CAPITOLO I

VARIETÀ DIFFERENZIABILI

§1 Varietà topologiche

Sia $\mathbf{X} = (X, \tau)$ uno spazio topologico. Una *carta locale di dimensione* n in $\mathbf{X}$ è il dato (U, ϕ) di un *aperto* U di $\mathbf{X}$ e di un omeomorfismo $\phi : U \longrightarrow \phi(U) = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ di U su un *aperto* Ω dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$. Se $\phi(x_0) = 0$ per un punto x_0 di U, diremo ancora che x_0 è il *centro della carta locale.*

Se (U, ϕ), (V, ψ) sono due carte locali di dimensione n di $\mathbf{X}$, con $U \cap V \neq \emptyset$, allora $\phi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ sono due aperti non vuoti di $\mathbb{R}^n$ e l'applicazione:

$$\phi \circ \left(\psi\big|_{U\cap V}^{\psi(U\cap V)} \right)^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \phi(U \cap V) \tag{1.1}$$

è un omeomorfismo, che si dice la *funzione di transizione* dalla carta (V, ψ) alla carta (U, ϕ).

Diciamo che $\mathbf{X}$ è una *varietà topologica di dimensione* n se ogni suo punto ammette un intorno aperto omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 1 *Ogni punto di una varietà topologica di dimensione n ammette un intorno aperto omeomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Sia infatti U un intorno aperto di un punto x di una varietà topologica $\mathbf{X}$ e $\phi : U \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ un omeomorfismo di U su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$. Fissiamo una palla aperta B, con centro in $\phi(x)$, contenuta in Ω e un omeomorfismo $\psi : B \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Allora $\phi^{-1}(B) = V \subset U$ è un intorno aperto di x in $\mathbf{X}$ e $\psi \circ \phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un omeomorfismo di un intorno aperto V di x in $\mathbf{X}$ con $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 2 La dimensione n di una carta locale in un punto $p \in \mathbf{X}$ è un invariante topologico. Infatti non esistono omeomorfismi tra aperti di spazi Euclidei di dimensione diversa (vedi ad es. [W.Hurewicz, H.Wallman, *Dimension Theory.* Princeton, Princeton Univ.Press, 1941]) .

Una famiglia $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \,\big|\, i \in I\}$ di carte locali di $\mathbf{X}$ si dice un *atlante* se $\{U_i \,\big|\, i \in I\}$ è un ricoprimento di X.

Le funzioni di transizione[1]

$$\phi_{ij} = \phi_i \circ \left(\phi_j\big|_{U_i\cap U_j}^{\phi_j(U_i\cap U_j)} \right)^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_i(U_i \cap U_j) \tag{1.2}$$

dalla carta (U_j, ϕ_j) alla carta (U_i, ϕ_i), al variare di i, j in I, si dicono *funzioni di transizione dell'atlante* $\mathcal{A}$. Poniamo $\Omega_i = \phi_i(U_i)$, $\Omega_{ij} = \phi_j(U_i \cap U_j)$. Allora $\Omega_{ij} \subset \Omega_j$ e le funzioni di transizione $\phi_{ij} : \Omega_{ij} \longrightarrow \Omega_{ji}$ soddisfano:

(1) $\Omega_{ii} = \Omega_i$ e ϕ_{ii} è l'identità su Ω_i.

[1] Per semplicità penseremo le funzioni di transizione definite anche quando $U_i \cap U_j = \emptyset$, ammettendo che la funzione vuota sia l'unico omeomorfismo dell'insieme vuoto.

(2) $\phi_{ij}^{-1} = \phi_{ji}$ per ogni $i, j \in I$.
(3) $\phi_{ij}(\Omega_{ij} \cap \Omega_{kj}) = \Omega_{ji} \cap \Omega_{ki}$ per ogni $i, j, k \in I$ e il seguente diagramma è commutativo:

$$
\begin{array}{ccc}
\Omega_{ij} \cap \Omega_{kj} & \xrightarrow{\phi_{ij}} & \Omega_{ji} \cap \Omega_{ki} \\
{\scriptstyle \phi_{kj}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \phi_{ki}} \\
\Omega_{ik} \cap \Omega_{jk} & = & \Omega_{jk} \cap \Omega_{ik}
\end{array} \tag{1.3}
$$

Proposizione 1.1 *Sia* $\mathbf{X}$ *una varietà topologica di dimensione* n *e sia* $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ *un atlante di* $\mathbf{X}$*. Allora* $\mathbf{X}$ *è omeomorfo alla somma topologica degli aperti* $\Omega_i = \phi_i(U_i)$ *dello spazio Euclideo* $\mathbb{R}^n$*, rispetto alle funzioni di incollamento*

$$\phi_{ij} : \Omega_{ij} = \phi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \Omega_{ji} = \phi_i(U_i \cap U_j).$$

Sia data viceversa una famiglia $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ *di aperti di* $\mathbb{R}^n$ *e per ogni coppia di indici* $i, j \in I$ *sia assegnato un sottoinsieme aperto* Ω_{ij} *di* Ω_j *e omeomorfismi* $\phi_{ij} : \Omega_{ij} \longrightarrow \Omega_{ji}$ *tali che siano soddisfatte le proprietà (1), (2), (3) elencate sopra. Allora la somma topologica degli* Ω_i *rispetto alle funzioni di incollamento* ϕ_{ij} *è una varietà topologica di dimensione* n*.*

Dim. Indichiamo con $\bigsqcup_{i \in I} \Omega_i$ l'unione disgiunta degli aperti $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, e definiamo l'applicazione

$$\tilde{\psi} : \bigsqcup_{i \in I} \Omega_i \longrightarrow X\,, \qquad \text{mediante} \qquad \tilde{\psi} \circ \iota_i = \phi_i^{-1} \quad \forall i \in I\,.$$

Per passaggio al quoziente otteniamo un'applicazione continua

$$\psi : \biguplus (\Omega_i, \Omega_{ij}, \phi_{ij}) \longrightarrow X\,,$$

che è bigettiva ed aperta, e quindi un omeomorfismo.

Viceversa, per la [Proposizione 3.2 del Capitolo II, in *Lezioni di topologia generale, 2005-2006*], gli affondamenti $\mathfrak{j}_i$ degli aperti Ω_i nella somma topologica $\mathbf{X} = \biguplus (\Omega_i, \Omega_{ij}, \phi_{ij})$ sono immersioni topologiche aperte: quindi $\mathbf{X}$ ammette un ricoprimento mediante gli aperti di un sistema di carte locali di dimensione n e quindi è una varietà topologica di dimensione n. □

Esempio 1.1 La sfera $\mathbf{S}^n$ è una varietà topologica di dimensione n. Infatti le proiezione stereografiche dai due poli $(\pm e_0)$ sul piano equatoriale:

$$
\begin{aligned}
\phi_+ &: U_+ = \mathbf{S}^n \setminus \{+e_0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n\,, \quad \phi_+(x^0, x^1, \ldots, x^n) = \left(\tfrac{x^1}{1-x^0}, \ldots, \tfrac{x^n}{1-x^0}\right) \\
\phi_- &: U_- = \mathbf{S}^n \setminus \{-e_0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n\,, \quad \phi_-(x^0, x^1, \ldots, x^n) = \left(\tfrac{x^1}{1+x^0}, \ldots, \tfrac{x^n}{1+x^0}\right)
\end{aligned}
$$

definiscono un atlante $\{(U_+, \phi_+), (U_-, \phi_-)\}$ con funzioni di transizione

$$\phi_{-,+}\,, \, \phi_{+,-} \; : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \qquad \phi_{-+}(y) = \phi_{+-}(y) = y/|y|^2\,.$$

Esempio 1.2 Lo spazio proiettivo reale di dimensione n è una varietà topologica di dimensione n. Un atlante $\mathcal{A}$ di $\mathbb{RP}^n$ è descritto nelle coordinate omogenee dagli aperti

$$U_i = \{(x_0\,, x_1\,, \ldots\,, x_n) \,\big|\, x_i \neq 0\} \quad \text{per} \quad i = 0, 1, ..., n$$

e dagli omeomorfismi

$$\phi_i : U_i \ni (x_0\,, x_1\,, \ldots\,, x_n) \longrightarrow \left(\tfrac{x_0}{x_i}, \tfrac{x_1}{x_i}, ..., \tfrac{x_n}{x_i}\right) \in \mathbb{R}^n_i = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, y^i = 1\} \simeq \mathbb{R}^n\,.$$

Le funzioni di transizione sono le

$$\phi_{i,j} : \Omega_{i,j} = \{y \in \mathbb{R}^n_j \,|\, y^i \neq 0\} \ni y \longrightarrow [y_i]^{-1} \cdot y \in \Omega_{j,i} = \{y \in \mathbb{R}^n_i \,|\, y^j \neq 0\}\,.$$

Esempio 1.3 Lo spazio proiettivo complesso di dimensione n è una varietà topologica di dimensione $2n$. Un atlante $\mathcal{A}$ di $\mathbb{CP}^n$ è descritto nelle coordinate omogenee dagli aperti

$$U_i = \{(z_0\,, z_1\,, \ldots\,, z_n) \,\big|\, z_i \neq 0\} \quad \text{per} \quad i = 0, 1, ..., n$$

e dagli omeomorfismi

$$\phi_i : U_i \ni (z_0\,, z_1\,, \ldots\,, z_n) \longrightarrow \left(\tfrac{z_0}{z_i}, \tfrac{z_1}{z_i}, ..., \tfrac{z_n}{z_i}\right) \in \mathbb{C}^n_i = \{y \in \mathbb{C}^{n+1} \,|\, z^i = 1\} \simeq \mathbb{C}^n\,.$$

Le funzioni di transizione sono le

$$\phi_{i,j} : \Omega_{i,j} = \{y \in \mathbb{C}^n_j \,|\, \zeta^i \neq 0\} \ni \zeta \longrightarrow [\zeta_i]^{-1} \cdot \zeta \in \Omega_{j,i} = \{\zeta \in \mathbb{R}^n_i \,|\, \zeta^j \neq 0\}\,.$$

Esempio 1.4 Sia Γ un sottogruppo additivo discreto di $\mathbb{R}^n$ e sia $X = \mathbb{R}^n/\Gamma$ lo spazio quoziente ottenuto identificando due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ quando $(x - y) \in \Gamma$. Sia $\delta = \min\{|\gamma| \,|\, \gamma \in \Gamma \setminus \{0\}\}$. Sia $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow X = \mathbb{R}^n/\Gamma$ la proiezione nel quoziente. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'insieme $U_{x_0} = \{\pi(x + x_0) \,|\, |x| < \delta/2\}$ è aperto in X perché $\pi^{-1}(U_{x_0}) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\{|x + \gamma - x_0| < \delta/2\}$; inoltre la:

$$\psi_{x_0} : \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| < \delta/2\} \ni x \longrightarrow \pi(x + x_0) \in U_{x_0}$$

è un omeomorfismo. Si verifica quindi che $\mathcal{A} = \left\{(U_{x_0}, \psi^{-1}_{x_0}) \,\big|\, x_0 \in \mathbb{R}^n\right\}$ è un atlante che definisce su X una struttura di varietà topologica di dimensione n.

Abbiamo:

Proposizione 1.2 *Una varietà topologica di dimensione n soddisfa l'assioma di separazione T_1.* □

Esempio 1.5 Sia $\mathbf{Y}$ uno spazio topologico con la topologia discreta, contenente almeno due punti. Consideriamo sul prodotto topologico $\mathbb{R} \times \mathbf{Y}$ la relazione di equivalenza

$$(x, y)\mathcal{R}(u, v) \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \quad \text{e} \quad y = v \\ \quad \text{oppure} \\ x = u > 0. \end{cases}$$

Il quoziente $\mathbf{X} = (\mathbb{R} \times \mathbf{Y})/_{\mathcal{R}}$ è una varietà topologica di dimensione 1, ma non è uno spazio di Hausdorff in quanto i punti di X corrispondenti a $(0, y)$ e $(0, v)$ con $y \neq v$ sono distinti, ma non ammettono intorni disgiunti.

Quindi *una varietà topologica non è necessariamente uno spazio di Hausdorff.*

Una varietà topologica $\mathbf{X}$ di dimensione n si dice *numerabile all'infinito* se esiste una famiglia numerabile di insiemi compatti $\{K_\nu \,|\, \nu \in \mathbb{N}\}$ tali che

$$(*) \qquad K_\nu \subset \overset{\circ}{K}_{\nu+1} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{\nu=0}^{\infty} K_\nu = X.$$

PROPOSIZIONE 1.3 *Una varietà topologica di Hausdorff numerabile all'infinito è paracompatta. Viceversa, le componenti connesse di una varietà topologica paracompatta sono numerabili all'infinito.* □

TEOREMA 1.4 *Sia* $\mathbf{X}$ *una varietà topologica di Hausdorff, di dimensione* n *e numerabile all'infinito. Allora* $\mathbf{X}$ *è uno spazio topologico localmente compatto, metrizzabile e a base numerabile.*

DIM. Osserviamo che ogni varietà topologica di dimensione n è localmente compatta. Infatti ogni carta coordinata è un aperto localmente compatto di $\mathbf{X}$.

Poiché uno spazio regolare e a base numerabile è anche metrizzabile, è sufficiente dimostrare che $\mathbf{X}$ è regolare a base numerabile.

Siano $x_0 \in X$ ed F un chiuso di $\mathbf{X}$ che non contiene x_0. Fissiamo un intorno aperto U di x_0 che non interseca F. Poiché $\mathbf{X}$ è localmente compatto, possiamo supporre che $\overline{U}$ sia compatto e non intersechi F. Poiché $\overline{U}$, essendo un compatto di Hausdorff, è uno spazio normale, per il Lemma di Urysohn esiste una funzione continua $\phi : \overline{U} \longrightarrow \mathbf{I} = [0, 1]$ con $\phi(x_0) = 0$ e $\phi(x) = 1$ se $x \in bU$. La funzione

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{se} \quad x \in \overline{U} \\ 1 & \text{se} \quad x \in X \setminus U \end{cases}$$

è continua, e vale 0 in x_0 e 1 su F. Ciò dimostra che $\mathbf{X}$ è completamente regolare e quindi regolare.

Dimostriamo ora che $\mathbf{X}$ è a base numerabile. A questo scopo consideriamo un qualsiasi atlante $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i, \Omega_i) \,|\, i \in I\}$ di $\mathbf{X}$.

Sia $\{K_\nu\}$ una successione di compatti di $\mathbf{X}$ che godano delle proprietà $(*)$. Per ogni intero non negativo ν, possiamo trovare un insieme finito di indici I_ν tali che $K_\nu \subset \cup_{i \in I_\nu} U_i$. L'insieme $J = \cup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu$ è numerabile e $\mathcal{A}' = \{(U_i, \phi_i, \Omega_i) \,|\, i \in J\}$ è ancora un atlante di $\mathbf{X}$. Ciascuno degli aperti U_i ammette una base numerabile $\mathcal{B}_i$ perché omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathcal{B} = \cup_{i \in J} \mathcal{B}_i$ è ancora numerabile perché unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili ed è evidentemente una base di X. □

§2 FUNZIONI DIFFERENZIABILI NEGLI SPAZI $\mathbb{R}^n$

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed

$$f : \Omega \ni x \longrightarrow f(x) = {}^t(f^1(x), \dots, f^m(x)) \in \mathbb{R}^m$$

un'applicazione di Ω in $\mathbb{R}^m$. Diciamo che f ammette in $x_0 \in \Omega$ *derivata parziale rispetto a* x^i se la funzione

$$t \longrightarrow \alpha(t) = f(x_0 + t\mathbf{e}_i) \in \mathbb{R}^m\,,$$

definita in un intorno di $0 \in \mathbb{R}$, è derivabile in 0. Si pone allora

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} = \frac{d}{dt}\alpha(t)|_{t=0} = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(x_0+t\mathbf{e}_i)-f(x_0)}{t}\,.$$

La f si dice *differenziabile* in $x_0 \in \Omega$ se esiste una applicazione lineare $df(x_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tale che

$$f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x-x_0) = o(|x-x_0|) \quad \text{per} \quad x \longrightarrow x_0\,.$$

Questa condizione significa che, per ogni $\epsilon > 0$, possiamo trovare un intorno U_ϵ di x_0 in Ω tale che

$$|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x-x_0)| \le \epsilon|x-x_0| \quad \forall x \in U_\epsilon\,.$$

Vale il:

Teorema 2.1 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione. La f ammette la derivata parziale $\partial f(x_0)/\partial x^i$ (risp. è differenziabile in x_0) se e soltanto se ciascuna delle funzioni*

$$\Omega \ni x \longrightarrow f^j(x) \in \mathbb{R},\ j = 1, ..., m$$

ammette la derivata parziale $\partial f^j(x_0)/\partial x^i$ (risp. è differenziabile in x_0).

Se f è differenziabile in x_0 essa è continua in x_0 ed ammette tutte le derivate parziali $\partial f(x_0)/\partial x^i$ (per $i = 1, ..., n$) in x_0 e

$$df(x_0)(v) = Jf(x_0)v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

ove $Jf(x_0)$ è la matrice Jacobiana

$$Jf(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^2} & \dots & \dfrac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^n} \\ \dfrac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^2} & \dots & \dfrac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f^m(x_0)}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^m(x_0)}{\partial x^2} & \dots & \dfrac{\partial f^m(x_0)}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo il seguente:

Teorema 2.2 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione che ammette derivate parziali $\partial f(x)/\partial x^i$ rispetto alle coordinate $x^1, ..., x^n$ di $\mathbb{R}^n$ in ogni punto di Ω. Se le funzioni*

$$\Omega \ni x \longrightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \in \mathbb{R}^m$$

sono continue in $x_0 \in \Omega$ *per ogni* $i = 1, ..., n$, *allora* f *è differenziabile in* x_0.

Una funzione $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ che ammetta derivate parziali prime continue in Ω, rispetto a ciascuna delle coordinate, si dice *differenziabile di classe* $\mathcal{C}^1$ *in* Ω.

Teorema 2.3 (Differenziazione della funzione composta) *Siano* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *e* $g : G \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ *due funzioni di classe* $\mathcal{C}^1$, *definite rispettivamente su un aperto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e su un aperto* $G \subset \mathbb{R}^m$. *Se* $f(\Omega) \subset G$, *allora la funzione composta* $g \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ *è differenziabile di classe* $\mathcal{C}^1$ *e*

$$d(g \circ f)(x) \, = \, dg(f(x)) \circ df(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Le derivate parziali di ordine superiore di una funzione $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ si definiscono per ricorrenza: se $1 \leq i_1, ..., i_m \leq n$ e la derivata parziale $\partial^m f(x)/\partial x^{i_1} .... \partial x^{i_m}$ è definita in Ω, e $1 \leq j \leq n$, allora la derivata parziale

$$\partial^{m+1} f(x)/\partial x^j \partial x^{i_1} .... \partial x^{i_m}$$

è, quando esiste, la derivata parziale rispetto alla coordinata x^j della funzione

$$\Omega \ni x \longrightarrow \partial^m f(x)/\partial x^{i_1} .... \partial x^{i_m} \in \mathbb{R}^m.$$

Vale il:

Teorema 2.4 *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una funzione che ammetta derivate parziali del primo e del secondo ordine rispetto alle coordinate, continue in* Ω. *Allora*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^i \partial x^j} \, = \, \frac{\partial f(x)}{\partial x^j \partial x^i} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n, \ x \in \Omega.$$

Una funzione $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definita su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ si dice differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ in Ω se essa ammette derivate parziali continue in Ω fino all' ordine k. Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^m$, indichiamo con $\mathcal{C}^k(\Omega, A)$ l'insieme di tutte le funzioni $f : \Omega \longrightarrow A$ tali che $\Omega \ni x \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}^m$ sia differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ in Ω.

Diremo che f è differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ nel punto x_0 di Ω se esiste un intorno aperto U di x_0 in Ω tale che $f|_U$ sia differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$.

Per il teorema precedente, se $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$, le sue derivate parziali fino all' ordine k non dipendono dall'ordine in cui si eseguono le successive derivate prime:

$$\partial^h f(x)/\partial x^{i_1} ... \partial x^{i_h} \, = \, \partial^h f(x)/\partial x^{i_{\sigma_1}} ... \partial x^{i_{\sigma_h}}$$
$$\forall 1 \leq h \leq k, \ 1 \leq i_1, ..., i_h \leq n, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_h.$$

Associamo ad ogni h-upla $(i_1, ..., i_h)$ di interi con $1 \leq i_1, ..., i_h \leq n$ un multiindice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ove α_j è il numero di indici r tali che $i_r = j$. Definiamo allora

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x^\alpha} \, = \, \partial^h f(x)/\partial x^{i_1} ... \partial x^{i_h}.$$

Indichiamo con $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ l'insieme di tutte le funzioni differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, a valori in $\mathbb{R}^m$. Se $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, scriveremo per semplicità

$$\partial_\alpha \quad \text{invece di} \quad \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!,$$

e, se $x = {}^t(x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$,

$$x^\alpha = (x^1)^{\alpha^1} \cdot \ldots \cdot (x^n)^{\alpha_n}.$$

Poniamo

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Una funzione $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ si dice *analitica reale* in Ω se per ogni punto $x_0 \in \Omega$ la serie di Taylor

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\partial_\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha$$

è convergente in un intorno $\{|x - x_0| < r\} \subset \Omega$, con $r > 0$, e la sua somma è uguale a $f(x)$ in ogni punto di tale intorno.

L'insieme delle funzioni analitiche reali definite sull'aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, a valori in $\mathbb{R}^m$, si indica con $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Vale la catena di inclusioni:

$$\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^m) \supset \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \supset \ldots. \supset \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^m) \supset \ldots.\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) \supset \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Se $m = 1$, scriviamo $\mathcal{C}^k(\Omega)$ invece di $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ e osserviamo che, per la formula di Leibnitz,

$$\partial_\alpha(fg) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}(\partial_\beta f)(\partial_\gamma g), \quad \forall f,\, g \in \mathcal{C}^k(\Omega),\ \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \le k,$$

lo spazio vettoriale reale $\mathcal{C}^k(\Omega)$ (per $0 \le k \le \omega$) è una $\mathbb{R}$-algebra per il prodotto di funzioni.

§3 Equazioni differenziali ordinarie

Richiamiamo i risultati fondamentali sull'esistenza, unicità e dipendenza dai dati iniziali e dai parametri relativi al problema di Cauchy per sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Teorema 3.1 (Peano) *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{m+1}$ e sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Fissati $(t_0, y_0) \in \Omega$, possiamo trovare un $r > 0$ e una funzione $u : [t_0, t_0 + r] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ di classe $\mathcal{C}^1$ tale che*

(i) $(t, u(t)) \in \Omega \quad \forall t_0 \le t \le t_0 + r$,
(ii) $u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t_0 \le t \le t_0 + r$,
(iii) $u(t_0) = y_0$.

Dim. Possiamo supporre per semplicità che $t_0 = 0$, $y_0 = 0$. Siano $a > 0$ ed $R > 0$ tali che

$$K = [-a, a] \times \overline{B}(0, R) \subset \Omega.$$

Per il teorema di Weierstrass, la f è limitata sul compatto K: sia $M > 0$ tale che

$$|f(t, y)| \leq M \quad \forall (t, y) \in K.$$

Fissiamo $r > 0$ tale che

$$r\, M < R.$$

Sia X l'insieme di tutte le funzioni continue $u : [0, r] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tali che $|u(t)| \leq R$ per ogni $0 \leq t \leq r$. Su X consideriamo la topologia della convergenza uniforme, associata alla distanza

$$\|u - v\| = \sup_{0 \leq t \leq r} |u(t) - v(t)|.$$

Con questa topologia, X è uno spazio metrico completo. Consideriamo l' applicazione

$$X \ni u \longrightarrow \Phi(u) \in \mathcal{C}([0, r], \mathbb{R}^m)$$

definita da

$$\Phi(u)(t) = \int_0^t f(s, u(s)) ds.$$

Abbiamo

$$|\Phi(u)(t)| \leq \int_0^t |f(s, u(s))| ds \leq \int_0^t M ds = Mt \leq R \quad \text{se} \quad 0 \leq t \leq r.$$

Quindi $\Phi(u) \in X$ per ogni $u \in X$. La funzione Φ è continua su X. Infatti la f è uniformemente continua su K e quindi, fissato $\epsilon > 0$, possiamo trovare $\eta > 0$ tale che

$$|f(t, y) - f(s, z)| < r^{-1}\epsilon \quad \text{se} \quad (t, y),\, (s, z) \in K, \quad |t - s| < \eta,\ |y - z| < \eta.$$

Siano $u, v \in X$ con $\|u - v\| < \eta$. Allora

$$|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)| = \left| \int_0^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s)) ds \right| \leq r^{-1}\epsilon t \leq \epsilon.$$

Osserviamo ancora che le funzioni di $\Phi(X)$ sono equicontinue ed equilimitate e quindi $\Phi(X)$ è relativamente compatto in X per il teorema di Ascoli-Arzelà.

Consideriamo la funzione

$$X \ni u \longrightarrow \|u - \Phi(u)\| \in \mathbb{R}$$

e sia

$$\delta = \inf_{u \in X} \|u - \Phi(u)\|.$$

Dico che $\delta = 0$. Infatti, fissato $\epsilon > 0$, sia $\eta > 0$ tale che

$$|f(t,y) - f(s,z)| < r^{-1}\epsilon \quad \text{se} \quad (t,y),\, (s,z) \in K, \quad |t-s| < \eta,\ |y-z| < \eta.$$

Consideriamo una partizione

$$0 = t_0 < t_1 < \dots . < t_N = r$$

con $|t_j - t_{j-1}| < (1+M)^{-1}\eta$ per $j = 1, ..., N$. Definiamo per ricorrenza

$$\begin{cases} y_0 = f(0,0) \\ y_j = y_{j-1} + (t_j - t_{j-1}) f(t_{j-1}, y_{j-1}) \quad \text{se} \quad j = 1, ..., N. \end{cases}$$

Consideriamo poi la funzione a scalini

$$\psi(t) \;=\; f(t_{j-1}, y_{j-1}) \quad \text{se} \quad t \in [t_{j-1}, t_j[, \quad j = 1, ..., N.$$

La funzione

$$v(t) \;=\; \int_0^t \psi(s)ds$$

è lineare a tratti e appartiene a X. Inoltre

$$|\psi(t) - f(t, v(t))| < r^{-1}\epsilon \quad \forall 0 \le t \le r.$$

Infatti su ciascuno degli intervalli $[t_{j-1}, t_j[$ abbiamo:

$$|\psi(t) - f(t,v(t))| \;=\; |f(t_{j-1}, y_{j-1}) - f(t, y_{j-1} + (t - t_{j-1}) f(t_{j-1}, y_{j-1})| < r^{-1}\epsilon$$

perché

$$\begin{aligned} &|t_{j-1} - t| \le |t_j - t_{j-1}| < \eta, \\ &|(t - t_{j-1}) f(t_{j-1}, y_{j-1})| < (1+M)^{-1} M\eta < \eta. \end{aligned}$$

Quindi

$$|v(t) - \Phi(v)(t)| \le \int_0^t |\psi(s) - f(s, v(s))| ds \le r^{-1}\epsilon t \le \epsilon.$$

Dunque $\delta = 0$.

Sia $\{u_\nu\}$ una successione in X tale che

$$\lim_{\nu \longrightarrow \infty} \|u_\nu - \Phi(u_\nu)\| = 0.$$

Poiché $\Phi(X)$ è relativamente compatto in X, a meno di estrarre una sottosuccessione, possiamo supporre che

$$\{\Phi(u_\nu)\} \quad \text{sia una successione convergente in} \quad X.$$

Allora

$$\|u_\nu - u_\mu\| \le \|(u_\nu - \Phi(u_\nu))\| + \|u_\mu - \Phi(u_\mu)\| + \|\Phi(u_\nu) - \Phi(u_\mu)\| \longrightarrow 0 \quad \text{se} \quad \mu, \nu \longrightarrow \infty$$

e quindi la $\{u_\nu\}$ è una successione di Cauchy in X. Poiché X è completo, essa converge a una funzione $u \in X$. Per la continuità di Φ, abbiamo

$$\Phi(u) = u$$

e quindi

$$u(t) = \int_0^t f(s, u(s))ds \quad \forall 0 \le t \le r.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che $u \in \mathcal{C}^1([0,r], \overline{B}(0,R))$ e che u soddisfa il sistema

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) & \text{se} \quad 0 \le t \le r, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Osservazione Sotto le ipotesi del teorema di Peano, la soluzione del problema

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) & \text{se} \quad t_0 \le t \le t_0 + r \\ u(t_0) = y_0 \end{cases}$$

può non essere unica. Consideriamo ad esempio fa funzione continua

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longrightarrow \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}.$$

Tutte le funzioni

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le t \le c \\ \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x-c)\right)^3} & \text{se} \quad t \ge c \end{cases}$$

per $c \ge 0$ sono soluzioni di

$$\begin{cases} u'(t) = \sqrt[3]{u(t)} & \text{se} \quad t \ge 0, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Un'altra dimostrazione del Teorema di Peano

Siano K, M, r e X definiti come in precedenza. Fissato un qualsiasi numero reale positivo $0 < \epsilon < r$, vi è una e una sola funzione $u_\epsilon \in X$ che soddisfa:

$$\begin{cases} u_\epsilon(t) = 0 & \text{se} \quad 0 \le t \le \epsilon \\ \\ u_\epsilon(t) = \int_0^t f(s, u_\epsilon(s-\epsilon))ds & \text{se} \quad \epsilon \le t \le r. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che la famiglia $\{u_\epsilon\} \subset X$ è relativamente compatta in X per il teorema di Ascoli-Arzelà. Possiamo quindi trovare una successione $\{\epsilon_\nu\}$ infinitesima tale che

$$u_{\epsilon_\nu} \longrightarrow u \quad \text{in} \quad X.$$

Passando al limite sotto il segno di integrale, otteniamo allora

$$u(t) = \int_0^t f(s, u(s))ds \quad \text{se} \quad 0 \le t \le r.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale la u è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ su $[0,r]$ e soddisfa:

$$\begin{cases} (t,u(t)) \in \Omega & \forall 0 \le t \le r \\ u(0) = 0 \\ u'(t) = f(t,u(t)) & \text{se} \quad 0 \le t \le r. \end{cases}$$

Teorema 3.2 (Unicità) *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^m_y$ e sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua, che ammette derivate parziali prime continue rispetto alle variabili $y^1, ..., y^m$. Sia $(t_0, y_0) \in \Omega$. Se $u_j : [t_0, t_0 + r_j] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (con $r_j > 0$ per $j = 1,2$) sono funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ che risolvono il sistema:*

$$\begin{cases} (t, u_j(t)) \in \Omega & \textit{se} \quad t \in [t_0, t_0 + r_j], \\ u_j'(t) = f(t, u_j(t)) & \textit{se} \quad t \in [t_0, t_0 + r_j], \\ u_j(t_0) = y_0 \end{cases}$$

allora

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \forall t_0 \le t \le t_0 + \min\{r_1, r_2\}.$$

Dim. Poniamo $r = \min\{r_1, r_2\}$ e sia

$$A = \{t \in [t_0, t_0 + r] \mid u_1(t) = u_2(t)\}.$$

L'insieme A è chiuso perché le funzioni u_j sono continue. Esso contiene t_0 e quindi non è vuoto. La componente connessa A_0 di t_0 in A è un intervallo chiuso $[t_0, t_1]$ con $t_0 \le t_1 \le t_0 + r$. Dico che $t_1 = t_0 + r$. Infatti, se fosse $t_1 < t_0 + r$, avremmo

$$u_j(t) = y_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, u_j(s))ds \qquad \text{se} \quad t_1 \le t \le t_0 + r, \quad j = 1,2$$

con

$$y_1 = u_1(t_1) = u_2(t_1).$$

L'aperto Ω contiene un intorno di (t_1, y_1) della forma

$$K = \{|t - t_1| \le r_1\} \times \overline{B}(y_1, R_1).$$

Su $\mathbb{K}$ abbiamo

$$\left| \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} \right| \le L < \infty.$$

Inoltre, poiché le u_j sono continue, possiamo scegliere $0 < \epsilon < \min\{r_1, t_0 + r - t_1\}$ tale che

$$u_j(t) \in \overline{B}(y_1, R_1) \quad \forall t_1 \le t \le t_1 + \epsilon, \quad j = 1,2.$$

Se $z_1, z_2 \in \overline{B}(y_1, R_1)$, abbiamo

$$\begin{aligned} |f(t,z_2) - f(t,z_1)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{d\xi} f(t, z_1 + \xi(z_2 - z_1)) d\xi \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(t, z_1 + \xi(z_2 - z_1))(z_2 - z_1) d\xi \right| \\ &\le \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, z_1 + \xi(z_2 - z_1))(z_2 - z_1) \right| d\xi \\ &\le L \cdot |z_2 - z_1|. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$|u_2(t) - u_1(t)| \leq \int_{t_1}^{t} |f(s, u_2(s)) - f(s, u_1(s))| ds \leq (t - t_1) L \sup_{t_1 \leq s \leq t} |u_2(s) - u_1(s)|$$

per $t_1 \leq t \leq t_1 + \epsilon$. Pur di scegliere $\delta > 0$ con $\delta L < 1$, $\delta \leq \epsilon$, avremo

$$\sup_{t_1 \leq t \leq t_1 + \delta} |u_2(t) - u_1(t)| \leq \delta L \sup_{t_1 \leq t \leq t_1 + \delta} |u_2(t) - u_1(t)| \Rightarrow u_1(t) = u_2(t) \\ \forall t_1 \leq t \leq t_1 + \delta.$$

Ciò contraddice la definizione di t_1 e mostra quindi che $t_1 = t + r$.

Teorema 3.3 (Dipendenza continua dai dati iniziali) *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^m_y$ e sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua, che ammette derivate parziali prime continue rispetto alle variabili $y^1, ..., y^m$. Sia $(t_0, y_0) \in \Omega$. Possiamo allora trovare $r > 0$, $R > 0$ e una funzione continua*

$$\phi : [t_0, t_0 + r] \times B(y_0, R) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

che ammette derivata parziale prima continua rispetto alla variabile t, tale che

$$\begin{cases} (t, \phi(t, y)) \in \Omega & \text{se} \quad (t, y) \in [t_0, t_0 + r] \times B(y_0, R) \\ \phi(t_0, y) = y & \text{se} \quad y \in B(y_0, R) \\ \dfrac{\partial \phi(t, y)}{\partial t} = f(t, \phi(t, y)) & \text{se} \quad t_0 \leq t \leq t_0 + r. \end{cases}$$

Dim. Supponiamo per semplicità che $t_0 = 0$, $y_0 = 0$. Dal teorema di esistenza e unicità segue facilmente l'esistenza, per ogni y in un intorno di 0, di una soluzione $u_y(t)$ del problema

$$\begin{cases} (t, u_y(t)) \in \Omega \quad \text{se} \quad 0 \leq t \leq r \\ u_y(0) = y \\ u'_y(t) = f(t, u_y(t)) \quad \text{se} \quad 0 \leq t \leq r. \end{cases}$$

Posto $\phi(t, y) = u_y(t)$, resta da dimostrare la dipendenza continua di ϕ da y.

A questo scopo introduciamo $\psi(t, y) = \phi(t, y) - y$ ed osserviamo che vale l' uguaglianza:

$$\psi(t, y) = \int_0^t f(s, y + \psi(s, y)) ds \quad \text{se} \quad 0 \leq t \leq r.$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} \alpha(t) = |\psi(t, y_2) - \psi(t, y_1)| &\leq \int_0^t |f(s, y_2 + \psi(s, y_2)) - f(s, y_1 + \psi(s, y_1))| ds \\ &\leq \int_0^t L(|y_2 - y_1| + \alpha(s)) ds \\ &\leq Lt|y_2 - y_1| + L \int_0^t \alpha(s) ds \\ &\leq Lr|y_2 - y_1 + + L \int_0^t \alpha(s) ds. \end{aligned}$$

Indichiamo con $\beta(t)$ la funzione

$$\beta(t) \;=\; Lr|y_2 - y_1| + +L\int_0^t \alpha(s)ds.$$

Allora $\beta(t)$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e

$$\begin{cases} \beta'(t) \;=\; L\alpha(t) \\ \beta(t) \geq Lr|y_2 - y_1| \\ \alpha(t) \leq \beta(t). \end{cases}$$

Otteniamo allora

$$\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} \leq L$$

da cui, integrando,

$$\beta(t) \leq Lr|y_2 - y_1|e^{Lt}.$$

Questa disuguaglianza dimostra la tesi.

TEOREMA 3.4 (DIPENDENZA $\mathcal{C}^k$ DAI DATI INIZIALI) *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^m_y \times \mathbb{R}^k_\lambda$ e sia*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

una funzione di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$. Fissato un punto $(t_0, y_0, \lambda_0) \in \Omega$, possiamo trovare $r > 0$, $R > 0$, e una funzione

$$\phi : G = [-r + t_0, r + t_0] \times B(y_0, R) \times B(\lambda_0, L) \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

di classe $\mathcal{C}^k$ tale che

$$\begin{cases} (t, \phi(t, y, \lambda), \lambda) \in \Omega \quad \forall (t, y, \lambda) \in G, \\ \dfrac{\partial\phi(t, y, \lambda)}{\partial t} \;=\; f(t, \phi(t, y, \lambda), \lambda) \quad se \quad |t - t_0| \leq r \\ \phi(t_0, y, \lambda) \;=\; y. \end{cases}$$

DIM. Basta osservare che le derivate parziali delle soluzioni del sistema differenziale

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t, y, \lambda) = f(t, \phi(t, y, \lambda), \lambda)$$

soddisfano ancora un sistema differenziale (che si ottiene calcolando le derivate parziali di ambo i membri) ed applicare il teorema di esistenza e unicità. $\square$

§4 IL TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE

TEOREMA 4.1 (DELLE FUNZIONI IMPLICITE) *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$ e sia $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Supponiamo che F ammetta derivate parziali prime continue rispetto a $y^1, ..., y^m$ in Ω e che, in un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ la matrice*

$$\frac{\partial F}{\partial y} \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F^1(x_0, y_0)}{\partial y^1} & \dfrac{\partial F^1(x_0, y_0)}{\partial y^2} & \cdots & \dfrac{\partial F^1(x_0, y_0)}{\partial y^m} \\ \dfrac{\partial F^2(x_0, y_0)}{\partial y^1} & \dfrac{\partial F^2(x_0, y_0)}{\partial y^2} & \cdots & \dfrac{\partial F^2(x_0, y_0)}{\partial y^m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F^m(x_0, y_0)}{\partial y^1} & \dfrac{\partial F^m(x_0, y_0)}{\partial y^2} & \cdots & \dfrac{\partial F^m(x_0, y_0)}{\partial y^m} \end{pmatrix}$$

sia invertibile. Possiamo allora determinare due numeri reali positivi $r, R > 0$ *e una funzione continua*

$$f : B(x_0, r) \longrightarrow B(y_0, R)$$

tali che

$$B(x_0, r) \times B(y_0, R) \subset \Omega \quad e \quad F(x, f(x)) = F(x_0, y_0) \quad \forall x \in B(x_0, y_0)$$

Dim. Possiamo supporre per semplicità che $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ e $F(x_0, y_0) = 0$. Sia $A = \dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}$ e consideriamo l'applicazione

$$G : \Omega \ni (x, y) \longrightarrow y \,-\, A^{-1}F(x, y) \in \mathbb{R}^m.$$

La G ammette derivate parziali prime continue rispetto a $y^1, ..., y^m$ e $\dfrac{\partial G(0,0)}{\partial y} = 0$. Possiamo quindi trovare $r > 0$, $R > 0$ tali che

$$\overline{B}(0, r) \times \overline{B}(0, R) \subset \Omega$$

e

$$\left\| \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \right\| < \frac{1}{2} \quad \text{se} \quad |x| < r,\ |y| < R.$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}
|G(x, y_2) - G(x, y_1)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} G(x, y_1 + t(y_2 - y_1))dt \right| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial y}(x, y_1 + t(y_2 - y_1))(y_2 - y_1)dt \right| \\
&\leq \int_0^1 \|dfrac\partial G\partial y(x, y_1 + t(y_2 - y_1))\|\,|y_2 - y_1|dt \\
&\leq \frac{1}{2}|y_2 - y_1| \\
&\qquad \forall |x| < r,\ |y_1|,\ |y_2| < R.
\end{aligned}$$

La G è uniformente continua sul compatto $\overline{B}(0, r) \times \overline{B}(0, R)$. In particolare possiamo trovare $0 < r_0 < r$ tale che

$$|G(x_2, y_2) - G(x_1, y_1)| < \frac{R}{2} \qquad \begin{aligned} &\text{se} \quad |x_2 - x_1| \leq r_0, \quad |y_2 - y_1| \leq r_0, \\ &(x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in \overline{B}(0, r) \times \overline{B}(0, R). \end{aligned}$$

Siano ora $x \in \overline{B}(0, r_0)$, $y \in \overline{B}(0, R)$. Allora

$$|G(x, y)| \leq |G(x, y) - G(0, y)| + |G(0, y)| < R.$$

In particolare, se X è lo spazio delle funzioni continue $f : \overline{B}(0,r) \longrightarrow \overline{B}(0,R)$, munito della topologia della convergenza uniforme, l'applicazione:

$$T : X \ni f \longrightarrow G(x, f(x)) \in X$$

è ben definita. Inoltre

$$\|T(u) - T(v)\| = \sup_{\overline{B}(0,r_0)} |G(x, u(x)) - G(x, v(x))| \leq \frac{1}{2}\|u - v\| \quad \forall u, v \in X.$$

La T è una contrazione ed ammette quindi un unico punto fisso $f \in X$:

$$f(x) = f(x) - A^{-1}F(x, f(x)) \Rightarrow F(x, f(x)) = 0.$$

Per dimostrare l'unicità, è sufficiente osservare che

$$\begin{aligned} &|y_2 - y_1| = |G(x, y_2) - G(x, y_1)| \leq \tfrac{1}{2}|y_2 - y_1| \\ &\quad \text{se} \quad (x, y_1),\, (x, y_2) \in \overline{B}(0,r) \times \overline{B}(0,R), \quad F(x, y_1) = F(x, y_2) = 0. \end{aligned}$$

Supponiamo che la funzione F ammetta derivate parziali continue rispetto a tutte le variabili. Se una funzione $f(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ soddisfa in un intorno del punto x_0:

$$\begin{cases} F(x, f(x)) = F(x_0, y_0) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

otteniamo, calcolando il differenziale rispetto a x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\frac{\partial f}{\partial x}(x) = 0\,.$$

La matrice Jacobiana $A(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ è invertibile in un intorno di (x_0, y_0) ed otteniamo quindi:

$$(*\,.) \qquad \frac{\partial f(x)}{\partial x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$$

Per ogni variabile x^i, questo sistema definisce un sistema di equazioni differenziali ordinarie, dipendente dalle altre variabili x^j $(j \neq i)$ come parametri. Otteniamo quindi che, se F è di classe $\mathcal{C}^k$ per $k \geq 1$ (rispetto a tutte le variabili x^1, ..., x^n, $y^1, \ldots, y^m$) la funzione f è di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno di x_0.

Vale quindi il:

Teorema 4.2 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$ e sia $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $1 \leq k \leq \omega$. Se, in un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ lo Jacobiano $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ è una matrice invertibile, allora esiste un intorno aperto convesso U di x_0 in $\mathbb{R}^n$ e un'unica funzione $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ di classe $\mathcal{C}^k$ tale che*

$$(x, f(x)) \in \Omega \quad \forall x \in U \qquad \text{e} \quad F(x, f(x)) = F(x_0, y_0) \quad \forall x \in U\,.$$

Dim. I casi in cui k sia un intero positivo o ∞ seguono dall'osservazione precedente. Per dimostrare il teorema delle funzioni implicite nel caso analitico reale, si ragiona risolvendo *per serie*, cioè calcolando le successive derivate parziali di $f(x)$ in x_0 usando la $(*)$ e le relazioni che si ottengono differenziando la $(*)$; occorre poi stimare la crescita di tali derivate usando l'ipotesi di analiticità della F.

Teorema 4.3 (dell'applicazione inversa) *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ con $1 \leq k \leq \omega$. Se $\mathrm{d}f(x_0)$ è invertibile, allora f è un omeomorfismo di un intorno aperto U di x_0 su un intorno aperto V di $y_0 = f(x_0)$ e l'applicazione inversa $\left(f|_U^V\right)^{-1}$ è differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno di y_0.*

Dim. Consideriamo l'applicazione

$$\mathbb{R}^n_y \times \Omega \ni (y,x) \to f(x) - y \in \mathbb{R}^n\,.$$

Essa è di classe $\mathcal{C}^k$ e

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

è invertibile per $x = x_0$, $y = y_0 = f(x_0)$. Per il teorema delle funzioni implicite vi è una g, univocamente definita e di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno V di y_0 in $\mathbb{R}^n_y$, tale che

$$\begin{cases} f(g(y)) - y \;=\; 0 \quad \forall y \in V\,, \\ g(y_0) = x_0\,. \end{cases}$$

Poiché $\mathrm{d}g(y_0) = \mathrm{d}f(x_0)^{-1}$ è ancora invertibile, possiamo determinare un'unica h di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno W di x_0, a valori in $\mathbb{R}^n$, tale che $g \circ h$ sia ben definita in W e $g(h(x)) = x$ in W, $h(x_0) = y_0$. Possiamo supporre, poiché h è continua, che $h(W) \subset V$ e quindi applicando f ai due membri dell'uguaglianza $g \circ h(x) = x$ otteniamo:

$$h(x) = f \circ g \circ h(x) = f(x) \quad \text{in} \quad W\,.$$

§5 Mollificatori

Ricordiamo che il *supporto* di una funzione reale f, definita su uno spazio topologico X, è la chiusura dell'insieme dei punti x di X in cui $f(x) \neq 0$:

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Lemma 5.1 *Possiamo trovare una funzione $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\phi(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\phi(0) > 0$.*

Dim. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-1/t) & \text{se} \quad t > 0 \\ 0 & \text{se} \quad t \leq 0\,. \end{cases}$$

La funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty$; essa è infatti di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutti i punti $t \neq 0$. È continua in 0 in quanto

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \longrightarrow +\infty} \frac{1}{e^s} = 0\,.$$

Abbiamo poi, se $t > 0$ e k è un intero positivo:

$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(t) = \frac{p_k(t)}{t^{2k}} f(t)$$

per un polinomio $p_k \in \mathbb{R}[t]$ di grado minore di k. Infatti

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) = -\frac{1}{t^2} f(t) \quad \forall t > 0\,;$$

supponiamo che la $(*)$ sia vera per un intero $k \geq 1$. Allora

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}t^{k+1}} f(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p_k(t)}{t^{2k}} f(t)\right) \\ &= \frac{t^2 p_k'(t) - (1 + 2kt) p_k(t)}{t^{2(k+1)}} f(t) \qquad \forall t > 0\,.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi, per polinomi $q_{2k} \in \mathbb{R}[s]$ di grado $\leq 2k$:

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t} f(t) = \lim_{s \longrightarrow +\infty} \frac{q_{2k}(s)}{e^s} = 0$$

per ogni intero $k \geq 1$. Per il Teorema dell'Hopital, ne segue che f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e ha tutte le derivate nulle per $t = 0$.

Allora la funzione $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definita da:

$$\phi(x) = f(1 - |x|^2) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n\,,$$

gode di tutte le proprietà richieste.

Lemma 5.2 *Sia $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua a supporto compatto. Se $\phi(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $\phi(x_0) > 0$ in un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, allora:*

$$0 < \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x < \infty\,.$$

Dim. Osserviamo che ϕ è integrabile perché è continua e nulla fuori da un compatto. Per il Teorema di Weierstrass ϕ ha un massimo M su $\operatorname{supp}\phi$ e $0 < M < \infty$. Inoltre il supporto di ϕ, essendo compatto, è contenuto nel cubo $[-R/2, R/2]^n$ per un numero positivo R sufficientemente grande. Per la monotonia dell'integrale, otteniamo quindi

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x \leq M\,R^n < \infty\,.$$

Poiché ϕ è continua, possiamo poi trovare $\epsilon > 0$ tale che

$$\phi(x) \geq \phi(x_0)/2 > 0 \quad \text{se} \quad x_0^i - \epsilon/2 \leq x^i \leq x_0^i + \epsilon/2\,.$$

Ancora per la monotonia dell'integrale, otteniamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x \geq \int_{|x^i - x_0^i| \leq \epsilon/2} \phi(x_0)/2\,\mathrm{d}x = \epsilon^n \phi(x_0)/2 > 0\,.$$

Quindi, per i due lemmi precedenti, abbiamo:

Lemma 5.3 *Esiste una funzione $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, di classe $\mathcal{C}^\infty$ e a supporto compatto, tale che*

(1) $\phi(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$;
(2) $\mathrm{supp}\phi \subset \mathbf{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$;
(3) $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x = 1$.

Sia ϕ una funzione reale con le proprietà elencate nel lemma. Allora ciascuna delle funzioni ϕ_ϵ, per $\epsilon > 0$, definite da:

$$\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\phi(x/\epsilon) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

gode delle proprietà:

(1) $\mathrm{supp}\,\phi_\epsilon \subset B(0,\epsilon) = \{|x| \leq \epsilon\}$;
(2) $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x)\mathrm{d}x = 1$.

La seconda proprietà segue infatti dalle formule di cambiamento di variabili negli integrali multipli.

La famiglia $\{\phi_\epsilon \mid \epsilon > 0\}$ si dice una famiglia di *mollificatori* in $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5.4 *Sia $\{\phi_\epsilon = \epsilon^{-n}\phi(x/\epsilon)\}_{\epsilon>0}$ una famiglia di mollificatori in $\mathbb{R}^n$. Allora per ogni funzione continua $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, le funzioni:*

$$f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi_\epsilon(x-y)\mathrm{d}y \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

sono di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $\mathbb{R}^n$; inoltre:

$\mathrm{supp}\,f_\epsilon \subset \mathrm{supp}\,f + B(0,\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}(x, \mathrm{supp}\,f) \leq \epsilon\}$;
$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0^+} f_\epsilon(x) = f(x)$ *uniformemente sui compatti di* $\mathbb{R}^n$.

Dim. Osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ fissato, la funzione $\mathbb{R}^n \ni y \longrightarrow f(y)\phi_\epsilon(x-y)$ è continua e uguale a 0 fuori dal compatto $\{y \in \mathbb{R}^n \;\; |y-x| \leq \epsilon\}$. Essa è dunque integrabile su $\mathbb{R}^n$ e quindi la f_ϵ è ben definita. Chiaramente $f_\epsilon(x) = 0$ se $\mathrm{dist}(x, \mathrm{supp}\,f) > \epsilon$.

Essa è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale.

Infine, abbiamo:

$$f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\phi_\epsilon(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\epsilon y)\phi(y)\mathrm{d}y$$

per il teorema di cambiamento di variabili negli integrali multipli. La funzione $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \longrightarrow f(x-y) \in \mathbb{R}$ è continua e quindi uniformemente continua sui compatti. Fissato un numero reale δ positivo, possiamo trovare allora per ogni compatto K di $\mathbb{R}^n$ un $\sigma > 0$ tale che

$$|f(x-y) - f(x)| < \delta \quad \text{se} \quad x \in K, \, |y| < \sigma \, .$$

Allora:

$$|f_\epsilon(x) - f(x)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - \epsilon y) - f(x)| \phi(y) \mathrm{d}y \right| < \delta \quad \text{se} \quad \epsilon < \sigma \, , \; x \in K \, .$$

La dimostrazione è completa. □

Proposizione 5.5 *Sia K un compatto di $\mathbb{R}^n$ e A un aperto di $\mathbb{R}^n$ contenente K. Esiste allora una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $0 \leq f(x) \leq 1$ in $\mathbb{R}^n$ e $f(x) = 1$ su K, $f(x) = 0$ se $x \notin A$.*

Dim. Siano U_1, U_2 intorni aperti di K in A con $U_1 \Subset U_2 \Subset A$. Sia $\epsilon > 0$ un numero reale maggiore di $\operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U_1)$, $\operatorname{dist}(\overline{U}_1, \mathbb{R}^n \setminus U_2)$ e $\operatorname{dist}(\overline{U}_2, \mathbb{R}^n \setminus A)$. Poiché $\mathbb{R}^n$ è uno spazio normale, possiamo trovare una funzione di Urysohn $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ tale che $\psi(x) = 1$ se $x \in \overline{U}_1$, $\psi(x) = 0$ se $x \notin U_2$. Sia $\{\phi_\sigma\}_{\sigma > 0}$ una famiglia di mollificatori in $\mathbb{R}^n$. Allora

$$f(x) = \psi_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \phi_\epsilon(x-y) \mathrm{d}y$$

soddisfa tutte le proprietà richieste. Infatti, poiché $0 \leq \psi(x) \leq 1$,

$$0 \leq f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \phi_\epsilon(x-y) \mathrm{d}y \leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x-y) \mathrm{d}y = 1;$$

se $x \in K$, allora $\psi(y)\phi_\epsilon(x-y) = \phi_\epsilon(x-y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ perché $y \in \overline{U}_1$ se $x - y$ appartiene al supporto di ϕ_ϵ e quindi

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \phi_\epsilon(x-y) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x-y) \mathrm{d}y = 1 \quad \forall x \in K \, ;$$

se $x \notin A$, allora $\psi(y) = 0$ sul supporto di $y \longrightarrow \phi_\epsilon(x-y)$, in quanto esso è contenuto in $\mathbb{R}^n \setminus U_2$ e perciò:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \phi_\epsilon(x-y) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} 0 \mathrm{d}y = 0.$$

§6 Varietà differenziabili

Sia $\mathbf{X}$ una varietà topologica di dimensione n. Un atlante $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \,|\, i \in I\}$ si dice *di classe* $\mathcal{C}^k$ (con $0 \leq k \leq \omega$) se le sue funzioni di transizione ϕ_{ij} sono tutte di classe $\mathcal{C}^k$.

Due atlanti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ di classe $\mathcal{C}^k$ di $\mathbf{X}$ si dicono $\mathcal{C}^k$–compatibili se $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ è ancora un atlante di classe $\mathcal{C}^k$.

Un atlante di classe $\mathcal{C}^0$ è semplicemente un atlante e tutti gli atlanti di classe $\mathcal{C}^0$ sono tra loro compatibili.

La relazione di compatibilità $\mathcal{C}^k$ è una relazione di equivalenza nella famiglia degli atlanti di una varietà topologica.

Se $\mathcal{A}$ è un atlante di classe $\mathcal{C}^k$ su una varietà topologica di dimensione n, l'unione di tutti gli atlanti $\mathcal{C}^k$–compatibili con $\mathcal{A}$ è ancora un atlante $\mathcal{C}^k$ compatibile con $\mathcal{A}$; esso è *massimale* nel senso che non è propriamente contenuto in nessun atlante di classe $\mathcal{C}^k$ con esso compatibile.

Esempio 6.1 Un atlante formato da una sola carta è sempre di classe $\mathcal{C}^\omega$. Quindi i due atlanti $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, x)\}$ e $\mathcal{A}' = \{(\mathbb{R}, x^3)\}$ su $\mathbb{R}$ sono atlanti di classe $\mathcal{C}^\omega$ sulla varietà topologica $\mathbb{R}$. Essi sono compatibili di classe $\mathcal{C}^0$, ma non di classe $\mathcal{C}^k$ per $k \geq 1$, perché la funzione di transizione $x \longrightarrow \sqrt[3]{x}$ non è differenziabile in 0.

Una *varietà differenziabile di dimensione* n è il dato di una varietà topologica di Hausdorff $\mathbf{X}$ di dimensione n e di un atlante massimale $\mathcal{A}$ di classe $\mathcal{C}^k$ di $\mathbf{X}$.

Osserviamo che una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^0$ è semplicemente una varietà topologica.

Nel seguito indicheremo spesso una varietà differenziabile con la lettera M, riservando X e $\mathbf{X}$ per spazi topologici o varietà topologiche prive di una struttura differenziabile.

Osservazione Non tutte le varietà topologiche (anche se di Hausdorff e paracompatte) ammettono un atlante differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$.

Hassler Whitney ha dimostrato che ogni varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$ paracompatta ammette un atlante di classe $\mathcal{C}^\omega$. Quando studiamo le proprietà *topologiche* di una varietà differenziabile M di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$, potremo quindi supporre, senza perdere in generalità, che essa sia di classe $\mathcal{C}^\omega$, o di una qualsiasi classe $\mathcal{C}^h$ con $h \geq 1$ che sia utile per semplificare la discussione.

Un atlante $\mathcal{A}$ di classe $\mathcal{C}^k$ su una varietà topologica M di dimensione n determina su M un'unica struttura di varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$. Un omeomorfismo

$$\varphi : U \longrightarrow V \subset \mathbf{R}^n$$

di un intorno aperto U di un punto p di M su un aperto V di $\mathbf{R}^n$ si dice un *sistema di coordinate* (o *carta locale*) *di classe* $\mathcal{C}^k$ in p se $\{(U, \varphi)\} \cup \mathcal{A}$ è $\mathcal{C}^k$–equivalente ad $\mathcal{A}$.

Esempio 6.2 Gli atlanti definiti in §1 per le varietà topologiche $\mathbf{S}^n$, $\mathbb{PR}^n$, $\mathbb{CP}^n$ sono tutti di classe $\mathcal{C}^\omega$.

Lemma 6.1 *Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ (con $0 \leq k \leq \omega$) e sia A un aperto di M. Se $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \,|\, i \in I\}$ è un atlante di classe $\mathcal{C}^k$ su M, allora*

$$\mathcal{A}_A = \{(U_i \cap A, \phi_i|_{U_i \cap A} \,|\, i \in I,\ U_i \cap A \neq \emptyset\}$$

è un atlante di classe $\mathcal{C}^k$ su A.

Quindi, *su ogni aperto A di una varietà differenziabile M risulta definita un'unica struttura di varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ tale che ogni carta locale di classe $\mathcal{C}^k$ di A sia anche una carta locale di classe $\mathcal{C}^k$ di M.*

§7 Applicazioni differenziabili

Lemma 7.1 *Siano M ed N due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$ (con $k \geq 1$) e sia $f : M \longrightarrow N$ un'applicazione continua. Dato un punto $p \in M$ sono equivalenti:*

(*i*) *Possiamo trovare una carta locale (U, φ) in p e una carta locale (V, ψ) in $f(p)$ tali che*

$$\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \ni x \longrightarrow \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) \in \psi(V)$$

sia una applicazione di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno di $\varphi(p)$.

(*ii*) *Per ogni carta locale (U, φ) in p e per ogni carta locale (V, ψ) in $f(p)$*

$$\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \ni x \longrightarrow \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) \in \psi(V)$$

è una applicazione di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno di $\varphi(p)$.

Dim. Chiaramente (*ii*)$\Longrightarrow$(*i*). L'implicazione opposta segue dal fatto che i cambiamenti di carte locali sono applicazioni di classe $\mathcal{C}^k$ e la composizione di applicazioni di classe $\mathcal{C}^k$ sono ancora applicazioni di classe $\mathcal{C}^k$. $\square$

Un'applicazione continua $f : M \longrightarrow N$ che soddisfi le condizioni equivalenti del lemma, si dice *differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$* in p. Una applicazione f si dice *differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ in M* se è tale in ogni punto di M.

L'insieme di tutte le applicazioni differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$ definite sulla varietà differenziabile M, a valori nella varietà differenziabile N, si indica con $\mathcal{C}^k(M, N)$.

Vale il seguente:

Lemma 7.2 *Siano M, N varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$ (con $0 \leq k \leq \omega$) e sia $f : M \longrightarrow N$ un'applicazione. Sia Γ un ricoprimento aperto di M. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ è che per ogni aperto $A \in \Gamma$ la restrizione $f|_A : A \longrightarrow N$ di f ad A sia differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$.* $\square$

Consideriamo sulla retta reale $\mathbb{R}$ la struttura di varietà differenziabile di dimensione 1 definita dall'unica carta coordinata $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$. L'insieme $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R})$ delle applicazioni differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$, definite su una varietà differenziabile M di classe $\mathcal{C}^k$ e a valori in $\mathbb{R}$, si indica semplicemente con $\mathcal{C}^k(M)$. Se $k = \infty$, scriveremo $\mathcal{E}(M)$ invece di $\mathcal{C}^\infty(M)$ e se $k = \omega$ (funzioni analitiche–reali), scriveremo $\mathcal{A}(M)$ invece di $\mathcal{C}^\omega(M)$.

Teorema 7.3 *Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $0 \leq k \leq \omega$. Allora $\mathcal{C}^k(M)$ è un anello commutativo e unitario e un'algebra reale rispetto alle operazioni*

di somma:

$$(f + g)(p) = f(p) + g(p) \qquad \forall f,\, g \in \mathcal{C}^k(M), \quad \forall p \in M;$$

di prodotto

$$(fg)(p) = f(p)g(p) \qquad \forall f,\, g \in \mathcal{C}^k(M), \quad \forall p \in M;$$

di prodotto per scalare:

$$(kf)(p) = kf(p) \qquad \forall f \in \mathcal{C}^k(M)\,, \quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall p \in M.$$

Teorema 7.4 (di partizione dell'unità) *Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $0 \le k \le \infty$, paracompatta. Sia Γ un ricoprimento aperto di M. Allora esiste una partizione dell'unità $\{\phi_A \,|\, A \in \Gamma\}$ subordinata a Γ, mediante funzioni ϕ_A di $\mathcal{C}^k(M)$.*

Dim. Siano $\mathcal{U} = \{U_i \,|\, i \in I\}$ un raffinamento aperto localmente finito di Γ mediante aperti coordinati (U_i, x_i) di M e sia $\mathcal{V} = \{V_j \,|\, j \in J\}$ un raffinamento aperto localmente finito di $\mathcal{U}$. Indichiamo con $U_i \hookrightarrow A_i$ e $V_j \hookrightarrow U_{i(j)}$ le funzioni di raffinamento. Scegliamo il raffinamento $\mathcal{V}$ di $\mathcal{U}$ in modo che $V_j \Subset U_{i(j)}$ per ogni $j \in J$. Per ogni $j \in J$ fissiamo un aperto G_j con $V_j \Subset G_j \Subset U_{i(j)}$. Per la Proposizione 5.1 esiste per ogni $j \in J$ una funzione $g_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\begin{cases} 0 \le g_j(y) \le 1 & \forall y \in \mathbb{R}^n \,, \\ g_j(y) = 1 & \forall y \in x_{i(j)}(\overline{V}_j) \,, \\ g_j(y) = 0 & \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus x_{i(j)}(G_j) \,. \end{cases}$$

Le funzioni

$$h_j(p) = \begin{cases} g_j(x_{i(j)}(p)) & \text{se} \quad p \in U_{i(j)} \,, \\ 0 & \text{se} \quad p \notin G_j \end{cases}$$

sono allora di classe $\mathcal{C}^k$ su M; i loro supporti formano un ricoprimento localmente finito di M e inoltre anche $\{h_j^{-1}(1) \,|\, j \in J\}$ è un ricoprimento chiuso localmente finito di M. Ne segue che

$$h(p) = \sum_{j \in J} h_j(p) \,, \quad p \in M$$

è una funzione di classe $\mathcal{C}^k$ e ≥ 1 su M e che le

$$\psi_j(p) = \frac{h_j(p)}{h(p)} \,, \quad p \in M$$

formano una partizione dell'unità di classe $\mathcal{C}^k$ su M. Per ogni $A \in \Gamma$ sia J_A l'insieme degli indici $j \in J$ tali che $A = A_{i(j)}$. Allora le

$$\phi_A(p) = \sum_{j \in J_A} \psi_j(p)$$

sono funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ che definiscono una partizione dell'unità su M subordinata a Γ.

Come conseguenza dell'esistenza di partizioni dell'unità, otteniamo:

Proposizione 7.5 *Sia F un chiuso di una varietà differenziabile M, di classe $\mathcal{C}^k$ con $0 \le k \le \infty$, paracompatta. Se U è un intorno aperto di F in M, esiste una funzione $f \in \mathcal{C}^k(M)$ tale che*

$$f(p) = \begin{cases} 1 & \textit{se} \quad p \in F \,, \\ 0 & \textit{se} \quad p \notin U \,. \end{cases}$$

Dim. Poiché M è normale, possiamo fissare un intorno aperto V di F in U tale che $\overline{V} \subset U$. Sia Γ' l'insieme degli aperti di M che non intersecano $\overline{V}$ e sia $\Gamma = \Gamma' \cup \{U\}$. Per il teorema precedente, esiste una partizione dell'unità $\{\phi_A \mid A \in \Gamma\}$ di classe $\mathcal{C}^k$ subordinata a Γ. Allora $f = \phi_U$ soddisfa le proprietà richieste.

Osservazione Il teorema di partizione dell'unità non vale nella classe $\mathcal{C}^\omega$: infatti una funzione analitica–reale che si annulli su un aperto di una varietà M si annulla sull'unione delle componenti connesse di M che intersecano tale aperto. Per questo motivo, nonostante per il teorema di Whitney ogni varietà M, differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$ e paracompatta, ammetta un atlante compatibile di classe $\mathcal{C}^\omega$, è conveniente considerare strutture di classe $\mathcal{C}^k$ con $1 \leq k \leq \infty$.

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^m$. Un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$, è in $x_0 \in \Omega$:
un'immersione se $df(x_0) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è iniettiva;
una sommersione se $df(x_0) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è surgettiva;
un diffeomorfismo locale se $df(x_0) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un invertibile.

Dal teorema delle funzioni implicite abbiamo:

Proposizione 7.6 *Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ e sia $x_0 \in \Omega$.*

(*i*) *Se f è un'immersione in x_0, allora $m \leq n$ ed esiste un intorno aperto U di x_0 in Ω tale che $U \ni x \longrightarrow f(x) \in f(U) \subset \mathbb{R}^n$ sia un omeomorfismo;*
(*ii*) *Se f è una sommersione in x_0, allora esiste un intorno aperto U di x_0 in Ω ed un'applicazione affine $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tale che $\phi(0) = x_0$ e $\phi^{-1}(U) \ni t \longrightarrow f \circ \phi(t) \in V \subset \mathbb{R}^n$ sia un diffeomorfismo di $\phi^{-1}(U)$ su un aperto V di $\mathbb{R}^n$.* $\square$

Siano ora M ed N due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$, ed $f : M \longrightarrow N$ un'applicazione di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$. Sia $p_0 \in M$ e $q_0 = f(p_0) \in N$. Diciamo che f è un'*immersione* (risp. una *sommersione*) in p_0 se, per carte locali (U, ϕ) in M, con centro in p_0, e (V, ψ) in N, con centro in q_0, ed entrambe di classe $\mathcal{C}^k$, la $\phi(U) \ni x \longrightarrow \psi \circ f \circ \phi^{-1}(x) \in \psi(V)$ è un'immersione (risp. una sommersione) in 0. Si verifica facilmente che la definizione non dipende dalla scelta delle coordinate locali.

Utilizzando il teorema delle funzioni implicite abbiamo:

Proposizione 7.7 *Sia $k \geq 1$ e sia $f : M \longrightarrow N$ un'applicazione differenziabile tra varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$, di dimensioni m ed n rispettivamente. Sia $p_0 \in M$, $q_0 = f(p_0) \in N$.*

(*i*) *Se f è un'immersione in p_0, possiamo trovare una carta coordinata (U, ϕ) di classe $\mathcal{C}^k$ in M, con centro in p_0, ed una carta coordinata (V, ψ) di classe $\mathcal{C}^k$ in N, con centro in q_0, tali che*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \ni (x^1, \ldots, x^m) \longrightarrow (\underbrace{x^1, \ldots, x^m}_{m}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m}) \in \psi(V).$$

(*ii*) *Se f è una sommersione in p_0, possiamo trovare una carta coordinata (U, ϕ) di classe $\mathcal{C}^k$ in M, con centro in p_0, ed una carta coordinata (V, ψ) di classe $\mathcal{C}^k$ in N, con centro in q_0, tali che*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \ni (x^1, \ldots, x^m) \longrightarrow (x^1, \ldots, x^n) \in \psi(V).$$

□

§8 Sottovarietà differenziabili

Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ (con $k \geq 1$), di dimensione m .Un sottoinsieme N è una *sottovarietà differenziabile* di dimensione n di M se, per ogni punto p_0 di N, esiste un intorno aperto U di p_0 in M, un intorno aperto connesso Ω di $0 \in \mathbb{R}^n$, e un'immersione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$:

$$(*) \qquad \phi : \Omega \to M$$

per cui $\phi(\Omega)$ sia la componente connessa di p_0 in $N \cap U$.

Una sottovarietà differenziabile N di dimensione n e di classe $\mathcal{C}^k$ di M è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ e di dimensione n con l'atlante definito dalle $(\phi(\Omega), \phi^{-1})$, al variare delle immersioni differenziabili $(*)$ che la definiscono.

Osservazione La topologia di N come sottovarietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ di M è, in generale, più fine della topologia di sottospazio. Infatti la topologia su N si può definire come la meno fine tra le topologie localmente connesse di N che sono più fini di quella di sottospazio.

Esempio 8.1 Sia $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ il toro di dimensione due. Sia $\pi : \mathbb{R}^2_{x,y} \to T^2$ la proiezione naturale nel quoziente. Si verifica allora che $N_a = \pi(\{y = a\,x\})$ è una sottovarietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\omega$ di T^2. Se $a \notin \mathbb{Q}$, allora N_a, come sottospazio topologico di T^2, non è localmente connesso; la sua topologia di sottospazio è quindi strettamente meno fine di quella di sottovarietà differenziabile: per quest'ultima N_a è omeomorfo a $\mathbb{R}$. Se $a \in \mathbb{Q}$, la topologia di N_a come sottovarietà differenziabile e come sottospazio topologico di T^2 coincidono.

Diciamo che la sottovarietà differenziabile N di M è *localmente chiusa* in M se la sua topologia coincide con quella di sottospazio. Abbiamo:

Proposizione 8.1 *Sia M una varietà differenziabile di dimensione m e di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$, ed N una sottovarietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ di dimensione n di M. Condizione necessaria e sufficiente affinché N sia localmente chiusa in M è che per ogni punto $p_0 \in N$ si possano trovare un intorno aperto U di p_0 in M ed una sommersione $f : U \to \mathbb{R}^{m-n}$ tale che $N \cap U = f^{-1}(0)$.* □

Esempio 8.2 La $N = \left\{ \frac{1}{1+e^t}(\cos(t), \sin(t)) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ è una sottovarietà localmente chiusa, ma non è un chiuso, di $\mathbb{R}^2$. Quindi una sottovarietà N può essere localmente chiusa senza essere un chiuso di M: la nozione di sottovarietà differenziabile localmente chiusa è dunque più debole di quella di sottospazio topologico localmente chiuso, che richiede che ogni punto p di M abbia un intorno che interseca N in un sottoinsieme chiuso.

Se N è una sottovarietà differenziabile e un sottospazio topologico chiuso di M, diremo che N è *globalmente chiusa* in M.

Osservazione La definizione generale di sottovarietà è utile per includere le traiettorie che rappresentano soluzioni di sistemi di equazioni differenziali ordinarie, ovvero, più in generale, le varietà n-dimensionali che corrispondono alle soluzioni di sistemi differenziali ai differenziali totali.

CAPITOLO II

IL LEMMA DI SARD

In questo capitolo descriveremo alcune importanti proprietà delle applicazioni differenziabili. Come esempi di applicazioni, discuteremo alcune proprietà di omotopia delle sfere, la nozione di grado per applicazioni continue della sfera is sè, il teorema di punto fisso di Brower, il teorema d'immersione di Whitney. Premettiamo (§0) alcune nozioni sulla categoria topologica e gli spazi di Baire, che saranno utilizzate nella formulazione e nella dimostrazione del Teorema di Sard.

§0 Definizione ed esempi di spazi di Baire

Un sottoinsieme A di uno spazio topologico $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ si dice *raro* o *da nessuna parte denso* se la sua chiusura $\bar{A}$ non contiene punti interni, cioè se $\mathring{\bar{A}} = \emptyset$.

Un sottoinsieme A di X si dice *di prima categoria* se è unione numerabile di insiemi rari.

Un sottoinsieme di X che non sia di prima categoria si dice di *seconda categoria.*

Osservazione Un'unione numerabile di insiemi di prima categoria è di prima categoria.

Defininizione Uno spazio topologico $\mathbf{X}$ si dice *di Baire* se l'intersezione di una sua qualsiasi famiglia numerabile di aperti densi è ancora un sottoinsieme denso.

Lemma 0.2 *Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio topologico. Sono equivalenti:*

(1) $\mathbf{X}$ *è uno spazio di Baire.*

(2) *Se $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia numerabile di chiusi e $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ è tale che $\mathring{F} \neq \emptyset$, allora esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\mathring{F}_\nu \neq \emptyset$.*

(3) *Ogni aperto non vuoto di $\mathbf{X}$ è di seconda categoria.*

(4) *Il complementare in ogni aperto non vuoto di $\mathbf{X}$ di un sottoinsieme di prima categoria di $\mathbf{X}$ è di seconda categoria.*

Dim. (1) $\Rightarrow$ (2). Supponiamo che $\mathbf{X}$ sia uno spazio di Baire e sia $\{F_n\}$ una qualsiasi successione di chiusi ciascuno con parte interna vuota. Allora $A_n = X \setminus F_n$ è per ogni n un aperto denso di $\mathbf{X}$. Quindi

$$D = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$$

è denso in $\mathbf{X}$. Se U fosse un aperto non vuoto contenuto in $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$, sarebbe $D \cap U = \emptyset$, ma questo non è possibile perché D è denso in $\mathbf{X}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Supponiamo valga la (2) e sia A un qualsiasi aperto non vuoto di $\mathbf{X}$. Se A fosse di prima categoria, allora sarebbe unione numerabile di una successione $\{R_n\}$ di insiemi rari. Allora $\{F_n = \overline{R}_n\}$ sarebbe una famiglia di chiusi con parte interna vuota la cui unione conterrebbe l'aperto A, contraddicendo la (2).

(3) $\Rightarrow$ (4). È ovvia, perché l'unione di due insiemi di prima categoria è di prima categoria.

(4) $\Rightarrow$ (1). Supponiamo valga (4). Sia $\{A_n\}$ una successione di aperti densi di $\mathbf{X}$. Per dimostrare che $D = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ è denso in $\mathbf{X}$, fissiamo un qualsiasi aperto U di $\mathbf{X}$ e consideriamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $F_n = X \setminus A_n$. Questo insieme è un chiuso con parte interna vuota di $\mathbf{X}$. Allora $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ è un sottoinsieme di prima categoria in $\mathbf{X}$ e quindi $U \setminus F$ è di seconda categoria e in particolare non vuoto. Poiché $U \setminus F = U \cap D$, otteniamo la tesi.

Da 3) segue subito che:

Osservazione *Ogni sottospazio aperto di uno spazio di Baire è uno spazio di Baire.*

Teorema 0.3 *Ogni spazio di Hausdorff localmente compatto è di Baire.*
Sia $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ uno spazio di Hausdorff localmente compatto. Sia $\{A_n\}$ una famiglia numerabile di aperti densi di $\mathbf{X}$ e sia $D = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$. Vogliamo dimostrare che per ogni aperto non vuoto U di $\mathbf{X}$ interseca D. A questo scopo costruiamo induttivamente una successione $\{B_n\}$ di aperti non vuoti tali che

$$(*)\qquad \begin{cases} \overline{B}_n \quad \text{è compatto} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \overline{B}_n \subset U \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \overline{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Poiché $\mathbf{X}$ è localmente compatto, $U \cap A_0$ contiene un aperto non vuoto B_0 con chiusura compatta contenuta in $U \cap A_0$. Supponiamo di aver costruito B_0, ..., B_n in modo che le $(*)$ siano soddisfatte. Basterà allora scegliere un aperto non vuoto B_{n+1} con chiusura compatta contenuta in $B_n \cap A_{n+1}$.

La famiglia $\{\overline{B}_n\}$ è una famiglia di sottoinsiemi chiusi del compatto $\overline{B}_0$ che gode della proprietà dell'intersezione finita. Quindi $\emptyset \neq \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{B}_n \subset D \cap U$ e la tesi è dimostrata.

Teorema 0.4 *Ogni spazio metrico completo è uno spazio di Baire.*

Dim. Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $\{A_n\}$ una successione di aperti densi di X. Fissiamo un aperto npon vuoto U di X. Costruiamo per ricorrenza una successione $\{B_n\}$ di palle aperte di X tali che

$$(*)\qquad \begin{cases} \overline{B}_n \subset U \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ B_n = B(x_n, r_n) \quad \text{con} \quad x_n \in X \quad \text{e} \quad 0 < r_n < 2^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \overline{B}_{n+1} \subset B_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

A questo scopo osserviamo che $A_0 \cap U$ è un aperto non vuoto e quindi, fissati

$$x_0 \in A_0 \cap U \quad \text{e} \quad 0 < r_0 < \min\{1, d(x_0, X \setminus (A_0 \cap U))\}$$

e posto $B_0 = B(x_0, r_0)$ abbiamo $\overline{B}_0 \subset A_0 \cap U$. Supponiamo di aver costruito, per $n \geq 0$, le palle B_0,..., B_n in modo che valgano le $(*)$. Fissato un punto x_{n+1} di $B_n \cap A_{n+2} \subset U$, possiamo trovare $0 < r_{n+1} < 2^{-(n+1)}$ tale che, posto $B_{n+1} = B(x_{n+1}, r_{n+1})$ risulti $\overline{B}_{n+1} \subset A_{n+2} \cap B_n$. La successione $\{x_n\}$ dei centri delle palle B_n è chiaramente una successione di Cauchy. Il suo limite x_∞ appartiene a $\overline{B}_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi ad $A_n \cap U$ per ogni n. Dunque $x_\infty \in D \cap U \neq \emptyset$.

§1 Il lemma di Sard

Dimostriamo innanzi tutto il:

Lemma 1.1 *Siano m, n, due interi positivi con $m < n$. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^m$ e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile. Allora $f(A)$ è di prima categoria.*

Dim. Per ogni intero positivo N ed ogni $\alpha \in \mathbf{Z}^n$ indichiamo con $Q(\alpha, N)$ il cubo m-dimensionale:

$$Q(\alpha, N) = \{x \in \mathbb{R}^m \;\; | \;\; |Nx^i - \alpha^i| \leq 1/2 \text{ per } i = 1, \cdots, m\}.$$

La famiglia

$$\{Q(\alpha, N) | \alpha \in \mathbf{Z}^n,\, N \in \mathbf{N} - \{0\}\}$$

è numerabile e le sue sottofamiglie formate dai cubi di lato $1/N$ sono ricoprimenti chiusi localmente finiti (quadrettature) di $\mathbb{R}^m$. Possiamo scrivere A come unione numerabile di tutti i cubi $Q(\alpha, N)$ in esso contenuti:

$$A = \bigcup Q_\nu$$

con $Q_\nu = Q(\alpha_\nu, N_\nu)$, $\nu \in \mathbf{N}$.

Abbiamo allora:

$$f(A) = \bigcup f(Q_\nu)$$

unione numerabile di insiemi compatti. Basterà dunque dimostrare che ciascuno di questi insiemi $f(Q_\nu)$ ha parte interna vuota.

Supponiamo per assurdo che ciò non sia vero. A meno di sostituire ad f la funzione di classe $\mathcal{C}^1$

$$x \longrightarrow k\left(f(hx + \alpha/N) - f(\alpha/N)\right)$$

(per opportuni numeri reali positivi k, h e $\alpha \in \mathbf{Z}^m$) possiamo supporre che:

(i) $$A \supset Q(m) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x^i| \leq 1/2 \text{ per } i = 1, \cdots, m\}.$$

(ii) $$f(Q(m)) \supset Q(n) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y^i| \leq 1/2 \text{ per } i = 1, \cdots, n\}.$$

Le derivate parziali prime di f sono uniformemente limitate su $Q(m)$. Per il teorema della media, abbiamo allora, per una costante L,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in Q(m).$$

La f trasforma perciò un sottoinsieme di $Q(m)$ contenuto in una palla di raggio δ in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ contenuto in una palla di raggio $L\delta$.

Fissato un intero positivo N, suddividiamo $Q(m)$ in N^m cubi di lato $1/N$. L'immagine mediante f di ciascuno di questi cubi è contenuta in un cubo di $\mathbb{R}^n$ di lato $2L\sqrt{m}/N$. Il volume di $Q(n)$ dovrebbe essere allora inferiore alla somma dei volumi di tali cubi:

$$1 = vol\,(Q(n)) \leq (2L\sqrt{m})^n \cdot N^{m-n}$$

ci dà una contraddizione perché il secondo membro di questa diseguaglianza tende a 0 per $N \to \infty$. La dimostrazione è completa. $\square$

Osservazione Segue dalla dimostrazione che, *se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione differenziabile definita su un aperto A di $\mathbb{R}^m$, e $m < n$, allora $f(A)$ è contenuta in un insieme di misura di Lebesgue nulla di $\mathbb{R}^n$.*

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^m$ e sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile. Per ogni punto x di A indichiamo con

$$df(x) = \begin{pmatrix} \partial f^1/\partial x^1 & \dots & \partial f^1/\partial x^m \\ . & \dots & . \\ . & \dots & . \\ \partial f^n/\partial x^1 & \dots & \partial f^n/\partial x^m \end{pmatrix}$$

la matrice jacobiana di f in x. Il punto x si dice *critico* per f se $df(x)$ ha rango $< n$. Il corrispondente punto $f(x) \in \mathbb{R}^n$ si dice *valore critico* di f. Indichiamo con $C(f)$ e $CV(f)$ rispettivamente l'insieme dei punti critici e dei valori critici di f. I punti di $f(A) - CV(f)$ si dicono *valori regolari* di f.

I punti critici di f sono tutti e soli i punti $x \in A$ in cui f non è una sommersione e i valori critici di f gli $y \in f(A)$ per cui $f^{-1}(y)$ non è una sottovarietà differenziabile di dimensione $m - n$ di A.

Possiamo riformulare il teorema delle funzioni implicite utilizzando la nozione di punto critico:

Teorema 1.2 (delle funzioni implicite) *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^m$ e sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe $\mathcal{C}^k$ con $1 \leq k \leq \infty$. Se $x_0 \in A$ non è un punto critico di f possiamo trovare un intorno aperto V di $f(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$, un intorno aperto W di 0 in $\mathbb{R}^{m-n}$, un intorno U di x_0 in A e un omeomorfismo*

$$g: V \times W \longrightarrow U$$

di classe $\mathcal{C}^k$ tale che g non abbia punti critici in $V \times W$ e

$$f(g(y,z)) = y \quad \forall (y,z) \in V \times W.$$

In particolare, se $m = n$, la g è un omeomorfismo di V su un aperto $g(V)$ di A. In questo caso diciamo che la f definisce un sistema di coordinate di classe $\mathcal{C}^k$ in $g(V)$.

Dal teorema delle funzioni implicite deduciamo immediatamente il seguente:

Lemma 1.3 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$,*

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$. Se y è un valore regolare di f, allora $f^{-1}(y)$ è un sottospazio discreto di A.

Dim. Dal teorema delle funzioni implicite segue che ogni punto x di $f^{-1}(y)$ ha un intorno aperto U tale che $f^{-1}(y) \cap U = \{x\}$. $\square$

Teorema 1.4 (Lemma di Sard) *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^m$ e sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe $\mathcal{C}^\infty$. Allora $CV(f)$ è di prima categoria.*

Dim. Osserviamo che $C(f)$ è un sottoinsieme chiuso di A. Essendo A unione numerabile di compatti, la tesi è equivalente al fatto che, per ogni compatto $K \subset A$, l'insieme compatto $f(K \cap C(f))$ sia privo di punti interni. Il teorema è banale quando $n = 0$, perché in questo caso l'insieme dei punti critici di f è vuoto. Possiamo quindi supporre $n > 0$ e il teorema vero per applicazioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ a valori in $\mathbb{R}^{n-1}$. Ancora, il teorema è banale se $m = 0$; potremo quindi supporre $m \geq 1$ e il teorema vero per applicazioni differenziabili di classe $\mathcal{C}^\infty$ definite su aperti di $\mathbb{R}^k$ con $k < m$.

Poniamo $C = C(f)$ e per ogni intero positivo k indichiamo con C_k il sottoinsieme di C in cui si annullano le derivate parziali di f fino all'ordine k:

$$C_k = \{x \in \mathbb{R}^n \;\mid\; D^\alpha f(x) = 0 \;\; se \;\; 0 < |\alpha| \leq k\}.$$

Poniamo:

$$C_\infty = \bigcap C_k\,.$$

Gli insiemi C_k, per $0 < k \leq \infty$, sono sottoinsiemi chiusi di C. Dimostreremo separatamente che l'immagine di $C - C_1$, di $C_k - C_{k+1}$ e di C_∞ sono di prima categoria in $\mathbb{R}^n$.

Sia x_0 un punto di $C - C_1$. Dimostriamo che esso ammette un intorno compatto B in A tale che $f(B \cap C)$ non abbia punti interni. Possiamo supporre per semplicità che $x_0 = 0$, $f(0) = 0$ e $\partial f^1 / \partial x^1 \neq 0$ in 0. Possiamo trovare allora un intorno W di 0 in A in cui, dopo un opportuno cambiamento di coordinate di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno di 0 in $\mathbb{R}^n$, la f si può scrivere nella forma:

$$f(x) = f(x^1, x^2, ..., x^n) = (x^1, f^2(x), ..., f^n(x)).$$

[Ciò si ottiene applicando il teorema delle funzioni impicite alla
$A \ni x \longrightarrow (f^1(x), x^2, ..., x^m) \in \mathbb{R}^m$.]

Sia B un intorno compatto di 0 in W della forma:

$$B = [-r, r] \times G$$

con $r > 0$, e G intorno compatto di 0 in $\mathbb{R}^{m-1}$. Supponiamo che $f(C \cap B)$ contenga un punto interno y_0.

La proiezione $\mathbb{R}^n \ni (y^1, y^2, ..., y^n) \longrightarrow (y^2, ..., y^n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ è aperta. Consideriamo l'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$

$$W \ni x \longrightarrow g(x) = (f^2(x), ..., f^n(x)) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Per l'ipotesi induttiva, l'insieme $g\left(C(g) \cap B\right)$ non ha punti interni.

Poiché $B \cap C \subset C(g)$, se ne deduce che l'intersezione di $f(C \cap B)$ con l'iperpiano $\mathcal{H} = \{y^1 = y_0^1\}$ non contiene un intorno di y_0 per la topologia di sottospazio di $\mathcal{H}$. Ciò contraddice l'ipotesi che y_0 fosse punto interno di $f(C \cap B)$ ed abbiamo quindi dimostrato che $f(C \cap B)$ è un compatto privo di punti interni. Possiamo quindi ricoprire $C - C_1$ con una famiglia numerabile di compatti $\{B_\ell\}$ tali che $f(C \cap B_\ell)$ sia privo di punti interni e dunque

$$f(C - C_1) = \bigcup_\ell f(C \cap B_\ell)$$

è di prima categoria.

Sia ora $k \geq 1$ e $x_0 \in C_k - C_{k+1}$. A meno di una traslazione, possiamo per semplificare le notazioni supporre che x_0 sia l'origine $0 \in \mathbb{R}^m$. Indichiamo con φ una derivata parziale di f di ordine k, per cui sia $d\varphi(0) \neq 0$. Possiamo ancora supporre che $f(0) = 0$ e, a meno di restringerci a un intorno aperto W di $0 \in \mathbb{R}^m$, e di cambiare le coordinate in W e in $\mathbb{R}^n$, che $\varphi(x) = x^1$.

Allora $C_k \cap W$ è contenuto in $\{x^1 = 0\}$ e quindi $f(C_k \cap W)$ è contenuto nell'insieme dei valori critici dell'applicazione

$$g(x^2, ..., x^m) = f(0, x^2, ..., x^m),$$

definita e di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno A' di 0 in $\mathbb{R}^{m-1}$. L'insieme $f(C_k \cap W)$ è allora di prima categoria per l'ipotesi induttiva su m.

Sia ora K un compatto contenuto in C_∞. Poiché tutte le derivate parziali di f si annullano identicamente su K, per ogni intero positivo ℓ possiamo trovare un intorno aperto U di K in A tale che:

$$|\nabla f(x)| \leq \operatorname{dist}(x, K)^\ell \ \forall x \in U.$$

Supponiamo per assurdo che $f(K)$ contenga dei punti interni. Non è restrittivo allora supporre che $f(K)$ contenga il cubo:

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, |y^i| \leq 1/2\}$$

e che K sia contenuto nel cubo:

$$Q' = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, |x^j| \leq 1/2\}.$$

Sia N un intero positivo, con $N \cdot \mathrm{dist}(K, \mathbb{R}^m - U) > 1$, e suddividiamo Q' in N^m cubi di lato $1/N$. Se uno di questi cubetti, chiamiamolo P, interseca K, esso è tutto contenuto in U e la sua immagine $f(P)$ è contenuta in un cubo di lato minore di $2(\sqrt{m}/N)^\ell$. Avremo dunque:

$$1 = vol(Q) \leq 2^n N^m (\sqrt{m}/N)^{ln}.$$

Scegliendo $ln > m$, otteniamo una contraddizione.

Ne segue che l'immagine $f(K \cap C)$, essendo un compatto di prima categoria in $\mathbb{R}^n$, ha parte interna vuota. La dimostrazione è completa. $\square$

Osservazione Dalla dimostrazione si può osservare come l'ipotesi del teorema che la f sia di classe $\mathcal{C}^\infty$ si possa indebolire a f di classe $\mathcal{C}^k$ con $kn > m$.

Osservazione In modo analogo si può dimostrare la forma più classica del lemma di Sard:

Se $f : A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione di classe $\mathcal{C}^k$ con $kn > m$, allora $CV(f)$ ha misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^n$.

§2 Il teorema di Sard per varietà differenziabili

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^m$, $m > n$ e

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

un'applicazione di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$. Se $y \in f(A)$ è un valore regolare di f, allora $f^{-1}(y)$ è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ e di dimensione $m-n$ (sottovarietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ di A) con l'atlante definito dai sistemi di carte locali:

$$(*) \qquad f^{-1}(y) \supset U_{\xi,x_0} \ni x \longrightarrow \xi(x) = \big(\xi^1(x), ..., \xi^{m-n}(x)\big) \in \xi(U_{\xi,x_0}) \subset \mathbb{R}^{m-n}$$

al variare di x_0 in $f^{-1}(y)$ e di $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m-n})$ tra le applicazioni lineari tali che $A \ni x \to g(x) = (f(x), \xi(x)) \in \mathbb{R}^m$ sia regolare in x_0. Per definire l'aperto U_{ξ,x_0}, osserviamo che, per il teorema delle funzioni implicite, la g definisce un omeomorfismo di un intorno V di x_0 su un aperto V' di $\mathbb{R}^m$: poniamo allora $U_{\xi,x_0} = V \cap f^{-1}(y)$. La $f^{-1}(y)$ è una sottovarietà *globalmente chiusa* in A.

Esempio 2.1 Sia $\mathfrak{M}(m,n;\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ a coefficienti reali e sia $k \leq \min\{m,n\}$. Allora l'inseme $\mathfrak{M}(m,n;k;\mathbb{R})$ delle matrici $m \times n$ di rango k è una sottovarietà differenziabile localmente chiusa di classe $\mathcal{C}^\omega$ di $\mathfrak{M}(m,n;\mathbb{R})$, di dimensione $k(m+n-k)$. Infatti $\mathfrak{M}(m,n;k;\mathbb{R})$ è l'intersezione del chiuso delle matrici che hanno nulli tutti i determinanti dei minori di ordine $(k+1)$ con l'aperto delle matrici che hanno almeno uno dei determinanti dei minori di ordine k diverso da zero.

Un atlante di $\mathfrak{M}(m,n;k;\mathbb{R})$ si può parametrizzare con la scelta di k colonne $X_{i_1},\dots,X_{i_k}$, con $1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n$ della matrice $X\in\mathfrak{M}(m,n;k;\mathbb{R})$. L'aperto $U_{i_1,\dots,i_k}$ è formato dalle matrici X per cui $X_{i_1},\dots,X_{i_k}$ sono linearmente indipendenti. Le coordinate sono allora gli (mk) coefficienti della matrice $(X_{i_1},\dots,X_{i_k})$, che variano nell'aperto Ω di $\mathfrak{M}(m,k;\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^{mk}$ delle matrici che hanno un minore $k\times k$ con determinante diverso da 0, e i $k(n-k)$ coefficienti c_j^h che si ricavano dalla decomposizione $X_j=\sum_{h=1}^k c_j^h X_{i_h}$ della j-esima colonna $(j\neq i_1,\dots,i_k)$ di X rispetto alle colonne $X_{i_1},\dots,X_{i_k}$. Questa scelta delle coordinate definisce un diffeomorfismo di $U_{i_1,\dots,i_k}$ sul prodotto $\Omega\times\mathbb{R}^{k(n-k)}\subset\mathbb{R}^{k(m+n-k)}$.

Siano M, N varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$, con $k\geq 1$, di dimensioni m, n rispettivamente, ed $f:M\longrightarrow N$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$. Un punto p che sia critico per la rappresentazione di f in un sistema di coordinate locali in p e in $f(p)$, lo è anche per la sua rappresentazione rispetto a qualsiasi altro sistema di coordinate locali.

Possiamo quindi definire senza ambiguità l'insieme $C(f)$ dei punti critici di f in M e l'insieme $CV(f)$ dei valori critici di f in N.

I *punti regolari* di f sono il complementare in M dei punti critici e i *valori regolari* di f il complementare in $f(M)$ dei valori critici. Se $y\in f(M)\subset N$ è un *valore regolare*, allora $f^{-1}(y)$ è una *sottovarietà (globalmente) chiusa* di M, differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, di dimensione $m-n$. Le $(*)$, relative alle possibili scelte di sistemi di coordinate locali in $p\in f^{-1}(y)$ ed in $y\in f(M)$, definiscono un atlante e quindi una struttura differenziabile su $f^{-1}(y)$.

Usando atlanti formati da un insieme al più numerabile di elementi otteniamo immediatamente:

TEOREMA 2.1 (LEMMA DI SARD) *Siano M ed N varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^\infty$. Allora, per ogni applicazione*

$$f:M\longrightarrow N$$

di classe $\mathcal{C}^\infty$, $CV(f)$ è un insieme di prima categoria in N. □

OSSERVAZIONE Possiamo introdurre sulla varietà differenziabile N una *misura* positiva n dimensionale μ, con la condizione che il suo pull-back rispetto a ciascuna carta locale sia un multiplo di classe $\mathcal{C}^\infty$ della misura di Lebesgue. Un modo per costruire la μ è il seguente. Fissiamo un ricoprimento aperto localmente finito $\{U_i\}_{i\in I}$ di N mediante gli aperti di un atlante $\{(U_i,x_i)\}_{i\in I}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ $\{(U_i,x_i)\}_{i\in I}$ di N. Sia $\{\phi_i\}$ una partizione dell'unità su N, con funzioni $\phi_i\geq 0$, subordinata al ricoprimento $\{(U_i,x_i)\}_{i\in I}$. Definiamo la misura μ mediante l'integrale delle funzioni continue a supporto compatto, ponendo:

$$\int_N g\,d\mu=\sum_{i\in I}\int_{x_i(U_i)} g(x_i)\,\phi_i(x_i)\,d\lambda_n\,,\qquad \forall g\in\mathcal{C}_c^0(N,\mathbb{R})\,,$$

ove λ_n è la misura di Lebesgue n-dimensionale in $\mathbb{R}^n$.

Vale allora il Lemma di Sard nella formulazione:

Se $f : M \longrightarrow N$ è un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$, allora l'insieme $CV(f)$ dei valori critici di f è μ-misurabile ed ha misura nulla.

§3 Proprietà di omotopia delle sfere

Ricordiamo che, dati due spazi topologici $\mathbf{X}$ ed $\mathbf{Y}$, un'omotopia tra due applicazioni continue $f, g : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ è un'applicazione continua $F : \mathbf{X} \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{Y}$ con $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$. L'omotopia è una relazione d'equivalenza "$\sim$" sull'insieme $\mathcal{C}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ delle applicazioni continue da $\mathbf{X}$ in $\mathbf{Y}$. Indichiamo con $\pi(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ il quoziente $\mathcal{C}(\mathbf{X},\mathbf{Y})/\sim$.

Uno spazio topologico $\mathbf{X}$ si dice k-connesso (k intero ≥ 0) se, per ogni $0 \leq h \leq k$, tutte le applicazioni continue $f : S^h \longrightarrow \mathbf{X}$ sono omotope tra loro. La 0-connessione è equivalente alla connessione per archi.

Diciamo che gli spazi topologici $\mathbf{X}$ ed $\mathbf{Y}$ sono *omotopicamente equivalenti*, o che *hanno lo stesso tipo di omotopia*, se esistono applicazioni continue $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ e $g : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ tali che $f \circ g : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Y}$ sia omotopa all'identità su $\mathbf{Y}$ e $g \circ f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ sia omotopa all'identità su $\mathbf{X}$. Due spazi topologici omeomorfi hanno lo stesso tipo di omotopia, ma non è vero il viceversa. Uno spazio topologico è *contrattile* se ha lo stesso tipo di omotopia di un punto, se cioè esiste un'applicazione continua $F : \mathbf{X} \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{X}$ e un punto $x_0 \in X$ con $F(x,0) = x$ e $F(x,1) = x_0$ per ogni $x \in X$. Ad esempio, gli spazi Euclidei $\mathbb{R}^n$, e più in generale i sottoinsiemi stellati degli spazi Euclidei $\mathbb{R}^n$, sono contrattili.

Utilizziamo in questo paragrafo i risultati dei paragrafi precedenti per dimostrare che la sfera S^n è $(n-1)$-connessa, ma non n-connessa. Poiché due spazi topologici omeomorfi hanno anche lo stesso tipo di omotopia, da questo fatto possiamo ricavare una dimostrazione dell'invarianza della dimensione delle carte locali di una varietà topologica.

Teorema 3.1 *La sfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ è $(n-1)$-connessa.*

Dim. Sia m un intero non negativo $< n$ e sia:

$$f : S^m \longrightarrow S^n$$

un'applicazione continua. Per il teorema di Stone-Weierstrass, le applicazioni continue da S^m in $\mathbb{R}$ si possono approssimare uniformemente con restrizioni di applicazioni polinomiali. Possiamo quindi trovare un'applicazione a componenti polinomiali

$$P : \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

tale che:

$$|P(x) - f(x)| < 1/2 \quad \forall x \in S^m.$$

Abbiamo quindi:

$$|f(x) + t(P(x) - f(x))| > 1/2 \quad \forall (x,t) \in S^m \times [0,1].$$

L'applicazione:

$$S^m \times [0,1] \ni (x,t) \longrightarrow \frac{f(x) + t(P(x) - f(x))}{|f(x) + t(P(x) - f(x))|} \in S^n$$

è un'omotopia tra f e la restrizione g di $P/|P|$ a S^m. Dico che la g non è surgettiva. Infatti, g è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su S^m e quindi, per il Lemma di Sard, $g(S^m)$ è di prima categoria in S^n. Poiché S^n meno un punto è omeomorfa a $\mathbb{R}^n$, che è contrattile, g è omotopa a un'applicazione costante. $\square$

LEMMA 3.2 *Sia n un intero ≥ 1. Definiamo un'applicazione (sospensione)*

$$\sigma : \mathcal{C}(S^n, S^n) \longrightarrow \mathcal{C}(S^{n+1}, S^{n+1})$$

mediante:

$$\sigma f(x^0, ..., x^n, x^{n+1}) = \left(\sqrt{1-(x^{n+1})^2} \cdot f\left(\frac{(x^0, ..., x^n)}{\sqrt{1-(x^{n+1})^2}} \right), x^{n+1} \right).$$

Essa induce un'applicazione bigettiva

$$\sigma_* : \pi(S^n, S^n) \longrightarrow \pi(S^{n+1}, S^{n+1}).$$

DIM. Poiché un'omotopia di applicazioni continue di S^n in sè si trasforma mediante σ in un'omotopia di applicazioni continue si S^{n+1} in sè, la σ_* è ben definita.
<u>Iniettività</u> Siano $f, g : S^n \longrightarrow S^n$ due applicazioni continue. Se σf è omotopa a σg, possiamo trovare un'omotopia:

$$F : S^{n+1} \times [0,1] \longrightarrow S^{n+1},$$

$$\text{tale che:} \quad \begin{cases} F(x,0) = \sigma f(x) & \forall x \in S^{n+1} \\ F(x,1) = \sigma g(x) & \forall x \in S^{n+1}. \end{cases}$$

Osserviamo allora che:

$$\begin{cases} \Psi(x,t) = t(|F^{n+1}(x,t)| - |x^{n+1}|) \cdot e_0 + F(x,t) \neq 0 \\ \quad \forall (x,t) \in S^{n+1} \times I \quad \text{con} \quad |F^{n+1}(x,t)| \geq |x^{n+1}|. \end{cases}$$

Infatti, se $|F^{n+1}(x,t)| - |x^{n+1}| > 0$, abbiamo $F^{n+1}(x,t) \neq 0$ e i due termini nella somma sono linearmente indipendenti. Se $|F^{n+1}(x,t)| = |x^{n+1}|$, allora $\Psi(x,t) = F(x,t) \neq 0$.

Possiamo allora definire un'omotopia $G : S^{n+1} \times [0,1] \to S^{n+1}$ mediante:

$$G(x,t) = \begin{cases} F(x,t) & \text{se } |F^{n+1}(x,t)| \leq |x^{n+1}| \\ \Psi(x,t)/|\Psi(x,t)| & \text{se } |F^{n+1}(x,t)| \geq |x^{n+1}|. \end{cases}$$

Osserviamo che:

$$G(x,0) = F(x,0) = \sigma f(x)$$

in quanto $(\sigma f)^{n+1}(x) = x^{n+1}$ e che analogamente:

$$G(x,1) = F(x,1) = \sigma g(x) \ \forall x \in S^{n+1}.$$

Abbiamo:
$$|G^{n+1}(x,t)| < 1 \quad \forall (x,t) \in S^n \times [0,1]$$
in quanto ciò è vero se $t = 0, 1$ e per $t \neq 0$, $x \in S^n$ il vettore:

$$\Psi(x,t) = t|F^{n+1}(x,t)|e_0 + F(x,t)$$

non è proporzionale a e_{n+1}. Otteniamo quindi un'omotopia $H : S^n \times [0,1] \longrightarrow S^n$ di f con g definendo:

$$\varrho : S^{n+1} \cap \{|x^{n+1}| < 1\} \ni x \longrightarrow \frac{x'}{|x'|} \in S^n$$

(ove $x' = (x^0, ..., x^n)$), e ponendo:

$$H(x',t) = \varrho \circ G(x', 0; t).$$

<u>*Surgettività*</u> Sia $f : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$ un'applicazione continua.

a) Supponiamo che, posto:

$$S_+^{n+1} = \{x \in S^{n+1} \mid x^{n+1} \geq 0\}, \qquad S_-^{n+1} = \{x \in S^{n+1} \mid x^{n+1} \leq 0\},$$

risulti:
$$f(S_+^{n+1}) \subset S_+^{n+1} \quad \text{ed} \quad f(S_-^{n+1}) \subset S_-^{n+1}.$$
Possiamo allora costruire un'omotopia tra f e σg, dove g è l'applicazione:

$$S^n \ni (x^0, ..., x^n) \xrightarrow{\quad g \quad} f(x^0, ..., x^n, 0) \in S^n$$

nel modo seguente. Indichiamo con $h : D^{n+1} \longrightarrow D^{n+1}$ la funzione continua:

$$h(y) = \begin{cases} |y|\, g\left(\frac{y}{|y|}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0\,. \end{cases}$$

Siano σ_+, σ_- e p le applicazioni:

$$\sigma_+ : D^{n+1} \ni (x^0, \ldots, x^n) \to \left(x^0, \ldots, x^n, \sqrt{1 - \sum_{i=0}^n [x^i]^2}\right) \in S_+^{n+1},$$

$$\sigma_+ : D^{n+1} \ni (x^0, \ldots, x^n) \to \left(x^0, \ldots, x^n, -\sqrt{1 - \sum_{i=0}^n [x^i]^2}\right) \in S_-^{n+1},$$

$$p : S^{n+1} \ni (x^0, ..., x^n, x^{n+1}) \to (x^0, ..., x^n) \in D^{n+1}.$$

Allora:
$$\sigma g(x) = \begin{cases} \sigma_+(h(p(x)) & \forall x \in S_+^{n+1} \\ \sigma_-(h(p(x)) & \forall x \in S_-^{n+1}. \end{cases}$$

Indichiamo con $f_+, f_- : D^{n+1} \longrightarrow D^{n+1}$ le funzioni continue:

$$f_+(y) = p \circ f(\sigma_+(y)) \text{ per } y \in D^{n+1}, \qquad f_-(y) = p \circ f(\sigma_-(y)) \text{ per } y \in D^{n+1}.$$

La proprietà della funzione f di trasformare in sè i due emisferi S_+^{n+1} e S_-^{n+1} si può esprimere mediante:

$$f(x) = \begin{cases} \sigma_+ \circ f_+(p(x)) & \text{se } x \in S_+^{n+1} \\ \sigma_- \circ f_-(p(x)) & \text{se } x \in S_-^{n+1}. \end{cases}$$

Allora un'omotopia $F : S^{n+1} \times I \longrightarrow S^{n+1}$ tra f e σg si può ottenere rialzando le omotopie lineari tra f_+ , f_- ed h :

$$F(x,t) = \begin{cases} \sigma_+(f_+(p(x)) + t(h(p(x)) - f_+(p(x))) & \text{se } x \in S_+^{n+1} \\ \sigma_-(f_-(p(x)) + t(h(p(x)) - f_-(p(x))) & \text{se } x \in S_-^{n+1}. \end{cases}$$

b) Consideriamo ora il caso generale. Sia

$$f : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$$

una qualsiasi applicazione continua. Se f non è surgettiva, allora è omotopa a un'applicazione costante e questa è omotopa alla σh ove $h(x) = e_0 \quad \forall x \in S^n$.

Supponiamo quindi f surgettiva. Ripetendo il ragionamento svolto nella dimostrazione del Teorema 3.1, possiamo supporre che f sia di classe $\mathcal{C}^\infty$. L'insieme dei suoi valori critici è allora un compatto di S^{n+1} privo di punti interni e potremo trovare una coppia di punti diametralmente opposti che siano entrambi valori regolari di f. A meno di una rotazione, che è omotopa all'identità, in quanto il gruppo $\mathbf{SO}(n+2)$ delle rotazioni intorno all'origine dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^{n+2}$ è connesso per archi, possiamo supporre che e_{n+1} e $-e_{n+1}$ siano valori regolari di f. Poniamo $N = e_{n+1}$ ed $S = -e_{n+1}$. Per il teorema delle funzioni implicite, $N^* = f^{-1}(N)$ ed $S^* = f^{-1}(S)$ sono sottoinsiemi discreti di S^{n+1} e perciò finiti. Possiamo quindi fissare una forma lineare ξ in $(\mathbb{R}^{n+2})^*$ che assuma valori distinti sui punti distinti di $N^* \cup S^*$. Infatti, per ogni coppia di punti distinti di $\mathbb{R}^{n+2}$ l'insieme delle forme lineari che hanno nei due punti valori distinti è un aperto denso in $(\mathbb{R}^{n+2})^*$ e una intersezione finita di aperti densi è ancora un aperto denso. Scegliamo ξ con $|\xi| = 1$ e $|\xi(x)| < 1$ su $N^* \cup S^*$. A meno di una rotazione, per cui valgono le considerazioni svolte sopra, possiamo supporre sia $\xi(x) = (x|N)$. Suddividiamo ora $[-1, 1]$ in un numero finito di intervalli, mediante punti $-1 < c_1 < ... < c_\ell < 1$, in modo che ogni fetta $c_i < (x|N) < c_{i+1}$, con $1 \leq i < \ell$ contenga esattamente un punto x_i di $N^* \cup S^*$ e che ogni punto di $N^* \cup S^*$ sia interno ad una di tali fette. Avremo cioè:

$$\begin{cases} c_1 < (x|N) < c_\ell & \forall x \in N^* \cup S^* \\ (x|N) \neq c_i & \forall x \in N^* \cup S^* , \ \forall 1 \leq i \leq \ell \\ \{x_i\} = \{x \,|\, c_i < (x|N) < c_{i+1}\} \cap (N^* \cup S^*) & \forall 1 \leq i \leq \ell \, . \end{cases}$$

Costruiamo ora un'omotopia:

$$H : S^{n+1} \times I \longrightarrow S^{n+1}$$

tra l'identità e un omeomorfismo di S^{n+1} la cui inversa trasformi i punti
$x = (x^0, ..., x^{n+1}) \in N^*$ in $\bar{x} = (\sqrt{1-(x^{n+1})^2}, 0, ..., 0, x^{n+1})$ e i punti
$x = (x^0, ..., x^{n+1}) \in S^*$ in $\bar{x} = (-\sqrt{1-(x^{n+1})^2}, 0, ..., 0, x^{n+1})$. A questo scopo, per ogni indice i con $1 \le i < \ell$, sia $g_i(t)$ un arco continuo in $SO(n+2)$ formato da applicazioni che lasciano fisso il punto N (l'insieme delle trasformazioni di $SO(n+2)$ che lasciano fisso N è un gruppo topologico isomorfo ad $SO(n+1)$ e quindi connesso per archi) e tali che $g_i(1)x_i = \bar{x}_i$. Definiamo la funzione $\eta_i(x)\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+2}, \mathbb{R})$ mediante:

$$\eta_i(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-|(x-x_i|N)|^2}{[(x|N)-c_i][c_{i+1}-(x|N)]}\right) & \text{se} \quad c_i < (x|N) < c_{i+1}\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Possiamo quindi l'omotopia $H : S^{n+1} \times [0,1] \longrightarrow S^{n+1}$:

$$H(x,t) = \begin{cases} x & \text{se } (x|N) \notin [c_1, c_\ell] \\ g_i(t\eta_i(x))x & \text{se } c_i < (x|N) < c_{i+1},\ i = 1, ..., \ell - 1 \\ x & \text{se } (x|N) = c_i, \quad i = 1, ..., l. \end{cases}$$

L'omotopia $f(H(x,t))$ trasforma f in un'applicazione $g(x) = f(H(x,1))$ per cui $g^{-1}(N)$ è un insieme finito di punti con $(x|e_0) > 0$ e $g^{-1}(S)$ è un insieme finito di punti con $(x|e_0) < 0$.

Componiamo quest'applicazione con un'omotopia in $\mathbf{SO}(n+2)$, tra l'identità e una una rotazione che trasforma e_0 in N. Abbiamo così ottenuto un'applicazione continua $g : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$, omotopa ad f, tale che:

$$\begin{cases} g^{-1}(N) \subset S^{n+1}_+ \setminus S^n\,, \\ g^{-1}(S) \subset S^{n+1}_- \setminus S^n\,. \end{cases}$$

Per la continuità di g, possiamo trovare $0 < \epsilon < 1/2$ tale che:

$$\begin{cases} g(S^{n+1}_+) \subset \{x \in S^{n+1} | x^{n+1} > 2\epsilon - 1\}\,, \\ g(S^{n+1}_-) \subset \{x \in S^{n+1} | x^{n+1} < 1 - 2\epsilon\}\,. \end{cases}$$

Poniamo:

$$\Psi_+(x,t) = \left(x', (1/\epsilon - 1)(\epsilon(1+t) - t(1 - x^{n+1})\right)\,,$$

$$\Psi_-(x,t) = \left(x', (1/\epsilon - 1)(t(1 + x^{n+1}) - \epsilon(1+t)\right)\,,$$

e definiamo l'omotopia $L : S^{n+2} \times [0,1] \to S^{n+2}$ mediante:

$$L(x,t) = \begin{cases} x & \text{se } |x^{n+1}| \ge 1 - \epsilon \\ \Psi_+(x,t)/|\Psi_+(x,t)| & \text{se } 1 - \epsilon(1 + 1/t) \le x^{n+1} \le 1 - \epsilon \\ x/|x| & \text{se } |x^{n+1}| \le 1 - \epsilon(1 + 1/t) \\ \Psi_-(x,t)/|\Psi_-(x,t)| & \text{se } \ -1 + \epsilon(1 + 1/t) \le x^{n+1} \le \epsilon - 1. \end{cases}$$

tra l'identità ed un'applicazione $\lambda : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$ tale che:

$$\lambda(\{|x^{n+1}| \le 1 - 2\epsilon\}) \subset S^n.$$

Allora la $L(g(x),t)$ è un'omotopia di g con un'applicazione continua $L(g(x),1) = h(x)$ tale che:

$$\begin{cases} h(S_+^{n+1}) \subset S_+^{n+1} \\ h(S_-^{n+1}) \subset S_-^{n+1} \,. \end{cases}$$

Ad essa si applica quindi l'argomento del punto a). La dimostrazione è completa. $\square$

Teorema 3.3 *Sia Φ l'insieme di applicazioni continue:*

$$\Phi = \{\varphi_k : S^1 \ni e^{i\theta} \longrightarrow \varphi_k(e^{i\theta}) = e^{ki\theta} \in S^1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{C}^\infty(S^1, S^1)\,.$$

L'applicazione naturale:

$$(\dagger) \qquad \Phi \longrightarrow \pi(S^1, S^1)$$

è una bigezione.

Dim. Ogni applicazione continua $f : S^1 \longrightarrow S^1$ è omotopa a un'applicazione continua $g : S^1 \longrightarrow S^1$ tale che $g(1) = 1$. Indichiamo con $\mathcal{C}(S^1, \{1\}; S^1, \{1\})$ l'insieme delle $f \in \mathcal{C}(S^1, S^1)$ tali che $f(1) = 1$ e sia "$\sim$" la relazione d'equivalenza che identifica $f_1,\ f_2 \in \mathcal{C}(S^1, \{1\}; S^1, \{1\})$ se esiste un'omotopia $F : [0,1] \times S^1 \to S^1$ con $F(t,1) = 1$ per ogni $t \in [0,1]$ e $F(0,z) = f_1(z)$, $F(1,z) = f_2(z)$. Posto[2] $\pi(S^1, \{1\}; S^1, \{1\}) = \mathcal{C}(S^1, \{1\}; S^1, \{1\})/\sim$, si può facilmente verificare che:

$$\pi(S^1, \{1\}; S^1, \{1\}) \simeq \pi(S^1, S^1).$$

Osserviamo che l'applicazione

$$(*) \qquad \mathbb{R} \ni \theta \longrightarrow e^{i\theta} \in S^1$$

è un omeomorfismo locale. Per ogni applicazione continua:

$$f : S^1 \longrightarrow S^1 \qquad \text{con} \qquad f(1) = 1$$

possiamo allora trovare un'unica applicazione continua:

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che $\tilde{f}(0) = 0$ e il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "e^{i\cdot}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "e^{i\cdot}"] \\ S^1 \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

[2] L'omotopia $\pi(S^1, \{1\}; S^1, \{1\})$ si dice *legata*, in contrapposizione alla $\pi(S^1, S^1)$, che si dice *libera*.

sia commutativo. Abbiamo allora

$$\tilde{f}(2\pi) = 2k\pi \quad \text{per qualche} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

L'applicazione che fa corrispondere l'intero k alla funzione f è un'applicazione continua

$$\mathcal{C}(S^1, \{1\}; S^1, \{1\}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

che assume solo valori interi.

Essa è dunque costante sulle componenti connesse di $\mathcal{C}(S^1, \{1\}; S^1, \{1\})$. Ciò dimostra che (†) è iniettiva. Siano ora $f, g \in \mathcal{C}(S^1, \{1\}; S^1, \{1\})$ tali che $\tilde{f}(2\pi) = \tilde{g}(2\pi)$. Allora l'omotopia lineare:

$$(\theta, t) \longrightarrow \tilde{f}(\theta) + t[\tilde{g}(\theta) - \tilde{f}(\theta)]$$

induce un'omotopia tra f e g. Ne segue che la (†) è anche surgettiva. La dimostrazione è completa. □

Teorema 3.4 *Sia $n \geq 2$. L'applicazione*

$$\mathcal{C}(S^1, S^1) \ni f \longrightarrow \sigma f \in \mathcal{C}(S^n, S^n)$$

ove, posto $x = (x^0, x^1, x'')$,

$$\sigma f(x^0, x^1, x'') = (\sqrt{1 - |x''|^2} f(x^0, x^1), x''),$$

induce un'applicazione bigettiva

$$\pi(S^1, S^1) \longrightarrow \pi(S^n, S^n).$$

In particolare, l'applicazione

$$\mathbf{Z} \ni k \longleftrightarrow \varphi_k \in \Phi$$

induce per ogni $n \geq 1$ una bigezione:

$$\mathbf{Z} \longleftrightarrow \pi(S^n, S^n).$$

Dim. La prima affermazione segue per iterazione dal Lemma 3.2 e la seconda dal Teorema 3.3. □

L'intero associato ad un'applicazione continua $f : S^n \to S^n$ si dice il *grado* di f e si indica con $deg(f)$.

§4 Il teorema del punto fisso di Brouwer

Un'importante applicazione dei risultati del paragrafo precedente sull'omotopia delle sfere è il seguente:

Teorema 4.1 (di Brouwer) *Ogni applicazione continua*

$$f : D^n \longrightarrow D^n$$

ha almeno un punto fisso.

DIM. Il teorema è banale se $n = 0$. Sia $n > 0$ supponiamo per assurdo che vi sia una funzione continua $f : D^n \longrightarrow D^n$ tale che

$$f(x) \neq x \ \forall x \in D^n.$$

Allora l'applicazione $\psi : D^n \longrightarrow S^{n-1}$ che associa ad ogni punto x di D^n l' intersezione di S^{n-1} con la semiretta

$$t \longrightarrow x + t\,(x - f(x))\,,\ per\ t \geq 0$$

è continua ed è una retrazione di D^n su S^{n-1} : essa infatti è descritta analiticamente mediante:

$$\psi(x) = x + \frac{\sqrt{(x|x-f(x))^2 + (1-|x|^2)|x-f(x)|^2} - |(x|x-f(x))|}{|x-f(x)|^2}(x - f(x)).$$

L'applicazione

$$D^n \times I \ni (x,t) \longrightarrow (1-t)x + t\psi(x) \in D^n$$

è una S^{n-1} omotopia dell'identità con una retrazione di D^n su S^{n-1}. Ciò è assurdo perchè S^{n-1} non può essere un retratto di deformazione stretto di D^n. Infatti D^n e S^{n-1} non sono omotopicamente equivalenti in quanto D^n è contrattile, mentre, per il Teorema 3.4, S^{n-1} non è $(n-1)$-connesso. □

OSSERVAZIONE Il teorema di Brouwer si applica ovviamente a tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^n$ che sono omeomorfi a D^n; in particolare a tutti i sottoinsiemi convessi e compatti di uno spazio euclideo.

§5 Il teorema d'immersione di Whitney

Dimostriamo in questo paragrafo che ogni varietà differenziabile M di dimensione m è diffeomorfa a una sottovarietà chiusa di $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Cominciamo con alcuni risultati relativi ad applicazioni differenziabili tra spazi Euclidei. Ricordiamo che nello spazio vettoriale delle matrici A di tipo $n \times m$, a coefficienti reali o complessi, la $\|A\| = \sqrt{\text{traccia}(A^*A)}$ è una norma Euclidea.

LEMMA 5.1 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^m$, n un intero $\geq 2m$, ed $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^2$. Allora, per ogni $\epsilon > 0$ esiste una matrice reale $A = (a^i_j)$, di tipo $n \times m$, tale che: $\|A\| < \epsilon$ e l'applicazione $f_A \colon \Omega \ni x \longrightarrow f_A(x) = f(x) + A\,x \in \mathbb{R}^n$ è un'immersione in ogni punto $x \in \Omega$.*

DIM. Se f_A non è un'immersione in un punto $x \in \Omega$, allora la matrice $B = Jf(x) + A$ ha rango minore di m, cioè $A = B - Jf(x)$ per una matrice B di rango minore di m. Per ogni $0 \leq k < m$, le matrici $n \times m$ di rango k formano una sottovarietà differenziabile localmente chiusa $\mathfrak{M}(n,m;k;\mathbb{R})$ di dimensione $k(n+m-k)$ dello spazio Euclideo $\mathfrak{M}(n,m;\mathbb{R}) = \{\text{matrici reali } n \times m\} \simeq \mathbb{R}^{mn}$. L'applicazione:

$$F_k : \Omega \times \mathfrak{M}(n,m;k;\mathbb{R}) \ni (x,B) \rightarrow A = B - Jf(x) \in \mathfrak{M}(n,m;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{mn}$$

è differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$, definita su una varietà differenziabile di dimensione $m + k(n+m-k)$ e a valori in una varietà differenziabile di dimensione mn. La

$k \longrightarrow m+k(n+m-k)$ è crescente se $2k < n+m$, e quindi in particolare per $k < m$. Abbiamo perciò:

$$m + k(n+m-k) \leq m + (m-1)(n+1) = mn + 2m - n - 1 < 2n$$

per ogni intero k con $0 \leq k < m$, per l'ipotesi che $n \geq 2m$. Per il Lemma 1.1, l'immagine di F_k è di prima categoria in $\mathbb{R}^{mn}$. In particolare, per ogni compatto K contenuto in Ω ed ogni $R > 0$, l'insieme:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(K,R) &= \{(x,B) \in \Omega \times \mathfrak{M}(n,m;\mathbb{R}) \mid x \in K\,,\ \operatorname{rank}(B) < m\,,\ \|B\| \leq R\} \\ &= \bigcup_{0 \leq k < m} F_k\left(K \times \{B \in \mathfrak{M}(n,m;k;\mathbb{R}) \mid \|B\| \leq R\}\right)\end{aligned}$$

è un compatto di $\mathfrak{M}(n,m;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{mn}$ privo di punti interni.

Fissiamo una successione crescente $\{K_\nu\}$ di compatti di Ω con $K_\nu \subset \mathring{K}_{\nu+1}$ ed $\bigcup_\nu K_\nu = \Omega$, scegliendo ad esempio:

$$K_\nu = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leq e^\nu\,,\ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^m \setminus \Omega) \geq e^{-\nu}\}.$$

Per ogni intero positivo ν, l'insieme $\mathbf{A}_\nu = \mathfrak{M}(n,m;\mathbb{R}) \setminus \mathcal{K}(K_\nu, \nu)$ è allora un aperto denso di $\mathfrak{M}(n,m;\mathbb{R})$. Le matrici A che appartengono ad $\mathbf{A} = \bigcap_\nu A_\nu$ sono tutte e sole quelle per cui $x \longrightarrow f(x) + A\,x$ è un'immersione in ogni punto di Ω. Poiché $\mathfrak{M}(n,m;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{mn}$ è uno spazio di Baire, $\mathbf{A}$ è un sottoinsieme denso di seconda categoria di $\mathfrak{M}(n,m;\mathbb{R})$. Da questa osservazione segue la tesi del Lemma. $\square$

Lemma 5.2 *Sia Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^m$, n un intero $\geq m$, ed $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$. Se f è un'immersione in tutti i punti di un compatto K di Ω, allora possiamo trovare un $\epsilon > 0$ tale che, per ogni applicazione differenziabile $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1$ con $\sup_{x \in K} \|Jg(x)\| < \epsilon$, l'applicazione $x \longrightarrow f(x) + g(x)$ sia ancora un'immersione in ogni punto $x \in K$.*

Se inoltre $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è iniettiva su un compatto $K' \subset K \subset \Omega$, allora esiste un numero reale $\epsilon' > 0$ tale che, se $g\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ soddisfa $|g(x) - g(y)| \leq \epsilon'|x-y|$ per $x, y \in K'$, allora $(f+g)\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è ancora iniettiva su K'.

Sia $r < \operatorname{dist}(K, b\Omega)$. Esiste allora un numero reale positivo $\epsilon'' > 0$ tale che, se $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione di classe $\mathcal{C}^1$ e $|g(x)| < \epsilon''$ per $x \in K'$, $\|Jg(x)\| < \epsilon''$ per $x \in K \cup \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, K') \leq r\}$, allora $f+g$ è un'immersione in tutti i punti di K ed è iniettiva su K'.

Dim. Sia:

$$U_{i_1,\ldots,i_m}(r) = \left\{x \in \Omega \;\middle|\; \left|\det(\partial f^{i_h}(x)/\partial x^j)_{1 \leq j,h \leq m}\right| > r\right\}$$

l'aperto dei punti di Ω in cui il determinante del minore $m \times m$ formato dalle righe $(i_1, \ldots, i_m)$ della matrice Jacobiana $Jf(x)$ è in modulo maggiore di un numero reale positivo r assegnato. Per ipotesi, possiamo ricoprire K con un numero finito di aperti $U_{i_1,\ldots,i_m}(r)$. La tesi segue allora dalla dipendenza continua dei determinanti dei minori dai coefficienti della matrice.

Dimostriamo adesso la seconda affermazione. Dimostriamo innanzi tutto che esiste un numero reale positivo $c > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| \geq c|x-y|$ se $x, y \in K'$. Infatti, se f è un'immersione iniettiva in ogni punto di K', la funzione

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} & \text{se} \quad x \neq y \\ \liminf_{x' \longrightarrow x} \frac{|f(x')-f(x)|}{|x'-x|} & \text{se} \quad x = y \end{cases}$$

è finita, semicontinua inferiormente e positiva in ogni punto del compatto $K' \times K'$, ed ha quindi su $K' \times K'$ un minimo positivo c.

SE $g\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ soddisfa $|g(x) - g(y)| < c|x - y|$ per $x, y \in K'$, avremo, per $x \neq y \in K'$:

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - [f(y) + g(y)]| &\geq |f(x) - f(y)| - |g(x) - g(y)| \\ &\geq c\,|x - y| - |g(x) - g(y)| > 0\,. \end{aligned}$$

Questo dimostra che $(f + g)$ è ancora iniettiva su K'.

Osserviamo che, fissati due numeri reali $\epsilon', r > 0$, con $r > \operatorname{dist}(K', b\Omega)$, possiamo trovare un $\epsilon'' > 0$ sufficientemente piccolo tale che ogni funzione $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1$ che soddisfi $\|Jg(x)\| < \epsilon''$ se $\operatorname{dist}(x, K') \leq r$, soddisfi anche la diseguaglianza $|g(x) - g(y)| \leq \epsilon'|x - y|$ quando x, y appartengano alla stessa componente connessa di K'. Fisseremo inoltre ϵ'' in modo tale che $|f(x) - f(y)| > \epsilon''$ se x, y appartengono a diverse componenti connesse di K'. In questo modo anche l'ultima affermazione del Lemma risulterà verificata. □

Prima di enunciare e dimostrare il Teorema d'immersione di Whitney, è conveniente definire un'opportuna topologia sullo spazio vettoriale reale $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ delle applicazioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ delle applicazioni $f\colon M \to N$ differenziabili di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Definiamo innanzi tutto la topologia di $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ nel caso in cui Ω sia un aperto dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^m$. Per ogni compatto $K \subset \Omega$ ed ogni intero non negativo m introduciamo la seminorma:

$$\|f\|_{K,m} = \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha f(x)|\,.$$

Sia ora $\{K_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ una successione di compatti con $K_\nu \subset \overset{\circ}{K}_{\nu+1}$ e $\bigcup_\nu K_\nu = \Omega$ e definiamo, per $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$:

$$\operatorname{dist}(f, g) = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \frac{\|f - g\|_{K_\nu,\nu}}{1 + \|f - g\|_{K_\nu,\nu}}\,.$$

Si verifica che questa è una distanza su $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, che induce la topologia della convergenza uniforme della funzione con tutte le sue derivate parziali sui compatti di Ω, e che, con questa distanza, $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ è uno spazio metrico completo e quindi, in particolare, uno spazio di Baire.

Consideriamo ora il caso in cui M sia una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$. Fissiamo ancora una successione di compatti $\{K_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ di M con $K_\nu \subset \overset{\circ}{K}_{\nu+1}$ e $\bigcup_\nu K_\nu = M$ ed un atlante numerabile $\mathcal{A}_M = \{(U_a, x_a)\}_{a \in \mathbb{N}}$, con gli aperti U_a relativamente compatti in M. Per ogni $a \in \mathbb{N}$, fissiamo un aperto $U'_a \Subset U_a$, in modo tale che $\{U'_a\}_{a \in \mathbb{N}}$ sia una famiglia localmente finita e sia ancora un ricoprimento di M. Definiremo allora la distanza tra due applicazioni f e g di $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ mediante:

$$\operatorname{dist}(f, g) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{a=0}^{\infty} 2^{-\nu-a} \frac{\|f \circ x_a^{-1} - g \circ x_a^{-1}\|_{x_a(\bar{U}'_a \cap K_\nu),\nu}}{1 + \|f \circ x_a^{-1} - g \circ x_a^{-1}\|_{x_a(\bar{U}'_a \cap K_\nu),\nu}}\,.$$

Si verifica che con questa distanza $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ è uno spazio metrico completo, e quindi di Baire. La topologia indotta dalla distanza è, per la rappresentazione della funzione in ogni carte locale, quella della convergenza uniforme con tutte le derivate.

Dimostriamo ora il:

Teorema 5.3 (Whitney) *Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$, paracompatta, numerabile all'infinito, di dimensione reale m. Esiste allora un'immersione differenziabile $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ e un diffeomorfismo $g : M \longrightarrow N \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ di M su una sottovarietà globalmente chiusa N di $\mathbb{R}^{2m+1}$.*

Dim. Possiamo supporre per semplicità che M sia connessa. Fissiamo una successione di compatti $\{K_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ di M con $K_\nu \subset \overset{\circ}{K}_{\nu+1}$ e $\bigcup_\nu K_\nu = M$ ed un atlante numerabile e localmente finito $\mathcal{A}_M = \{(U_a, x_a)\}_{a\in\mathbb{N}}$, con gli aperti U_a relativamente compatti in M. Per ogni ν indichiamo con $\mathcal{F}_\nu$ l'insieme delle applicazioni differenziabili $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ che sono un'immersione in ogni punto di K_ν. Per il Lemma 5.2, $\mathcal{F}_\nu$ è un aperto di $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$. Per il Lemma 5.1, $\mathcal{F}_\nu$ è denso in $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$. Per il Teorema di Baire, $\mathcal{F} = \bigcap_\nu \mathcal{F}_\nu$ è un sottoinsieme denso di seconda categoria di $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$. Chiaramente le funzioni di $\mathcal{F}$ sono immersioni in ogni punto di M.

Se M è compatta, ogni applicazione differenziabile $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è propria[3]. Se M non è compatta, consideriamo il sottoinsieme $\mathcal{T}$ delle funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ che soddisfano $f(p) \geq \nu$ se $p \in K_\nu \setminus K_{\nu-1}$ per $\nu \geq 1$. Poiché $\mathcal{T}$ è chiuso, è uno spazio metrico completo per la restrizione della distanza su $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ e quindi uno spazio di Baire. Ancora, si verifica facilmente che $\mathcal{F}_\nu \cap \mathcal{T}$ è un aperto denso di $\mathcal{T}$ per ogni ν. Quindi $\mathcal{F} \cap \mathcal{T}$ è un sottoinsieme denso di seconda categoria di $\mathcal{T}$ ed ogni $f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{T}$ definisce un'immersione propria $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Supponiamo ora che $n > 2m$. Sia $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile che è un'immersione differenziabile in ogni punto p si un compatto K di M. Sia $\mathcal{A} = \{(U_a, x_a)\}$ un atlante numerabile e localmente finito di M, con aperti U_a relativamente compatti in M ed U'_a aperti di M con $U'_a \Subset U_a$ e $\bigcup_a U'_a = M$. Per il teorema delle funzioni implicite, possiamo scegliere l'atlante $\mathcal{A}$ in modo che f sia iniettiva su $K \cap U_a$ per ogni aperto U_a dell'atlante $\mathcal{A}$. Sia $\{\chi_a\}$ una partizione dell'unità di classe $\mathcal{C}^\infty$ di M, subordinata al ricoprimento $\{U_a\}$, con $\chi_a(p) > 0$ se $p \in \bar{U}'_a$. Dico che, data una qualsiasi successione di numeri reali positivi $\{r_a\}$, è possibile determinare una successione di vettori $\{v_a\} \subset \mathbb{R}^n$ tale che per ogni intero positivo ν, $f_\nu = f + \sum_{a<\nu} v_a \chi_a$ sia un'immersione in ogni punto di $F_\nu = K \cap \bigcup_{a<\nu} \bar{U}'_a$ ed iniettiva su F_ν e su ogni sottoinsieme $K \cap U_a$, per $a \in \mathbb{N}$. Ragioniamo per ricorrenza su ν. Per $\nu = 0$, abbiamo $F_\nu = \emptyset$ e quindi non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo di aver costruito f_ν. L'insieme $D = \{(p, q) \in M \times M \mid \chi_\nu(p) \neq \chi_\nu(q)\}$ è un aperto di $M \times M$ e quindi una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ e di dimensione $2m$. Poiché $2m < n$, per il Lemma di Sard l'applicazione $D \ni (p, q) \longrightarrow \frac{f(p)-f(q)}{\chi_\nu(p)-\chi_\nu(q)} \in \mathbb{R}^n$ ha immagine di prima categoria in $\mathbb{R}^n$ ed è dunque possibile trovare un b_ν arbitrariamente piccolo tale che $\frac{f_\nu(p)-f_\nu(q)}{\chi_\nu(p)-\chi_\nu(q)} \neq b_\nu$ se $(p, q) \in D$. Pur di scegliere b_ν sufficientemente piccolo, per il Lemma 5.2 la funzione $f_{\nu+1} = f_\nu + b_\nu \chi_\nu$ sarà ancora un'immersione differenziabile ed iniettiva su F_ν e su tutte le intersezioni $K \cap U_a$. Potremo ancora, per il Lemma 5.2, scegliere b_ν in modo che f_ν sia un'immersione differenziabile in ogni punto di $F_{\nu+1}$. Resta da verificare che $f_{\nu+1}$ sia iniettiva su $F_{\nu+1}$. Siano $p, q \in F_{\nu+1}$ con $f_{\nu+1}(p) = f_{\nu+1}(q)$. Quest'uguaglianza implica

[3] Chiamiamo propria un'applicazione continua $\Phi : X \longrightarrow Y$ tra due spazi topologici X e Y che trasformi chiusi di X in chiusi di Y e per cui $\Phi^{-1}(K)$ sia compatto per ogni compatto K di Y.

che $p = q$ se entrambi i punti non appartengono all'aperto $\{\chi_\nu > 0\}$. Infatti in questo caso $p, q \in F_\nu$ ed $f_\nu(p) = f_{\nu+1}(p) = f_{\nu+1}(q) = f_\nu(q)$. Si verifica ancora che $f_{\nu+1}(p) \neq f_{\nu+1}(q)$ se $\chi_\nu(p) \cdot \chi_\nu(q) = 0$ e $p \neq q$. Resta da considerare il caso in cui $\chi_\nu(p) \cdot \chi_\nu(q) \neq 0$. Allora $p, q \in K \cap U_a$ ed $f(p) \neq f(q)$ se $p \neq q$ per la scelta dell'atlante $\mathcal{A}$. Quindi: se $\chi_\nu(p) = \chi_\nu(q)$, da $f_{\nu+1}(p) = f_{\nu+1}(q)$ ricaviamo che $f_\nu(p) = f_\nu(q)$ e quindi $p = q$; se $\chi_\nu(p) \neq \chi_\nu(q)$ la $f_{\nu+1}(p) = f_{\nu+1}(q)$ implica che $p = q$ per la scelta di b_ν.

Sia ora $\{K_\nu\}$ una successione di compatti di M con $K_\nu \subset \mathring{K}_{\nu+1}$ e $\bigcup K_\nu = M$, sia $\mathcal{T} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n) \mid |f(p)| \geq \nu \text{ se } p \in K_\nu \setminus K_{\nu-1}\}$. Per quanto dimostrato sopra, se $n > 2m$, le $f \in \mathcal{T}$ che sono immersioni differenziabili iniettive su K_ν formano un aperto denso $\mathbf{T}_\nu$ di $\mathcal{T}$. Per il teorema di Baire, $\mathbf{T} = \bigcap_\nu \mathbf{T}_\nu$ è un sottoinsieme denso di seconda categoria di $\mathbf{T}$ e chiaramente i suoi elementi sono immersioni iniettive di M in $\mathbb{R}^n$. $\square$

Osserviamo che, utilizzando il Teorema d'immersione di Whitney, è possibile definire una topologia metrizzabile sullo spazio $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ delle applicazioni differenziabili definite sulla varietà differenziabile M ed a valori nella varietà differenziabile N. Fissata un'immersione differenziabile iniettiva e propria $N \hookrightarrow \mathbb{R}^\ell$, che ci permetta di identificare N ad una sottovarietà chiusa di $\mathbb{R}^\ell$, potremo considerare $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ come il sottospazio chiuso di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ formato dalle f per cui $f(M) \subset N$.

CAPITOLO III

FORME DIFFERENZIALI

§1 Forme differenziali in $\mathbb{R}^n$

Indichiamo con $\Lambda^q\mathbb{R}^n$ lo spazio vettoriale reale di dimensione $\binom{n}{q}$ delle forme q-multilineari alternate su $\mathbb{R}^n$. Si dice *forma differenziale di grado* q e di classe $\mathcal{C}^k$ su un aperto A di $\mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$:

$$\eta : A \longrightarrow \Lambda^q\mathbb{R}^n\,. \tag{1.1}$$

Indichiamo con $\Omega^q_k(A)$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ delle forme differenziali di grado q e di classe $\mathcal{C}^k$ sull'aperto A di $\mathbb{R}^n$. Sia dx^i la forma lineare su $\mathbb{R}^n$ definita da

$$dx^i(x) = x^i \;\; \forall x = {}^t(x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n\,. \tag{1.2}$$

Poiché le forme:

$$dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_q} \qquad \text{con} \qquad 1 \leq i_1 < ... < i_q \leq n \tag{1.3}$$

definiscono una base di $\Lambda^q\mathbb{R}^n$, la forma (1.1) si scrive in modo unico come:

$$\sum_{1\leq i_1<...<i_q\leq n} \eta_{i_1...i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} \tag{1.4}$$

ed è di classe $\mathcal{C}^k$ se e soltanto se tutte le funzioni reali $\eta_{i_1,...,i_q}(x) = \eta(x)(e_{i_1}, ..., e_{i_q})$ sono di classe $\mathcal{C}^k$ su A. (Abbiamo indicato con $e_1, ..., e_n$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.)

§2 Pull-back

Se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$, definita sull'aperto A di $\mathbb{R}^n$, il suo differenziale è l'elemento di $\Omega^1_{k-1}(A)$ definito da:

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} dx^i\,. \tag{2.1}$$

Siano B un aperto di $\mathbb{R}^m$, A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\phi = {}^t(\phi^1, ..., \phi^n) : B \longrightarrow A$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^{k+1}$, con $k \geq 0$. Data una forma differenziale $\eta \in \Omega^q_k(A)$, definita da (1.4), definiamo il suo *pull-back* $\phi^*\eta$ come la forma differenziale di $\Omega^q_k(B)$:

$$\phi^*\eta = \sum_{i_1...i_q} \eta_{i_1...i_q}(\phi)\, d\phi^{i_1} \wedge ... \wedge d\phi^{i_q}\,. \tag{2.2}$$

Si verifica immediatamente che il pull-back di forme gode delle proprietà:

Teorema 2.1 *$\phi^* : \Omega_k^q(A) \longrightarrow \Omega_k^q(B)$ è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare.*

Se $\eta_1 \in \Omega_k^{q_1}(A)$ ed $\eta_2 \in \Omega_k^{q_2}(A)$, allora $\eta_1 \wedge \eta_2 \in \Omega_k^{q_1+q_2}(A)$ e $\phi^*(\eta_1 \wedge \eta_2) = (\phi^*\eta_1) \wedge (\phi^*\eta_2)$.

Se $\psi : D \longrightarrow B$ è un'applicazione di classe $\mathcal{C}^{k+1}$, definita su un aperto D di $\mathbb{R}^\ell$, allora $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$.

§3 Differenziale di una forma

La definizione del differenziale di una funzione si può estendere a forme differenziali di ordine qualsiasi. Sia $\eta \in \Omega_{k+1}^q(A)$ una forma differenziale di grado q e di classe $\mathcal{C}^{k+1}$, con $k \geq 0$, definita su un aperto A di $\mathbb{R}^n$ dalla formula (1.4). Poniamo:

$$
\begin{aligned}
d\eta(x) &= \textstyle\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_q\leq n} d\eta_{i_1\ldots 1_q}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_q\leq n} \frac{\partial \eta_{i_1\ldots 1_q}(x)}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Per ogni intero $q \geq 0$, il differenziale definisce un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare:

$$
d : \Omega_{k+1}^q(A) \longrightarrow \Omega_k^{q+1}(A)\,. \tag{3.2}
$$

Teorema 3.1 *Il differenziale è l'unica applicazione $\mathbb{R}$-lineare (3.2), definita per ogni $q = 0, 1, \ldots, n$, che coincida con il differenziale definito sulle funzioni nel caso $q = 0$, e soddisfi le:*

$$
d(\eta_1 \wedge \eta_2) = d\eta_1 \wedge \eta_2 + (-1)^{q_1}\eta_1 \wedge d\eta_2 \qquad \forall \eta_1 \in \Omega_{k+1}^{q_1}\ , \forall \eta_2 \in \Omega_{k+1}^{q_2} \tag{3.3}
$$

$$
d \circ d : \Omega_{k+2}^q(A) \longrightarrow \Omega_k^{q+2} \quad \text{è l'applicazione nulla, cioè} \quad d \circ d = d^2 = 0\,. \tag{3.4}
$$

Dim. La (3.3), per il differenziale definito dalla (3.1), segue dalle proprietà del prodotto esterno e dalla regola di Leibnitz per la derivazione del prodotto di due funzioni. La (3.4) è allora conseguenza della:

$$
d^2 f = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0\,,
$$

valida per ogni funzione $f \in \mathcal{C}^2(A, \mathbb{R})$. Viceversa, se valgono (3.3) e (3.4) e il differenziale è $\mathbb{R}$-lineare, la sua espressione è data necessariamente dalla (3.1). □

Per ogni aperto A di $\mathbb{R}^n$, abbiamo un *complesso di operatori differenziali*:

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega_{k+n}^0(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_{k+n-1}^1(A) & \longrightarrow & \cdots \\
 & \xrightarrow{d} & \Omega_{k+n-h}^h(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_{k+n-h-1}^{h+1}(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_{k+n-h-2}^{h+2}(A) \longrightarrow \\
 & & & & \cdots & \xrightarrow{d} & \Omega_k^n(A) \longrightarrow 0
\end{array} \tag{3.5}
$$

Teorema 3.2 (Lemma di Poincaré-Volterra) *Sia $\eta \in \Omega^q_k(A)$ $(k \geq 1)$ una forma differenziale definita su un aperto A di $\mathbb{R}^n$, che soddisfa*

$$df = 0 \tag{3.6}$$

in un intorno aperto di un punto p di A. Se $q = 0$, allora f è costante in un intorno di p in A. Se $q > 0$, possiamo trovare un intorno aperto U di p in A e una forma differenziale $u \in \Omega^{(q-1)}_{k+1}(U)$ tale che

$$du = \eta \ \textit{in} \ U. \tag{3.7}$$

Dim. L'affermazione nel caso $q = 0$ è conseguenza del teorema di Lagrange: se f è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ su un aperto convesso, allora $f(x) - f(y) = \sum_{i=1}^n (x^i - y^i)\partial f(\xi)/\partial x^i$ per un punto ξ del segmento $[x, y]$ di estremi x, y. Quindi f è costante su un aperto convesso in cui si annullino tutte le sue derivate prime.

Sia ora $q > 0$. Ragioniamo per induzione, supponendo il teorema vero per forme differenziali che non contengano in un intorno di p i differenziali $dx^{i+1}, ..., dx^n$. Se η, definita da (1.4), ciò significa che, in un intorno U di p:

$$\eta_{i_1 \dots i_q} = 0 \quad \text{se} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_{q-1} \leq i < i_q \leq n\,. \tag{$\dagger[i]$}$$

Se inoltre $d\eta = 0$ allora, in un intorno U di p:

$$\frac{\partial \eta_{i_1 \dots i_q}}{\partial x^j} = 0 \quad \text{se} \quad 1 \leq i_1 < ... < i_q \leq i < j \leq n\,. \tag{$\ddagger[i]$}$$

Il caso $i = 0$ è banale perché allora η è identicamente nulla in un intorno U di p e possiamo risolvere (3.7) ponendo $u = 0$. Supponiamo quindi $i \geq 0$ e sia $\eta \in \Omega^q_k(A)$ una forma, con $d\eta = 0$, che soddisfi $(\dagger[i+1])$, e quindi anche $(\ddagger[i+1])$:

$$\eta = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq i+1} \eta_{j_1 \dots j_q} dx^{j_1} \wedge ... \wedge dx^{j_q}$$

in un intorno U di p. Scriviamo in un intorno di p

$$\eta = dx^{i+1} \wedge \eta_1 + \eta_2$$

con η_1, η_2 che non contengono dx^{i+1}, cioè $\eta_1 \in \Omega^{q-1}_k(U)$ ed $\eta_2 \in \Omega^q_k(U)$ e soddisfano $(\dagger[i])$ e $(\ddagger[i+1])$. Possiamo supporre che $p = 0$ e che questa decomposizione valga in un intorno U di

$$W = [-R, R]^n$$

in $A \subset \mathbb{R}^n$, per $R > 0$ in cui $d\eta = 0$. Definiamo quindi una forma

$$\beta = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{q-1} \leq i} \beta_{j_1 \dots j_{q-1}} dx^{j_1} \wedge ... \wedge dx^{j_{q-1}}$$

ponendo

$$\beta_{j_1 \dots j_{q-1}}(x^1, ..., x^n) = \int_{-R}^{x^{i+1}} \eta_{j_1 \dots j_{q-1}}(x^1, ...x^i, t, x^{i+2}, ..., x^n) dt.$$

Allora si verifica che

$$\eta - d\beta \in \Omega^q_k((-R,R)^n)$$

è indipendente da $dx^{i+1}, ..., dx^n$ e quindi per l'ipotesi induttiva

$$\eta - d\beta = dv$$

su un intorno aperto U di p contenuto in W e la tesi segue con

$$u = \beta + v.$$

$\square$

Si verifica facilmente, dalla formula del calcolo dei differenziali, il:

Teorema 3.3 *Se $\phi : B \longrightarrow A$ è una applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^{k+2}$ definita su un aperto B di $\mathbb{R}^m$ e valori in un aperto A di $\mathbb{R}^n$, abbiamo, per ogni intero $q \geq 0$, il diagramma commutativo:*

$$\begin{tikzcd} \Omega^q_{k+2}(A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\phi^*"'] & \Omega^{q+1}_{k+1}(A) \arrow[d, "\phi^*"] \\ \Omega^q_{k+1}(B) \arrow[r, "d"] & \Omega^{q+1}_k(B) \end{tikzcd}$$

Osservazione I teoremi 3.2 e 3.3 permettono di definire forme differenziali e il differenziale di forme su varietà differenziabili astratte, in quanto ci dicono che la definizione di differenziale e la differenziazione sono operazioni invarianti rispetto ai cambiamenti di carte locali.

§4 Orientazione e sottovarietà di $\mathbb{R}^n$.

Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$. Un atlante $\mathcal{A}$ di classe $\mathcal{C}^k$ si dice *orientato* se i determinanti degli jacobiani delle sue funzioni di transizione sono positivi. Diremo che due atlanti orientati $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ sono compatibili se la loro unione è ancora un atlante orientato. Una varietà differenziabile che ammetta un atlante orientato si dice *orientabile*. La relazione di compatibilità è allora una relazione di equivalenza tra gli atlanti orientati su M che ne definiscono la struttura differenziabile. Se M è connessa e orientabile, ci sono esattamente due classi di equivalenza di atlanti orientati su M. La scelta di una delle due classi è una *orientazione* della varietà M. Nel caso di una varietà non connessa, un'orientazione di M sarà la scelta di una particolare orientazione su ciascuna delle sue componenti connesse.

Osservazione Non tutte le varietà sono orientabili. Ad esempio gli spazi proiettivi $\mathbb{RP}^n$ sono varietà orientabili se n è dispari, ma non se n è pari.

Consideriamo ora in particolare il caso di sottovarietà di $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo che una sottovarietà localmente chiusa di $\mathbb{R}^n$, di classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ e di dimensione q, è un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^n$ tale che, per ogni punto $p \in S$, si possano trovare un intorno aperto U di p in $\mathbb{R}^n$ ed $n-q$ funzioni di classe $\mathcal{C}^k$:

$$f^i : U \longrightarrow \mathbb{R} \;\; i = 1, ..., n-q$$

tali che:

$$(4.1) \qquad \begin{cases} S \cap U = \{x \in U | f^i(x) = 0 \ \ i = 1, ..., n-q\} \\ df^1(x) \wedge ... \wedge df^{n-q}(x) \neq 0 \ \ \forall x \in U. \end{cases}$$

Una *carta locale* su S è una *parametrizzazione*:

$$(4.2) \qquad \mathbf{r} : B \,\text{aperto} \ \subset \mathbb{R}^q \to S \subset \mathbb{R}^n$$

di classe $\mathcal{C}^k$, cioè un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, definita su un aperto B di $\mathbb{R}^q$, a valori in $\mathbb{R}^n$, *non singolare*, cioè con Jacobiano di rango massimo q in ogni punto di B, e la cui immagine $\mathbf{r}(B)$ sia contenuta in S. L'esistenza di un atlante ottenuto mediante parametrizzazioni è assicurata dal teorema delle funzioni implicite.

La scelta delle funzioni $f^1, \ldots, f^{n-q}$ determina un'orientazione su $S \cap U$: una parametrizzazione (4.2) con $\mathbf{r}(B) \subset S \cap U$ sarà una carta ammissibile se:

$$\det \left(\nabla f^1(\mathbf{r}), ..., \nabla f^{n-q}(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^q} \right) > 0\,.$$

Torniamo al caso generale. Sia M una varietà di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$ e sia D un aperto di M. È allora possibile definire un'applicazione continua $f : M \to R$ che assuma valori negativi su D e positivi su $M - \bar{D}$. Infatti M è uno spazio topologico regolare e a base numerabile e dunque metrizzabile. Se d è una distanza che definisce la topologia di M, e bD è la frontiera di D, basterà porre

$$f(x) = \begin{cases} -d(x, bD) & \text{se } \ x \in \bar{D} \\ d(x, bD) & \text{se } \ x \in M - D. \end{cases}$$

Diciamo che D è regolare di classe $\mathcal{C}^k$ se è possibile scegliere una tale funzione f in modo che sia di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno U di bD in M e non abbia punti critici su bD; diciamo allora che la f *definisce* D. Se M è orientata, possiamo definire sulla frontiera di un suo aperto D di classe $\mathcal{C}^k$ una struttura di varietà orientata di dimensione $n-1$. Se f è una funzione che definisce D, costruiamo un atlante orientato su bD nel modo seguente: ogni punto p di bD ammette un intorno coordinato (U, ϕ), compatibile con l'orientazione di M, della forma

$$\phi = (f, \phi^1, ..., \phi^{n-1}).$$

Considereremo allora la

$$(bD \cap U, (\phi^1, ..., \phi^{n-1}))$$

come una carta dell'atlante che definisce l'orientazione di bD. La frontiera di D, pensata come varietà orientata nel modo che abbiamo precisato, si indica con ∂D e si dice il bordo o la frontiera orientata di D.

Questa nozione è molto importante per la teoria dell'integrazione delle forme differenziali.

§5 Integrazione e formule di Stokes

Sia A un dominio di $\mathbb{R}^n$. Una n-forma Se $\eta \in \Omega^n_0(A)$ si scrive nella forma

$$\eta = \eta_{1,\ldots,n} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \,,$$

ove $\eta_{1,\dots,n}$ è una funzione reale, continua in A. Sia D un sottoinsieme misurabile contenuto in A ed $\eta_{1,\dots,n}$ è integrabile in D, possiamo definire

$$\int_D \eta = \int_D \eta_{1\dots n} dx\,.$$

Sia $\mathbf{r} = (\mathbf{r}^1, ..., \mathbf{r}^n) : B \longrightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile definita su un aperto $B \subset \mathbb{R}^q$, iniettiva e senza punti singolari. Diciamo che $\mathbf{r}(B)$ è una *sottovarietà parametrica di $A \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione q*. Se $\eta \in \Omega^q(A)$, il suo pull-back $\mathbf{r}^*\eta$ è una q-forma continua su B. Se D è un dominio misurabile di B, e $\operatorname{supp}(\mathbf{r}^*\eta) \cap \bar{D}$ è un compatto contenuto in B, possiamo integrare su D la forma $\mathbf{r}^*\eta)$, e porre:

$$\int_{\mathbf{r}(D)} \eta = \int_D \mathbf{r}^*\eta.$$

La formula di cambiamento di variabili negli integrali multipli ci dice che un cambiamento di parametrizzazione di $\mathbf{r}(D)$ che non ne cambi l'orientazione, ottenuto cioè mediante un diffeomorfismo

$$\sigma : B' \longrightarrow B \quad \text{tra aperti} \quad B', B \subset \mathbb{R}^q \quad \text{con} \quad \det\left(\frac{\partial \sigma^i}{\partial y^j}\right)_{1\leq i,j\leq q} > 0$$

non cambia il valore dell'integrale:

$$\int_{\sigma^{-1}(D)} (\mathbf{r}\circ\sigma)^*\eta = \int_D \mathbf{r}^*\eta\,.$$

Possiamo quindi integrare una q-forma su sottoinsiemi compatti di sottovarietà orientate di dimensione q, usando l'additività dell'integrale e riducendoci, per partizione dell'unità, a considerare soltanto il caso di varietà parametriche (carte locali).

Riconsideriamo ora il concetto di *bordo* di un dominio di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che D sia un aperto relativamente compatto di $\mathbb{R}^n$. Sia d la distanza euclidea in $\mathbb{R}^n$ e consideriamo la funzione continua $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ negativa in D e positiva su $\mathbb{R}^n - \bar{D}$:

$$f(x) = \begin{cases} -d(x, bD) & \text{se } x \in \bar{D} \\ d(x, bD) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n - D. \end{cases}$$

Allora bD è di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$ in un punto $p \in bD$ se soltato se la funzione f così definita è di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno di p e $\nabla f(p) \neq 0$.

Se bD è di classe $\mathcal{C}^k$ in un punto p, per il teorema delle funzioni implicite potremo trovare un intorno U di p in $\mathbb{R}^n$ tale che $bD \cap U$ sia una sottovarietà chiusa di classe $\mathcal{C}^k$ e di dimensione $n-1$ dell'aperto U. L'orientazione di ∂D è definita dalle rappresentazioni parametriche

$$\mathbf{r} : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow U$$

con $\mathbf{r}(V) = bD \cap U' \subset U$ che soddisfano la condizione:

$$\det\left(\nabla f(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^{n-1}}\right) > 0.$$

Se la frontiera di un un aperto relativamente compatto D è differenziabile in tutti i punti, indichiamo con ∂D la sua frontiera come sottovarietà differenziabile orientata di dimensione $n-1$, con l'orientazione definita nel modo precisato sopra.

TEOREMA 5.1 (FORMULA DI GREEN) *Sia D un aperto relativamente compatto con frontiera differenziabile e sia $\eta \in \Omega_1^{n-1}(A)$ una forma differenziale definita in un intorno A di $\bar{D}$. Allora*

$$\int_{\partial D} \eta = \int_D d\eta.$$

DIM. Ci limitiamo a dare un'idea della dimostrazione. Osserviamo in primo luogo che la formula vale se η è nulla fuori da un compatto contenuto in D. In questo caso infatti ci riconduciamo a un integrale su un compatto $[-R,R]^n$ che contiene $\bar{D}$ e per il teorema di Fubini la formula è ridotta all'integrazione per parti per funzioni di una variabile reale.

Per il teorema delle funzioni implicite e per la compattezza di ∂D, possiamo ricoprire ∂D con un numero finito di aperti U_i, per $i = 1, \dots, k$, in cui siano definite coordinate $y_i = y_i(x)$ tali che:

$$D \cap U_i = \{-R_i < y_i^1 < 0\,, -R_i < y_i^h < R_i \text{ per } 2 \le h \le n\}\,, \qquad \text{con } R_i > 0.$$

Sia $U_0 \Subset D$ un intorno di $D \setminus \bigcup_{i=1}^m U_i$, con chiusura compatta in D. Sia $\{\chi_i\}_{0 \le i \le m}$ una partizione dell'unità di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $\bar{D}$, subordinata al ricoprimento $\{U_i\}$. Abbiamo allora

$$\int_D d\eta = \sum_{i=0}^m \int_{U_i} d(\chi_i \eta)\,.$$

Poiché χ_0 ha supporto compatto contenuto in U_0, $\displaystyle\int_{U_0} d(\chi_0 \eta) = 0$. Per $i > 0$, scriviamo in U_i:

$$\chi_i \eta = \eta_1^{(i)} dy_i^2 \wedge \cdots \wedge y_i^n + \cdots + (-1)^{h+1} \eta_h^{(i)} dy_i^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy_i^h} \wedge \ldots \wedge dy_i^n \\ + (-1)^{n+1} \eta_n^{(i)} dy_i^1 \wedge \cdots \wedge dy_i^{n-1}\,.$$

Abbiamo allora:

$$d(\chi_i \eta) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \eta_h^{(i)}}{\partial y_i^h} dy_i^1 \wedge \cdots \wedge dy_i^h\,,$$

$$\begin{aligned} \int_{U_i} d(\chi_i \eta) &= \sum_{h=1}^n \int_{-R_i}^0 dy_i^1 \int_{-R_i}^{R_i} dy_i^2 \cdots \int_{-R_i}^{R_i} dy_i^n \frac{\partial \eta_h^{(i)}}{\partial y_i^h} \\ &= \int_{-R_i}^{R_i} dy_i^2 \cdots \int_{-R_i}^{R_i} dy_i^n \eta_1^{(i)}(0, y_i^2, \dots, y_i^n) = \int_{\partial D} \chi_i \eta \end{aligned}$$

perché $\displaystyle\int_{-R_i}^0 \frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial y_i^1} dy_i^1 = \eta_1^{(i)}(0, y_i^2, \dots, y_i^n)$, mentre $\displaystyle\int_{-R_i}^{R_i} \frac{\partial \eta_h^{(i)}}{\partial y_i^h} dy_i^h = 0$ per $i > 1$. Poiché $\{\chi_i\}$ è una partizione dell'unità in un intorno di ∂D, otteniamo la tesi. □

Sia ora S una sottovarietà differenziabile orientata di dimensione q e di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \ge 1$, di un aperto A di $\mathbb{R}^n$. Ciò significa che, per ogni punto $p \in S$, possiamo trovare un intorno U_p di p ed $n-q$ funzioni differenziabili f^i per $i=1,...,n-q$ definite in U_p e tali che:

$$(*) \qquad \begin{cases} S \cap U_p = \{x \in U_p | f^i(x) = 0 \ \ \forall i = 1,...,n-q\}\,, \\ df^1(x) \wedge ... \wedge df^{n-q}(x) \neq 0 \ \ \forall x \in S \cap U_p\,. \end{cases}$$

e inoltre l'orientazione di S è definita dall'atlante in cui sono carte ammissibili in $S \cap U_p$ le parametrizzazioni:

$$\mathbf{r} : V \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow S \cap U_p \subset \mathbb{R}^n$$

per cui

$$\det\left(\nabla f^1(\mathbf{r}), ..., \nabla f^{n-q}(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^q}\right) > 0.$$

Dato un aperto relativamente compatto D di S, diremo che la sua frontiera è di classe $\mathcal{C}^k$ se possiamo trovare una funzione ϕ di classe $\mathcal{C}^k$ con:

$$\begin{cases} D = \{x \in S | \phi(x) < 0\} \\ d\phi(x) \wedge df^{q+1}(x) \wedge ... \wedge df^n(x) \neq 0 \ \ \forall x \in bD\,, \end{cases}$$

dove bD è la frontiera di D in S e le $f^1, \ldots, f^{n-q}$ definiscono l'orientazione di S in un intorno x. Su bD consideriamo allora l'orientazione definita dalle funzioni $f^{q+1}, ..., f^n, \phi$. La sottovarietà bD, con questa orientazione, si dice il *bordo* di D e si indica con ∂D. Otteniamo allora, per la definizione di integrale di una q-forma su una sottovarietà orientata q-dimensionale e la formula di Green:

Teorema 5.2 (Formula di Stokes) *Sia D un dominio relativamente compatto con frontiera di classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) di una sottovarietà orientata S di dimensione q di $\mathbb{R}^n$ (con $q \geq 1$). Sia $\eta \in \Omega_1^{q-1}(U)$ per un intorno U di $\bar{D}$ in $\mathbb{R}^n$. Allora:*

$$\int_{\partial D} \eta = \int_D d\eta.$$

Osservazione Le formule di Green e di Stokes si estendono al caso in cui la frontiera dell'aperto relativamente compatto D sia di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, cioè D si possa ottenere mediante unioni e intersezioni finite di aperti con frontiera regolare di classe $\mathcal{C}^1$. In questo caso ∂D risulta un'unione finita di sottoinsiemi chiusi di sottovarietà orientate, due a due senza punti interni comuni e l'integrale sulla frontiera deve intendersi come la somma finita degli integrali effettuati su ciascuno di tali sottoinsiemi.

Concludiamo con alcune osservazioni che collegano le formule di Green-Stokes al lemma di Poincaré-Volterra. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\eta \in \Omega_k^q(A)$, $(k, q \geq 1)$ con

$$d\eta = 0 \ \text{ in } \ A.$$

Una tale forma si dice *chiusa*. Allora:

(i) L'integrale della η su sottovarietà compatte di A di dimensione q è invariante per omotopia e la sua definizione si può estendere fino a definire applicazioni:

$$\pi(S^q, A) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \pi_\ell(D^q, S^{q-1}; A) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Ciò dipende dal fatto che le applicazioni continue $S^n \longrightarrow A$ si possono approssimare mediante applicazioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ e queste, per il lemma di Sard, hanno luogo di valori critici di misura q-dimensionale nulla.

(ii) Condizione necessaria e sufficiente affinché si possa trovare una forma $u \in \Omega^{q-1}_{k+1}(A)$ tale che

$$du = \eta \text{ in } A$$

(in questo caso diciamo che η è *esatta* in A) è che l'integrale di η su ogni sottovarietà compatta orientata di dimensione q di A sia 0.

Sia $A = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Consideriamo su A la forma chiusa

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Essa non è esatta in quanto il suo integrale su una qualsiasi circonferenza

$$[0, 2\pi] \ni t \longrightarrow {}^t(R\cos t, R\sin t) \in A$$

($R > 0$) è uguale a 2π. L'integrale della forma $d\theta$ su un laccetto in A, diviso per 2π si dice l'*indice* del laccetto rispetto a 0 e l'annullarsi dell'indice del laccetto è condizione necessaria e sufficiente affinché esso sia omotopo al laccetto costante. Intuitivamente l'indice rispetto a 0 di un laccetto in A misura quante volte esso si avvolge intorno all'origine. In generale, dato un laccetto in $\mathbb{R}^2$, è possibile definire l'indice del laccetto rispetto a qualsiasi punto di $\mathbb{R}^2$ che non appartenga al laccetto, considerando le forme:

$$\frac{(x - x_0)dy - (y - y_0)dx}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Nel caso di laccetti semplici, l'indice rispetto al laccetto di ciascun punto che non sia nel suo supporto può assumere solo due valori tra i numeri $0, 1, -1$. I punti in cui l'indice è diverso da 0 formano un aperto limitato che ha il laccetto come frontiera (Teorema di Jordan).

L'indice rispetto a 0 della frontiera orientata di un dominio regolare connesso e semplicemente connesso che contenga 0 come suo punto interno è 1, mentre la somma degli indici dei laccetti che compongono la frontiera di un dominio regolare che non contenga 0 nella sua chiusura è uguale a 0.

CAPITOLO IV

FIBRATI VETTORIALI E FIBRATI PRINCIPALI

§1 Campi di vettori e curve integrali

Sia M una fissata differenziabile di dimensione m, e di classe $\mathcal{C}^\infty$, numerabile all'infinito. Denotiamo con $\mathcal{E}(M)$ l'algebra reale ed anello commutativo unitario delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$, a valori reali, definite su M. Si dice *campo di vettori* su M una *derivazione* dell'algebra $\mathcal{E}(M)$, cioè un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare:

$$X : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$$

che soddisfi l'identità di Leibniz:

$$X(fg) = gX(f) + fX(g) \quad \forall f,\, g \in \mathcal{E}(M)\,. \tag{1.1}$$

Indichiamo con $\mathfrak{X}(M)$ l'insieme di tutti i campi di vettori su M. Essi formano un $\mathcal{E}(M)$-modulo unitario, per il prodotto definito da $(fX)(g) = f(X(g))$ (se $f, g \in \mathcal{E}(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, ed un'*algebra di Lie reale* per il prodotto di commutazione:

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \qquad \text{per} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)\,,\ f \in \mathcal{E}(M)\,. \tag{1.2}$$

Lemma 1.1 *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, allora X si annulla su tutte le funzioni costanti.*

Dim. Indichiamo con c, per $c \in \mathbb{R}$, la funzione costante che vale c su M. Abbiamo:

$$cX(1) = X(c) = X(c \cdot 1) = c \cdot X(1) + 1 \cdot X(c) = 2 \cdot X(c)$$

e quindi $X(c) = 0$. □

Lemma 1.2 *Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se $f \in \mathcal{E}(M)$ e $f(p) = 0$ per tutti i punti p di un aperto A di M, allora $X(f)(p) = 0$ per ogni $p \in A$. Abbiamo quindi:*

$$\operatorname{supp}(X(f)) \subset \operatorname{supp}(f) \qquad \forall f \in \mathcal{E}(M)\,,\ \forall X \in \mathfrak{X}(M)\,. \tag{1.3}$$

Dim. Fissato un punto $p \in A$, siano U e V due aperti di M con $p \in U \Subset V \Subset A$ ϕ una funzione di $\mathcal{E}(M)$ uguale a 0 in $\overline{U}$ e uguale a 1 su $M \setminus V$. Allora $f = \phi f$ e quindi:

$$X(f)(p) = X(\phi f)(p) = \phi(p)X(f)(p) + f(p)X(\phi)(p) = 0.$$

Da questo lemma si ricava immediatamente:

Lemma 1.3 *Sia X un campo di vettori su M; se f, g sono due funzioni di $\mathcal{E}(M)$ che assumono gli stessi valori su tutti i punti di un aperto A di M, allora:*

$$X(f)(p) = X(g)(p) \quad \forall p \in A\,.$$

Dim. Infatti $f - g$ si annulla su A e quindi:

$$X(f)(p) - X(g)(p) = X(f-g)(p) = 0 \quad \forall p \in A\,.$$

$\square$

Corollario 1.4 *Se A è un aperto di M, per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ vi è uno ed un solo campo di vettori $X\,|_A \in \mathfrak{X}(A)$ tale che $X\,|_A\; f\,|_A = (Xf)\,|_A$ per ogni $f \in \mathcal{E}(M)$.* $\square$

Ad ogni carta locale (U, x) in M possiamo associare campi di vettori $\partial/\partial x^1$, ..., $\partial/\partial x^m$ in $\mathfrak{X}(U)$, definiti da:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f = \frac{\partial[f \circ x^{-1}]}{\partial x^i} \circ x \qquad \forall f \in \mathcal{E}(U)\,. \tag{1.4}$$

Vale il:

Lemma 1.5 *Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$ e sia (U, x) una carta locale in M. Allora:*

$$X\,|_U = \sum_{i=1}^m X(x^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right). \tag{1.5}$$

Dim. Data $f \in \mathcal{E}(U)$, sia $f^* = f \circ x^{-1} \in \mathcal{E}(x(U))$. Se $x_0 \in x(U)$, per ogni punto x di un intorno aperto $V_{x_0} \subset x(U)$ di x_0, stellato rispetto ad x_0:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f^*(x_0) + \int_0^1 \frac{df^*(x_0 + t(x - x_0))}{dt}dt \\ &= f^*(x_0) + \sum_{i=1}^m (x^i - x_0^i) f_i^*(x), \qquad \text{con} \end{aligned}$$

$$f_i^*(x) = \int_0^1 \frac{\partial f^*}{\partial x^i}(x_0 + t(x - x_0))\,dt \in \mathcal{E}(V_{x_0})\,.$$

Con $x_0 = x(p_0)$ abbiamo $f_i^*(x_0) = \frac{\partial f^*(x_0)}{\partial x^i} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f\right](p_0)$. e quindi:

$$\begin{aligned} [X\,|_U f]\,(p_0) &= \left[X\,\big|_{V_{x_0}} f\right](p_0) \\ &= \left[X\,\big|_{V_{x_0}} f(p_0)\right](p_0) + \left[X\,\big|_{V_{x_0}} \sum_{i=1}^m (x^i - x_0^i) f_i^* \circ x\right](p_0) \\ &= \sum_{i=1}^m f_i^*(x_0)\left[X\,\big|_{V_{x_0}}\,(x^i - x_0^i)\right](p_0) \\ &= \sum_{i=1}^m \left[X(x^i)\right](p_0)\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f\right](p_0) \qquad \square \end{aligned}$$

Dato un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed un punto $p \in M$, indichiamo con X_p la derivazione:

$$\mathcal{E}(M) \ni f \longrightarrow X_p f := (Xf)(p) \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

dell'algebra reale $\mathcal{E}(M)$. Diciamo anche che X_p è un *vettore tangente ad M nel punto p.*

Una curva $\phi : (a,b) \longrightarrow M$ di classe $\mathcal{C}^1$ è una *curva integrale del campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ se:*

$$\frac{df \circ \phi(t)}{dt} = X_{\phi(t)} f \quad \forall f \in \mathcal{E}(M)\,, \quad \forall t \in (a,b)\,. \tag{1.7}$$

Se (U,x) è una carta locale in M ed $X = \sum_{i=1}^m a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ in U, allora gli integrali ϕ in U del campo di vettori X sono soluzioni $x(t) = x(\phi(t))$ del sistema autonomo di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine:

$$\dot{x}^i = a^i(x) \quad \text{per } i = 1, \ldots, m\,. \tag{1.8}$$

Dai teoremi di esistenza e unicità per sistemi di equazioni differenziali ordinarie abbiamo allora:

Teorema 1.6 *Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo di vettori in M e sia p_0 un qualsiasi punto di M. Esiste allora un'unica curva integrale ϕ: $(a,b) \longrightarrow M$ di X, con $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$, con $\phi(0) = p_0$, tale che, se $a > -\infty$, allora $\phi(t)$ non ha limite in M per $t \longrightarrow a$; se $b < +\infty$, allora $\phi(t)$ non ha limite in M per $t \longrightarrow b$.*

§2 Vettori tangenti e fibrato tangente

Fissato un punto $p \in M$, chiamiamo vettore tangente ad M in p un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $v: \mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ che soddisfi l'uguaglianza di Leibnitz:

$$v(fg) = (v(f))g(p) + f(p)(v(g)) \qquad \forall f, g \in \mathcal{E}(M)\,. \tag{2.1}$$

I vettori tangenti in un punto $p \in M$ formano uno spazio vettoriale reale, che indicheremo con T_pM. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, o più in generale $X \in \mathfrak{X}(U)$ per un intorno aperto U di p in M, allora X_p è un vettore tangente ad M in p. Abbiamo:

Teorema 2.1 *Per ogni punto $p \in M$ l'applicazione lineare*

$$\mathfrak{X}(M) \ni X \longrightarrow X_p \in T_pM \tag{2.2}$$

è surgettiva.

Se (U,x) è una carta locale in p, allora i vettori tangenti $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p$, ..., $\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$ formano una base di T_pM. □

Indichiamo con TM l'unione disgiunta degli spazi vettoriali T_pM, al variare di p in M e con $\pi : TM \longrightarrow M$ che fa corrispondere al vettore tangente $v \in T_pM$ il suo *punto di applicazione* p. Possiamo definire su TM una struttura di varietà differenziabile nel modo seguente. Per ogni carta locale (U,x) di M, definiamo una carta locale $(\pi^{-1}(U), x \times dx)$ di TM ponendo:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U) \ni v \longrightarrow (x(\pi(v)), v(x)) \in x(U) \times \mathbb{R}^m \\ \text{con} \quad v(x) = (v(x^1), \ldots, v(x^n)) \in \mathbb{R}^m\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Se (V,y) è un'altra carta locale di M, per $p \in U \cap V$ abbiamo:

$$v(y^i) = \sum_{h=1}^m v(x^h) \frac{\partial y^j}{\partial x^h}\,, \tag{2.4}$$

cioè $v(y) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) v(x)$. Questa relazione si esprime anche dicendo che *le componenti di un vettore tangente sono covarianti rispetto ai cambiamenti di coordinate.*

Quindi, se $y = \phi(x)$, per $x \in x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ è la funzione di transizione delle due carte (U, x) e (V, y), il cambiamento di coordinate dalla carta $(\pi^{-1}U, x \times dx)$ alla carta $(\pi^{-1}(V), y \times dy)$ è $(\phi \times d\phi)$.

Abbiamo perciò:

PROPOSIZIONE 2.2 *Dato un atlante $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i)\}$ di M, con funzioni di transizione $x_{i,j}$ (abbiamo cioè $x_{i,j} = x_i \circ x_j^{-1}$ su $x_j(U_j \cap U_i)$), allora $T\mathcal{A} = \{\pi^{-1}(U_i), x_i \times dx_i)\}$ è un atlante di TM, con funzioni di transizione $x_{i,j} \times dx_{i,j}$.* □

Un *gruppo a un parametro di diffeomorfismi di M* è un'applicazione differenziabile

$$\Phi: M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \longrightarrow \Phi(p, t) \in M \tag{2.5}$$

che gode delle proprietà:

(i) $\Phi(p, 0) = p \quad \forall p \in M$

(ii) $\Phi(p, t + s) = \Phi(\Phi(p, t), s) \quad \forall p \in M\,,\ \forall t, s \in M\,.$

Chiamiamo *gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di M* il dato di un intorno U^* di $M \times \{0\}$ in $M \times \mathbb{R}$ e di un'applicazione

$$\Phi: U^* \subset M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \longrightarrow \Phi(p, t) \in M \tag{2.6}$$

che gode delle proprietà:

(i) $\Phi(p, 0) = p \quad \forall p \in M$

(ii) $\Phi(p, t + s) = \Phi(\Phi(p, t), s) \quad$ se $(p, t + s)$ e $(\Phi(p, t), s) \in U^*$.

Vale il:

TEOREMA 2.3 *A un gruppo locale a un parametro $\Phi : U^* \longrightarrow M$ di diffeomorfismi di M corrisponde un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ tale che*

$$(Xf)(p) = \left.\frac{df(\Phi(p, t))}{dt}\right|_{t=0} \qquad \forall f \in \mathcal{E}(M)\,,\ \forall p \in M\,. \tag{2.7}$$

Viceversa, dato un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ esiste un gruppo locale di diffeomorfismi di $\Phi : U^* \longrightarrow M$ di M per cui (2.7) è verificata. Due gruppi a un parametro $\Phi_1 : U_1^* \longrightarrow M$ e $\Phi_2 : U_2^* \longrightarrow M$ per cui sia verificata (2.7) per lo stesso campo X coincidono su tutte le componenti connesse di $U_1^* \cap U_2^*$ che intersecano $M \times \{0\}$.

DIM. L'esistenza e unicità di un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi associato ad un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ è conseguenza del teorema d'esistenza locale, unicità e dipendenza $\mathcal{C}^\infty$ dai dati iniziali per il sistema di equazioni differenziali ordinarie (1.8). Il fatto che la soluzione generale del problema di Cauchy definisca un gruppo locale a un parametro è conseguenza del fatto che il sistema (1.8) è *autonomo*, che cioè le funzioni a secondo membro in (1.8) non dipendono dalla variabile t e quindi che, se $t \longrightarrow \Phi(p, t)$ è soluzione in un intervallo $t \in (a, b)$, con $a < 0 < b$, con dato iniziale $\Phi(p, 0) = p$, allora, per ogni $t_0 \in (a, b)$ fissato,

$t \longrightarrow \Phi(p, t+t_0)$ è soluzione nell'intervallo $(a-t_0, b-t_0)$, con dato iniziale $\Phi(p, t_0)$, e coincide quindi con $\Phi(\Phi(p, t_0), t)$.

Si verifica poi facilmente, utilizzando la formula di Leibnitz per la derivata del prodotto di funzioni reali di una variabile reale, che la (2.7) definisce un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$. $\square$

Siano M ed N due varietà differenziabili ed $f : M \longrightarrow N$ un'applicazione di classe $\mathcal{C}^\infty$. Essa induce un'applicazione (il *pull-back di funzioni*):

$$f^*\colon \mathcal{E}(N) \ni \phi \longrightarrow f^*(\phi) = \phi \circ f \in \mathcal{E}(M)\,. \tag{2.8}$$

Utilizzando il pull-back di funzioni definiamo il *differenziale* di f in un punto $p \in M$:

$$\begin{gathered} f_*(p) = df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N \qquad \text{mediante:} \\ f_*(p)(v)(\phi) = df_p(v)(\phi) = v(f^*(\phi)) = v(f \circ \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{E}(N)\,. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Se (U, x) e (V, y) sono carte locali in M ed N rispettivamente, con $p \in U$ ed $f(p) \in V$, abbiamo:

$$f_*(p)\left(\sum_{i=1}^m v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{f(p)}. \tag{2.10}$$

Possiamo definire in questo modo un'applicazione differenziabile:

$$f_* = df\colon TM \ni v \longrightarrow df_{\pi(v)}(v) \in TN\,, \tag{2.11}$$

ove abbiamo indicato con $\pi : TM \longrightarrow M$ la proiezione canonica. Essa si dice il *differenziale* dell'applicazione f, o il suo *sollevamento* allo spazio tangente.

§3 Fibrati vettoriali

Siano E ed M due varietà differenziabili. Una *fibrazione differenziabile* di E su M è una sommersione differenziabile surgettiva $\varpi : E \longrightarrow M$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Un *atlante di trivializzazione* di $E \xrightarrow{\varpi} M$, come fibrato vettoriale con base M e fibra tipica V, è il dato di un ricoprimento aperto $\{U_a\}_{a \in A}$ di M e, per ogni $a \in A$, di una sommersione differenziabile $\psi_a : \varpi^{-1}(U_a) \longrightarrow V$ tale che:

(i) $\varpi^{-1}(U_a) \ni \xi \longrightarrow (\varpi(\xi), \psi_a(\xi)) \in U_a \times V$ è un diffeomorfismo $\forall a \in A$

(ii) $V \ni v \xrightarrow{\psi_{a,b}} \psi_b(\psi_a^{-1}(p, v)) \in V$è un isomorfismo lineare $\forall p \in U_a \cap U_b$.

La famiglia $\mathcal{A}(E, M, V) = \{(U_a, \psi_a) \,|\, a \in A\}$ si dice un *atlante di trivializzazione come fibrato vettoriale* $E \xrightarrow{\varpi} M$ e le funzioni $\psi_{a,b} : U_a \cap U_b \longrightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ le sue *funzioni di transizione.*

Due atlanti di trivializzazione $\mathcal{A}_1(E, M, V)$ e $\mathcal{A}_2(E, M, V)$ come fibrati vettoriali $E \xrightarrow{\varpi} M$ sono equivalenti se $\mathcal{A}_1(E, M, V) \cup \mathcal{A}_2(E, M, V)$ è ancora un atlante di trivializzazione come fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\varpi} M$.

Defininiamo *struttura di fibrato vettoriale reale con base M e fibra tipica E* una fibrazione differenziabile $E \xrightarrow{\varpi} M$ e una classe di equivalenza di atlanti di trivializzazione come fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\varpi} M$. Fissata una tale struttura, diremo che $E \xrightarrow{\varpi} M$ è un fibrato vettoriale reale differenziabile con base M e fibra tipica V.

Lo spazio tangente TM, definito nel paragrafo precedente, è un esempio di fibrato vettoriale differenziabile, con base M e fibra tipica $\mathbb{R}^m$.

Il prodotto cartesiano $M \times V$, con la proiezione sul primo fattore, è un altro esempio di fibrato vettoriale. Esso si dice *banale* o *triviale* e un fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\varpi} M$ si dice *trivializzabile* se ammette una carta di trivializzazione (M, ψ).

Indicheremo con $E_p = \varpi^{-1}(p)$ la *fibra* su $p \in M$. Essa ha una struttura naturale di spazio vettoriale.

Siano $E_1 \xrightarrow{\varpi_1} M_1$ ed $E_2 \xrightarrow{\varpi_2} M_2$ due fibrati vettoriali reali differenziabili. Un'applicazione differenziabile $F\colon E_1 \to E_2$ si dice un *morfismo di fibrati vettoriali reali differenziabili* se conserva le fibre, se cioè esiste un'applicazione differenziabile $f\colon M_1 \to M_2$ tale che $F(E_{1p}) \subset E_{2f(p)}$ per ogni p e la sua restrizione F_p a ciascuna fibra E_{1p} è lineare:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\varpi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\varpi_2"] \\ M_1 \arrow[r, "f"'] & M_2 \end{tikzcd} \quad \text{è commutativo e}$$

$$F_p\colon E_{1p} \to E_{2f(p)} \quad \text{è lineare} \quad \forall p \in M_1 .$$

Se inoltre la $F\colon E_1 \to E_2$ è un diffeomorfismo, allora anche la sua inversa $F^{-1}\colon E_2 \to E_1$ è un morfismo di fibrati differenziabili reali e si dirà un *isomorfismo di fibrati vettoriali reali differenziabili.*

Un fibrato differenziabile $E \xrightarrow{\varpi} M$ è quindi trivializzabile se è isomorfo al fibrato differenziale triviale $M \times V$, per qualche spazio vettoriale reale V.

Le costruzioni dell'algebra lineare si estendono in modo naturale ai fibrati vettoriali.

In particolare, se $E \xrightarrow{\varpi} M$ è un fibrato vettoriale differenziabile con fibra tipica V, consideriamo l'insieme E^* formato dall'unione disgiunta degli spazi vettoriali duali E^*_p. Indichiamo ancora con $\varpi^* : E^* \to M$ l'applicazione che associa il punto $p \in M$ ad $\eta \in E^*_p \subset E^*$. Se $\{(U_a, \psi_a)\}$ è un atlante del fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\varpi} M$, per ogni punto $p \in M$ la $\psi_a(p) : E_p \to V$ è un isomorfismo lineare. Definiamo $[\psi^*_a]^{-1} : [\varpi^*]^{-1}(U_a) \to V^*$ ponendola uguale a $[\psi^*_a(p)]^{-1}$ su ciascuna fibra E^*_p. In questo modo otteniamo un atlante di trivializzazione $\{(U_a, [\psi^*_a]^{-1})\}$, che definisce su $E^* \xrightarrow{\varpi^*} M$ una struttura di fibrato vettoriale reale differenziabile. Con questa struttura differenziabile, chiamiamo $E^* \xrightarrow{\varpi^*} M$ il *fibrato duale* di $E \xrightarrow{\varpi} M$.

Siano $E_1 \xrightarrow{\varpi_1} M$ ed $E_2 \xrightarrow{\varpi_2} M$ due fibrati vettoriali reali, con fibre tipiche V_1 e V_2, sulla stessa base M. Definiamo:

$$E_1 \oplus_M E_2 = \{(\xi_1, \xi_2) \in E_1 \times E_2 \,|\, \varpi_1(\xi) = \varpi_2(\xi)\} . \tag{3.1}$$

Si verifica facilmente che $E_1 \oplus_M E_2 \xrightarrow{\varpi} M$, ove $\varpi(\xi_1, \xi_2) = \varpi_1(\xi_1) = \varpi_2(\xi_2)$ è un fibrato vettoriale reale differenziabile con fibra tipica $V_1 \oplus V_2$. Esso si dice la *somma di Whitney* dei fibrati $E_1 \xrightarrow{\varpi_1} M$ ed $E_2 \xrightarrow{\varpi_2} M$. Osserviamo che $E_1 \oplus_M E_2$ s'identifica in modo naturale all'unione disgiunta degli spazi vettoriali $E_{1p} \oplus E_{2p}$.

Siano $\mathcal{A}_1(E_1, M, V_1) = \{(U_a, \psi_{1a})\}$ e $\mathcal{A}_2(E_2, M, V_2) = \{(U_a, \psi_{2a})\}$ due atlanti di trivializzazione, corrispondenti allo stesso ricoprimento aperto $\{U_a\}$ di M. Definiamo $E_1 \otimes_M E_2$ come l'unione disgiunta degli spazi vettoriali $E_{1p} \otimes E_{2p}$, al variare di

p in M. Se $\xi_1^{(h)} \in E_{1p}$, $\xi_2^{(h)} \in E_{2p}$, per $h = 1, \ldots, \mu$, porremo $\varpi(\sum_{h=1}^{\mu} \xi_1^{(h)} \otimes \xi_2^{(h)}) = p$. Definiamo allora una struttura di fibrato vettoriale reale differenziabile su $E_1 \otimes_M E_2 \xrightarrow{\varpi} M$ mediante $\{U_a, \psi_{1a} \otimes \psi_{2a}\}$ con $(\psi_{1a} \otimes \psi_{2a})(p) \colon E_{1p} \otimes E_{2p} \to V_1 \otimes V_2$ uguale al prodotto tensoriale delle applicazioni lineari $\psi_{1a}(p)$ e $\psi_{2a}(p)$.

In particolare, fissati due interi non negativi r, s possiamo definire, a partire dal fibrato vettoriale reale differenziabile $E \xrightarrow{\varpi} M$, con fibra tipica V, un fibrato vettoriale differenziabile $\mathcal{T}^{r,s}(E) \xrightarrow{\varpi_{r,s}} M$, con fibra tipica $\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s \text{ volte}}$.

La fibra sopra il punto p è $\underbrace{E_p \otimes \cdots \otimes E_p}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{E_p^* \otimes \cdots \otimes E^*}_{s \text{ volte}}$ e, se (U, ψ) è una carta di trivializzazione di $E \xrightarrow{\varpi} M$, la $\left(U, \psi^{\otimes^r} \otimes [\psi^{*-1}]^{\otimes^s}\right)$ è una carta di trivializzazione di $\mathcal{T}^{r,s}(E) \xrightarrow{\varpi_{r,s}} M$. Chiamiamo il fibrato vettoriale $\mathcal{T}^{r,s}(E) \to M$ la *potenza tensoriale r-covariante ed s-controvariante* di $E \to M$.

In modo perfettamente analogo possiamo definire un *fibrato vettoriale complesso differenziabile*, richiedendo che la fibra tipica V sia uno spazio vettoriale complesso e che le funzioni di transizione degli atlanti di trivializzazione ammissibili siano $\mathbb{C}$-lineari.

Sia $E \xrightarrow{\varpi} M$ un fibrato differenziabile e sia A un aperto di M. Si dice *sezione differenziabile* di E su A un'applicazione $s \in \mathcal{C}^\infty(A, E)$ con $\varpi \circ s(p) = p$ per ogni $p \in A$.

Osserviamo che $\mathfrak{X}(A)$ si identifica in modo naturale a $\mathcal{C}^\infty(A, TM)$.

§4 Fibrato cotangente e tensori

Indichiamo con T^*M il duale del fibrato tangente TM della varietà M. Esso si dice il *fibrato cotangente* di M ed i suoi elementi *vettori cotangenti* o *covettori* in M. Se $f \in \mathcal{E}(M)$, per ogni $p \in M$ l'applicazione $T_p \ni v \to v(f) \in \mathbb{R}$ è un funzionale lineare su T_pM ed è dunque un elemento di T_p^*M. Associamo in questo modo ad ogni $f \in \mathcal{E}(M)$ una sezione differenziabile $\widetilde{df}$ del fibrato $T*M$. Con la definizione di differenziale data nel paragrafo precedente, identifichiamo $T\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, abbiamo:

$$df(v) = \widetilde{df}(v) \left(\frac{d}{dt} \right)_{f(\pi(v))}$$

avendo indicato con t la coordinata canonica di $\mathbb{R}$. Nel seguito scriveremo per semplicità df invece di $\widetilde{df}$, identificando il differenziale di una funzione reale alla corrispondente sezione del fibrato cotangente.

Indichiamo con $\mathfrak{X}^*(M)$ l'$\mathcal{E}(M)$-modulo delle sezioni differenziabili del fibrato T^*M.

Una sezione differenziabile X di TM su M è un elemento di $\mathfrak{X}(M)$ e possiamo farla agire su $\mathfrak{X}^*(M)$ mediante $[X(\xi)](p) = \xi_p(X_p)$ per ogni $p \in M$. Analogamente, possiamo interpretare la stessa uguaglianza come l'azione di $\xi \in \mathfrak{X}^*(M)$ su $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Sia $\mathcal{T}^{r,s}(TM)$ la potenza tensoriale r-covariante ed s-controvariante di TM. Essa è un fibrato vettoriale con fibra $[T_pM]^{\otimes^r} \otimes [T_p^*M]^{\otimes^s}$. Le sue sezioni si dicono *tensori r-covarianti ed s-controvarianti.*

Estendendo al prodotto tensoriale l'accoppiamento di dualità:

$$(4.1) \quad \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \ni (X, \xi) \to \langle X, \xi \rangle \in \mathcal{E}(M), \quad \langle X, \xi \rangle(p) = \xi_p(X_p) \; \forall p \in M,$$

una sezione $\tau \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{T}^{r,s}(TM))$ definisce un'applicazione:

$$\tau\colon \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{X}^*(M)}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{\mathfrak{X}(M) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ volte}} \to \mathcal{E}(M) \tag{4.2}$$

Si verifica senza difficoltà il seguente criterio:

Proposizione 4.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione $\mathbb{R}$-multilineare (4.2) sia associata ad un tensore è che sia $\mathcal{E}(M)$-multilineare.* □

§5 Forme differenziali su una varietà

Indichiamo con $\Omega^h(M)$ lo spazio dei tensori alternati h-controvarianti su M. Gli elementi di $\Omega^h(M)$ sono i tensori $\tau \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{T}^{0,h}(TM))$ tali che $\tau(X_1, \ldots, X_h) = 0$ quando due dei campi di vettori $X_1, \ldots, X_h$ sono uguali. Questa proprietà è equivalente a:

$$\tau(v_1, \ldots, v_h) = 0 \quad \text{se} \quad v_1, \ldots v_h \in T_pM \text{ sono linearmente dipendenti.} \tag{5.1}$$

Ancora, questa è equivalente a:

$$\tau(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_h}) = \varepsilon(\sigma)\tau(v_1, \ldots, v_h) \quad \text{se} \quad v_1, \ldots v_h \in T_pM \text{ e } \quad \sigma \in \mathfrak{S}_h\,. \tag{5.2}$$

Gli elementi di $\Omega^h(M)$ si chiamamo h-forme alternate. Definiamo il *differenziale* di una h-forma alternata $\tau \in \Omega^h(M)$ come la $(h+1)$-forma alternata $d\tau$ definita da:

$$\begin{aligned} d\tau(X_0,X_1, \ldots, X_h) &= \sum_{i=0}^{h} (-1)^i X_i[\tau(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_h)] \\ &\quad + \sum_{0\le i<j\le h} (-1)^{i+j}\tau([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_h) \\ &\qquad \forall X_0, X_1, \ldots, X_h \in \mathfrak{X}(M)\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Verifichiamo che la (5.3) definisce una $(h+1)$-forma alternata. Se, per due indici $0 \le r < s \le h$, è $X_r = X_s = Y$, si verifica facilmente che ciascuna delle due somme a secondo membro di (5.3) si annulla. Per dimostrare la $\mathcal{E}(M)$-multilinearità, è allora sufficiente verificare che:

$$d\tau(fX_0, X_1, \ldots, X_h) = fd\tau(X_0, X_1, \ldots, X_h) \quad \forall f \in \mathcal{E}(M),\ \forall X_0, \ldots, X_h \in \mathfrak{X}(M)\,.$$

Ciò segue da:

$$[fX_0, X_i] = f[X_0, X_i] - (X_if)X_0$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
d\tau(fX_0,X_1,\dots,X_h) = f\sum_{i=0}^{h}&(-1)^i(X_i)\tau(X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_h)]\\
&+\sum_{i=1}^{h}(-1)^i(X_if)\tau(X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_h)]\\
&+f\sum_{0\le i<j\le h}(-1)^{i+j}\tau([X_i,X_j],X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,\widehat{X_j},\dots,X_h)\\
&-\sum_{i=1}^{h}(-1)^i(X_if)\tau(X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_h)]\\
&= f\,d\tau(X_0,X_1,\dots,X_h)\\
&\qquad\qquad \forall f\in\mathcal{E}(M)\ \forall X_0,X_1,\dots,X_h\in\mathfrak{X}(M)\,.
\end{aligned}$$

Poiché $\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0$ se $x^1,\dots,x^m$ sono coordinate locali, questa definizione del differenziale di una forma è equivalente a quella che avevamo data nel caso di forme differenziali su aperti degli spazi Euclidei. In particolare otteniamo:

Teorema 5.1 *Se M è una varietà differenziabile di dimensione m, il differenziale definisce un complesso di operatori differenziali del prim'ordine:*

$$(5.4)\qquad \begin{aligned}
0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{\ d\ } \Omega^1(M) \longrightarrow \cdots\\
\cdots \xrightarrow{\ d\ } \Omega^{m-1}(M) \xrightarrow{\ d\ } \Omega^m(M) \longrightarrow 0\,.
\end{aligned}$$

È $\Omega^0(M)=\mathcal{E}(M)$ e, per ogni aperto connesso U di M, le funzioni $f\in\mathcal{E}(U)$ con $df=0$ su U sono costanti su U. Ogni punto $p\in M$ ha un sistema fondamentale di intorni aperti U tali che, se $1\le h\le m$ e $\tau\in\Omega^h(U)$ soddisfa $d\tau=0$ in U, allora esiste una $\eta\in\Omega^{h-1}(U)$ tale che $d\eta=\tau$ in U.

Dim. Il Teorema segue dal teorema analogo (Lemma di Poincaré-Volterra) dimostrato per le forme differenziali definite sugli aperti degli spazi Euclidei. □

Un aperto U di M si dice *contrattile* se esiste un'applicazione differenziabile $\Phi : U\times[0,1]\longrightarrow U$ con $\Phi(p,0)=p_0$ costante e $\Phi(p,1)=p$ per ogni $p\in U$. Abbiamo:

Teorema 5.2 (Poincaré-Volterra) *Se U è un aperto contrattile di M ed $h\ge 1$, allora per ogni $\alpha\in\Omega^h(U)$ che soddisfa $d\alpha=0$ in U esiste una $u\in\Omega^{h-1}(U)$ tale che $du=\alpha$.*

Dim. Sia $\Phi : U\times[0,1]\longrightarrow U$ un'applicazione differenziabile con $\Phi(p,0)=p_0$ costante e $\Phi(p,1)=p$ per ogni $p\in U$.

Sia $\alpha\in\Omega^h(U)$ una forma chiusa e poniamo:

$$\Phi^*(\alpha)=\alpha_0+dt\wedge\alpha_1$$

con α_0,α_1 indipendenti da dt. Allora:

$$d(\Phi^*(\alpha))=\Phi^*(d\alpha)=0 \Longrightarrow d_M\alpha_0=0\,,\ \frac{\partial\alpha_0}{\partial t}=d_M\alpha_1$$

dove abbiamo indicato con d_M la restrizione del differenziale su $U\times[0,1]$ ai vettori *orizzontali*, cioè ai vettori tangenti annullati da dt. Definiamo:

$$\beta(t)=\int_0^t \alpha_1(s)ds\,.$$

Otteniamo allora, poiché $\alpha_0(0)=0$:

$$d_M\beta(t)=\int_0^t d_M\alpha_1(s)ds=\int_0^t \frac{\partial\alpha_0}{\partial t}(s)ds=\alpha_0(t)\,.$$

Con $u=\beta(\,\cdot\,,1)\in\Omega^{h-1}(U)$, otteniamo $du=\alpha_0(1)=\alpha$ in U. □

§6 Derivata di Lie di un tensore.

Un diffeomorfismo $\psi:M\longrightarrow N$ definisce isomorfismi:

$$(\psi^{-1})^*:\mathcal{E}(M)\ni f\longrightarrow f_\psi=f\circ\psi^{-1}\in\mathcal{E}(N)$$
$$\psi_*:\mathfrak{X}(M)\ni X\longrightarrow X^\psi=\psi_*(X)\in\mathfrak{X}(N)\quad \text{ove}\quad \psi_*(X)(q)=d\psi(X_{\psi^{-1}(q)})\quad\forall q\in N$$
$$(\psi^{-1})^*:\mathfrak{X}^*(M)\ni\xi\longrightarrow\xi_\psi\in\mathfrak{X}^*(N)\quad \text{ove}\quad \xi_\psi(X^\psi)=\xi(X)\quad\forall X\in\mathfrak{X}(M)\,.$$

Questi isomorfismi si estendono agli isomorfismi degli spazi tensoriali:

$$\mathcal{T}^{r,s}(M)\ni\tau\longrightarrow\tau^\psi\in\mathcal{T}^{r,s}(N)\,,$$

definiti da:

$$\tau^\psi({\xi^1}_\psi,\dots,{\xi^r}_\psi,X_1^\psi,\dots,X_s^\psi)=\tau(\xi^1,\dots,\xi^r,X_1,\dots,X_s)$$
$$\forall\xi^1,\dots,\xi^r\in\mathfrak{X}^*(M),\ \forall X_1,\dots,X_s\in\mathfrak{X}(M)\,.$$

Sia $\Phi_X=\Phi_X(t)$ il gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di M, con generatore infinitesimale $X\in\mathfrak{X}(M)$. Per ogni aperto U relativamente compatto in M esiste un $\epsilon>0$ tale che, per ogni $t\in(-\epsilon,\epsilon)$, $\Phi_X(p,t)$ sia definita per ogni $p\in U$. Quindi, per ogni $\tau\in\mathcal{T}^{r,s}(M)$, utilizzando il diffeomorfismo $\Phi_X(t)^{-1}(U)\ni p\longrightarrow\Phi_X(p,t)\in U$, possiamo definire $\tau_X(t)=\tau^{\Phi_X(\,\cdot\,,t)}\in\mathcal{T}^{r,s}(U)$. Questo ci permette di ottenere un nuovo tensore $L_X(\tau)\in\mathcal{T}^{r,s}(M)$, ponendo:

$$L_X(\tau)=-\left.\frac{d\tau_X(t)}{dt}\right|_{t=0}. \tag{6.1}$$

Il tensore $L_X(\tau)$ è la *derivata di Lie del tensore τ rispetto al campo di vettori X.*

Proposizione 6.1 *Se $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, allora $L_X(Y)=[X,Y]$.*

Dim. In una carta coordinata (U,x) siano $X=\sum_{i=1}^m a^i\partial/\partial x^i$, $Y_i=\sum b^i\partial/\partial x^i$. Il gruppo locale a un parametro $\Phi(t)$ è allora definito dalle equazioni:

$$\dot\Phi^i(x,t)=a^i(\Phi(x,t))\qquad i=1,\dots,m\,.$$

Scriviamo $\Psi(x,t)$ per l'inversa della $\Phi(t)$. Abbiamo cioè $\Phi(\Psi(x,t),t) = x$ per ogni t e x nel dominio di definizione. Abbiamo allora:

$$Y(t) = \sum_{i,j=1}^{m} b^i(\Psi(x,t))(\partial\Phi^j/\partial x^i)(\Psi(x,t))(\partial/\partial x^j)\,.$$

Otteniamo allora:

$$\frac{\partial Y(t)}{dt} = \sum_{i,j=1}^{m}\left(\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial b^i}{\partial x^h}\frac{\partial\Psi^h}{\partial t}\frac{\partial\Phi^j}{\partial x^i} + b^i\left[\frac{\partial^2\Phi^j}{\partial x^i\partial x^k}\frac{\partial\Psi^k}{\partial t} + \frac{\partial^2\Phi^j}{\partial x^i\partial t}\right]\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\,.$$

Da $\Psi(\Phi(x,t),t) = x$, abbiamo:

$$\frac{\partial\Psi^h}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\Psi^h}{\partial x^k}\frac{\partial\Phi^k}{\partial t} = 0\,.$$

Poiché $\partial\Phi/\partial x$ e $\partial\Psi/\partial x$ sono entrambi l'identità per $t=0$, abbiamo:

$$\sum_{i,j,h=1}^{m}\frac{\partial b^i}{\partial x^h}\frac{\partial\Psi^h}{\partial t}\frac{\partial\Phi^j}{\partial x^i}\bigg|_{t=0} = -\sum_{h=1}^{m} a^h\frac{\partial b^j}{\partial x^h}\,.$$

Per $t=0$ è $\partial^2\Phi^j/\partial x^i\partial x^k = 0$, mentre $\partial^2\Phi^j/\partial x^i\partial t = \partial a^j/\partial x^i$ ed otteniamo quindi la formula desiderata. $\square$

Si verifica facilmente che:

Proposizione 6.2 *Se $f \in \mathcal{T}^{0,0}(M) = \mathcal{E}(M)$, allora $L_X f = Xf$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$.* $\square$

Dati numeri positivi h,k,r,s con $h \le r$, $k \le s$, definiamo sui tensori l'operazione di *contrazione degli indici* (h,k):

$$\mathbf{c}^h_k\mathcal{T}^{r,s}(M) \to \mathcal{T}^{r-1,s-1}(M)$$

nel modo seguente: siano $X_1,\dots,X_m \in \mathfrak{X}(M)$ campi di vettori che definiscono un sistema di riferimento su un aperto U di M, tali cioè che $X_1(p),\dots,X_m(p) \in T_pM$ sia una base di T_pM per ogni $p \in U$. Definiamo il sistema di riferimento duale $\xi^1,\dots,\xi^m \in \mathfrak{X}^*(U)$ mediante $\langle X_i,\xi^j\rangle(p) = \delta^i_j$ (delta di Kronecker) per ogni $p \in U$. Allora, su U, poniamo:

$$\begin{aligned}&\mathbf{c}^h_k(\tau)(\eta^1,\dots,\eta^{r-1},Y_1,\dots,Y_{s-1})\\ &\quad= \sum_{j=1}^{m}\tau(\eta^1,\dots,\eta^{k-1},\underset{\hat{k}}{\xi^j},\eta^k,\dots\eta^{r-1},Y_1,\dots,Y_{h-1},\underset{\hat{h}}{X_j},Y_h,\dots Y_{s-1})\\ &\qquad\forall\eta^i \in \mathfrak{X}^*(M),\ Y_i \in \mathfrak{X}(M)\,.\end{aligned}$$

Si verifica che la contrazione è ben defininta, che cioè non dipende dalla scelta del sistema di riferimento su U.

Abbiamo:

Proposizione 6.3 *La derivata di Lie commuta con le contrazioni.* □

Utilizzando questa proposizione possiamo calcolare la derivata di Lie dei diversi tensori a partire dalla definizione della derivata di Lie dei campi di vettori. Ad esempio, se $\alpha \in \Omega^1(M)$, abbiamo:

$$L_X(\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha([X,Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \tag{6.2}$$

e, più in generale:

Proposizione 6.4 *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\alpha \in \Omega^h(M)$, allora:*

$$\begin{aligned} L_X(\alpha)(X_1,\dots,X_h) &= X(\alpha(X_1,\dots,X_h)) \\ &\quad + \textstyle\sum_{i=1}^h (-1)^i \alpha([X,X_i],X_1,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_h), \\ &\qquad \forall X_1,\dots,X_h \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Dato un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$, definiamo il *prodotto interno* rispetto ad $X \in \mathfrak{X}(M)$ mediante:

$$\begin{aligned} &\imath_X : \mathcal{T}^{r,s}(M) \ni \tau \to \imath_X(\tau) \in \mathcal{T}^{r,s-1}(M) \\ &\imath_X(\tau)(\xi^1,\dots,\xi^r,X_1,\dots,X_{s-1}) = \tau(\xi^1,\dots,\xi^r,X,X_1,\dots,X_{s-1}) \\ &\quad \forall \xi^1,\dots,\xi^r \in \mathfrak{X}^*(M),\ \forall X_1,\dots,X_{s-1} \in \mathfrak{X}(M) \end{aligned}$$

quando $s \geq 1$, porremo $\imath_X(\tau) = 0$ per ogni tensore 0-controvariante.

Teorema 6.5 *Valgono le formule:*

$$L_X(\alpha) = d(\imath_X\alpha) + \imath_X(d\alpha) \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M),\ \forall \alpha \in \Omega^h(X), \tag{6.4}$$

$$[L_X,\imath_Y](\tau) = L_X(\imath_Y(\tau)) - \imath_Y(L_X(\tau)) = \imath_{[X,Y]}(\tau) \quad \begin{cases} \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M), \\ \forall \tau \in \mathcal{T}^{r,s}(M). \end{cases} \tag{6.5}$$

§7 Distribuzioni vettoriali

Una *distribuzione vettoriale* sulla varietà differenziabile M è un sotto-$\mathcal{E}(M)$-modulo $\mathfrak{W}$ di $\mathfrak{X}(M)$. Ciò singifica che $fX + gY \in \mathfrak{W}$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{W}$ e per ogni $f, g \in \mathcal{E}(M)$. Per ogni $p \in M$ poniamo $\mathfrak{W}_p = \{X_p \,|\, X \in \mathfrak{W}\} \subset T_pM$. La dimensione di $\mathfrak{W}_p$ è il *rango* di $\mathfrak{W}$ in p. Se il rango di $\mathfrak{W}$ è costante, allora gli elementi di $\mathfrak{W}$ sono le sezioni di un sottofibrato vettoriale $W \to M$ del fibrato tangente e, viceversa, se $W \to M$ è un sottofibrato vettoriale del fibrato tangente, lo spazio $\mathfrak{W} = \mathcal{C}^\infty(M, W)$ delle sezioni di W su M è una distribuzione vettoriale su M.

Sia $\Omega^*(M) = \bigoplus_{h=0}^m \Omega^h(M)$ l'algebra delle forme differenziali alternate su M. Indichiamo con $\Omega^*_+(M) = \bigoplus_{h=1}^m \Omega^h(M)$ l'ideale delle forme di grado positivo, che non contengono cioè componenti di grado 0.

Associamo alla distribuzione vettoriale $\mathfrak{W}$ il *sistema differenziale*:

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{W}} = \{\alpha \in \Omega^*_+(M) \,|\, \alpha|_{\mathfrak{W}} = 0\}.$$

Osserviamo che $\mathcal{I}_{\mathfrak{W}}$ è un *sotto-*$\mathcal{E}(M)$*-modulo graduato* di $\Omega^*(M)$ ed un ideale generato dai suoi elementi di grado uno.

In generale, chiamiamo *sistema differenziale* su M un qualsiasi ideale $\mathcal{I}$ di $\Omega^*(M)$ con $\mathcal{I} \cap \Omega^0(M) = \{0\}$. Ad esso associamo la distribuzione vettoriale:

$$\mathfrak{W}_{\mathcal{I}} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \imath_X(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}\}\,, \tag{7.1}$$

che si dice la sua *distribuzione caratteristica.*

La distribuzione $\mathfrak{W}$ coincide con la distribuzione caratteristica del sistema differenziale $\mathcal{I}_{\mathfrak{W}}$ ad essa associato, è cioè $\mathfrak{W}_{\mathcal{I}_{\mathfrak{W}}} = \mathfrak{W}$. Viceversa, in generale il sistema differenziale $\mathcal{I}_{\mathfrak{W}_{\mathcal{I}}}$ associato alla distribuzione caratteristica di un sistema differenziale $\mathcal{I}$ può essere più grande di $\mathcal{I}$.

Esempio 7.1 Sia $\mathcal{I}$ il sistema differenziale $\Omega(\mathbb{R}^n) \wedge (dx^1 + dx^2 \wedge dx^3)$ in $\mathbb{R}^m$, con $m \geq 3$. Allora $\mathfrak{W}_{\mathcal{I}} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)\left[\frac{\partial}{\partial x^4}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right]$ e $\mathcal{I}_{\mathfrak{W}_{\mathcal{I}}}$ è l'ideale di $\Omega^*(M)$ generato da dx^1, dx^2, dx^3.

Una sottovarietà N di M si dice una *sottovarietà integrale* di $\mathfrak{W}$ se $T_pN \subset \mathfrak{W}_p$ per ogni $p \in N$.

Una distribuzione vettoriale $\mathfrak{W}$ si dice *totalmente integrabile* se per ogni punto $p \in M$ esiste una sottovarietà integrale N di $\mathfrak{W}$ con $p \in N$ e $T_pN = \mathfrak{W}_p$.

Diciamo che $\mathfrak{W}$ è *formalmente integrabile* se

$$[\mathfrak{W}, \mathfrak{W}] \subset \mathfrak{W}\,. \tag{7.2}$$

Abbiamo il:

Teorema 7.1 (Frobenius) *Sia $\mathfrak{W}$ una distribuzione vettoriale di rango costante k. Sono allora equivalenti:*

(i) $\mathfrak{W}$ *è totalmente integrabile;*

(ii) $\mathfrak{W}$ *è formalmente integrabile;*

(iii) $d\mathcal{I}_{\mathfrak{W}} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{W}}$

Dim. (ii) $\Longrightarrow$ (i) Sia $p \in M$. Poiché $\mathfrak{W}_p$ ha rango k, possiamo fissare k campi vettoriali $X_1, \ldots, X_k \in \mathbf{W}$ con $X_{1p}, \ldots, X_{kp}$ linearmente indipendenti in T_pM. Possiamo allora trovare una carta locale (U, x) per cui:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{m} a_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{con} \quad a_i^j(0) = 0 \quad i = 1, \ldots, k\,,\ j = 1, \ldots m\,.$$

A meno di sostituire ad U con un intorno più piccolo di p, possiamo supporre che la matrice:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 + a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1k}(x) \\ a_{21}(x) & 1 + a_{22}(x) & \cdots & a_{2k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{k1}(x) & a_{k2}(x) & \cdots & a_{kk}(x) \end{pmatrix}$$

sia invertibile in $x(U)$. Sia $B(x) = (b^i_j(x))$ la sua inversa. Allora i campi di vettori

$$Y_i = \sum_{j=1}^{k} b^j_i(x) X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=k+1}^{m} c^h_i(x) \frac{\partial}{\partial x^h} \quad (i = 1, \ldots, k)$$

generano $\mathfrak{W}_q$ in ogni punto $q \in U$. La condizione (ii) implica che $[Y_i, Y_j]_q \in \langle Y_{1q}, \ldots, Y_{kq} \rangle$ per ogni $q \in U$. Poiché $Y_1, \ldots, Y_k, \frac{\partial}{\partial x^{k+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ definisce una base di T_pM in ogni punto $q \in U$, e $[Y_i, Y_j]_q \in \langle \left(\frac{\partial}{\partial x^{k+1}}\right)_q, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_q \rangle$, otteniamo che $[Y_i, Y_j] = 0$ in U per ogni $1 \leq i, j \leq k$.

Per concludere la dimostrazione, dimostriamo il seguente:

Lemma 7.2 *Siano $Y_1, \ldots, Y_k$ campi di vettori definiti e linearmente indipendenti in tutti i punti di un intorno aperto U di $p \in M$. Se $[Y_i, Y_j] = 0$ in U per ogni $1 \leq i < j \leq k$, allora esite una carta locale (U', y) con $p \in U' \subset U$ per cui $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ in U' per $i = 1, \ldots, k$.*

Dim. Possiamo supporre che (U, x) sia una carta locale in p. Ragioniamo per induzione su k.

Sia $k = 1$. Possiamo supporre che $Y_{1p} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p$. Il campo di vettori Y_1 definisce un gruppo locale a un parametro di diffeomorismi $x(U) \times \mathbb{R} \supset \tilde{U} \ni (x, t) \longrightarrow \Phi(x, t) \in \mathbb{R}^m$, ove $\tilde{U}$ è un intorno di $x(U) \times \{0\}$ in $x(U) \times \mathbb{R}$. Abbiamo $\frac{\partial \Phi^1(x,t)}{\partial t} = 1$ per $x = 0$, $t = 0$ e quindi, per il teorema delle funzioni implicite, $x = \Phi(0, y^2, \ldots, y^m; y^1)$ definisce coordinate in un intorno U' di p in U, per cui $Y_1 = \frac{\partial}{\partial y^1}$.

Supponiamo ora che $k > 1$ e che il lemma sia dimostrato per un numero inferiore di campi di vettori linearmente indipendenti che commutano tra loro. Per la prima parte della dimostrazione, possiamo fissare coordinate locali (U, x) tali che:

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad Y_i = \sum_{j=1}^{m} a^j_i(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{per } 2 \leq j \leq k\,.$$

Abbiamo:

$$[Y_1, Y_i] = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a^j_i(x)}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{per } 2 \leq j \leq k\,.$$

Quindi $[Y_1, Y_i] = 0$ implica che i coefficienti a^j_i sono indipendenti da x^1 in un intorno $\{-\epsilon < x^i < \epsilon\} \subset x(U)$. Poniamo $Z_j = \displaystyle\sum_{j=2}^{m} a^j_i(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$ per $2 \leq j \leq k$. Con un cambiamento delle coordinate $x^2, \ldots, x^m$ possiamo allora supporre, per l'ipotesi induttiva, che $Z_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$ per $2 \leq j \leq k$. Otteniamo perciò nelle nuove coordinate $x^1, \ldots, x^m$:

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \;\; Y_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + a^1_i(x) \frac{\partial}{\partial x^1} \quad \text{per} \quad 2 \leq i \leq k\,.$$

Da $[Y_i, Y_j] = 0$ per ogni $1 \leq i, j \leq k$ otteniamo allora che le a^1_i sono indipendenti da x^1 e $\partial a^1_i / \partial x^j = \partial a^1_j / \partial x^i$ per $2 \leq i, j \leq k$. Possiamo quindi trovare una funzione ϕ, indipendente da x^1, tale che $a^1_i = \partial \phi / \partial x^i$ per $2 \leq i \leq k$. Nelle nuove variabili:

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + \phi(x^2, \ldots, x^m) & \\ y^i = x^i & \text{per } 2 \leq i \leq m \end{cases}$$

abbiamo $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ per $1 \leq i \leq k$. □

Completiamo ora la dimostrazione dell'implicazione (ii) $\Longrightarrow$ (i). Fissata una carta locale (U', y) con centro in p per cui $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$, la $N = \{y^{k+1} = 0, \dots, y^m = 0\}$ è una sottovarietà di M, contenuta in U', contenente p e tale che $T_qN = \mathfrak{W}_q$ per ogni $q \in N$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Se $\alpha \in \mathcal{X}^*(M)$ si annulla su tutti i campi di $\mathfrak{W}$, abbiamo:

$$(*) \qquad d\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{W}$$

perché $\alpha(Y) = 0$, $\alpha(X) = 0$ ed anche $\alpha([X,Y]) = 0$ perché $[X,Y] \in \mathfrak{W}$. Si ragiona in modo analogo per forme di grado maggiore di uno.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Abbiamo $\mathfrak{W} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \,|\, \alpha(X) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{I}_{\mathfrak{W}} \cap \mathfrak{X}^*(M)\}$. L'implicazione è allora una facile conseguenza della $(*)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Segue dal fatto che il commutatore di due campi di vettori tangenti a una sottovarietà N in tutti i suoi punti è ancora tangente alla sottovarietà N in tutti i suoi punti. □

Osserviamo infine che vale la:

Proposizione 7.3 *Se $\mathcal{I}$ è un sistema differenziale in M e $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$, allora $\mathfrak{W}_{\mathcal{I}}$ è formalmente integrabile.*

Dim. Se $X \in \mathfrak{W}_{\mathcal{I}}$ e $\alpha \in \mathcal{I}$, allora:

$$L_X(\alpha) = d(\imath_X(\alpha)) + \imath_X(d\alpha) \in \mathcal{I}$$

per l'ipotesi che $d\alpha \in d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$. Poiché la derivata di Lie commuta con la contrazione, abbiamo, per $X, Y \in \mathfrak{W}_{\mathcal{I}}$ ed $\alpha \in \mathcal{I}$:

$$\imath_{[X,Y]}(\alpha) = \imath_{L_X(Y)}(\alpha) = L_X(\imath_Y(\alpha)) - \imath_Y(L_X(\alpha)) \in \mathcal{I}\,.$$

Questo vale per ogni $\alpha \in \mathcal{I}$ e quindi anche $[X,Y] \in \mathfrak{W}_{\mathcal{I}}$. □

§8 Gruppi di Lie

Un *gruppo di Lie* è un gruppo $\mathbf{G}$ su cui è fissata una struttura di varietà differenziabile per cui l'operazione di gruppo $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (a,b) \to ab^{-1} \in \mathbf{G}$ sia differenziabile.

Poiché $\mathbf{G}$ è localmente connesso, la componente connessa dell'identità $\mathbf{G}^0$ di $\mathbf{G}$ è un sottogruppo normale ed è aperta e chiusa in $\mathbf{G}$. Osserviamo che $\mathbf{G}^0$ è numerabile all'infinito e quindi condizione necessaria e sufficiente affinché lo sia anche $\mathbf{G}$ è che il quoziente $\mathbf{G}/\mathbf{G}^0$ sia al più numerabile.

Per ogni elemento a di $\mathbf{G}$, le traslazioni a sinistra $L_a : \mathbf{G} \ni g \to ag \in \mathbf{G}$ e a destra $R_a : \mathbf{G} \ni g \to ga \in \mathbf{G}$ e l'automorfismo interno $\mathrm{ad}(a) : \mathbf{G} \ni g \to aga^{-1} \in \mathbf{G}$ sono diffeomorfismi di $\mathbf{G}$ in sé.

Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$ si dice *invariante a sinistra* se $L_{a*}(X) = X$. I campi di vettori invarianti a sinistra formano una sottoalgebra di Lie reale $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$ di $\mathfrak{X}(M)$. L'applicazione:

$$(*) \qquad T_e\mathbf{G} \ni X_e \to \{X_a = L_{a*}(X_e) \,|\, a \in \mathbf{G}\} \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$$

è un isomorfismo lineare. Indichiamo con $\mathfrak{g}$ lo spazio vettoriale $T_e\mathbf{G}$ con la struttura di algebra di Lie reale che rende $(*)$ un isomorfismo di algebre di Lie.

Indichiamo con la stessa lettera X l'elemento di $\mathfrak{g}$ e il corrispondente campo di vettori invarianti a sinistra. Esso genera un gruppo a un parametro $\phi_X(t)$ di diffeomorfismi di $\mathbf{G}$. Il fatto che ϕ_X sia definita su $\mathbf{G}\times\mathbb{R}$ è conseguenza del fatto che:

$$\phi_X(a,t) = ab^{-1}\phi_X(b,t) \qquad \forall a,b\in\mathbf{G}$$

ed, a priori, per $|t|$ sufficientemente piccolo. Questa formula ci permette di estendere la definizione di $\phi_X(a,t)$ per ogni $t\in\mathbb{R}$.

Si pone $\phi_X(e,t)=\exp(tX)$. Abbiamo:

$$\exp((t_1+t_2)X) = \exp(t_1X)\exp(t_2X) \qquad \forall t_1,t_2\in\mathbb{R}\,. \tag{8.1}$$

Chiamiamo $\{\exp(tX)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ un *sottogruppo a un parametro di* $\mathbf{G}$. L'applicazione $\mathfrak{g}\ni X\longrightarrow\phi_X(e,1)\in\mathbf{G}$ si dice l'*applicazione esponenziale.* Il suo differenziale in e è l'identità e quindi per il teorema delle funzioni implicite essa definisce un diffeomorfismo di un intorno di 0 in $\mathfrak{g}$ su un intorno di e in $\mathbf{G}$. In particolare, la dimensione della varietà differenziabile $\mathbf{G}$ è uguale alla dimensione di $\mathfrak{g}$ come spazio vettoriale reale.

Esempio 8.1 Il gruppo delle matrici reali $n\times n$ invertibili $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie, di dimensione n^2. La sua algebra di Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali $n\times n$ e l'esponenziale coincide con quello definito per le matrici:

$$\exp(X) = \sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{h!}X^h\,. \tag{8.2}$$

Il suo sottogruppo $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$ delle matrici con determinante 1 è anch'esso un gruppo di Lie di dimensione (n^2-1) con algebra di Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ formata dalle matrici reali con traccia nulla.

Esempio 8.2 Il gruppo ortogonale $\mathbf{O}(n)$ è formato dalle matrici $a\in\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ tali che ${}^ta=a^{-1}$. Esso è un gruppo di Lie con algebra di Lie $\mathfrak{o}(n)$ formata dalle matrici reali antisimmetriche. La sua dimensione è $n(n-1)/2$.

Un sottogruppo $\mathbf{H}$ di $\mathbf{G}$ è un suo *sottogruppo di Lie* se è anche una sottovarietà differenziabile di $\mathbf{G}$, e con tale struttura differenziabile è un gruppo di Lie.

L'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ di un sottogruppo di Lie $\mathbf{H}$ di $\mathbf{G}$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{g}$. Infatti i campi di vettori invarianti a sinistra su $\mathbf{H}$ sono restrizioni a $\mathbf{H}$ di campi di vettori invarianti a sinsitra di $\mathbf{G}$.

Viceversa, per ogni sottoalgebra di Lie $\mathfrak{h}$ di $\mathbf{G}$ il sottogruppo $\mathbf{H}$ di $\mathbf{G}$ generato da $\exp(\mathfrak{h})$ è un un sottogruppo di Lie connesso di $\mathbf{G}$. Questo è conseguenza del fatto che i campi di vettori invarianti a sinistra corrispondenti agli elementi di $\mathfrak{h}$ generano una distribuzione vettoriale di rango costante formalmente (e quindi totalmente) integrabile in $\mathbf{G}$.

Ogni omorfismo differenziabile $\phi:\mathbf{G}_1\longrightarrow\mathbf{G}_2$ di gruppi di Lie determina un omomorfismo $d\phi(e):\mathfrak{g}_1\longrightarrow\mathfrak{g}_2$ delle loro algebre di Lie. Il viceversa non è sempre vero; lo è quando $\mathbf{G}_2$ è semplicemente connesso.

In particolare, la $\mathbf{G}\ni a\longrightarrow\mathrm{ad}(a)\in\mathrm{Aut}(\mathbf{G})$ definisce un'applicazione $\mathbf{G}\ni a\longrightarrow\mathrm{Ad}(a)\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, che si dice la *rappresentazione lineare aggiunta* di $\mathbf{G}$.

Una forma differenziale $\omega \in \Omega(\mathbf{G})$ si dice *invariante a sinistra* se $L_a^*\omega = \omega$ per ogni $a \in \mathbf{G}$. In modo equivalente, ω è invariante a sinistra se (e solo se) $\omega(X) =$ costante se $X \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$, cioè se è costante sui campi di vettori invarianti a sinistra.

È conveniente considerare nel seguito anche *forme differenziali a valori in spazi vettoriali*: se V è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita ed M una varietà differenziabile, indichiamo con $\Omega^h(M,V)$ le forme differenziali di grado h a valori in V. Esse sono le applicazioni $\mathcal{E}(M)$-multilineari alternate:

$$\alpha : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{h \text{ volte}} \to \mathcal{C}^\infty(M,V)\,.$$

Possiamo estendere in modo standard la definizione del differenziale al caso di forme alternate a valori in uno spazio vettoriale V.

Inoltre, quando $V = \mathfrak{a}$ è anche un'algebra di Lie reale, possiamo definire il *prodotto esterno* di due forme differenziali a valori in $\mathfrak{a}$. Per due forme omogenee poniamo:

(8.3)
$$\begin{cases} [\alpha \wedge \beta](X_1,\ldots,X_{p+q}) = \displaystyle\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+q}\\ 1\le\sigma_1<\cdots<\sigma_p\le p+q\\ 1\le\sigma_{p+1}<\cdots<\sigma_{p+q}\le p+q}} \varepsilon(\sigma)[\alpha(X_{\sigma_1},\ldots,X_{\sigma_p}),\beta(X_{\sigma_{p+1}},\ldots,X_{\sigma_{p+q}})] \\ \text{per} \quad \alpha\in\Omega^p(M,\mathfrak{a}),\ \beta\in\Omega^q(M,\mathfrak{a}),\ X_1,\ldots,X_{p+q}\in\mathfrak{X}(M) \end{cases}$$

ed estendiamo il prodotto così definito per bilinearità. In particolare, se α e β sono 1-forme a valori in $\mathfrak{a}$, abbiamo:

$$\begin{gathered} [\alpha\wedge\beta](X,Y) = [\alpha(X),\beta(Y)] - [\alpha(Y),\beta(X)] \\ [\alpha\wedge\alpha](X,Y) = 2[\alpha(X),\alpha(Y)] \\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M)\,. \end{gathered}$$

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Per ogni $a \in \mathbf{G}$ abbiamo isomorfismi lineari:

$$\mathfrak{g} \ni X_e \longleftarrow X \in \mathfrak{L}(\mathbf{G}) \ni X \longrightarrow X_a \in T_a\mathbf{G}\,. \tag{8.4}$$

Otteniamo una forma differenziale invariante a sinistra $\omega \in \Omega^1(\mathbf{G},\mathfrak{g})$ associando ad ogni $X_a \in T_a\mathbf{G}$ l'elemento $X_e \in \mathfrak{g} = T_e\mathbf{G}$ tale che X_e ed X_a siano i valori assunti in e ed a da uno stesso campo di vettori invariante a sinistra $X \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$. La forma ω si dice la *forma di Cartan* del gruppo di Lie $\mathbf{G}$.

Proposizione 8.1 *La forma di Cartan ω di un gruppo di Lie $\mathfrak{g}$ è una forma invariante a sinistra e soddisfa l'equazione di Maurer-Cartan:*

$$d\omega + \frac{1}{2}\,[\omega\wedge\omega] = 0\,. \tag{8.5}$$

Dim. Siano $X, Y \in \mathfrak{L}((G))$. Allora:

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y) &= X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]) \\ &= -[\omega(X), \omega(Y)] \\ &= -\frac{1}{2}\,[\omega \wedge \omega]\,(X,Y)\,. \end{aligned}$$

Poiché $\mathfrak{X}(M)$ è generato, come $\mathcal{E}(\mathbf{G})$-modulo, da $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$, otteniamo la tesi. □

Lemma 8.2 *La forma di Cartan ω di $\mathbf{G}$ soddisfa:*

$$R_a^*\omega = \mathrm{Ad}(a^{-1}) \circ \omega\,. \tag{8.6}$$

Ogni forma differenziale $\eta \in \Omega^1(\mathbf{G}, V)$, invariante a sinistra su $\mathbf{G}$ è della forma $\eta = T \circ \omega$, per un'applicazione linerare $T : \mathfrak{g} \longrightarrow V$.

Dim. Se $X \in \mathfrak{g}$, abbiamo:

$$R_{a*}(X^*) = R_{a*} \circ L_{a^{-1}*}(X^*) = \mathrm{Ad}(a^{-1})_*(X^*) = \left(\mathrm{Ad}(a^{-1})(X)\right)^*\,,$$

cioè, se $X \in \mathfrak{g}$, il campo di vettori $R_{a*}(X^*)$ è ancora invariante a sinistra (perché le traslazione a sinistra commutano con le traslazioni a destra) e coincide quindi con il campo di vettori invariante a sinistra corrispondente ad $\mathrm{Ad}(a^{-1})(X)$.

Se $\eta \in \Omega^1(\mathbf{G}, V)$ è invariante a sinistra, abbiamo $\eta = T \circ \omega$ con $T = \eta(e) : \mathfrak{g} = T_e\mathbf{G} \longrightarrow V$. □

§9 Fibrati principali

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie e P una varietà differenziabile. Chiamiamo *azione differenziabile a destra* di $\mathbf{G}$ su P un'applicazione differenziabile:

$$P \times \mathbf{G} \ni (p, g) \longrightarrow p \cdot g \in P \tag{9.1}$$

tale che, per ogni $g \in \mathbf{G}$ l'applicazione (*traslazione a destra*):

$$R_g : P \ni p \longrightarrow p \cdot g \in P \tag{9.2}$$

sia un diffeomorfismo di P in sè e

$$(p \cdot g_1) \cdot g_2 = p \cdot (g_1 g_2) \quad \forall p \in P, \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbf{G}. \tag{9.3}$$

Sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di $\mathbf{G}$. Allora, per ogni $X \in \mathfrak{g}$, l'applicazione

$$P \times \mathbb{R} \ni (p, t) \longrightarrow p \cdot \exp(tX) \in P \tag{9.4}$$

definisce un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di P e quindi un campo di vettori $X^* \in \mathfrak{X}(P)$.

Teorema 9.1 *L'applicazione*

$$\mathfrak{g} \ni X \longrightarrow X^* \in \mathfrak{X}(P) \tag{9.5}$$

è un omomorfismo $\mathbb{R}$*-lineare. Per ogni* $g \in \mathbf{G}$ *abbiamo*

$$(R_g)^* (X^*) = (\mathrm{ad}(g)X)^* \quad \forall X \in \mathfrak{g}. \tag{9.6}$$

Dim. Il fatto che l'applicazione (9.5) sia $\mathbb{R}$-lineare segue dalla formula

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(t(X+Y) + o(t^2)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sia ora $f \in \mathcal{E}(P)$. Allora, se $g \in \mathbf{G}$, $p \in P$,

$$\begin{aligned}((R_g)^*(X^*))f(p) &= X^*(f(q \cdot g^{-1}))|_{q=p\cdot g} = \frac{d}{dt} f(q \cdot \exp(tX)g^{-1})|_{q=p\cdot g,\, t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f(p \cdot g\exp(tX)g^{-1})|_{t=0} = (\mathrm{ad}(g)X)^* f(p)\end{aligned}$$

ed otteniamo così la (9.6). □

Si dice *fibrato principale* con *gruppo strutturale* $\mathbf{G}$ e *base* M il dato di due varietà differenziabili P ed M, un gruppo di Lie $\mathbf{G}$, un'azione differenziabile a destra

$$P \times \mathbf{G} \ni (p, g) \longrightarrow p \cdot g \in P \tag{9.7}$$

e una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathbf{G}$:

$$\pi : P \longrightarrow M \tag{9.8}$$

tali che:

(1) L'azione di $\mathbf{G}$ su P è libera, ovvero R_g non ha punti fissi se $e \neq g \in \mathbf{G}$.
(2) $\mathbf{G}$ agisce transitivamente sulle fibre di π: se $p_1, p_2 \in P$, allora:

$$\pi(p_1) = \pi(p_2) \Longleftrightarrow p_1 = p_2 \cdot g \quad \text{per qualche} \quad g \in \mathbf{G}. \tag{9.9}$$

Sia $P \xrightarrow[\mathbf{G}]{\pi} M$ un fibrato principale con gruppo strutturale $\mathbf{G}$. Indichiamo con $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(P)$ la distribuzione vettoriale dei campi di vettori verticali su P:

$$\mathfrak{V} = \{X \in \mathfrak{X}(P) \mid \pi_*(X) = 0\}. \tag{9.10}$$

Essa è formalmente integrabile, in quanto la $\pi : P \longrightarrow M$ è una foliazione globale di $\mathfrak{V}$. Infatti, per ogni $p \in M$, la $V_p = \pi^{-1}(p)$ è una sottovarietà differenziabile chiusa di P con $T_\xi V_p = \mathfrak{V}_\xi$ per ogni $\xi \in V_p$.

Indichiamo con $\mathbf{V} = \mathbf{V}P$ il corrispondente sotto-fibrato vettoriale di $\mathbf{T}P$.

Lemma 9.2 *Per ogni* $X \in \mathfrak{g}$*, il campo di vettori* X^* *è verticale. Per ogni punto* $p \in P$*, l'applicazione:*

$$\mathfrak{g} \ni X \longrightarrow X^*_p \in \mathbf{V}_p P \tag{9.11}$$

è un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineare. Il fibrato $\mathbf{V}P$ è globalmente banale su P, in quanto la

$$P \times \mathfrak{g} \ni (p, X) \longrightarrow X_p^* \in \mathbf{V}P \tag{9.12}$$

è un isomorfismo di fibrati vettoriali.

La distribuzione $\mathfrak{V}(P)$ è il sotto-$\mathcal{E}(P)$-modulo libero di $\mathfrak{X}(P)$ generato dai campi di vettori X^* al variare di X in $\mathfrak{g}$.

Dim. Se $X \in \mathfrak{g}$, allora

$$\pi(p \cdot \exp(tX)) = \pi(p) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall p \in P$$

implica che

$$\pi_*(X^*) = 0.$$

Poichè per ipotesi, fissato $p \in P$, l'applicazione

$$\mathbf{G} \ni g \longrightarrow p \cdot g \in \pi^{-1}(p)$$

è un diffeomorfismo, essa induce un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineare

$$\mathfrak{g} \ni X \longrightarrow X_p^* \in \mathbf{T}_p\left(\pi^{-1}(p)\right) = \mathbf{V}_p P.$$

Dato un vettore tangente verticale $V \in \mathbf{V}P$ applicato in un punto p di P, vi è per il lemma precedente un'unico elemento X dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di $\mathbf{G}$ tale che $X_p^* = V$. Risulta allora definita un'unica applicazione

$$\theta : \mathbf{V}P \longrightarrow \mathfrak{g} \tag{9.13}$$

tale che $\theta(X) \in \mathcal{E}(P)$ per ogni $X \in \mathfrak{V}(P)$. La

$$\theta : \mathfrak{V}(P) \longrightarrow \mathcal{E}(P) \tag{9.14}$$

è un'applicazione $\mathcal{E}(P)$-lineare. Diremo quindi che è una *forma differenziale sulla distribuzione verticale*, a valori nell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Nota che la θ gode della proprietà:

$$(R_g)^*\theta = \mathrm{ad}(g) \circ \theta \quad \forall g \in \mathbf{G}. \tag{9.15}$$

Esempio 9.1 Indichiamo con $\mathcal{F}(M)$ il fibrato dei *sistemi di riferimento* di M. Per ogni punto $p \in M$, la fibra $\mathcal{F}_p(M)$ è costituita da tutte le basi $(v_1, \ldots, v_m)$ di T_pM. Una *carta di trivializzazione* del fibrato $\mathcal{F}(M)$ è il dato di un aperto $U \subset M$ e di m campi di vettori $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{X}(U)$ che definiscano una base di T_pM per ogni punto $p \in U$. Il gruppo strutturale è $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$, con l'azione naturale $(v_1, \ldots, v_m) \cdot a = (\sum_{i=1}^m a_{i,1}v_i, \ldots, \sum_{i=1}^m a_{i,m}v_i)$ se $(v_1, \ldots, v_m) \in \mathcal{F}_p(M)$, $a = (a_{i,j}) \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. Se $\mathcal{F}(M)$ ammette una trivializzazione globale, diciamo che M è *parallelizzabile*. Il fatto che M sia parallelizzabile è anche equivalente al fatto che TM ammetta una trivializzazione globale. Ad esempio, tutti i gruppi di Lie sono varietà parallelizzabili, e possiamo utilizzare la forma di Cartan per definire la trivializzazione globale:

$$(\pi \times \omega) : T(\mathbf{G}) \ni v \longrightarrow (\pi(v), \omega(v)) \in \mathbf{G} \times \mathfrak{g}.$$

§10 Il fibrato dei sistemi di riferimento

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m, numerabile all'infinito. Indichiamo con $\mathfrak{F}(M)$ il *fibrato dei sistemi di riferimento su* M. I punti ξ di $\mathfrak{F}(M)$ che appartengono alla sua fibra sul punto $p \in M$ sono le *basi* di T_pM come spazio vettoriale reale. Indichiamo con $\pi : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow M$ la proiezione sulla base. La fibra $\mathfrak{F}_p(M)$ si può identificare all'insieme di tutte le applicazioni $\mathbb{R}$-lineari invertibili $\xi : \mathbb{R}^m \longrightarrow T_pM$. Abbiamo quindi un'azione naturale a destra del gruppo $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ su $\mathfrak{F}(M)$, definita mediante $\xi \cdot a = \xi \circ a$ per ogni $\xi \in \mathfrak{F}(M)$ ed $a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. La struttura differenziabile su $\mathfrak{F}(M)$ è definita nel modo seguente. Se $X_1, \ldots, X_m$ sono campi di vettori definiti, differenziabili e lineramente indipendenti in tutti i punti di un aperto $U \subset M$, allora:

$$(*) \qquad U \times \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \ni (x, a) \longrightarrow (X_1(x), \ldots, X_m(x)) \circ a \in \pi^{-1}(U)$$

è un diffeomorfismo. Le $(*)$ definiscono anche la struttura di *fibrato principale* con gruppo strutturale $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ di $\mathfrak{F}(M)$.

§11 Fibrati vettoriali associati a fibrati principali

Sia $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\pi} M$ un fibrato principale su M, con gruppo strutturale $\mathbf{G}$. Sia $\rho : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ una rappresentazione lineare, di dimensione finita, di $\mathbf{G}$. Poniamo:

$$(11.1) \quad E = \mathbf{P} \times V/\!\sim \quad \text{ove} \quad (\xi, v) \sim (\xi \cdot a, \rho(a^{-1})(v)) \quad \forall \xi \in \mathbf{P}\,,\ \forall v \in V\,,\ \forall a \in \mathbf{G}\,.$$

Il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} \times V & \xrightarrow{pr} & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \varpi \\ \mathbf{P} & \xrightarrow[\pi]{} & M \end{array}$$

definisce una sommersione differenziabile $\varpi : E \longrightarrow M$. Se $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{P})$ è una sezione differenziabile di $\mathbf{P}$ su un aperto U di M, allora possiamo considerare:

$$(11.2) \qquad U \times V \ni (x, v) \longrightarrow pr((\sigma(x), v)) \in \varpi^{-1}(U)$$

come l'inversa di una carta di trivializzazione di un fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\varpi} M$, con fibra tipica V.

In questo modo associamo ad ogni rappresentazione lineare ρ di $\mathbf{G}$ un fibrato vettoriale su M. Se pensiamo di aver fissato una volta per tutte il fibrato principale $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\pi} M$, potremo indicare con $E_\rho(M) \xrightarrow{\varpi} M$ il fibrato vettoriale con fibra tipica V corrispondente alla rappresentazione lineare $\rho : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$. Le sezioni differenziabili del fibrato vettoriale $E_\rho(M)$ si diranno in generale *quantità di tipo* ρ.

Ad esempio, nel caso del fibrato dei sistemi di riferimento, $\mathfrak{F}(M) \xrightarrow[\mathbf{GL}(m,\mathbb{R})]{\pi} M$, il fibrato associato alla rappresentazione identica $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \ni a \longrightarrow a \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m)$ è il *fibrato tangente* TM; se consideriamo invece la rappresentazione duale $\mathbf{GL}(m,\mathbb{R}) \ni a \longrightarrow {}^t a^{-1} \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m)$, otteniamo lo spazio cotangente T^*M. Possiamo poi ottenere i fibrati tensoriali dalle rappresentazioni tensoriali:

$$\begin{aligned}\rho(a)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q) \\ = a(v_1) \otimes \cdots \otimes a(v_p) \otimes {}^t a^{-1}(w_1) \otimes \cdots \otimes {}^t a^{-1}(w_q) \\ \forall v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q \in \mathbb{R}^m .\end{aligned}$$

Siano $\mathbf{P}_1 \xrightarrow[\mathbf{G}_1]{\pi_1} M_1$ e $\mathbf{P}_2 \xrightarrow[\mathbf{G}_2]{\pi_2} M_2$ due fibrati principali.

§12 G-strutture

Un'applicazione differenziabile $f : \mathbf{P}_1 \longrightarrow \mathbf{P}_2$ è un *omomorfismo di fibrati principali* se è un omomorfismo di fibrati ed inoltre esiste un omomorfismo di gruppi di Lie $\phi : \mathbf{G}_1 \longrightarrow \mathbf{G}_2$ tale che

$$f(\xi \cdot a) = f(\xi) \cdot \phi(a) \quad \forall \xi \in \mathbf{P}_1 \ \forall a \in \mathbf{G}_1 .$$

Quando $M_1 = M_2$, $\mathbf{G}_1$ è un sottogruppo di Lie di $\mathbf{G}_2$ e la f è un'immersione che induce l'identità sulla base, diciamo che la f è una *riduzione del gruppo strutturale.*

Se $\mathbf{G}$ è un sottogruppo del gruppo lineare $\mathbf{GL}(m,\mathbb{R})$ e $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ una riduzione del gruppo strutturale di $\mathfrak{F} \xrightarrow[\mathbf{GL}(m,\mathbb{R})]{\pi} M$, diciamo che $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ è una $\mathbf{G}$-struttura su M.

Il concetto di $\mathbf{G}$-struttura permette di considerare con un punto di vista unitario diverse strutture geometriche su una varietà differenziabile.

Ad esempio,

dare un'orientazione su M è equivalente a dare una $\mathbf{GL}^+(m,\mathbb{R})$-struttura;

dare una *misura di Radon di classe* $\mathcal{C}^\infty$ equivale ad assegnare una $\mathbf{SL}(m,\mathbb{R})$-struttura;

una metrica Riemanniana corrisponde a una $\mathbf{O}(m)$-struttura;

una struttura quasi-compessa è una $\mathbf{GL}(\frac{m}{2},\mathbb{C})$-struttura ($m = 2n$ pari);

una struttura quasi-Hermitiana è una $\mathbf{U}(\frac{m}{2})$-struttura ($m = 2n$ pari);

una struttura quasi-simplettica è una $\mathbf{Sp}(\frac{m}{2},\mathbb{R})$-struttura ($m = 2n$ pari). Ricordiamo che $\mathbf{Sp}(\frac{m}{2},\mathbb{R}) = \{a \in \mathbf{SL}(2n,\mathbb{R}) \mid {}^t a \Omega a = \Omega\}$ per una matrice antisimmetrica $(2n) \times (2n)$ non degenere Ω;

una $\mathbf{1}$-struttura è un *parallelismo completo.*

§13 Trasversalità

Siano M ed N varietà differenziabili di dimensione m ed n, rispettivamente, $f : M \longrightarrow N$ un'applicazione differenziabile ed S una sottovarietà differenziabile chiusa di codimensione k in N. Diciamo che f *è trasversale ad* S *in* $p \in M$ se:

(i) o $f(p) \notin S$

(ii) oppure $T_{f(p)}S + df(p)(T_pM) = T_{f(p)}N .$

La seconda condizione si può verificare solo se $m \geq k$. Quando $m < k$, dire che f è trasversale as S in p significa soltanto che $f(p) \notin S$.

Diciamo che f *è trasversale ad* S se lo è in ogni punto di M.

Sia $f : M \longrightarrow N$ un'immersione differenziabile e siano $p_1, p_2 \in M$ due punti distinti di M che hanno la stessa immagine $q = f(p_1) = f(p_2)$. Diciamo che f è *regolare* in (p_1, p_2) se

$$df(T_{p_1}M) + df(T_{p_2}M) = T_qN \,.$$

Ciò equivale ad affermare che esistano intorni aperti U_1, U_2 di p_1, p_2 rispettivamente, tali che $f|_{U_1}$ sia trasversale ad $f(U_2)$ in p_1. Diciamo che f è un'immersione regolare se lo è in tutte le coppie di punti (p_1, p_2) con $p_1 \neq p_2$ ed $f(p_1) = f(p_2)$.

Teorema 13.1 (Thom) *Siano M, N due varietà differenziabili ed S una sottovarietà differenziabile di N. Se K è un compatto di M, le applicazioni differenziabili $f : M \longrightarrow N$ che sono trasversali ad S nei punti di K di M sono un aperto denso di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$. Le $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ che sono trasversali ad S in tutti i punti di M formano un sottoinsieme denso di seconda categoria di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$.*

Dim. Si verifica immediatamente che, se K è un compatto di M, le applicazioni $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ che sono trasverali ad S in ogni punto di K formano un aperto $\mathcal{F}_K$ di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$. Basterà dimostrare che questo aperto è denso in $\mathcal{C}^\infty(M, N)$.

Fissiamo un'applicazione differenziabile $f : M \longrightarrow N$. Sia $\{(V_a, y_a)\}_{a \in A}$ un atlante numerabile e localmente finito di N, con la proprietà che o $\bar{V}_a \cap S = \emptyset$, oppure $S \cap V_a = \{y_a^1 = 0, \ldots, y_a^= 0\}$. Consideriamo ora un atlante numerabile $\{(U_b, x_b)\}_{b \in B}$ di M tale che gli $\bar{U}_b$ siano compatti in M e, per un'applicazione $\jmath : B \longrightarrow A$, sia $f(\bar{U}_b) \subset V_{\jmath(b)}$ per ogni $b \in B$. Siano $b_1, \ldots, b_t$ un insieme finito di indici in B con $K \subset \bigcup_{i=1}^t U_{b_i}$. Indichiamo con $\mathcal{U}_f$ l'intorno aperto di f in $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ formato dalle applicazioni differenziabili h con $h(\bar{U}_{b_i}) \subset \mathbf{V}_{\jmath(b_i)}$.

Ricordiamo che, per definire la topologia di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$, possiamo supporre, applicando il teorema d'immersione di Whitney, che $N \subset \mathbb{R}^\ell$. Se $\bar{V}_{\jmath(b_i)} \cap S = \emptyset$, la restrizione di f a $\bar{U}_{b_i}$ è trasversale ad S. In questo caso, posto $\epsilon_i = \operatorname{dist}(\bar{V}_{\jmath(b_i)}, S) > 0$, per ogni $g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^\ell)$ tale che $(f + g)(M) \subset N$ e $\sup_{p \in \bar{U}_{b_i}} |g(p)| < \epsilon_i$, avremo ancora $(f + g)(\bar{U}_{b_i} \cap S = \emptyset$, e quindi la $f + g$ è ancora trasversale ad S su $\bar{U}_{b_i}$.

Se invece $V_{b_i} \cap S \neq \emptyset$, detta $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ la proiezione sulle prime k coordinate, le applicazioni differenziabili $h : \tilde{U}_{b_i} \longrightarrow V_{b_i}$ (ove $\tilde{U}_{b_i}$ è un intorno aperto di $\bar{U}_{b_i}$ con chiusura compatta in $f^{-1}(V_{b_i})$) che non sono trasversali ad S su $\bar{U}_{b_i}$ sono contenute nell'insieme delle $h \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{U}_{b_i}, V_{b_i})$ per cui $\mathrm{pr} \circ y \circ h$ ha punti critici in $\bar{U}_{b_i}$. Per il lemma di Sard le applicazioni di $\mathcal{C}^\infty(\tilde{U}_{b_i}, \mathbb{R}^p)$ prive di punti critici in $\bar{U}_{b_i}$ sono un aperto denso di $\mathcal{C}^\infty(\tilde{U}_{b_i}, \mathbb{R}^k)$. Ne segue che le $g : M \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ per cui $(f + g) \in \mathcal{U}_f$ ed $f + g$ è trasversale ad S in $\bar{U}_{b_i}$ sono un aperto denso in $\mathcal{U}_f$.

Da queste osservazioni ricaviamo che $\mathcal{F}_K$ è un aperto denso di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$. Fissata una successione di compatti $\{K_\nu\}$ di M con $K_\nu \subset \overset{\circ}{K}_{\nu+1}$ ed $\bigcup_\nu K_\nu = M$, le applicazioni differenziabili da M in N che sono trasversali ad S sono tutte e sole quelle che appartengono ad $\bigcap_\nu \mathcal{F}_\nu$ e sono quindi l'intersezione di una famiglia numerabile di aperti densi e quindi un sottoinsieme denso di seconda categoria per il Teorema di Baire. $\square$

Date due varietà differenziabili M, N, indichiamo con $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{imm}}(M, N)$ l'insieme delle immersioni differenziabili $f : M \longrightarrow N$.

Lemma 13.2 *Siano M, N due varietà differenziabili connesse, di dimensione m ed n rispettivamente, con $m \leq n$. Se M è compatto, allora $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{imm}}(M, N)$ è aperto* *in* $\mathcal{C}^\infty(M,N)$*. In generale,* $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{imm}}(M,N)$ *o è vuoto, o è di seconda categoria in* $\mathcal{C}^\infty(M,N)$*.*

Dim. È facile verificare che l'insieme $\mathcal{G}_K$ delle applicazioni differenziabili $f : M \to N$ che Date due varietà differenziabili connesse M, N, di dimensioni m, n rispettivamente, con $m \le n$, indichiamo con $\mathrm{Imm}(M,N)$ il sottospazio delle immersioni differenziabili in $\mathcal{C}^\infty(M,N)$, con la topologia di sottospazio. Osserviamo che, se M è compatto, $\mathrm{Imm}(M,N)$ è aperto in $\mathcal{C}^\infty(M,N)$; in generale, $\mathrm{Imm}(M,N)$ è un sottoinsieme di seconda categoria di $\mathcal{C}^\infty(M,N)$ e quindi è uno spazio di Baire.

Teorema 13.3 (Thom) *Siano* M, N *due varietà differenziabili di dimensione* m, n *rispettivamente, con* $m \le n$*. Per ogni compatto* $K \subset M$*, le immersioni differenziabili* $f : M \to N$ *che sono trasversali su* K *formano un aperto denso in* $\mathrm{Imm}(M,N)$*. Le immersioni differenziabili* $f : M \to N$ *che sono trasversali su tutto* M *sono un sottoinsieme denso di seconda categoria di* $\mathrm{Imm}(M,N)$*.*

Dim. Siano $\Delta_N = \{(q,q) \mid q \in N\}$ la diagonale in $N \times N$ e $\Delta_M = \{(p,p) \mid p \in M\}$ quella in $M \times M$. Un'applicazione differenziabile $f : M \to N$ è un'immersione trasversale se l'applicazione $(M \times M) \setminus \Delta_M \ni (p_1,p_2) \to (f(p_1), f(p_2)) \in N \times N$ è trasversale a Δ_N. Quindi, per il teorema precedente, l'insieme $\mathcal{G}_K$ delle $f \in \mathcal{C}^\infty(M,N)$ che sono immersioni differenziabili trasversali in ogni punto di K formano un aperto di $\mathcal{C}^\infty(M,N)$. Resta da dimostrare che tale aperto è denso. Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Vogliamo dimostrare che ogni intorno di f contiene funzioni di $\mathcal{G}_K$. Utilizzando il teorema d'immersione di Whitney, è sufficiente considerare il caso in cui f sia un'immersione in ogni punto di M. Sia $\{(U_a, x_a)\}_{a \in A}$, con $A \subset \mathbb{N}$, un atlante numerabile di M, con $\bar{U}_\alpha$ compatto ed f iniettiva su $\bar{U}_a$ per ogni $a \in A$. Identifichiamo N, usando il teorema di immersione di Whitney, a una sottovarietà chiusa di $\mathbb{R}^\ell$. Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

CAPITOLO V

CONNESSIONI PRINCIPALI

§1 Definizioni fondamentali

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie con algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e sia $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\pi} M$ un fibrato principale, con gruppo strutturale $\mathbf{G}$ e sia $V\mathbf{P}$ il sottofibrato di TP dei *vettori verticali*, cioè dei vettori $v \in T\mathbf{P}$ tali che $\pi_*(v) = 0$.

Ricordiamo che ad ogni elemento X dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è associato un campo di vettori $X^* \in \mathcal{C}^\infty(P, VP)$, definito su $\mathbf{P}$ e a valori in $V\mathbf{P}$, che si dice *il campo di vettori fondamentale associato a* X:

$$X^*_\xi f = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} f(\xi \cdot \exp(tX)) \quad \forall \xi \in \mathbf{P}\ \forall f \in \mathcal{E}(\mathbf{P})\,. \tag{1.1}$$

Risulta quindi definito un unico isomorfismo

$$V_\xi \mathbf{P} \ni v = X^*_\xi \longrightarrow X \in \mathfrak{g} \tag{1.2}$$

per ogni $\xi \in \mathbf{P}$.

Chiamiamo *connessione principale* sul $\mathbf{G}$ fibrato principale $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$ il dato di una forma differenziale (*la forma di Cartan della connessione*):

$$\omega : T\mathbf{P} \longrightarrow \mathfrak{g} \tag{1.3}$$

che goda delle proprietà:

(1) $\omega(A^*) = A$ per ogni $A \in \mathfrak{g}$;
(2) $R^*_a \omega = \mathrm{ad}(a^{-1})\omega$ per ogni $a \in \mathbf{G}$, cioè $\omega((R_a)_*(X)) = \mathrm{ad}(a^{-1})\omega(X)$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{P})$.

Alla forma di connessione ω associamo la *distribuzione orizzontale*:

$$H\mathbf{P} = \{v \in T\mathbf{P} \mid \omega(v) = 0\}\,. \tag{1.4}$$

Essa gode delle proprietà:

(1′) $T_\xi \mathbf{P} = V_\xi \mathbf{P} \oplus H_\xi \mathbf{P}$ per ogni $\xi \in \mathbf{P}$;
(2′) $(R_a)_* H_\xi \mathbf{P} = H_{\xi a} \mathbf{P}$ per ogni $\xi \in \mathbf{P}$ e $a \in \mathbf{G}$.

Siano $h : T\mathbf{P} \longrightarrow H\mathbf{P}$ e $v : T\mathbf{P} \longrightarrow V\mathbf{P}$ le proiezioni associate alla decomposizione $T\mathbf{P} = V\mathbf{P} \oplus_{\mathbf{P}} H\mathbf{P}$.

La connessione principale ω su $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$ ci permette di definire il *rilevamento orizzontale*:

$$\tilde{h} : \mathfrak{X}(M) \ni X \longrightarrow \tilde{X} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{P}, H\mathbf{P})\,. \tag{1.5}$$

Il campo di vettori $\tilde{X}$ su $\mathbf{P}$ è l'unico campo di vettori orizzontali π-correlato al campo di vettori X su M. Esso è caratterizzato dalle proprietà:

$$\tilde{X} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{P}, H\mathbf{P}) \quad \text{e} \quad \pi_*(\tilde{X}) = X\,, \tag{1.6}$$

$$(R_a)_*\tilde{X} = \tilde{X}\,, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)\,. \tag{1.7}$$

Viceversa, ogni campo di vettori $Y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{P}, H\mathbf{P})$ che soddisfi (1.7) è della forma $Y = \tilde{X}$ per qualche $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposizione 1.1 *L'applicazione (1.5) è $\mathbb{R}$-lineare e soddisfa:*

$$\widetilde{fX} = \pi^*(f)\,\tilde{X} \quad \forall f \in \mathcal{E}(M),\ \forall X \in \mathfrak{X}(M)\,, \tag{1.8}$$

$$\widetilde{[X,Y]} = h([\tilde{X}, \tilde{Y}]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \tag{1.9}$$

Dim. La verifica della (1.8) è immediata. Per dimostrare la (1.9), osserviamo che essa è equivalente alla:

$$\pi_*(h([\tilde{X}, \tilde{Y}])) = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)\,.$$

□

Consideriamo un atlante di trivializzazione di $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$. Esso consiste del dato di un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M e, per ogni indice α, di una sezione $\sigma_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbf{P}$. Il diffeomorfismo:

$$U_\alpha \times \mathbf{G} \ni (x, g) \longrightarrow \sigma_\alpha(x) \cdot g \in \pi^{-1}(U_\alpha) \tag{1.10}$$

è l'inverso del diffeomorfismo di trivializzazione. Le *funzioni di transizione* sono le applicazioni $\psi_{\beta,\alpha} = \sigma_\beta^{-1} \cdot \sigma_\alpha \colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbf{G}$, per cui risulta

$$\sigma_\alpha(x) = \sigma_\beta(x) \cdot \psi_{\beta,\alpha} \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta\,. \tag{1.11}$$

Sia $\theta : T\mathbf{G} \longrightarrow \mathfrak{g}$ la *forma di Maurer-Cartan* di $\mathbf{G}$, che identifica i vettori di $\mathfrak{g}$ con i corrispondenti campi di vettori invarianti a sinistra.

Il pull-back su $U_\alpha \cap U_\beta$ della forma di Maurer-Cartan di $\mathbf{G}$ è una forma differenziale su $U_\alpha \cap U_\beta$ a valori in $\mathfrak{g}$:

$$\theta_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}^*\theta = \psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta}\,. \tag{1.12}$$

Per ogni α consideriamo il pull-back su U_α della forma di Cartan che definisce la connessione principale mediante la sezione σ_α della trivializzazione:

$$\omega_\alpha = \sigma_\alpha^*\omega \quad \text{su} \quad U_\alpha\,. \tag{1.13}$$

Il pull-back di ω mediante il diffeomorfismo $U_\alpha \times \mathbf{G} \ni (x, g) \longrightarrow \sigma_\alpha(x) \cdot g \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ è la forma $\omega_\alpha^* = \omega_\alpha + \theta$.

Lemma 1.2 *Le forme ω_α e $\theta_{\alpha\beta}$ soddisfano la relazione di compatibilità:*

$$\omega_\beta = \mathrm{ad}(\psi_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\alpha + \theta_{\alpha\beta} \quad \textit{su} \quad U_\alpha \cap U_\beta\,. \quad (\text{Equazione di Gauge}) \tag{1.14}$$

Viceversa, date forme ω_α che soddisfino la relazione di compatibilità, esiste un'unica connessione principale ω tale che $\omega_\alpha = \sigma_\alpha^*\omega$.

DIM. Per differenziare l'identità $\sigma_\beta = \sigma_\alpha \cdot \psi_{\alpha,\beta}$, conviene considerare la σ_β, su $U_\alpha \cap U_\beta$, come l'applicazione composta:

$$\begin{array}{ccccc} U_\alpha \cap U_\beta & \longrightarrow & \mathbf{P} \times \mathbf{G} & \longrightarrow & \mathbf{G} \\ x & \longrightarrow & (\sigma_\alpha(x), \psi_{\alpha,\beta}(x)) & \longrightarrow & \sigma_\beta(x) \end{array}$$

Calcoliamo il differenziale dell'azione a destra $\mathbf{P} \times \mathbf{G} \ni (\xi, g) \to \xi \cdot g \in \mathbf{P}$. Se $v \in T_{\xi_0}\mathbf{P}$ e $Y \in T_{g_0}\mathbf{G}$, consideriamo due curve differenziabili $\xi(t)$ e $g(t)$ in $\mathbf{P}$ e $\mathbf{G}$ rispettivamente, con $\xi(0) = \xi_0$, $\dot{\xi}(0) = v$ e $g(0) = g_0$, $\dot{g}(0) = Y$. Allora:

$$\frac{d}{dt}(\xi(t) \cdot g(t))|_{t=0} = [dR_{g_0}](v) + [dL_{\xi_0}](Y)$$

dove $R_{g_0} : \mathbf{P} \ni \xi \to \xi \cdot g_0$ e $L_{\xi_0} : \mathbf{G} \ni g \to \xi_0 \cdot g \in \mathbf{P}$. Otteniamo perciò:

$$d\sigma_\beta(x) = [dR_{\psi_{\alpha,\beta}(x)}] \circ d\sigma_\alpha + [dL_{\sigma_\alpha(x)}] \circ d\psi_{\alpha,\beta}\,.$$

Da questa ricaviamo:

$$\begin{aligned} \omega_\beta = \sigma_\beta^*(\omega) &= \omega \circ d\sigma_\beta \\ &= \omega \circ [dR_{\psi_{\alpha,\beta}(x)}] \circ d\sigma_\alpha + \omega \circ [dL_{\sigma_\alpha(x)}] \circ d\psi_{\alpha,\beta} \\ &= \mathrm{ad}(\psi_{\alpha,\beta}^{-1})\omega \circ d\sigma_\alpha + \omega \circ \psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta} \end{aligned}$$

da cui segue la tesi perché ω coincide con la forma canonica sui vettori verticali.

Viceversa, data una famiglia di forme $\{\omega_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, \mathfrak{g})\}$, possiamo definire ω su $\pi^{-1}(U_\alpha)$ come il pull-back di $\omega_\alpha^* = \omega_\alpha + \theta$ mediante il diffeomorfismo di trivializzazione. Le equazioni di gauge ci garantiscono che le definizioni di ω sono compatibili sulle intersezioni $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)$. □

LEMMA 1.3 *Sia $\gamma : [a, b] \to M$ una curva differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$, sia $x_0 = \gamma(a)$ e sia $\xi_0 \in \mathbf{P}$ tale che $\pi(\xi_0) = x_0$. Allora esiste un'unica curva $\tilde{\gamma} : [a, b] \to \mathbf{P}$ tale che*

(1) $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$,
(2) $\dfrac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t) \in H\mathbf{P}$ *per ogni* $t \in [a, b]$.

La curva $\tilde{\gamma}$ si dice il *sollevamento orizzontale* di γ a partire dal punto ξ_0.

Osserviamo che, se $\xi_1 = \xi_0 \cdot a$, per $a \in \mathbf{G}$, è un altro punto sulla fibra $\pi^{-1}(x_0)$, allora $\tilde{\gamma}(t) \cdot a$ è il sollevamento orizzontale di γ a partire dal punto ξ_1.

§2 FORME TENSORIALI E PSEUDOTENSORIALI

Sia V uno spazio vettoriale e ρ una rappresentazione lineare di $\mathbf{G}$ su V. Una *r-forma pseudotensoriale su $\mathbf{P}$ di tipo (ρ, V)* è una r-forma alternata definita su $\mathbf{P}$ e a valori in V tale che

$$R_a^*\phi = \rho(a^{-1}) \cdot \phi \quad \forall a \in \mathbf{G}\,. \tag{2.1}$$

La ϕ si dice *tensoriale* se è orizzontale, cioè se $\phi(X_1, ..., X_r) = 0$ quando uno dei vettori X_i è verticale.

La forma di connessione $\omega : T\mathbf{P} \longrightarrow \mathfrak{g}$ di una connessione principale è una 1-*forma pseudotensoriale* su $\mathbf{P}$, di tipo $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$.

Data una r-forma tensoriale ϕ su $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$, definiamo il suo differenziale esterno covariante $D\phi$ mediante:

$$\begin{cases} D\phi(X_0, X_1, \dots, X_r) = d\phi(h(X_0), h(X_1), \dots, h(X_r)) \\ \quad \forall \xi \in \mathbf{P}, \quad \forall X_0, X_1, \dots, X_r \in T_\xi \mathbf{P}\,. \end{cases} \tag{2.2}$$

Teorema 2.1 *Sia $\phi \in \Lambda(\mathbf{P}, V)$ una r-forma pseudotensoriale di tipo (ρ, V). Allora:*

(a) *$\phi \circ h$ è una r-forma tensoriale di tipo (ρ, V);*
(b) *$d\phi$ è una $(r+1)$-forma pseudotensoriale di tipo (ρ, V);*
(c) *$D\phi = (d\phi) \circ h$ è una $(r+1)$-forma tensoriale di tipo (ρ, V).*

§3 Forma di curvatura ed equazioni di struttura

Definiamo *forma di curvatura* della connessione ω la

$$\Omega = D\omega = d\omega \circ h\,. \tag{3.1}$$

La forma di curvatura Ω è una 2-forma tensoriale di tipo $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$.

Essa soddisfa le due condizioni:

(i) $R_a^* \Omega = \mathrm{ad}(a^{-1}) \circ \Omega$ per ogni $a \in \mathbf{G}$;
(ii) $\Omega(X, Y) = 0$ se uno dei due campi di vettori X, Y è verticale.

Teorema 3.1 *La forma di curvatura soddisfa l'*equazione di struttura*:*

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] = \Omega\,. \tag{3.2}$$

Osserviamo che, se $X, Y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{P}, H\mathbf{P})$, allora l'equazione di struttura si riduce a $\Omega(X, Y) = -\omega([X, Y])$. Se $X, Y \in \mathfrak{g}$, abbiamo $\Omega(X^*, Y^*) = 0$ e:

$$d\omega(X^*, Y^*) = -\omega([X^*, Y^*]) = -[X, Y] = -\frac{1}{2}[\omega \wedge \omega](X^*, Y^*)\,.$$

Se $X \in \mathfrak{g}$ ed $Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora $\Omega(X^*, \tilde{Y}) = 0$, $[\omega \wedge \omega](X^*, \tilde{Y}) = 0$ e:

$$d\omega(X^*, \tilde{Y}) = X^* \omega(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\omega(X^*) - \omega([X^*, \tilde{Y}]) = \omega(L_{X^*}\tilde{Y}) = 0\,,$$

dove abbiamo indicato con L_{X^*} la derivata di Lie rispetto al campo di vettori X^*. Risulta infatti:

$$\omega(L_{X^*}\tilde{Y}) = (L_{X^*}\omega)(\tilde{Y}) + X^*(\omega(\tilde{Y})) = 0\,.$$

Teorema 3.2 *Vale l'*identità differenziale di Bianchi*:*

$$D\Omega = 0\,. \tag{3.3}$$

PROPOSIZIONE 3.3 *Se ϕ è una 1-forma tensoriale di tipo* (ad, $\mathfrak{g}$) *su* $\mathbf{P}$, *allora*

$$D\phi = d\phi + \frac{1}{2}[\phi \wedge \omega]\,. \tag{3.4}$$

DIM. Dobbiamo dimostrare che, se $A, B \in \mathfrak{X}(\mathbf{P})$, allora

$$D\phi(A,B) = d\phi(A,B) + [\phi(A), \omega(B)] - [\phi(B), \omega(A)]\,. \tag{3.5}$$

La formula vale banalmente quando A e B siano o entrambi verticali o entrambi orizzontali.

Esaminiamo ora il caso in cui A e B siano l'uno verticale, l'altro orizzontale. Possiamo supporre che $A = X^*$ per $X \in \mathfrak{g}$ e che $B = \tilde{Y}$ sia il rialzamento orizzontale di un campo di vettori $Y \in \mathfrak{X}(M)$. In questo caso $\tilde{Y}_{\sigma a} = (R_a)_* \tilde{Y}_\sigma$ per ogni $\sigma \in \mathbf{P}$ ed ogni $a \in \mathbf{G}$ e quindi:

$$[\tilde{Y}, X^*] = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\left[R_{\exp(tX)} \right]_* \tilde{Y} - \tilde{Y} \right) = 0\,. \tag{3.6}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} d\phi(X^*, \tilde{Y}) &= X^*\phi(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\phi(X^*) - \phi([X^*, \tilde{Y}]) \\ &= X^*\phi(\tilde{Y}) \end{aligned}$$

e dunque, essendo $D\phi(X^*, \tilde{Y}) = 0$, dobbiamo dimostrare che

$$X^*\phi(\tilde{Y}) = [\phi(\tilde{Y}), X^*]\,.$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} X^*_\sigma\phi(\tilde{Y}) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \tfrac{1}{t} \left(\phi_{\sigma \exp(tX)}(\tilde{Y}) - \phi_\sigma(\tilde{Y}) \right) \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} \tfrac{1}{t} \left(\mathrm{Ad}(\exp(-tX))(\phi_\sigma(\tilde{Y})) - \phi_\sigma(\tilde{Y}) \right) \\ &= -[X, \phi_\sigma(\tilde{Y})] \quad \forall \sigma \in \mathbf{P}\,. \end{aligned}$$

La dimostrazione è completa.

§4 CONNESSIONI PRINCIPALI E DERIVAZIONE COVARIANTE

Sia $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato principale con gruppo strutturale $\mathbf{G}$ e sia (ρ, V) una rappresentazione lineare di $\mathbf{G}$. Scriveremo per semplicità $a \cdot v$ invece che $\rho(a)(v)$ per indicare l'azione dell'elemento $a \in \mathbf{G}$ su $v \in V$.

Consideriamo ora la varietà differenziabile $\mathbf{P} \times V$ e su di essa facciamo agire a destra il gruppo $\mathbf{G}$ mediante

$$\mathbf{P} \times V \times \mathbf{G} \ni (\xi, v; a) \longrightarrow (\xi \cdot a, a^{-1} \cdot v) \in \mathbf{P} \times V\,. \tag{4.1}$$

Sia $\mathbf{E}$ il quoziente di $\mathbf{P} \times V$ rispetto a questa azione di $\mathbf{G}$:

$$(\xi_1, v_1) \sim (\xi_2, v_2) \Leftrightarrow \pi(\xi_1) = \pi(\xi_2) \quad \text{e} \quad v_2 = (\xi_1^{-1}\xi_2) \cdot v_1\,. \tag{4.2}$$

(Nota che se $\pi(\xi_1) = \pi(\xi_2)$ vi è un'unico elemento $a \in \mathbf{G}$, che denotiamo con $\xi_1^{-1}\xi_2$, tale che $\xi_1 \cdot a = \xi_2$.) Indichiamo con $pr : \mathbf{P} \times V \longrightarrow \mathbf{E}$ la proiezione nel quoziente.

Per passaggio al quoziente otteniamo un'applicazione surgettiva

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\pi_E} M \,. \tag{4.3}$$

Si verifica facilmente che $\mathbf{E}$ ha una struttura di fibrato vettoriale. Se $\sigma : U \longrightarrow \mathbf{P}$ è una sezione differenziabile del fibrato principale $\mathbf{P}$ su un aperto U di M, l'applicazione

$$U \times V \longrightarrow pr(\sigma(x), v) \in \mathbf{E} \tag{4.4}$$

definisce una trivializzazione locale del fibrato vettoriale $\mathbf{E}$.

Risulta in particolare definita per ogni $x \in M$ e $\xi \in \mathbf{P}_x$ un'applicazione lineare

$$V \ni v \underset{\xi^{-1}}{\overset{\xi}{\rightleftarrows}} pr(\xi, v) \in \mathbf{E}_x \tag{4.5}$$

Possiamo associare a una r forma differenziale a valori in $\mathbf{E}$ una forma tensoriale di grado r e tipo (ρ, V) su $\mathbf{P}$ estendendo per linearità la corrispondenza:

$$s \otimes \vartheta \longrightarrow \xi^{-1} \circ s \circ (\pi(\xi)) \otimes \pi^*\vartheta \,, \quad \xi \in \mathbf{P} \,. \tag{4.6}$$

Indichiamo con $\Lambda^r_{\mathbf{G}}(\mathbf{P}, V)$ lo spazio delle forme tensoriali di grado r e tipo (ρ, V) su $\mathbf{P}$. Abbiamo:

Teorema 4.1 *La (4.6) definisce un isomorfismo lineare*

$$\Lambda^r(M, \mathbf{E}) \longrightarrow \Lambda^r_{\mathbf{G}}(\mathbf{P}, V) \,. \tag{4.7}$$

La *differenziazione covariante* o *connessione lineare* sul fibrato $\mathbf{E} \xrightarrow{\pi_E} M$ definita dalla connessione principale ω su $\mathbf{P} \xrightarrow{\pi} M$ è descritta dal diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^r(M, \mathbf{E}) & \xrightarrow{\ \nabla\ } & \Lambda^{r+1}(M, \mathbf{E}) \\ {\scriptstyle\simeq}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\simeq} \\ \Lambda^r_{\mathbf{G}}(\mathbf{P}, V) & \xrightarrow[\ D\ ]{} & \Lambda^{r+1}_{\mathbf{G}}(\mathbf{P}, V) \end{array} \tag{4.8}$$

Proposizione 4.2 *Valgono le formule:*

$$\nabla(fs) \,=\, s \otimes df \,+\, f\,\nabla s \qquad \forall f \in \mathcal{E}(M), \quad \forall s \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{E}) \,, \tag{4.9}$$

$$\nabla(s \otimes \beta) \,=\, s \otimes d\beta \,+\, \nabla s \otimes \beta \qquad \forall s \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{E}), \quad \forall \beta \in \Lambda^r(M) \,. \tag{4.10}$$

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $s \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{E})$, indichiamo con $\nabla_X s$ la sezione $\nabla s(X)$ di $\mathbf{E}$ (*derivazione covariante di s rispetto ad X*).

Lemma 4.3 *Sia* $s \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{E})$ *e poniamo* $\tilde{s}(\xi) = \xi^{-1}\, s(\pi(\xi))$ *per* $\xi \in \mathbf{P}$. *Otteniamo in questo modo una sezione in* $\Lambda^0_{\mathbf{G}}(\mathbf{P}, V)$. *Sia* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *e sia* $\tilde{X} = \tilde{h}(X)$ *il corrispondente campo di vettori orizzontale su* $\mathbf{P}$. *Allora:*

$$\left(\tilde{X}\,\tilde{s}\right)(\xi) = \xi^{-1}\nabla_X s(\pi(\xi))\,. \tag{4.11}$$

§5 Forme di Christoffel

Utilizziamo le notazioni introdotte nei paragrafi precedenti.

Sia $U \times V \ni (x, v) \longrightarrow pr(\sigma(x), v) = \sigma(x) \cdot v \in \mathbf{E}|_U$ una trivializzazione locale di $\mathbf{E}$. Risulta allora definita una forma $\omega_\sigma \in \Lambda^1(U, \mathfrak{gl}(V))$ tale che

$$\nabla(\sigma \cdot v) = \sigma \cdot \omega_\sigma \cdot v \quad \forall v \in V\,. \tag{5.1}$$

Teorema 5.1 *Se* ω *è la forma di Cartan della connessione principale e* $\rho_*(e) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ *il differenziale nell'identità della rappresentazione* $\rho : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$, *allora la forma di Christoffel è data da:*

$$\omega_\sigma = \rho_*(e) \circ \sigma^*\omega\,. \tag{5.2}$$

Corollario 5.2 *Le forme di Christoffel di* ∇ *rispetto a un atlante di trivializzazione soddisfano le equazioni di gauge:*

$$\omega_{\sigma_\beta} = \mathrm{Ad}(\rho(\psi^{-1}_{\alpha\beta})) \circ \omega_{\sigma_\alpha} + \rho_*(e)\theta_{\alpha\beta}\,. \tag{5.3}$$

§6 Connessioni lineari

Sul $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ fibrato $\mathbf{L}(M)$ dei sistemi di riferimento[4] su M è definita una forma canonica $\vartheta \in \Lambda^1(\mathbf{L}(M), \mathbb{R}^n)$, mediante:

$$\vartheta(X) \;=\; \sigma^{-1}\pi_*(X) \quad \forall X \in T_\sigma\mathbf{L}(M)\,. \tag{6.1}$$

Proposizione 6.1 *La* ϑ *è una* 1*-forma tensoriale di tipo* $(\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$.

Fissata su $\mathbf{L}(M)$ una connessione principale con forma di Cartan

$$\omega \in \Lambda^1(\mathbf{L}(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$$

chiamiamo *campi di vettori orizzontali standard* i campi

$$B(\mathbf{v})(\sigma) = \tilde{h}_\sigma(\sigma\mathbf{v}) = \widetilde{\sigma\mathbf{v}} \quad \text{per} \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\,. \tag{6.2}$$

[4]Ricordiamo che un punto σ di $\mathbf{L}(M)$ è un ismomorfismo $\mathbb{R}$-lineare $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_xM$, ove $x = \pi(\sigma)$.

(Ricordiamo che $\tilde{X}_\sigma$ è il rilevamento orizzontale in $\sigma \in \mathbf{P}$ di $X \in T_{\pi(\sigma)}M$.) Essi sono caratterizzati da:

$$\left\{ \begin{aligned} \vartheta(B(\mathbf{v})) &= \mathbf{v}\,, \\ \omega(B(\mathbf{v})) &= 0\,. \end{aligned} \right. \tag{6.3}$$

Proposizione 6.2 *Vale:*

$$R_{a*}B(\mathbf{v}) = B(a^{-1}(\mathbf{v})) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\,. \tag{6.4}$$

Inoltre $B(\mathbf{v})(\sigma) \neq 0$ *per ogni* $\sigma \in \mathbf{L}(M)$ *se* $\mathbf{v} \neq 0$.

Dim. Infatti $R_{a*}B(\mathbf{v})$ è orizzontale e

$$\vartheta(R_{a*}B(\mathbf{v})) = (R_a^*\vartheta)\,(B(\mathbf{v})) = a^{-1}\vartheta(B(\mathbf{v})) = a^{-1}(\mathbf{v})\,.$$

Osservazione I campi di vettori $E_i = B(\mathbf{e}_i)$ e E_{ij}^*, ove $\{E_{ij}\}_{1\le i,j\le n}$ è la base canonica di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, formano in ogni punto σ di $\mathbf{L}(M)$ una base di $T_\sigma\mathbf{L}(M)$ (parallelismo completo) e quindi per il Teorema di Palais il gruppo delle affinità di M (diffeomorfismi $f : M \longrightarrow M$ tali che il rialzamento $\hat{f} : \mathbf{L}(M) \longrightarrow \mathbf{L}(M)$ preservi la connessione, i.e. $\hat{f}^*\omega = \omega$, ovvero $\hat{f}_*$ preserva la distribuzione orizzontale) è un gruppo di Lie di dimensione $\le n^2 + n$.

Proposizione 6.3 *Se* $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ *e* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, *allora*

$$[A^*, B(\mathbf{v})] = B(A(\mathbf{v}))\,. \tag{6.5}$$

Dim. Abbiamo infatti:

$$\begin{aligned} [A^*, B(\mathbf{v})] &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R^*_{\mathrm{Exp}(tA)}B(\mathbf{v}) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} B(\mathrm{Exp}(tA)(\mathbf{v})) \\ &= B(A(\mathbf{v}))\,. \end{aligned}$$

La *torsione* della connessione lineare ω è la forma:

$$\Theta = D\vartheta\,. \tag{6.6}$$

La Θ è una forma tensoriale di tipo $(\mathbf{GL}(n,\mathbb{R}),\mathbb{R}^n)$, cioè:

$$R_a^*\Theta \;=\; a^{-1}\,\Theta \quad \forall a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})\,. \tag{6.7}$$

Teorema 6.4 *Curvatura e torsione di una connessione lineare soddisfano le equazioni di struttura:*

$$\left\{ \begin{aligned} d\vartheta + \tfrac{1}{2}\,[\omega\wedge\vartheta] &= \Theta \\ d\omega + \tfrac{1}{2}\,[\omega\wedge\omega] &= \Omega\,. \end{aligned} \right. \tag{6.8}$$

Le equazioni di struttura si possono riscrivere in termini delle componenti scalari ϑ^i $(1 \le i \le n)$ di ϑ e delle componenti scalari ω^i_j $(1 \le i, j \le n)$ di ω:

$$\begin{cases} d\vartheta^i + \omega^i_h \wedge \vartheta^h = \Theta^i \\ d\omega^i_j + \omega^i_h \wedge \omega^h_j = \Omega^i_j\,. \end{cases} \tag{6.9}$$

Teorema 6.5 (Identità differenziali di Bianchi) *Valgono:*

$$\begin{cases} D\Theta = \frac{1}{2}[\Omega \wedge \vartheta] = \Omega \wedge \vartheta \\ D\Omega = 0\,. \end{cases} \tag{6.10}$$

Dim. Differenziando le equazioni di struttura otteniamo:

$$\begin{aligned} d\Theta &= d\omega \wedge \vartheta - \omega \wedge d\vartheta \\ &= (\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \vartheta - \omega \wedge (\Theta - \omega \wedge \vartheta) \\ &= \Omega \wedge \vartheta - \omega \wedge \Theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d\Omega &= d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega \\ &= (\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Omega - \omega \wedge \omega) \\ &= \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega\,. \end{aligned}$$

Componendo a sinistra con $h : T\mathbf{L}(M) \to H\mathbf{L}(M)$ otteniamo le uguaglianze desiderate.

Osservazione

(1) Condizione necessaria e sufficiente affinché $\Theta = 0$, è che

$$[B(\mathbf{v}), B(\mathbf{w})] \in V\mathbf{L}(M) \quad \text{per ogni } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n;$$

(2) condizione necessaria e sufficiente affinché $\Omega = 0$ è che

$$[B(\mathbf{v}), B(\mathbf{w})] \in H\mathbf{L}(M) \quad \text{per ogni } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n;$$

ciò equivale al fatto che la distribuzione HM sia *formalmente integrabile.*

Se ω, ω_0 sono le forme di Cartan di due connessioni lineari su M, la differenza $\omega - \omega_0$ è una 1-forma tensoriale di tipo $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ e viceversa, se ϕ è una 1-forma tensoriale di tipo $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, allora $\omega_0 + \phi$ è una connessione lineare su M. Indichiamo con Θ_0, Ω_0 le forme di torsione e di curvatura di ω_0 e con Θ, Ω quelle di ω. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \Theta &= d\vartheta + \omega \wedge \vartheta \\ &= d\vartheta + \omega_0 \wedge \vartheta + \phi \wedge \vartheta \\ &= \Theta_0 + \phi \wedge \vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega &= d\omega + \omega \wedge \omega \\ &= d\omega + d\phi + \omega_0 \wedge \omega_0 + \omega_0 \wedge \phi + \phi \wedge \omega_0 + \phi \wedge \phi \\ &= \Omega_0 + \omega_0 \wedge \phi + \phi \wedge \omega_0 + \phi \wedge \phi\,. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che Θ_0 è una forma tensoriale di tipo $(\mathbf{GL}(n,\mathbb{R}),\mathbb{R}^n)$ e quindi si può rappresentare mediante

$$\Theta_0 = \tau \circ \vartheta \wedge \vartheta$$

con $\tau \in \mathcal{C}^\infty(\Lambda^2(\mathbf{L}(M)),\mathbb{R}^n)$, cioè $\Theta_0^h = \sum_{i,j=1}^n \tau^h_{i,j}\vartheta^i\vartheta^j$. Possiamo allora definire una 1-forma ϕ a valori in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ ponendo $\phi = -\tau\circ\theta$, cioè $-\phi^i_j = \sum_{h=1}^n \tau^i_{hj}\vartheta^h$. Si verifica che ϕ è tensoriale di tipo $(\mathrm{Ad},\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$ e quindi $\omega = \omega_0+\phi$ è una connessione di Cartan con torsione nulla.

Consideriamo ora una trivializzazione $\mathbf{L}(M)|_U \simeq U\times \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ del fibrato dei sistemi di riferimento su un aperto coordinato U. Identifichiamo U a un aperto di $\mathbb{R}^n$. La forma di Maurer Cartan $\varpi = a^{-1}da$ su $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ definisce in modo ovvio una connessione principale sul fibrato triviale $U\times\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$. Abbiamo

$$\vartheta = a^{-1}dx$$

nel punto $(x,a)\in U\times\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$. Una connessione di Cartan ω su $\mathbf{L}(M)$ differisce in $\mathbf{L}(M)|_U$ da ϖ per una forma

$$\phi(x,a) = a^{-1}\Gamma(x)a$$

con $\Gamma(x)\in\Lambda^1(U,\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Otteniamo allora:

$$\Theta = \phi\wedge\vartheta = \left(a^{-1}\Gamma(x)a\right)\left(a^{-1}dx\right) = a^{-1}\Gamma(x)\wedge dx. \tag{6.11}$$

Se $\Gamma(x) = \Gamma^h_{i,j}dx^i$, otteniamo allora

$$\Theta^k(x,a) = \sum_{h,i,j=1}^n (a^{-1})^k_h\Gamma^h_{i,j}dx^i\wedge dx^j\,. \tag{6.12}$$

Per quanto riguarda la curvatura, otteniamo:

$$\begin{aligned}\Omega &= d\phi+\phi\wedge\phi+\phi\wedge\varpi+\varpi\wedge\phi\\ &= a^{-1}d\Gamma\, a\,-\,a^{-1}da\,a^{-1}\wedge\Gamma\, a\,-\,a^{-1}\Gamma\wedge da\\ &\quad +a^{-1}\Gamma\wedge\Gamma\, a\,+\,a^{-1}\Gamma\wedge da\,+\,a^{-1}da\wedge a^{-1}\Gamma\, a\\ &= a^{-1}\left(d\Gamma\,+\,\Gamma\wedge\Gamma\,\right)\,a\,.\end{aligned} \tag{6.13}$$

Definiamo il *tensore di torsione* $T\in\mathcal{C}^\infty(M,TM\otimes\Lambda^2(M))$ mediante:

$$T(X,Y) = \sigma\Theta_\sigma(\tilde X,\tilde Y)\quad\forall X,Y\in T_{\pi(\sigma)}M\,, \tag{6.14}$$

e il *tensore di curvatura* $R\in\mathcal{C}^\infty(M,TM\otimes T^*M\otimes\Lambda^2(M))$ mediante:

$$R(X,Y)Z = -\sigma\Omega_\sigma(\tilde X,\tilde Y)\vartheta(\tilde Z)\quad\forall X,Y,Z\in T_{\pi(\sigma)}M\,. \tag{6.15}$$

Essi coincidono con la curvatura e la torsione definite mediante la derivazione covariante di Koszul[5] :

$$\begin{cases} T(X,Y) = \nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y]\\ R(X,Y) = \nabla_{[X,Y]}-[\nabla_X,\nabla_Y]\,.\end{cases} \tag{6.16}$$

[5] Ricordiamo che $\nabla_XY(x) = \sigma(\tilde X_\sigma\vartheta(\tilde Y))$ se $\pi(\sigma)=x$.

§7 La connessione di Levi-Civita

Sia (M,g) una varietà Riemanniana di dimensione n. Indichiamo con $\mathbf{O}(M)$ il fibrato principale dei sistemi di riferimento ortonormali di (M,g), e con $\pi : \mathbf{O}(M) \to M$ la proiezione sulla base. Un punto σ di $\mathbf{O}(M)$ con $\pi(\sigma) = x$ è un'isometria lineare $\sigma : \mathbb{R}^n \to T_xM$ dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$ su T_xM, con la metrica associata al prodotto scalare g_x.

Definiamo la *forma canonica* ϑ su $\mathbf{O}(M)$ mediante

$$\vartheta_\sigma(X) = \sigma^{-1}(\pi_*(X)) \qquad \forall\sigma \in \mathbf{O}(M),\ \forall X \in T_\sigma\mathbf{O}(M)\,. \tag{7.1}$$

Indichiamo con $\mathfrak{o}(n)$ l'algebra di Lie del gruppo $\mathbf{O}(n)$: abbiamo

$$\mathbf{O}(n) = \{a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) \mid a\,{}^ta = I_n\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{o}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid {}^tA + A = 0\}\,. \tag{7.2}$$

Indichiamo con ϖ la 1-forma su $\mathbf{O}(n)$, a valori in $\mathfrak{o}(n)$, che fa corrispondere a un vettore tangente $A \in T_a\mathbf{O}(n)$ l'unico elemento $\varpi(A) \in \mathfrak{o}(n) = T_e\mathbf{O}(n)$ tale che $(L_a)_*(\varpi(A)) = A$.

La ϖ è la restrizione a $\mathbf{O}(n)$ della forma differenziale $x^{-1}dx$ su $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$. Osserviamo che vale l'identità di Maurer-Cartan:

$$d\varpi \;=\; -\varpi \wedge \varpi \;=\; -\frac{1}{2}[\varpi,\varpi]\,. \tag{7.3}$$

Una qualsiasi connessione di Cartan ω_0 sul fibrato principale $\mathbf{O}(M)$ definisce una connessione *compatibile* con la metrica g.

Indichiamo con Θ la sua forma di torsione: $\Theta^i = t^i_{jk}\vartheta^j \wedge \vartheta^k$, con $t^i_{jk} = -t^i_{kj}$. Definiamo:

$$\tau^i_j = \sum_{k=1}^n (t^i_{jk} + t^j_{ki} - t^k_{ij})\vartheta^k\,.$$

Allora

$$\tau^j_i = -\tau^i_j \quad \forall i,j = 1,\dots,n$$

e quindi $\tau = (\tau^i_j) \in \Lambda^1(\mathbf{O}(M),\mathfrak{o}(n))$. Chiaramente τ si annulla sui vettori verticali ed è quindi tensoriale di tipo $(\mathrm{Ad},\mathfrak{o}(n))$. La $\omega = \omega_0 + \tau$ è allora la forma di Cartan di una connessione su $\mathbf{O}(M)$ priva di torsione. Infatti:

$$\begin{aligned} d\vartheta^i + \omega^i_j \wedge \vartheta^j &= d\vartheta^i + {\omega_0}^i_j \wedge \vartheta^j + \tau^i_j \wedge \vartheta^j \\ &= t^i_{kj}\vartheta^k\vartheta^j + (t^i_{jk} + t^j_{ki} - t^k_{ij})\vartheta^k \wedge \vartheta^j \\ &= (t^j_{ki} - t^k_{ij})\vartheta^k \wedge \vartheta^j \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che due connessioni di Cartan ω e $\bar\omega$ su $\mathbf{O}(M)$ che abbiano entrambi torsione nulla soddisfano la condizione:

$$\left(\omega^i_j - \bar\omega^i_j\right) \wedge \vartheta^j = 0\,.$$

Poiché $\omega^i_j - \bar\omega^i_j$ si annulla sui vettori verticali, possiamo scrivere $\omega^i_j - \bar\omega^i_j = F^i_{jh}\vartheta^h$ ed otteniamo perciò:

$$F^ijh\vartheta^h \wedge \vartheta^j = 0\,.$$

Questa relazione ci dice che F^i_{jh} è simmetrica rispetto agli indici j,h. Essendo anche antisimmetrica rispetto agli indici i,j, abbiamo:

$$F^i_{jh} = F^i_{hj} = -F^h_{ij} = -F^h_{ji} = F^j_{hi} = F^j_{ih} = -F^i_{jh}\,.$$

Ciò dimostra che $F^i_{jh} = 0$ e dunque $\omega = \bar\omega$.