{per ogni } p \in M.$$

Il pullback di  $\Gamma$  mediante  $\Phi$  è una nuova connessione lineare  $\Gamma^\Phi$  su  $M$ . La corrispondente derivazione covariante  $\nabla^\Phi$  è definita da

$$(31.3.16) \quad \nabla_X^\Phi Y = \left( \nabla_{X^\Phi} Y^\Phi \right)^{\Phi^{-1}} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

PROPOSIZIONE XXXI.3.10. *Un diffeomorfismo  $\Phi : M \rightarrow M$  è una trasformazione affine per la connessione  $\nabla$  se  $\nabla^\Phi = \nabla$ .*