

Lezioni di Geometria Differenziale I
Calcolo differenziale sulle varietà

Mauro Nacinovich

Indice

Capitolo I. Calcolo differenziale negli spazi Euclidei	9
I.1. Funzioni differenziabili negli spazi \mathbb{R}^n	9
I.2. Equazioni differenziali ordinarie	12
I.3. Il teorema delle funzioni implicite	18
I.4. Mollificatori	21
I.5. Immersioni e sommersioni differenziabili negli spazi Euclidei	24
I.6. Sottovarietà differenziabili negli spazi Euclidei	26
Capitolo II. Geometria differenziale di \mathbb{R}^n	29
II.1. Campi di vettori in \mathbb{R}^n	29
II.2. Curve integrali di un campo di vettori in \mathbb{R}^n	31
II.3. Gruppi locali a un parametro associati a campi di vettori	34
II.4. Campi di vettori e cambiamenti di coordinate	36
II.5. Derivata di Lie rispetto a un campo di vettori	37
II.6. Spazio tangente ad un aperto di \mathbb{R}^n	38
II.7. Spazio tangente a una sottovarietà di \mathbb{R}^n	39
II.8. Campi di vettori F -correlati	40
II.9. Il teorema di Frobenius	42
II.10. Integrali primi	45
Capitolo III. Varietà topologiche e varietà differenziabili	47
III.1. Paracompattezza e partizione dell'unità	47
III.2. Varietà topologiche	48
III.3. Alcuni esempi	49
III.4. Varietà topologiche con bordo	51
III.5. Definizione di varietà differenziabile	52
III.6. Applicazioni differenziabili	53
III.7. Funzioni reali differenziabili e partizione dell'unità	54
III.8. Immersioni, sommersioni, diffeomorfismi	59
III.9. Prodotto cartesiano di varietà differenziabili	60
III.10. Sottovarietà differenziabili	61
III.11. Diffeomorfismi	64
III.12. Esistenza e unicità di strutture differenziali	65
Capitolo IV. Strutture differenziali su alcuni gruppi e spazi omogenei	67
IV.1. I quaternioni e la struttura differenziale di $\mathbf{SU}(2)$, $\mathbf{SO}(3)$, $\mathbf{SO}(4)$	67
IV.2. La trasformata di Cayley	68

IV.3.	I gruppi $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(1, \mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$, $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$, $\mathbf{SO}(1, 2)$	72
IV.4.	La quadrica di $\mathbb{C}\mathbb{P}^5$ ed alcuni omomorfismi di gruppi	74
IV.5.	Varietà di Stiefel reali	78
IV.6.	Varietà di Grassmann	83
IV.7.	Varietà di Stiefel e di Grassmann complesse	85
IV.8.	Matrici di rango assegnato	88
IV.9.	Varietà dei sottospazi Lagrangiani	88
Capitolo V.	Il lemma di Morse-Sard	91
V.1.	Il caso degli spazi Euclidei	91
V.2.	Il teorema di Sard per varietà differenziabili	96
Capitolo VI.	Teoremi di approssimazione e d'immersione	97
VI.1.	Il teorema d'immersione per varietà compatte	99
VI.2.	Il teorema d'immersione nel caso non compatto	101
VI.3.	Alcuni teoremi di approssimazione per applicazioni differenziabili	103
VI.4.	Retratti differenziabili d'intorno	111
VI.5.	Omotopie di classe \mathcal{C}^∞	113
Capitolo VII.	Campi di vettori e spazio tangente	115
VII.1.	Campi di vettori e curve integrali sulle varietà	115
VII.2.	Lo spazio tangente	118
VII.3.	Differenziale di un'applicazione differenziabile	119
VII.4.	Gruppi a un parametro di diffeomorfismi	120
VII.5.	Isotopia	122
VII.6.	Campi di vettori ed isotopie dell'identità	123
VII.7.	Isotopie dello spazio ambiente	125
VII.8.	k -celle differenziabili	126
VII.9.	Collari	128
Capitolo VIII.	Fibrati vettoriali	131
VIII.1.	Fibrati differenziabili	131
VIII.2.	Fibrati vettoriali differenziabili	135
VIII.3.	Morfismi e operazioni di fibrati vettoriali	136
VIII.4.	Fibrati vettoriali e fibrato tangente	138
VIII.5.	Norme differenziabili e strutture Euclidee	139
VIII.6.	Classi di isomorfismo di fibrati vettoriali	140
VIII.7.	Fibrati vettoriali sulle sfere	141
VIII.8.	Quozienti della sfera e spazi lenticolari	143
Capitolo IX.	Fibrato normale e intorno tubolare	145
IX.1.	Il fibrato normale	145
IX.2.	Intorni tubolari	146
IX.3.	Unicità dell'intorno tubolare	149
IX.4.	Intorni tubolari propri	150
IX.5.	Immagine inversa di un valore regolare	153

Capitolo X. Trasversalità	155
X.1. Applicazioni e sottovarietà trasversali	155
X.2. Il teorema di trasversalità di Thom	158
X.3. Immersioni regolari	163
X.4. Funzioni di Morse	165
X.5. Descrizione locale delle funzioni di Morse	169
X.6. Indice d'intersezione	170
X.7. Indice d'intersezione e grado topologico	172
Capitolo XI. Alcune Costruzioni	175
XI.1. Somme connesse	175
XI.2. Somme connesse di varietà con bordo	180
XI.3. Somme connesse lungo il bordo	181
XI.4. Incollamento lungo una sottovarietà	182
XI.5. Incollamento lungo sottovarietà del bordo	183
XI.6. Attaccamento di manici alla frontiera	183
Capitolo XII. Forme differenziali negli spazi Euclidei	187
XII.1. Forme differenziali in \mathbb{R}^n	187
XII.2. Pull-back	188
XII.3. Differenziale di una forma	188
XII.4. Il complesso di de Rham	189
XII.5. Coomologia di de Rham a supporti compatti	192
XII.6. Il grado di un'applicazione propria di \mathbb{R}^n in sé	195
XII.7. Orientazione e sottovarietà di \mathbb{R}^n .	198
XII.8. Integrazione sulle sottovarietà e formule di Stokes	199
Capitolo XIII. Calcolo differenziale sulle varietà	205
XIII.1. Fibrato cotangente e tensori	205
XIII.2. Forme differenziali su una varietà	206
XIII.3. Il lemma di Poincaré-Volterra sugli intorni contrattili	208
XIII.4. Derivata di Lie di un tensore	208
XIII.5. Distribuzioni vettoriali e teorema di Frobenius	211
XIII.6. Integribilità formale e lemma di Poincaré-Volterra	216
XIII.7. Il teorema di Darboux sulle forme canoniche	219
Capitolo XIV. La coomologia di de Rham sulle varietà	225
XIV.1. Definizioni principali	225
XIV.2. Invarianza omotopica	226
XIV.3. Fibrati vettoriali	227
XIV.4. Coomologia di deRham e rivestimenti	229
XIV.5. Complessi differenziali	229
XIV.6. Le successioni di Mayer-Vietoris	233
XIV.7. Alcuni esempi	234
XIV.8. La successione di Mayer-Vietoris a supporti compatti	237
XIV.9. La dualità di Poincaré	238

XIV.10.	Grado di un'applicazione	241
XIV.11.	La formula di Künnet	242
XIV.12.	Duale di Poincaré in una sottovarietà orientata	244
XIV.13.	La proprietà semi-locale	245
Capitolo XV.	Coomologia di de Rham e fibrati differenziabili	251
XV.1.	Coomologia a supporti compatti nelle fibre	251
XV.2.	Integrazione sulla fibra e isomorfismo di Thom	251
XV.3.	Dualità di Poincaré e classe di Thom	254
XV.4.	Due proprietà fondamentali della dualità di Poincaré	255
XV.5.	Coomologia di de Rham relativa	256
XV.6.	Il complesso di de Rham twistato	259
Capitolo XVI.	Il complesso di Čech-de Rham	265
XVI.1.	Successione esatta associata ad un ricoprimento	265
XVI.2.	La coomologia di Čech-de Rham	266
XVI.3.	Una formula di omotopia	270
XVI.4.	La forma di Eulero di un fibrato in sfere orientate	273
XVI.5.	La successione di Gysin	279
XVI.6.	Coomologia delle varietà di Stiefel complesse e quaternioniche	284
XVI.7.	L'isomorfismo di Thom	285
XVI.8.	Fibrati in sfere associati a fibrati vettoriali	287
XVI.9.	Il numero di Eulero	289
XVI.10.	La caratteristica di Eulero	291
XVI.11.	Caratteristica di Eulero di un complesso	293
Capitolo XVII.	Classi caratteristiche	295
XVII.1.	La classe di Chern di un fibrato in rette complesse	295
XVII.2.	La coomologia degli spazi proiettivi complessi	297
XVII.3.	Le classi di Chern	297
XVII.4.	Proprietà delle classi di Chern	299
XVII.5.	Varietà bandiera e varietà di Grassmann	302
XVII.6.	Varietà bandiera di un fibrato vettoriale	303
Capitolo XVIII.	Fasci e coomologia di Čech	305
XVIII.1.	Fasci d'insiemi e morfismi di fasci	305
XVIII.2.	Prefasci d'insiemi	307
XVIII.3.	Fascio associato ad un prefascio e prefasci canonici	308
XVIII.4.	Il fascio immagine diretta	310
XVIII.5.	Fasci dotati di struttura algebrica	312
XVIII.6.	Morfismi di \mathcal{A} -moduli e fasci quozienti	313
XVIII.7.	Coomologia di Čech con coefficienti in un fascio	315
XVIII.8.	Il teorema di Serre	318
XVIII.9.	Un teorema di algebra omologica	325
XVIII.10.	Il teorema di Leray sui ricoprimenti aciclici	330
XVIII.11.	Il Teorema di de Rham	334

XVIII.12. Fasci fiacchi	335
Capitolo XIX. Il Teorema di de Rham	341
XIX.1. Il teorema di de Rham	341
XIX.2. Prolungamento di sezioni	347
XIX.3. Fasci molli	348
XIX.4. Fasci fini	352
XIX.5. Fasci differenziali	352
XIX.6. Risoluzione d'un fascio	353
XIX.7. Risoluzione canonica d'un fascio	354
Capitolo XX. Appendice: Esponenziale di matrici	355
XX.1. Spazi di matrici	355
XX.2. La decomposizione di Wedderburn	357
XX.3. Esponenziale di matrici	359
XX.4. Matrici Hermitiane	364
Capitolo XXI. Appendice: Omologia	369
XXI.1. Notazione	369
XXI.2. Definizione assiomatica	370
XXI.3. Prime conseguenze degli assiomi	372
XXI.4. La formula di Künnet	378
XXI.5. Gruppi di omologia dei complessi cellulari	378
Capitolo XXII. Appendice: Elementi di algebra omologica	383
XXII.1. Complessi	383
XXII.2. Complessi di catene	384
XXII.3. Complessi di cocatene	390
XXII.4. I funtori Hom e Tor	394
XXII.5. Relazione con l'omologia singolare	395
Capitolo XXIII. Appendice: Fibrati di Steenrod	397
XXIII.1. Azione di gruppo	397
XXIII.2. Azioni continue	400
XXIII.3. Alcuni fibrati principali	401

CAPITOLO I

Calcolo differenziale negli spazi Euclidei

In questo capitolo raccogliamo i risultati di calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali, a valori negli spazi Euclidei, che ci saranno utili nel seguito.

I.1. Funzioni differenziabili negli spazi \mathbb{R}^n

Indichiamo con x^1, \dots, x^n le coordinate dello spazio Euclideo \mathbb{R}^n . Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n ed

$$f : \Omega \ni x \rightarrow f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x)) \in \mathbb{R}^m$$

un'applicazione di Ω in \mathbb{R}^m .

Definizione I.1.1 (Derivate parziali). Diciamo che f ammette in $x_0 \in \Omega$ *derivata parziale rispetto ad x^i* se la funzione

$$t \rightarrow \alpha(t) = f(x_0 + t\mathbf{e}_i) \in \mathbb{R}^m,$$

definita in un intorno di $0 \in \mathbb{R}$, è derivabile in 0. Si pone allora

$$\partial_i f(x_0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} = \left. \frac{d}{dt} \alpha(t) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\mathbf{e}_i) - f(x_0)}{t}.$$

Diciamo che f ammette la *derivata nella direzione del vettore $v \in \mathbb{R}^n$* nel punto $x_0 \in \Omega$ se esiste il limite

$$\partial_v f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}.$$

Le derivate parziali di f sono le sue derivate rispetto nelle direzioni dei vettori e_1, \dots, e_n della base canonica di \mathbb{R}^n .

Definizione I.1.2 (Differenziale). La f si dice *differenziabile* in $x_0 \in \Omega$ se esiste un'applicazione lineare $df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che

$$f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0) = o(|x - x_0|) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Questa condizione significa che, per ogni $\epsilon > 0$, possiamo trovare un intorno U_ϵ di x_0 in Ω tale che

$$|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)| \leq \epsilon |x - x_0| \quad \forall x \in U_\epsilon.$$

Vale il:

Teorema I.1.3. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione, x_0 un punto di Ω . La f ammette la derivata parziale $\partial f(x_0)/\partial x^i$ (risp. è differenziabile in x_0) se e soltanto se ciascuna delle funzioni

$$\Omega \ni x \rightarrow f^j(x) \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m$$

ammette la derivata parziale $\partial f^j(x_0)/\partial x^i$ (risp. è differenziabile in x_0).

Se f è differenziabile in x_0 essa è continua in x_0 , ammette tutte le derivate parziali $\partial f(x_0)/\partial x^i$ (per $i = 1, \dots, n$) in x_0 , e

$$df(x_0)(v) = (Jf)(x_0)v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

ove $(Jf)(x_0)$ è la matrice Jacobiana

$$(Jf)(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^m(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^m(x_0)}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo il seguente:

Teorema I.1.4. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione che ammette derivate parziali $\partial f(x)/\partial x^i$ rispetto a tutte coordinate x^1, \dots, x^n di \mathbb{R}^n in ogni punto di Ω . Se le funzioni

$$\Omega \ni x \rightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \in \mathbb{R}^m$$

sono continue per ogni $i = 1, \dots, n$, allora f è differenziabile in ogni punto x di Ω .

Definizione I.1.5. Una $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ che ammetta derivate parziali prime continue in Ω , rispetto a ciascuna delle coordinate, si dice *differenziabile di classe \mathcal{C}^1* .

Teorema I.1.6 (Differenziale della funzione composta). Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^n , G un aperto di \mathbb{R}^m , ed $f : \Omega \rightarrow G$, $g : G \rightarrow \mathbb{R}^l$ due funzioni di classe \mathcal{C}^1 . Allora la funzione composta $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$ è differenziabile di classe \mathcal{C}^1 , e vale la formula:

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Definizione I.1.7. Le derivate parziali di ordine superiore di una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ si definiscono per ricorrenza: se $1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n$ e la derivata parziale $\partial^m f(x)/\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_m}$ è definita in Ω , ed $1 \leq j \leq n$, allora la derivata parziale

$$\partial^{m+1} f(x)/\partial x^j \partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_m}$$

è, quando esiste, la derivata parziale rispetto alla coordinata x^j della funzione

$$\Omega \ni x \rightarrow \partial^m f(x)/\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_m} \in \mathbb{R}^m.$$

Vale il:

Teorema I.1.8 (Schwarz). *Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^n ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione che ammetta derivate parziali del primo e del secondo ordine rispetto alle coordinate, continue in Ω . Allora*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^j \partial x^i} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n, x \in \Omega.$$

Definizione I.1.9. Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ definita su un aperto Ω di \mathbb{R}^n si dice differenziabile di classe \mathcal{C}^k in Ω se ammette derivate parziali continue in Ω fino all'ordine k .

Se Ω è un aperto di \mathbb{R}^n ed A un sottoinsieme di \mathbb{R}^m , indichiamo con $\mathcal{C}^k(\Omega, A)$ l'insieme di tutte le funzioni $f : \Omega \rightarrow A$ tali che $\Omega \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}^m$ sia differenziabile di classe \mathcal{C}^k in Ω .

Diremo che f è differenziabile di classe \mathcal{C}^k nel punto x_0 di Ω se esiste un intorno aperto U di x_0 in Ω tale che $f|_U$ sia differenziabile di classe \mathcal{C}^k .

Per il Teorema I.1.8, se $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$, le sue derivate parziali fino all'ordine k non dipendono dall'ordine in cui si eseguono le successive derivate prime:

$$\partial^h f(x) / \partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_h} = \partial^h f(x) / \partial x^{i_{\sigma_1}} \dots \partial x^{i_{\sigma_h}}, \quad \forall 1 \leq h \leq k, 1 \leq i_1, \dots, i_h \leq n, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_h.$$

Associamo ad ogni h -upla (i_1, \dots, i_h) di interi con $1 \leq i_1, \dots, i_h \leq n$ un multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ove α_j è il numero di indici r tali che $i_r = j$. Definiamo allora:

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x^\alpha} = \partial^h f(x) / \partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_h}.$$

Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, poniamo

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad x^\alpha = (x^1)^{\alpha_1} \dots (x^n)^{\alpha_n}.$$

e scriviamo per semplicità

$$\partial_\alpha, \text{ oppure } D^\alpha \text{ invece di } \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}.$$

Definizione I.1.10. Poniamo

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ si dice *analitica reale* in Ω se per ogni punto $x_0 \in \Omega$ la serie di Taylor

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\partial_\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

converge uniformemente, in un intorno di x_0 , alla funzione f .

Esempio I.1.11. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

è di classe \mathcal{C}^∞ su \mathbb{R} , ma non è analitica reale in 0. Infatti essa si annulla con tutte le sue derivate in 0 e quindi la sua serie di Taylor in 0 non converge ad f in un intorno di 0.

L'insieme delle funzioni analitiche reali definite sull'aperto Ω di \mathbb{R}^n , a valori in \mathbb{R}^m , si indica con $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Vale la catena di inclusioni:

$$\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^m) \supset \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \supset \dots \supset \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^m) \supset \dots \supset \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) \supset \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Se $m = 1$, scriviamo $\mathcal{C}^k(\Omega)$ invece di $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$. Vale la formula di Leibnitz¹,

$$\partial_\alpha(fg) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} (\partial_\beta f)(\partial_\gamma g), \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^k(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k;$$

ne segue che $\mathcal{C}^k(\Omega)$ (per $0 \leq k \leq \omega$) è una \mathbb{R} -algebra ed un anello unitario per il prodotto di funzioni.

I.2. Equazioni differenziali ordinarie

Teorema I.2.1 (Peano). *Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^{m+1} ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Fissati $(t_0, y_0) \in \Omega$, possiamo trovare un $T > 0$ ed una funzione $u : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe \mathcal{C}^1 tale che*

- (i) $(t, u(t)) \in \Omega \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T,$
- (ii) $u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T,$
- (iii) $u(t_0) = y_0.$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre, per semplicità di notazioni, che $t_0 = 0$, $y_0 = 0$. Siano $a > 0$ ed $R > 0$ tali che

$$K = [-a, a] \times \bar{B}(0, R) \subset \Omega.$$

L'insieme K è compatto e quindi, per il teorema di Weierstrass, f è limitata su K . Sia $M > 0$ tale che

$$|f(t, y)| \leq M \quad \forall (t, y) \in K.$$

Fissiamo $T > 0$ in modo tale che

$$TM < R.$$

Indichiamo con la lettera X l'insieme di tutte le funzioni continue $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tali che $|u(t)| \leq R$ per ogni $0 \leq t \leq T$. Su X consideriamo la topologia della convergenza uniforme, associata alla distanza

$$d(u, v) = \|u - v\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq T} |u(t) - v(t)|.$$

Con questa topologia, X è uno spazio metrico completo. Consideriamo l'applicazione

$$X \ni u \rightarrow \Phi(u) \in \mathcal{C}([0, r], \mathbb{R}^m)$$

definita da

$$\Phi(u)(t) = \int_0^t f(s, u(s)) ds.$$

¹Scriviamo $\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} = \binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha}{\gamma}$, estendendo così la definizione del binomiale al caso dei multiindici.

Abbiamo

$$|\Phi(u)(t)| \leq \int_0^t |f(s, u(s))| ds \leq \int_0^t M ds = Mt \leq R \quad \text{se } 0 \leq t \leq T.$$

Quindi $\Phi(u) \in X$ per ogni $u \in X$. La funzione Φ è continua su X . Infatti la f è uniformemente continua su K e quindi, fissato $\epsilon > 0$, possiamo trovare $\eta > 0$ tale che

$$|f(t, y) - f(s, z)| < r^{-1}\epsilon \quad \text{se } (t, y), (s, z) \in K, \quad |t - s| < \eta, |y - z| < \eta.$$

Siano $u, v \in X$ con $\|u - v\|_\infty < \eta$. Allora

$$|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)| = \left| \int_0^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds \right| \leq T^{-1}\epsilon t \leq \epsilon.$$

Osserviamo ancora che le funzioni di $\Phi(X)$ sono equicontinue ed equilimitate e quindi $\Phi(X)$ è relativamente compatto in X per il teorema di Ascoli-Arzelà.

Consideriamo la funzione

$$X \ni u \rightarrow \|u - \Phi(u)\|_\infty \in \mathbb{R}$$

e sia

$$\delta = \inf_{u \in X} \|u - \Phi(u)\|_\infty.$$

Dico che $\delta = 0$. Infatti, fissato $\epsilon > 0$, sia $\eta > 0$ tale che

$$|f(t, y) - f(s, z)| < T^{-1}\epsilon \quad \text{se } (t, y), (s, z) \in K, \quad |t - s| < \eta, |y - z| < \eta.$$

Consideriamo una partizione

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = r$$

con $|t_j - t_{j-1}| < (1 + M)^{-1}\eta$ per $j = 1, \dots, N$. Definiamo per ricorrenza

$$\begin{cases} y_0 = f(0, 0) \\ y_j = y_{j-1} + (t_j - t_{j-1})f(t_{j-1}, y_{j-1}) \quad \text{se } j = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Consideriamo poi la funzione a scalini

$$\psi(t) = f(t_{j-1}, y_{j-1}) \quad \text{se } t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, \dots, N.$$

La funzione

$$v(t) = \int_0^t \psi(s) ds$$

è lineare a tratti ed appartiene ad X . Inoltre

$$|\psi(t) - f(t, v(t))| < T^{-1}\epsilon \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Infatti su ciascuno degli intervalli $[t_{j-1}, t_j]$ abbiamo:

$$|\psi(t) - f(t, v(t))| = |f(t_{j-1}, y_{j-1}) - f(t, y_{j-1} + (t - t_{j-1})f(t_{j-1}, y_{j-1}))| < T^{-1}\epsilon$$

perché

$$|t_{j-1} - t| \leq |t_j - t_{j-1}| < \eta,$$

$$|(t - t_{j-1})f(t_{j-1}, y_{j-1})| < (1 + M)^{-1}M\eta < \eta.$$

Quindi

$$|v(t) - \Phi(v)(t)| \leq \int_0^t |\psi(s) - f(s, v(s))| ds \leq T^{-1} \epsilon t \leq \epsilon.$$

Dunque $\delta = 0$.

Sia $\{u_\nu\}$ una successione in X tale che

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|u_\nu - \Phi(u_\nu)\|_\infty = 0.$$

Poiché $\Phi(X)$ è relativamente compatto in X , a meno di estrarre una sottosuccessione, possiamo supporre che

$$\{\Phi(u_\nu)\} \quad \text{sia una successione convergente in } X.$$

Allora

$$\|u_\nu - u_\mu\|_\infty \leq \|(u_\nu - \Phi(u_\nu))\|_\infty + \|u_\mu - \Phi(u_\mu)\|_\infty + \|\Phi(u_\nu) - \Phi(u_\mu)\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{se } \mu, \nu \rightarrow \infty$$

e quindi la $\{u_\nu\}$ è una successione di Cauchy in X . Poiché X è completo, essa converge a una funzione $u \in X$. Per la continuità di Φ , abbiamo

$$\Phi(u) = u$$

e quindi

$$u(t) = \int_0^t f(s, u(s)) ds \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che $u \in \mathcal{C}^1([0, T], \bar{B}(0, R))$ e soddisfa il sistema

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) & \text{se } 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

□

Osservazione I.2.2. Sotto le ipotesi del teorema di Peano, la soluzione del problema

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) & \text{se } t_0 \leq t \leq t_0 + T, \\ u(t_0) = y_0 \end{cases}$$

può non essere unica. Consideriamo ad esempio la funzione continua

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}.$$

Tutte le funzioni

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t \leq c, \\ \sqrt{\left(\frac{2}{3}(t-c)\right)^3} & \text{se } t \geq c \end{cases}$$

per $c \geq 0$ sono soluzioni di

$$\begin{cases} u'(t) = \sqrt[3]{u(t)} & \text{se } t \geq 0, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

UN'ALTRA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI PEANO. Siano K , M , T e X definiti come in precedenza. Fissato un qualsiasi numero reale positivo $0 < \epsilon < T$, vi è una e una sola funzione $u_\epsilon \in X$ che soddisfa:

$$\begin{cases} u_\epsilon(t) = 0 & \text{se } 0 \leq t \leq \epsilon \\ u_\epsilon(t) = \int_0^t f(s, u_\epsilon(s - \epsilon)) ds & \text{se } \epsilon \leq t \leq T. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che la famiglia $\{u_\epsilon\} \subset X$ è relativamente compatta in X per il teorema di Ascoli-Arzelà. Possiamo quindi trovare una successione $\{\epsilon_\nu\}$ infinitesima tale che

$$u_{\epsilon_\nu} \rightarrow u \quad \text{in } X.$$

Passando al limite sotto il segno di integrale, otteniamo allora

$$u(t) = \int_0^t f(s, u(s)) ds \quad \text{se } 0 \leq t \leq T.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale la u è una funzione di classe \mathcal{C}^1 su $[0, T]$ e soddisfa:

$$\begin{cases} (t, u(t)) \in \Omega & \forall 0 \leq t \leq T \\ u(0) = 0 \\ u'(t) = f(t, u(t)) & \text{se } 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

□

Teorema I.2.3 (Unicità). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y^m$ e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua, che ammette derivate parziali prime continue rispetto alle variabili y^1, \dots, y^m . Sia $(t_0, y_0) \in \Omega$. Se $u_j : [t_0, t_0 + T_j] \rightarrow \mathbb{R}^m$ (con $T_j > 0$ per $j = 1, 2$) sono funzioni di classe \mathcal{C}^1 che risolvono il sistema:*

$$\begin{cases} (t, u_j(t)) \in \Omega & \text{se } t \in [t_0, t_0 + T_j], \\ u_j'(t) = f(t, u_j(t)) & \text{se } t \in [t_0, t_0 + T_j], \\ u_j(t_0) = y_0 \end{cases}$$

allora

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + \min\{T_1, T_2\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $T = \min\{T_1, T_2\}$ e sia

$$A = \{t \in [t_0, t_0 + T] \mid u_1(t) = u_2(t)\}.$$

L'insieme A è chiuso perché le funzioni u_j sono continue. Esso contiene t_0 e quindi non è vuoto. La componente connessa A_0 di t_0 in A è un intervallo chiuso $[t_0, t_1]$ con $t_0 \leq t_1 \leq t_0 + T$. Dico che $t_1 = t_0 + T$. Infatti, se fosse $t_1 < t_0 + T$, avremmo

$$u_j(t) = y_1 + \int_{t_1}^t f(s, u_j(s)) ds \quad \text{se } t_1 \leq t \leq t_0 + T, \quad j = 1, 2$$

con

$$y_1 = u_1(t_1) = u_2(t_1).$$

L'aperto Ω contiene un intorno di (t_1, y_1) della forma

$$K = \{|t - t_1| \leq T_1\} \times \bar{B}(y_1, R_1).$$

Su K abbiamo

$$\left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right| \leq L < \infty.$$

Inoltre, poiché le u_j sono continue, possiamo scegliere $0 < \epsilon < \min\{T_1, t_0 + T - t_1\}$ tale che

$$u_j(t) \in \bar{B}(y_1, R_1) \quad \forall t_1 \leq t \leq t_1 + \epsilon, \quad j = 1, 2.$$

Se $z_1, z_2 \in \bar{B}(y_1, R_1)$, abbiamo

$$\begin{aligned} |f(t, z_2) - f(t, z_1)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{d\xi} f(t, z_1 + \xi(z_2 - z_1)) d\xi \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(t, z_1 + \xi(z_2 - z_1))(z_2 - z_1) d\xi \right| \\ &\leq \left\{ \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, z_1 + \xi(z_2 - z_1)) \right| d\xi \right\} |z_2 - z_1| \\ &\leq L \cdot |z_2 - z_1|. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} |u_2(t) - u_1(t)| &\leq \int_{t_1}^t |f(s, u_2(s)) - f(s, u_1(s))| ds \\ &\leq (t - t_1)L \sup_{t_1 \leq s \leq t} |u_2(s) - u_1(s)| \end{aligned}$$

per $t_1 \leq t \leq t_1 + \epsilon$. Pur di scegliere $\delta > 0$ con $\delta L < 1$, $\delta \leq \epsilon$, avremo

$$\begin{aligned} \sup_{t_1 \leq t \leq t_1 + \delta} |u_2(t) - u_1(t)| &\leq \delta L \sup_{t_1 \leq t \leq t_1 + \delta} |u_2(t) - u_1(t)| \Rightarrow u_1(t) = u_2(t) \\ &\forall t_1 \leq t \leq t_1 + \delta. \end{aligned}$$

Ciò contraddice la definizione di t_1 e mostra quindi che $t_1 = t + r$. \square

Teorema I.2.4 (Dipendenza continua dai dati iniziali). *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y^m$ ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua, che ammette derivate parziali prime continue rispetto alle variabili y^1, \dots, y^m . Sia $(t_0, y_0) \in \Omega$. Possiamo allora trovare $T > 0$, $R > 0$ ed una funzione continua*

$$\phi : [t_0, t_0 + T] \times B(y_0, R) \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

che ammette derivata parziale prima continua rispetto alla variabile t , tale che

$$\begin{cases} (t, \phi(t, y)) \in \Omega & \text{se } (t, y) \in [t_0, t_0 + T] \times B(y_0, R) \\ \phi(t_0, y) = y & \text{se } y \in B(y_0, R) \\ \frac{\partial \phi(t, y)}{\partial t} = f(t, \phi(t, y)) & \text{se } t_0 \leq t \leq t_0 + T. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo, per semplicità di notazioni, che $t_0 = 0$, $y_0 = 0$. Dal teorema di esistenza e unicità segue facilmente l'esistenza, per ogni y in un intorno di 0, di una soluzione $u_y(t)$ del problema

$$\begin{cases} (t, u_y(t)) \in \Omega & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ u_y(0) = y \\ u'_y(t) = f(t, u_y(t)) & \text{se } 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Posto $\phi(t, y) = u_y(t)$, resta da dimostrare la dipendenza continua di ϕ da y .

A questo scopo introduciamo $\psi(t, y) = \phi(t, y) - y$ ed osserviamo che vale l'uguaglianza:

$$\psi(t, y) = \int_0^t f(s, y + \psi(s, y)) ds \quad \text{se } 0 \leq t \leq T.$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} \alpha(t) = |\psi(t, y_2) - \psi(t, y_1)| &\leq \int_0^t |f(s, y_2 + \psi(s, y_2)) - f(s, y_1 + \psi(s, y_1))| ds \\ &\leq \int_0^t L(|y_2 - y_1| + \alpha(s)) ds \\ &\leq Lt|y_2 - y_1| + L \int_0^t \alpha(s) ds \\ &\leq Lr|y_2 - y_1| + L \int_0^t \alpha(s) ds. \end{aligned}$$

Indichiamo con $\beta(t)$ la funzione

$$\beta(t) = Lr|y_2 - y_1| + L \int_0^t \alpha(s) ds.$$

Allora $\beta(t)$ è una funzione di classe \mathcal{C}^1 e

$$\begin{cases} \beta'(t) = L\alpha(t) \\ \beta(t) \geq Lr|y_2 - y_1| \\ \alpha(t) \leq \beta(t). \end{cases}$$

Otteniamo allora

$$\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} \leq L$$

da cui, integrando,

$$\beta(t) \leq Lr|y_2 - y_1|e^{Lt}.$$

Questa disuguaglianza dimostra la tesi. \square

Teorema I.2.5 (Dipendenza \mathcal{C}^k dai dati iniziali). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y^m \times \mathbb{R}_\lambda^k$ e sia*

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

una funzione di classe \mathcal{C}^k con $k \geq 1$. Fissato un punto $(t_0, y_0, \lambda_0) \in \Omega$, possiamo trovare $T > 0$, $R > 0$, e una funzione

$$\phi : G = [-T + t_0, T + t_0] \times B(y_0, R) \times B(\lambda_0, L) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

di classe \mathcal{C}^k tale che:

$$\begin{cases} (t, \phi(t, y, \lambda), \lambda) \in \Omega & \forall (t, y, \lambda) \in G, \\ \frac{\partial \phi(t, y, \lambda)}{\partial t} = f(t, \phi(t, y, \lambda), \lambda) & \text{se } |t - t_0| \leq T \\ \phi(t_0, y, \lambda) = y. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che le derivate parziali delle soluzioni del sistema differenziale

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, y, \lambda) = f(t, \phi(t, y, \lambda), \lambda)$$

soddisfano ancora un sistema differenziale (che si ottiene calcolando le derivate parziali di ambo i membri) ed applicare il teorema di esistenza e unicità. \square

I.3. Il teorema delle funzioni implicite

Teorema I.3.1 (delle funzioni implicite). *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m$ ed $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Supponiamo che F ammetta derivate parziali prime continue rispetto a y^1, \dots, y^m in Ω e che, in un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ la matrice quadrata $m \times m$*

$$A_0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1(x_0, y_0)}{\partial y^1} & \frac{\partial F^1(x_0, y_0)}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial F^1(x_0, y_0)}{\partial y^m} \\ \frac{\partial F^2(x_0, y_0)}{\partial y^1} & \frac{\partial F^2(x_0, y_0)}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial F^2(x_0, y_0)}{\partial y^m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m(x_0, y_0)}{\partial y^1} & \frac{\partial F^m(x_0, y_0)}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial F^m(x_0, y_0)}{\partial y^m} \end{pmatrix}$$

sia invertibile. Possiamo allora determinare due numeri reali positivi r, R ed una funzione continua

$$f : B(x_0, r) \rightarrow B(y_0, R)$$

tali che

$$\begin{cases} B(x_0, r) \times B(y_0, R) \subset \Omega, \\ F(x, f(x)) = F(x_0, y_0) \quad \forall x \in B(x_0, r). \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Per semplificare le notazioni, possiamo supporre siano

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad F(x_0, y_0) = F(0, 0) = 0.$$

L'applicazione

$$G : \Omega \ni (x, y) \rightarrow y - A_0^{-1} F(x, y) \in \mathbb{R}^m$$

ammette derivate parziali prime continue rispetto ad y^1, \dots, y^m e $\frac{\partial G}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Quindi $G(x, y) = o(\sqrt{|x|^2 + |y|^2})$ e perciò possiamo trovare costanti $r, R > 0$, tali

che

$$\begin{cases} \bar{B}(0, r) \times \bar{B}(0, R) \subset \Omega, \\ \|\partial G(x, y)/\partial y\| < \frac{1}{2} \quad \text{se } |x| < r, |y| < R. \end{cases}$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} |G(x, y_2) - G(x, y_1)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} G(x, y_1 + t(y_2 - y_1)) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial y}(x, y_1 + t(y_2 - y_1))(y_2 - y_1) dt \right| \\ &\leq |y_2 - y_1| \cdot \int_0^1 \left\| \frac{\partial G}{\partial y}(x, y_1 + t(y_2 - y_1)) \right\| dt \\ &\leq \frac{1}{2} |y_2 - y_1|, \quad \text{per } |x| < r, |y_1|, |y_2| < R. \end{aligned}$$

La G è uniformemente continua sul compatto $\bar{B}(0, r) \times \bar{B}(0, R)$. In particolare possiamo trovare $0 < r_0 < r$ tale che

$$|G(x_2, y_2) - G(x_1, y_1)| < R/2$$

$$\text{se } |x_2 - x_1| \leq r_0, |y_2 - y_1| \leq r_0, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \bar{B}(0, r) \times \bar{B}(0, R).$$

Quindi, per $x \in \bar{B}(0, r_0)$ ed $y \in \bar{B}(0, R)$, abbiamo

$$|G(x, y)| \leq |G(x, y) - G(0, y)| + |G(0, y)| < R.$$

In particolare, se $X = \mathcal{C}(\bar{B}(0, r), \bar{B}(0, R))$ è lo spazio delle funzioni continue $u : \bar{B}(0, r) \rightarrow \bar{B}(0, R)$, munito della topologia della convergenza uniforme, l'applicazione

$$T : X \ni u \rightarrow G(x, u(x)) \in X$$

è ben definita ed è una contrazione, perché

$$\|T(u) - T(v)\| = \sup_{\bar{B}(0, r_0)} |G(x, u(x)) - G(x, v(x))| \leq \frac{1}{2} \|u - v\| \quad \forall u, v \in X.$$

Poiché X , con la distanza

$$d(u, v) = \sup_{x \in \bar{B}(0, r)} |u(x) - v(x)|,$$

è uno spazio metrico completo, la T ammette in X un unico punto fisso f . Otteniamo:

$$f(x) = f(x) - A_0^{-1} F(x, f(x)) \implies F(x, f(x)) = 0.$$

Per verificare l'unicità, è sufficiente osservare che

$$\begin{aligned} |y_2 - y_1| &= |G(x, y_2) - G(x, y_1)| \leq \frac{1}{2} |y_2 - y_1| \\ \text{se } (x, y_1), (x, y_2) &\in \bar{B}(0, r) \times \bar{B}(0, R), \quad F(x, y_1) = F(x, y_2) = 0. \end{aligned}$$

□

Supponiamo ora che la funzione F ammetta derivate parziali continue rispetto a tutte le variabili. Se una funzione $f(x)$ di classe \mathcal{C}^1 soddisfa, in un intorno del punto x_0 ,

$$\begin{cases} F(x, f(x)) = F(x_0, y_0), \\ f(x_0) = y_0, \end{cases}$$

otteniamo, calcolando il differenziale rispetto ad x :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \frac{\partial f}{\partial x}(x) = 0.$$

La matrice Jacobiana $A(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ è invertibile in un intorno di (x_0, y_0) ed otteniamo quindi:

$$(1.3.1) \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)).$$

Per ogni variabile x^i , (1.3.1) definisce un sistema di equazioni differenziali ordinarie, dipendente dalle altre variabili x^j ($j \neq i$) come parametri. Otteniamo quindi che, se F è di classe \mathcal{C}^k per $k \geq 1$ rispetto a tutte le variabili $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m$, la funzione f è di classe \mathcal{C}^k in un intorno di x_0 .

Vale quindi il:

Teorema I.3.2. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m$ ed $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile di classe \mathcal{C}^k , con $1 \leq k \leq \omega$. Se, in un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ lo Jacobiano $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ è una matrice invertibile, allora esiste un intorno aperto convesso U di x_0 in \mathbb{R}^n ed un'unica funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, di classe \mathcal{C}^k , tale che*

$$(x, f(x)) \in \Omega \quad \forall x \in U \quad \text{ed} \quad F(x, f(x)) = F(x_0, y_0) \quad \forall x \in U.$$

DIMOSTRAZIONE. I casi in cui k sia un intero positivo od ∞ seguono dall'osservazione precedente. Per dimostrare la tesi nel caso analitico reale, si può, in primo luogo, risolvere *per serie*, cioè calcolando le successive derivate parziali di $f(x)$ in x_0 usando la (1.3.1) e le relazioni che da essa si ottengono differenziandola; occorre poi stimare la crescita di tali derivate utilizzando l'ipotesi di analiticità della F . \square

Teorema I.3.3 (dell'applicazione inversa). *Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^n ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^k , con $1 \leq k \leq \omega$. Se $df(x_0)$ è invertibile, allora f è un omeomorfismo di un intorno aperto U di x_0 su un intorno aperto V di $y_0 = f(x_0)$ e l'applicazione inversa $(f|_U)^{-1}$ è differenziabile di classe \mathcal{C}^k in un intorno di y_0 .*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'applicazione

$$\mathbb{R}_y^m \times \Omega \ni (y, x) \rightarrow f(x) - y \in \mathbb{R}^m.$$

Essa è di classe \mathcal{C}^k e, per ipotesi,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

è invertibile per $x = x_0$ ed $y = y_0 = f(x_0)$. Per il teorema delle funzioni implicite vi è una g , univocamente definita e di classe \mathcal{C}^k in un intorno V di y_0 in \mathbb{R}^n , tale che

$$\begin{cases} f(g(y)) - y = 0 & \forall y \in V, \\ g(y_0) = x_0. \end{cases}$$

Poiché $dg(y_0) = df(x_0)^{-1}$ è ancora invertibile, possiamo determinare un'unica h di classe \mathcal{C}^k in un intorno W di x_0 , a valori in \mathbb{R}^n , tale che $g \circ h$ sia ben definita in W e $g(h(x)) = x$ in W , $h(x_0) = y_0$. Possiamo supporre, poiché h è continua, che $h(W) \subset V$ e quindi applicando f ai due membri dell'uguaglianza $g \circ h(x) = x$ otteniamo:

$$h(x) = f \circ g \circ h(x) = f(x) \quad \text{in } W.$$

□

I.4. Mollificatori

Ricordiamo che il *supporto* di una funzione reale f , definita su uno spazio topologico X , è la chiusura dell'insieme dei punti x di X in cui $f(x) \neq 0$:

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Definizione I.4.1. Se Ω è un aperto di \mathbb{R}^n , indichiamo con $\mathcal{C}_{\text{comp}}^k(\Omega)$, per $0 \leq k \leq \infty$, lo spazio vettoriale reale delle funzioni reali, di classe \mathcal{C}^k su Ω , con supporto compatto contenuto in Ω .

Osserviamo che la funzione identicamente nulla (che ha supporto vuoto) è l'unica funzione analitica reale a supporto compatto in \mathbb{R}^n .

Lemma I.4.2. Possiamo trovare una funzione $\phi \in \mathcal{C}_{\text{comp}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\phi(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $\phi(0) > 0$ e $\text{supp}(f) = \{|x| \leq 1\}$.

DIMOSTRAZIONE. La funzione reale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-1/t) & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

è di classe \mathcal{C}^∞ ; essa è infatti di classe \mathcal{C}^∞ in tutti i punti $t \neq 0$. È continua in 0 in quanto

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^s} = 0.$$

Abbiamo poi, se $t > 0$ e k è un intero positivo:

$$(1.4.1) \quad \frac{d^k}{dt^k} f(t) = \frac{p_k(t)}{t^{2k}} f(t)$$

per un polinomio $p_k \in \mathbb{R}[t]$ di grado minore di k . Infatti:

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{-1}{t^2} f(t) \quad \forall t > 0;$$

supponiamo che la (1.4.1) sia vera per un intero $k \geq 1$. Allora

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} f(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{p_k(t)}{t^{2k}} f(t) \right) \\ &= \frac{t^2 p_k'(t) - (1 + 2kt)p_k(t)}{t^{2(k+1)}} f(t), \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi, per polinomi $q_{2k} \in \mathbb{R}[s]$ di grado $\leq 2k$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d^k}{dt^k} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{q_{2k}(s)}{e^s} = 0$$

per ogni intero $k \geq 1$. Per il Teorema dell'Hôpital, ne segue che f è di classe \mathcal{C}^∞ e ha tutte le derivate nulle per $t = 0$.

Allora la funzione $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definita da:

$$\phi(x) = f(1 - |x|^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

gode di tutte le proprietà richieste. \square

Lemma I.4.3. *Sia $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua a supporto compatto. Se $\phi(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $\phi(x_0) > 0$ in un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, allora*

$$0 < \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx < \infty.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che ϕ è integrabile perché è continua e nulla fuori da un compatto. Per il Teorema di Weierstrass ϕ ha un massimo M su $\text{supp } \phi$ e $0 < M < \infty$. Inoltre il supporto di ϕ , essendo compatto, è contenuto nel cubo $[-R/2, R/2]^n$ per un numero positivo R sufficientemente grande. Per la monotonia dell'integrale, otteniamo quindi

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx \leq M R^n < \infty.$$

Poiché ϕ è continua, possiamo poi trovare $\epsilon > 0$ tale che

$$\phi(x) \geq \phi(x_0)/2 > 0 \quad \text{se} \quad x_0^i - \epsilon/2 \leq x^i \leq x_0^i + \epsilon/2.$$

Ancora per la monotonia dell'integrale, otteniamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx \geq \int_{|x^i - x_0^i| \leq \epsilon/2} \phi(x_0)/2 dx = \epsilon^n \phi(x_0)/2 > 0.$$

\square

Dai due lemmi precedenti ricaviamo:

Lemma I.4.4. *Esiste una funzione $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, di classe \mathcal{C}^∞ e a supporto compatto, tale che*

- (1) $\phi(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$;
- (2) $\text{supp}(\phi) \subset D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$;
- (3) $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$.

Sia ϕ una funzione reale con le proprietà elencate nel lemma. Allora ciascuna delle funzioni ϕ_ϵ , per $\epsilon > 0$, definite da:

$$\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \phi(x/\epsilon) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

gode delle proprietà:

- (1) $\text{supp}(\phi_\epsilon) \subset B(0, \epsilon) = \{|x| \leq \epsilon\}$;
- (2) $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x) dx = 1$.

La seconda proprietà segue infatti dalle formule di cambiamento di variabili negli integrali multipli.

Definizione I.4.5. La famiglia $\{\phi_\epsilon \mid \epsilon > 0\}$ si dice una famiglia di *mollificatori* in \mathbb{R}^n .

Teorema I.4.6. Sia $\{\phi_\epsilon = \epsilon^{-n} \phi(x/\epsilon)\}_{\epsilon > 0}$ una famiglia di mollificatori in \mathbb{R}^n . Allora per ogni funzione continua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, le funzioni:

$$f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \phi_\epsilon(x - y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

sono di classe \mathcal{C}^∞ in \mathbb{R}^n ; inoltre:

- (1) $\text{supp}(f_\epsilon) \subset \text{supp}(f) + B(0, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, \text{supp}(f)) \leq \epsilon\}$;
- (2) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_\epsilon(x) = f(x)$ uniformemente sui compatti di \mathbb{R}^n .

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ fissato, la funzione $\mathbb{R}^n \ni y \rightarrow f(y) \phi_\epsilon(x - y)$ è continua e uguale a 0 fuori dalla palla chiusa di centro x e raggio ϵ . Essa è dunque integrabile su \mathbb{R}^n e quindi la f_ϵ è ben definita. Chiaramente $f_\epsilon(x) = 0$ se $\text{dist}(x, \text{supp } f) > \epsilon$.

Essa è una funzione di classe \mathcal{C}^∞ per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale.

Infine, abbiamo

$$f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \phi_\epsilon(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \epsilon y) \phi(y) dy$$

per il teorema di cambiamento di variabili negli integrali multipli. La funzione $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \rightarrow f(x - y) \in \mathbb{R}$ è continua e quindi uniformemente continua sui compatti. Fissato un numero reale δ positivo, possiamo trovare allora per ogni compatto K di \mathbb{R}^n un $\sigma > 0$ tale che

$$|f(x - y) - f(x)| < \delta \quad \text{se } x \in K, |y| < \sigma.$$

Allora:

$$|f_\epsilon(x) - f(x)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - \epsilon y) - f(x)| \phi(y) dy \right| < \delta \quad \text{se } \epsilon < \sigma, x \in K.$$

La dimostrazione è completa. \square

Proposizione I.4.7. Siano K un compatto di \mathbb{R}^n ed A un aperto di \mathbb{R}^n contenente K . Esiste allora una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $0 \leq f(x) \leq 1$ in \mathbb{R}^n , $f(x) = 1$ su K ed $f(x) = 0$ se $x \notin A$.

DIMOSTRAZIONE. Siano U_1, U_2 intorni aperti di K in A con $U_1 \Subset U_2 \Subset A$. Sia $\epsilon > 0$ un numero reale maggiore di $\text{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U_1)$, $\text{dist}(\overline{U_1}, \mathbb{R}^n \setminus U_2)$ e $\text{dist}(\overline{U_2}, \mathbb{R}^n \setminus A)$. Poiché \mathbb{R}^n è uno spazio normale, possiamo trovare una funzione di Urysohn $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ tale che $\psi(x) = 1$ se $x \in \overline{U_1}$, $\psi(x) = 0$ se $x \notin U_2$. Sia $\{\phi_\sigma\}_{\sigma>0}$ una famiglia di mollificatori in \mathbb{R}^n . Allora

$$f(x) = \psi_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\phi_\epsilon(x-y)dy$$

soddisfa tutte le proprietà richieste. Infatti, poiché $0 \leq \psi(x) \leq 1$,

$$0 \leq f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\phi_\epsilon(x-y)dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x-y)dy = 1;$$

se $x \in K$, allora $\psi(y)\phi_\epsilon(x-y) = \phi_\epsilon(x-y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ perché $y \in \overline{U_1}$ se $x-y$ appartiene al supporto di ϕ_ϵ e quindi

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\phi_\epsilon(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x-y)dy = 1 \quad \forall x \in K;$$

se $x \notin A$, allora $\psi(y) = 0$ sul supporto di $y \rightarrow \phi_\epsilon(x-y)$, in quanto esso è contenuto in $\mathbb{R}^n \setminus U_2$ e perciò:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\phi_\epsilon(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} 0dy = 0.$$

□

Osservazione I.4.8. Più semplicemente, se $3r > \text{dist}(K, \mathbb{C}A)$, posto $K_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, K) < r\}$, possiamo definire

$$f(x) = \int_{K_r} \phi_r(x-y)dy.$$

Si dimostra che la funzione f ha supporto in $K_{2r} = \{x \mid \text{dist}(x, K) < 2r\}$, che assume valori nell'intervallo $[0, 1]$, e che $f^{-1}(1) = K$.

I.5. Immersioni e sommersioni differenziabili negli spazi Euclidei

Siano A un aperto di \mathbb{R}^n , B un aperto di \mathbb{R}^m ed $f : A \rightarrow B$ una funzione differenziabile di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$.

Definizione I.5.1. Diciamo che f è un'immersione differenziabile in $x_0 \in A$ se il suo differenziale $df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un monomorfismo \mathbb{R} -lineare; la f si dice un'immersione differenziabile se è tale in ogni punto di A .

Diciamo che f è una sommersione differenziabile in $x_0 \in A$ se il suo differenziale $df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un epimorfismo \mathbb{R} -lineare; la f si dice una sommersione differenziabile se è tale in ogni punto di A .

Un punto x_0 in cui la f non sia una sommersione differenziabile si dice *punto critico* di f e la sua immagine $f(x_0) \in B$ *valore critico* di f .

L'insieme dei punti critici di f si indica con $C(f)$ e l'insieme dei valori critici con $CV(f)$.

Esempio I.5.2. Consideriamo l'applicazione $f : \mathbb{R} \ni x \rightarrow 1 + x^2 \in \mathbb{R}$. Allora f è un'immersione e una sommersione in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; abbiamo $C(f) = \{0\}$ e $CV(f) = \{1\}$.

Teorema I.5.3 (dell'inversa sinistra). *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ due aperti ed $f : A \rightarrow B$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^k con $k \geq 1$. Se f è un'immersione nel punto $x_0 \in A$, allora $n \leq m$ e possiamo trovare un intorno aperto U di x_0 in A , un intorno aperto W di $f(x_0)$ in B ed un'applicazione differenziabile $g : W \rightarrow U$, di classe \mathcal{C}^k , tali che*

$$f(U) \subset W \quad e \quad g \circ f(x) = x \quad \forall x \in U.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi il differenziale $df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un monomorfismo \mathbb{R} -lineare e quindi $n \leq m$. In particolare, il determinante di un minore $n \times n$ della matrice Jacobiana di f in x_0 è diverso da zero. Supponiamo per semplicità che la matrice delle prime n righe:

$$\frac{\partial(f^1, \dots, f^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^n(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^n(x_0)}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

abbia determinante diverso da zero. Poiché essa è la matrice Jacobiana in x_0 della composizione $\pi \circ f$ di f con la proiezione nelle prime n coordinate:

$$\pi : \mathbb{R}^m \ni (y^1, \dots, y^m) \rightarrow (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n,$$

per il teorema dell'applicazione inversa possiamo trovare intorni aperti U di x_0 in A e W' di $\pi \circ f(x_0)$ in \mathbb{R}^n tali che

$$\phi = (\pi \circ f)|_U^{W'} : U \ni x \rightarrow \pi(f(x)) \in W'$$

sia un omeomorfismo di U su W' e ϕ^{-1} sia differenziabile di classe \mathcal{C}^k in W' . Poniamo $W = \pi^{-1}(W') \cap B$ e $g = \phi^{-1} \circ \pi$ su W : la funzione così definita è di classe \mathcal{C}^k e soddisfa la tesi. \square

Teorema I.5.4 (dell'inversa destra). *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ due aperti ed $f : A \rightarrow B$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$. Se f è una sommersione differenziabile nel punto $x_0 \in A$, allora $n \geq m$ e possiamo trovare intorni aperti U di x_0 in A , W di $f(x_0)$ in B ed una funzione differenziabile $g : W \rightarrow U$ di classe \mathcal{C}^k tale che*

$$g(W) \subset U, \quad f \circ g(y) = y \quad \forall y \in W.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché $df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un epimorfismo \mathbb{R} -lineare, $n \geq m$. A meno di permutare gli indici delle coordinate x^1, \dots, x^m , possiamo supporre che

la matrice delle prime m colonne:

$$\frac{\partial(f^1, \dots, f^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^m} \\ \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^m(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^m(x_0)}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

abbia determinante diverso da 0.

Siano $x' = (x^1, \dots, x^m)$, $x'' = (x^{n-m+1}, \dots, x^n)$,

$$\iota : \mathbb{R}^m \ni x' \rightarrow \iota(x', x'') \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}_y^m \times \mathbb{R}_z^{n-m}.$$

La ι è un'immersione di classe \mathcal{C}^ω di \mathbb{R}^m in un sottospazio affine di dimensione n di \mathbb{R}^n per il punto x_0 . Quindi la $f \circ \iota$ è definita e differenziabile in un intorno Ω di $x'_0 = \iota(x_0^1, \dots, x_0^m)$ in \mathbb{R}^m e il suo differenziale in x'_0 è un isomorfismo lineare $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Per il teorema dell'applicazione inversa, possiamo trovare intorni U' di x'_0 in Ω , W di $y_0 = f(x_0) = f \circ \iota(y_0)$ in B , tali che

$$\psi = (f \circ \iota)|_{U'}^W : U \ni y \rightarrow f(\iota(y)) \in W$$

sia un omeomorfismo e la sua inversa $\psi^{-1} : W \rightarrow U'$ sia differenziabile di classe \mathcal{C}^k . Allora la $g = \iota \circ \psi^{-1}$ soddisfa la tesi. \square

I.6. Sottovarietà differenziabili negli spazi Euclidei

Definizione I.6.1. Una *sottovarietà parametrica di dimensione m e di classe \mathcal{C}^k* , con $k \geq 1$, dello spazio Euclideo \mathbb{R}^n è un'applicazione

$$\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

definita su un aperto Ω di \mathbb{R}^m , tale che:

- (1) α è un'immersione topologica;
- (2) α è un'immersione differenziabile di classe \mathcal{C}^k .

L'immagine $\alpha(\Omega)$ si dice il *supporto* della varietà parametrica e si indica con $|\alpha|$.

Osserviamo che $m \leq n$. Se $m = n$, per il teorema dell'applicazione inversa la α è un *diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^k* dell'aperto Ω di $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$ sull'aperto $\alpha(\Omega)$ di \mathbb{R}^n .

Lemma I.6.2. Sia $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una varietà parametrica di dimensione m , definita su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$. Per ogni $y_0 \in \Omega$, esistono un intorno aperto U di $\alpha(y_0)$ in \mathbb{R}^n ed $n - m$ funzioni $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^k tali che

$$\alpha(\Omega) \cap U = \{x \in U \mid f_i(x) = 0, 1 \leq i \leq n - m\},$$

ed inoltre

$$df_1(x), \dots, df_{n-m}(x) \in (\mathbb{R}^n)'$$

sono linearmente indipendenti per ogni $x \in U$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché α è un'immersione differenziabile in ogni punto di Ω , possiamo senz'altro supporre che la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial \alpha^1}{\partial y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \alpha^m}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial \alpha^m}{\partial y^m} \end{pmatrix}$$

abbia determinante diverso da zero in $y_0 \in \Omega$. Sia $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la proiezione nelle prime m coordinate. Per il teorema dell'applicazione inversa, possiamo trovare un intorno aperto W di $\pi(\alpha(y_0))$ in \mathbb{R}^m e un intorno V di y_0 in Ω tale che

$$g \circ \pi \circ \alpha(y) = y, \quad \forall y \in V, \quad \pi \circ \alpha \circ g(x') = x', \quad \forall x' \in W.$$

Poiché abbiamo supposto che α sia un'immersione topologica, possiamo trovare un intorno aperto U di $\alpha(y_0)$ in \mathbb{R}^n tale che

$$\alpha(V) = U \cap \alpha(\Omega).$$

Poniamo

$$f^i(x) = x^{m+i} - \alpha^{m+i} \circ g(\pi(x)) \quad \text{per } x \in U, \quad i = 1, \dots, n-m.$$

Chiaramente le f^i hanno differenziali linearmente indipendenti in U e $\alpha(V)$ è il luogo di zeri delle f^i in U . \square

Viceversa, vale il

Lemma I.6.3. *Siano n, m interi con $0 < m < n$ e sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ una sommersione differenziabile di classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$), definita su un aperto A di \mathbb{R}^n . Se $F(x_0) = 0$ in un punto $x_0 \in A$, possiamo trovare una sottovarietà parametrica $\alpha : \Omega \rightarrow A$, definita su un aperto Ω di \mathbb{R}^m , di classe \mathcal{C}^k e dimensione m , tale che, per un intorno aperto U di x_0 in A , risulti:*

$$\{x \in U \mid F(x) = 0\} = \alpha(\Omega).$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che la matrice $\left(\frac{\partial F^i(x)}{\partial x^{m+j}}\right)_{1 \leq i, j \leq n-m}$ sia invertibile per $x = x_0$. Per il teorema delle funzioni implicite, esistono un intorno aperto Ω di (x_0^1, \dots, x_0^m) in \mathbb{R}^m , un intorno aperto W di $(x_0^{m+1}, \dots, x_0^n)$ in \mathbb{R}^{n-m} tali che $\Omega \times W = U \subset \Omega$ ed una funzione $g : \Omega \rightarrow W$, di classe \mathcal{C}^k , tali che

$$\{F(x) = 0\} \cap U = \{(y, g(y)) \mid y \in \Omega\}.$$

Basterà allora definire

$$\alpha : \Omega \ni y \rightarrow (y, g(y)) \in \mathbb{R}^n.$$

\square

Definizione I.6.4. Si dice *sottovarietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k e di dimensione m* di \mathbb{R}^n un sottoinsieme S di \mathbb{R}^n tale che, per ogni punto $x_0 \in S$ si possa trovare un intorno aperto U di x_0 in \mathbb{R}^n tale che la componente connessa di x_0 in $S \cap U$ sia il supporto di una sottovarietà parametrica di dimensione m .

Una superficie parametrica regolare $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe \mathcal{C}^k , con $\alpha(\Omega) \subset S$, si dice una *parametrizzazione locale* di classe \mathcal{C}^k , della superficie S .

La *topologia di sottovarietà* di S è quella che ha per base le componenti connesse delle intersezioni di S con gli aperti di \mathbb{R}^n .

Si può scegliere come base della topologia di sottovarietà di S anche la famiglia dei supporti delle sue parametrizzazioni locali di classe \mathcal{C}^k .

Essa è in generale più fine della topologia di sottospazio.

Esempio I.6.5. Sia $\mathfrak{M}(m, n; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{mn}$ lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ a coefficienti reali e sia $k \leq \min\{m, n\}$. Allora l'insieme $\mathfrak{M}(m, n; k; \mathbb{R})$ delle matrici $m \times n$ di rango k è una sottovarietà differenziabile localmente chiusa di classe \mathcal{C}^ω di $\mathfrak{M}(m, n; \mathbb{R})$, di dimensione $k(m + n - k)$. Infatti $\mathfrak{M}(m, n; k; \mathbb{R})$ è l'intersezione del chiuso delle matrici che hanno nulli tutti i determinanti dei minori di ordine $(k + 1)$ con l'aperto delle matrici che hanno almeno uno dei determinanti dei minori di ordine k diverso da zero.

Un atlante di $\mathfrak{M}(m, n; k; \mathbb{R})$ si può parametrizzare con la scelta di k colonne X_{i_1}, \dots, X_{i_k} , con $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ della matrice $X \in \mathfrak{M}(m, n; k; \mathbb{R})$. L'aperto U_{i_1, \dots, i_k} è formato dalle matrici X per cui X_{i_1}, \dots, X_{i_k} sono linearmente indipendenti. Le coordinate sono allora gli (mk) coefficienti della matrice $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$, che variano nell'aperto Ω di $\mathfrak{M}(m, k; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{mk}$ delle matrici che hanno un minore $k \times k$ con determinante diverso da 0, e i $k(n - k)$ coefficienti c_j^h che si ricavano dalla decomposizione $X_j = \sum_{h=1}^k c_j^h X_{i_h}$ della j -esima colonna ($j \neq i_1, \dots, i_k$) di X rispetto alle colonne X_{i_1}, \dots, X_{i_k} . Questa scelta delle coordinate definisce un diffeomorfismo di U_{i_1, \dots, i_k} sul prodotto $\Omega \times \mathbb{R}^{k(n-k)} \subset \mathbb{R}^{k(m+n-k)}$.

CAPITOLO II

Geometria differenziale di \mathbb{R}^n

II.1. Campi di vettori in \mathbb{R}^n

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n . Indichiamo con $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ l'algebra reale delle funzioni reali che sono definite e continue, con le loro derivate parziali di ogni ordine, su Ω .

Vale il seguente:

Lemma II.1.1. *Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^n , $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, ed x_0 un punto di Ω . Possiamo trovare funzioni $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tali che:*

$$(2.1.1) \quad f(x) = f(x_0) + (x^1 - x_0^1)g_1(x) + \dots + (x^n - x_0^n)g_n(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Inoltre

$$(2.1.2) \quad g_j(x_0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^j} \quad \text{per } j = 1, \dots, n.$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre per semplicità che $f(x_0) = 0$. Sia $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r\}$ una palla aperta, di centro x_0 , contenuta in Ω . Per ogni punto x di $B(x_0, r)$, il segmento $[x_0, x]$, di estremi x_0, x , è contenuto in Ω . Abbiamo perciò, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(x_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_0 + t(x - x_0)) dt \\ &= \sum_{j=1}^n (x^j - x_0^j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0 + t(x - x_0)) dt. \end{aligned}$$

Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, le funzioni

$$h_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0 + t(x - x_0)) dt$$

sono definite e di classe \mathcal{C}^∞ sulla palla aperta $B(x_0, r)$. Fissiamo ora numeri reali r_1, r_2 con $0 < r_1 < r_2 < r$ ed introduciamo la *funzione di taglio*:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \leq r_1 \\ \exp\left(\frac{\exp(1/(r_1-t))}{t-r_2}\right) & \text{se } r_1 < t < r_2 \\ 0 & \text{se } t \geq r_2. \end{cases}$$

La ϕ è una funzione di classe \mathcal{C}^∞ , non crescente, uguale a 1 per $t \leq r_1$ ed uguale a 0 per $t \geq r_2$. Perciò le funzioni

$$k_j(x) = \begin{cases} \phi(|x - x_0|)h_j(x) & \text{se } |x - x_0| < r_2 \\ 0 & \text{se } |x - x_0| \geq r_2 \end{cases}$$

sono definite e di classe \mathcal{C}^∞ su \mathbb{R}^n . Osserviamo che $k_j(x) = h_j(x)$ se $|x - x_0| \leq r_1$. In particolare:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n (x^j - x_0^j) k_j(x) \quad \text{per } x \in B(x_0, r_1).$$

Poiché la funzione $\tilde{f} = f(x) - \sum_{j=1}^n (x^j - x_0^j) k_j(x)$, che è definita e di classe \mathcal{C}^∞ su Ω , si annulla sulla palla $B(x_0, r_1)$, le funzioni

$$\eta_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in B(x_0, r_1) \\ \frac{(x^j - x_0^j) \tilde{f}(x)}{|x - x_0|^2} & \text{se } x \in \Omega \setminus \{x_0\} \end{cases}$$

sono definite e di classe \mathcal{C}^∞ in Ω . Otteniamo quindi la tesi ponendo $g_j = k_j + \eta_j$, per $j = 1, \dots, n$. Infatti la (2.1.2) è conseguenza della (2.1.1). \square

Definizione II.1.2. Un campo di vettori X sull'aperto Ω di \mathbb{R}^n è un operatore differenziale lineare reale del primo ordine omogeneo su Ω , cioè un'applicazione:

$$(2.1.3) \quad X : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

che si possa descrivere mediante:

$$(2.1.4) \quad \begin{cases} X(f)(x) = \sum_{j=1}^n a^j(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^j} & \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \\ \text{con } a^j \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) & \text{per } j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Indicheremo nel seguito con $\mathfrak{X}(\Omega)$ l'insieme di tutti i campi di vettori su Ω .

Ricordiamo la definizione:

Definizione II.1.3. Un'algebra \mathfrak{g} su un campo \mathbb{K} , con prodotto $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$ si dice un'algebra di Lie se il prodotto soddisfa gli assiomi:

$$[X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g} \quad (\text{antisimmetria})$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} \\ (\text{identità di Jacobi}).$$

Abbiamo facilmente:

Proposizione II.1.4. L'insieme $\mathfrak{X}(\Omega)$ dei campi di vettori su Ω è:

- (1) uno spazio vettoriale reale;
- (2) un $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ -modulo a sinistra;
- (3) un'algebra di Lie reale per l'operazione di commutazione di campi di vettori:

$$(2.1.5) \quad \mathfrak{X}(\Omega) \times \mathfrak{X}(\Omega) \ni (X, Y) \rightarrow [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X \in \mathfrak{X}(\Omega).$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che, se

$$X = \sum_{j=1}^n a^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{ed} \quad Y = \sum_{j=1}^n b^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j},$$

si ha:

$$\begin{aligned}\alpha X + \beta Y &= \sum_{j=1}^n (\alpha a^j(x) + \beta b^j(x)) \frac{\partial}{\partial x^j} & \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\ fX + gY &= \sum_{j=1}^n (f(x)a^j(x) + g(x)b^j(x)) \frac{\partial}{\partial x^j} & \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega).\end{aligned}$$

Queste operazioni definiscono le strutture di spazio vettoriale reale e di $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ -modulo di $\mathfrak{X}(\Omega)$. La verifica di (1) e (2) è dunque immediata.

Per dimostrare la (3), basta verificare che:

$$(2.1.6) \quad [X, Y] = \sum_{j,k=1}^n \left(a^k(x) \frac{\partial b^j(x)}{\partial x^k} - b^k(x) \frac{\partial a^j(x)}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad \square$$

Per preparare la definizione astratta di campo di vettori su una varietà, dimostriamo la

Proposizione II.1.5. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione \mathbb{R} -lineare $X : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ sia un campo di vettori in Ω è che valga la:*

$$(2.1.7) \quad X(fg) = fX(g) + gX(f) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \quad (\text{identità di Leibnitz}).$$

DIMOSTRAZIONE. La verifica della necessità della condizione è immediata. Verifichiamo la sufficienza. Dimostriamo innanzi tutto che, se $X \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(\Omega))$ soddisfa la (2.1.7), allora X si annulla sulle costanti. Se infatti indichiamo con c la funzione che vale identicamente $c \in \mathbb{R}$ su Ω , otteniamo dalla (2.1.7):

$$X(1) = X(1 \cdot 1) = 1 X(1) + 1 X(1) = 2 X(1) \implies X(1) = 0.$$

Quindi anche:

$$X(c) = X(c \cdot 1) = c X(1) = c \cdot 0 = 0.$$

Poniamo ora $a^j(x) = X(x^j)$. Fissato $x_0 \in \Omega$ ed $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, utilizziamo il Lemma II.1.1 per fissare anche funzioni $g_j \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ che soddisfino le (2.1.1) ed (2.1.2). Otteniamo:

$$\begin{aligned}X(f)(x_0) &= [X(f(x_0) + \sum_{j=1}^n (x^j - x_0^j)g_j(x))]_{x=x_0} \\ &= X(f(x_0)) + \sum_{j=1}^n [X((x^j - x_0^j)g_j(x))]_{x=x_0} \\ &= 0 + \sum_{j=1}^n [(x^j - x_0^j)X(g_j) + g_j(x)X(x^j - x_0^j)]_{x=x_0} \\ &= \sum_{j=1}^n g_j(x_0)X(x^j)(x_0) = \sum_{j=1}^n a^j(x_0) \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^j}.\end{aligned}$$

La dimostrazione è completa. □

II.2. Curve integrali di un campo di vettori in \mathbb{R}^n

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n . Al campo di vettori

$$(2.2.1) \quad X = \sum_{j=1}^n a^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(\Omega)$$

associamo il sistema (autonomo) di equazioni differenziali ordinarie:

$$(2.2.2) \quad \dot{x}^j(t) = a^j(x(t)), \quad j = 1, \dots, n.$$

Definizione II.2.1. Le soluzioni del sistema (2.2.2) si dicono *curve integrali* o *curve caratteristiche* del campo di vettori (2.2.1).

Osservazione II.2.2. Lungo le curve integrali $t \rightarrow x(t)$ l'azione del campo si riduce alla differenziazione ordinaria:

$$(2.2.3) \quad (Xf)(x(t)) = \frac{d}{dt}f(x(t)) \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega).$$

Viceversa, le soluzioni $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ dell'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$(2.2.4) \quad Xu(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

sono *integrali primi* del sistema (2.2.2). Cioè, se $x = x(t)$, per $t \in (a, b)$, è soluzione di (2.2.2), allora:

$$(2.2.5) \quad u(x(t)) = \text{costante} \quad \text{per } a < t < b.$$

Dal teorema di esistenza, unicità e dipendenza differenziabile dei dati per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie abbiamo:

Proposizione II.2.3. Siano (2.2.1) un campo di vettori nell'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ed x_0 un punto di Ω . Allora vi è un unico intervallo aperto $(a, b) \subset \mathbb{R}$, con $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$ ed un'unica curva $\alpha : (a, b) \rightarrow \Omega$ di classe \mathcal{C}^∞ , tale che valgano le (2.2.6) e (2.2.7):

$$(2.2.6) \quad \begin{cases} \dot{\alpha}(t) = a^j(\alpha(t)) & \text{per ogni } a < t < b \text{ ed } 1 \leq j \leq n, \\ \alpha(0) = x_0. \end{cases}$$

$$(2.2.7) \quad \begin{cases} \alpha(t_\nu) \text{ diverge in } \Omega \\ \forall \text{ successione } \{t_\nu\} \text{ limitata e divergente in } (a, b). \end{cases} \quad \square$$

Indicheremo con I_{X, x_0} l'intervallo (a, b) e con $\alpha_X(x_0, t)$ la curva $\alpha : (a, b) \rightarrow \Omega$ descritti nella Proposizione II.2.3. Abbiamo ancora:

Proposizione II.2.4 (Dipendenza dai dati iniziali). *Con le notazioni della Proposizione II.2.3: fissato $x_0 \in \Omega$ esistono un intorno U di x_0 in Ω ed un numero reale $r > 0$ tali che:*

$$(2.2.8) \quad I_{X, x} \supset (-r, r) \quad \forall x \in U,$$

$$(2.2.9) \quad U \times (-r, r) \ni (x, t) \rightarrow \alpha_X(x, t) \in \Omega \quad \text{è un'applicazione di classe } \mathcal{C}^\infty.$$

Definizione II.2.5. Sia (2.2.1) un campo di vettori. Un punto $x \in \Omega$ si dice:

regolare, o *non stazionario*, se $(a^1(x), \dots, a^n(x)) \neq \vec{0}$,
critico, o *stazionario*, se $(a^1(x), \dots, a^n(x)) = \vec{0}$.

Osserviamo che $x \in \Omega$ è un punto critico per $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ se e soltanto se $I_{X, x} = \mathbb{R}$ ed $\alpha_X(x, t) = x$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esempio II.2.6. Sia $\Omega = \mathbb{R}^n$ e supponiamo che i coefficienti a^j di (2.2.1) siano costanti e non tutti nulli. Allora le curve integrali di X sono della forma:

$$x^j(t) = x_0^j + ta^j \quad \text{per } j = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R},$$

sono cioè il fascio delle rette parallele alla direzione $\vec{a} = (a^1, \dots, a^n)$.

Fissiamo un'applicazione lineare $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ che abbia come nucleo la retta $\mathbb{R}\vec{a}$. Allora le soluzioni di (2.2.4) sono tutte e sole le $u = v \circ \psi$, al variare di v in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$.

Esempio II.2.7. Sia $\Omega = \mathbb{R}_{x,y}^2$ e sia:

$$X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}.$$

Allora il corrispondente sistema di equazioni ordinarie è:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

che ha soluzioni della forma:

$$\begin{cases} x = A \cos(t + t_0) \\ y = A \sin(t + t_0) \\ \text{con } A, t_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi l'origine, che è l'unico punto stazionario di X , e le circonferenze con centro nell'origine.

Le soluzioni di (2.2.4) sono le $u = v(x^2 + y^2)$, con $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Esempio II.2.8. Sia ancora $\Omega = \mathbb{R}_{x,y}^2$ e sia:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

sono le curve:

$$\begin{cases} x = x_0 \cdot e^t \\ y = y_0 \cdot e^t \\ t \in \mathbb{R}, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

cioè l'origine, unico punto critico di X , e le semirette aperte uscenti dall'origine. Le soluzioni di (2.2.4) devono essere costanti su ciascuna componente connessa dell'intersezione del suo dominio di definizione con una qualsiasi semiretta uscente dall'origine. In particolare, le uniche soluzioni di classe \mathcal{C}^∞ di (2.2.5) su un dominio stellato rispetto all'origine sono le costanti. In generale, se $\phi \in \mathcal{C}^\infty(A)$ per un aperto $A \subset \mathbb{R}$, allora le funzioni della forma $u(x, y) = \phi(x/y)$ e $v(x, y) = \phi(y/x)$ sono soluzioni di (2.2.4), rispettivamente su $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0, (x/y) \in A\}$ e su $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, (y/x) \in A\}$.

Esempio II.2.9. Sia $\Omega = \mathbb{R}_{x,y}^2$ e:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

sono le curve:

$$\begin{cases} x = x_0 \cdot e^t \\ y = y_0 \cdot e^{-t} \\ t \in \mathbb{R}, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

cioè l'origine, unico punto critico di X , e le componenti connesse delle iperboli equilateri aventi per asintoti gli assi coordinati. Le soluzioni di (2.2.5) sono della forma $u = v(xy)$, ove $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

II.3. Gruppi locali a un parametro associati a campi di vettori

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n ed $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ un campo di vettori. Poniamo:

$$(2.3.1) \quad \tilde{\Omega} = \{(t; x) \in \mathbb{R} \times \Omega \mid t \in I_{X,x}\}.$$

Possiamo precisare ulteriormente la Proposizione II.2.4 nella forma seguente:

Teorema II.3.1. *L'insieme $\tilde{\Omega}$ è un intorno aperto di $\{0\} \times \Omega$ in \mathbb{R}^{n+1} . La:*

$$(2.3.2) \quad \alpha_X : \tilde{\Omega} \ni (t; x) \rightarrow \alpha_X(t; x) \in \Omega$$

definita dalle:

$$(2.3.3) \quad \frac{\partial \alpha_X(t; x)}{\partial t} = X_{\alpha_X(t,x)} \quad \forall (t, x) \in \tilde{\Omega}$$

$$(2.3.4) \quad \alpha_X(0; x) = x \quad \forall x \in \Omega$$

gode delle proprietà:

$$(2.3.5) \quad \begin{cases} \alpha_X(t_1 + t_2, x) = \alpha_X(t_1, \alpha_X(t_2; x)) \\ \text{se } (t_2; x), (t_1; \alpha_X(t_2; x)), (t_1 + t_2, x) \in \tilde{\Omega}; \end{cases}$$

$$(2.3.6) \quad (t, x) \in \tilde{\Omega} \Rightarrow (-t, \alpha_X(t; X)) \in \tilde{\Omega} \quad \text{ed} \quad \alpha_X(-t, \alpha_X(t; x)) = x.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta solo verificare le (2.3.5) e (2.3.6). La (2.3.5) è conseguenza del fatto che, se consideriamo i due membri dell'uguaglianza come funzioni di t_1 , essi soddisfano lo stesso problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = X_{\psi(t)} \\ \psi(0) = \alpha_X(t_2; x). \end{cases}$$

La (2.3.6) è conseguenza della (2.3.5). □

Osserviamo che la (2.3.5) ci dice in particolare che, se $(t; x) \in \tilde{\Omega}$, allora esiste un intorno aperto U di x in Ω ed un $\epsilon > 0$ tale che, per $|t| < \epsilon$, la $x \rightarrow \alpha_X(t, x)$ è un diffeomorfismo tra l'aperto U e l'aperto $\alpha_X(t; U)$ di Ω .

Scriveremo anche α_X^t per l'applicazione $x \rightarrow \alpha_X(t, x)$. Osserviamo che in generale essa non è definita su tutto l'aperto Ω . La (2.3.5) si può comunque riscrivere nella forma:

$$(2.3.7) \quad \alpha_X^{t_1} \circ \alpha_X^{t_2} = \alpha_X^{t_1+t_2},$$

intendendo con questo che l'uguaglianza è verificata per tutti gli $x \in \Omega$ per cui entrambi i membri della (2.3.7) siano definiti.

Introduciamo per funzioni di questo tipo la seguente:

Definizione II.3.2. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e sia $\{\Omega_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ una famiglia di sottoinsiemi aperti di Ω con le proprietà:

$$(2.3.8) \quad \Omega_{t_1} \subset \Omega_{t_2} \quad \text{se} \quad |t_2| < |t_1|,$$

$$(2.3.9) \quad \bigcup_{t < 0} \Omega_t = \bigcup_{t > 0} \Omega_t = \Omega_0 = \Omega,$$

$$(2.3.10) \quad \tilde{\Omega} = \{(t; x) \in \mathbb{R} \times \Omega \mid x \in \Omega_t\} \quad \text{è aperto in } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Sia poi $\{\phi^t \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_t, \Omega) \mid t \in \mathbb{R}\}$ una famiglia di funzioni che godono delle seguenti proprietà:

$$(2.3.11) \quad \phi^0 = \text{id}_X,$$

$$(2.3.12) \quad \phi^{t_1} \circ \phi^{t_2} = \phi^{t_1+t_2} \quad \text{su} \quad \Omega_{t_1} \cap \Omega_{t_2}, \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

$$(2.3.13) \quad \{\tilde{\Omega} \ni (t; x) \rightarrow \phi^t(x) \in \Omega\} \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{\Omega}, \Omega).$$

Allora la famiglia $\{\phi^t\}$ si dice un *gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di Ω* .

Il Teorema II.3.1 ci dice che:

Proposizione II.3.3. *Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ definisce un gruppo locale a un parametro $\{\alpha_X^t\}$ di diffeomorfismi di Ω .*

Definizione II.3.4. Il gruppo locale a un parametro $\{\alpha_X^t\}$ si dice il *flusso* del campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$.

Naturalmente l'aperto $\tilde{\Omega}$ nella Definizione II.3.2 può in generale essere più piccolo dell'aperto massimale considerato nell'enunciato del Teorema II.3.1. Abbiamo viceversa:

Teorema II.3.5. *Se $\{\phi_t \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_t, \Omega)\}$ è un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di Ω , risulta univocamente determinato un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ tale che:*

$$(2.3.14) \quad \frac{\partial \phi^t(x)}{\partial t} = X_{\phi^t(x)} \quad \forall x \in \Omega_t.$$

DIMOSTRAZIONE. Definiamo X mediante $X_x = \left. \frac{\partial \phi^t(x)}{\partial t} \right|_{t=0}$, per ogni $x \in \Omega$.

Allora, per la (2.3.12), vale anche la (2.3.14). \square

Definizione II.3.6. Il campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ che soddisfa la (2.3.14) si dice il *generatore infinitesimale* del gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi $\{\phi^t\}$.

Definizione II.3.7. Chiamiamo *gruppo a un parametro di diffeomorfismi di Ω* una famiglia di applicazioni differenziabili $\phi^t : \Omega \rightarrow \Omega$, per $t \in \mathbb{R}$, tali che:

$$(2.3.15) \quad \phi^0 = \text{id}_X,$$

$$(2.3.16) \quad \phi^{t_1} \circ \phi^{t_2} = \phi^{t_1+t_2} \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

$$(2.3.17) \quad \{\mathbb{R} \times \Omega \ni (t, x) \rightarrow \phi^t(x) \in \Omega\} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \Omega, \Omega).$$

Chiaramente un *gruppo* è anche un *gruppo locale* a un parametro di diffeomorfismi.

Definizione II.3.8. Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ si dice *completo* se è generatore infinitesimale di un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di Ω .

Si dimostra facilmente il seguente:

Teorema II.3.9. *Ogni campo di vettori a supporto compatto in Ω è completo.*

II.4. Campi di vettori e cambiamenti di coordinate

Sia $\phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un diffeomorfismo tra due aperti di \mathbb{R}^n . Ad esso corrisponde un isomorfismo lineare:

$$(2.4.1) \quad \phi_* : \mathfrak{X}(\Omega) \rightarrow \mathfrak{X}(\Omega'),$$

univocamente determinato dalla proprietà che:

$$(2.4.2) \quad (\phi_* X)f = X(\phi^* f) = X(f \circ \phi) \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega').$$

Se $X = \sum_{j=1}^n a^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$, applicando alla (18.5.4) il teorema della derivazione della funzione composta, ricaviamo:

$$(2.4.3) \quad \phi_* X = \sum_{j,h=1}^n a^h(x) \frac{\partial \phi^j(x)}{\partial x^h} \frac{\partial}{\partial y^j} \quad \text{per } y = \phi(x).$$

Possiamo interpretare la ϕ come un *cambiamento di coordinate* in Ω , e quindi la (2.4.3) come l'espressione del campo di vettori X nelle nuove coordinate y .

Abbiamo:

Proposizione II.4.1. *Sia x_0 un punto regolare per il campo di vettori $x \in \mathfrak{X}(\Omega)$. Possiamo allora trovare un intorno aperto U di x_0 in Ω ed un cambiamento di coordinate $\phi : U \ni x \rightarrow y = \phi(x) \in U'$ tale che:*

$$(2.4.4) \quad \phi_* X = \frac{\partial}{\partial y^1}.$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre, per fissare le idee, che X sia descritto dalla (2.2.1) e che sia $a^1(x_0) \neq 0$. Indichiamo allora con $\psi = \psi(y^1, \dots, y^n)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y^1} \psi^j(y^1, y^2, \dots, y^n) = a^j(\psi(y)) & (j = 1, \dots, n) \\ \psi^1(0, y^2, \dots, y^n) = x_0^1 \\ \psi^j(0, y^2, \dots, y^n) = x_0^j + y^j & (j = 2, \dots, n). \end{cases}$$

Per il teorema di esistenza e unicità, esso definisce una funzione ψ di classe \mathcal{C}^∞ in un intorno di 0 in \mathbb{R}^n . Il suo Jacobiano in 0 è:

$$\frac{\partial \psi(0)}{\partial y} = \begin{pmatrix} a^1(x_0) & a^2(x_0) & \dots & a^n(x_0) \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(sono nulli tutti i termini fuori dalla prima riga e dalla diagonale principale). Quindi la ψ definisce un diffeomorfismo tra un intorno U' di 0 in \mathbb{R}^n ed un intorno U di x_0 in Ω . Abbiamo:

$$\begin{aligned} \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right) f &= \frac{\partial}{\partial y^1} f(\psi(y^1, y^2, \dots, y^n)) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi^j}{\partial y^1} \frac{\partial f}{\partial x^j} = \sum_{j=1}^n a^j(x) \frac{\partial f}{\partial x^j}, \end{aligned}$$

ed otteniamo quindi la tesi con $\phi = \psi^{-1}$. \square

II.5. Derivata di Lie rispetto a un campo di vettori

Proposizione II.5.1. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e sia $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ un campo di vettori in Ω . L'applicazione:

$$(2.5.1) \quad \mathfrak{L}_X : \mathfrak{X}(\Omega) \ni Y \rightarrow [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X \in \mathfrak{X}(\Omega)$$

è una derivazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{X}(\Omega)$. È cioè \mathbb{R} -lineare e soddisfa:

$$(2.5.2) \quad \mathfrak{L}_X([Y, Z]) = [\mathfrak{L}_X(Y), Z] + [Y, \mathfrak{L}_X(Z)] \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(\Omega).$$

Vale inoltre la:

$$(2.5.3) \quad \mathfrak{L}_X(fY) = (Xf)Y + f\mathfrak{L}_X(Y) \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(\Omega).$$

DIMOSTRAZIONE. La verifica delle diverse proprietà è immediata. Osserviamo che la (2.5.2) è una scrittura equivalente dell'identità di Jacobi. \square

Definizione II.5.2. La $\mathfrak{L}_X : \mathfrak{X}(\Omega) \rightarrow \mathfrak{X}(\Omega)$ si dice *la derivata di Lie* rispetto al campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$.

Diamo ora un'interpretazione geometrica della derivata di Lie di un campo di vettori, che illustra anche il significato dell'operazione di commutazione di campi di vettori.

Teorema II.5.3. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e siano $X, Y \in \mathfrak{X}(\Omega)$. Allora*

$$(2.5.4) \quad \mathfrak{L}_X(Y)(x) = [X, Y](x) = \left[\frac{d}{dt} \right]_{t=0} \left([\alpha_X^{-t} Y](x) \right).$$

DIMOSTRAZIONE. La formula che vogliamo dimostrare è di carattere locale ed è invariante rispetto a cambiamenti di coordinate. Quindi, se $X_{x_0} \neq 0$, per dimostrare che essa è valida nel punto $x_0 \in \Omega$, potremo ricondurre la verifica al caso in cui $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$. Allora $\alpha_X^t(x) = x + te_1$ ove $e_1 = (1, \dots, 0)$ è il primo vettore della base canonica di \mathbb{R}^n .

Se $Y = \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(\Omega)$, abbiamo

$$d\alpha_X^t(Y)(x) = \sum_{i=1}^n b^i(x - te_1) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

e quindi

$$\left[\frac{d}{dt} \right]_{t=0} d\alpha_X^t(Y)(x) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial b^i(x)}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^i} = -[X, Y].$$

Questo dimostra la (2.5.4) fuori dai punti critici di X . Osserviamo che, per la dipendenza continua della soluzione del problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali ordinarie dai parametri, se $X' \in \mathfrak{X}(\Omega)$ è un altro campo di vettori, la derivata di Lie $\mathfrak{L}_{X+\epsilon X'}(Y)$ dipende con continuità dal parametro ϵ . Possiamo così ottenere la (2.5.4) anche in un punto critico x_0 di X , sostituendo ad X il campo di vettori $X + \epsilon X'$, con X' non singolare in x_0 , applicando la prima parte della dimostrazione e poi passando al limite, nella $\mathfrak{L}_{X+\epsilon X'}(Y)(x_0) = [X + \epsilon X', Y](x_0)$, per $\epsilon \rightarrow 0$, in modo da ottenere la ancora la (2.5.4). \square

II.6. Spazio tangente ad un aperto di \mathbb{R}^n

Definizione II.6.1. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n ed x_0 un punto di Ω . Un *vettore tangente* ad Ω in x_0 (o *applicato* in x_0) è un'applicazione \mathbb{R} -lineare:*

$$(2.6.1) \quad \vec{v} : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

che soddisfa l'identità

$$(2.6.2) \quad \vec{v}(fg) = f(x_0)\vec{v}(g) + g(x_0)\vec{v}(f) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega).$$

Indicheremo con $T_{x_0}\Omega$ lo spazio tangente ad Ω in x_0 .

Ripetendo i ragionamenti svolti nei paragrafi precedenti per i campi di vettori otteniamo:

Proposizione II.6.2. *Per ogni $x_0 \in \Omega$ lo spazio tangente $T_{x_0}\Omega$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione n ; i vettori $\left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{x_0}$, per $1 \leq j \leq n$, ne costituiscono una base.* \square

Definizione II.6.3. *L'unione disgiunta $T\Omega = \bigsqcup_{x \in \Omega} T_x\Omega$ si dice lo *spazio tangente* di Ω . L'applicazione*

$$(2.6.3) \quad \Omega \times \mathbb{R}^n \ni (x; \xi) \rightarrow \sum_{j=1}^n \xi^j \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \right]_x \in T\Omega$$

è una bigezione, con cui identifichiamo $T\Omega$ al prodotto cartesiano $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Indichiamo con $\pi : T\Omega \rightarrow \Omega$ l'applicazione che associa ad ogni vettore tangente il suo punto d'applicazione.

Osservazione II.6.4. La $T\Omega \xrightarrow{\pi} \Omega$ definisce un *fibrato vettoriale banale* su Ω .

Proposizione II.6.5. *I campi di vettori in $\mathfrak{X}(\Omega)$ sono in corrispondenza biunivoca con le sezioni di classe \mathcal{C}^∞ del fibrato $T\Omega \xrightarrow{\pi} \Omega$. La corrispondenza: $\mathfrak{X}(\Omega) \leftrightarrow \Gamma(\Omega, T\Omega)$ associa ad $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ la sezione $\Omega \ni x \rightarrow X_x \in T_x\Omega$ ove $X_x(f) = X(f)(x)$ per ogni $x \in \Omega$ ed $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*

Definizione II.6.6. Se $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ ed $x \in \Omega$, il vettore tangente $X_x \in T_x\Omega$ definito nella Proposizione II.6.5 si dice la *valutazione di X in x* .

Definizione II.6.7. Il *differenziale* di un'applicazione $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, di classe \mathcal{C}^1 su un aperto Ω di \mathbb{R}^n , è l'applicazione

$$(2.6.4) \quad F_* = dF : T\Omega \rightarrow T\mathbb{R}^m$$

definita da

$$(2.6.5) \quad dF(\vec{v})(f) = F_*(\vec{v})(f) = \vec{v}(F^*f) = \vec{v}(f \circ F) \quad \forall \vec{v} \in T\Omega, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m).$$

In coordinate, abbiamo:

$$(2.6.6) \quad dF \left(\sum_{j=1}^n a^j \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \right]_{x_0} \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial F^i(x_0)}{\partial x^j} \left[\frac{\partial}{\partial y^i} \right]_{f(x_0)}.$$

II.7. Spazio tangente a una sottovarietà di \mathbb{R}^n

Definizione II.7.1. Sia S una sottovarietà differenziabile di dimensione m di \mathbb{R}^n . Sia $x_0 \in S$. Un vettore $\vec{v} \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$ si dice *tangente ad S* se $\vec{v}(f) = 0$ per ogni funzione f , definita e di classe \mathcal{C}^∞ su un intorno di U di x_0 , che si annulla su un intorno di x_0 in $S \cap U$.

Indichiamo con $T_{x_0}S$ lo spazio dei vettori tangenti ad S in x_0 .

Proposizione II.7.2. *Sia S una sottovarietà differenziabile di dimensione m di \mathbb{R}^n . Per ogni $x \in S$, T_xS è uno spazio vettoriale reale di dimensione m . L'insieme:*

$$(2.7.1) \quad TS = \{(x, \vec{v}) \mid x \in S, \vec{v} \in T_xS\}$$

è una sottovarietà differenziabile di dimensione $2m$ di $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Se $\alpha : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ è una parametrizzazione di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, di S in un intorno di $x_0 \in S$, con Ω aperto di \mathbb{R}^m e $y_0 = \alpha^{-1}(x_0)$, allora

$$(2.7.2) \quad T_{x_0}S = d\alpha(x_0)(T_{y_0}\Omega).$$

Se S è localmente chiusa in \mathbb{R}^n , allora anche TS è localmente chiusa in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE. Sia U un intorno aperto di $x_0 \in S$ e fissiamo funzioni $f_1, \dots, f_{n-m} \in \mathcal{C}^\infty(U)$ in modo che

$$\{x \mid f_j(x) = 0, \text{ per } j = 1, \dots, n-m\} \cap U$$

sia un intorno aperto di x_0 in S per la topologia di sottovarietà. Osserviamo che:

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^n v^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{x_0} \in T_{x_0} S \iff \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-m})(x_0)}{\partial x} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = 0$$

Da questo segue che $T_{x_0} S$ ha dimensione m . Abbiamo poi:

$$(x, \vec{v}) \in TS \cap (U \times \mathbb{R}^n) \iff \begin{cases} F_j(x, \vec{v}) = f_j(x) = 0, \\ F_{n-m+j}(x, \vec{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j(x)}{\partial x^i} v^i = 0, \\ \text{per } j = 1, \dots, n-m, \end{cases}$$

e la matrice Jacobiana di $F = (F_1, \dots, F_{2(n-m)})$ è della forma:

$$\frac{\partial F(x, \vec{v})}{\partial(x, \vec{v})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-m})(x)}{\partial x} & * \\ 0 & \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-m})(x)}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Essa ha quindi rango $2(n-m)$ e ciò dimostra che TS è una varietà sottovarietà di \mathbb{R}^{2n} di dimensione $2m$; chiaramente essa è localmente chiusa se S è localmente chiusa.

Se $\alpha : \Omega \rightarrow S$ è una parametrizzazione locale di classe \mathcal{C}^1 di S , abbiamo $d\alpha(y)(T_y \Omega) \subset T_{\alpha(y)} S$ per ogni $y \in \Omega$. Poiché α è un'immersione differenziabile, il sottospazio vettoriale $d\alpha(y)(T_y \Omega)$ ha dimensione m e quindi coincide con $T_{\alpha(y)} S$. \square

Definizione II.7.3. Data una sottovarietà differenziabile S di \mathbb{R}^n ed un intorno aperto Ω di S in \mathbb{R}^n , un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ si dice *tangente* ad S se, per ogni $x \in X$, la valutazione X_x di X in x è un vettore tangente ad S in x .

Si verifica facilmente il seguente:

Lemma II.7.4. Sia S una sottovarietà differenziabile localmente chiusa di \mathbb{R}^n ed Ω un intorno aperto di S in \mathbb{R}^n . Allora i campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ che sono tangenti ad S formano una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se f è una funzione reale di classe \mathcal{C}^∞ definita in Ω e nulla su S , ed $X, Y \in \mathfrak{X}(\Omega)$ sono tangenti ad S , allora:

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf) = 0 \quad \text{su } S$$

perché Xf ed Yf sono ancora funzioni reali di classe \mathcal{C}^∞ definite in Ω e nulle su S . \square

II.8. Campi di vettori F -correlati

Un'applicazione differenziabile $F : \Omega \rightarrow \Omega'$ di classe \mathcal{C}^∞ tra un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ed un aperto $\Omega' \subset \mathbb{R}^{n'}$ definisce un'applicazione, anch'essa di classe \mathcal{C}^∞ , $dF : T\Omega \rightarrow T\Omega'$. In generale però, ad un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ la F non fa corrispondere un campo di vettori su Ω' .

Introduciamo perciò la nozione seguente:

Definizione II.8.1. Sia $F : \Omega \rightarrow \Omega'$ un'applicazione differenziabile tra due aperti Ω di \mathbb{R}^n ed Ω' di $\mathbb{R}^{n'}$. Due campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ ed $X' \in \mathfrak{X}(\Omega')$ si dicono F -correlati se:

$$(2.8.1) \quad dF(x)(X_x) = X'_{F(x)} \quad \forall x \in \Omega.$$

Osservazione II.8.2. Ad esempio, se F è un diffeomorfismo, allora $X' = F_*(X)$ è F -correlato ad X ed è l'unico campo di vettori F -correlato ad X . Se F non è un diffeomorfismo, non è detto che ad un assegnato campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ si possa far corrispondere un campo di vettori $X' \in \mathfrak{X}(\Omega')$ che sia F -correlato ad X . Chiaramente, se ve n'è uno, esso è completamente determinato nei punti di $F(\Omega)$.

Proposizione II.8.3. Sia $F : \Omega \rightarrow \Omega'$ un'applicazione differenziabile tra due aperti Ω di \mathbb{R}^n ed Ω' di $\mathbb{R}^{n'}$. Se $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\Omega)$, $X'_1, X'_2 \in \mathfrak{X}(\Omega')$, ed X'_j è F -correlato a X_j per $j = 1, 2$, allora anche $[X'_1, X'_2]$ è F -correlato ad $[X_1, X_2]$.

DIMOSTRAZIONE. Siano

$$\begin{aligned} X_j &= \sum_{h=1}^n a_j^h(x) \frac{\partial}{\partial x^h} \\ X'_j &= \sum_{k=1}^{n'} b_j^k(y) \frac{\partial}{\partial y^k} \end{aligned}$$

per $j = 1, 2$. Il fatto che X'_j sia F -correlato ad X_j significa che:

$$b_j^k(F(x)) = \sum_{h=1}^n a_j^h(x) \frac{\partial F^k(x)}{\partial x^h} \quad \text{per } j = 1, 2, \quad k = 1, \dots, n' \quad x \in \Omega.$$

Differenziando, otteniamo:

$$\sum_{r=1}^{n'} \frac{\partial b_j^k(F(x))}{\partial y^r} \frac{\partial F^r(x)}{\partial x^\ell} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial a_j^h(x)}{\partial x^\ell} \frac{\partial F^k(x)}{\partial x^h} + \sum_{h=1}^n a_j^h(x) \frac{\partial^2 F^k(x)}{\partial x^h \partial x^\ell}$$

Abbiamo, per i coefficienti di $[X'_1, X'_2]$:

$$\begin{aligned} b_1^r \frac{\partial b_2^k}{\partial y^k} - b_2^r \frac{\partial b_1^k}{\partial y^k} &= a_1^h \frac{\partial F^k}{\partial x^h} \frac{\partial b_2^k}{\partial y^r} - a_2^h \frac{\partial F^k}{\partial x^h} \frac{\partial b_1^k}{\partial y^r} \\ &= a_1^h \frac{\partial a_2^s}{\partial x^h} \frac{\partial F^k}{\partial x^s} + a_1^h a_2^s \frac{\partial^2 F^k}{\partial y^s \partial x^k} \\ &\quad - a_2^h \frac{\partial a_1^s}{\partial x^h} \frac{\partial F^k}{\partial x^s} - a_2^h a_1^s \frac{\partial^2 F^k}{\partial y^s \partial x^k} \\ &= \left(a_1^h \frac{\partial a_2^s}{\partial x^h} - a_2^h \frac{\partial a_1^s}{\partial x^h} \right) \frac{\partial F^k}{\partial x^s} \end{aligned}$$

dove abbiamo calcolato per $y = F(x)$ ed abbiamo utilizzato per brevità la convenzione per cui gli indici ripetuti in alto e in basso si intendono sommati per tutti i valori per cui sono definiti. Questa relazione ci dà la tesi. \square

II.9. Il teorema di Frobenius

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n ed X un campo di vettori in Ω . Per ogni punto regolare di X passa una ed una sola sua curva integrale. Quindi, se X è regolare in tutti i punti di Ω , la famiglia \mathfrak{F} delle curve integrali di X in Ω è una famiglia di sottovarietà differenziabili di dimensione 1 di Ω ed ogni punto x di Ω appartiene ad uno ed un solo elemento di \mathfrak{F} .

Chiaramente la famiglia delle curve integrali di fX , se f è una qualsiasi funzione differenziabile che non si annulla in nessun punto di Ω , coincide con la \mathfrak{F} . Se quindi siamo interessati a studiare la famiglia di curve \mathfrak{F} , sarà naturale considerare non un singolo campo di vettori X , ma il $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ -modulo $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cdot X$ generato da X , ovvero il $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ -modulo formato da tutti quei campi di vettori che sono tangenti a tutte le curve della famiglia \mathfrak{F} .

Estendiamo questa nozione mediante la definizione:

Definizione II.9.1. Si dice *sistema differenziale in Ω* , un qualsiasi sotto- $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ -modulo $\mathfrak{D}(\Omega)$ di $\mathfrak{X}(\Omega)$.

Per ogni $x \in \Omega$, l'insieme $\mathfrak{D}_x = \{X_x \mid X \in \mathfrak{D}(\Omega)\}$ è un sottospazio vettoriale di $T_x\Omega$. La sua dimensione si dice *dimensione* di $\mathfrak{D}(\Omega)$ in x .

Se tale dimensione è costante ed uguale a p in tutti i punti di Ω , diciamo che $\mathfrak{D}(\Omega)$ è una *distribuzione vettoriale regolare* di dimensione p , o *una distribuzione di p -piani in Ω* .

Se U è un sottoinsieme aperto di Ω , indicheremo con $\mathfrak{D}(U)$ il $\mathcal{C}^\infty(U)$ -modulo generato dalle restrizioni ad U dei campi di vettori di $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Il sistema differenziale $\mathfrak{D}(\Omega)$ si dice *completamente integrabile* se:

$$(2.9.1) \quad [\mathfrak{D}(\Omega), \mathfrak{D}(\Omega)] \subset \mathfrak{D}(\Omega).$$

Abbiamo indicato con $[\mathfrak{D}(\Omega), \mathfrak{D}(\Omega)]$ il $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ -modulo generato dai commutatori $[X, Y]$, al variare di X, Y in $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Esempio II.9.2. Se $n \geq 2$, i campi di vettori

$$X_{i,j} = x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{per } 1 \leq i < j \leq n$$

generano un sistema differenziale completamente integrabile in \mathbb{R}^n . La sua restrizione ad $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è una distribuzione regolare di iperpiani.

Esempio II.9.3. $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_{x^1, \dots, x^n}^n)$, i campi di vettori

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial \phi(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^0} \quad \text{per } j = 1, \dots, n$$

generano una distribuzione di iperpiani completamente integrabile in $\mathbb{R}_{x^0, x^1, \dots, x^n}^{n+1}$.

Esempio II.9.4. Sia $\Omega = \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^n$. I campi di vettori:

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j y^j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

generano una distribuzione completamente integrabile di n -piani in \mathbb{R}^{2n} .

Esempio II.9.5. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n ed $F \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Allora $\mathcal{D}(\Omega) = \{X \in \mathfrak{X}(\Omega) \mid XF = 0\}$ è un sistema differenziale completamente integrabile in Ω , e la sua restrizione all'aperto $\Omega' = \{x \in \Omega \mid dF(x) \neq 0\}$ è una distribuzione d'iperpiani.

Definizione II.9.6. Sia $\mathcal{D}(\Omega)$ un sistema differenziale. Una sottovarietà differenziabile S di Ω si dice *varietà integrale* di $\mathcal{D}(\Omega)$ se $T_x S \subset \mathcal{D}_x$ per ogni $x \in S$.

Esempio II.9.7. Nel caso dell'Esempio II.9.2, $\{0\}$ e tutte le sfere $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r\}$, con $r > 0$, sono varietà integrali di $\mathcal{D}(\Omega)$.

Nel caso dell'Esempio II.9.3, tutte le ipersuperficie $\{x^0 = \phi(x^1, \dots, x^n) + k\}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, sono varietà integrali di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n+1})$.

Nel caso dell'Esempio II.9.4, tutte le sottovarietà n dimensionali

$$\{y^j = k_j \exp(-[x^j]^2/2)\},$$

al variare di $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$, sono sottovarietà integrali di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$.

Nel caso dell'Esempio II.9.5, tutte le sottovarietà differenziabili di Ω su cui F sia costante sono sottovarietà integrali di $\mathcal{D}(\Omega)$.

Vale il:

Teorema II.9.8 (Frobenius). *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e sia $\mathcal{D}(\Omega)$ una distribuzione vettoriale regolare completamente integrabile di p -piani in Ω . Per ogni punto $x_0 \in \Omega$ possiamo trovare un intorno aperto U di x_0 in Ω ed un'unica varietà integrale connessa S di dimensione p di $\mathcal{D}(\Omega)$ che contenga x_0 e sia una sottovarietà chiusa di U .*

La dimostrazione del Teorema di Frobenius è conseguenza della seguente:

Proposizione II.9.9. *Sia $\mathcal{D}(\Omega)$ una distribuzione vettoriale regolare completamente integrabile di p -piani in Ω . Allora, per ogni $x_0 \in \Omega$ possiamo trovare un intorno aperto U di x_0 in Ω ed un diffeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ di U su un intorno aperto V di 0 in \mathbb{R}_y^n tale che $\phi_*(\mathcal{D}(U))$ sia generato da $\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^p}$.*

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per ricorrenza su p . Nel caso $p = 1$ ci si riduce alla Proposizione II.4.1. Supponiamo quindi che $p > 1$ e che il teorema sia vero per distribuzioni totalmente integrabili di $(p-1)$ -piani. Fissiamo p campi di vettori $X_1, \dots, X_p \in \mathcal{D}(\Omega)$ tali che $X_{1,x_0}, \dots, X_{p,x_0}$ generino \mathcal{D}_{x_0} . Sia $X_j = \sum_{i=1}^n a_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, per $j = 1, \dots, p$. A meno di cambiare gli indici delle coordinate, possiamo supporre che la matrice $A(x_0) = (a_j^i(x_0))_{1 \leq i, j \leq p}$ sia invertibile. Fissiamo un intorno aperto U di x_0 in cui $A(x) = (a_j^i(x))_{1 \leq i, j \leq p}$ sia invertibile. Allora i campi di vettori Y_1, \dots, Y_d , definiti da:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_p \end{pmatrix} = [A(x)]^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$$

generano $\mathcal{D}(U)$ come $\mathcal{C}^\infty(U)$ -modulo. Essi sono della forma:

$$Y_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{h=p+1}^n b_j^h \frac{\partial}{\partial x^h} \quad \text{per } j = 1, \dots, p.$$

La condizione che $\mathfrak{D}(U)$ sia completamente integrabile, ci dice che i commutatori $[Y_j, Y_k]$, per $1 \leq j < k \leq p$, sono combinazioni lineari di Y_1, \dots, Y_p con coefficienti in $\mathcal{C}^\infty(U)$. Ma:

$$[Y_j, Y_k] = \sum_{h=p+1}^n c_{j,k}^h \frac{\partial}{\partial x^h}$$

implica allora che

$$[Y_j, Y_k] = 0 \quad \forall 1 \leq j < k \leq p.$$

In particolare, il $\mathcal{C}^\infty(U)$ -modulo $\mathfrak{D}_{d-1}(U)$ generato da Y_1, \dots, Y_{p-1} è una distribuzione di $(p-1)$ -piani in U completamente integrabile. Per l'ipotesi induttiva, possiamo allora trovare un intorno aperto U' di x_0 in U ed un diffeomorfismo $\psi' : U' \rightarrow V'$ su un intorno aperto V' di 0 in \mathbb{R}_ξ^n tale che $\psi'_*(\mathfrak{D}_{p-1}(U'))$ sia generato da $\frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^{p-1}}$. Quindi $\psi'_*(\mathfrak{D}(U'))$ è generato da campi di vettori:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^{p-1}}, \Xi_p = \sum_{h=p}^n \alpha^h(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi^h},$$

dove possiamo supporre che $\alpha^p(0) \neq 0$ e quindi, a meno di sostituire ad U' un intorno aperto più piccolo di x_0 , che $\alpha^p(\xi) \neq 0$ per $\xi \in V'$. Poiché $\psi'_*(\mathfrak{D}(U'))$ è un $\mathcal{C}^\infty(V')$ -modulo, a meno di dividere Ξ_p a sinistra per $\alpha^p(\xi)$, possiamo supporre sia:

$$\Xi_p = \frac{\partial}{\partial \xi^p} + \sum_{h=p+1}^n \alpha^h(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi^h}.$$

Il fatto che $\psi'_*(\mathfrak{D}(U'))$ sia completamente integrabile ci dà allora:

$$\frac{\partial \alpha^h(\xi)}{\partial \xi^j} = 0 \quad \text{per } j = 1, \dots, p-1.$$

Questo ci dice che le α^h sono localmente costanti rispetto alle variabili ξ^1, \dots, ξ^{p-1} . Possiamo supporre che l'aperto V' sia della forma $V' = V'_1 \times V'_2$, con V'_1 intorno aperto di 0 in $\mathbb{R}_{\xi^1, \dots, \xi^{p-1}}^{p-1}$ e V'_2 intorno aperto di 0 in $\mathbb{R}_{\xi^p, \dots, \xi^n}^{n-p+1}$. Applichiamo la Proposizione II.4.1 al campo di vettori $\frac{\partial}{\partial \xi^p} + \sum_{h=p+1}^n \alpha^h(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi^h}$ in V'_2 . Esiste quindi un diffeomorfismo $\tau : V'_2 \rightarrow W_2$ di un intorno aperto V''_2 di 0 in \mathbb{R}^{n-p+1} su un intorno W_2 di 0 in $\mathbb{R}_{\eta^p, \dots, \eta^n}^{n-p+1}$ per cui risulti $\tau_*\left(\frac{\partial}{\partial \xi^p} + \sum_{h=p+1}^n \alpha^h(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi^h}\right) = \frac{\partial}{\partial \eta^p}$.

Consideriamo ora l'intorno aperto $U'' = \psi^{-1}(V'_1 \times V''_2)$ e l'applicazione $\phi : U'' \ni x \rightarrow y \in V'_1 \times W_2 \subset \mathbb{R}^n$ definita da:

$$\begin{cases} y^i = \psi^i(x) & \text{se } 1 \leq i \leq p-1 \\ y^i = \tau^i(\psi^d(x), \dots, \psi^n(x)) & \text{se } p \leq i \leq n. \end{cases}$$

Quest'applicazione verifica la tesi della Proposizione. \square

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA II.9.8. Sia $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo che trasforma un intorno aperto di x_0 in Ω in un intorno di 0 in \mathbb{R}^n della forma $V = \{|y^i| < r^i, |y''^i| < r''^i\}$, ove $y' = (y^1, \dots, y^p)$, $y'' = (y^{p+1}, \dots, y^n)$, ed r^i, r''^i sono numeri reali positivi, e per cui $\phi_*(\mathfrak{D}(U)) = \mathcal{C}^\infty(V)[\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^p}]$. Allora le $\{\phi^{p+1}(x) = k_{p+1}, \dots, \phi^n(x) = k_n\}$, al variare di (k_{p+1}, \dots, k_n) nella palla di centro 0 e raggio r'' di \mathbb{R}^{n-p} , sono le varietà integrali di $\mathfrak{D}(U)$ in U . \square

II.10. Integrali primi

Discutiamo in questo paragrafo una generalizzazione del teorema di Frobenius, che ci sarà utile nel seguito.

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e sia $\mathfrak{D}(\Omega)$ una distribuzione regolare di p -piani in Ω .

Definizione II.10.1. Sia $F = (F^1, \dots, F^k) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Diciamo che $F = 0$ è un *integrale primo* di $\mathfrak{D}(\Omega)$ se:

$$(2.10.1) \quad XF(x) = 0 \quad \text{se } X \in \mathfrak{D}(\Omega), \quad x \in \Omega \quad \text{ed } F(x) = 0;$$

$$(2.10.2) \quad \text{lo Jacobiano } \frac{\partial F(x)}{\partial x} \quad \text{ha rango } k \text{ se } x \in \Omega \text{ ed } F(x) = 0.$$

Vale il:

Teorema II.10.2. *Sia $F = 0$ un integrale primo di $\mathfrak{D}(\Omega)$. Se:*

$$(2.10.3) \quad [X, Y](x) \in \mathfrak{D}_x \quad \forall X, Y \in \mathfrak{D}(\Omega), \quad \forall x \in \{F(x) = 0\} \cap \Omega,$$

allora ogni punto $x_0 \in \{F(x) = 0\} \cap \Omega$ è contenuto in una varietà integrale di dimensione p di $\mathfrak{D}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $x_0 \in \Omega$ un punto in cui $F(x_0) = 0$. Per il Lemma I.6.2 del Capitolo I, possiamo trovare un intorno aperto U di x_0 in Ω , un intorno V di 0 in \mathbb{R}^n , e un diffeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ con $\phi(x_0) = 0$ tale che $\phi(\{F(x) = 0\} \cap U) = \{y^j = 0 \mid 1 \leq j \leq k\} \cap V$. Consideriamo $\tilde{\mathfrak{D}}(V) = \phi_*(\mathfrak{D}(U))$. Se $Y = \sum_{j=1}^n a_Y^j(y) \frac{\partial}{\partial y^j}$, abbiamo per ipotesi:

$$a_Y^j = Y(y^j) = 0 \quad \text{per } 1 \leq j \leq k \text{ se } Y \in \tilde{\mathfrak{D}}(V) \text{ e } y^i = 0 \text{ per } 1 \leq i \leq k.$$

Consideriamo ora l'aperto $G = \{z \in \mathbb{R}^{n-p} \mid (0, z) \in V\}$ di \mathbb{R}^{n-p} . I campi di vettori $\sum_{j=1}^{n-k} a_Y^{k+h} \frac{\partial}{\partial z^h}$, al variare di Y in $\tilde{\mathfrak{D}}(V)$, definiscono una distribuzione completamente integrabile $\hat{\mathfrak{D}}(G)$ di p -piani di G . Per il Teorema II.9.8 esiste una varietà integrale \hat{S} di dimensione p di $\hat{\mathfrak{D}}(G)$ passante per 0. Allora $\tilde{S} = \{(0, z) \mid z \in \hat{S}\}$ è una varietà integrale di dimensione p di $\tilde{\mathfrak{D}}(V)$ passante per l'origine e contenuta in $\{y^j = 0 \mid 1 \leq j \leq k\}$. Infine, $S = \phi^{-1}(\tilde{S})$ è una varietà integrale di $\mathfrak{D}(\Omega)$, di dimensione p , passante per x_0 e contenuta in $\{F = 0\}$. \square

CAPITOLO III

Varietà topologiche e varietà differenziabili

III.1. Paracompattezza e partizione dell'unità

Sia X uno spazio topologico.

Definizione III.1.1. Se $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ e $\mathcal{V} = \{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ sono due ricoprimenti di X , diciamo che \mathcal{V} è un *raffinamento* di \mathcal{U} se per ogni $i \in I$ esiste un indice $\alpha_i \in A$ tale che $V_{\alpha_i} \subset U_i$. Una funzione $i \rightarrow \alpha_i$ con $V_{\alpha_i} \subset U_i$ per ogni $i \in I$ si dice una *funzione di raffinamento*.

Una famiglia $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ di sottoinsiemi di X si dice *localmente finita* se per ogni punto x di X esiste un intorno aperto U_x di x in X tale che $\{i \in I \mid A_i \cap U_x \neq \emptyset\}$ sia finito.

Definizione III.1.2. Lo spazio topologico X si dice *paracompatto*¹ se verifica l'assioma di separazione di Hausdorff, e se ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento aperto localmente finito.

Ricordiamo, senza darne la dimostrazione², le principali proprietà degli spazi paracompatti:

Teorema III.1.3. *Ogni spazio paracompatto è normale.*

Su uno spazio paracompatto X valgono cioè le due proprietà di separazione:

- (1) Se $x \neq y$ sono due punti distinti di X , allora esistono due intorni aperti, U_x di x e U_y di y , tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$;
- (2) Se A, B sono due chiusi di X con $A \cap B = \emptyset$, allora esistono due aperti U, V di X tali che $A \subset U, B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Teorema III.1.4. *Ogni sottospazio chiuso di uno spazio paracompatto è paracompatto.*

Definizione III.1.5. Sia X uno spazio topologico ed $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un suo ricoprimento aperto. Una *partizione continua dell'unità su X subordinata ad \mathcal{U}* è una famiglia $\{\phi_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ di funzioni reali continue su X che godano delle seguenti proprietà:

$$(i) \quad \phi_i(x) \geq 0, \quad \forall x \in X, \quad \forall i \in I,$$

¹Questo concetto fu introdotto nel 1944 da J. Dieudonné (*Une généralization des espaces compacts, J. Math. Pures Appl.* **23**, pp. 65-76).

²cf. Cap. 2-§11 di J.G.Hocking, G.S.Joung *Topology*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading, Massachusetts, 1961, oppure Cap IX-§4.3,4.4 di N.Bourbaki *General Topology* Hermann, Paris, 1966.

$$(ii) \quad \text{supp } \phi_i = \overline{\{x \in X \mid \phi_i(x) \neq 0\}} \subset U_i, \quad \forall i \in I,$$

$$(iii) \quad \{\text{supp } \phi_i \mid i \in I\} \text{ è localmente finita,}$$

$$(iv) \quad \sum_{i \in I} \phi_i(x) = 1, \quad \forall x \in X.$$

Osserviamo che la somma in (iv) è ben definita perché per la (iii) per ciascun punto $x \in X$ vi è un intorno aperto U_x in cui solo un numero finito di addendi siano non nulli.

Teorema III.1.6. *Sia X uno spazio di Hausdorff. Sono equivalenti:*

(A) X è paracompatto.

(B) Per ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} di X esiste una partizione continua dell'unità su X subordinata ad \mathcal{U} .

Teorema III.1.7. *Sia X uno spazio di Hausdorff, localmente compatto.*

(a) Se X è unione numerabile di compatti, allora X è paracompatto.

(b) Se X è connesso e paracompatto, allora X è unione numerabile di compatti.

Teorema III.1.8. *Ogni spazio di Hausdorff, localmente compatto e a base numerabile, è paracompatto.*

Teorema III.1.9 (Stone³). *Ogni spazio topologico metrizzabile è paracompatto.*

III.2. Varietà topologiche

Definizione III.2.1. Uno spazio topologico X si dice *localmente euclideo di dimensione n* se ogni punto p di X ammette un intorno U omeomorfo ad \mathbb{R}^n .

Poiché ogni punto di \mathbb{R}^n ha un sistema fondamentale di intorni aperti che sono omeomorfi ad \mathbb{R}^n , dire che un punto p di X ammette un intorno omeomorfo ad \mathbb{R}^n è equivalente a dire che esso ammette un intorno omeomorfo ad un qualsiasi aperto di \mathbb{R}^n .

Definizione III.2.2. Una *carta locale di dimensione n* di X è il dato di un aperto U di X , di un aperto V di \mathbb{R}^n , e di un omeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$. Se $0 \in V$ e $p_0 \in U$ è il punto per cui $\phi(p_0) = 0$, chiameremo p_0 il suo *centro*.

Definizione III.2.3. Una *varietà topologica di dimensione n* è uno spazio topologico X paracompatto e localmente Euclideo di dimensione n .

Per il Teorema III.1.8 la paracompattatezza si può descrivere in modo equivalente richiedendo che X sia di Hausdorff e che ogni sua componente connessa sia *numerabile all'infinito*. Ciò significa che, per ogni componente connessa Y di X , si può trovare una successione $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di sottoinsiemi compatti di Y tali che $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ per ogni intero $n \geq 0$ ed $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

³Paracompactness and product spaces in Bull. A.M.S. **54** (1948), pp. 977-982. Osserviamo che il prodotto di due spazi paracompatti può non essere paracompatto.

Definizione III.2.4. Sia M una varietà topologica di dimensione n ed $U_i \xrightarrow{\phi_i} V_i \subset \mathbb{R}^n$, per $i = 1, 2$, due carte locali in M . Se $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, allora $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ e $\phi_2(U_1 \cap U_2)$ sono aperti di \mathbb{R}^n e

$$(3.2.1) \quad \phi_{2,1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \ni x \rightarrow \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x) \in \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

è un omeomorfismo tra aperti di \mathbb{R}^n , che si dice la *funzione di transizione* dalla carta $U_1 \xrightarrow{\phi_1} V_1$ alla carta $U_2 \xrightarrow{\phi_2} V_2$.

Definizione III.2.5. Un *atlante* di M è una famiglia $\mathcal{A} = \{U_i \xrightarrow{\phi_i} V_i \subset \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$ di carte locali in M tale che $\bigcup_{i \in I} U_i = M$. Poniamo:

$$(3.2.2) \quad V_{i,j} = \phi_j(U_i \cap U_j) \subset V_j \quad \text{e}$$

$$(3.2.3) \quad \phi_{i,j} : V_{i,j} \ni x \rightarrow \phi_i \circ \phi_j^{-1}(x) \in V_{j,i}.$$

Le $(\phi_{i,j})$ così definite si dicono *le funzioni di transizione* dell'atlante \mathcal{A} .

Le funzioni di transizione soddisfano le relazioni di compatibilità

$$(3.2.4) \quad \phi_{i,i} = \text{id}_{U_i}, \quad \phi_{i,j} \circ \phi_{j,k}(x) = \phi_{i,k}(x), \quad \forall x \in \phi_k(U_i \cap U_j \cap U_k).$$

Teorema III.2.6. *Ogni varietà topologica è localmente compatta e metrizzabile.*

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue dal fatto che gli spazi Euclidei \mathbb{R}^n sono localmente compatti. Per quanto riguarda la seconda, basta osservare che ogni componente connessa di una varietà topologica è a base numerabile ed ogni spazio regolare a base numerabile è metrizzabile; se indichiamo con X_i , $i \in I$ le componenti connesse di X e con $d_i : X_i \times X_i \rightarrow \mathbb{R}$ una distanza che definisce la topologia di X_i , possiamo definire la distanza in X ponendo

$$x, y \in X, \quad x \in X_i, y \in X_j \implies d(x, y) = \begin{cases} d_i(x, y) & \text{se } i = j, \\ 1 + d_i(x, y) & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

□

III.3. Alcuni esempi

Esempio III.3.1. Ogni sottoinsieme aperto X di \mathbb{R}^n è una varietà topologica di dimensione n .

Esempio III.3.2. Sia A un aperto di \mathbb{R}^n ($n \geq 1$), con $\emptyset \neq A \neq \mathbb{R}^n$ e sia X il quoziente di $\mathbb{R}^n \times \{0, 1\}$ che si ottiene identificando i punti $(x, 0)$ ed $(x, 1)$ se $x \in A$. Lo spazio topologico X è localmente Euclideo di dimensione n , ma non è una varietà topologica perché non è di Hausdorff: i punti $(x, 0)$ ed $(x, 1)$, per x sulla frontiera ∂A di A , definiscono nel quoziente X elementi distinti che non ammettono intorni disgiunti.

Esempio III.3.3. Su $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ consideriamo la relazione di equivalenza che identifica due punti $(x, 0)$ ed $(x, 1)$ se $x \leq 0$. Il quoziente X è uno spazio di Hausdorff, ma non è localmente Euclideo, perché il punto x_0 di X corrispondente a $\{(0, 0), (0, 1)\}$ non ha un intorno omeomorfo ad \mathbb{R} . Infatti, se U è un intorno aperto di x_0 in X , allora $U \setminus \{x_0\}$ ha almeno tre componenti connesse.

Esempio III.3.4. Sia X lo spazio topologico ottenuto considerando su \mathbb{R}^2 la topologia definita dall'ordine lessicografico:

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2, & \text{oppure} \\ x_1 = x_2 & \text{e } y_1 < y_2. \end{cases}$$

Ogni componente connessa di X è omeomorfa ad \mathbb{R} e quindi X è uno spazio localmente Euclideo di dimensione 1. La topologia dell'ordine lessicografico è indotta dalla distanza:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 \neq x_2 \\ \frac{|y_1 - y_2|}{1 + |y_1 - y_2|} & \text{se } x_1 = x_2. \end{cases}$$

Quindi X , essendo metrizzabile, è paracompatto e dunque una varietà topologica di dimensione 1.

Esempio III.3.5. Sia $X =]0, 1[\times]0, 1[$, ed “<” un buon ordinamento su $]0, 1[$, rispetto al quale $]0, 1[$ non ammetta massimo: in particolare per ogni $t \in]0, 1[$ vi è un elemento $t' \in]0, 1[$ (successivo di t) con $t < t'$ tale che $\{s \in]0, 1[\mid t < s < t'\} = \emptyset$.

Consideriamo su X la topologia dell'ordine relativa all'ordinamento totale:

$$(x, t) < (y, s) \Leftrightarrow \begin{cases} t < s & \text{oppure} \\ t = s & \text{e } x < y. \end{cases}$$

Chiaramente X è localmente euclideo di dimensione 1, è connesso e di Hausdorff, ma non è una varietà topologica perché non è paracompatto.

Esempio III.3.6. La sfera S^n è una varietà topologica di dimensione n . Siano x_0, \dots, x_n le coordinate cartesiane di \mathbb{R}^{n+1} e scriviamo

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1 \right\}.$$

Indichiamo poi con $p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proiezione sulle ultime n coordinate

$$\mathbb{R}^{n+1} \ni x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{p} x' = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

e siano

$$\begin{aligned} \phi_+ : U_+ = S^n \setminus \{-e_0\} \ni x &\longrightarrow \frac{1}{1+x_0} x' \in \mathbb{R}^n, \\ \phi_- : U_- = S^n \setminus \{e_0\} \ni x &\longrightarrow \frac{1}{1-x_0} x' \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

le proiezioni stereografiche rispetto al polo sud $-e_0$ ed al polo nord e_0 , rispettivamente. Allora $\mathcal{A} = \{(U_+, \phi_+), (U_-, \phi_-)\}$ è un atlante di S^n , formato da due carte locali di dimensione n . Le sue funzioni di transizione sono $\phi_{+-} = \phi_{-+} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni y \rightarrow y/|y|^2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Esempio III.3.7. Lo spazio proiettivo reale di dimensione n

$$\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim, \quad \text{ove } x \sim y \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}x,$$

è una varietà topologica di dimensione n . Indichiamo con $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ il punto di $\mathbb{R}P^n$ che corrisponde al punto (x_0, x_1, \dots, x_n) di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Le x_0, \dots, x_n sono sue

coordinate omogenee. Un atlante \mathcal{A} di $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ è descritto nelle coordinate omogenee dagli aperti

$$U_i = \{[x_0, x_1, \dots, x_n] \mid x_i \neq 0\} \quad \text{per } i = 0, 1, \dots, n$$

e dagli omeomorfismi

$$\begin{aligned} \phi_i : U_i \ni [x_0, x_1, \dots, x_n] &\longrightarrow (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \\ \text{ove } y_j &= \begin{cases} x_{j-1}/x_i & \text{se } 1 \leq j \leq i, \\ x_j/x_i & \text{se } i < j \leq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Esempio III.3.8. Lo spazio proiettivo complesso di dimensione n

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim, \quad \text{ove } z \sim w \Leftrightarrow w \in \mathbb{C}z,$$

è una varietà topologica di dimensione $2n$. Indichiamo con $[z_0, z_1, \dots, z_n]$ il punto di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ che corrisponde al punto (z_0, z_1, \dots, z_n) di $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Le z_0, \dots, z_n sono sue *coordinate omogenee*. Un atlante \mathcal{A} di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è descritto nelle coordinate omogenee dagli aperti

$$U_i = \{[z_0, z_1, \dots, z_n] \mid z_i \neq 0\} \quad \text{per } i = 0, 1, \dots, n$$

e dagli omeomorfismi

$$\begin{aligned} \phi_i : U_i \ni [z_0, z_1, \dots, z_n] &\longrightarrow (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}, \\ \text{ove } w_j &= \begin{cases} z_{j-1}/z_i & \text{se } 1 \leq j \leq i, \\ z_j/z_i & \text{se } i < j \leq n. \end{cases} \end{aligned}$$

III.4. Varietà topologiche con bordo

Definizione III.4.1. Una varietà topologica di dimensione n *con bordo* è uno spazio topologico paracompatto M in cui ogni punto ha un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$.

La parte interna $\overset{\circ}{M}$ di M è l'insieme dei punti di M che hanno un intorno omeomorfo ad \mathbb{R}^n . $\overset{\circ}{M}$ è una varietà topologica di dimensione n ed un aperto denso di M .

L'insieme $\partial M = M \setminus \overset{\circ}{M}$ è una varietà differenziabile di dimensione $(n-1)$ che si dice il *bordo* di M .

Un omeomorfismo $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}_+^n$ di un aperto U di M su un aperto $\phi(U)$ di \mathbb{R}_+^n si dice una *carta locale* in M .

Una collezione $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ di carte locali in M tali che $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ si dice un *atlante* di M .

Le varietà topologiche definite in §III.2 sono varietà a bordo con il bordo vuoto. Per questo le chiameremo anche *varietà senza bordo*.

III.5. Definizione di varietà differenziabile

Definizione III.5.1. Sia M una varietà topologica di dimensione n . Un atlante \mathcal{A} di M si dice di classe \mathcal{C}^k (ove k è un intero non negativo, oppure ∞ od ω) se le sue funzioni di transizione sono diffeomorfismi di classe \mathcal{C}^k .

Due atlanti \mathcal{A} ed \mathcal{A}' di classe \mathcal{C}^k di M si dicono \mathcal{C}^k -compatibili se $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ è ancora un atlante di classe \mathcal{C}^k .

Un atlante di classe \mathcal{C}^0 è semplicemente un atlante e tutti gli atlanti di classe \mathcal{C}^0 su M sono tra loro compatibili.

La relazione di compatibilità \mathcal{C}^k è una relazione di equivalenza nella famiglia degli atlanti di M .

Se \mathcal{A} è un atlante di classe \mathcal{C}^k su M , l'unione di tutti gli atlanti \mathcal{C}^k -compatibili con \mathcal{A} è ancora un atlante \mathcal{C}^k compatibile con \mathcal{A} ; esso è *massimale* nel senso che non è propriamente contenuto in nessun atlante di classe \mathcal{C}^k con esso compatibile.

Esempio III.5.2. Un atlante formato da una sola carta è sempre di classe \mathcal{C}^ω . Quindi i due atlanti $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, x)\}$ e $\mathcal{A}' = \{(\mathbb{R}, x^3)\}$ su \mathbb{R} sono atlanti di classe \mathcal{C}^ω sulla varietà topologica \mathbb{R} . Essi sono compatibili di classe \mathcal{C}^0 , ma non di classe \mathcal{C}^k per $k \geq 1$, perché la funzione di transizione $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ non è differenziabile in 0.

Definizione III.5.3. Una *varietà differenziabile di dimensione n* è il dato di una varietà topologica M di dimensione n e di un suo atlante massimale \mathcal{A} di classe \mathcal{C}^k .

Osservazione III.5.4. Una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^0 è semplicemente una varietà topologica.

Osservazione III.5.5. Non tutte le varietà topologiche (anche se di Hausdorff e paracompatte) ammettono un atlante differenziabile di classe \mathcal{C}^k con k positivo. Un esempio di varietà topologica su cui non può essere definita una struttura differenziale è stato dato da MICHEL A. KERVAIRE⁴ nel 1959.

HASSLER WHITNEY⁵ ha dimostrato che ogni varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^1 paracompatta ammette un atlante di classe \mathcal{C}^ω . Quando studiamo le proprietà *topologiche* di una varietà differenziabile M di classe \mathcal{C}^k con $k \geq 1$, potremo quindi supporre, senza perdere in generalità, che essa sia di classe \mathcal{C}^ω , o di una qualsiasi classe \mathcal{C}^h con $h \geq 1$ che sia utile nella discussione (vedi il §III.12).

Tutte le varietà differenziabili sono triangolabili, come è stato dimostrato da STEWART S. CAIRNS⁶, ma non tutte le varietà topologiche lo sono, come mostrato da LAURENCE C. SIEBENMANN⁷. Abbiamo quindi delle inclusioni proprie

Varietà topologiche \subsetneq Varietà triangolabili \subsetneq Varietà differenziabili.

⁴ A *Manifold which does not admit any Differentiable Structure*, Commentarii Mathematici Helvetici, **34** (1960), pp. 257-270.

⁵ *Differentiable Manifolds*, Annals of Mathematics **37** (3) (1936), pp. 645-680

⁶ *On the triangulation of regular loci*, Ann. of Math. (2) **35** (1934), no. 3, 579-587.

⁷ *Topological manifolds*. Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2, pp. 133-163. Gauthier-Villars, Paris, 1971

Infine, una varietà topologica triangolabile può avere due triangolazioni non equivalenti⁸.

Un atlante \mathcal{A} di classe \mathcal{C}^k su una varietà topologica M di dimensione n determina su M un'unica struttura di varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k . L'atlante massimale $\tilde{\mathcal{A}}$ corrispondente è formato da tutti e soli gli omeomorfismi $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ di un aperto U di M su un aperto V di \mathbb{R}^n tali che $\{(U, \varphi)\} \cup \mathcal{A}$ sia ancora un atlante di classe \mathcal{C}^k (equivalente ad \mathcal{A}). Ogni carta di tale atlante massimale si dice un *sistema di coordinate* (o *carta locale*) di classe \mathcal{C}^k di M .

Se (U, ϕ) è una carta locale di classe \mathcal{C}^k con centro in p e $\Psi : V \rightarrow V'$ è un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^k tra due intorni aperti di 0 in \mathbb{R}^n , con $\Psi(0) = 0$, allora anche $(U \cap \phi^{-1}(V), \Psi \circ \phi)$ è una carta locale di classe \mathcal{C}^k con centro in p .

Un atlante di classe \mathcal{C}^k è anche di classe \mathcal{C}^h per ogni $0 \leq h < k$. Definisce quindi su M un'unica struttura di *varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^h* . In particolare, possiamo considerare una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k come varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^h per ogni $h \leq k$.

Esempio III.5.6. Gli atlanti definiti nel paragrafo §III.2 per le varietà topologiche $S^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$ sono tutti di classe \mathcal{C}^ω .

Lemma III.5.7. Sia M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k (con $0 \leq k \leq \omega$) ed A un aperto di M . Se $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ è un atlante di classe \mathcal{C}^k su M , allora

$$\mathcal{A}_A = \{(U_i \cap A, \phi_i|_{U_i \cap A} \mid i \in I, U_i \cap A \neq \emptyset\}$$

è un atlante di classe \mathcal{C}^k su A .

Quindi, su ogni aperto A di una varietà differenziabile M risulta definita un'unica struttura di varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k tale che ogni carta locale di classe \mathcal{C}^k di A sia anche una carta locale di classe \mathcal{C}^k di M . Con la struttura differenziale così definita, diciamo che A è una *sottovarietà aperta* di M .

In modo del tutto analogo si possono definire le varietà differenziabili con bordo.

Definizione III.5.8. Sia M una varietà topologica con bordo. Un atlante \mathcal{A} di M è di classe \mathcal{C}^k se le sue funzioni di transizione sono di classe \mathcal{C}^k . Due atlanti di classe \mathcal{C}^k sono equivalenti se la loro unione è ancora un atlante di classe \mathcal{C}^k . Una struttura differenziale di classe \mathcal{C}^k su M è il dato di una classe di equivalenza di atlanti \mathcal{C}^k su M .

III.6. Applicazioni differenziabili

In questo paragrafo introduciamo la nozione di applicazione differenziabile tra varietà.

⁸ ROBION C. KIRBY, LAURENCE C. SIEBENMANN: *Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations. With notes by John Milnor and Michael Atiyah*, Annals of Mathematics Studies, No. 88. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1977. vii+355 pp.

Lemma III.6.1. *Sia $f : M \rightarrow N$ un'applicazione continua tra due varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^k e sia $p \in M$. Sono equivalenti:*

- (i) *Possiamo trovare una carta locale (U, φ) in p ed una carta locale (V, ψ) in $f(p)$ tali che*

$$f(U) \subset V \quad e \quad \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^k(\varphi(U), \psi(V)).$$

- (ii) *Per ogni carta locale (U, φ) in p e per ogni carta locale (V, ψ) in $f(p)$*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^k(\varphi(U \cap f^{-1}(V)), \psi(V)).$$

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente (ii) \implies (i). L'implicazione opposta segue dal fatto che i cambiamenti di carte locali sono applicazioni di classe \mathcal{C}^k e la composizione di applicazioni di classe \mathcal{C}^k sono ancora applicazioni di classe \mathcal{C}^k . \square

Definizione III.6.2. Un'applicazione continua $f : M \rightarrow N$ che soddisfi le condizioni equivalenti del lemma, si dice *differenziabile di classe \mathcal{C}^k in p* . Un'applicazione f si dice *differenziabile di classe \mathcal{C}^k in M* se è tale in ogni punto di M .

L'insieme di tutte le applicazioni differenziabili di classe \mathcal{C}^k definite sulla varietà differenziabile M , a valori nella varietà differenziabile N , si indica con $\mathcal{C}^k(M, N)$.

Vale il seguente:

Lemma III.6.3. *Siano M, N varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^k ($0 \leq k \leq \omega$) ed $f : M \rightarrow N$ un'applicazione. Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di M . Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia differenziabile di classe \mathcal{C}^k su M è che per ogni aperto $U \in \mathcal{U}$ la restrizione $f|_U : U \rightarrow N$ di f alla sottovarietà aperta U sia differenziabile di classe \mathcal{C}^k .*

III.7. Funzioni reali differenziabili e partizione dell'unità

Consideriamo sulla retta reale \mathbb{R} la struttura di varietà differenziabile di dimensione 1 definita dall'unica carta coordinata (\mathbb{R}, id) . L'insieme $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R})$ delle applicazioni differenziabili di classe \mathcal{C}^k , definite su una varietà differenziabile M di classe \mathcal{C}^k e a valori in \mathbb{R} , si indica semplicemente con $\mathcal{C}^k(M)$. Se $k = \infty$, scriveremo a volte $\mathcal{E}(M)$ invece di $\mathcal{C}^\infty(M)$ e se $k = \omega$ (funzioni analitiche–reali), scriveremo a volte $\mathcal{A}(M)$ invece di $\mathcal{C}^\omega(M)$.

Teorema III.7.1. *Sia M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k , ($0 \leq k \leq \omega$). L'insieme $\mathcal{C}^k(M)$ delle funzioni reali di classe \mathcal{C}^k su M è un anello commutativo e unitario e un'algebra reale rispetto alle operazioni*

- (1) *di somma:*

$$(f + g)(p) = f(p) + g(p) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^k(M), \quad \forall p \in M;$$

- (2) *di prodotto:*

$$(fg)(p) = f(p)g(p) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^k(M), \quad \forall p \in M;$$

(3) di prodotto per scalare:

$$(kf)(p) = kf(p) \quad \forall f \in \mathcal{C}^k(M), \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall p \in M.$$

Teorema III.7.2 (di partizione dell'unità). *Sia M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k , ($0 \leq k \leq \infty$), paracompatta. Sia $\mathcal{U} = \{U_j \mid j \in J\}$ un ricoprimento aperto di M . Allora esiste una partizione dell'unità $\{\phi_j\}_{j \in J}$, subordinata⁹ ad \mathcal{U} , mediante funzioni ϕ_j di $\mathcal{C}^k(M)$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ un raffinamento aperto localmente finito di \mathcal{U} mediante aperti coordinati (V_i, x_i) di M , con \bar{V}_i compatto, e sia $\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in I\}$ un raffinamento di \mathcal{V} , con

$$W_i \subset \bar{W}_i \Subset V_i \Subset U_{j_i}$$

per un'opportuna funzione di raffinamento $i \rightarrow j_i$.

Per ogni $i \in I$ fissiamo un aperto G_i con $W_i \Subset G_i \Subset V_i$. Per la Proposizione I.4.7 del Capitolo I, esiste per ogni $i \in I$ una funzione $g_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\begin{cases} 0 \leq g_i(y) \leq 1 & \forall y \in \mathbb{R}^n, \\ g_i(y) = 1 & \forall y \in x_i(\bar{W}_i), \\ g_i(y) = 0 & \forall y \notin x_i(G_i). \end{cases}$$

Le funzioni

$$h_i(p) = \begin{cases} g_i(x_i(p)) & \text{se } p \in V_i, \\ 0 & \text{se } p \notin G_i \end{cases}$$

sono allora di classe \mathcal{C}^k su M ; i loro supporti formano un ricoprimento localmente finito di M ed inoltre anche $\{h_i^{-1}(1) \mid i \in I\}$ è un ricoprimento chiuso localmente finito di M . Ne segue che

$$h(p) = \sum_{i \in I} h_i(p), \quad p \in M$$

è una funzione reale di classe \mathcal{C}^k , che assume valori ≥ 1 su M . Quindi le

$$\psi_i(p) = \frac{h_i(p)}{h(p)}, \quad p \in M, \quad i \in I,$$

formano una partizione dell'unità di classe \mathcal{C}^k su M . Per ogni $j \in J$ sia I_j l'insieme degli indici $i \in I$ tali che $j_i = j$. Allora le

$$\phi_j(p) = \sum_{i \in I_j} \psi_i(p)$$

sono funzioni di classe \mathcal{C}^k che definiscono una partizione dell'unità su M subordinata ad \mathcal{U} . \square

Come conseguenza dell'esistenza di partizioni dell'unità, otteniamo:

⁹Ricordiamo che questo significa che $\{\text{supp } \phi_j\}_{j \in J}$ è un ricoprimento chiuso localmente finito di M , con $\text{supp } \phi_j \subset U_j$ per ogni $j \in J$ e che $\sum_{i \in I} \phi_j(p) = 1$ per ogni $p \in M$.

Proposizione III.7.3. *Sia F un chiuso di una varietà differenziabile M , di classe \mathcal{C}^k con $0 \leq k \leq \infty$, paracompatta. Se U è un intorno aperto di F in M , esiste una funzione $f \in \mathcal{C}^k(M)$ tale che*

$$0 \leq f(p) \leq 1, \quad \forall p \in M, \quad f(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in F, \\ 0 & \text{se } p \notin U. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché M è normale, possiamo fissare un intorno aperto V di F in U la cui chiusura \bar{V} sia ancora contenuta in U . Consideriamo il ricoprimento aperto $\{U, \mathbb{C}\bar{V}\}$. Per il Teorema III.7.2 esiste una partizione dell'unità $\{f, g\}$, con $f, g \in \mathcal{C}^k(M)$, $\text{supp } f \subset U$, $\text{supp } g \cap \bar{V} = \emptyset$. La f è uguale ad 1 su V e quindi su F ed è nulla fuori da U e perciò soddisfa la tesi. \square

Lemma III.7.4. *Sia M una varietà differenziabile, paracompatta e a base numerabile, di classe \mathcal{C}^k con $0 \leq k \leq \infty$. Se $\{f_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ è una successione di funzioni di classe \mathcal{C}^k in M , possiamo trovare una successione $\{\epsilon_\nu\}$ di numeri positivi tali che la serie*

$$(3.7.1) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon_\nu f_\nu$$

converga uniformemente sui compatti di M ad una funzione di classe \mathcal{C}^k .

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un atlante $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i) \mid i \in I \subset \mathbb{N}\}$ di M con $U_i \in M$ ed $\{U_i\}_{i \in I}$ localmente finito, e sia $\{V_i\}_{i \in I}$ un raffinamento di $\{U_i\}$ con $\bar{V}_i \in U_i$. Scegliamo poi le $\epsilon_\nu > 0$ in modo tale che

$$\sum_{j \leq \nu} \sum_{|\beta| \leq \min\{k, \nu\}} \sum_{i \in I, i \leq \nu} \sup_{x_i(\bar{V}_i)} \left| \frac{\partial^{|\beta|} f_j}{\partial x_\alpha^\beta} \right| < \frac{2^{-\nu}}{\epsilon_\nu}.$$

La scelta è possibile perché per ogni ν il primo membro è una somma finita di estremi superiori di funzioni continue su sottoinsiemi compatti. Con questa scelta degli ϵ_ν , per ogni $i \in I$ la serie $\sum_{\nu} \epsilon_\nu f_\nu \circ x_i^{-1}$ di funzioni di $\mathcal{C}^k(x_i(U_i))$ converge uniformemente con tutte le derivate fino all'ordine k (con tutte le derivate se $k = \infty$) su tutti i compatti di $x_i(U_i) \subset \mathbb{R}^m$. Questo implica che la serie (3.7.1) converge, uniformemente sui compatti di M , a una funzione di classe \mathcal{C}^k su M . \square

Osservazione III.7.5. L'enunciato del Lemma III.7.4 non è valido se $k = \omega$. Siano ad esempio $M = \mathbb{R}$ ed $\{f_\nu = (1 + \nu^2 x^2)^{-1}\}$. Sia $f = \sum_{\nu \geq 0} \epsilon_\nu (1 + \nu^2 x^2)^{-1}$ per una serie convergente con $\epsilon_\nu > 0$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$. In particolare, la serie $\sum_{\nu \geq 0} \epsilon_\nu$ è convergente e quindi la f definisce una funzione analitica su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, che si estende a una funzione olomorfa nell'intorno $U = \{z \in \mathbb{C} \mid iz \notin \mathbb{Z}\}$ di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ in \mathbb{C} , ed in esso coincide con la funzione $F = \sum_{\nu \geq 0} \epsilon_\nu (1 + \nu^2 z^2)$, meromorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e con poli semplici nei punti $\pm i/\nu$ per $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Se f fosse analitica in 0, la sua serie di potenze con centro in 0 convergerebbe in un intorno V di 0 in \mathbb{C} ad una funzione olomorfa G . Poiché $F = G$ su $U \cap V$ per l'unicità della continuazione analitica, abbiamo ottenuto una contraddizione perché F ha una singolarità essenziale in 0.

Proposizione III.7.6. *Se F è un chiuso di una varietà differenziabile M , paracompatta e a base numerabile, di classe \mathcal{C}^k con $0 \leq k \leq \infty$, allora esiste un'applicazione $f \in \mathcal{C}^k(M)$ tale che $0 \leq f(p) \leq 1$ per ogni $p \in M$ ed $f^{-1}(0) = F$.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che M , essendo normale e a base numerabile è metrizzabile. Sia $\text{dist} : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ una distanza su M e consideriamo gli intorni $U_\nu = \{p \in M \mid \text{dist}(p, F) < 2^{-\nu}\}$, al variare di ν in \mathbb{N} , di F in M . Per la Proposizione III.7.3 esiste una funzione $f_\nu \in \mathcal{C}^k(M)$ tale che

$$0 \leq f_\nu(p) \leq 1 \quad \forall p \in M, \quad K \subset f^{-1}(0), \quad \bigcup U_\nu \subset f^{-1}(1).$$

Per il Lemma III.7.4 Possiamo allora scegliere una successione ϵ_ν di numeri reali positivi tale che

$$f(p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon_\nu f_\nu(p)$$

converga ad una funzione di classe $\mathcal{C}^k(M)$. La $f \in \mathcal{C}^k(M)$ così ottenuta ha allora le proprietà richieste. \square

In modo analogo si può dimostrare la:

Proposizione III.7.7. *Sia M una varietà differenziabile, paracompatta e a base numerabile, di classe \mathcal{C}^k , con $0 \leq k \leq \infty$. Se F_0 ed F_1 sono due chiusi disgiunti di M , allora esiste una $f \in \mathcal{C}^k(M)$ tale che $0 \leq f(p) \leq 1$ per ogni $p \in M$ ed $f^{-1}(0) = F_0$, $f^{-1}(1) = F_1$.* \square

Osservazione III.7.8. Il teorema di partizione dell'unità non vale nella classe \mathcal{C}^ω : infatti una funzione analitica-reale che si annulli su un aperto di una varietà M si annulla sull'unione delle componenti connesse di M che lo intersecano. Per questo motivo, nonostante per il teorema di Whitney ogni varietà M , differenziabile di classe \mathcal{C}^1 e paracompatta, ammetta un atlante compatibile di classe \mathcal{C}^ω , è conveniente considerare strutture di classe \mathcal{C}^k con $1 \leq k \leq \infty$.

Definizione III.7.9. Siano M ed N varietà differenziabili ed F un sottoinsieme chiuso di M . Sia $0 \leq k \leq \omega$. Un'applicazione continua $f : F \rightarrow N$ si dice *differenziabile di classe \mathcal{C}^k su F* se per ogni punto $p \in F$ esiste un intorno aperto U_p di p in M ed una funzione $\tilde{f} \in \mathcal{C}^k(U_p, N)$ tale che $\tilde{f}|_{U_p \cap F} = f|_{U_p \cap F}$.

Indichiamo con $\mathcal{C}^k(F, N)$ l'insieme delle funzioni differenziabili di classe \mathcal{C}^k di F in N . Se $N = \mathbb{R}$, scriveremo $\mathcal{C}^k(F)$ invece di $\mathcal{C}^k(F, \mathbb{R})$.

Proposizione III.7.10. *Sia M una varietà differenziabile paracompatta ed F un chiuso di M . Allora, per ogni $f \in \mathcal{C}^k(F)$, con $0 \leq k \leq \infty$, esiste una funzione $\tilde{f} \in \mathcal{C}^k(M)$ tale che $\tilde{f}|_F = f$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ di F con aperti tali che per ogni $i \in I$ esista una $f_i \in \mathcal{C}^k(U_i)$ tale che $f_i(p) = f(p)$ su $U_i \cap F$. Consideriamo una partizione dell'unità $\{\phi_i\} \cup \{\psi\}$ subordinata al ricoprimento aperto $\{U_i\} \cup \{\complement F\}$ di M . Per ogni i poniamo

$$\tilde{f}_i(p) = \begin{cases} \phi_i(p)f_i(p) & \text{se } p \in U_i, \\ 0 & \text{se } p \in \complement U_i. \end{cases}$$

Allora $\tilde{f}_i \in \mathcal{C}^k(U_i)$ ed $\tilde{f} = \sum_{i \in I} \tilde{f}_i \in \mathcal{C}^k(M)$ è il prolungamento di f cercato. \square

Teorema III.7.11 (di approssimazione). *Sia M una varietà differenziabile para-compatta, F un suo sottoinsieme chiuso ed $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua, la cui restrizione ad F sia di classe \mathcal{C}^k , con $0 \leq k \leq \infty$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un'applicazione $g \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^n)$ tale che*

$$(3.7.2) \quad g(p) = f(p), \quad \forall p \in F,$$

$$(3.7.3) \quad |g(p) - f(p)| < \epsilon, \quad \forall p \in M.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la proposizione III.7.10, applicata ad ogni componente di f , esiste una $\tilde{f} \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^n)$ con $\tilde{f}|_F = f|_F$. Costruiamo un ricoprimento aperto di M nel modo seguente. Poniamo

$$U_0 = \{p \in M \mid |\tilde{f}(p) - f(p)| < \epsilon\}.$$

U_0 è un intorno aperto di F in M . Poi, per ogni punto $p \in \mathbb{C}F$, sia

$$U_p = \{q \in M \mid |f(p) - f(q)| < \epsilon\}.$$

Allora $\mathcal{U} = \{U_0\} \cup \{U_p \mid p \in \mathbb{C}F\}$ è un ricoprimento di M . Sia $\{\phi_0\} \cup \{\phi_p\}$ una partizione dell'unità di classe \mathcal{C}^k subordinata ad \mathcal{U} . Poniamo

$$\psi_0 = \begin{cases} \phi_0 \cdot \tilde{f} & \text{su } U_0, \\ 0 & \text{su } \mathbb{C}U_0, \end{cases} \quad \psi_p = \begin{cases} \phi_p \cdot f(p) & \text{su } U_p, \\ 0 & \text{su } \mathbb{C}U_p. \end{cases}$$

Allora $\psi_0, \psi_p \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^n)$ e

$$g(p) = \psi_0(p) + \sum_{q \in \mathbb{C}F} \psi_q(p)$$

è un'applicazione in $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^n)$ che soddisfa le (3.7.2), (3.7.3). \square

Corollario III.7.12. *Sia M una varietà differenziabile connessa di classe \mathcal{C}^k , con $1 \leq k \leq \infty$. Allora ogni coppia di punti di M può essere congiunta da una curva di classe \mathcal{C}^k .*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un qualsiasi punto p_0 e sia N il sottoinsieme dei punti di M che possono essere congiunti a p_0 da una curva di classe \mathcal{C}^k . Chiaramente $p_0 \in N$ e quindi N è non vuoto. Per dimostrare che $N = M$, dobbiamo dimostrare che è aperto e chiuso. A questo scopo, basterà dimostrare che, dato un qualsiasi punto $p_1 \in M$, esiste un intorno U di p_1 in M tale che, per ogni curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$, di classe \mathcal{C}^k , con $\gamma(1) = p_1$ ed ogni punto p_2 di U , possiamo trovare una $\tilde{\gamma} : [0, 2] \rightarrow U$ con $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ per $0 \leq t \leq 1$ e $\tilde{\gamma}(2) = p_2$.

Infatti, da questo segue che, se $p_1 \in N$, tutto l'intorno U è contenuto in N e dunque N è aperto. Se $p_1 \in \bar{N}$, l'intorno U di p_1 contiene qualche punto di N e quindi $p_1 \in N$ e ciò mostra che N è chiuso.

Scegliamo una carta locale (U, x) , con centro in p_1 ed $x(U) = \mathbb{R}^m$. Sia $\gamma \in \mathcal{C}^k([0, 1], U)$, con $\gamma(1) = p_1$. Utilizzando la Proposizione III.7.10, possiamo supporre che $x \circ \gamma$ sia la restrizione a $[0, 1]$ di una funzione $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. Se p_2 è un altro punto di U , sia $x_2 = x(p_2)$ e $g(t) = x_2(t - 1)$. Sia poi $\{\phi_1, \phi_2\}$ una partizione dell'unità su \mathbb{R} , subordinata al ricoprimento $\{V_1 = \{t < 2\}, V_2 = \{t > 1\}\}$. Allora

$\eta(t) = \phi_1(t)f(t) + \phi_2(t)g(t)$ definisce una funzione $\eta \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, con $\eta(t) = f(t)$ se $t \leq 1$ ed $\eta(2) = x_2$. Definiamo $\tilde{\gamma} \in \mathcal{C}^k([0, 2], U)$ ponendo

$$\tilde{\gamma}(t) = x^{-1}(\eta(t)), \quad \text{per } 0 \leq t \leq 2.$$

È $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ per $0 \leq t \leq 1$ e $\tilde{\gamma}(2) = p_2$. La dimostrazione è completa. \square

Teorema III.7.13 (interpolazione). *Sia M una varietà differenziabile paracompatta di classe \mathcal{C}^k , con $1 \leq k \leq \infty$, ed $f_1, f_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni reali, con f_1 semicontinua superiormente, f_2 semicontinua inferiormente ed $f_1(p) < f_2(p)$ per ogni $p \in M$. Allora esiste una funzione $f \in \mathcal{C}^k(M)$ tale che $f_1(p) < f(p) < f_2(p)$ per ogni $p \in M$.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni punto $q \in M$, l'insieme

$$A_q = \{p \in M \mid f_1(p) < f_2(q), f_2(p) > f_1(q)\}$$

è un intorno aperto di q in M . Fissiamo un intorno aperto relativamente compatto U_q di q in M con $U_q \Subset A_q$. Abbiamo

$$(3.7.4) \quad \mu_q = \sup_{p \in U_q} f_1(p) < \inf_{p \in U_q} f_2(p) = M_q.$$

Consideriamo il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_q \mid q \in M\}$ di M e sia $\{\phi_q\}$ una partizione dell'unità di classe \mathcal{C}^k subordinata ad \mathcal{U} . Poniamo

$$(3.7.5) \quad f(p) = \sum_{q \in M} \frac{\mu_q + M_q}{2} \phi_q(p).$$

La f è una funzione di classe $\mathcal{C}^k(M)$ che soddisfa le condizioni richieste. Infatti, per la (3.7.4), abbiamo

$$f_1(p)\phi_q(p) < \frac{\mu_q + M_q}{2}\phi_q(p) < f_2(p)\phi_q(p), \quad \text{se } p, q \in M \text{ e } \phi_q(p) > 0.$$

Da questo, sommando su $q \in M$, segue che la f definita da (3.7.5) soddisfa $f_1(p) < f(p) < f_2(p)$ per ogni $p \in M$. \square

III.8. Immersioni, sommersioni, diffeomorfismi

Siano M ed N due varietà differenziabili, di dimensione m ed n rispettivamente, entrambe di classe \mathcal{C}^k con $k \geq 1$, ed $f : M \rightarrow N$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^k . Fissiamo un punto $p_0 \in M$ e sia $q_0 = f(p_0)$ il punto corrispondente di N . Fissiamo un intorno coordinato (V, y) di N con centro in q_0 e sia (U, x) un intorno coordinato in M con centro in p_0 tale che $f(U) \subset V$. La funzione

$$(3.8.1) \quad \mathbb{R}^m \supset x(U) \ni x \rightarrow y(f(x^{-1})) \in y(V)$$

è di classe \mathcal{C}^k ed in particolare, essendo $k \geq 1$, possiamo considerare il suo Jacobiano in 0

$$(3.8.2) \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1(f(x^{-1}))}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1(f(x^{-1}))}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n(f(x^{-1}))}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n(f(x^{-1}))}{\partial x^m} \end{pmatrix}_{x=0}.$$

La scelta di una diversa coppia di carte coordinate in p_0 e q_0 definisce uno Jacobiano che differisce da quello in (3.8.2) per la moltiplicazione a destra per una matrice di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ ed a sinistra per una matrice di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. In particolare

Lemma III.8.1. *Il rango della matrice Jacobiana (3.8.2) non dipende dalla scelta delle carte coordinate (U, x) in p_0 e (V, y) in q_0 .*

Possiamo dare quindi la seguente

Definizione III.8.2. L'applicazione differenziabile $f : M \rightarrow N$ di classe \mathcal{C}^k in $p_0 \in M$ è in p_0

- un'immersione differenziabile se la matrice Jacobiana (3.8.2) definisce una trasformazione lineare iniettiva, se cioè ha rango m uguale alla dimensione di M ;
- una sommersione differenziabile se la matrice Jacobiana (3.8.2) definisce un'applicazione lineare surgettiva, se cioè ha rango n uguale alla dimensione di N ;
- un diffeomorfismo locale se la matrice Jacobiana (3.8.2) definisce un isomorfismo lineare, se cioè $n = m$ ed il determinante della matrice Jacobiana è diverso da zero.

Per il teorema delle funzioni implicite vale la

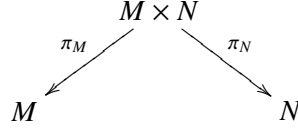
Proposizione III.8.3. *Sia $f : M \rightarrow N$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, tra due varietà differenziabili M ed N di classe \mathcal{C}^k e di dimensioni m, n , rispettivamente. Sia $p_0 \in M$ e $q_0 = f(p_0)$.*

- (1) *Se f è un'immersione differenziabile in p_0 , allora $m \leq n$ ed esiste un intorno aperto U di p_0 in M tale che la f sia un'immersione differenziabile in ogni punto di U e che la restrizione $f|_U : U \rightarrow N$ sia iniettiva. Esiste poi un intorno V di q_0 in N ed un'applicazione $g \in \mathcal{C}^k(V, U)$ tale che $g \circ f(p) = p$ per ogni $p \in U$.*
- (2) *Se f è una sommersione differenziabile in p_0 , allora $m \geq n$, e possiamo trovare intorni aperti U di p_0 in M e V di q_0 in N tali che $f(U) = V$, che la f sia una sommersione differenziabile in tutti i punti di U , che la sua restrizione ad U definisca un'applicazione aperta di U su V e che, inoltre, esista una $g \in \mathcal{C}^k(V, U)$ tale che $f \circ g(q) = q$ per ogni $q \in V$.*
- (3) *Se f è un diffeomorfismo locale in p_0 , allora $m = n$ ed f definisce un omeomorfismo di un intorno aperto U di p_0 su un intorno aperto V di q_0 , con omeomorfismo inverso $(f|_U)^{-1} : V \rightarrow U$ di classe \mathcal{C}^k .*

III.9. Prodotto cartesiano di varietà differenziabili

Se M ed N sono due varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^k ($0 \leq k \leq \omega$) di dimensione m ed n rispettivamente, possiamo definire sul prodotto cartesiano $M \times N$ una ed una sola struttura di varietà differenziabile di dimensione $m + n$, che renda le

proiezioni sui singoli fattori



sommersioni differenziabili di classe \mathcal{C}^k . Un atlante per questa struttura si ottiene da atlanti $\mathcal{A}_M = \{(U_i, x_i) \mid i \in I\}$ ed $\mathcal{A}_N = \{(V_j, y_j) \mid j \in J\}$ di classe \mathcal{C}^k di M ed N rispettivamente, ponendo $\mathcal{A}_{M \times N} = \{(U_i \times V_j, x_i \oplus y_j) \mid (i, j) \in I \times J\}$, ove

$$x_i \oplus y_j : U_i \times V_j \ni (p, q) \longrightarrow (x_i(p), y_j(q)) \in x_i(U_i) \times y_j(V_j) \subset \mathbb{R}^{m+n}.$$

III.10. Sottovarietà differenziabili

Supporremo in questo paragrafo che M sia un'assegnata varietà differenziabile, paracompatta, di dimensione m e di classe \mathcal{C}^k , con $1 \leq k \leq \omega$.

Definizione III.10.1. Diciamo che N è una sottovarietà di dimensione n e di classe \mathcal{C}^ℓ di M se:

- (i) N è una varietà differenziabile di dimensione n e di classe \mathcal{C}^ℓ ;
- (ii) $N \subset M$ come insieme;
- (iii) $\ell \leq k$ e l'inclusione $\iota : N \hookrightarrow M$ è un'immersione differenziabile di classe \mathcal{C}^ℓ .

Lemma III.10.2. La topologia di una sottovarietà differenziabile è più fine della topologia di sottospazio topologico.

DIMOSTRAZIONE. Infatti la topologia di sottospazio su N è la meno fine tra quelle che rendono l'inclusione $\iota : N \rightarrow M$ continua; poiché ogni applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^ℓ , con $k \geq 0$, è in particolare continua, ne segue la tesi. \square

Esempio III.10.3. Consideriamo in \mathbb{R}^2 il sottoinsieme N definito da

$$N = \left\{ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R} \right\} \cup S^1.$$

Esso è una sottovarietà differenziabile di dimensione 1 di \mathbb{R}^2 . La sua topologia di sottovarietà differenziabile è *strettamente più fine* della topologia di sottospazio: infatti $\left\{ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ è chiuso nella topologia di sottovarietà differenziabile (essendo una componente connessa), mentre è denso e quindi non chiuso in N per la topologia di sottospazio.

Esempio III.10.4. Consideriamo il toro $\mathbf{T}^2 = S^1 \times S^1$. Esso è una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^ω , con l'atlante definito dalle applicazioni inverse delle immersioni topologiche:

$$(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)(s, t) \longrightarrow (\exp[i(s + \alpha)], \exp[i(t + \beta)]) \in S^1 \times S^1$$

al variare di α, β in \mathbb{R} . Sia r un numero reale e siano

$$N_r = \left\{ (e^{it}, e^{irt}) \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad f_r : \mathbb{R} \ni t \rightarrow (e^{it}, e^{irt}) \in N_r.$$

Vi è un'unica struttura di varietà differenziabile su N_f per cui f_r sia un diffeomorfismo locale di classe \mathcal{C}^ω . Con questa struttura differenziabile, N_f è una sottovarietà differenziabile di classe \mathcal{C}^ω del toro T^2 . Se $r \in \mathbb{Q}$, la N_r è compatta e la sua topologia di sottovarietà coincide con quella di sottospazio. Se $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è irrazionale, allora f_r è bigettiva, N_r è un sottospazio denso di T^2 e la sua topologia di sottovarietà è strettamente più fine di quella di sottospazio topologico: in particolare come sottospazio topologico N_r non è localmente connesso.

Nel seguito, utilizzando il teorema di Whitney (vedi l'Osservazione III.5.5), supporremo per semplicità che M sia di classe \mathcal{C}^ω .

Proposizione III.10.5. *Sia N una sottovarietà differenziabile di dimensione n e classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, di M . Per ogni punto $p \in N$ esiste un intorno aperto V di p in N ed un aperto coordinato (U, z) di classe \mathcal{C}^k di p in M tali che:*

- (i) $V = \{q \in U \mid z^i(q) = 0, \text{ per } i = n+1, \dots, m\}$;
- (ii) $(V, (z^i)_{1 \leq i \leq n})$ sia una carta locale di classe \mathcal{C}^k di N .

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo carte coordinate (V, y) in N ed (U, x) in M , con centro in p . Per ipotesi, l'inclusione di N in M definisce un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^k

$$y(V) \ni y \rightarrow x = f(y) \in x(U), \quad \text{con } f(0) = 0,$$

la cui matrice Jacobiana $\partial x / \partial y$ ha rango n in 0 . A meno di riordinare gli indici, possiamo supporre che

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}_{y=0} \neq 0.$$

Per il teorema dell'applicazione inversa, a meno di restringere l'intorno V di p , (V, x') , con $x' = (x_1, \dots, x_n)|_V$, è ancora una carta locale su N con centro in p . Possiamo supporre che $V \subset U$. Le restrizioni di x_{n+1}, \dots, x_m a V sono funzioni di classe \mathcal{C}^k su V e si possono quindi esprimere come funzioni delle coordinate locali:

$$x_j = f_j(x_1, \dots, x_n), \quad n < j \leq m \text{ su } V.$$

Poniamo

$$\begin{cases} z_i = x_i, & 1 \leq i \leq n, \\ z_i = x_i - f_i(x_1, \dots, x_n), & n < i \leq m. \end{cases}$$

Allora

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\frac{\partial f_i}{\partial x_j} & I_{m-n} \end{pmatrix}$$

è invertibile e quindi le z_i definiscono una carta locale in un intorno $U' \subset U$ di p in M , che verifica le (i) ed (ii). \square

Corollario III.10.6. *Sia N un sottoinsieme di M e k, n interi non negativi. Esiste al più, su N , una struttura di varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k e di dimensione n per cui N sia una sottovarietà di classe \mathcal{C}^k di M .*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se esiste, la struttura differenziabile di classe \mathcal{C}^k di N è definita da un atlante le cui carte coordinate sono della forma $(U \cap N, (x^i)_{1 \leq i \leq n})$ al variare di $(U, (x^i)_{1 \leq i \leq m})$ tra le carte locali di classe \mathcal{C}^k di M per cui x^{n+1}, \dots, x^m sono nulle su $U \cap N$. \square

Definizione III.10.7. Una sottovarietà differenziabile N di M si dice¹⁰ *propria* se è un chiuso di M , *localmente chiusa* se è un sottospazio localmente chiuso di M .

Chiaramente

sottovarietà propria \implies sottovarietà localmente chiusa \implies sottovarietà.

Usando il teorema delle funzioni implicite, si dimostra la

Proposizione III.10.8. Sia $1 \leq k \leq \omega$.

Un sottospazio topologico N di M è una sottovarietà propria di classe \mathcal{C}^k di M e di dimensione n se è verificata una delle due condizioni equivalenti:

- (a) Per ogni $p \in M$ esiste una carta locale (U, x) di classe \mathcal{C}^k in M , con centro in p , tale che $M \cap U$ sia connesso ed $(U \cap M, x')$, con $x' = (x^1, \dots, x^n)$, sia una carta locale in N ;
- (b) Per ogni $p \in M$ esiste una carta locale (U, x) di classe \mathcal{C}^k in M , con centro in p , tale che $M \cap U = \{p \in U \mid x^{n+1} = 0, \dots, x^m = 0\}$.

Un sottospazio topologico N di M è una sottovarietà localmente chiusa di classe \mathcal{C}^k di M e di dimensione n se è verificata una delle due condizioni equivalenti:

- (a') Per ogni $p \in N$ esiste una carta locale (U, x) di classe \mathcal{C}^k in M , con centro in p , tale che $M \cap U$ sia connesso ed $(U \cap M, x')$, con $x' = (x^1, \dots, x^n)$, sia una carta locale in N ;
- (b') Per ogni $p \in N$ esiste una carta locale (U, x) di classe \mathcal{C}^k in M , con centro in p , tale che $M \cap U = \{p \in U \mid x^{n+1} = 0, \dots, x^m = 0\}$.

Abbiamo poi:

Proposizione III.10.9. Siano M, N due varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^k , con $1 \leq k \leq \omega$, ed $f \in \mathcal{C}^k(M, N)$. Se q è un valore regolare di f , se cioè $q \in f(M)$ ed f è una sommersione in tutti i punti di $f^{-1}(q)$, allora $f^{-1}(q)$ è una sottovarietà propria di M .

Proposizione III.10.10. Siano M, N due varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^k , con $1 \leq k \leq \omega$, ed $f \in \mathcal{C}^k(M, N)$. Siano r un intero con $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$, $q \in f(M)$ e supponiamo che, per ogni $p \in f^{-1}(q)$ ed ogni coppia di carte locali (U, x) con centro in p e (V, y) con centro in q , per cui $f(U) \subset V$, lo Jacobiano in 0 di $y \circ f \circ x^{-1}$ abbia rango r . Allora $f^{-1}(q)$ è una sottovarietà propria di M , di classe \mathcal{C}^k e di dimensione $m - r$.

¹⁰In inglese neat.

III.11. Diffeomorfismi

Definizione III.11.1. Un *diffeomorfismo* tra due varietà differenziabili M, N è un'applicazione bigettiva $f : M \rightarrow N$ tale che sia f che la sua inversa f^{-1} siano differenziabili.

Osserviamo che l'insieme $\mathbf{Diff}(M)$ dei diffeomorfismi di una varietà differenziabile M in sé è un gruppo rispetto al prodotto di composizione.

Premettiamo il seguente:

Lemma III.11.2. Siano $p, q \in \mathbb{R}^n$. Fissato un numero reale $R > \max\{|p|, |q|\}$, possiamo trovare un diffeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che:

$$(3.11.1) \quad \begin{cases} f(x) = x & \text{per } |x| > R \\ f(p) = q. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $v = (v^1, \dots, v^n) = q - p \in \mathbb{R}^n$ e indichiamo con \vec{v} il corrispondente campo di vettori a coefficienti costanti:

$$(3.11.2) \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Esso definisce il gruppo a un parametro di diffeomorfismi di \mathbb{R}^n delle traslazioni parallele a v : $\tau_v(t)(x) = x + tv$.

Fissiamo due numeri reali r_1, r_2 con $\max\{|p|, |q|\} < r_1 < r_2 < R$ ed una funzione $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, con

$$\begin{cases} \chi(x) = 1 & \text{se } |x| \leq r_1, \\ 0 < \chi(x) < 1 & \text{se } r_1 < |x| < r_2, \\ \chi(x) = 0 & \text{se } |x| \geq r_2 \end{cases}$$

e consideriamo il campo di vettori:

$$(3.11.3) \quad X = \chi(x)\vec{v} = \chi(x) \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Per il Teorema II.3.9 del Capitolo II, esso definisce un gruppo a un parametro di diffeomorfismi:

$$(3.11.4) \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \rightarrow \phi_t(x) \in \mathbb{R}^n$$

con:

$$(3.11.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi_t(x)}{\partial t} = \chi(\phi_t(x))\vec{v} & \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ \phi_0(x) = x & \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Abbiamo $\phi_t(x) = x$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ se $|x| \geq r_2$ e $\phi_1(p) = p + v = q$. \square

Dimostriamo ora:

Teorema III.11.3. Se M è una varietà differenziabile connessa, allora il gruppo $\mathbf{Diff}(M)$ dei diffeomorfismi di M opera transitivamente su M .

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo dimostrare che, per ogni coppia di punti $p, q \in M$, esiste un diffeomorfismo $\phi \in \mathbf{Diff}(M)$ che trasforma il punto p nel punto q .

Fissiamo $p \in M$ ed indichiamo con N l'insieme dei punti q di M per cui esiste un diffeomorfismo di M che trasforma p in q .

N è aperto. Sia $q = \gamma(p) \in N$, con $\gamma \in \mathbf{Diff}(M)$ e sia (U, x) una carta coordinata con centro in q ed $x(U) = \mathbb{R}^m$. Se $q' \in U$ ed R un numero reale con $0 \leq |x(q')| < R$, per il Lemma III.11.2 possiamo trovare un diffeomorfismo $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che $F(0) = x(q')$ ed $F(x) = x$ per $|x| > R$. Definiamo $\phi \in \mathbf{Diff}(M)$ ponendo:

$$\phi(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \notin U \\ x^{-1} \circ F(x(y)) & \text{se } y \in U. \end{cases}$$

Questa formula definisce un diffeomorfismo di M che trasforma q in q' . Allora $\phi \circ \gamma \in \mathbf{Diff}(M)$ e trasforma p in q' . Quindi $U \subset N$ e questo dimostra che N è aperto.

N è chiuso. Sia q un punto della chiusura di N . Scegliamo una carta coordinata (U, x) con centro in q come nella prima parte della dimostrazione. Se $q' \in U \cap N$, costruiamo F e ϕ come nella prima parte della dimostrazione. Poiché $q' \in N$, possiamo trovare $\gamma' \in \mathbf{Diff}(M)$ con $\gamma'(p) = q'$. Allora $\phi^{-1} \circ \gamma' \in \mathbf{Diff}(M)$ e $\phi^{-1} \circ \gamma'(p) = q$. Ciò dimostra che N è anche chiuso.

Poiché N è sia aperto che chiuso ed M è connesso, ed inoltre $p \in N \neq \emptyset$, ne segue che $N = M$. La dimostrazione è completa. \square

III.12. Esistenza e unicità di strutture differenziali

Sia M una varietà topologica ed indichiamo con M', M'' due varietà differenziabili di classi $\mathcal{C}^{k'}$ e $\mathcal{C}^{k''}$ rispettivamente, corrispondenti a due distinte strutture differenziali su M , definite da atlanti \mathcal{A}' ed \mathcal{A}'' . Diremo che le due strutture differenziali sono equivalenti di classe \mathcal{C}^k se $k \leq \min\{k', k''\}$ ed esiste un diffeomorfismo $f : M' \rightarrow M''$ di classe \mathcal{C}^k .

Ad esempio, le M' ed M'' ottenute considerando sulla retta reale \mathbb{R} le strutture \mathcal{C}^ω definite dagli atlanti $\mathcal{A}' = \{(\mathbb{R}, x)\}$ ed $\mathcal{A}'' = \{(\mathbb{R}, x^3)\}$ sono \mathcal{C}^ω -equivalenti, perché $f(x) = x^3$ è un diffeomorfismo di M' su M'' .

Su ogni varietà M di classe \mathcal{C}^1 , per un teorema di Whitney¹¹ si può definire una struttura di classe \mathcal{C}^ω compatibile. Inoltre le strutture compatibili di classe \mathcal{C}^k , per ogni $k \geq 1$, sono tutte tra loro equivalenti.

È stato dimostrato¹² che esistono delle varietà topologiche che non ammettono una struttura differenziale di classe \mathcal{C}^1 .

¹¹Hassler Whitney *Differentiable Manifolds*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 37, No. 3 (Jul., 1936), pp. 645-680.

¹²Michel A. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure* Comment. Math. Helv. 34 (1960), pp. 257-270.

L'esempio di Kervaire è una varietà topologica di dimensione dieci. Le varietà topologiche di dimensione due e tre ammettono una ed una sola struttura differenziale. Questo fatto è stato dimostrato da Johann Radon¹³ per dimensione 1 e 2 e da Edwin E. Moise¹⁴ in dimensione 3.

Per dimensioni superiori, la struttura differenziale, quando esista, non è univocamente determinata e si pone quindi il problema di determinare le diverse strutture differenziali su una varietà. Di solito la classificazione è fatta per varietà orientabili e diffeomorfismi che preservano l'orientazione.

Per tutte le varietà compatte di dimensione maggiore di quattro vi è un numero finito di strutture differenziabili non equivalenti. Su \mathbb{R}^n c'è un'unica struttura differenziale se $n \neq 4$, mentre per $n = 4$ ve ne sono infinite¹⁵ (quelle diverse dalla struttura standard sono gli \mathbb{R}^4 esotici).

Per avere un'idea del numero di differenti strutture su una varietà compatta, riportiamo in una tabella il numero ν_n delle strutture differenziabili non equivalenti sulle sfere S^n con $n \leq 18$. Nella prima riga riportiamo il valore di n e nella seconda il corrispondente ν_n .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	1	?	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16

Quando ci siano più di una struttura differenziale sulla sfera S^n , le sfere con le strutture non equivalenti a quella standard si dicono *sfere esotiche*. Ci sono 27 sfere esotiche di dimensione sette, mentre non si conoscono sfere esotiche di dimensione inferiore. È aperto il problema delle strutture differenziabili sulla sfera di dimensione quattro. Non si sa se vi siano sfere esotiche, e quindi nemmeno se esse siano in numero finito o infinito. Il fatto che non ci siano sfere esotiche in dimensione quattro è noto come la *congettura di Poincaré generalizzata*.

Utilizzando la teoria dell'ostruzione, Robion Kirby e Laurent Siebenmann¹⁶ hanno dimostrato che il numero di strutture differenziali non equivalenti su una varietà compatta di dimensione maggiore di quattro è finito. John Milnor, Michel Kervaire e Morris Hirsch hanno dimostrato¹⁷ che tale numero è lo stesso per tutte e coincide quindi col numero delle strutture differenziali sulle sfere.

Quindi, se M è una varietà topologica di dimensione diversa da quattro, essa possiede al più un numero finito di strutture differenziali non equivalenti.

¹³Johann Karl August Radon (1887–1956), matematico austriaco.

¹⁴Edwin Evariste Moise (1918–1998), matematico americano. I suoi risultati sulle varietà di dimensione tre, ottenuti nell'articolo: *Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung*. Annals of Mathematics. Second Series, Vol. 56 pg 96-114 (1952), sono descritti nel libro: *Geometric topology in dimensions 2 and 3*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 47. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. x+262 pp.

¹⁵cf. M.Kreck *Exotische Strukturen auf 4-Mannigfaltigkeiten*. [Exotic structures on 4-manifolds] Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **88** (1986), no. 3, 124–145. I primi esempi sono di Robion Kirby e Michael Freedman.

¹⁶R.C. Kirby e L.C. Siebenmann, *Foundational Essays on Topological Manifolds. Smoothings, and Triangulations*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press (1977).

¹⁷vedi: T.Asselmeyer-Maluga e C.H. Brans *Exotic Smoothness in Physics*. World Scientific Singapore, 2007.

Strutture differenziali su alcuni gruppi e spazi omogenei

IV.1. I quaternioni e la struttura differenziale di $SU(2)$, $SO(3)$, $SO(4)$

Indichiamo con \mathbf{H} il corpo (non commutativo) dei quaternioni. Ricordiamo che i suoi elementi hanno la rappresentazione matriciale standard

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbf{H}.$$

Le unità immaginarie standard si rappresentano mediante

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Identifichiamo \mathbb{R}^4 e \mathbb{C}^2 ad \mathbf{H} ed \mathbb{R}^3 allo spazio dei quaternioni puramente immaginari. La sfera S^3 si identifica allo spazio dei quaternioni q con $q\bar{q} = 1$.

Identifichiamo il piano complesso \mathbb{C} a un sottoinsieme di \mathbf{H} , facendo corrispondere al numero complesso z il quaternionone $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$.

Identifichiamo \mathbb{C}^2 ad \mathbf{H} facendo corrispondere a $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ il quaternionone di matrice $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$. Un'applicazione \mathbb{R} -lineare $A : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ è \mathbb{C} -lineare indicheremo con $A_{\mathbb{C}}$ la corrispondente applicazione \mathbb{C} -lineare $A_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Osserviamo che, in questo caso, $\det(A) = |\det(A_{\mathbb{C}})|^2$.

Proposizione IV.1.1. (1) Per ogni $a \in S^3$ l'applicazione σ_a , definita da $\rho_a(x) = ax\bar{a}$, trasforma quaternioni puramente immaginari in quaternioni puramente immaginari e definisce quindi una trasformazione di \mathbb{R}^3 in sé, che appartiene al gruppo speciale ortogonale. La

$$(4.1.1) \quad S^3 \ni a \longrightarrow \rho_a \in \mathbf{SO}(3)$$

è un omomorfismo continuo di gruppi con nucleo $\{\pm 1\}$ ed un rivestimento a due fogli.

(2) Per ogni $a \in S^3$ la trasformazione

$$(4.1.2) \quad \sigma_a : \mathbf{H} \ni x \longrightarrow -a\bar{x}a \in \mathbf{H}$$

è la simmetrica di vettore a in $\mathbf{H} \simeq \mathbb{R}^4$.

(3) Per ogni coppia $(a, b) \in S^3$ l'applicazione $\rho_{a,b}$ definita da $\rho_{a,b}(x) = axb$ è un'isometria di $\mathbf{H} \simeq \mathbb{R}^4$ con determinante 1. L'applicazione

$$(4.1.3) \quad S^3 \times S^3 \ni (a, b) \longrightarrow \rho_{a,\bar{b}} \in \mathbf{SO}(4)$$

è un omomorfismo continuo con nucleo $\{\pm(1, 1)\}$ e un rivestimento a due fogli.

(4) Per ogni $\tau \in S^1 \subset \mathbb{C}$ ed $a \in S^3$ l'applicazione $\rho_{\tau,a}$ è \mathbb{C} -lineare e definisce una trasformazione unitaria di \mathbb{C}^2 . L'applicazione $S^1 \times S^3 \ni (\tau, a) \rightarrow \rho_{\tau,a^{-1}} \in \mathbf{U}(2)$ è un omomorfismo continuo e surgettivo, con nucleo $\{\pm(1, 1)\}$ ed un rivestimento a due fogli.

(5) Per ogni $a \in S^3$ l'applicazione $\rho_{1,a}(x) = xa$ è un'isometria di \mathbb{C}^2 con determinante 1. L'applicazione

$$(4.1.4) \quad S^3 \ni a \longrightarrow \rho_{1,a} \in \mathbf{SU}(2)$$

è un isomorfismo di gruppi ed un omeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo la (2). Se $a \in S^3$, è $|-a\bar{x}a| = |a|^2|x| = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{H}$, e quindi la σ_a è un'isometria. Ricordiamo che il prodotto scalare in \mathbb{R}^4 di due elementi $x, a \in \mathbb{H}$ è $(x|a) = \operatorname{Re}(\bar{x}a)$. Quindi $x \perp a$ se e soltanto se $\bar{x}a$ è un immaginario puro, cioè se $\bar{a}x = \overline{\bar{x}a} = -\bar{x}a$. Abbiamo quindi

$$\sigma_a(a) = -a\bar{a}a = -a, \quad \text{e} \quad \sigma_a(x) = -a\bar{x}a = a\bar{a}x = x, \quad \text{se } x \perp a.$$

Quindi σ_a è la simmetria vettoriale di vettore a .

Poiché ogni elemento di $\mathbf{SO}(4)$ è prodotto di un numero pari di simmetrie vettoriali, dalla (2) segue che l'omomorfismo (4.1.3) è surgettivo. Se $a, b \in S^3$ e $\rho_{a,b}$ è l'identità, da $\rho_{a,b}(1) = 1$ ricaviamo che $b = \bar{a} = a^{-1}$. Da $\rho_{a,b}(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{H}$ ricaviamo allora che $ax = xa$ per ogni $x \in \mathbb{H}$, e quindi a è reale e perciò uguale a ± 1 . Questo dimostra la (3).

Le trasformazioni di $\mathbf{SO}(3)$ si identificano alle trasformazioni di $\mathbf{SO}(4)$ che lasciano fisso 1. Sono cioè del tipo $\rho_a = \rho_{a,\bar{a}}$ e ne segue quindi (1).

Le (4) e (5) seguono dal fatto che la $\rho_{a,b}$ è \mathbb{C} -lineare se e soltanto se $a \in \mathbb{C}$ e, in questo caso $\det([\rho_{a,b}]_{\mathbb{C}}) = a^2$. \square

Corollario IV.1.2. Abbiamo i seguenti diffeomorfismi di classe \mathcal{C}^ω :

$$\begin{aligned} \mathbf{SO}(3) &\simeq \mathbb{RP}^3, \\ \mathbf{SO}(4) &\simeq S^3 \times \mathbb{RP}^3, \\ \mathbf{SU}(2) &\simeq S^3, \\ \mathbf{U}(2) &\simeq S^1 \times S^3. \end{aligned}$$

IV.2. La trasformata di Cayley

Sia $\mathbb{C}^{n \times n}$ lo spazio delle matrici complesse $n \times n$. Indichiamo con

$$(4.2.1) \quad \mathbb{U}_e = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det(I + X) \neq 0\}$$

l'aperto di $\mathbb{C}^{n \times n} \simeq \mathbb{C}^{n^2}$ delle matrici complesse che non hanno autovalore -1 .

Definizione IV.2.1. La *trasformata di Cayley* di una matrice $X \in \mathbb{U}_e$ è la matrice

$$(4.2.2) \quad \mathbf{c}(X) = (I + X)^{-1}(I - X).$$

Vale il

Teorema IV.2.2. *La trasformata di Cayley (4.2.2) definisce un'involuzione differenziabile di classe \mathcal{C}^ω di \mathbb{U}_e in sé. La trasformata di Cayley di una matrice $X \in \mathbb{U}_e$ è reale se e soltanto se X è reale.*

DIMOSTRAZIONE. La \mathbf{c} è una funzione razionale, e quindi differenziabile di classe \mathcal{C}^ω , sul suo dominio di definizione. Verifichiamo che l'immagine di \mathbf{c} è ancora contenuta in \mathbb{U}_e . Abbiamo¹ infatti, se $v \in \mathbb{C}^n$,

$$v + \mathbf{c}(v) = 0 \iff (I + X)v + (I - X)v = 2v = 0 \iff v = 0.$$

Possiamo quindi definire l'iterata \mathbf{c}^2 di \mathbf{c} , ed abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^2(X) &= (I + (I + X)^{-1}(I - X))^{-1}(I - (I + X)^{-1}(I - X)) \\ &= ((I + X) + (I - X))^{-1}((I + X) - (I - X)) = X, \quad \forall X \in \mathbb{U}_e. \end{aligned}$$

Chiaramente \mathbf{c} si restringe ad un'involuzione di $\mathbb{U}_e \cap \mathbb{R}^{n \times n}$. \square

Come vedremo nel seguito, la trasformata di Cayley è uno strumento molto utile nello studio della struttura dei gruppi di matrici.

Sia H una matrice compessa $n \times n$ non singolare. Poniamo

$$\mathbf{O}_H(\mathbb{C}) = \{a \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid a^\dagger H a = H\}, \quad \mathfrak{o}_H(\mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^\dagger H + HX = 0\},$$

$$\mathbf{O}_H(\mathbb{R}) = \{a \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid a^\dagger H a = H\}, \quad \mathfrak{o}_H(\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^\dagger H + HX = 0\},$$

$$\mathbf{U}_H(\mathbb{C}) = \{a \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid a^* H a = H\}, \quad \mathfrak{u}_H(\mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^* H + HX = 0\}$$

Come vedremo nel seguito, $\mathbf{O}_H(\mathbb{C})$, $\mathbf{O}_H(\mathbb{R})$ ed $\mathbf{U}_H(\mathbb{C})$ sono gruppi di Lie e $\mathfrak{o}_H(\mathbb{C})$, $\mathfrak{o}_H(\mathbb{R})$ ed $\mathfrak{u}_H(\mathbb{C})$ le corrispondenti algebre di Lie.

Abbiamo

Proposizione IV.2.3. *La trasformata di Cayley definisce omeomorfismi*

$$\mathbb{U}_e \cap \mathbf{O}_H(\mathbb{C}) \xrightarrow{\mathbf{c}} \mathbb{U}_e \cap \mathfrak{o}_H(\mathbb{C}),$$

$$\mathbb{U}_e \cap \mathbf{O}_H(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathbf{c}} \mathbb{U}_e \cap \mathfrak{o}_H(\mathbb{R}),$$

$$\mathbb{U}_e \cap \mathbf{U}_H(\mathbb{C}) \xrightarrow{\mathbf{c}} \mathbb{U}_e \cap \mathfrak{u}_H(\mathbb{C}).$$

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare il primo omeomorfismo basta verificare che, se $a \in \mathbb{U}_e \cap \mathbf{G}_H(\mathbb{C})$, allora $X = \mathbf{c}(a) \in \mathfrak{g}_H(\mathbb{C})$ e che, viceversa, se $X \in \mathfrak{g}_H(\mathbb{C})$, allora $a = \mathbf{c}(X) \in \mathbf{G}_H(\mathbb{C})$. Il secondo omeomorfismo segue allora dal fatto che la trasformata di Cayley trasforma matrici reali in matrici reali.

Se $a \in \mathbb{U}_e \cap \mathbf{G}_H(\mathbb{C})$, abbiamo

$$\begin{aligned} [(I + a)^{-1}(I + a)]^\dagger H &= [(I - a)(I + a)^{-1}]^\dagger H = (I + a^\dagger)^{-1}(H - a^\dagger H) \\ &= (I + a^\dagger)^{-1}(H - H a^{-1}) = (I + a^\dagger)^{-1}H(I - a^{-1}) \\ &= (H^{-1} + H^{-1}a^\dagger)^{-1}(I - a^{-1}) = (H^{-1} + a^{-1}H^{-1})^{-1}(I - a^{-1}) \\ &= H(I + a^{-1})^{-1}(I - a^{-1}) = H(I + a)^{-1}(a - I), \end{aligned}$$

¹Possiamo anche osservare che gli autovalori di $\mathbf{c}(X)$ sono i $\mu = (1 + \lambda)^{-1}(1 - \lambda)$, al variare di λ tra gli autovalori di X e $(1 + \lambda)^{-1}(1 - \lambda) \neq -1$ se λ è un numero complesso $\neq -1$.

ove abbiamo utilizzato

$$a^\dagger Ha = H \iff a^{-1}H^{-1}(a^\dagger)^{-1} = H^{-1} \iff aH^{-1}a^\dagger = H^{-1}.$$

Questo dimostra che $\mathbf{c}(a) \in \mathfrak{g}_H(\mathbb{C})$.

Sia ora $X \in \mathbb{U}_e \cap \mathfrak{g}_H(\mathbb{C})$ ed $a = \mathbf{c}(X)$. Risulta allora

$$\begin{aligned} a^\dagger Ha &= (I + X^\dagger)^{-1}(I + X^\dagger)H(I - X)(I + X)^{-1} \\ &= (I + X^\dagger)^{-1}(H + X^\dagger H)(I - X)(I + X)^{-1} \\ &= (I + X^\dagger)^{-1}H(I + X)(I - X)(I + X)^{-1} \\ &= (H^{-1} + H^{-1}X^\dagger)^{-1}(I - X) = (H^{-1} - XH^{-1})(I - X) \\ &= H(I - X)^{-1}(I - X) = H, \end{aligned}$$

ove abbiamo utilizzato

$$X^\dagger H + HX = 0 \iff H^{-1}X^\dagger + XH^{-1} = 0.$$

Quindi $a = \mathbf{c}(X) \in \mathbf{G}_H(\mathbb{C})$. Ciò completa la dimostrazione dei primi due omeomorfismi.

Il terzo si dimostra verificando che se $a \in \mathbb{U}_e \cap \mathbf{U}_H(\mathbb{C})$, allora $\mathbf{c}(a) \in \mathfrak{u}_H(\mathbb{C})$, e che, viceversa, se $X \in \mathbb{U}_e \cap \mathfrak{u}_H(\mathbb{C})$, allora $\mathbf{c}(X) \in \mathbf{U}_H(\mathbb{C})$. A questo scopo è sufficiente ripetere le verifiche precedenti, sostituendo alla trasposizione l'aggiunzione. \square

Gli insiemi $\mathfrak{o}_H(\mathbb{C})$, $\mathfrak{o}_H(\mathbb{R})$, $\mathfrak{u}_H(\mathbb{C})$ sono spazi vettoriali reali di dimensione finita. La trasformata di Cayley definisce quindi una carta locale con centro nell'identità del gruppo $\mathbf{G}_H(\mathbb{C})$ e $\mathbf{G}_H(\mathbb{R})$, rispettivamente.

Abbiamo

Teorema IV.2.4. *Sia $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice invertibile e sia \mathbf{G} uno dei gruppi $\mathbf{O}_H(\mathbb{C})$, $\mathbf{O}_H(\mathbb{R})$, $\mathbf{U}_H(\mathbb{C})$. Indichiamo con \mathfrak{g} la corrispondente algebra di Lie $\mathfrak{o}_H(\mathbb{C})$, $\mathfrak{o}_H(\mathbb{R})$, $\mathfrak{u}_H(\mathbb{C})$, rispettivamente. Con la topologia di sottospazio di $\mathbb{C}^{n \times n}$, il gruppo \mathbf{G} è una varietà topologica ed ammette un'unica struttura differenziale di classe \mathcal{C}^ω per cui:*

- (1) $\mathbf{c} : \mathbb{U}_e \cap \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{U}_e \cap \mathfrak{g}$ è una carta locale con centro in I ;
- (2) per ogni $a \in \mathbf{G}$ la traslazione a sinistra $\mathbf{G} \ni x \rightarrow ax \in \mathbf{G}$ è un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^ω .

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione IV.2.3 l'insieme $\mathbb{U}_e \cap \mathbf{G}$, che è un intorno aperto di I in \mathbf{G} per la topologia di sottospazio, è omeomorfo ad un aperto dello spazio vettoriale reale \mathfrak{g} . Poiché le traslazioni a sinistra $L_a : \mathbb{C}^{n \times n} \ni x \rightarrow ax \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mediante gli elementi a di \mathbf{G} sono omeomorfismi, ogni punto a di \mathbf{G} ha un intorno $U_a = a \cdot (\mathbb{U}_e \cap \mathbf{G})$ omeomorfo ad un aperto di \mathfrak{g} . Consideriamo il corrispondente atlante $\mathcal{A} = \{(U_a, X_a) \mid a \in \mathbf{G}_H(\mathbb{k})\}$, con $X_a(x) = \mathbf{c}(a^{-1}x)$ per $x \in U_a$. Esso definisce su $\mathbf{G}_H(\mathbb{k})$ una struttura differenziale di classe \mathcal{C}^ω per cui valgono le condizioni (1) e (2). Infatti le funzioni di transizione

$$\psi_{a,b} : \mathbf{c}(U_a \cap U_b) \ni X \rightarrow \mathbf{c}(b^{-1}a \cdot \mathbf{c}(X)) \in \mathbf{c}(U_a \cap U_b)$$

sono analitiche reali. \square

Ricordiamo le definizioni di alcuni gruppi classici e delle loro algebre di Lie. Indichiamo con I la matrice identità in $\mathbb{C}^{n \times n}$ e con J la matrice antisimmetrica non degenere

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}.$$

$\mathbf{O}(n) = \{a \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid a^\dagger a = I\}$	(gruppo ortogonale),
$\mathbf{SO}(n) = \{a \in \mathbf{O}(n) \mid \det(a) = 1\}$	(gruppo speciale ortogonale),
$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^\dagger + X = 0\}$	(algebra delle matrici antisimmetriche),
$\mathbf{O}(n, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid a^\dagger a = I\}$	(gruppo ortogonale complesso),
$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{O}(n, \mathbb{C}) \mid \det(a) = 1\}$	(gruppo speciale ortogonale complesso),
$\mathbf{U}(n) = \{a \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid a^* a = I\}$	(gruppo unitario),
$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^* + X = 0\}$	(algebra delle matrici anti-hermitiane),
$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} \mid a^\dagger J a = J\}$,	(gruppo simplettico complesso),
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} \mid X^\dagger J + JX = 0\}$,	(algebra simplettica complessa)
$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid a^\dagger J a = J\}$,	(gruppo simplettico reale),
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid X^\dagger J + JX = 0\}$,	(algebra simplettica reale)
$\mathbf{Sp}(n) = \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n)$	(gruppo unitario quaternionico)
$\mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(2n)$	(algebra anti-hermitiana quaternionica).

Il gruppo unitario quaternionico si chiama anche *iper-unitario*.

Dal Teorema IV.2.4 ricaviamo immediatamente

Teorema IV.2.5.

$\mathbf{SO}(n)$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $n(n-1)/2$.

$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $n(n-1)$.

$\mathbf{U}(n)$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione n^2 .

$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $2n(2n+1)$.

$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $n(2n+1)$.

$\mathbf{Sp}(n)$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $n(2n+1)$.

Osservazione IV.2.6. Tutti i gruppi nel Teorema IV.2.5 sono connessi. I gruppi $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{O}(n, \mathbb{C})$ sono formati ciascuno da due componenti connesse, omeomorfe ad $\mathbf{SO}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$, rispettivamente. I gruppi $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{O}(n)$, $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$ sono compatti. I gruppi $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{O}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ non sono compatti.

Osservazione IV.2.7. Le matrici antisimmetriche reali e le matrici anti-hermitiane hanno autovalori puramente immaginari. Quindi la trasformata di Cayley è definita su tutte le algebre di Lie $\mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{sp}(n)$.

Oltre ai gruppi di Lie reali e complessi descritti sopra, ricordiamo le definizioni di alcuni gruppi reali non compatti. Sia

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix},$$

ove abbiamo indicato con I_k la matrice identità $k \times k$. Poniamo allora

$$\mathbf{O}(p, q) = \{a \in \mathbb{R}^{(p+q) \times (p+q)} \mid a^\dagger I_{p,q} a = I_{p,q}\} \quad \begin{array}{l} \text{(gruppo ortogonale} \\ \text{di segnatura } (p, q)), \end{array}$$

$$\mathbf{SO}(p, q) = \mathbf{O}(p, q) \cap \mathbf{SL}_{p+q}(\mathbb{R}) \quad \begin{array}{l} \text{(gruppo speciale ortogonale} \\ \text{di segnatura } (p, q)), \end{array}$$

$$\mathbf{U}(p, q) = \{a \in \mathbf{GL}_{p+q}(\mathbb{C}) \mid a^* I_{p,q} a = I_{p,q}\} \quad \begin{array}{l} \text{(gruppo unitario} \\ \text{di segnatura } (p, q)), \end{array}$$

$$\mathbf{SU}(p, q) = \mathbf{U}(p, q) \cap \mathbf{SL}_{p+q}(\mathbb{C}) \quad \begin{array}{l} \text{(gruppo speciale unitario} \\ \text{di segnatura } (p, q)) \end{array}$$

IV.3. I gruppi $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(1, \mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$, $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$, $\mathbf{SO}(1, 2)$

Sia e_1, e_2 la base canonica di \mathbb{C}^2 . Definiamo una forma alternata non degenere su \mathbb{C}^2 ponendo

$$(4.3.1) \quad v \wedge w = \omega(v, w) \cdot e_1 \wedge e_2, \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^2.$$

Il gruppo $\mathbf{Sp}(1, \mathbb{C})$ consiste delle trasformazioni lineari di \mathbb{C}^2 che lasciano invariata la forma (4.3.3) e dunque coincide con $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$.

Consideriamo ora, sullo spazio $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ delle matrici complesse 2×2 la forma bilineare simmetrica

$$(4.3.2) \quad \text{tr}(AB) = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}b_{ij}, \quad \forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Il sottospazio $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ delle matrici di $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ con traccia nulla ha dimensione tre. Una base di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ consiste delle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed in tale base la matrice associata alla restrizione κ ad $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ della forma tr è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed è quindi non degenere. Le trasformazioni lineari di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ che lasciano invariante la forma κ formano quindi il gruppo ortogonale complesso $\mathbf{O}(3, \mathbb{C})$.

Per ogni $a \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$, la trasformazione² $\text{Ad}(a) : \mathbb{C}^{2 \times 2} \ni X \rightarrow aXa^{-1} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ lascia le tracce invarianti. Trasforma quindi $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ in sé e preserva la forma κ .

Abbiamo

²La corrispondenza che associa ad ogni $a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ la trasformazione lineare $\text{Ad}(a) \in \mathbf{GL}_{n \times n}(\mathbb{C})$ definita da $\text{Ad}(a)(X) = aXa^{-1}$ per $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice la *rappresentazione aggiunta* di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Il nucleo della rappresentazione aggiunta è costituito dai multipli dell'identità in $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ e il luogo dei punti fissi di Ad dai multipli dell'identità in $\mathbb{C}^{n \times n}$.

Proposizione IV.3.1. *L'applicazione*

$$(4.3.3) \quad \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \ni a \longrightarrow \text{Ad}(a) \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$$

è un epimorfismo di gruppi con nucleo $\pm I$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo, per ogni $a, b, c \in \mathbb{C}$,

$$\kappa\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\right) = \text{tr}\begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = 2(a^2 + bc) = -2 \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Quindi una trasformazione \mathbb{C} -lineare T di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ che preservi la forma κ preserva sia la traccia che il determinante delle matrici di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e quindi i loro autovalori. A meno di comporre la T con una opportuna $\text{Ad}(a)$, con $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, possiamo quindi supporre che T lasci fissa la matrice $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e quindi il suo κ -ortogonale

$$H = \Omega^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Inoltre, poiché H è un piano iperbolico, la τ o lascia invariati o scambia tra loro le sue due rette isotrope

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Se $T \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$ allora lascia invariati ciascuna delle due rette iperboliche ed è quindi della forma

$$T \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \mu b & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Da

$$2ab = \kappa\left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\right) = \kappa\left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \mu b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \lambda b & 0 \end{pmatrix}\right) = 2\lambda\mu ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

segue che $0 \neq \mu = \lambda^{-1}$. Se η è un numero complesso con $\eta^2 = \lambda$, abbiamo allora

$$T = \text{Ad}\begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Questo dimostra che la (4.3.3) è un omomorfismo surgettivo e, considerando il caso $\lambda = \mu = 1$, che il suo nucleo è $\pm I$. \square

Restringendoci alle matrici a coefficienti reali, otteniamo analogamente

Proposizione IV.3.2. *L'applicazione*

$$(4.3.4) \quad \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \ni a \longrightarrow \text{Ad}(a) \in \mathbf{SO}(1, 2)$$

definisce un omomorfismo surgettivo sulla componente connessa dell'identità di $\mathbf{SO}(1, 2)$, con nucleo $\pm I$.

IV.4. La quadrica di $\mathbb{C}P^5$ ed alcuni omomorfismi di gruppi

Consideriamo lo spazio vettoriale complesso $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, di dimensione 6, dei due-vettori complessi alternati. Sia e_1, e_2, e_3, e_4 la base canonica di \mathbb{C}^4 . Definiamo una forma bilineare e simmetrica su $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ ponendo

$$(4.4.1) \quad \alpha \wedge \beta = \langle \alpha | \beta \rangle \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4).$$

Nella base canonica

$$(4.4.2) \quad e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_4 \wedge e_2, e_3 \wedge e_4$$

di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ la matrice associata alla forma $\langle \cdot | \cdot \rangle$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi la forma è non degenera.

La forma $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ci permette di rappresentare l'insieme dei piani per l'origine di \mathbb{C}^4 come punti di una quadrica proiettiva. Ricordiamo che ogni elemento di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ ha rango pari. L'elemento nullo è quello di rango 0, gli elementi di rango due sono tutti e soli quelli che si possono scrivere nella forma $v_1 \wedge v_2$ con v_1 e v_2 linearmente indipendenti, quelli di rango quattro si possono scrivere nella forma $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$ per una base v_1, v_2, v_3, v_4 di \mathbb{C}^4 .

Lemma IV.4.1. *Sia $0 \neq \alpha \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. Allora*

- (1) α è isotropo, cioè $\langle \alpha | \alpha \rangle = 0$, se e soltanto se α ha rango due;
- (2) α è anisotropo, cioè $\langle \alpha | \alpha \rangle \neq 0$, se e soltanto se α ha rango quattro;
- (3) se $\alpha = v_1 \wedge v_2$ e $\beta = w_1 \wedge w_2$ sono due elementi linearmente indipendenti di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, allora $\langle \alpha | \beta \rangle = 0$ se e soltanto se i due piani $\langle v_1, v_2 \rangle$ e $\langle w_1, w_2 \rangle$ hanno una retta in comune. \square

Un due-piano di \mathbb{C}^4 si identifica, a meno di un fattore complesso, ad un elemento di rango due di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. Quindi, come conseguenza del Lemma IV.4.1, possiamo enunciare il

Corollario IV.4.2. *La Grassmanniana $\mathbb{G}_{4,2}$ dei due-piani di \mathbb{C}^4 si può identificare alla quadrica proiettiva complessa non degenera di $\mathbb{C}P^5$. \square*

Osservazione IV.4.3. $\mathbb{G}_{4,2}$ è quindi una sottovarietà analitica compatta di $\mathbb{C}P^5$ di dimensione reale 8.

Il gruppo delle trasformazioni \mathbb{C} -lineari di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4) \simeq \mathbb{C}^6$ che preservano la forma bilineare simmetrica $\langle \cdot | \cdot \rangle$ è il gruppo ortogonale complesso $\mathbf{O}(6, \mathbb{C})$. Le trasformazioni di $\mathbf{O}(6, \mathbb{C})$ hanno determinante ± 1 . Quelle di determinante 1 formano il sottogruppo normale di indice due $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$. Più in generale, possiamo considerare il gruppo $\mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$ delle trasformazioni *conformi* per la forma $\langle \cdot | \cdot \rangle$, quelle cioè che la trasformano in un suo multiplo per uno scalare diverso da zero.

Abbiamo

Proposizione IV.4.4. Per ogni $a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$, l'applicazione \mathbb{C} -lineare

$$(4.4.3) \quad \lambda(a) : \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{C}^4), \text{ t.c. } \lambda(a)(v_1 \wedge v_2) = a(v_1) \wedge a(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}^4$$

soddisfa la condizione

$$(4.4.4) \quad \langle \lambda(a)(\alpha) \mid \lambda(a)(\beta) \rangle = \det(a) \langle \alpha \mid \beta \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$$

ed è quindi conforme per la forma $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

L'applicazione

$$(4.4.5) \quad \lambda : \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$$

è un epimorfismo di gruppi con nucleo $\pm I$. Per restrizione otteniamo epimorfismi di gruppi, con nucleo $\pm I$,

$$(4.4.6) \quad \{a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \mid \det a = \pm 1\} \xrightarrow{\lambda} \mathbf{O}(6, \mathbb{C}),$$

$$(4.4.7) \quad \mathbf{SL}_4(\mathbb{C}) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{SO}(6, \mathbb{C}).$$

DIMOSTRAZIONE. La (4.4.4) ed il fatto che $\lambda : \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$ sia un omomorfismo di gruppi seguono dalle proprietà del determinante. Dimostriamo ora che tale omomorfismo è surgettivo. Sia $\tau \in \mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$. Poiché τ trasforma elementi isotropi di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ in elementi isotropi di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, possiamo pensarla come una trasformazione che manda piani di \mathbb{C}^4 in piani di \mathbb{C}^4 . Inoltre, poiché due piani che si intersecano in una retta sono elementi isotropi non nulli distinti di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ tra loro ortogonali rispetto alla forma $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, τ definisce una trasformazione dello spazio proiettivo $\mathbb{C}P^3$ delle rette per l'origine di \mathbb{C}^4 che preserva le collineazioni. Per il teorema fondamentale della geometria proiettiva l'applicazione è una omografia, che si ottiene per passaggio al quoziente da un'applicazione $b \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$. Riscalando, otteniamo una $a = k \cdot b$, con $0 \neq k \in \mathbb{C}$, tale che $\lambda(a) = \tau$. \square

Osservazione IV.4.5. $\mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$ e $\mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$ sono varietà analitiche di dimensione reale 32 e la (4.4.5) è un rivestimento differenziabile a due fogli.

$\mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$ e $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$ sono varietà analitiche di dimensione reale 30 e la (4.4.7) è un rivestimento differenziabile a due fogli. Poiché $\mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$ è semplicemente connessa, essa è il rivestimento universale di $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$, (quest'ultima varietà ha gruppo fondamentale \mathbb{Z}_2).

La restrizione della forma bilineare simmetrica $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ al sottospazio reale $\Lambda^2(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{R}^6$ è non degenere di segnatura $(3, 3)$. Il gruppo delle trasformazioni \mathbb{R} -lineari che la lasciano invariante è quindi il gruppo ortogonale reale di segnatura $(3, 3)$ ed otteniamo perciò

Proposizione IV.4.6. L'applicazione

$$(4.4.8) \quad \mathbf{SL}_4(\mathbb{R}) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{SO}(3, 3)$$

è un epimorfismo di $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$ sulla componente connessa dell'identità di $\mathbf{SO}(3, 3)$, con nucleo $\pm I$. \square

Osservazione IV.4.7. Il gruppo $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$ è connesso, ma non semplicemente connesso (ha gruppo fondamentale \mathbb{Z}_2). Il gruppo $\mathbf{SO}(3, 3)$ ha due componenti connesse. $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$ e $\mathbf{SO}(3, 3)$ sono varietà analitiche di dimensione reale 15 e la (4.4.8) è un rivestimento differenziabile a due fogli della componente connessa dell'identità di $\mathbf{SO}(3, 3)$.

Introduciamo su $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ un'involuzione anti- \mathbb{C} -lineare \star , definendola, sugli elementi della base (4.4.2), mediante

$$\begin{aligned}\star e_1 \wedge e_2 &= e_3 \wedge e_4, & \star e_1 \wedge e_3 &= e_4 \wedge e_2, & \star e_1 \wedge e_4 &= e_2 \wedge e_3, \\ \star e_2 \wedge e_3 &= e_1 \wedge e_4, & \star e_4 \wedge e_2 &= e_1 \wedge e_3, & \star e_3 \wedge e_4 &= e_1 \wedge e_2.\end{aligned}$$

Sugli elementi della base canonica la matrice associata alla forma Hermitiana simmetrica

$$(4.4.9) \quad (\alpha | \beta) = \langle \alpha | \star \beta \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$$

è la matrice identità.

Lemma IV.4.8. *Il gruppo delle trasformazioni \mathbb{C} -lineari di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ che preservano sia la forma simmetrica $\langle \cdot | \cdot \rangle$ che la forma Hermitiana simmetrica $(\cdot | \cdot)$ è isomorfo al gruppo ortogonale $\mathbf{O}(6)$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti

$$V = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \mid \star \alpha = \alpha\}$$

è una forma reale³ di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. La restrizione a V di $\langle \cdot | \cdot \rangle$ e di $(\cdot | \cdot)$ coincidono e definiscono un prodotto scalare su V . Se τ è una trasformazione \mathbb{C} -lineare di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ che preserva sia $\langle \cdot | \cdot \rangle$ che $(\cdot | \cdot)$, abbiamo

$$\langle \tau(\alpha) | \tau(\star \beta) \rangle = \langle \alpha | \star \beta \rangle = (\alpha | \beta) = (\tau(\alpha) | \tau(\beta)) = \langle \tau(\alpha) | \star \tau(\beta) \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4).$$

Questo implica che $\star \tau = \tau \star$ e quindi che $\tau(V) = V$, e la restrizione di τ a V definisce un elemento di $\mathbf{O}(6)$. Viceversa, una trasformazione ortogonale su V si estende in modo unico ad una trasformazione \mathbb{C} -lineare su $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, che preserva sia $\langle \cdot | \cdot \rangle$ che $(\cdot | \cdot)$. \square

Proposizione IV.4.9. *Per restrizione, la trasformazione λ in (4.4.5), definisce epimorfismi di gruppo*

$$(4.4.10) \quad \{a \in \mathbf{U}(4) \mid \det(a) = \pm 1\} \xrightarrow{\lambda} \mathbf{O}(6),$$

$$(4.4.11) \quad \mathbf{SU}(4) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{SO}(6),$$

con nucleo $\pm I$.

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente verificare che, se $a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$ e $\lambda(a)$ preserva sia $\langle \cdot | \cdot \rangle$ che $(\cdot | \cdot)$ allora $a \in \mathbf{U}(4)$ e ha determinante ± 1 . Il fatto che $\det(a) = \pm 1$ segue dalla (4.4.4). Osserviamo poi che il fatto che $\lambda(a)$ commuti con l'operatore \star ci dice che la a trasforma due-piani ortogonali in due-piani ortogonali di \mathbb{C}^4 .

³Una forma reale V di uno spazio complesso W è un suo sottospazio vettoriale reale tale che $V \cap iV = \{0\}$ e $W = V \oplus iV$.

Da questo ricaviamo che è una trasformazione \mathbb{C} -lineare di \mathbb{C}^4 che preserva l'ortogonalità ed è quindi conforme per il prodotto scalare Hermitiano di \mathbb{C}^4 . Avendo determinante ± 1 è allora unitaria. \square

Osservazione IV.4.10. $\mathbf{SU}(4)$ ed $\mathbf{SO}(6)$ sono varietà differenziabili analitiche reali connesse e compatte di dimensione 15. Il gruppo $\mathbf{SU}(4)$ è semplicemente connesso e la (4.4.11) il rivestimento universale, a due fogli, di $\mathbf{SO}(6)$.

Fissiamo ora una forma alternata non degenere $\omega \in \Lambda^2([\mathbb{C}^4]^*)$. Possiamo ad esempio scegliere la forma a coefficienti reali

$$(4.4.12) \quad \omega = dx^1 \wedge dx^3 + dx^2 \wedge dx^4,$$

dove abbiamo indicato con dx^1, dx^2, dx^3, dx^4 la base duale della base canonica e_1, e_2, e_3, e_4 di \mathbb{C}^4 .

Ricordiamo che il gruppo simplettico complesso $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$ si può identificare al gruppo delle trasformazioni \mathbb{C} -lineari di \mathbb{C}^4 che preservano la forma alternata ω :

$$\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \mid \omega(a(v_1), a(v_2)) = \omega(v_1, v_2), \forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}^4\}.$$

Possiamo considerare ω come una forma lineare sullo spazio $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. In particolare,

$$(4.4.13) \quad W = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \mid \omega(\alpha) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale complesso, di dimensione cinque, di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, e

$$(4.4.14) \quad e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4$$

è una base di W . La restrizione della forma $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ a W ha in questa base la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ed è quindi non degenere. Osserviamo ancora che W è l'ortogonale, rispetto alla forma $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, di $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$.

Il gruppo delle trasformazioni \mathbb{C} -lineari di W che preservano la forma $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ è quindi il gruppo ortogonale complesso $\mathbf{O}(5, \mathbb{C})$. Ogni trasformazione $\tau \in \mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$ si estende in modo unico ad una trasformazione $\tilde{\tau} \in \mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$, che coincide con τ su W e lascia fisso l'elemento $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$. D'altra parte è chiaro che una $a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$ definisce una $\lambda(a)$ che lascia fisso $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$ se e soltanto se appartiene al sottogruppo $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$. Otteniamo perciò

Lemma IV.4.11. *L'applicazione*

$$(4.4.15) \quad \mathbf{Sp}(2, \mathbb{C}) \ni a \longrightarrow \lambda(a)|_W \in \mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$$

è un epimorfismo con nucleo $\pm I$. \square

Osservazione IV.4.12. $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$ e $\mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$ sono varietà analitiche connesse di dimensione reale 20; $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$ è semplicemente connesso e la (IV.4.11) è un rivestimento universale, differenziabile e a due fogli, di $\mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$.

La restrizione della forma bilineare simmetrica $\langle \cdot | \cdot \rangle$ al sottospazio reale

$$W_{\mathbb{R}} = W \cap \Lambda^2(\mathbb{R}^4) = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4) \mid \omega(\alpha) = 0\}$$

è non degenera ed ha segnatura $(3, 2)$. Poiché il gruppo delle trasformazioni che preservano una forma bilineare simmetrica di segnatura $(3, 2)$ è il gruppo ortogonale $\mathbf{O}(2, 3)$ di segnatura $(2, 3)$, otteniamo

Proposizione IV.4.13. *La restrizione dell'applicazione λ in (4.4.5) definisce un omomorfismo di gruppi*

$$(4.4.16) \quad \mathbf{Sp}(2, \mathbb{R}) \ni a \longrightarrow \lambda(a)|_{W_{\mathbb{R}}} \in \mathbf{SO}(2, 3),$$

surgettivo sulla componente connessa dell'identità di $\mathbf{SO}(2, 3)$, con nucleo $\pm I$. \square

Osservazione IV.4.14. $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{R})$ e $\mathbf{SO}(2, 3)$ sono varietà analitiche di dimensione reale 10. $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{R})$ è connesso e semplicemente connesso, $\mathbf{SO}(2, 3)$ consiste di due componenti connesse e la (4.4.16) il rivestimento universale, differenziabile e a due fogli, della sua componente connessa dell'identità.

L'involuzione anti- \mathbb{C} -lineare \star lascia invariante il sottospazio W e trasforma l'elemento $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$ nel suo opposto. In particolare, gli elementi di W che sono lasciati fissi da \star formano un sottospazio vettoriale reale $L_{\mathbb{R}}$ di dimensione cinque su cui la $\langle \cdot | \cdot \rangle$ definisce un prodotto scalare Euclideo. Otteniamo perciò:

Proposizione IV.4.15. *La restrizione dell'applicazione λ in (4.4.5) definisce un epimorfismo di gruppi*

$$(4.4.17) \quad \mathbf{Sp}(2) \ni a \longrightarrow \lambda(a)|_{L_{\mathbb{R}}} \in \mathbf{SO}(5),$$

con nucleo $\pm I$. \square

Osservazione IV.4.16. $\mathbf{Sp}(2)$ e $\mathbf{SO}(5)$ sono varietà analitiche connesse e compatte di dimensione reale 10. $\mathbf{Sp}(2)$ è semplicemente connessa e la (4.4.17) è il rivestimento universale, differenziabile e a due fogli, di $\mathbf{SO}(5)$.

IV.5. Varietà di Stiefel reali

Definizione IV.5.1. La varietà di Stiefel reale $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è l'insieme degli m -riferimenti ortogonali di \mathbb{R}^n . I suoi punti sono cioè le m -uple $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$ di vettori ortonormali di \mathbb{R}^n .

Identificando $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$ alla matrice $n \times m$ con colonne v_1, \dots, v_m otteniamo un'immersione naturale di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ nello spazio Euclideo \mathbb{R}^{nm} . Consideriamo su $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ la topologia di sottospazio.

La varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{R})$ è la sfera $(n-1)$ -dimensionale $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$; è poi $\mathbb{V}_{n,n-1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbf{SO}(n)$, $\mathbb{V}_{n,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbf{O}(n)$. Le varietà di Stiefel reali generalizzano quindi, allo stesso tempo, le sfere, i gruppi ortogonali ed i gruppi speciali ortogonali.

Teorema IV.5.2. *La varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è una varietà analitica compatta di dimensione $\frac{m(2n-m-1)}{2}$.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già considerato i casi $m = 1$, $m = n - 1$, $m = n$. Supporremo quindi nella discussione che segue che $1 < m \leq n - 2$.

Poiché

$$\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}(n \times m, \mathbb{R}) \mid A^\dagger A = I_m\},$$

ed abbiamo l'inclusione naturale

$$\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) \subset \underbrace{S^{n-1} \times \cdots \times S^{n-1}}_{m \text{ volte}} \subset \mathbb{R}^{nm},$$

il sottospazio $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ di \mathbb{R}^{nm} è compatto perché chiuso e limitato.

Descriviamo ora un atlante di carte locali di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Definiamo in primo luogo una carta locale con centro in $e = (e_1, \dots, e_m)$, dove abbiamo indicato con e_1, \dots, e_n la base canonica di \mathbb{R}^n . Sia U_e l'aperto formato dalle matrici $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ tali che

$$(4.5.1) \quad \det \begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_j^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^j & \cdots & v_j^j \end{pmatrix} > 0, \quad \text{per } 1 \leq j \leq m.$$

Vogliamo dimostrare che l'applicazione $x_e : U_e \rightarrow B^{n-1} \times \cdots \times B^{n-j} \times \cdots \times B^{n-m}$ definita da

$$x_e(v) = (v_1^2, \dots, v_1^n, \dots; v_j^{j+1}, \dots, v_j^n, \dots; v_m^{m+1}, \dots, v_m^n).$$

è un omeomorfismo. La x_e è senz'altro ben definita, continua ed aperta. Sarà quindi sufficiente dimostrare che la x_e è bigettiva. A questo scopo dimostriamo per ricorrenza su $k = 1, \dots, m$ che

$$(P_k) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (w_1, \dots, w_k) \in B^{n-1} \times \cdots \times B^{n-k}, \exists (u_1, \dots, u_k) \in \bar{B}^1 \times \cdots \times \bar{B}^k \text{ tali che} \\ \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_k \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_k \end{pmatrix} \in \mathbb{V}_{n,k} \text{ e } \det \begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_j^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_i^j & \cdots & v_j^j \end{pmatrix} > 0 \text{ per } 1 \leq j \leq k. \end{array} \right.$$

Per $k = 1$ abbiamo

$$v_1^1 = \sqrt{1 - \sum_{i=2}^n |v_1^i|^2}.$$

Supponiamo ora $k \geq 1$ e che valga la (P_k) . Abbiamo quindi già ottenuto i vettori v_1, \dots, v_k e la condizione che la disuguaglianza in (4.5.1) valga per $j = k$, ci dice che $v_1, \dots, v_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ è una base di \mathbb{R}^n . Utilizzando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt possiamo ottenere in modo unico una base ortonormale $a = (a_1, \dots, a_m)$ ponendo

$$\begin{cases} a_i = v_i & \text{se } 1 \leq i \leq k, \\ a_i = \lambda_i \left(e_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_j^i a_j \right) & \text{con } \lambda_i > 0, \text{ se } k < i \leq n. \end{cases}$$

Qui $a_j^i = (e_i | a_j)$ sono le componenti i -esime del vettore a_j . I vettori a_i con $i > k$ sono definiti per ricorrenza, in quanto la definizione di ciascuno di essi utilizza i

vettori precedenti, e i loro coefficienti dipendono analiticamente dai coefficienti v_h^j per $1 \leq h \leq k$ e $h < j \leq n$.

Osserviamo ora che

$$a^{-1}(v_1, \dots, v_{k+1}) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \xi_1^{k+1} & \cdots & \xi_k^{k+1} & \xi_{k+1}^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^n & \cdots & \xi_k^n & \xi_{k+1}^n \end{pmatrix}$$

I coefficienti ξ_h^j di questa matrice, ad eccezione del coefficiente ξ_{k+1}^{k+1} , sono funzioni algebriche dei v_h^j per $1 \leq h \leq k+1$ ed $h < k \leq n$. Se vogliamo che la matrice v soddisfi la disuguaglianza in (4.5.1) per $j = k+1$ occorre scegliere

$$\xi_{k+1}^{k+1} = \sqrt{1 - \sum_{j=k+2}^n |w_{k+1}^j|^2}.$$

Otteniamo allora i coefficienti di v_{k+1} moltiplicando $a^{-1}(v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$ a sinistra per a . Questo dimostra (P_{k+1}) e quindi per ricorrenza la (P_k) vale per tutti gli interi k con $1 \leq k \leq m$.

Otteniamo un atlante analitico reale $\mathcal{A} = \{(U_a, x_a) \mid a \in \mathbf{O}(n)\}$ su $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ ponendo $U_a = a \cdot U_e$ ed $x_a(v) = x_e(a^{-1}v)$ per $v = (v_1, \dots, v_m) \in U_a$.

In particolare

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) = \sum_{h=1}^m (n-h) = nm - \frac{m(m+1)}{2}.$$

□

Il gruppo speciale ortogonale $\mathbf{SO}(n)$ opera transitivamente sulle varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ per ogni $1 \leq m \leq n-1$. Lo stabilizzatore di un punto è isomorfo al gruppo $\mathbf{SO}(n-m)$. Quindi:

Proposizione IV.5.3. *Sia $1 \leq m < n$. La varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è connessa per archi ed è omeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-m)$. Abbiamo la successione esatta di omotopia⁴*

$$(4.5.2) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{SO}(n-m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{SO}(n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(n-m)) & \longrightarrow & \cdots & \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n-m)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ & & \longrightarrow & 0. & & & \end{array}$$

Siano k, m, n interi con $1 \leq k < m < n$. L'applicazione

$$(4.5.3) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})$$

⁴Per semplicità in questa, e nelle altre successioni esatte in questo paragrafo ometteremo di indicare il punto base.

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{R})$. Otteniamo quindi una successione esatta in omotopia

$$(4.5.4) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \cdots & \end{array}$$

Otteniamo perciò la

Proposizione IV.5.4. *Se $1 \leq m < n$, la varietà di Stiefel reale $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$, è $(n-m-1)$ -connessa e*

$$(4.5.5) \quad \pi_{n-m}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n-m \text{ è pari, o } m=1, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } n-m \text{ è dispari ed } m \geq 2. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per ricorrenza su $m \geq 1$. Poiché, come abbiamo osservato in precedenza, $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{R}) = S^{n-1}$, la tesi è vera se $m = 1$. Supponiamo allora che $m > 1$ e che la tesi sia vera per le varietà di Stiefel reali $\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})$ con $1 \leq k < m$. Consideriamo la successione esatta (4.5.4) con $k = m-1$. Se $h < n-m$, allora $\pi_h(\mathbb{V}_{n-m+1,1}(\mathbb{R})) = \pi_h(S^{n-m}) = 0$, e $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m-1}(\mathbb{R})) = 0$ per l'ipotesi induttiva. Quindi anche $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) = 0$.

Dimostriamo ora la (4.5.5). Sappiamo che essa vale per $m = 1$.

Esaminiamo a parte il caso $m = 2$. Per $m = 2$, $k = 1$ ed $h = n-2$, la (4.5.4) dà:

$$(4.5.6) \quad \mathbb{Z} = \pi_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\Delta_*} \mathbb{Z} = \pi_{n-2}(S^{n-2}) \longrightarrow \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n,2}) \longrightarrow 0.$$

Per calcolare l'applicazione Δ_* in (4.5.6), consideriamo il diagramma commutativo di fibrazioni

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{SO}(n-1) & \longrightarrow & \mathbf{SO}(n) & \longrightarrow & S^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{V}_{n-1,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S^{n-1}. \end{array}$$

Otteniamo allora un diagramma commutativo

$$(4.5.7) \quad \begin{array}{ccccc} \pi_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\Delta_*} & \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n-1)) & \longrightarrow & \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n)) \\ \parallel & & \downarrow p_* & & \downarrow \\ \pi_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\Delta_*} & \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n-1,1}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{R})). \end{array}$$

Prima di procedere nella dimostrazione della proposizione, premettiamo alcuni risultati relativi al gruppo ortogonale.

Lemma IV.5.5. *Consideriamo l'applicazione $\Psi : S^n \times S^n \rightarrow S^n$ definita da*

$$(4.5.8) \quad S^n \times S^n \ni (x, y) \rightarrow \Psi(x, y) = y - 2(x|y)x \in S^n.$$

Per ogni $x \in S^n$, la $S^n \ni y \rightarrow F(x, y) \in S^n$ ha grado (-1) .

Per ogni $y \in S^n$, la $S^n \ni x \rightarrow F(x, y) \in S^n$ ha grado $1 - (-1)^n$, cioè 2 se n è dispari e 0 se n è pari.

DIMOSTRAZIONE. Sia e_0, e_1, \dots, e_n la base canonica di \mathbb{R}^{n+1} .

Fissato $x = e_1$, la $y \rightarrow F(e_1, y)$ è la sospensione della

$$S^1 \ni (x_0, x_1) \rightarrow (x_0, -x_1) \in S^1,$$

che possiamo anche scrivere, mediante l'inclusione $S^1 \subset \mathbb{C}$, come

$$S^1 \ni z \rightarrow \bar{z} = z^{-1} \in S^1.$$

Quindi la $y \rightarrow F(e_1, y)$ ha grado (-1) e perciò tutte le $y \rightarrow f_x(y) = F(x, y)$ hanno grado (-1) .

Per dimostrare che le $x \rightarrow \psi_y(x) = F(x, y)$ hanno grado $1 - (-1)^n$, poiché S^n è connesso per archi, possiamo limitarci a considerare il caso speciale in cui $y = -e_n$. Scriviamo per semplicità $\psi = \psi_{-e_n}$. Consideriamo quindi l'applicazione

$$S^n \ni x = (x_n, \dots, x_1) \rightarrow \psi(x) = (2x_n x_0, \dots, 2x_n x_{n-1}, 2x_n^2 - 1) = (2x_n) \cdot x - e_n \in S^n.$$

Abbiamo $\psi(x) = \psi(-x)$. Quindi, se $a : S^n \ni x \rightarrow -x \in S^n$ è l'applicazione antipodale, $\psi = \psi \circ a$. Quindi, poiché il grado della mappa antipodale è $(-1)^{n+1}$, da

$$\deg(\psi) = \deg(\psi \circ a) = \deg(\psi) \cdot (-1)^{n+1}$$

otteniamo che $\deg(\psi) = 0$ se n è pari.

Consideriamo ora il caso in cui n sia dispari. Osserviamo che $\psi(S^{n-1}) = \{-e_0\}$. Possiamo quindi definire due applicazioni

$$\psi_+(x) \begin{cases} \psi(x) & \text{se } x \in S_+^n, \\ -e_0 & \text{se } x \in S_-^n, \end{cases}, \quad \psi_-(x) \begin{cases} -e_0 & \text{se } x \in S_+^n, \\ \psi(x) & \text{se } x \in S_-^n. \end{cases}$$

L'elemento definito da ψ in $\pi_n(S^n, e_0)$ è la somma delle classi di omotopia di ψ_+ e ψ_- . Poiché $\psi_- = \psi_+ \circ a$, abbiamo $\deg(\psi_-) = \deg(\psi_+)$, perché la mappa antipodale ha grado 1. Quindi $\deg(\psi) = 2 \deg(\psi_+)$. Osserviamo ora che $\psi_+(x) \neq -x$ per ogni $x \in S^n$. Quindi

$$S^n \times I \ni (x, t) \rightarrow \Psi_+(x, t) = \frac{(1-t)\psi_+(x) + tx}{|(1-t)\psi_+(x) + tx|} \in S^n$$

è un'omotopia di ψ_+ con l'identità. Ciò dimostra che ψ_+ ha grado 1, e quindi ψ ha grado 2. \square

La matrice della simmetria σ_x rispetto al vettore $x = (x_0, \dots, x_n) \in S^n$ è la

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 - 2x_0^2 & -2x_0x_1 & \dots & -2x_0x_n \\ -2x_0x_1 & 1 - 2x_1^2 & \dots & -2x_1x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2x_0x_n & -2x_1x_n & \dots & 1 - 2x_n^2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di σ_x è (-1) . Definiamo $\phi_n : S^n \rightarrow \mathbf{SO}(n+1)$ mediante

$$\phi_n : S^{n-1} \ni x \rightarrow \sigma_x \circ \sigma_{e_0}.$$

La restrizione di ϕ_n alla semisfera superiore $S_+^{n+1} = S^n \cap \{x_n \geq 0\}$ trasforma la coppia (S_+^n, S^{n-1}) nella coppia $(\mathbf{SO}(n+1), \mathbf{SO}(n))$. Consideriamo l'applicazione $p : \mathbf{SO}(n+1) \ni g \rightarrow g(e_n) \in S^n$. Abbiamo

$$\begin{aligned} p(\phi(x)) &= \phi(x)(e_n) = \sigma_x \circ \sigma_{e_0}(e_n) \\ &= \sigma_x(e_0) = -\psi_+(x) \quad \forall x \in S_+^n. \end{aligned}$$

Possiamo quindi considerare l'estensione di $p \circ \phi$ che si ottiene mandando tutta la semisfera S_+^n nel punto e_n . L'applicazione che si ottiene è la $a \circ \psi_+$, ed ha quindi, poiché ψ_+ ha grado 1, grado uguale a $(-1)^{n+1}$. Osserviamo infine che la restrizione di ϕ_n all'equatore è la ϕ_{n-1} .

Questa applicazione ci permette di descrivere, nella successione esatta

$$\mathbb{Z} = \pi_n(S^n) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(n)) \xrightarrow{\iota_*} \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(n+1)) \longrightarrow 0$$

il nucleo della ι_* . Abbiamo infatti

Proposizione IV.5.6. *Il nucleo di ι_* è il sottogruppo ciclico generato da $\alpha = \Delta_*(\text{id}_{S^n})$. L'applicazione $\phi_{n-1} : S^{n-1} \rightarrow \mathbf{SO}(n)$ rappresenta l'elemento $(-1)^{n+1}\alpha$.*

Utilizziamo ora il diagramma commutativo (4.5.7). Poiché l'immagine $p_* \circ \Delta_*$ della classe di $\text{id}_{S^{n-1}}$ è 0 o $2[\text{id}_{S^{n-2}}]$ a seconda che n sia dispari o pari, otteniamo la (4.5.5). \square

IV.6. Varietà di Grassmann

Indichiamo con $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione m di \mathbb{R}^n . Sia $\mathbb{M}(n \times m, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{nm}$ lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times m$, ed indichiamo con $\mathbb{M}(n \times m, m, \mathbb{R})$ l'aperto delle matrici di rango m di $\mathbb{M}(n \times m, \mathbb{R})$. Abbiamo una bigezione di $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ sul quoziente

$$\mathbb{M}(n \times m, m, \mathbb{R}) / \sim, \quad \text{ove } X \sim Y \Leftrightarrow \exists a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \text{ tale che } X = Ya.$$

Questo ci permette di definire la topologia di $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Proposizione IV.6.1. *Il quoziente $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ è uno spazio topologico di Hausdorff, connesso e compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Per verificare che $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ è connesso e compatto, basta osservare che è uno spazio omogeneo per l'azione transitiva del gruppo speciale ortogonale $\mathbf{SO}(n)$. Lo stabilizzatore di un punto è isomorfo al sottogruppo chiuso $\mathbf{S}(\mathbf{O}(m) \times \mathbf{O}(n-m))$ e quindi $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ è di Hausdorff. \square

Lemma IV.6.2. *Sia $\mathcal{B} \simeq \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ l'insieme delle basi di \mathbb{R}^n .*

Se $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \mathcal{B}$, indichiamo con $\pi_{\vec{\epsilon}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la proiezione che associa a $v = \sum_{i=1}^n v^i \epsilon_i$ l'elemento $(v^1, \dots, v^m) \in \mathbb{R}^m$.

L'insieme

$$U_{\vec{\epsilon}} = \{p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \mid \pi_{\vec{\epsilon}}(p) = \mathbb{R}^m\}$$

è aperto in $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ e l'applicazione

$$\phi_{\vec{\epsilon}} : \mathbb{M}(m \times (n-m), \mathbb{R}) \longrightarrow U_{\vec{\epsilon}}$$

che associa alla matrice $(x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ m < j \leq n}}$ l' m -piano

$$\left\langle \epsilon_1 + \sum_{j=m+1}^n x_{1,j} \epsilon_j, \dots, \epsilon_m + \sum_{j=m+1}^n x_{m,j} \epsilon_j \right\rangle$$

è un omeomorfismo di $\mathbb{M}(m \times (n-m), \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{m(n-m)}$ su $U_{\vec{z}}$.

Abbiamo perciò

Proposizione IV.6.3. *Il quoziente $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ è una varietà topologica connessa e compatta di dimensione $m(n-m)$.*

Proposizione IV.6.4. *Se $\vec{z} \in \mathcal{B}$, indichiamo con $x_{\vec{z}} : U_{\vec{z}} \rightarrow \mathbb{M}(m \times (n-m), \mathbb{R})$ l'inversa di $\phi_{\vec{z}}$. La famiglia $\mathcal{A} = \{U_{\vec{z}}, x_{\vec{z}}\}_{\vec{z} \in \mathcal{B}}$ è un atlante analitico di $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$, in cui le funzioni di transizione sono razionali.*

Definizione IV.6.5. $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$, con la struttura di varietà analitica reale definita dall'atlante $\{U_{\vec{z}}, x_{\vec{z}}\}$, si dice la *varietà di Grassmann* degli m -piani di \mathbb{R}^n .

Osserviamo che $\mathbb{G}_{n,1} \simeq \mathbb{R}P^{n-1}$ e quindi le varietà di Grassmann reali costituiscono una classe di varietà che comprende gli spazi proiettivi reali.

Osservazione IV.6.6. Otteniamo un atlante di $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ facendo variare \vec{z} tra gli elementi della forma $(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$, $1 \leq i_{m+1} < \dots < i_n \leq n$, ottenendo così un atlante di cardinalità finita $\binom{n}{m}$.

Proposizione IV.6.7. *Fissato un prodotto scalare su \mathbb{R}^n , l'applicazione*

$$(4.6.1) \quad \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \ni p \rightarrow p^\perp \in \mathbb{G}_{n,n-m}(\mathbb{R})$$

che associa ad ogni m -piano p l' $(n-m)$ -piano ad esso ortogonale è un diffeomorfismo.⁵

Nello studio dell'omotopia delle varietà di Grassmann potremo quindi supporre nel seguito che $n \geq 2m$.

Consideriamo l'applicazione naturale

$$(4.6.2) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$$

che associa ad un sistema $\vec{v} \in \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ di m vettori ortonormali il sottospazio $p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ da essi generato. La (4.6.2) è una fibrazione localmente banale con fibra omeomorfa al gruppo $\mathbf{O}(m)$. Abbiamo quindi la successione esatta:

$$(4.6.3) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{O}(m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) & \\ & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{O}(m)) & \longrightarrow & \dots & & \end{array}$$

Lemma IV.6.8. *Per ogni intero non negativo h ed ogni coppia d'interi positivi m, k , con $m \leq k$, le applicazioni $\iota_* : \pi_h(\mathbf{O}(m)) \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R}))$ hanno immagine nulla.*

⁵Per $m = 1$, l'applicazione è una polarità proiettiva rispetto ad una quadrica senza punti reali.

DIMOSTRAZIONE. Rappresentiamo $\mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R})$ come lo spazio delle matrici reali M di tipo $(k+m) \times m$ tali che ${}^t M M = I_m$. Allora l'inclusione $\iota : \mathbf{O}(m) \hookrightarrow \mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R})$ identifica $\mathbf{O}(m)$ al sottospazio delle matrici

$$M_g = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } g \in \mathbf{O}(m).$$

L'omotopia $F : \mathbf{O}(m) \times I \rightarrow \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ definita da

$$F(g, t) = \begin{pmatrix} g \cos^2(t\pi/2) + I_m \sin^2(t\pi/2) \\ (g - I_m) \sin(t\pi/2) \cos(t\pi/2) \\ 0_{n-2m,m} \end{pmatrix}$$

definisce una retrazione di deformazione di $\mathbf{O}(m)$ sul punto base di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$. Da questo segue la tesi. \square

In particolare, dalla successione esatta di Serre otteniamo le successioni esatte corte:

$$(4.6.4) \quad 0 \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{O}(m)) \rightarrow 0.$$

Abbiamo perciò, tenuto conto dell'omeomorfismo (4.6.1),

Teorema IV.6.9. *Siano $1 \leq m < n$ e $\nu = \min\{m, n-m\}$. Per ogni $h \geq 1$ abbiamo*

$$(4.6.5) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \pi_h(\mathbb{V}_{n,\nu}(\mathbb{R})) \oplus \pi_{h-1}(\mathbf{O}(\nu)).$$

In particolare, poiché $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è semplicemente connesso per $n-m > 1$, otteniamo che

$$(4.6.6) \quad \pi_1(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2 \quad \forall n \geq 3 \quad \text{e} \quad 1 \leq m < n$$

ed inoltre

$$(4.6.7) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(\nu)) & \text{se } 2 \leq h < n - \nu, \\ \mathbb{Z} \oplus \pi_{n-\nu-1}(\mathbf{SO}(\nu)) & \text{se } h = n - \nu \text{ è pari o } \nu = 1, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \pi_{n-\nu-1}(\mathbf{SO}(\nu)) & \text{se } h = n - \nu \text{ è dispari e } \nu \geq 3. \end{cases}$$

Se $n' > n$, abbiamo un'inclusione naturale

$$(4.6.8) \quad \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R}).$$

Proposizione IV.6.10. *L'applicazione $\pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \rightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R}))$ indotta dalla (4.6.8) è un isomorfismo per ogni $h < \min\{m, n-m\}$ ed ogni $n' > n$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $h < n-m$, e consideriamo la partizione cellulare di $\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R})$ data dalle celle di Schubert, lo scheletro $h+1$ -dimensionale di $\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R})$ è contenuto in $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$. \square

IV.7. Varietà di Stiefel e di Grassmann complesse

In modo analogo definiamo le varietà di Stiefel e di Grassmann complesse.

Definizione IV.7.1. *La varietà di Stiefel complessa $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è costituita dalle m -uple di vettori ortonormali di \mathbb{C}^n .*

Possiamo identificare $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ all'insieme delle matrici complesse Z , di tipo $n \times m$, che soddisfano $Z^*Z = I_m$. Osserviamo che $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{C}) \simeq S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, che $\mathbb{V}_{n,n}(\mathbb{C}) \simeq \mathbf{U}(n)$ e che $\mathbb{V}_{n-1}(\mathbb{C}) \simeq \mathbf{SU}(n)$. Le varietà di Stiefel complesse generalizzano quindi le sfere di dimensione dispari e i gruppi unitari.

Abbiamo:

Proposizione IV.7.2. *Per ogni $0 \leq m < n$, la varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è una varietà analitica di Hausdorff, di dimensione reale $m(2n-m)$, compatta e connessa per archi. Essa è omeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-m)$.*

DIMOSTRAZIONE. $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è uno spazio topologico di Hausdorff compatto perché è un sottoinsieme chiuso e limitato di \mathbb{C}^{nm} . Possiamo definire la sua struttura differenziale descrivendo una carta locale con centro in un punto $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$. Completiamo v_1, \dots, v_m ad una base ortonormale (v_1, \dots, v_n) di \mathbb{C}^n . Assegnamo numeri complessi $z_{h,j}$ per $1 \leq j < h \leq n$ e numeri reali y_j per $j = 1, \dots, m$, tali che $y_j^2 + \sum_{h=j+1}^n |z_{h,j}|^2 < 1$ per ogni $j = 1, \dots, m$. Risulteranno allora univocamente determinati numeri complessi $z_{h,j}$, per $1 \leq h \leq j \leq m$ tali che $\text{Im}(z_{j,j}) = y_j$, $\text{Re}(z_{j,j}) > 0$ e detta Z la matrice $Z = (z_{h,j})_{\substack{1 \leq h \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$, sia $Z^*Z = I_m$. I numeri reali y_j e le parti reali e immaginarie degli $z_{h,j}$ con $1 \leq j < h \leq n$ sono le coordinate di una carta locale con centro in \vec{v} . La dimensione della varietà è quindi

$$\sum_{j=1}^m [2(n-j) + 1] = m(2n+1) - m(m+1) = 2nm - m^2 = m(2n-m).$$

Chiaramente il gruppo speciale unitario $\mathbf{SU}(n)$ opera transitivamente su $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$, con isotropia $\mathbf{SU}(n-m)$. Quindi $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è omeomorfo al quoziente $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-m)$ e perciò compatto e connesso per archi. \square

Proposizione IV.7.3. *La varietà di Stiefel complessa $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è $(2n-2m)$ -connessa e $\pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissato un intero k con $1 \leq k < m$, l'applicazione

$$(4.7.1) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C}).$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})$. Otteniamo quindi una successione esatta

$$(4.7.2) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \\ & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

Ragioniamo per ricorrenza su $m \geq 1$. Per $m = 1$, $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{C}) = S^{2n-1}$, e sappiamo che la sfera di dimensione $(2n-1)$ è $(2n-2)$ -connessa. Supponiamo ora che $m > 1$ e che, per ogni r con $1 \leq r < m$ la varietà di Stiefel complessa $\mathbb{V}_{n,r}(\mathbb{C})$ sia $(2n-2r)$ -connessa. Utilizziamo la successione esatta (4.7.2) con $k = 1$. Poiché per l'ipotesi induttiva $\mathbb{V}_{n-1,m-1}(\mathbb{C})$ è $(2n-2m)$ -connesso e $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{C}) = S^{2n-1}$ è $(2n-2)$ -connesso, otteniamo che $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}))$ è $(2n-2)$ -connesso.

Utilizziamo ancora la successione esatta (4.7.2) con $k = (m-1)$ ed $h = 2n-2m$. Poiché $\mathbb{V}_{n,m-1}(\mathbb{C})$ è $(2n-2m+2)$ -connessa, otteniamo l'isomorfismo

$$\pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) \simeq \pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n-m+1,1}(\mathbb{C})) = \pi_{2n-2m+1}(S^{2n-2m-1}) = \mathbb{Z}.$$

□

L'applicazione

$$(4.7.3) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow \langle v_1, \dots, v_m \rangle \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathbf{U}(m)$. Otteniamo quindi una successione esatta d'omotopia

$$(4.7.4) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) \\ \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{U}(m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) & \\ & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{U}(m)) & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Con una dimostrazione analoga a quella del Lemma IV.6.8 otteniamo

Lemma IV.7.4. *Se $1 \leq m < 2m \leq n$, allora l'applicazione $\pi_h(\mathbf{U}(m)) \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}))$ in (4.7.4) ha immagine nulla.*

Questo dà, per ogni intero $h \geq 1$ e per $1 \leq m < 2m \leq n$, le successioni esatte corte

$$(4.7.5) \quad 0 \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{U}(m)) \rightarrow 0.$$

Otteniamo perciò il

Teorema IV.7.5. *Sia $v = \min\{m, n-m\}$. Allora, per ogni $1 \leq m < n$ ed $h \geq 1$*

$$(4.7.6) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \pi_h(\mathbb{V}_{n,v}(\mathbb{C})) \oplus \pi_{h-1}(\mathbf{U}(v)).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $2m \leq n$, la tesi segue dalla (4.7.5). Per completare la dimostrazione, è sufficiente utilizzare l'omeomorfismo

$$(4.7.7) \quad \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni p \rightarrow p^\perp \in \mathbb{G}_{n,n-m}(\mathbb{C}),$$

dove p^\perp è l' $(n-m)$ -piano ortogonale a p , rispetto ad un prodotto scalare Hermitiano in \mathbb{C}^n . □

Otteniamo in particolare

$$(4.7.8) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \begin{cases} \pi_{h-1}(\mathbf{U}(v)) & \text{se } 1 \leq h \leq 2n-2v, \\ \mathbb{Z} \oplus \pi_{2n-2v}(\mathbf{U}(v)) & \text{se } h = 2n-2v, \end{cases}$$

e quindi $\pi_1(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = 0$ e $\pi_2(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$ per ogni $1 \leq m < n$.

IV.8. Matrici di rango assegnato

Il gruppo prodotto $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ opera sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{m \times n}$ delle matrici reali $m \times n$ mediante diffeomorfismi di classe \mathcal{C}^ω :

$$(4.8.1) \quad \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{m \times n} \ni (a, b, X) \rightarrow aXb^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Le orbite di questa azione sono i sottospazi

$$\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \text{rank}(X) = k\}, \quad 0 \leq k \leq \min\{m, n\}.$$

Proposizione IV.8.1. Per ogni $k = 0, \dots, \min\{m, n\}$ il sottospazio $\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R})$ di $\mathbb{R}^{m \times n}$ è una sottovarietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $k(n + m - k)$.

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo le matrici di $\mathbb{R}^{m \times n}$ come matrici a blocchi

$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ X_1^2 & X_2^2 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} X_1^1 \in \mathbb{R}^{k \times k}, & X_1^2 \in \mathbb{R}^{(m-k) \times k}, \\ X_2^1 \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}, & X_2^2 \in \mathbb{R}^{(m-k) \times (n-k)}. \end{cases}$$

L'insieme

$$U_{I_m, I_n} = \{X \in \mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R}) \mid \det X_1^1 > 0\}$$

è un intorno aperto di $X_0 = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R})$. Definiamo una carta locale in U_{I_m, I_n} mediante

$$\phi_{I_m \times I_n} : U_{X_0} \ni X \rightarrow (X_1^1, X_2^1, X_1^2) \in \mathbf{GL}_k^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{k \times (n-k)} \times \mathbb{R}^{(m-k) \times k},$$

ove abbiamo indicato con $\mathbf{GL}_k^+(\mathbb{R})$ l'aperto delle matrici reali in $\mathbb{R}^{k \times k}$ che hanno determinante positivo.

Il fatto che questa sia una carta locale si può verificare osservando che l'applicazione

$$(X_1^1, x_2^1, X_1^2) \rightarrow \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ X_1^2 & X_1^1 [X_1^1]^{-1} X_2^1 \end{pmatrix}$$

è l'inversa di $\phi_{I_m \times I_n}$.

Se $(a, b) \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, la coppia che consiste dell'aperto $U_{a,b} = aU_{I_m, I_n}b$ e dell'omeomorfismo $\phi_{a,b}(X) = \phi_{I_m, I_n}(a^{-1}Xb^{-1})$ è una carta locale in $\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R})$, e $\mathcal{A} = \{(U_{a,b}, \phi_{a,b}) \mid (a, b) \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})\}$ è un atlante di classe \mathcal{C}^ω di $\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R})$. Poiché $\mathbf{GL}_k^+(\mathbb{R})$ è un aperto di $\mathbb{R}^{k \times k}$, la dimensione di $\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R})$ è $k^2 + k(n - k) + (m - k)k = k(m + n - k)$. \square

IV.9. Varietà dei sottospazi Lagrangiani

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione pari $2n$ ed $\omega \in \Lambda^2 V^*$ una forma bilineare alternata non degenere su V .

Definizione IV.9.1. Un sottospazio W di V è *isotro* se $\omega(w_1, w_2) = 0$ per ogni $w_1, w_2 \in W$.

Un sottospazio isotropo massimale, cioè di dimensione n , si dice *Lagrangiano*.

Sia W_0 un sottospazio Lagrangiano di V . Una base e_1, \dots, e_n di W_0 si completa ad una base e_1, \dots, e_{2n} di V con

$$(4.9.1) \quad \omega(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j - i = n, \\ -1 & \text{se } i - j = n, \\ 0 & \text{se } |i - j| \neq n. \end{cases}$$

Un sottospazio Lagrangiano W trasversale al sottospazio Lagrangiano $\langle e_{n+1}, \dots, e_n \rangle$ ammette una base $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ con

$$\varepsilon_j = e_j + \sum_{i=n+1}^{2n} x_{ij} e_i, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Nella base e_1, \dots, e_{2n} la matrice associata ad ω è

$$(4.9.2) \quad \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

La condizione che W sia Lagrangiana si esprime, in termini della matrice $\begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix}$ che esprime i vettori $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ nella base e_1, \dots, e_{2n} , mediante

$$(I, X^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix} = X - X^\dagger = 0.$$

Quindi X è una matrice simmetrica $n \times n$.

Indichiamo con \mathfrak{S}_n lo spazio vettoriale reale di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$ delle matrici simmetriche reali $n \times n$. Le inverse delle applicazioni

$$\mathfrak{S}_n \ni X = (x_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

↓

$$\langle e_j + \sum_{i=n+1}^{2n} x_{ij} e_{n+i}, \quad 1 \leq j \leq n \rangle \in \{W \in M \mid W \pitchfork \langle e_{n+1}, \dots, e_{2n} \rangle\},$$

al variare di e_1, \dots, e_{2n} nell'insieme delle basi di V in cui la matrice associata ad ω abbia la forma (4.9.2), definiscono un atlante analitico e quindi una struttura di varietà analitica di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$ su M .

Se g è un prodotto scalare su V , risulta definita un'applicazione lineare $J \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ tale che

$$(4.9.3) \quad \omega(v, w) = g(Jv, w), \quad \forall v, w \in V.$$

Un prodotto scalare g su V è *compatibile* con ω se J è un'anti-involuzione di V , se cioè $J^2 = -I$.

Ad esempio, se e_1, \dots, e_{2n} è una base di V per cui valga la (4.9.1), il prodotto scalare definito da

$$(4.9.4) \quad g(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

è compatibile con ω .

In questo caso la J definisce su V la struttura di uno spazio vettoriale complesso di dimensione n e la

$$(4.9.5) \quad (v|w) = g(v, w) + i\omega(v, w)$$

definisce un prodotto scalare Hermitiano. Abbiamo:

$$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \omega(a(v), a(w)) = \omega(v, w), \forall v, w \in V\},$$

$$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) \cap \mathbf{O}(2n) = \{a \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) \mid g(a(v), a(w)) = g(v, w), \forall v, w \in V\} \simeq \mathbf{U}(n).$$

Il gruppo $\mathbf{U}(n)$ opera transitivamente su M . In particolare M è connesso e compatto. Lo stabilizzatore di un sottospazio Lagrangiano è il gruppo ortogonale $\mathbf{O}(n)$ ed abbiamo quindi una fibrazione naturale

$$(4.9.6) \quad \pi : \mathbf{U}(n) \longrightarrow M \simeq \mathbf{U}(n)/\mathbf{O}(n) \quad \text{con fibra } \mathbf{O}(n).$$

Otteniamo la successione esatta di omotopia

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{O}(n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{U}(n)) & \longrightarrow & \pi_h(M) \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{O}(n)) & \longrightarrow & \cdots & \end{array}$$

da cui si possono calcolare i gruppi di omotopia di M a partire da quelli dei gruppi unitari e del gruppo ortogonale. In particolare, per quanto riguarda il gruppo fondamentale, dal momento che $\mathbf{U}(n)$ ed M sono connessi, ed $\mathbf{O}(n)$ ha due componenti connesse, abbiamo una successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(\mathbf{O}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{U}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(M) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0, \\ \simeq \mathbb{Z}_2 & & \simeq \mathbb{Z} & & & & \end{array}$$

da cui ricaviamo che $\pi_1(M) \simeq \mathbb{Z}$.

CAPITOLO V

Il lemma di Morse-Sard

Il Lemma di Morse-Sard descrive alcune importanti proprietà delle applicazioni differenziabili. Esso ha conseguenze importanti sia nella geometria che nella topologia differenziale. Ad esempio, utilizzando il Lemma di Sard, dimostreremo nel Capitolo VI il teorema d'immersione di Whitney¹, che ci dice che ogni varietà differenziabile paracompatta di classe \mathcal{C}^∞ e di dimensione m è diffeomorfa ad una sottovarietà propria di \mathbb{R}^{2m+1} . Tra i diversi argomenti di cui il Lemma di Sard costituisce un'indispensabile premessa, citiamo la trasversalità, la teoria delle singolarità, la teoria di Morse.

Il Lemma fu dimostrato da Anthony P. Morse² nel 1939 per funzioni a valori scalari e generalizzato da Arthur Sard³, nel 1942, al caso di funzioni a valori in una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ . In letteratura il risultato è citato come *Teorema di Sard*, o *Lemma di Sard*, o *Teorema di Morse-Sard*.

V.1. Il caso degli spazi Euclidei

V.1.1. Applicazioni differenziabili $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $m < n$.

Lemma V.1.1. *Siano m, n , due interi positivi con $m < n$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^1 , definita su un aperto A di \mathbb{R}^m . Allora $f(A)$ è di prima categoria ed ha misura di Lebesgue nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni intero positivo N ed ogni $\alpha \in \mathbf{Z}^m$ indichiamo con $Q(\alpha, N)$ il cubo m -dimensionale di lato $1/N$ e centro nel punto α/N :

$$Q(\alpha, N) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |Nx^i - \alpha^i| \leq 1/2, \text{ per } i = 1, \dots, m\}.$$

La famiglia:

$$\{Q(\alpha, N) \mid \alpha \in \mathbf{Z}^m, N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

è numerabile e le sue sottofamiglie formate dai cubi di lato $1/N$ sono ricoprimenti chiusi localmente finiti (quadrettature) di \mathbb{R}^m . L'insieme A è l'unione numerabile $\bigcup_\nu Q_\nu$ della famiglia $\{Q_\nu = Q(\alpha_\nu, N_\nu) \subset A\}$ dei cubi $Q(\alpha, N)$ in esso contenuti. Allora

$$f(A) = \bigcup f(Q_\nu)$$

è una rappresentazione di $f(A)$ come unione numerabile di insiemi compatti.

¹Hassler Whitney, *Differentiable manifolds*, Ann. of Math. (2) **37** (1936), no. 3, 645–680.

²Anthony P. Morse, *The behavior of a function on its critical set*. Ann. of Math. (2) **40** (1939), no. 1, 62–70.

³Arthur Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps*. Bull. Amer. Math. Soc. **48**, (1942). 883–890.

Basterà dimostrare che ogni $f(Q_\nu)$ ha parte interna vuota e misura di Lebesgue nulla.

Fissiamo un indice ν . Le derivate parziali prime di f sono uniformemente limitate su Q_ν . Per il teorema della media, la f è Lipschitziana su Q_ν . Abbiamo cioè, per una costante $L_\nu > 0$,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L_\nu |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in Q_\nu.$$

Quindi l'immagine $f(E)$ di un sottoinsieme E di Q_ν di diametro δ ha diametro minore o uguale a $L_\nu \cdot \delta$ ed è perciò contenuto in una palla n -dimensionale di raggio $L_\nu \delta$ e dunque in un cubo n -dimensionale di lato $2L_\nu \delta$. L'insieme $f(Q_\nu)$ è compatto e quindi misurabile secondo Lebesgue in \mathbb{R}^n .

Poiché Q_ν è unione di N^m cubi m -dimensionali di lato $1/(N \cdot N_\nu)$ di \mathbb{R}^m , la sua immagine $f(Q_\nu)$ è contenuta in un'unione di N^m cubi n -dimensionali di lato $2L_\nu \sqrt{m}/(N \cdot N_\nu)$ di \mathbb{R}^n . Per la subadditività della misura, otteniamo

$$(5.1.1) \quad \text{vol}(f(Q_\nu)) \leq N^m \left(\frac{2L_\nu \sqrt{m}}{N \cdot N_\nu} \right)^n = \frac{2^n L_\nu^n m^{n/2}}{N_\nu^n} N^{m-n}, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Facendo tendere N all'infinito, otteniamo che $f(Q_\nu)$ ha misura di Lebesgue nulla. Ne segue che $f(A)$, essendo unione numerabile di sottoinsiemi misurabili di misura nulla è misurabile ed ha misura di Lebesgue nulla in \mathbb{R}^n .

Per dimostrare che $f(A)$ è un sottoinsieme della prima categoria di Baire, basta verificare che ciascuno dei compatti $f(Q_\nu)$ ha parte interna vuota. Questo segue dalla prima parte della dimostrazione, perché un compatto di \mathbb{R}^n con parte interna non vuota ha misura di Lebesgue positiva. La dimostrazione è completa. \square

V.1.2. Punti e valori regolari e critici. Ricordiamo le nozioni di punti e valori regolari e critici per applicazioni differenziabili negli spazi Euclidei.

Definizione V.1.2. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile, di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, definita su un aperto A di \mathbb{R}^m .

Un punto $x_0 \in A$ si dice *regolare* se f è una sommersione differenziabile in x_0 , se cioè $df(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è surgettiva, *critico* se invece $df(x_0)$ non è surgettiva, cioè se ha rango $< n$.

L'immagine $f(x_0)$ di un punto critico si dice *valore critico* di f .

Indichiamo con $C(f)$ e $CV(f)$ rispettivamente l'insieme dei punti e dei valori critici di f .

Gli elementi di $f(A) \setminus CV(f)$ si dicono *valori regolari* di f .

I punti critici di f sono cioè tutti e soli i punti $x \in A$ in cui f non è una sommersione. Se y è un valore regolare di f , allora $f^{-1}(y)$ è una sottovarietà differenziabile propria, di dimensione $m - n$, di A .

In particolare, se $m < n$ ed $f \in \mathcal{C}^k(A, \mathbb{R}^n)$, allora tutti i punti di A sono critici e $CV(f) = f(A)$.

Possiamo riformulare il teorema delle funzioni implicite utilizzando la nozione di punto critico:

Teorema V.1.3 (delle funzioni implicite). *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, definita su un aperto A di \mathbb{R}^m . Se $x_0 \in A$ è un*

punto regolare, possiamo trovare un intorno aperto V di $f(x_0)$ in \mathbb{R}^n , un intorno aperto W di 0 in \mathbb{R}^{m-n} , un intorno U di x_0 in A ed un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^k

$$g : V \times W \longrightarrow U$$

che non abbia punti critici in $V \times W$ e soddisfi l'identità

$$f(g(y, z)) = y \quad \forall (y, z) \in V \times W.$$

In particolare, se $m = n$, la g è un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^k di V su un aperto $g(V)$ di A . In questo caso la f definisce un sistema di coordinate di classe \mathcal{C}^k in $g(V)$.

Dal teorema delle funzioni implicite deduciamo immediatamente il seguente :

Lemma V.1.4. *Sia A un aperto di \mathbb{R}^n ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^1 . Se y è un valore regolare di f , allora $f^{-1}(y)$ è un sottospazio discreto di A .*

DIMOSTRAZIONE. Dal teorema delle funzioni implicite segue che ogni punto x di $f^{-1}(y)$ ha un intorno aperto U tale che $f^{-1}(y) \cap U = \{x\}$. \square

V.1.3. Il lemma di Morse-Sard.

Teorema V.1.5 (Lemma di Morse-Sard). *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ , definita su un aperto A di \mathbb{R}^m . Allora $CV(f)$ è di prima categoria ed ha misura di Lebesgue nulla.*

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato del teorema è banalmente vero quando $n = 0$, perché in questo caso l'insieme dei punti critici di f è vuoto. Possiamo quindi supporre $n > 0$ ed il teorema vero per applicazioni di classe \mathcal{C}^∞ a valori in \mathbb{R}^{n-1} . Se $m < n$, tutti i punti di A sono critici e dunque $CV(f) = f(A)$. In questo caso, la tesi è conseguenza del Lemma V.1.1.

Consideriamo quindi, nel resto della dimostrazione, il caso in cui $m, n \geq 1$, supponendo per ricorrenza che la tesi sia vera per applicazioni differenziabili di classe \mathcal{C}^∞ definite su aperti di \mathbb{R}^k con $k < m$.

Posto $C = C(f)$, per ogni intero positivo k sia C_k il sottoinsieme di C in cui si annullano tutte le derivate parziali di f di ordine positivo minore o uguale di k :

$$C_k = \{x \in A \mid D^\alpha f(x) = 0 \text{ per ogni } \alpha \in \mathbb{N}^m \text{ con } 0 < |\alpha| \leq k\},$$

e poniamo

$$C_\infty = \bigcap_k C_k.$$

L'insieme C è chiuso in A e, per ogni $0 < k \leq \infty$, i C_k sono sottoinsiemi chiusi di C e quindi di A .

Dimostreremo separatamente che le immagini mediante f di $C \setminus C_1$, di $C_k \setminus C_{k+1}$ e di C_∞ sono di prima categoria ed hanno misura di Lebesgue nulla in \mathbb{R}^n .

Poiché

$$CV(f) = f(C \setminus C_1) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} f(C_k \setminus C_{k+1}) \cup f(C_\infty),$$

da ciò seguirà che $CV(f)$ è anch'esso di prima categoria ed ha misura di Lebesgue nulla, perché unione numerabile d'insiemi di prima categoria con misura di Lebesgue nulla.

Sia x_0 un punto di $C \setminus C_1$. Mostriamo che esso ammette un intorno compatto B in A tale che $f(B \cap C)$ abbia misura di Lebesgue nulla e sia quindi privo di punti interni. Possiamo supporre, per semplicità, che siano

$$x_0 = 0, \quad f(0) = 0, \quad \frac{\partial f(0)}{\partial x^1} \neq 0.$$

Mediante un cambiamento di coordinate di classe \mathcal{C}^∞ in un intorno W di 0 in A , possiamo ricondurci al caso in cui la restrizione di f a W si possa scrivere nella forma⁴:

$$f(x) = f(x^1, x^2, \dots, x^m) = (x^1, f^2(x), \dots, f^n(x)) = (x^1, g(x)),$$

con $g \in \mathcal{C}^\infty(W, \mathbb{R}^{n-1})$. Lo Jacobiano di f si scrive in queste coordinate come

$$Jf = \frac{\partial f}{\partial(x^1, \dots, x^m)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x^1} & \frac{\partial g}{\partial(x^2, \dots, x^m)} \end{pmatrix}$$

e quindi i punti critici di f in W sono un sottoinsieme dell'insieme dei punti critici di g in W . Sia B un intorno compatto di 0 in W . Per l'ipotesi induttiva $g(B \cap CV(g))$ è un compatto di \mathbb{R}^{n-1} con parte interna vuota e misura di Lebesgue nulla. Poiché

$$g(B \cap C(g)) \supset \pi_{n-1}(f(B \cap C(f))),$$

$$\text{ove } \pi_{n-1} : \mathbb{R}^n \ni (y^1, \dots, y^n) \rightarrow (y^2, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^{n-1},$$

e la proiezione π_{n-1} è aperta, ne segue che anche il compatto $f(B \cap C(f))$ è privo di punti interni. Inoltre, $f(B \cap C(f))$ è contenuto in $[-r, r] \times g(B \cap C(g))$ per qualche $r > 0$. Quindi anche $f(B \cap C(f))$ ha misura nulla per il teorema di Fubini.

Ripetendo questo ragionamento per i diversi punti di $C \setminus C_1$, dimostriamo che è possibile ricoprire $C \setminus C_1$ con una famiglia numerabile di compatti $\{B_\ell\}$ tali che $f(C \cap B_\ell)$ sia privo di punti interni e di misura di Lebesgue nulla. Dunque

$$f(C \setminus C_1) = \bigcup_\ell f(C \cap B_\ell)$$

è di prima categoria ed ha misura di Lebesgue nulla in \mathbb{R}^n .

Siano ora $k \geq 1$ ed $x_0 \in C_k \setminus C_{k+1}$. Per semplicità, possiamo supporre che $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$. Indichiamo con φ una derivata parziale di f di ordine k , per cui sia $d\varphi(0) \neq 0$. A meno di restringerci ad un intorno aperto W di $0 \in \mathbb{R}^m$, e di cambiare le coordinate in W ed in \mathbb{R}^n , possiamo supporre che $\varphi(x) = x^1$.

Allora $C_k \cap W$ è contenuto in $\{x^1 = 0\}$ e quindi $f(C_k \cap W)$ è contenuto nell'insieme dei valori critici dell'applicazione

$$g(x^2, \dots, x^m) = f(0, x^2, \dots, x^m),$$

⁴Se, ad esempio, risulta $\partial f^1 / \partial x^1 \neq 0$, risolvendo l'equazione implicita $x^1 = f^1(t^1, \dots, t^m)$ in un intorno di 0 , troviamo una funzione $t^1 = h(x^1, t^2, \dots, t^m)$ ed allora $x^1 = f^1$, $x^2 = t^2$, ..., $x^m = t^m$ sono nuove coordinate in un intorno di 0 in cui la f ha la forma desiderata.

definita e di classe \mathcal{C}^∞ in un intorno W' di 0 in \mathbb{R}^{m-1} . L'insieme $f(C_k \cap W')$ è allora di prima categoria ed ha misura di Lebesgue nulla per l'ipotesi induttiva su m .

Ricoprendo $C_k \setminus C_{k+1}$ con una famiglia numerabile di tali intorni W , dimostriamo che $f(C_k \setminus C_{k+1})$ è di prima categoria ed ha misura di Lebesgue nulla, perché unione numerabile di insiemi di prima categoria con misura di Lebesgue nulla.

Ci resta da verificare che anche $f(C_\infty)$ è di prima categoria ed ha misura di Lebesgue nulla in \mathbb{R}^n .

Fissiamo un cubo Q , di lato $r > 0$, contenuto in A e sia $\{Q_{i,N}\}_{1 \leq i \leq N^m}$ una sua suddivisione in N^m cubi di lato r/N . Per ogni N sia I_N l'insieme degli indici i per cui $Q_{i,N} \cap C_\infty \neq \emptyset$.

Fissiamo un intero positivo ℓ con $n(\ell + 1) > m$. Poiché tutte le derivate parziali di f si annullano identicamente su C_∞ , per ogni intero positivo ℓ possiamo trovare⁵ un intorno aperto U_ℓ di $Q \cap C_\infty$ in A tale che:

$$(5.1.2) \quad |\nabla f(x)| \leq \text{dist}(x, Q \cap C_\infty)^\ell, \quad \forall x \in U_\ell.$$

Poiché $\text{dist}(Q \cap C_\infty, \complement U_\ell) = \delta > 0$,

$$Q_{i,N} \subset U_\ell, \quad \forall N > r/\delta, \quad i \in I_N,$$

e perciò otteniamo che

$$|\nabla f(x)| \leq (r\sqrt{m}/N)^\ell, \quad \text{se } N > r/\delta, \quad \text{ed } x \in \bigcup_{i \in I_N} Q_{i,N}.$$

Da questa disuguaglianza ricaviamo che

$$\text{diam}(f(Q_{i,N})) \leq (r\sqrt{m}/N)^{\ell+1} \quad \text{se } N > r/\delta, \quad i \in I_N.$$

Quindi, se ω_n è il volume della palla unitaria di \mathbb{R}^n , abbiamo, per ogni $N > r/\delta$,

$$\text{vol}(f(Q \cap C_\infty)) \leq \sum_{i \in I_N} \text{vol}(f(Q_{i,N})) \leq N^m \omega_n (r\sqrt{m}/N)^{n(\ell+1)}.$$

Poiché $n(\ell + 1) > m$, il secondo membro di questa disuguaglianza tende a 0 per $N \rightarrow \infty$. Quindi $\text{vol}(f(Q \cap C_\infty)) = 0$ e perciò $f(Q \cap C_\infty)$ è un chiuso con parte interna vuota.

Poiché C_∞ è unione numerabile di compatti $Q \cap C_\infty$, con Q cubo chiuso in A , l'insieme $f(C_\infty)$ è di prima categoria ed ha misura di Lebesgue nulla, perché unione numerabile di insiemi di prima categoria con misura di Lebesgue nulla. La dimostrazione è completa. \square

Osservazione V.1.6. Dalla dimostrazione si può osservare come il teorema rimanga valido sotto l'ipotesi più debole che f sia di classe \mathcal{C}^k con $kn > m$.

⁵Se $\psi \in \mathcal{C}^{k+1}((-a, a), \mathbb{R})$ si annulla in 0 con tutte le sue derivate fino all'ordine k , allora

$$\psi(x) = \frac{1}{k!} \int_0^x (x-t)^k \psi^{(k+1)}(t) dt, \quad \forall x \in (-a, a).$$

In particolare, se $|\psi^{(k+1)}(x)| \leq L$ per $|x| \leq b < a$, abbiamo

$$|\psi(x)| \leq L|x|^k, \quad \forall x \in (-b, b).$$

Otteniamo la disuguaglianza (5.1.2) applicandola alla restrizione di ciascuna derivata parziale prima di f ai segmenti uscenti da un punto di C_∞ .

V.2. Il teorema di Sard per varietà differenziabili

Siano M , N varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, di dimensioni m , n rispettivamente, ed $f \in \mathcal{C}^k(M, N)$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^k . Un punto p che sia critico per la rappresentazione di f in una qualsiasi coppia di sistemi di coordinate locali in p ed in $f(p)$, lo è anche per la sua rappresentazione rispetto a qualsiasi altra scelta di sistemi di coordinate locali.

Possiamo quindi definire senza ambiguità l'insieme $C(f)$ dei punti critici di f in M e l'insieme $CV(f)$ dei valori critici di f in N .

Definizione V.2.1. Diciamo che un punto $p \in M$ è un *punto critico* (rispettivamente *punto regolare*) di un'applicazione differenziabile $f : M \rightarrow N$, di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, se, rispetto a coordinate locali x in un intorno U di p in M ed y in un intorno V di $f(p)$ in N , il punto $x(p)$ è critico (rispettivamente regolare) per la

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n.$$

L'insieme dei *valori regolari* di f è il complementare in $f(M)$ dell'insieme $CV(f)$ dei valori critici.

Se $q \in f(M) \subset N$ è un *valore regolare*, allora $f^{-1}(q)$ è una *sottovarietà propria* di M , differenziabile di classe \mathcal{C}^k , di dimensione $m - n$.

Usando atlanti formati da un insieme al più numerabile di elementi otteniamo immediatamente:

Lemma V.2.2. Sia $f : M \rightarrow N$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^1 tra due varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, di dimensioni m ed n , rispettivamente. Se $m < n$, allora $f(M)$ è un sottoinsieme di N di prima categoria.

Teorema V.2.3 (Lemma di Sard). Siano M ed N varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^k e di dimensione m , n rispettivamente, con $k \geq 1$ e $kn > m$. Allora, per ogni applicazione $f \in \mathcal{C}^k(M, N)$, l'insieme $CV(f)$ dei valori critici è della prima categoria di Baire in N .

Osservazione V.2.4. Possiamo introdurre sulla varietà differenziabile N una *misura* positiva n -dimensionale μ , con la condizione che il suo pull-back rispetto a ciascuna carta locale sia un multiplo, rispetto ad una funzione di densità di classe \mathcal{C}^∞ , della misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n . Un modo per costruire la μ è il seguente. Fissiamo un ricoprimento aperto localmente finito $\{U_i\}_{i \in I}$ di N mediante gli aperti di un atlante $\{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$ di N , di classe \mathcal{C}^∞ . Sia $\{\phi_i\}$ una partizione dell'unità su N , con funzioni $\phi_i \geq 0$, subordinata al ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$. Definiamo la misura μ mediante l'integrale delle funzioni continue a supporto compatto, ponendo :

$$\int_N g d\mu = \sum_{i \in I} \int_{x_i(U_i)} g(x_i^{-1}) \phi_i(x_i^{-1}) d\lambda_n, \quad \forall g \in \mathcal{C}_c^0(N, \mathbb{R}),$$

ove λ_n è la misura di Lebesgue n -dimensionale in \mathbb{R}^n .

Vale allora il Lemma di Sard nella formulazione :

Teorema V.2.5. Se M, N sono varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^k e dimensione m, n , rispettivamente, con $k \geq 1$ e $kn > m$, allora l'insieme $CV(f)$ dei valori critici di una $f \in \mathcal{C}^k(M, N)$ è μ -misurabile ed ha misura nulla.

CAPITOLO VI

Teoremi di approssimazione e d'immersione

In questo capitolo dimostreremo che ogni varietà differenziabile M di dimensione m è diffeomorfa ad una sottovarietà propria di \mathbb{R}^{2m+1} . Questo risultato è stato ottenuto da Whitney¹ nel 1936. Egli dimostrò che ogni varietà differenziabile di dimensione m e di classe \mathcal{C}^k , con $1 \leq k \leq \infty$, è \mathcal{C}^k -diffeomorfa ad una sottovarietà analitica propria di \mathbb{R}^{2m+1} . Da questo risultato segue il fatto che ogni atlante di classe \mathcal{C}^k ne contiene uno di classe \mathcal{C}^ω . La tecnica della dimostrazione non forniva però, per varietà di classe \mathcal{C}^ω , un'immersione di classe \mathcal{C}^ω e Whitney formulava, nel lavoro citato, la congettura che una varietà M di dimensione m e classe \mathcal{C}^ω fosse anche \mathcal{C}^ω -diffeomorfa ad una sottovarietà analitica propria di \mathbb{R}^{2m+1} . Bochner² nel caso delle varietà compatte e poi e Malgrange³ in generale dimostrarono l'esistenza di un'immersione di classe \mathcal{C}^ω sotto l'ipotesi su M si potesse definire una metrica Riemanniana analitica. Nel 1958 Morrey⁴ dimostrò che si poteva rinunciare a questa ipotesi nel caso di una M compatta. La soluzione positiva generale della congettura di Whitney è stata data da Grauert⁵ nel 1958.

Nash⁶ dimostrò che le varietà differenziabili compatte sono diffeomorfe a sottovarietà *semialgebriche* di \mathbb{R}^n ed in seguito Tognoli⁷ dimostrò che esse sono diffeomorfe a varietà algebriche reali affini. L'immersione algebrica si dimostra utilizzando un teorema di approssimazione, che vale per sottovarietà di dimensione m di un \mathbb{R}^n con m piccolo rispetto ad n . La stima $m \leq (n-1)/2$ di Tognoli è stata migliorata da Ivanov⁸ ad $m < 2n/3$. Ballico e Tognoli⁹ dimostrarono che si possono utilizzare come modelli varietà algebriche complesse definite da equazioni a

¹Hassler Whitney, *Differentiable manifolds*. Ann. of Math. (2) 37 (1936), no. 3, 645–680.

²S. Bochner *Analytic mapping of compact Riemann spaces into Euclidean space*. Duke Math.J. 3 (1937), 339-354

³B. Malgrange, *Plongement des variétés analytiques-reelles*, Bull. Soc. Math. France 85(1957), 101-113.

⁴Charles B. Morrey, Jr., *The Analytic Embedding of Abstract Real-Analytic Manifolds*. Annals of Mathematics, (2), Vol. 68, No. 1 (Jul., 1958), pp. 159-201

⁵Hans Grauert, *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds*. Ann. of Math. (2) 68 1958 460–472.

⁶J.F. Nash, *Real algebraic manifolds*. Annals of Mathematics 56 (1952), 405–421.

⁷A. Tognoli, *Su una congettura di Nash*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 27 (1973), 167–185.

⁸N. V. Ivanov, *Improvement of the Nash-Tognoli theorem*. Journal of Soviet Mathematics July 1984, Volume 26, Issue 1, pp 1642-1645

⁹E. Ballico, A. Tognoli, *Algebraic models defined over \mathbb{Q} of differential manifolds*. Geom. Dedicata 42 (1992), no. 2, 155-161.

coefficienti razionali. Akbulut e King¹⁰ hanno esteso il risultato di Nash e Tognoli al caso di varietà che siano parte interna di varietà compatte con bordo. In generale non è possibile realizzare una qualsiasi varietà differenziabile non compatta come una varietà algebrica. Un'ostruzione è costituita dal fatto che i gruppi di omologia delle varietà algebriche hanno rango finito, mentre ci sono varietà differenziabili non compatte con gruppi di omologia di rango infinito.

Per il caso di *spazi analitici*, cioè varietà che si possano localmente rappresentare come luoghi di zeri di un ideale di funzioni analitiche, il corrispondente teorema d'immersione è dovuto ad Acquistapace, Broglia e Tognoli¹¹.

Un problema naturale è quello di stabilire quale sia la dimensione ottimale dello spazio Euclideo in cui si possa includere una varietà differenziabile. Lo stesso Whitney¹² migliorò nel 1944 il suo risultato precedente, mostrando che ogni varietà di dimensione m ammette un'inclusione differenziabile in \mathbb{R}^{2m} . Questo fatto si ricava mostrando dapprima che mediante un'*isotopia* una varietà di dimensione m in \mathbb{R}^{2m} si può deformare in una varietà che ha solo autointersezioni *trasversali*, e che un'ulteriore deformazione può eliminare i punti di autointersezione. Gli spazi proiettivi reali di dimensione $m = 2^k$ non si possono includere in spazi Euclidei di dimensione più piccola di $2n = 2^{k+1}$ e dunque $n = 2m$ è la migliore stima *lineare* per la dimensione dell'inclusione differenziabile. Se m non è una potenza di due, allora M può essere incluso in uno spazio Euclideo \mathbb{R}^n con $n < 2m$. Haefliger e Hirsch¹³ hanno dimostrato che varietà compatte di dimensione m ammettono un'inclusione differenziabile in \mathbb{R}^{2m-k} se $2k + 3 \leq m$ ed M è k -connessa. Questo risultato, ottenuto per $m \neq 4$ è stato esteso al caso $m = 4$ da Fang¹⁴.

Più in generale, date due varietà M ed N si possono studiare le immersioni e le inclusioni in $\mathcal{C}^k(M, N)$. Per questi argomenti è interessante consultare l'articolo di Thomas G. Goodwillie, John R. Klein, Michael S. Weiss: *Spaces of smooth embeddings, disjunction and surgery*, in *Annals of Math. Studies 149, Surveys on surgery theory* (vol. 2), 2000, che offre una vasta panoramica sull'argomento.

Qui ci limiteremo a dimostrare il teorema d'immersione nella formulazione originaria e nella categoria \mathcal{C}^k , con $k \leq \infty$. Dimostreremo dapprima il teorema d'immersione per varietà compatte di classe \mathcal{C}^k con $2 \leq k \leq \infty$. Nel paragrafo successivo esporremo alcuni risultati relativi ad applicazioni differenziabili tra

¹⁰Selman Akbulut and Henry King, *Some new results on the topology of nonsingular real algebraic sets*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) Volume 23, Number 2 (1990), 441-446.

¹¹F. Acquistapace, F. Broglia e A. Tognoli, *An embedding theorem for real analytic spaces*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze (4) 6, no 3 (1979), p. 415-426.

¹²H. Whitney, *The selfintersections of a smooth manifold in 2n-space*, Ann. of Math. 45 (1944), 220-246.

¹³A. Haefliger, *Plongements différentiables dans le domaine stable*. Comment. Math. Helv. 37 (1962/63), 155-176. ed A. Haefliger and M. Hirsch, *Immersiones in the stable range*. Ann. of Math. (2) 75 (1962), 231-241.

¹⁴Fuquan Fang, *Orientable 4-manifolds topologically embed into \mathbb{R}^7* . Topology, 41 (2002), 927-930.

spazi Euclidei, che sono per sé interessanti e che ci saranno utili nella dimostrazione del teorema d'immersione per varietà differenziabili, anche non compatte, di classe \mathcal{C}^∞ .

VI.1. Il teorema d'immersione per varietà compatte

La dimostrazione del teorema d'immersione richiede due ingredienti fondamentali. Il primo consiste nel produrre un numero sufficiente di funzioni differenziabili reali, definite su tutta la varietà M ; il secondo di usare il Lemma di Sard per mostrare che, da una immersione (risp. inclusione), differenziabile di M in \mathbb{R}^ℓ se ne può ottenere, con un'opportuna proiezione, una in \mathbb{R}^n con $n \leq 2m$ (risp. in \mathbb{R}^n con $n \leq 2m + 1$).

Lemma VI.1.1. *Sia M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k , con $0 \leq k \leq \infty$. Possiamo trovare un intero positivo n ed un'inclusione $f \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^n)$ di M in \mathbb{R}^n .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché M è compatta, ammette un atlante $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)_{1 \leq i \leq \ell}\}$ finito e di classe \mathcal{C}^k . Consideriamo un ricoprimento aperto $\{W_i\}_{1 \leq i \leq \ell}$ di M con $\bar{W}_i \subseteq U_i$ e per ogni i sia $\chi_i \in \mathcal{C}^k(M)$ una funzione con $\chi_i(p) = 1$ se $p \in W_i$ e $\text{supp } \chi_i \subseteq U_i$. Per ogni $i = 1, \dots, \ell$ definiamo

$$\psi_i(p) = \begin{cases} \chi_i(p)\phi_i(p) & \text{se } p \in U_i, \\ 0 & \text{se } p \notin U_i. \end{cases}$$

Allora $\psi_i \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^m)$ per $i = 1, \dots, \ell$. La

$$f : M \ni p \longrightarrow (\psi_1(p), \dots, \psi_\ell(p), \chi_1(p), \dots, \chi_\ell(p)) \in \mathbb{R}^{(m+1)\ell}.$$

è un'inclusione differenziabile di classe \mathcal{C}^k di M in $\mathbb{R}^{(m+1)\ell}$. Infatti, è un'immersione differenziabile perchè su ciascun W_i la componente ψ_i coincide con la funzione ϕ_i della carta locale. Siano poi $p_1, p_2 \in M$, con $f(p_1) = f(p_2)$. Poiché $\{W_i\}_{i=1, \dots, \ell}$ è un ricoprimento aperto di M , abbiamo $p_1 \in W_i$, e quindi $\chi_i(p_1) = 1$, per qualche i con $1 \leq i \leq \ell$. Allora anche $\chi_i(p_2) = 1$ e quindi $p_2 \in \text{supp } \chi_i \subset U_i$. Da $\psi_i(p_1) = \psi_i(p_2)$ otteniamo allora che $\phi_i(p_1) = \phi_i(p_2)$, da cui $p_1 = p_2$. Ciò dimostra che f è iniettiva e quindi un'inclusione differenziabile di classe \mathcal{C}^k . \square

A partire da un'immersione differenziabile $f \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^\ell)$, con $k \geq 1$, definiamo lo *spazio tangente* di M nel modo seguente. Se (U, ϕ) è un carta coordinata di classe \mathcal{C}^k in M , per ogni punto $p \in U$ sia

$$T_p^f(U, \phi) = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^\ell \mid v \in d(f \circ \phi^{-1})(\phi(p))(\mathbb{R}^m)\}.$$

Sia (U', ϕ') un'altra carta locale di classe \mathcal{C}^k in M con $p \in U$ ed indichiamo con $\gamma \in \mathcal{C}^k(\phi'(U \cap U'), \phi(U \cap U'))$ la corrispondente funzione di transizione, allora

$$d(f \circ \phi'^{-1})(\phi'(p)) = d(f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \circ d\gamma(\phi'(p)).$$

Poiché $d\gamma(\phi'(p))$ è un automorfismo lineare di \mathbb{R}^m , è $T_p^f(U', \phi') = T_p^f(U, \phi)$. Definiamo

$$(6.1.1) \quad T_p^f M = T_p(U, \phi), \quad T^f(U, \phi) = \bigcup_{p \in U} T_p^f(U, \phi), \quad T^f M = \bigcup_{p \in M} T_p^f M.$$

Si verifica facilmente che vale il seguente

Lemma VI.1.2. *Sia M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$ ed $f \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^\ell)$ un'immersione differenziabile. Si può definire su $T^f M$ un'unica struttura differenziale di classe \mathcal{C}^{k-1} in cui, per ogni carta locale (U, ϕ) di classe \mathcal{C}^k in M , l'insieme $T^f(U, \phi)$ sia aperto in $T^f M$ e la coppia formata da $T^f(U, \phi)$ e dall'inversa dell'applicazione bigettiva*

$$\phi(U) \times \mathbb{R}^m \ni (x, v) \longrightarrow (\phi^{-1}(x), d(f \circ \phi^{-1})(x)v) \in T^f(U, \phi)$$

sia una carta locale di classe \mathcal{C}^{k-1} in $T^f M$. \square

Abbiamo poi

Lemma VI.1.3. *Sia M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$ ed $f \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^\ell)$ un'immersione differenziabile. Allora*

$$S^f M = \{(p, v) \in T^f M \mid |v| = 1\}$$

è una sottovarietà differenziabile di classe \mathcal{C}^{k-1} e dimensione $2m - 1$ di $T^f M$. \square

Il teorema d'immersione è conseguenza del Lemma seguente.

Lemma VI.1.4. *Sia M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k , numerabile all'infinito. Sia $f \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^n)$ un'immersione differenziabile di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 2$. Per ogni $\xi \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^\ell$ sia $\sigma_\xi(x) = x - (x|\xi)\xi$ la proiezione ortogonale sull'iperpiano perpendicolare a ξ . Se $n > 2m$, allora l'insieme dei vettori $\xi \in S^{n-1}$ per cui $\sigma_\xi \circ f$ non è un'immersione differenziabile è un insieme della prima categoria di Baire in S^{n-1} .*

DIMOSTRAZIONE. La condizione che $\sigma_\xi \circ f$ non sia un'immersione differenziabile equivale al fatto che (p, ξ) appartenga ad $S^f M$ per qualche $p \in M$. Consideriamo quindi l'applicazione $\pi : S^f M \ni (p, v) \rightarrow v \in S^{n-1}$. Essa è differenziabile di classe \mathcal{C}^{k-1} . Se $n - 1 > (2m - 1)$, poiché per ipotesi $k - 1 \geq 1$, essa è di prima categoria per il Lemma V.2.2. \square

Dai Lemmi VI.1.1 e VI.1.4 otteniamo

Teorema VI.1.5. *Ogni varietà compatta M , di dimensione m e di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 2$, ammette un'immersione differenziabile $f \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^n)$, di classe \mathcal{C}^k , in uno spazio Euclideo di dimensione $n \leq 2m$. \square*

Abbiamo poi il

Lemma VI.1.6. *Sia M una varietà di classe \mathcal{C}^k , con $1 \leq k \leq \omega$ e di dimensione m , numerabile all'infinito, e sia $f \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^n)$ un'applicazione differenziabile iniettiva a valori in uno spazio Euclideo. Se $n > 2m + 1$, allora l'insieme dei vettori $\xi \in S^{n-1}$ tali che la $\pi_\xi \circ f$ non sia iniettiva è della prima categoria di Baire in S^{n-1} .*

DIMOSTRAZIONE. Dire che $\pi_\xi \circ f$ non è iniettiva significa che vi sono due punti $p_1 \neq p_2$ in M per cui $\pi_\xi(f(p_1)) = \pi_\xi(f(p_2))$, per cui cioè $f(p_1) - f(p_2)$ sia un multiplo di ξ . Consideriamo dunque l'aperto $N = \{(p_1, p_2) \in M \times M \mid p_1 \neq p_2\}$

di $M \times M$. Esso è una varietà di classe \mathcal{C}^k e di dimensione $2m$, su cui possiamo definire l'applicazione, di classe \mathcal{C}^k ,

$$F : N \ni (p_1, p_2) \longrightarrow \frac{f(p_1) - f(p_2)}{|f(p_1) - f(p_2)|} \in S^{n-1}.$$

L'insieme degli ξ per cui $\pi_\xi \circ f$ non è iniettiva è l'immagine $F(N)$. Se $n - 1 > 2m$, per il Lemma V.2.2 l'immagine $F(N)$ è della prima categoria di Baire. \square

Abbiamo quindi

Teorema VI.1.7. *Ogni varietà compatta M , di dimensione m e di classe \mathcal{C}^k con $2 \leq k \leq \infty$, ammette un'inclusione differenziabile in uno spazio Euclideo di dimensione $n \leq 2m + 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia M una varietà differenziabile compatta di dimensione m e classe \mathcal{C}^k , con $2 \leq k \leq \infty$. Per il Lemma VI.1.1 esiste un'inclusione differenziabile $f \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^n)$. Sia n il più piccolo intero positivo per cui ciò sia possibile. Se fosse $n > 2m + 1$, per i Lemmi VI.1.4 e VI.1.6 potremmo trovare $\xi \in S^{n-1}$ tale che $\pi_\xi \circ f$ sia ancora un'inclusione differenziabile in uno spazio Euclideo di dimensione $n - 1$, contraddicendo la scelta di n . La dimostrazione è completa. \square

VI.2. Il teorema d'immersione nel caso non compatto

Dimostreremo in questo paragrafo che una varietà differenziabile M di classe \mathcal{C}^k , con $2 \leq k \leq \infty$ e di dimensione m , connessa, ammette un'immersione propria in uno spazio Euclideo di dimensione $\leq 2m$ ed un'inclusione propria in uno spazio Euclideo di dimensione $\leq 2m + 1$. Il ragionamento ripercorrerà, con piccole variazioni, quello seguito nel paragrafo precedente per il caso compatto.

Lemma VI.2.1. *Sia M una varietà differenziabile di dimensione m e di classe \mathcal{C}^k , con $0 \leq k \leq \infty$. Se M ammette un atlante finito, allora esiste un'inclusione di classe \mathcal{C}^k di M in uno spazio Euclideo \mathbb{R}^n .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i)\}_{1 \leq i \leq \ell}$ un atlante finito di M e sia $\{\chi_i\}_{1 \leq i \leq \ell}$ una partizione dell'unità di classe \mathcal{C}^k subordinata al ricoprimento $\{U_i\}$. Per ogni i definiamo $\psi_i \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^m)$ mediante

$$\psi_i(p) = \begin{cases} \chi_i(p) \cdot x_i(p) & \text{se } p \in U_i, \\ 0 & \text{se } p \notin U_i. \end{cases}$$

Allora

$$f : M \ni p \longrightarrow (\psi_1(p), \dots, \psi_\ell(p), \chi_1(p), \dots, \chi_\ell(p)) \in \mathbb{R}^{(m+1)\ell}$$

è un'inclusione differenziabile di classe \mathcal{C}^k . \square

Otteniamo allora

Lemma VI.2.2. *Sia M una varietà differenziabile di dimensione m e di classe \mathcal{C}^k , con $2 \leq k \leq \infty$. Se M ammette un atlante finito, allora esiste un'inclusione di classe \mathcal{C}^k di M in uno spazio Euclideo \mathbb{R}^n con $n \leq 2m + 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma VI.2.1 M ammette un'inclusione differenziabile di classe \mathcal{C}^k in uno spazio Euclideo. Sia n il più piccolo intero positivo per cui esista un'inclusione $f \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^n)$. Se fosse $n > 2m + 1$, per i Lemmi VI.1.4 e VI.1.6 potremmo trovare $\xi \in S^{n-1}$ tale che $\pi_\xi \circ f$ sia ancora un'inclusione differenziabile. Deve essere quindi $n \leq 2m + 1$. \square

Per dimostrare l'esistenza di un'inclusione propria e togliere l'ipotesi che vi sia un atlante finito, introduciamo su M una *funzione di esaurimento*, cioè una funzione $\chi \in \mathcal{C}^k(M)$ per cui tutti gli insiemi $M_r = \{p \in M \mid \chi(p) \leq r\}$ siano compatti.

Lemma VI.2.3. *Sia M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k , con $0 \leq k \leq \infty$, numerabile all'infinito. Possiamo allora definire una funzione $\chi \in \mathcal{C}^k(M)$ tale che, per ogni $r \in \mathbb{R}$, l'insieme $M_r = \{p \in M \mid \chi(p) \leq r\}$ sia compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{A} = \{(U_\nu, x_\nu)_{\nu \in I}$ un atlante di M con $I \subset \mathbb{N}$, $\{U_\nu\}_{\nu \in I}$ localmente finito e U_ν relativamente compatto in M per ogni $\nu \in I$. Sia $\{\chi_\nu\}$ una partizione dell'unità di classe \mathcal{C}^k , con $\chi_\nu \geq 0$ su M per ogni ν , subordinata al ricoprimento $\{U_\nu\}_{\nu \in I}$. Allora $\chi(p) = \sum_{\nu \in I} \chi_\nu(p)$ definisce una funzione in $\mathcal{C}^k(M)$ che ha le proprietà richieste. Infatti $\chi(p) > \ell$ se $p \notin \bigcup_{\nu < \ell} U_\nu$. \square

Da questa ricaviamo

Lemma VI.2.4. *Ogni varietà M di classe \mathcal{C}^k con $0 \leq k \leq \infty$, numerabile all'infinito e di dimensione m , ammette un'inclusione propria $f \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^n)$, di classe \mathcal{C}^m in uno spazio Euclideo \mathbb{R}^n , e con la proprietà che*

$$(6.2.1) \quad M_r = \{p \in M \mid f^1(p) \leq r\} \quad \text{è compatto per ogni } r \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\chi \in \mathcal{C}^k(M)$ tale che $M_r = \{p \in M \mid \chi(p) \leq r\}$ sia compatto per ogni $r \in \mathbb{R}$. Per ogni coppia di numeri reali r_1, r_2 con $r_1 < r_2$ l'aperto

$$N_{r_1, r_2} = \{p \in M \mid r_1 < \chi(p) < r_2\}$$

è una varietà che ammette un atlante finito. Per il Lemma VI.2.2 esiste un'inclusione differenziabile $f_{r_1, r_2} \in \mathcal{C}^k(N_{r_1, r_2}, \mathbb{R}^{2m+1})$. Siano

$$M' = \bigcup_{\nu \in \mathbb{Z}} N_{\nu, \nu+1}, \quad M'' = \bigcup_{\nu \in \mathbb{Z}} N_{\nu-\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2}}.$$

Allora $\{M', M''\}$ è un ricoprimento aperto di M . Fissiamo una partizione dell'unità $\{\chi', \chi''\}$ di classe \mathcal{C}^k su M subordinata al ricoprimento $\{M', M''\}$ e definiamo

$$\psi'(p) = \begin{cases} \chi'(p) f_{\nu, \nu+1}(p) & \text{se } \nu < \chi(p) < \nu + 1, \\ 0 & \text{se } \chi(p) \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\psi''(p) = \begin{cases} \chi''(p) f_{\nu-\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2}}(p) & \text{se } \nu < \chi(p) + \frac{1}{2} < \nu + 1, \\ 0 & \text{se } (\chi(p) + \frac{1}{2}) \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Allora $\psi', \psi'' \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^{2m+1})$ e la

$$f : M \ni p \longrightarrow (\chi(p), \chi'(p), \chi''(p), \psi'(p), \psi''(p)) \in \mathbb{R}^{4m+5}$$

è un'inclusione differenziabile propria di classe \mathcal{C}^k , che soddisfa la (6.2.1). \square

Ricaviamo infine

Teorema VI.2.5. *Ogni varietà M , di classe \mathcal{C}^k con $2 \leq k \leq \infty$, numerabile all'infinito, ammette un'inclusione differenziabile propria di classe \mathcal{C}^k in uno spazio Euclideo di dimensione $n \leq 2m + 1$ ed un'immersione differenziabile propria di classe \mathcal{C}^k in uno spazio Euclideo di dimensione $\leq 2m$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma VI.2.4 c'è un minimo intero positivo n per cui esiste un'inclusione propria $f \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^n)$ per cui valga la (6.2.1). Supponiamo per assurdo che $n > 2m + 1$. Per i Lemmi VI.1.4 e VI.1.6 l'insieme Σ dei $\xi \in S^{n-1}$ per cui $\pi_\xi \circ f$ non è più un'inclusione differenziabile è della prima categoria di Baire in S^{n-1} . In particolare, possiamo trovare $\xi \in S^{n-1} \setminus \Sigma$ con $|\xi^1| < |\xi^n|$. Se pr è la proiezione $\text{pr}(x^1, x^2, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, la $\text{pr} \circ \pi_\xi \circ f$ sarebbe un'inclusione differenziale in $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^{n-1})$ che soddisfa ancora le (6.2.1), contraddicendo la scelta di n .

Con un argomento simile possiamo dimostrare che esiste un'immersione propria di classe \mathcal{C}^k di M in uno spazio Euclideo di dimensione $\leq 2m$. \square

VI.3. Alcuni teoremi di approssimazione per applicazioni differenziabili

VI.3.1. Applicazioni definite su aperti di spazi Euclidei.

Lemma VI.3.1. *Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^m e K un sottoinsieme compatto di Ω . Se $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ è un'immersione differenziabile in tutti i punti di K , allora esistono due costanti positive c, r tali che*

$$(6.3.1) \quad |f(x_1) - f(x_0)| \geq c |x_1 - x_0|, \quad \forall x_0 \in K, x_1 \in \Omega, \quad \text{con} \quad |x_1 - x_0| \leq r.$$

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^i(x)}{\partial x^j} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

la matrice Jacobiana di f . Per ipotesi, la matrice simmetrica $F(x) = (Jf(x))^* Jf(x)$ è definita positiva nei punti di K . Poiché gli autovalori di una matrice sono funzioni continue dei suoi coefficienti, possiamo trovare un numero $c > 0$ tale che $4c^2$ sia un limite inferiore per il minimo autovalore di $F(x)$ per $x \in K$. Se $0 < r < \text{dist}(K, \mathbb{C}\Omega)$, ed $x_0 \in K, x_1 \in \mathbb{R}^m, |x_0 - x_1| < r$, allora il segmento di estremi x_0 ed x_1 è contenuto in Ω ed abbiamo, con $x_t = x_0 + t(x_1 - x_0)$,

$$f(x_1) - f(x_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_t) dt = \int_0^1 Jf(x_t)(x_1 - x_0) dt.$$

Per ogni $0 < r < \text{dist}(K, \mathbb{C}\Omega)$,

$$K_r = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \text{dist}(x, K) \leq r\}$$

è un sottoinsieme compatto di Ω . Fissiamo un r_0 con $0 < r_0 < \text{dist}(K, \mathbb{C}\Omega)$. Lo Jacobiano di f è uniformemente continuo su K_{r_0} ed esiste quindi un r , con $0 < r < r_0$, tale che $\|Jf(x_0) - Jf(x_1)\| = \sup_{|v|=1} |Jf(x_0)v - Jf(x_1)v| < c$ se $x_0, x_1 \in K_{r_0}$ ed $|x_0 - x_1| \leq r$.

Se $x_0 \in K$, $x_1 \in \Omega$, ed $|x_1 - x_0| < r$, allora $x_t \in K_{r_0}$ ed $|x_t - x_0| < r$ per $0 \leq t \leq 1$, e quindi

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_0)| &= \left| \int_0^1 Jf(x_t)(x_1 - x_0) dt \right| \\ &\geq |Jf(x_0)(x_1 - x_0)| - \int_0^1 \|Jf(x_t) - Jf(x_0)\| \cdot |x_1 - x_0| dt \\ &\geq c|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

La dimostrazione è completa. \square

Ricordiamo che

$$\|A\| = \sqrt{\text{traccia}(A^*A)}$$

è una norma Hermitiana sullo spazio $\mathbb{C}^{n \times m}$ delle matrici complesse $n \times m$ e la sua restrizione al sottospazio $\mathbb{R}^{n \times m}$ delle matrici reali $n \times m$ una norma Euclidea. L'applicazione $\mathbb{C}^{n \times m} \ni A \rightarrow A^* \in \mathbb{C}^{m \times n}$ è un'isometria anti- \mathbb{C} -lineare.

Lemma VI.3.2. *Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^m , n un intero $\geq 2m$, ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^2 . L'insieme delle matrici reali $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ per cui l'applicazione*

$$\Omega \ni x \longrightarrow f_A(x) = f(x) + Ax \in \mathbb{R}^n$$

sia un'immersione differenziabile in ogni punto x di Ω è un sottoinsieme denso di seconda categoria in $\mathbb{R}^{n \times m}$.

DIMOSTRAZIONE. Nei punti $x \in \Omega$ in cui la f_A non è un'immersione, la matrice $B = Jf(x) + A$ ha rango minore di m , cioè $A = B - Jf(x)$ per una matrice B di rango minore di m . Per ogni $0 \leq k < m$, le matrici $n \times m$ di rango k formano una sottovarietà differenziabile localmente chiusa $\mathbb{M}(n \times m, k; \mathbb{R})$ di $\mathbb{R}^{n \times m}$ di dimensione $k(n + m - k)$ (vedi §IV.8). L'applicazione:

$$F_k : \Omega \times \mathbb{M}(n \times m, k; \mathbb{R}) \ni (x, B) \rightarrow A = B - Jf(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

è differenziabile di classe \mathcal{C}^1 , definita su una varietà differenziabile di dimensione $m + k(n + m - k)$ ed a valori in una varietà differenziabile di dimensione mn .

La $k \rightarrow m + k(n + m - k)$ è crescente per $2k < n + m$ ed, in particolare, per $k < m$. Perciò, poiché abbiamo supposto che $n \geq 2m$, abbiamo

$$m + k(n + m - k) \leq m + (m - 1)(n + 1) = mn + 2m - n - 1 < mn, \quad \text{per } 0 \leq k < m.$$

Per il Lemma V.2.2 l'immagine di F_k è di prima categoria in $\mathbb{R}^{n \times m}$. Quindi anche l'unione delle immagini delle F_k , per $0 \leq k < m$, è un sottoinsieme di prima categoria in $\mathbb{R}^{n \times m}$. Ne segue che le $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ per cui f_A sia un'immersione in ogni punto $x \in \Omega$ è il complementare di un insieme di prima categoria, ed in particolare, poiché $\mathbb{R}^{n \times m}$ è metrico completo e quindi di Baire, è di seconda categoria e denso in $\mathbb{R}^{n \times m}$. \square

Lemma VI.3.3. *Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^m , n un intero $\geq m$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^1 , K e K' compatti con $K' \Subset K \Subset \Omega$ e supponiamo che*

$$\begin{aligned} \text{rank } Jf(x) &= m, \quad \forall x \in K, \\ f(x_1) &\neq f(x_2), \quad \text{se } x_1, x_2 \in K' \text{ ed } x_1 \neq x_2. \end{aligned}$$

Allora, possiamo trovare due numeri reali positivi ϵ, ϵ' e, fissato un numero reale δ con $0 < \delta < \text{dist}(K, \mathbb{C}\Omega)$, un numero reale positivo ϵ'' , tali che

- (1) se $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $\|Jg(x)\| < \epsilon$ per ogni $x \in K$, allora $f + g$ è un'immersione differenziabile in tutti i punti di K ;
- (2) Se $g \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ soddisfa la disuguaglianza $|g(x) - g(y)| \leq \epsilon'|x - y|$ per $x, y \in K'$, allora la restrizione di $(f + g)$ a K' è iniettiva;
- (3) se $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $|g(x)| + \|Jg(x)\| < \epsilon''$ quando $\text{dist}(x, K) < \delta$, allora $f + g$ è un'immersione in tutti i punti di K ed iniettiva su K' .

DIMOSTRAZIONE. (1) Il minimo autovalore $\mu(x)$ della matrice simmetrica

$$(Jf(x))^* Jf(x)$$

è una funzione continua e, per ipotesi, positiva in ogni punto x di K . Quindi

$$\mu_0 = \min_{x \in K} \mu(x) > 0,$$

e sarà dunque, con $\mu_0 > 0$,

$$|Jf(x)v|^2 \geq \mu_0|v|^2, \quad \forall x \in K, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

Fissiamo $\epsilon = \sqrt{\mu_0/4}$. Se $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $\|Jg(x)\| < \epsilon$ per ogni $x \in K$, allora $|Jg(x)v|^2 \leq (\mu_0/4)|v|^2$ per $x \in K$ e $v \in \mathbb{R}^m$. Otteniamo allora

$$|(Jf(x) + Jg(x))v| \geq |Jf(x)v| - |Jg(x)v| \geq \epsilon|v|, \quad \forall x \in K, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m,$$

e dunque $f + g$ è un'immersione differenziabile in ogni $x \in K$. Questo dimostra il punto (1).

(2) Per il Lemma VI.3.8 esistono $c > 0$ ed $r > 0$ tali che valga la (6.3.1). L'insieme

$$E = \{(x_0, x_1) \in K' \times K' \mid |x_0 - x_1| \geq r\}$$

è compatto in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ e quindi la funzione

$$F(x_0, x_1) = |f(x_1) - f(x_0)|/|x_1 - x_0|,$$

che è definita e continua su E , ammette in E un minimo positivo c' . Otteniamo quindi, con $\kappa = \min\{c, c'\} > 0$,

$$|f(x_1) - f(x_0)| \geq \kappa|x_1 - x_0|, \quad \forall x_0, x_1 \in K'.$$

Se $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ soddisfa $|g(x_1) - g(x_0)| < \kappa|x_1 - x_0|$ per $x_0, x_1 \in K'$, avremo, per $x_0 \neq x_1 \in K'$:

$$\begin{aligned} |(f(x_1) + g(x_1)) - (f(x_0) + g(x_0))| &\geq |f(x_1) - f(x_0)| - |g(x_1) - g(x_0)| \\ &\geq \kappa|x_1 - x_0| - |g(x_1) - g(x_0)| > 0, \end{aligned}$$

che mostra come $(f + g)$ sia ancora iniettiva su K' .

(3) Avendo già dimostrato la (1), è sufficiente verificare che è possibile scegliere $\epsilon'' > 0$ in modo che la condizione che $|g(x)| + \|Jg(x)\| < \epsilon''$ su K_δ assicuri l'iniettività di $f + g$ su K' . Se $x_0, x_1 \in K' \subset K$ ed $|x_1 - x_0| < \delta$, allora il segmento $[x_0, x_1]$ di estremi x_0, x_1 è contenuto in K_δ ed abbiamo perciò, con $x_t = x_0 + t(x_1 - x_0)$,

$$|g(x_1) - g(x_0)| = \left| \int_0^1 Jg(x_t)(x_1 - x_0) dt \right| \leq \epsilon'' |x_1 - x_0|.$$

Per il Lemma VI.3.1 possiamo trovare costanti $c, r > 0$ per cui valga la (6.3.1). Quindi, se $x_0, x_1 \in K'$ ed $|x_1 - x_0| < r_1 = \min\{r, \delta\}$ abbiamo

$$|(f + g)(x_1) - (f + g)(x_0)| \geq |f(x_1) - f(x_0)| - |g(x_1) - g(x_0)| \geq (c - \epsilon'')|x_1 - x_0|.$$

L'insieme $E = \{(x_0, x_1) \in K' \times K' \mid |x_1 - x_0| \geq r_1\}$ è compatto. Per l'ipotesi che f sia iniettiva su K' , la funzione continua $|f(x_1) - f(x_0)|$ è positiva su E ed ha perciò su E un minimo positivo c_1 . È allora

$$\begin{aligned} |(f + g)(x_1) - (f + g)(x_0)| &\geq |f(x_1) - f(x_0)| - |g(x_1) - g(x_0)| \geq c_1 - 2\epsilon'', \\ &\forall x_0, x_1 \in K' \text{ con } |x_1 - x_0| \geq r_1. \end{aligned}$$

Quindi $f + g$ è iniettiva su K' purché sia $\epsilon'' < \min\{c, c_1/2\}$. \square

Ricordiamo ora la definizione della topologia di Fréchet canonica dello spazio $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, nel caso in cui Ω sia un aperto di \mathbb{R}^m . Per ogni compatto $K \subset \Omega$ ed ogni intero non negativo k consideriamo la seminorma¹⁵:

$$\|f\|_{K,k} = \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha f(x)|.$$

Fissiamo ora una successione $\{K_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ di compatti di Ω , con $K_\nu \subset \text{int}(K_{\nu+1})$, $\bigcup_\nu K_\nu = \Omega$ e definiamo, per $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$:

$$\text{dist}(f, g) = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \frac{\|f - g\|_{K_\nu, \nu}}{1 + \|f - g\|_{K_\nu, \nu}}.$$

Si verifica che questa è una distanza su $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, che definisce la topologia della convergenza uniforme delle funzioni con tutte le loro derivate parziali sui compatti di Ω , e che, con questa distanza, $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ è uno spazio metrico completo e quindi, in particolare, uno spazio di Baire.

Dal Lemma VI.3.2 ricaviamo

Corollario VI.3.4. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^m ed n un intero $\geq 2m$. Allora l'insieme delle $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ che non sono immersioni differenziabili è di prima categoria.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{K_\nu\}$ una successione di compatti con $\bigcup_\nu K_\nu = \Omega$. Per ogni intero positivo k l'insieme

$$\mathcal{G}_\nu = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \exists x \in K_\nu \text{ t.c. } \text{rank } Jf(x) < m\}$$

¹⁵Una *seminorma* su uno spazio vettoriale reale V è un'applicazione $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ a valori non negativi, positivamente omogenea di grado uno e subadditiva. A differenza della norma, non si richiede a una seminorma la proprietà che $p(v) = 0$ implichi $v = 0$.

è chiuso. Sia infatti $\{f_a \mid a \in \mathbb{N}\}$ una successione di \mathcal{G}_v convergente in $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Per ogni $a \in \mathbb{N}$ esistono un punto $x_a \in K_v$ ed un vettore $v_a \in \mathbb{R}^m$ con $|v_a| = 1$ e $df_a(x_a)v_a = 0$. Poiché $K_v \times S^{m-1}$ è compatto, a meno di passare ad una sottosuccessione possiamo supporre che $x_a \rightarrow x_\infty \in K_v$ e $v_a \rightarrow v_\infty \in S^{m-1}$. Se f_∞ è il limite di $\{f_a\}$ in $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, avremo $Jf_\infty(x_\infty)v_\infty = 0$. Questo dimostra che $f_\infty \in \mathcal{G}_v$. Perciò \mathcal{G}_v è chiuso in $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Per il Lemma VI.3.2 l'insieme \mathcal{G}_v non ha punti interni e quindi l'insieme delle f di $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ che non sono immersioni differenziabili in qualche punto di Ω , essendo uguale all'unione numerabile $\bigcup_{v \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_v$, è della prima categoria di Baire. \square

Lemma VI.3.5. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^m , K un compatto di Ω ed n un intero $\geq 2m + 1$. Allora l'insieme delle $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ che sono immersioni differenziabili in ogni punto di K ed iniettive su K è denso.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma VI.3.2, data $f_0 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, l'insieme degli $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tali che $f_A(x) = f_0(x) + Ax$ sia un'immersione differenziabile in ogni punto di Ω è un aperto di seconda categoria in $\mathbb{R}^{n \times m}$. Fissato quindi un qualsiasi intorno aperto \mathcal{V} di f_0 in $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, possiamo trovare una $f \in \mathcal{V}$ che sia un'immersione differenziabile in tutti i punti di Ω .

Fissiamo un compatto K di Ω . Per il Lemma VI.3.1, possiamo trovare due costanti $c, r > 0$ per cui sia valida la (6.3.1). Consideriamo un ricoprimento finito $\{U_i\}_{1 \leq i \leq \ell}$ di K con aperti di diametro minore di r , e siano $F_i \Subset U_i$ sottoinsiemi chiusi con $K \subset \bigcup_{1 \leq i \leq \ell} F_i$. Osserviamo che, in particolare, f è iniettiva su ciascun U_i . Per ogni i sia $\{\chi_i\}$ una funzione in $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ uguale ad 1 su F_i e con $\text{supp } \chi_i \subset U_i$, $\chi_i < 1$ su $U_i \setminus F_i$. Posto $g_0 = f$, definiamo per ricorrenza $g_j = f + \sum_{i=1}^j v_i \chi_i$, per opportuni vettori $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{R}^n$, in modo che ciascuna delle g_j appartenga ancora a \mathcal{V} e sia un'immersione differenziabile su K , iniettiva su $\bigcup_{i \leq j} F_i$ e su ciascun F_i per $j < i \leq \ell$. Supponiamo di aver già definito g_{j-1} . Su $\tilde{U}_j = \{(x_1, x_2) \in \Omega \times \Omega \mid \chi_j(x_1) \neq \chi_j(x_2)\}$ definiamo la funzione

$$\tilde{U}_j \ni (x_0, x_1) \rightarrow \Phi_j(x_0, x_1) = \frac{g_{j-1}(x_1) - g_{j-1}(x_0)}{\chi_j(x_1) - \chi_j(x_0)} \in \mathbb{R}^n.$$

Poiché $n > 2m$, l'immagine è di prima categoria e quindi possiamo trovare un vettore v_j che non appartenga all'immagine di Φ_j , e sia sufficientemente piccolo in modo che g_j sia ancora un'immersione differenziabile in tutti i punti di K , iniettiva su $\bigcup_{i < j} F_i$ e su ciascun F_i per $j \leq i \leq \ell$, ed appartenga all'aperto \mathcal{V} . Siano $x_0 \neq x_1 \in \bigcup_{i \leq j} F_i$. Allora $g_j(x_0) \neq g_j(x_1)$. Ciò infatti è vero se x_0 ed x_1 appartengono entrambi a $\bigcup_{i < j} F_i$ o entrambi a F_j . Se uno dei due appartiene ad F_j e l'altro ad $\bigcup_{i < j} F_i \setminus F_j$, allora $\chi_j(x_1) \neq \chi_j(x_0)$ e quindi $g_j(x_1) \neq g_j(x_0)$ perché abbiamo scelto $v_j \notin \Phi_j(\tilde{U}_j)$. Otteniamo dunque per ricorrenza una $g_\ell \in \mathcal{V}$ che è un'immersione differenziabile in tutti i punti di K ed iniettiva su K . \square

Proposizione VI.3.6. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^m ed $n \geq 2m + 1$. Allora l'insieme delle applicazioni $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ che non sono inclusioni differenziabili è di prima categoria.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{K_\nu\}$ una successione di compatti di Ω con $K_\nu \subset \overset{\circ}{K}_{\nu+1}$ ed $\Omega = \bigcup_\nu K_\nu$. Sia \mathcal{G}_ν come nella dimostrazione del Corollario VI.3.4. Per i Lemma VI.3.3 e VI.3.5, gli insiemi

$$\mathcal{F}_\nu = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \exists x_0 \neq x_1 \in K \text{ t.c. } f(x_0) = f(x_1)\} \cup \mathcal{G}_\nu$$

sono chiusi privi di punti interni. L'insieme delle funzioni di $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ che non sono inclusioni differenziabili è l'unione degli \mathcal{F}_ν , e quindi di prima categoria perché unione numerabile di chiusi con parte interna vuota. \square

VI.3.2. Applicazioni definite su una varietà e a valori in uno spazio Euclideo. Definiamo la topologia di Fréchet dello spazio vettoriale reale $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ delle applicazioni differenziabili di una varietà differenziabile M , di classe \mathcal{C}^∞ , numerabile all'infinito, nello spazio Euclideo \mathbb{R}^n .

Fissiamo un atlante localmente finito $\{U_\alpha, x_\alpha\} \mid \alpha \in I$ di M , con $I \subset \mathbb{N}$, e gli U_α localmente compatti in M , ed un raffinamento $\{U'_\alpha\}$ di $\{U_\alpha\}$ con $U'_\alpha \Subset U_\alpha$. Poniamo $K_\alpha = x_\alpha(\bar{U}'_\alpha)$. Possiamo allora definire una distanza su $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ mediante

$$\text{dist}(f, g) = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \frac{\sum_{\alpha \leq \nu} \|f \circ x_\alpha^{-1} - g \circ x_\alpha^{-1}\|_{K_{\alpha, \nu}}}{1 + \sum_{\alpha \leq \nu} \|f \circ x_\alpha^{-1} - g \circ x_\alpha^{-1}\|_{K_{\alpha, \nu}}}, \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n).$$

Si verifica che con questa distanza $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ è uno spazio metrico completo, e quindi di Baire. La topologia indotta dalla distanza è, per la rappresentazione delle applicazioni nelle carte locali, quella della convergenza uniforme sui compatti delle funzioni e di tutte le loro derivate.

Otteniamo allora:

Corollario VI.3.7. *Siano M una varietà differenziabile di dimensione m ed n un intero $\geq 2m$. Per ogni compatto K di M , l'insieme delle applicazioni $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ che sono immersioni differenziabili in ogni punto di K formano un aperto denso.*

Se inoltre M è numerabile all'infinito, allora l'insieme delle applicazioni $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ che sono immersioni differenziabili in tutti i punti di M è un sottoinsieme denso di seconda categoria.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{A} = \{U_\alpha, x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un atlante di M , con $U_\alpha \Subset M$ per ogni α , ed $\{U_\alpha\}$ localmente finita. Fissiamo un raffinamento $\{U'_\alpha\}$ di U_α con $U'_\alpha \Subset U_\alpha$ e sia $K_\alpha = \bar{U}'_\alpha$. Allora l'insieme \mathcal{G}_α delle $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ che non sono immersioni differenziabili in qualche punto $p \in K_\alpha$ formano un sottoinsieme chiuso di $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$. Dimostriamo che \mathcal{G}_α non ha punti interni. A questo scopo, se $f_0 \in \mathcal{G}_\alpha$, applichiamo il Lemma VI.3.2 alla funzione

$$f_{0, \alpha} : x_\alpha(U_\alpha) \ni x \rightarrow f_0 \circ x_\alpha^{-1} \in \mathbb{R}^n.$$

Per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare una matrice reale A_ϵ , di tipo $n \times m$, con $\|A_\epsilon\| < \epsilon$, tale che la

$$x_\alpha(U_\alpha) \ni x \rightarrow f_{0, \alpha} + A_\epsilon x \in \mathbb{R}^n$$

sia un'immersione differenziabile in ogni punto x di $x_\alpha(U_\alpha)$. Introduciamo una funzione reale χ , di classe \mathcal{C}^∞ in \mathbb{R}^m , costantemente uguale ad 1 in un intorno

di $x_\alpha(K_\alpha)$ ed uguale a 0 fuori di un altro intorno compatto di $x_\alpha(K_\alpha)$ in $x_\alpha(U_\alpha)$. Poniamo allora

$$f_\epsilon(p) = \begin{cases} f_0(p) & \text{se } p \in \mathring{U}_\alpha, \\ f_0(p) + \chi(x_\alpha(p))A_\epsilon x_\alpha(p) & \text{se } p \in U_\alpha. \end{cases}$$

Allora le f_ϵ non appartengono a \mathcal{G}_α se $\epsilon > 0$ e $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon = f_0$ in $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$. Ciò dimostra che, per ogni $\alpha \in I$, i chiusi \mathcal{G}_α hanno parte interna vuota.

Se K è un compatto di M , l'insieme \mathcal{F}_K delle $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ che non sono immersioni differenziabili in qualche punto di K è un chiuso di $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ contenuto in $\mathcal{F}'_K = \bigcup_{U_\alpha \cap K \neq \emptyset} \mathcal{G}_\alpha$. Poiché \mathcal{F}'_K è un'unione finita di chiusi con parte interna vuota, è esso stesso un chiuso con parte interna vuota. Questo dimostra la prima affermazione del corollario.

Supponiamo ora che M sia numerabile all'infinito. Allora il ricoprimento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è numerabile e l'insieme delle $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ che non sono immersioni differenziabili in qualche punto di M è l'unione numerabile $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{G}_\alpha$, e dunque della prima categoria di Baire. \square

Vale ancora il seguente

Lemma VI.3.8. *Siano M una varietà differenziabile di dimensione m ed n un intero con $n > 2m$. Per ogni $v \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ sia $\pi_v : \mathbb{R}^n \rightarrow v^\perp \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ la proiezione ortogonale.*

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ è un'immersione differenziabile, allora l'insieme dei vettori $v \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ per cui $\pi_v \circ f$ non sia un'immersione differenziabile è di prima categoria in S^{n-1} .

DIMOSTRAZIONE. Se (U, x) è una carta locale in $p \in M$, la $f \circ x^{-1}$ definisce una sottovarietà parametrica m -dimensionale $f(U)$ di \mathbb{R}^n . Sia V_p lo spazio tangente ad $f(U)$ in $f(p)$. Esso non dipende dalla scelta della carta locale. Si verifica che l'unione disgiunta $N = \bigsqcup_{p \in M} (V_p \cap S^{n-1})$ è una varietà differenziabile¹⁶ di dimensione $2m - 1$. Consideriamo l'applicazione differenziabile

$$\psi : N \ni (p, v) \longrightarrow v \in S^{n-1}.$$

La condizione che $\pi_v \circ f$ non sia un'immersione equivale al fatto che v appartenga a $\psi(N)$. Poiché $n > 2m$, l'immagine di ψ è di prima categoria in S^{n-1} . \square

¹⁶Possiamo definire su $\tilde{M} = \bigsqcup_{p \in M} V_p$ una struttura di varietà differenziabile di dimensione $2m$ associando ad ogni carta locale (U, x) di M una carta locale (\tilde{U}, \tilde{x}) di \tilde{M} definita come l'inversa dell'applicazione

$$x(U) \times \mathbb{R}^m \ni (x^1, \dots, x^m, v^1, \dots, v^m) \rightarrow (x^{-1}(x^1, \dots, x^m), \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x^i}) \in \tilde{U} \subset \tilde{M}.$$

Osserviamo che \tilde{M} si può considerare una sottovarietà del prodotto $M \times \mathbb{R}^n$ ed N è l'intersezione di \tilde{M} con $M \times S^{n-1}$. La varietà \tilde{M} è diffeomorfa allo spazio tangente TM definito nel Capitolo VII.

VI.3.3. Applicazioni differenziabili tra varietà. Siano M, N due varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^∞ e di dimensioni m, n , rispettivamente. Definiamo una topologia sullo spazio $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ delle applicazioni differenziabili di classe \mathcal{C}^∞ da M in N .

Se K è un compatto di M e V un aperto di N , indichiamo con $\mathcal{C}^\infty(M, K; N, V)$ l'insieme delle $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ tali che $f(K) \subset V$. Supponiamo ora che il compatto K sia contenuto in una carta (U, x) di M e che V sia l'aperto di una carta (V, y) in N . Ad ogni intero non negativo k possiamo associare la pseudodistanza¹⁷ $\delta_{U,x,K,V,y,k}$ su $\mathcal{C}^\infty(M, K; N, V)$ definita da

$$\delta_{U,x,K,V,y,k}(f, g) = \sup_{\substack{p \in K, \\ |\alpha| \leq k}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}(y(f(x)) - y(g(x)))}{\partial x^\alpha} \right|_{x=x(p)}.$$

Se $f_0 \in \mathcal{C}^\infty(M, K; N, V)$ ed $r > 0$, poniamo

$$\mathcal{B}(f_0; U, x, K, V, y, k, r) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, K; N, V) \mid \delta_{U,x,K,V,y,k}(f, f_0) < r\}.$$

La topologia di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ è la meno fine tra quelle per cui $\mathcal{B}(f_0; U, x, K, V, y, k, r)$ sia un intorno aperto di f_0 per ogni possibile scelta di una coppia di carte coordinate (U, x) in M e (V, y) in N con $f_0(U) \subset V$, di un compatto K di U , di un intero non negativo k e di un numero reale $r > 0$.

Se M ed N sono a base numerabile, allora questa topologia di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ è metrizzabile con una metrica completa. Per verificarlo possiamo utilizzare il Teorema d'immersione di Whitney.

Fissata un'inclusione differenziabile propria $N \hookrightarrow \mathbb{R}^\ell$, identifichiamo N ad una sottovarietà propria, e quindi a un sottoinsieme chiuso, di \mathbb{R}^ℓ . Possiamo allora considerare $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ come il sottospazio chiuso di $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^\ell)$ formato dalle f per cui $f(M) \subset N$. Si verifica allora che la topologia di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ è quella di sottospazio chiuso di $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^\ell)$.

Vale quindi la

Proposizione VI.3.9. *Se M ed N sono numerabili all'infinito, allora la topologia che abbiamo definito in questo modo è metrizzabile ed ammette una metrica completa. In particolare, $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ è uno spazio di Baire.* \square

Dai teoremi di immersione e di inclusione otteniamo

Teorema VI.3.10. *Supponiamo che M ed N siano a base numerabile. Se la dimensione n di N è maggiore o uguale al doppio $2m$ della dimensione di M , allora l'insieme delle $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ che non sono immersioni differenziabili è di prima categoria.*

Se $n \geq 2m + 1$, allora l'insieme delle $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ che non sono inclusioni differenziabili è di prima categoria.

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando il teorema d'inclusione di Whitney, possiamo supporre che N sia una sottovarietà propria di \mathbb{R}^ℓ . Sia $\{V_\nu\}$ un ricoprimento numerabile

¹⁷Una pseudodistanza su un insieme E è una funzione reale non negativa $\delta : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\delta(x, y) = \delta(y, x) \geq 0$, $\delta(x, x) = 0$, $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$ per ogni $x, y, z \in E$. A differenza della distanza, non si richiede che $\delta(x, y) = 0$ implichi che $x = y$.

di N con aperti relativamente compatti di N , per cui ci sia un'applicazione lineare surgettiva $\pi_\nu : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^n$ la cui restrizione a un intorno aperto di \bar{V}_ν sia un diffeomorfismo su un aperto di \mathbb{R}^n . Sia poi $\{U_\mu\}$ una base numerabile degli aperti di M , con U_μ relativamente compatto in M per ogni μ . Per ogni coppia (μ, ν) l'insieme $F_{\mu,\nu}$ delle $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ tali che $f(\bar{U}_\mu) \subset \bar{V}_\nu$ e $\pi_\nu \circ f$ non sia un'immersione differenziabile in qualche punto di \bar{U}_μ è un chiuso privo di punti interni di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ per il Corollario VI.3.7. L'insieme delle $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ che non sono immersioni differenziabili è l'unione degli $F_{\mu,\nu}$ e quindi, essendo unione numerabile di chiusi con parte interna vuota, di prima categoria.

Supponiamo ora che $n \geq 2m + 1$ e consideriamo per ogni μ_1, μ_2, ν l'insieme $F_{\mu_1, \mu_2, \nu}$ delle $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ tali che $\bar{U}_{\mu_1} \cap \bar{U}_{\mu_2} = \emptyset$, $f(\bar{U}_{\mu_1} \cup \bar{U}_{\mu_2}) \subset \bar{V}_\nu$ ed esistono $p_1 \in \bar{U}_{\mu_1}$ e $p_2 \in \bar{U}_{\mu_2}$ tali che $f(p_1) = f(p_2)$. Chiaramente $F_{\mu_1, \mu_2, \nu}$ è un chiuso. Per verificare che non ha punti interni, fissiamo una funzione $\chi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ che sia positiva su \bar{U}_2 e con $\text{supp } \chi \cap \bar{U}_1 = \emptyset$. La funzione

$$\Psi : (p_1, p_2) \longrightarrow \frac{\pi_\nu(f(p_1)) - \pi_\nu(f(p_2))}{\chi(p_2)} \in \mathbb{R}^n$$

è definita e di classe \mathcal{C}^∞ in un intorno di $\bar{U}_1 \times \bar{U}_2$ in $M \times M$. Poiché $n > 2m$, per il Lemma V.2.2 la sua immagine è di prima categoria e di misura di Lebesgue nulla in \mathbb{R}^n . Ricordiamo che la proiezione π_ν è un diffeomorfismo di un intorno aperto \tilde{V}_ν di \bar{V}_ν in N su un aperto ω_ν di \mathbb{R}^n . Possiamo quindi trovare una successione $\{v_a\}_{a \in \mathbb{N}}$ di vettori di \mathbb{R}^n con $\pi_\nu \circ f(p) + v_a \chi(p) \in \omega_\nu$ per ogni $p \in \bar{U}_2$, $\lim_{a \rightarrow \infty} v_a = 0$, e $v_a \notin \Psi(\bar{U}_{\mu_1} \times \bar{U}_{\mu_2})$ per ogni indice a . Indichiamo con $f_a \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ la funzione che coincide con f fuori del supporto di χ e per cui $\pi_\nu \circ f_a = \pi_\nu \circ f + v_a \chi$ su $\text{supp } \chi$. Allora $f_a \notin F_{\mu_1, \mu_2, \nu}$ per ogni a ed $f_a \rightarrow f$ in $\mathcal{C}^\infty(M, N)$. Questo dimostra che il chiuso $F_{\mu_1, \mu_2, \nu}$ non ha punti interni. L'insieme delle f in $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ che non sono iniettive è l'unione degli $F_{\mu_1, \mu_2, \nu}$ e quindi di prima categoria perché unione numerabile di chiusi privi di punti interni. L'insieme delle f in $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ che non sono inclusioni differenziabili è quindi di prima categoria perché unione dell'insieme di prima categoria delle applicazioni che non sono immersioni differenziabili e l'insieme di prima categoria delle applicazioni differenziabili non iniettive. \square

VI.4. Retratti differenziabili d'intorno

Introduciamo innanzi tutto la definizione di retratto differenziabile d'intorno.

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m ed N una sua sottovarietà differenziabile localmente chiusa, di dimensione $n \leq m$.

Definizione VI.4.1. Diciamo che N è un *retrato d'intorno* in M se vi sono un intorno aperto U di N in M ed una sommersione differenziabile $\varpi : U \rightarrow N$ tale che $\varpi(p) = p$ per ogni $p \in N$.

Consideriamo innanzi tutto il caso di una sottovarietà di uno spazio Euclideo.

Proposizione VI.4.2 (intorno tubolare). *Sia N una sottovarietà differenziabile localmente chiusa in \mathbb{R}^m , di dimensione $n < m$. Per ogni intorno aperto U di N in*

\mathbb{R}^m esiste una funzione reale positiva $\rho \in \mathcal{C}^\infty(N)$ tale che

$$U_\rho = \bigcup_{y \in N} \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x - y| < \rho(y)\} \subset U,$$

$$\forall x \in U_\rho, \exists! y = \varpi(x) \in N \text{ tale che } |x - y| = \text{dist}(x, N),$$

$$\varpi \in \mathcal{C}^\infty(U_\rho, N).$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che N sia un sottospazio chiuso di U . Sia $k = m - n$. Per ogni punto $p \in N$ esiste un intorno aperto U_p di p in U e funzioni $f^1, \dots, f^k \in \mathcal{C}^\infty(U_p)$ tali che

$$N \cap U_p = \{x \in U_p \mid f^1(x) = 0, \dots, f^k(x) = 0\},$$

$$df^1(x), \dots, df^k(x) \text{ siano linearmente indipendenti per ogni } x \in U_p.$$

L'applicazione

$$(*) \quad \phi_p : (N \cap U_p) \times \mathbb{R}^k \ni (x, t) \longrightarrow x + \sum_{i=1}^k t_i \frac{\partial f^i(x)}{\partial x} \in \mathbb{R}^m,$$

ove abbiamo indicato con $\partial f^i / \partial x = (\partial f^i / \partial x^1, \dots, \partial f^i / \partial x^m)$ il gradiente di f^i , è differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ . Si verifica facilmente, scegliendo una qualsiasi carta locale (A_p, γ) su N con centro in p e con $A_p \subset U_p$, che lo Jacobiano di ϕ_p , nelle coordinate (y, t) , è invertibile in 0. Per il punto (3) della Proposizione III.8.3, la ϕ_p definisce un diffeomorfismo di un intorno $V_p \times B_{r_p}$ di $(p, 0)$ in $A_p \times \mathbb{R}^k$ su un intorno W_p di p in \mathbb{R}^m . Osserviamo che $W_p \cap N = V_p$. Possiamo ancora supporre che

$$(**) \quad \text{dist}(W_p, N \setminus A_p) > \sup_{x \in W_p} \text{dist}(x, N).$$

Indichiamo con

$$\psi_p : W_p \ni (x) \rightarrow (\varpi_p(x), \tau_p(x)) \in V_p \times B_{r_p}$$

l'inversa della ϕ_p . Per la (*)

$$x - \varpi_p(x) = \sum_{i=1}^k \tau_p^i(x) \frac{\partial f^i(\varpi_p(x))}{\partial x}$$

e quindi il vettore $x - \varpi(x)$ è perpendicolare ad N nel punto $\varpi_p(x)$. Abbiamo allora

$$(***) \quad \begin{cases} |x - \varpi_p(x)| = \text{dist}(x, N), \quad \forall x \in W_p, \\ |x - y| > \text{dist}(x, N) \quad \forall x \in W_p, \quad \forall y \in N \setminus \{\varpi_p(x)\}. \end{cases}$$

Infatti, se $x \in W_p$ ed $y \in A_p$ verifica $|x - y| = \text{dist}(x, N)$, allora $x \in W_p$ per la (**) ed il vettore $x - y$ è perpendicolare ad N in y e quindi si scrive come una combinazione lineare dei gradienti $\partial f^1 / \partial x, \dots, \partial f^k / \partial x$.

Sia $\Omega = \bigcup_{p \in N} W_p$ e definiamo, utilizzando l'unicità della proiezione ortogonale, $\varpi : \Omega \rightarrow N$ ponendo $\varpi = \varpi_p$ su W_p .

La funzione $\delta(x) = \text{dist}(x, \overline{(\Omega \cap U)})$ è continua e positiva su N . Per il Teorema III.7.13 esiste allora una funzione $\rho \in \mathcal{C}^\infty(N_0)$ tale che $\frac{1}{2}\delta(x) < \rho(x) < \delta(x)$ su N_0 . La funzione ρ soddisfa la tesi. \square

Utilizzando il teorema d'immersione di Whitney e la Proposizione VI.4.2, dimostriamo

Teorema VI.4.3. *Sia M una varietà differenziabile di dimensione m ed N una sua sottovarietà differenziabile di dimensione $n < m$, localmente chiusa in M . Allora N è un retratto differenziabile d'intorno in M .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché una sottovarietà localmente chiusa di M è una sottovarietà propria di un aperto M_0 di M , possiamo supporre nella dimostrazione che N sia una sottovarietà propria di M .

Per il teorema d'immersione di Whitney, possiamo trovare un intero ℓ , con $m \leq \ell \leq 2m + 1$, ed un diffeomorfismo $\psi : M \rightarrow M_0 \subset \mathbb{R}^\ell$ di M con una sottovarietà propria M_0 di \mathbb{R}^ℓ . Allora $N_0 = \psi(N)$ è una sottovarietà propria di M_0 e quindi di \mathbb{R}^ℓ .

Per la Proposizione VI.4.2, N_0 ha un intorno tubolare W in \mathbb{R}^ℓ in cui la proiezione ortogonale $\pi_N : W \rightarrow N$ è ben definita ed è una sommersione differenziabile. Posto $U = \psi^{-1}(W)$, possiamo allora definire una retrazione differenziabile $\varpi : U \rightarrow N$ mediante il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\psi} & W \\ \varpi \downarrow & & \downarrow \pi_{N_0} \\ N & \xrightarrow[\psi]{} & N_0. \end{array}$$

□

VI.5. Omotopie di classe \mathcal{C}^∞

Il teorema d'immersione di Whitney e il Teorema VI.4.3 ci permettono di dimostrare il seguente teorema di approssimazione:

Teorema VI.5.1 (di approssimazione). *Siano M ed N due varietà differenziabili ed $f : M \rightarrow N$ un'applicazione continua. Allora esiste un'omotopia*

$$F : M \times [0, 1] \longrightarrow N, \quad \text{tale che}$$

$$\begin{cases} F(p, 0) = f(p), & \forall p \in M, \\ F|_{M \times (0, 1]} \in \mathcal{C}^\infty(M \times (0, 1], N). \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema d'immersione di Whitney, M ed N ammettono inclusioni differenziabili

$$M \xrightarrow{\phi} \phi(M) = M_0 \hookrightarrow \mathbb{R}^{m_0}, \quad N \xrightarrow{\psi} \psi(N) = N_0 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n_0},$$

con $m \leq m_0 \leq 2m + 1$, $n \leq n_0 \leq 2n + 1$.

Possiamo estendere $f_0 = \psi \circ f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^0(M_0, N_0)$ ad una funzione continua $\tilde{f}_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{m_0}, \mathbb{R}^{n_0})$.

Per la Proposizione VI.4.2, esiste una funzione positiva $r \in \mathcal{C}^\infty(N_0)$ tale che, posto

$$V_r = \bigcup_{y \in N_0} B(y, r(y)),$$

vi sia una sommersione differenziabile $\pi \in \mathcal{C}^\infty(V_r, N_0)$ con $|y - \pi(y)| = \text{dist}(y, N_0)$ per ogni $y \in V_r$.

Per ogni $x \in M_0$ sia $\tau(x)$ un numero reale positivo tale che

$$\tilde{f}_0(\xi) \in B(f_0(x), \frac{1}{3}r(f_0(x))) \quad \text{se} \quad |\xi - x| < \tau(x).$$

Per la Proposizione VI.4.2, possiamo trovare una funzione positiva $\rho \in \mathcal{C}^\infty(M_0)$ tale che

$$U_\rho = \bigcup_{x \in M_0} B(x, \rho(x)) \subset \bigcup_{x \in M_0} B(x, \tau(x))$$

e vi sia una sommersione differenziabile $\varpi \in \mathcal{C}^\infty(U_\rho, M_0)$ con $|x - \varpi(x)| = \text{dist}(x, M_0)$ per ogni $x \in U_\rho$.

Sia $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{m_0})$, con $\chi \geq 0$, $\text{supp}\chi \subset B(0, 1)$, $\int \chi dx = 1$.

Poniamo $G(0, x) = f(x)$ e, per ogni $0 < t \leq 1$ definiamo

$$\begin{aligned} G(x, t) &= (t\rho(x))^{-m_0} \int_{\mathbb{R}^{m_0}} \tilde{f}_0(x - \xi)\chi\left(\frac{\xi}{t\rho(x)}\right) d\xi = (t\rho(x))^{-m_0} \int_{\mathbb{R}^{m_0}} \tilde{f}_0(\xi)\chi\left(\frac{x - \xi}{t\rho(x)}\right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m_0}} \tilde{f}_0(x - t\rho(x)\xi)\chi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Otteniamo così una funzione $G \in \mathcal{C}^0(M \times I, \mathbb{R}^{n_0}) \cap \mathcal{C}^\infty(M \times (0, 1], \mathbb{R}^{n_0})$. Inoltre, per la scelta di ρ , $G(x, t) \in V_r$ per ogni $(x, t) \in M \times I$. La $\Phi(x, t) = \pi \circ G(x, t)$ è quindi un'omotopia di f_0 differenziabile su $M \times (0, 1]$. La $F = \psi^{-1} \circ \Phi \circ \phi$ definisce l'omotopia cercata. \square

Esempio VI.5.2. Ad esempio, in una varietà differenziabile connessa due punti qualsiasi possono essere congiunti con un cammino di classe \mathcal{C}^∞ .

Abbiamo ancora

Teorema VI.5.3 (regolarizzazione dell'omotopia). *Siano M ed N due varietà differenziabili numerabili all'infinito, ed $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ un'omotopia continua tra due applicazioni differenziabili $f_0, f_1 : M \rightarrow N$. Allora esiste un'omotopia $\Phi : M \times [0, 1] \rightarrow N$ tra f_0 ed f_1 con $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N)$.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che M ed N siano sottovarietà proprie di spazi Euclidei. Costruiamo allora una $\tilde{F} : M \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow N$, come nella dimostrazione del Teorema VI.5.1, mediante l'uso di mollificatori. Allora la $\Phi(x, t) = \tilde{F}(x, t, t - t^2)$ soddisfa le proprietà richieste. \square

Dall'esistenza degli intorni tubolari negli spazi Euclidei, ricaviamo:

Teorema VI.5.4. *Siano M, N due varietà differenziabili e sia d una metrica che definisce la topologia di N .*

- (1) *Esiste una funzione positiva $\delta \in \mathcal{C}^\infty(N)$ tale che se $f, g \in \mathcal{C}^0(M, N)$ e $d(f(p), g(p)) < \delta(f(p))$ per ogni $p \in M$, allora f e g sono omotope tra loro.*
- (2) *Per ogni funzione positiva $\epsilon \in \mathcal{C}^0(M)$ ed ogni $f \in \mathcal{C}^0(M, N)$ esiste una $g \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ tale che $d(f(x), g(x)) < \epsilon(p)$ per ogni $p \in M$.*

Campi di vettori e spazio tangente

VII.1. Campi di vettori e curve integrali sulle varietà

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m , di classe \mathcal{C}^∞ , numerabile all'infinito. Lo spazio $\mathcal{C}^\infty(M)$ delle funzioni reali di classe \mathcal{C}^∞ su M è un'algebra reale ed un anello commutativo unitario.

VII.1.1. Campi di vettori.

Definizione VII.1.1. Un *campo di vettori* su M è una *derivazione* dell'algebra $\mathcal{C}^\infty(M)$, cioè un'applicazione \mathbb{R} -lineare

$$X : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

che soddisfi l'identità di Leibnitz:

$$(7.1.1) \quad X(fg) = gX(f) + fX(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

L'insieme $\mathfrak{X}(M)$ dei campi di vettori su M è un $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo unitario a sinistra, con il prodotto definito da

$$(7.1.2) \quad (fX)(g) = f(X(g)), \quad \text{per } f, g \in \mathcal{C}^\infty(M), X \in \mathfrak{X}(M),$$

ed un'algebra di Lie reale con il prodotto di commutazione

$$(7.1.3) \quad [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{X}(M), f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Lemma VII.1.2. I campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ si annullano sulle funzioni costanti.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con c , per $c \in \mathbb{R}$, la funzione costante che vale c su M . Abbiamo:

$$X(c) = X(c \cdot 1) = c \cdot X(1) + 1 \cdot X(c) = 2 \cdot X(c)$$

e quindi $X(c) = 0$. □

Lemma VII.1.3. Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ed $f(p) = 0$ per tutti i punti p di un aperto A di M , allora $X(f)(p) = 0$ per ogni $p \in A$. Abbiamo quindi:

$$(7.1.4) \quad \text{supp}(X(f)) \subset \text{supp}(f) \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Fissato un punto $p \in A$, siano U e V due aperti di M con $p \in U \Subset V \Subset A$, e sia ϕ una funzione di $\mathcal{C}^\infty(M)$ uguale a 0 in \overline{U} ed uguale ad 1 su $M \setminus V$. Allora $f = \phi f$ e quindi:

$$X(f)(p) = X(\phi f)(p) = \phi(p)X(f)(p) + f(p)X(\phi)(p) = 0.$$

□

Da questo lemma si ricava immediatamente:

Lemma VII.1.4. *Sia X un campo di vettori su M ; se f, g sono due funzioni di $\mathcal{C}^\infty(M)$ che assumono gli stessi valori su tutti i punti di un aperto A di M , allora:*

$$X(f)(p) = X(g)(p) \quad \forall p \in A.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti $f - g$ si annulla su A e quindi:

$$X(f)(p) - X(g)(p) = X(f - g)(p) = 0 \quad \forall p \in A.$$

□

Corollario VII.1.5. *Se A è un aperto di M , per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ vi è uno ed un solo campo di vettori $X|_A \in \mathfrak{X}(A)$ tale che $X|_A f|_A = (Xf)|_A$ per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.* □

Ad ogni carta locale (U, x) in M possiamo associare campi di vettori $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m$ in $\mathfrak{X}(U)$, definiti da:

$$(7.1.5) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) f = \frac{\partial[f \circ x^{-1}]}{\partial x^i} \circ x, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

In una carta locale, un campo di vettori si rappresenta come un operatore differenziale alle derivate parziali, omogeneo del prim'ordine. Vale infatti il

Lemma VII.1.6. *Siano $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed (U, x) una carta locale in M . Allora:*

$$(7.1.6) \quad X|_U = \sum_{i=1}^m X(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right).$$

DIMOSTRAZIONE. Data $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, sia $f^* = f \circ x^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(x(U))$. Se $x_0 \in x(U)$, per ogni punto x di un intorno aperto $V_{x_0} \subset x(U)$ di x_0 , stellato rispetto ad x_0 :

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f^*(x_0) + \int_0^1 \frac{df^*(x_0 + t(x - x_0))}{dt} dt \\ &= f^*(x_0) + \sum_{i=1}^m (x^i - x_0^i) f_i^*(x), \quad \text{con} \\ f_i^*(x) &= \int_0^1 \frac{\partial f^*}{\partial x^i}(x_0 + t(x - x_0)) dt \in \mathcal{C}^\infty(V_{x_0}). \end{aligned}$$

Con $x_0 = x(p_0)$ abbiamo

$$f_i^*(x_0) = \frac{\partial f^*(x_0)}{\partial x^i} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \right] (p_0)$$

e quindi :

$$\begin{aligned}
[X|_U f](p_0) &= \left[X \Big|_{V_{x_0}} f \right] (p_0) \\
&= \left[X \Big|_{V_{x_0}} [f(p_0)] \right] (p_0) + \left[X \Big|_{V_{x_0}} \sum_{i=1}^m (x^i - x_0^i) f_i^* \circ x \right] (p_0) \\
&= \sum_{i=1}^m f_i^*(x_0) \left[X \Big|_{V_{x_0}} (x^i - x_0^i) \right] (p_0) \\
&= \sum_{i=1}^m [X(x^i)](p_0) \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \right] (p_0). \quad \square
\end{aligned}$$

VII.1.2. Vettori tangenti.

Definizione VII.1.7. Fissato un punto $p \in M$, chiamiamo *vettore tangente* ad M in p un'applicazione \mathbb{R} -lineare

$$(7.1.7) \quad v: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R},$$

che soddisfi l'identità di Leibnitz:

$$(7.1.8) \quad v(fg) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g), \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

I vettori tangenti in un punto $p \in M$ formano uno spazio vettoriale reale, che indicheremo con $T_p M$.

Lemma VII.1.8. Se U è un intorno aperto di p in M ed $X \in \mathfrak{X}(U)$, allora

$$(7.1.9) \quad X_p: \mathcal{C}^\infty(M) \ni f \rightarrow (Xf)(p) \in \mathbb{R}$$

è un vettore tangente ad M in p . □

Definizione VII.1.9. Chiamiamo $X_p \in T_p M$ il valore in p del campo vettoriale X .

Teorema VII.1.10. Per ogni punto $p \in M$ l'applicazione lineare

$$(7.1.10) \quad \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow X_p \in T_p M$$

è surgettiva. Se M ha dimensione m ed (U, x) è una carta locale di M in p , allora i vettori tangenti

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p$$

formano una base di $T_p M$. □

VII.1.3. Velocità e curve integrali di un campo di vettori. Siano $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ed $\alpha \in \mathcal{C}^1((a, b), M)$ un arco di classe \mathcal{C}^1 in M .

Definizione VII.1.11. La *velocità* di α in $t \in (a, b)$ è il vettore tangente $\dot{\alpha}(t) \in T_{\alpha(t)} M$, definito da

$$(7.1.11) \quad \dot{\alpha}(t)(f) = \frac{df(\alpha(t))}{dt}, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Osserviamo che la (7.1.11) è ben definita in quanto $f \circ \alpha \in \mathcal{C}^1((a, b))$.

Definizione VII.1.12. Un arco $\alpha \in \mathcal{C}^1((a, b), M)$ di classe \mathcal{C}^1 in M è una *curva integrale del campo di vettori* $X \in \mathfrak{X}(M)$ se:

$$(7.1.12) \quad \dot{\alpha}(t) = X_{\alpha(t)}, \quad \forall t \in (a, b).$$

Se (U, x) è una carta locale in M ed $X = \sum_{i=1}^m a^i(x) \partial / \partial x^i$ in U , allora gli integrali ϕ in U del campo di vettori X sono soluzioni $x(t) = x(\phi(t))$ del sistema autonomo di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine:

$$(7.1.13) \quad \dot{x}^i = a^i(x) \quad \text{per } i = 1, \dots, m.$$

Dai teoremi di esistenza e unicità per sistemi di equazioni differenziali ordinarie abbiamo allora:

Teorema VII.1.13. Siano $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo di vettori in M e p_0 un punto di M . Esiste allora un'unica curva integrale $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ di X , con $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$, con $\alpha(0) = p_0$, tale che, se $a > -\infty$, allora $\alpha(t)$ non ha punti limite¹ in M per $t \rightarrow a$; se $b < +\infty$, allora $\alpha(t)$ non ha punti limite in M per $t \rightarrow b$.

VII.2. Lo spazio tangente

Indichiamo con TM l'unione disgiunta degli spazi vettoriali $T_p M$, al variare di p in M e con $\pi : TM \rightarrow M$ l'applicazione che fa corrispondere al vettore tangente $v \in T_p M$ il suo *punto d'applicazione* p . Possiamo definire su TM una struttura di varietà differenziabile nel modo seguente. Per ogni carta locale (U, x) di M , definiamo una carta locale $(\pi^{-1}(U), x \times dx)$ di TM ponendo:

$$(7.2.1) \quad \begin{cases} \pi^{-1}(U) \ni v \longrightarrow (x(\pi(v)), v(x)) \in x(U) \times \mathbb{R}^m, \\ \text{con } v(x) = (v(x^1), \dots, v(x^m)) \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Se (V, y) è un'altra carta locale di M , per $p \in U \cap V$ abbiamo:

$$(7.2.2) \quad v(y^i) = \sum_{h=1}^m v(x^h) \frac{\partial y^i}{\partial x^h},$$

cioè $v(y) = (\partial y / \partial x) v(x)$, ove $\partial y / \partial x$ è la matrice Jacobiana del cambiamento di coordinate. Questa relazione si esprime anche dicendo che *le componenti di un vettore tangente sono covarianti rispetto ai cambiamenti di coordinate*.

Quindi, se $y = \phi(x)$, per $x \in x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m$ è la funzione di transizione delle due carte (U, x) e (V, y) , il cambiamento di coordinate dalla carta $(\pi^{-1}(U), x \times dx)$ alla carta $(\pi^{-1}(V), y \times dy)$ è $(\phi \times d\phi)$.

Abbiamo perciò:

Proposizione VII.2.1. Dato un atlante $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i)\}$ di M , con funzioni di transizione² $x_{i,j}$, allora $T\mathcal{A} = \{\pi^{-1}(U_i), x_i \times dx_i\}$ è un atlante di TM , con funzioni di transizione $x_{i,j} \times dx_{i,j}$.

¹Diciamo che p_c è un punto limite di α per $t \rightarrow c \in \{a, b\}$ se esiste una successione $\{t_v\} \subset (a, b)$ tale che $\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha(t_v) = p_c$.

²abbiamo cioè $x_{i,j} = x_i \circ x_j^{-1}$ su $x_j(U_j \cap U_i)$.

Definizione VII.2.2. Con la struttura differenziale definita dall'atlante descritto nella Proposizione VII.2.1, chiamiamo TM lo *spazio tangente* di M .

Proposizione VII.2.3. *L'applicazione*

$$(7.2.3) \quad \pi : TM \rightarrow M, \quad \text{t.c.} \quad \pi(v) = p \text{ se } v \in T_p M$$

è una *sommersione differenziabile di classe* \mathcal{C}^∞ . \square

Fibrati differenziabili. Lo spazio tangente è un particolare esempio di *fibrato differenziabile*.

Definizione VII.2.4. Un fibrato differenziabile è il dato $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ di due varietà differenziabili B, E e di una sommersione differenziabile $E \xrightarrow{\pi} B$. La varietà E si dice lo *spazio totale*, B la *base* e π la *proiezione* del fibrato ξ .

Se U è un aperto di B , indichiamo con $\Gamma(U, \xi)$, od anche con $\Gamma(U, E)$ quando non vi sia pericolo di confusione, lo spazio delle *sezioni differenziabili* di ξ su U , cioè l'insieme delle applicazioni $s \in \mathcal{C}^\infty(U, E)$ che sono inverse destre della proiezione π :

$$(7.2.4) \quad \Gamma(U, \xi) = \{s \in \mathcal{C}^\infty(U, E) \mid \pi \circ s(p) = p, \forall p \in U\}.$$

VII.3. Differenziale di un'applicazione differenziabile

Siano M ed N due varietà differenziabili ed $f : M \rightarrow N$ un'applicazione di classe \mathcal{C}^∞ . Essa induce un'applicazione (il *pullback di funzioni*):

$$(7.3.1) \quad f^* : \mathcal{C}^\infty(N) \ni \phi \rightarrow f^*(\phi) = \phi \circ f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Definizione VII.3.1. Il *differenziale* di f in un punto $p \in M$, che indicheremo con $f_*(p)$ o con $df(p)$, è l'applicazione

$$(7.3.2) \quad \begin{aligned} f_*(p) &= df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N, \quad \text{definita da:} \\ f_*(p)(v)(\phi) &= df_p(v)(\phi) = v(f^*(\phi)) = v(f \circ \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty(N). \end{aligned}$$

Osservazione VII.3.2. Se (U, x) e (V, y) sono carte locali in M ed N rispettivamente, con $p \in U$ ed $f(p) \in V$, abbiamo:

$$(7.3.3) \quad f_*(p) \left(\sum_{i=1}^m v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{f(p)}.$$

Nelle carte locali il differenziale è quindi l'applicazione lineare associata alla matrice Jacobiana della f .

Proposizione VII.3.3. *Se* $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$, *allora*

$$(7.3.4) \quad df : TM \ni v \rightarrow df_{\pi(v)}(v) \in TN$$

è un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ . \square

Definizione VII.3.4. L'applicazione df definita dalla (7.3.4) si dice la *funzione differenziale* di f o il *sollevamento* di f agli spazi tangenti.

VII.4. Gruppi a un parametro di diffeomorfismi

L'insieme $\text{Diff}^\infty(M)$ dei diffeomorfismi di classe \mathcal{C}^∞ di M è un gruppo rispetto al prodotto di composizione. Studiamo qui nel seguito la relazione tra i suoi sottogruppi e sottogruppi locali a un parametro ed i campi di vettori.

È utile introdurre la seguente notazione. Se M, N sono due varietà differenziabili, U^* un aperto di $M \times \mathbb{R}$, ed $F \in \mathcal{C}^1(U^*, N)$, allora per ogni $(p, t_0) \in U^*$ la $t \rightarrow F(p, t)$ è una curva di classe \mathcal{C}^1 in N , definita su un intervallo che contiene il punto t_0 . Indicheremo allora con $\dot{F}(p, t_0)$ la sua velocità in t_0 . Ricordiamo che $\dot{F}(p, t_0) \in T_{F(p, t_0)}N$.

Definizione VII.4.1. Un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di M è un'applicazione differenziabile

$$(7.4.1) \quad \Phi: M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \rightarrow \Phi(p, t) \in M$$

che goda delle proprietà:

- (i) $\Phi(p, 0) = p \quad \forall p \in M$
- (ii) $\Phi(p, t + s) = \Phi(\Phi(p, t), s) \quad \forall p \in M, \forall t, s \in \mathbb{R}$.

Definizione VII.4.2. Chiamiamo gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di M il dato di un intorno U^* di $M \times \{0\}$ in $M \times \mathbb{R}$ tale che, per ogni $p \in M$, l'insieme $U_p^* = \{t \in \mathbb{R} \mid (p, t) \in U^*\}$ sia connesso, e di un'applicazione

$$(7.4.2) \quad \Phi: U^* \subset M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \rightarrow \Phi(p, t) \in M$$

che goda delle proprietà:

- (i) $\Phi(p, 0) = p \quad \forall p \in M$
- (ii) $\Phi(p, t + s) = \Phi(\Phi(p, t), s) \quad \text{se } (p, t + s) \text{ e } (\Phi(p, t), s) \in U^* .$

Al gruppo locale a un parametro (7.4.2) associamo il campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ definito da

$$(7.4.3) \quad X_p = \dot{\Phi}(p, 0), \quad \forall p \in M.$$

Definizione VII.4.3. Il campo di vettori X definito da (7.4.3) si dice il generatore infinitesimale del gruppo locale a un parametro (7.4.2).

Teorema VII.4.4. Se X è il generatore infinitesimale del gruppo locale a un parametro $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(U^*, M)$, allora

$$(7.4.4) \quad \dot{\Phi}(p, t) = X_{\Phi(p, t)}, \quad \forall (p, t) \in U^* .$$

Ogni campo di vettori X è generatore infinitesimale di un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi.

Due gruppi locali a un parametro di diffeomorfismi $\Phi_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i^*, M)$, $i = 1, 2$, che abbiano lo stesso generatore infinitesimale, coincidono sul dominio comune di definizione $U_1^* \cap U_2^*$.

DIMOSTRAZIONE. L'esistenza e unicità di un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi associato ad un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ è conseguenza del teorema d'esistenza locale, unicità e dipendenza \mathcal{C}^∞ dai dati iniziali per il sistema

di equazioni differenziali ordinarie (7.1.13). Il fatto che la soluzione generale del problema di Cauchy definisca un gruppo locale a un parametro è conseguenza del fatto che il sistema (7.1.13) è *autonomo*, che cioè le funzioni a secondo membro in (7.1.13) non dipendono dalla variabile t e quindi che, se $t \rightarrow \Phi(p, t)$ è soluzione in un intervallo $t \in (a, b)$, con $a < 0 < b$, con dato iniziale $\Phi(p, 0) = p$, allora, per ogni $t_0 \in (a, b)$ fissato, $t \rightarrow \Phi(p, t + t_0)$ è soluzione nell'intervallo $(a - t_0, b - t_0)$, con dato iniziale $\Phi(p, t_0)$, e coincide quindi con $\Phi(\Phi(p, t_0), t)$. \square

Definizione VII.4.5. Il gruppo locale a un parametro con generatore infinitesimale $X \in \mathfrak{X}(M)$ si dice anche *flusso* di X .

Definizione VII.4.6. Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ si dice *completo* se, per ogni $p_0 \in M$, la soluzione del problema di Cauchy

$$(7.4.5) \quad \begin{cases} \dot{p} = X_p, \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Proposizione VII.4.7. *Ogni campo di vettori a supporto compatto è completo.* \square

Teorema VII.4.8. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ sia completo è che sia generatore infinitesimale di un sottogruppo a un parametro di diffeomorfismi di M .* \square

In particolare, su una varietà differenziabile compatta, i sottogruppi a un parametro di $\text{Diff}^\infty(M)$ sono in corrispondenza biunivoca con i campi di vettori in $\mathfrak{X}(M)$.

VII.4.1. Il caso delle varietà con bordo. Possiamo estendere senza difficoltà la definizione dei campi di vettori anche al caso delle varietà a bordo.

Definizione VII.4.9. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m , con bordo, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $p_0 \in \partial M$. Fissiamo una carta locale (U, x) con centro in p_0

$$U \ni p \rightarrow x \in X(U) \subset \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^m \geq 0\}, \quad x(p_0) = 0.$$

Diciamo che X nel punto p_0 è

diretto verso l'esterno se $X_p x^m|_{x=0} < 0$,

tangente se $X_p x^m|_{x=0} = 0$,

diretto verso l'interno se $X_p x^m|_{x=0} > 0$.

La definizione non dipende dalla scelta della carta locale, perché la componente $\partial y^m / \partial x^m$ dello Jacobiano della funzione di transizione è positiva su $U \cap V \cap \partial M$ per ogni coppia di carte locali (U, x) e (V, y) di M .

Abbiamo allora

Proposizione VII.4.10. *Sia M una varietà differenziabile con bordo ed $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo di vettori che non è tangente a ∂M in nessun punto. Esistono allora due*

funzioni continue non negative $\delta, \varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} \delta(p) > 0, \varepsilon(p) > 0 & \text{se } p \in \text{int}(M), \\ \delta(p) > 0, \varepsilon(p) = 0 & \text{se } p \in \partial M \text{ ed } X_p \text{ è diretto all'esterno,} \\ \delta(p) = 0, \varepsilon(p) > 0 & \text{se } p \in \partial M \text{ ed } X_p \text{ è diretto all'interno,} \end{cases}$$

ed un'applicazione continua ed infinitamente differenziabile fino al bordo di U^*

$$\Phi : U^* = \{(p, t) \in M \times \mathbb{R} \mid -\delta(p) \leq t \leq \varepsilon(p)\}$$

tale che

$$\frac{\partial \Phi(p, t)}{\partial t} = X_{\Phi(p, t)}, \quad \forall (p, t) \in U^*,$$

$$\Phi(p, t + s) = \Phi(\Phi(p, s), t), \quad \text{se } (p, s), (p, t + s), (\Phi(p, s), t) \in U^*. \quad \square$$

VII.5. Isotopia

Su una varietà M il flusso relativo ad un campo di vettori completo definisce un'omotopia $\{f_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ dell'identità in cui ogni f_t è ancora un diffeomorfismo di M in sé. Più in generale, introduciamo qui una nozione di equivalenza d'inclusioni differenziabili.

Siano M ed N due varietà differenziabili.

Definizione VII.5.1. Un'isotopia tra due inclusioni differenziabili $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ è un'applicazione differenziabile $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ tale che

- (a) $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$ per ogni $x \in M$;
- (b) $f_t = F(\cdot, t) \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ è un'inclusione differenziabile per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Osservazione VII.5.2. Nella definizione di isotopia si potrebbe considerare, in modo equivalente, un'applicazione F definita soltanto su $M \times [0, 1]$. Sia infatti $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ una funzione reale con

$$\begin{cases} \chi(t) = 0 & \text{se } t \leq 0, \\ 0 < \chi(t) < 1 & \text{se } 0 < t < 1, \\ \chi(t) = 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Possiamo prendere ad esempio $\chi(t) = \exp(-t^{-1} \exp((t-1)^{-1}))$ su $(0, 1)$.

Se $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N)$, con $f_t = F(\cdot, t)$ inclusione differenziabile per ogni $t \in [0, 1]$, allora $G(p, t) = F(p, \chi(t)) \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$, con $g_t = G(\cdot, t)$ inclusione differenziabile per ogni $t \in \mathbb{R}$, e $g_t = f_0$ per $t \leq 0$, $g_t = f_1$ per $t \geq 1$.

Proposizione VII.5.3. L'isotopia d'inclusioni differenziabili di una varietà M in una varietà N è una relazione d'equivalenza. □

Ad un'applicazione $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ associamo l'applicazione

$$(7.5.1) \quad \tilde{F} : M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \longrightarrow (F(p, t), t) \in N \times \mathbb{R}, \quad \tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R}).$$

Diciamo che una $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$ preserva i livelli se $\pi_{\mathbb{R}}(F(p, t)) = t$ per ogni $(p, t) \in M \times \mathbb{R}$. Qui abbiamo indicato con $\pi_{\mathbb{R}} : N \times \mathbb{R} \ni (q, t) \rightarrow t \in \mathbb{R}$ la proiezione sul secondo fattore del prodotto cartesiano. In modo analogo, indicheremo con $\pi_N : N \times \mathbb{R} \ni (q, t) \rightarrow q \in N$ la proiezione sul primo fattore.

Lemma VII.5.4. *Per ogni isotopia d'inclusioni differenziabili $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ l'applicazione*

$$(7.5.2) \quad \tilde{F} : M \times [0, 1] \ni (x, t) \longrightarrow (F(x, t), t) \in N \times [0, 1]$$

è un'inclusione differenziabile che preserva i livelli.

Viceversa, se $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$ è un'inclusione differenziabile che preserva i livelli, allora $F(x, t) = \pi_N \circ \tilde{F}(x, t)$ è un'isotopia d'inclusioni differenziabili.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo che le $f_t = F(\cdot, t)$ sono immersioni differenziabili se e soltanto se \tilde{F} è un'immersione differenziabile. Fissando un'inclusione differenziabile propria $\psi : N \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ e considerando le applicazioni $\psi \circ F$ e $\psi \circ \tilde{F}$ possiamo ricondurci al caso in cui $N = \mathbb{R}^\ell$. Fissata una carta locale (U, x) in M , poiché $\tilde{F}(p, t) = (f_t(p), t)$, lo Jacobiano di \tilde{F} è dato da

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial(x, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_t}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

È chiaro quindi che \tilde{F} è un'immersione differenziabile se e soltanto se f_t è un'immersione differenziabile per ogni $t \in \mathbb{R}$. Inoltre, \tilde{F} è iniettiva se e soltanto se ciascuna delle f_t , per $t \in \mathbb{R}$, è iniettiva. \square

VII.6. Campi di vettori ed isotopie dell'identità

Se $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, indichiamo con $\dot{F}(p, t) = dF_{(p,t)}(\partial/\partial t)$ la derivata rispetto al tempo di F nel punto (p, t) . Osserviamo che \dot{F} è una sezione di classe \mathcal{C}^∞ del fibrato differenziabile $\xi = (TM \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi \times \text{id}_{\mathbb{R}}} M \times \mathbb{R})$. Indicheremo con $\Gamma(M \times \mathbb{R}, TM)$ lo spazio $\Gamma_\xi(M \times \mathbb{R}, TM \times \mathbb{R})$ delle sezioni del fibrato ξ .

Per ogni campo di vettori completo $X \in \mathfrak{X}(M)$, il gruppo a un parametro $\Phi_X \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, M)$ che ha generatore infinitesimale X è un'isotopia dell'identità su M , caratterizzata dall'equazione differenziale $\dot{\Phi}_X = X$.

Più in generale, se $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, M)$ è un'isotopia dell'identità su M , la derivata rispetto al tempo \dot{F} è un elemento di $\Gamma(M \times \mathbb{R}, TM)$. Viceversa, data una sezione $X \in \Gamma(M \times \mathbb{R}, TM)$ possiamo cercare di costruire un'isotopia dell'identità risolvendo, per ogni $p \in M$, il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$(7.6.1) \quad \begin{cases} \dot{F}(p, t) = X(F(p, t), t), \\ F(p, 0) = p \end{cases}$$

Se X non è costante rispetto a t , il sistema (7.6.1) non è autonomo. Possiamo associare ad esso un sistema autonomo nella funzione incognita $G \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, M \times \mathbb{R})$, considerando, per ogni $p \in M$,

$$(7.6.2) \quad \begin{cases} \dot{G}(p, t) = \tilde{X}(G(p, t)) = (X(G(p, t)), \partial/\partial t), \\ G(p, 0) = (p, 0). \end{cases}$$

Qui \tilde{X} è un campo di vettori in $\mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$ che soddisfa $d\pi_{\mathbb{R}}(\tilde{X}) = \partial/\partial t$. Se (7.6.2) ammette per ogni $p \in M$ una soluzione definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, allora $F = \pi_M \circ G$ è un'isotopia dell'identità su M .

Vale quindi il

Teorema VII.6.1. *Le isotopie dell'identità su M sono in corrispondenza biunivoca con i campi di vettori completi $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$ con $d\pi_{\mathbb{R}}(\tilde{X}) = \partial/\partial t$. La corrispondenza è quella che associa ad \tilde{X} la $\pi_M \circ G$ per la soluzione G di (7.6.2).*

Osservazione VII.6.2. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ è completo, allora $(X, \partial/\partial t)$ è un campo completo su $M \times \mathbb{R}$.

Osservazione VII.6.3. Se $X \in \Gamma(M \times \mathbb{R}, TM)$ ha supporto compatto, allora $(X, \partial/\partial t)$ è un campo di vettori completo su $M \times \mathbb{R}$.

Esempio VII.6.4. Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ un diffeomorfismo, con $f(0) = 0$. Possiamo scrivere f nella forma

$$f^i(x) = \sum_{j=1}^n a_j^i(x) x^j \quad \text{per } i = 1, \dots, n, \quad \text{con } a_j^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n),$$

con

$$a_j^i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(tx) dt \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

La $F(x, t) = t^{-1}f(tx)$ è un'isotopia tra il diffeomorfismo lineare

$$f_0(x) = \frac{\partial f(0)}{\partial x} x$$

ed f . Quindi ogni diffeomorfismo di \mathbb{R}^n è isotopo ad un diffeomorfismo lineare. Infine, poiché $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ ha esattamente due componenti connesse per archi, possiamo concludere che ogni diffeomorfismo di \mathbb{R}^n è isotopo o all'identità o alla simmetria rispetto ad un iperpiano.

Nel suo lavoro del 1936, H. Whitney dimostrò il

Teorema VII.6.5 (Isotopia di inclusioni omotope). *Se $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ sono due inclusioni differenziabili omotope di una varietà compatta m -dimensionale M in una varietà differenziabile N di dimensione $n \geq 2m + 2$, allora f_0 ed f_1 sono isotope come inclusioni differenziabili.*

TRACCIA DELLA DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un'omotopia $F : M \times I \rightarrow N$ tra f_0 ed f_1 . Per il Teorema VI.5.3 del Capitolo VI, possiamo supporre che l'omotopia sia restrizione di una $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$. Consideriamo allora la $\tilde{F}(p, t) = (F(p, t), t)$. Questa è un'applicazione in $\mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$. Poiché $\dim(M \times \mathbb{R}) = m + 1$ e $\dim(N \times \mathbb{R}) = n + 1 \geq 2m + 3 = 2(m + 1) + 1$, possiamo approssimare \tilde{F} con un'inclusione differenziabile $\tilde{G} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$. Poiché $M \times [0, 1]$ è compatto, se \tilde{G} è sufficientemente vicina ad \tilde{F} in $\mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$, possiamo, con un cambiamento di variabili, ottenere che $\tilde{G}(p, t) = (G(p, t), t)$ per t in un intorno di $[0, 1]$. Inoltre, poiché inclusioni differenziabili di una varietà compatta che siano vicine sono isotope, G_0 sarà isotopa ad f_0 e G_1 ad f_1 . Poiché l'isotopia è una relazione d'equivalenza, anche f_0 ed f_1 sono isotope. \square

Osservazione VII.6.6. Chiamiamo *nodo* in \mathbb{R}^n un'inclusione differenziabile di S^1 in \mathbb{R}^n ($n \geq 3$). Sciogliere un nodo $\nu : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ significa trovare un'isotopia di ν con il nodo banale

$$S^1 \ni e^{i\theta} \longrightarrow (\cos \theta, \sin \theta, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Sappiamo che ci sono in \mathbb{R}^3 nodi chiusi non scioglibili. Per il Teorema VII.6.5 tutti i nodi chiusi in \mathbb{R}^n con $n \geq 4$ sono scioglibili.

In generale, possiamo considerare delle *catene di m nodi*, o *m -link*, cioè inclusioni differenziabili

$$\lambda : \underbrace{S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{m \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Sciogliere una catena λ di m nodi vuol dire trovare un'isotopia di λ con la catena banale

$$\underbrace{S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{m \text{ volte}} \ni (e^{it})_j \longrightarrow (\cos \theta, \sin \theta, j, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Per il Teorema VII.6.5 tutte le catene di m nodi in uno spazio Euclideo \mathbb{R}^n , con $n \geq 4$, si possono sciogliere.

VII.7. Isotopie dello spazio ambiente

Due inclusioni differenziabili $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ possono essere isotope senza che i complementi $N \setminus f_0(M)$ ed $N \setminus f_1(M)$ siano omeomorfi. Un semplice esempio è l'inclusione in \mathbb{R}^2 di un segmento aperto e di una circonferenza privata di un punto. Introduciamo una nozione più restrittiva di isotopia:

Definizione VII.7.1. Due inclusioni differenziabili $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ sono *ambientalmente isotope* se esiste un'isotopia dell'identità $F \in \mathcal{C}^\infty(N \times \mathbb{R}, N)$ su N tale che

$$F(f_0(p), 1) = f_1(p), \quad \forall p \in M.$$

In generale l'isotopia ambientale, che implica l'omeomorfismo dei complementi delle immagini, è più restrittiva dell'isotopia. Le due relazioni coincidono per le inclusioni differenziabili di varietà compatte. Vale infatti il seguente³:

Teorema VII.7.2 (R. Thom). *Siano M, N varietà differenziabili ed $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ un'isotopia di inclusioni differenziabili di M in N . Per ogni compatto K contenuto in M esiste un'isotopia dell'identità $G \in \mathcal{C}^\infty(N \times \mathbb{R}, N)$ su N tale che*

$$G(f_0(p), 1) = f_1(p), \quad \forall p \in K.$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che, posto $f_t = F(\cdot, t)$, sia $f_t = f_0$ per $t < 0$ ed $f_t = f_1$ per $t > 1$. Per il Lemma VII.5.4 la $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$ definita da

$$\tilde{F}(p, t) = (F(p, t), t) \in N \times \mathbb{R}, \quad \text{per } p \in M, t \in \mathbb{R}$$

è un'inclusione differenziabile. L'immagine $\tilde{M} = \tilde{F}(M \times \mathbb{R})$ è una sottovarietà differenziabile di $N \times \mathbb{R}$. Consideriamo il campo di vettori $(X, \partial/\partial t) = d\tilde{F}(\partial/\partial t)$,

³RÉNÉ THOM: *La classification des immersions*, Sémin. Bourbaki **157**, 1957-58

con $X \in \Gamma(\tilde{M}, TN)$, su \tilde{M} . Possiamo trovare allora un campo di vettori $(Y, \partial/\partial t) \in \mathfrak{X}(N \times \mathbb{R})$, con

$$Y \in \Gamma(N \times \mathbb{R}, TN), \quad \text{supp } Y \subseteq N \times \mathbb{R}, \\ Y = X \quad \text{su } \tilde{F}(K \times [0, 1]).$$

Il campo $(Y, \partial/\partial t)$ è completo e quindi genera un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di $N \times \mathbb{R}$ che preservano i livelli. Ad esso corrisponde quindi un'isotopia dello spazio ambiente che trasforma f_0 in f_1 su K . \square

Corollario VII.7.3. *Se M è una varietà compatta, due inclusioni differenziabili $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ che siano isotope sono anche ambientalmente isotope.* \square

Osservazione VII.7.4. La conclusione del Corollario VII.7.3 non vale in generale per varietà M non compatte.

Consideriamo ad esempio due nodi $\nu_0, \nu_1 : S^1 \rightarrow S^3$ con $\nu_0(-1) = \nu_1(-1) = (0, 0, 1)$. Le loro restrizioni $f_0, f_1 : S^1 \setminus \{-1\} \rightarrow S^3 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ sono isotope, ma possono non essere ambientalmente isotope, in quanto i complementi dei supporti dei due nodi possono non essere omeomorfi⁴.

Corollario VII.7.5. *Se M è una varietà connessa, per ogni coppia di punti $p_0, p_1 \in M$ esiste un'isotopia $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, M)$ dell'identità su M con $F(p_0, 1) = p_1$.* \square

Corollario VII.7.6. *Ogni inclusione differenziabile $f \in \mathcal{C}^\infty(S^m, S^n)$, con $n \geq 2m+2$, si estende ad una inclusione differenziabile $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(D^{m+1}, S^n)$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $n > m$, f è omotopa all'inclusione differenziabile standard

$$\iota : S^m \ni (x^0, \dots, x^m) \longrightarrow (x^0, \dots, x^m, 0, \dots, 0) \in S^n.$$

Questa si estende all'inclusione differenziabile

$$D^{m+1} \ni (x^0, \dots, x^m) \longrightarrow (x^0, \dots, x^m, \sqrt{1 - |x^0|^2 - \dots - |x^m|^2}, 0, \dots, 0) \in S^n.$$

Per il Teorema VII.6.5, f ed ι sono isotope e per il Teorema VII.7.2 lo sono con un'isotopia dello spazio ambiente. Ne segue che anche f si estende ad un'inclusione differenziabile di D^{m+1} . \square

VII.8. k -celle differenziabili

In questo paragrafo esponiamo alcuni risultati⁵ relativi alle applicazioni differenziabili di dischi.

Premettiamo un'osservazione sulle applicazioni differenziabili.

Lemma VII.8.1. *Siano M, N due varietà differenziabili, di dimensione m, n , rispettivamente, e sia $\phi \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$ un'applicazione differenziabile. Se K è un compatto di N tale che*

⁴Il nodo non banale più semplice è il *trifoglio*, cioè una curva in \mathbb{R}^3 isotopa alla

$$x = \sin t + 2 \sin 2t, \quad y = \cos t - 2 \cos 2t, \quad z = -\sin 3t.$$

Il suo complemento in \mathbb{R}^3 non è omeomorfo ad $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1$.

⁵Richard S. Palais, *Extending diffeomorphisms*. Proc. Amer. Math. Soc. **11**, 1960 pp. 274-277

(1) $f|_K$ sia iniettiva;

(2) $df(q) : T_q N \rightarrow T_{\phi(q)} M$ sia iniettiva per ogni $q \in K$,

allora esiste un intorno aperto U di K in N tale che $\phi|_U$ sia un'inclusione differenziabile.

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando il teorema d'immersione di Whitney, possiamo ridurci al caso in cui $M = \mathbb{R}^m$ ed N sia una sottovarietà propria di uno spazio Euclideo \mathbb{R}^ℓ . In particolare, possiamo considerare l'aggiunta $d\phi^*(q)$ dell'applicazione $d\phi(q) : T_q N \rightarrow T_{\phi(q)} \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$, rispetto al prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^m e a quello indotto su $T_q N$ dalla restrizione del prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^ℓ . La composta $d\phi^*(q) \circ d\phi(q)$ è un endomorfismo iniettivo di $T_q N$ ed abbiamo perciò, nella norma degli operatori, $\inf_K \|d\phi^*(q) \circ d\phi(q)\|^2 = \mu > 0$. Per continuità otteniamo che esiste un intorno relativamente compatto W di K in N tale che $\|d\phi^*(q) \circ d\phi(q)\|^2 \geq (\mu/2) > 0$ per ogni $q \in \bar{W}$. Allora, applicando l'argomento del Lemma ?? del Capitolo VI ad un numero finito di carte coordinate che ricoprono \bar{W} , otteniamo che esistono costanti positive δ, c tali che

$$|\phi(q_1) - \phi(q_2)| \geq c|q_1 - q_2|, \quad \forall q_1, q_2 \in \bar{W} \quad \text{con } |q_1 - q_2| \leq \delta.$$

Questo segue dal fatto che la distanza Euclidea su ciascun sottoinsieme compatto di una carta coordinata è equivalente alla restrizione della distanza Euclidea su \mathbb{R}^ℓ .

Consideriamo ora il compatto $F = \{(q_1, q_2) \in \bar{W} \times \bar{W} \mid |q_1 - q_2| \geq \delta\}$. La funzione reale

$$\gamma(q_1, q_2) = \frac{|\phi(q_1) - \phi(q_2)|}{|q_1 - q_2|}$$

è definita e continua su F ed è positiva nei punti di $F \cap (K \times K)$. Essa sarà allora ancora positiva in tutti i punti di un intorno A di $F \cap (K \times K)$ in F . L'insieme

$U = K \cup \overbrace{(\pi_1(A) \cap \pi_2(A))}^{\circ}$ è un intorno aperto di K in N , tale che la restrizione ad U di ϕ sia un'inclusione differenziabile. \square

Notazione VII.8.2. Se A è un qualsiasi sottoinsieme della varietà differenziabile N , indicheremo con $\mathcal{C}^\infty(A, M)$ l'insieme di tutte le funzioni continue $f : A \rightarrow M$ per cui esista un intorno aperto U di A in N ed un'applicazione differenziabile $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(U, M)$ tale che $\tilde{f}|_A = f$.

Definizione VII.8.3. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m e k un intero con $0 \leq k \leq m$. Una k -cella differenziabile di M è un'inclusione differenziabile $\phi \in \mathcal{C}^\infty(D^k, M)$.

L'applicazione ϕ è cioè un'inclusione topologica ed è la restrizione a $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x| \leq 1\}$ di un'applicazione di classe \mathcal{C}^∞ , definita su un intorno aperto U di D^k in \mathbb{R}^k , ed a valori in M , con differenziale iniettivo in ogni punto di D^k .

Per il Lemma VII.8.1 la ϕ è la restrizione dell'inclusione differenziabile di un disco aperto $B(r)$, con $r > 1$, in M .

Vale il

Teorema VII.8.4 (estensione ad un' n -cella). *Se $\phi \in \mathcal{C}^\infty(D^k, M)$ è una k -cella di M , con $0 \leq k < m$, ed U un intorno aperto di $\phi(D^k)$ in M , allora esiste una m -cella $\psi \in \mathcal{C}^\infty(D^m, M)$, con $\psi|_{D^k} = \phi$ e $\psi(D^m) \subset U$.*

Se M è orientata, possiamo scegliere ψ in modo che mantenga l'orientazione.

DIMOSTRAZIONE. Il teorema è una conseguenza del Lemma VII.8.1. \square

Vale allora il

Teorema VII.8.5 (Transitività). *Se $\phi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(D^k, M)$ sono due k -celle differenziabili di M , allora esiste un diffeomorfismo $F \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$ tale che $\psi = F \circ \phi$. Se M è orientata, e o $k < m$, oppure $k = m$ e le due celle sono equi-orientate, allora possiamo scegliere il diffeomorfismo F in modo che mantenga l'orientazione.*

Osservazione VII.8.6. Se M è connessa, o più in generale se le due celle ϕ e ψ sono contenute nella stessa componente connessa di M , il diffeomorfismo F del Teorema VII.8.5 può essere scelto isotopo all'identità, in un'isotopia costante al di fuori di un compatto di M .

Teorema VII.8.7 (di estensione). *Se $\phi \in \mathcal{C}^\infty(D^k, M)$ è una k -cella differenziabile in M ed f un'inclusione differenziabile di un intorno di $\phi(D^k)$ in M , allora esiste un diffeomorfismo F di M in sé, che coincide con f su un intorno di $\phi(D^k)$.*

Se M è orientabile ed f preserva l'orientazione, allora si può ottenere una F che preservi l'orientazione e sia isotopa all'identità in un'isotopia costante al di fuori di un sottoinsieme compatto.

VII.9. Collari

Definizione VII.9.1. Sia M una varietà differenziabile a bordo. Chiamiamo *collare* di ∂M un intorno aperto di ∂M in M diffeomorfo a $\partial M \times [0, 1)$.

Per dimostrare l'esistenza di collari, dimostriamo in primo luogo il

Lemma VII.9.2. *Sia M una varietà differenziabile a bordo. Esiste allora un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ con*

$$X_p \neq 0, \quad \forall p \in \partial M.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un atlante $\mathcal{A} = \{U_\alpha, x_\alpha \mid \alpha \in A\}$ di M localmente finito ed una partizione dell'unità $\{\phi_\alpha \mid \alpha \in A\}$, mediante funzioni reali non negative di classe \mathcal{C}^∞ e subordinata ad $\{U_\alpha\}$. Poniamo

$$X_\alpha = \begin{cases} \phi_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n} & \text{su } U_\alpha, \\ 0 & \text{su } M \setminus U_\alpha, \end{cases}$$

e sia

$$X = \sum_{\alpha \in A} X_\alpha.$$

Allora X è ben definito ed è un campo di vettori di classe \mathcal{C}^∞ su M perché la famiglia dei supporti degli X_α è localmente finita. Inoltre, è

$$X_\alpha x_\beta^n(p) > 0, \quad \text{se } p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap \partial M,$$

onde

$$X x_\alpha^n(p) > 0 \quad \text{se } p \in U_\alpha \cap \partial M$$

dimostra che $X_p \neq 0$ per $p \in \partial M$. \square

Abbiamo quindi il

Teorema VII.9.3. *Sia M una varietà a bordo. Ogni intorno aperto di ∂M in M contiene un collare di ∂M .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché ogni intorno aperto di ∂M in M è ancora una varietà con bordo ∂M , basterà dimostrare che ∂M ammette un collare in M . Per la proposizione VII.4.10 esiste un intorno U^* di $M \times \{0\}$ in $M \times \mathbb{R}$, della forma

$$U^* = \{(p, t) \in M \times \mathbb{R} \mid -\delta(p) \leq t \leq \epsilon(p)\}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \delta(p) \geq 0 \text{ su } \text{int}(M), \\ \delta(p) = 0 \text{ su } \partial M, \\ \epsilon(p) > 0 \text{ su } M \end{cases}$$

ed una $\Phi : U^* \rightarrow M$, di classe \mathcal{C}^∞ , tale che

$$\frac{\partial \Phi(p, t)}{\partial t} = X_{\Phi(p, t)}, \quad \forall (p, t) \in U^*.$$

Poiché X_p è diretto verso l'interno, per il teorema delle funzioni implicite $\{(p, t) \in \partial M \times \mathbb{R} \mid 0 \leq t < \epsilon(p)\} \ni (p, t) \rightarrow \Phi(p, t) \in M$ è un diffeomorfismo locale.

Utilizziamo il seguente

Lemma VII.9.4. *Siano M, N due spazi paracompatti ed $f : N \rightarrow M$ un omeomorfismo locale. Sia F un sottospazio chiuso di N e supponiamo che la restrizione $f|_F : F \rightarrow f(F)$ sia un omeomorfismo. Allora esiste un intorno aperto U di F in N tale che $f|_U : U \rightarrow f(U)$ sia un omeomorfismo. \square*

DIMOSTRAZIONE. Se A è un aperto di N che interseca F .

Poiché $f|_F : F \rightarrow f(F)$ è per ipotesi un omeomorfismo, $f(A \cap F)$ è un aperto di $f(F)$. Potremo trovare allora un aperto G di M tale che $f(A \cap F) = G \cap f(F)$. L'aperto $B = A \cap f^{-1}(G)$ sarà allora tale che

$$(*) \quad B \cap F = A \cap F, \quad \text{e} \quad B \cap f^{-1}(f(F)) = B \cap F.$$

Poiché f è un omeomorfismo locale, raffinando un ricoprimento aperto di N formato da un ricoprimento di F fatto con aperti B che soddisfino (*) e da $\mathring{C}F$, possiamo trovare ricoprimenti aperti localmente finiti $\{U_i \mid i \in I\}$ e $\{V_i \mid i \in I\}$ di N ed M rispettivamente, tali che

$$f_i : U_i \ni x \rightarrow f(x) \in V_i \text{ sia un omeomorfismo per ogni } i \in I, \\ \text{se } U_i \cap F \neq \emptyset, \text{ allora } U_i \cap F = f^{-1}(V_i \cap f(F)).$$

Siano $\{U'_i \mid i \in I\}$ e $\{V'_i \mid i \in I\}$ loro raffinamenti con $\bar{U}'_i \subset U_i$, $V'_i = f(U'_i) \subset V_i$, $\bar{V}'_i = f(\bar{U}'_i) \subset V_i$. Indichiamo con J il sottoinsieme di indici $i \in I$ per cui $U'_i \cap F \neq \emptyset$. Dico che, per ogni coppia di indici $(i, j) \in J \times J$ l'insieme

$$W_{i,j} = \{x \in U'_i \mid \exists y \in \bar{U}'_j \text{ t.c. } y \neq x, f(y) = f(x)\}$$

è chiuso in U'_i . Infatti, se $x \in U'_i \setminus W_{i,j}$, o $x \in \bar{U}'_j$ ed allora $U_i \cap U_j$ è un intorno aperto di x che non interseca $W_{i,j}$, oppure $x \notin \bar{U}'_j$ ed $U'_i \setminus f^{-1}(\bar{V}'_j)$ è un intorno di x

che non interseca $W_{i,j}$. Poiché il ricoprimento $\{\bar{U}'_i\}$ è localmente finito, gli insiemi

$$A_i = U'_i \setminus \bigcup_{\substack{j \in I, j \neq i, \\ \bar{U}'_j \cap \bar{U}'_i \neq \emptyset}} W_{i,j}$$

sono aperti. Allora

$$U = \bigcup_{A_i \cap F \neq \emptyset} A_i.$$

è un intorno aperto di F in N , su cui la f è iniettiva. Infatti, dico che $F \cap W_{i,j} = \emptyset$ per ogni $(i, j) \in J \times J$. Infatti, $B = U_i$ soddisfa la (*) se $i \in J$. Se quindi $x \in U_i$, $y \in U_j$, con $i, j \in J$ ed $f(x) = f(y) \in f(F)$, allora $x = y \in F$. Quindi U contiene F . Il fatto che $f|_U$ sia iniettiva segue dalla definizione. \square

Utilizzando il Lemma, otteniamo che, pur di scegliere una funzione $\epsilon : \partial M \rightarrow \{t > 0\}$ sufficientemente piccola, possiamo supporre che

$$\{(p, t) \in \partial M \times \mathbb{R} \mid 0 \leq t < \epsilon(p)\} \ni (p, t) \rightarrow \Phi(p, t) \in M$$

sia un omeomorfismo con l'immagine. Possiamo supporre che ϵ sia una funzione di classe \mathcal{C}^∞ . Ponendo allora

$$f : M \times [0, 1) \ni (p, t) \rightarrow \Phi(p, t \epsilon(p)) \in M$$

otteniamo un diffeomorfismo di $\partial M \times [0, 1)$ con un intorno aperto di ∂M in M . \square

Corollario VII.9.5. *Ogni varietà a bordo si può realizzare come una sottovarietà a bordo di una varietà senza bordo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f : \partial M \times [0, 1) \rightarrow M$ un diffeomorfismo di $\partial M \times [0, 1)$ su un intorno aperto di ∂M in M .

Otteniamo una varietà senza bordo N attaccando $\partial M \times (-\infty, 1)$ ad M mediante la f . \square

Corollario VII.9.6. *Sia M una varietà con bordo ∂M compatto. Supponiamo che ∂M sia unione di due chiusi disgiunti*

$$\partial M = N_0 \cup N_1, \quad N_0 = \bar{N}_0, \quad N_1 = \bar{N}_1, \quad N_0 \cap N_1 = \emptyset.$$

Allora esiste una funzione $\phi : M \rightarrow [0, 1]$, di classe \mathcal{C}^∞ , tale che

$$\phi^{-1}(0) = N_0, \quad \phi^{-1}(1) = N_1.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $g : \partial M \times [0, 1) \rightarrow A \subset M$ un collare di ∂M in M . Sia $B = \text{int}(M)$ Sia $\{\psi_A, \psi_B\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{A, B\}$. Definiamo allora

$$\phi(x) = \begin{cases} t & \text{se } x = g(y, t) \text{ con } y \in N_0, 0 \leq t \leq 1/2 \\ (1-t)\phi_A(x) & \text{se } x = g(y, t) \text{ con } y \in N_1, 0 \leq t \leq 1/2 \end{cases}$$

Poiché la ϕ è di classe \mathcal{C}^∞ su un compatto di M , possiamo prolungarla ad una funzione di classe \mathcal{C}^∞ su tutto M , con le proprietà richieste. \square

CAPITOLO VIII

Fibrati vettoriali

Il *fibrato tangente* è un esempio della struttura più generale di *fibrato vettoriale*, che esamineremo in questo capitolo. A loro volta, i fibrati vettoriali sono particolari fibrati differenziabili localmente banali.

VIII.1. Fibrati differenziabili

Definizione VIII.1.1. Un *fibrato differenziabile* ξ è il dato di due varietà differenziabili $E = E(\xi)$, $B = B(\xi)$ e di una sommersione differenziabile $\pi = \pi(\xi) : E \rightarrow B$. Chiamiamo E lo *spazio totale*, B la *base* e π la *proiezione nella base* di ξ .

Per ogni punto $p \in B$, l'insieme $E_p = E_p(\xi) = \pi^{-1}(p)$ è una sottovarietà differenziabile propria di E , che si dice la *fibra* di ξ su p .

Se U è un aperto di B , poniamo $E_U = \pi^{-1}(U)$. La restrizione di π ad E_U descrive un fibrato $E_U \rightarrow U$, che si indica anche con $\xi|_U$ e si dice *la restrizione ad U di ξ* .

Un'applicazione $s \in \mathcal{C}^k(U, E)$ tale che $\pi(s(p)) = p$ per ogni $p \in U$ si dice una *sezione* di classe \mathcal{C}^k di ξ su U . Indichiamo con $\Gamma_{\xi}^k(U, E)$ lo spazio delle sezioni di ξ su U . Scriveremo per semplicità $\Gamma^k(U, E)$ invece di $\Gamma_{\xi}^k(U, E)$ e $\Gamma(U, E)$ per $\Gamma^{\infty}(U, E)$ quando la notazione semplificata non generi confusione.

Ancora, indicheremo a volte il fibrato ξ con la sola lettera del suo spazio totale. Ad esempio, diremo a volte *il fibrato tangente TM invece di il fibrato tangente $(TM \xrightarrow{\pi} M)$* .

Lemma VIII.1.2. Sia ξ un fibrato differenziabile, $\tau_0 \in E(\xi)$ e $p_0 = \pi(\xi)(\tau_0)$. Allora esistono un intorno aperto U di p_0 in $B(\xi)$ ed una sezione $s \in \Gamma_{\xi}(U, E(\xi))$ con $s(p_0) = \tau_0$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\pi(\xi)$ è una sommersione differenziabile in tutti i punti di $E(\xi)$, la tesi segue dal teorema delle funzioni implicite (cf. Proposizione III.8.3). \square

Definizione VIII.1.3. Se M, F sono due varietà differenziabili, la proiezione $\pi_M : M \times F \rightarrow M$ definisce un fibrato differenziabile, che si dice *fibrato banale di base M e fibra F* .

Definizione VIII.1.4. Diciamo che il fibrato differenziabile ξ è *localmente banale con fibra tipica F* se

- (a) F è una varietà differenziabile;

- (b) per ogni $p \in B$ esistono un intorno aperto U di p in B ed una $\phi_U \in \mathcal{C}^\infty(E_U, F)$ tale che $\pi \times \phi_U \in \mathcal{C}^\infty(E_U, U \times F)$ sia un diffeomorfismo che renda commutativo il diagramma

$$(8.1.1) \quad \begin{array}{ccc} E_U & \xrightarrow{\pi \times \phi_U} & U \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_U \\ & U & \end{array}$$

Se $\psi_U : U \times F \rightarrow E_U$ è l'inversa di $\pi \times \phi_U$, allora, per ogni $\sigma_0 \in F$ fissato, l'applicazione $p \rightarrow \psi_U(p, \sigma_0)$ è una sezione differenziabile di ξ su U . Una carta locale definisce quindi un'applicazione della fibra tipica F nello spazio $\Gamma_\xi(U, E)$ delle sezioni di ξ su U .

Definizione VIII.1.5. La ϕ_U in (8.1.1), o l'inversa $\psi_U : U \times F \rightarrow E_U$, si dicono una *trivializzazione* di ξ su U .

Definizione VIII.1.6. Un *atlante di trivializzazione* di ξ è una collezione $\mathcal{A} = \{(U_a, \phi_a) \mid a \in A\}$ formata da aperti U_a di B e da trivializzazioni locali

$$E_{U_a} \ni \sigma \longrightarrow (\pi(\sigma), \phi_a(\sigma)) \in U_a \times F,$$

tale che $B = \bigcup_{a \in A} U_a$.

A volte scriveremo $E \xrightarrow{\pi} B$ per il fibrato differenziabile ξ con $E(\xi) = E$, $B(\xi) = B$ e $\pi(\xi) = \pi$. La notazione $E \xrightarrow[F]{\pi} B$ significherà che, inoltre, il fibrato differenziabile ξ è localmente banale, con fibra tipica F .

Proposizione VIII.1.7 (Un criterio di banalità locale). *Siano E e B varietà differenziabili, con B connessa. Allora ogni sommersione differenziabile propria $\pi : E \rightarrow B$ definisce un fibrato differenziabile localmente banale.*

Ricordiamo che il fatto che π sia propria significa che π è continua, chiusa, e che $\pi^{-1}(K)$ è compatto in E per ogni compatto K di B .

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un punto $p_0 \in B$. L'insieme $E_{p_0} = \pi^{-1}(p_0)$ è una sottovarietà compatta di E . Consideriamo un suo intorno tubolare W in E (cf. Proposizione VI.4.2), di cui E_{p_0} sia retrato differenziabile d'intorno: W è un intorno aperto di E_{p_0} in E ed è assegnata un'applicazione differenziabile $\rho : W \rightarrow E_{p_0}$ con $\rho(\sigma) = \sigma$ per ogni $\sigma \in E_{p_0}$. Poiché π è chiusa, $\pi(E \setminus W)$ è un chiuso di B che non contiene p_0 . Quindi $U_0 = B \setminus \pi(E \setminus W)$ è un intorno aperto di p_0 in B , con $E_{U_0} = \pi^{-1}(U_0) \subset W$. Quindi E_{p_0} ha in E un intorno tubolare E_{U_0} . Utilizziamo la retrazione ρ per definire la

$$\Phi : E_{U_0} \ni \sigma \rightarrow (\pi(\sigma), \rho(\sigma)) \in U_0 \times E_{p_0}.$$

Poiché π è una sommersione differenziabile, la Φ è un diffeomorfismo locale in tutti i punti $\sigma \in E_{p_0}$. L'insieme dei punti σ di E_{U_0} in cui sia Φ che la restrizione di ρ ad $E_{\pi(\sigma)}$ sono diffeomorfismi locali è un intorno aperto W_1 di E_{p_0} in E_{U_0} . Allora $U_1 = B \setminus \pi(E \setminus W_1)$ è un intorno aperto di p_0 in B e la restrizione di Φ ad E_{U_1} e di ρ a ciascun E_p con $p \in U_1$ sono diffeomorfismi locali. In particolare, per ogni

$p \in U_1$, $\rho(E_p)$ è un sottoinsieme aperto e chiuso di E_{p_0} . Poiché E_{p_0} ha al più un numero finito di componenti connesse, ne segue che $r(E_p) = E_{p_0}$ per tutti i punti p della componente connessa U_2 di p_0 in U_1 .

Resta da dimostrare che $\rho : E_p \rightarrow E_{p_0}$ è anche iniettiva se p appartiene a un intorno sufficientemente piccolo di p_0 in U_2 . Poiché Φ è un diffeomorfismo locale, l'insieme $Q = \{(\sigma_1, \sigma_2) \in E_{U_2} \times E_{U_2} \mid \sigma_1 \neq \sigma_2, \Phi(\sigma_1) = \Phi(\sigma_2)\}$ è, in $E_{U_2} \times E_{U_2}$ un chiuso disgiunto dalla diagonale $\Delta = \{(\sigma, \sigma) \mid \sigma \in E_{U_2}\}$ di $E_{U_2} \times E_{U_2}$. Infatti ogni $\sigma \in E_{U_2}$ è contenuto in un aperto W_σ su cui Φ definisce un diffeomorfismo con un aperto W'_σ di $U_2 \times E_{p_0}$. Quindi $W_\nu \times W_\nu$ è un intorno di (ν, ν) in $E_{U_2} \times E_{U_2}$ che non interseca Q .

Sia ora $\{\omega_\nu\}$ un sistema fondamentale di intorni aperti relativamente compatti di p_0 in U_2 , con $\omega_{\nu+1} \subseteq \omega_\nu$ per ogni ν . Abbiamo $\bigcap_\nu (\bar{E}_{\omega_\nu} \times \bar{E}_{\omega_\nu}) = E_{p_0} \times E_{p_0}$ e quindi

$$\bigcap_\nu (Q \cap [\bar{E}_{\omega_\nu} \times \bar{E}_{\omega_\nu}]) = Q \cap \bigcap_\nu (\bar{E}_{\omega_\nu} \times \bar{E}_{\omega_\nu}) = Q \cap (E_{p_0} \times E_{p_0}) = \emptyset.$$

Per la proprietà dell'intersezione finita, possiamo trovare un indice ν per cui $Q \cap (\bar{E}_{\omega_\nu} \times \bar{E}_{\omega_\nu}) = \emptyset$, e quindi la restrizione di Φ ad E_{ω_ν} sia una trivializzazione locale.

Per completare la dimostrazione, basterà osservare che le fibre $E_p = \pi^{-1}(p)$ sono tutte diffeomorfe tra loro. Ciò segue dalla connessione di B e dal fatto che dalla prima parte della dimostrazione si ricava che, fissato un punto $p_0 \in B$, l'insieme dei $p \in B$ per cui la fibra E_p è diffeomorfa ad E_{p_0} è aperto e chiuso in B . \square

Proposizione VIII.1.8. *Sia ξ un fibrato differenziabile ed M una sottovarietà differenziabile di $B(\xi)$. Definiamo*

$$(8.1.2) \quad E|_M = \pi(\xi)^{-1}(M), \quad \pi|_M : E|_M \ni \tau \rightarrow \pi(\xi)(\tau) \in M.$$

Allora $\xi|_M = (E|_M \xrightarrow{\pi|_M} M)$ è un fibrato differenziabile con base M . \square

Definizione VIII.1.9. Il fibrato $\xi|_M$ descritto nella Proposizione VIII.1.8 si dice la *restrizione ad M* del fibrato ξ .

Proposizione VIII.1.10. *Se ξ e ζ sono fibrati differenziabili, allora, posto*

$$E(\xi \times \zeta) = E(\xi) \times E(\zeta),$$

$$B(\xi \times \zeta) = B(\xi) \times B(\zeta),$$

$$\pi(\xi \times \zeta) : E(\xi \times \zeta) \ni (\alpha, \beta) \rightarrow (\pi(\xi)(\alpha), \pi(\zeta)(\beta)) \in B(\xi \times \zeta),$$

$\xi \times \zeta = (E(\xi \times \zeta) \xrightarrow{\pi(\xi \times \zeta)} B(\xi \times \zeta))$ è un fibrato differenziabile.

Se ξ e ζ sono localmente banali con fibre tipiche $F(\xi)$ ed $F(\zeta)$ rispettivamente, allora anche $\xi \times \zeta$ è localmente banale, con fibra tipica $F(\xi) \times F(\zeta)$.

Definizione VIII.1.11. Il fibrato differenziabile $\xi \times \zeta$ descritto nella Proposizione VIII.1.10 si dice *prodotto cartesiano* dei fibrati ξ e ζ .

Proposizione VIII.1.12 (pullback). *Sia ξ un fibrato differenziabile, M una varietà differenziabile ed $f : M \rightarrow B(\xi)$ un'applicazione differenziabile. Poniamo*

$$E(f^*\xi) = \{(p, \sigma) \in M \times E(\xi) \mid f(p) = \pi(\xi)(\sigma)\},$$

$$\pi(f^*\xi) : E \ni (p, \sigma) \longrightarrow p \in M.$$

Allora $f^*\xi = E(f^*\xi) \xrightarrow{\pi(f^*\xi)} M$ è un fibrato differenziabile con base M .

Se ξ è localmente banale con fibra tipica F , anche $f^*\xi$ è localmente banale con fibra tipica F .

Definizione VIII.1.13. Il fibrato $f^*\xi$ descritto nella Proposizione VIII.1.12 si dice l'immagine inversa, o *pullback*, di ξ mediante l'applicazione f .

Definizione VIII.1.14. Siano ξ_1 e ξ_2 due fibrati differenziabili sulla stessa base $B(\xi_1) = B(\xi_2) = M$. Chiamiamo *somma di Whitney* dei fibrati ξ_1 e ξ_2 , ed indichiamo con $\xi_1 \oplus_M \xi_2$, l'immagine inversa del fibrato $\xi_1 \times \xi_2$ mediante l'immersione canonica $\iota : M \ni p \rightarrow (p, p) \in M \times M$ di M nella diagonale di $M \times M$.

Abbiamo, in modo canonico,

$$\begin{aligned} E(\xi_1 \oplus_M \xi_2) &\simeq \{(\sigma_1, \sigma_2) \in E(\xi_1) \times E(\xi_2) \mid \pi(\xi_1)(\sigma_1) = \pi(\xi_2)(\sigma_2)\}, \\ \pi(\xi_1 \oplus_M \xi_2)(\sigma_1, \sigma_2) &= \pi(\xi_1)(\sigma_1) = \pi(\xi_2)(\sigma_2), \quad \forall (\sigma_1, \sigma_2) \in E(\xi_1 \oplus_M \xi_2). \end{aligned}$$

Osserviamo che, per le Proposizioni VIII.1.8, VIII.1.10, VIII.1.12, se ξ_1 e ξ_2 sono localmente banali con fibre tipiche F_1 ed F_2 rispettivamente, la loro somma di Whitney $\xi_1 \oplus_M \xi_2$ è ancora localmente banale, con fibra tipica $F_1 \times F_2$.

Definizione VIII.1.15. Siano ξ_1 e ξ_2 due fibrati differenziabili. Un morfismo di fibrati differenziabili $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è il dato di una coppia di applicazioni differenziabili $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ e $\phi : B(\xi_1) \rightarrow B(\xi_2)$ che rendano commutativo il diagramma

$$(8.1.3) \quad \begin{array}{ccc} E(\xi_1) & \xrightarrow{f} & E(\xi_2) \\ \pi(\xi_1) \downarrow & & \downarrow \pi(\xi_2) \\ B(\xi_1) & \xrightarrow{\phi} & B(\xi_2). \end{array}$$

Abbiamo

Lemma VIII.1.16. Siano ξ_1 e ξ_2 due fibrati differenziabili.

Se $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ è un'applicazione differenziabile e

$$\forall p \in B(\xi_1), \exists q \in B(\xi_2) \text{ t.c. } f(E_p(\xi_1)) \subset E_q(\xi_2),$$

allora esiste un unico morfismo di fibrati differenziabili $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ che induca f sugli spazi totali.

DIMOSTRAZIONE. L'unicità è ovvia, in quanto la ϕ si ottiene per passaggio al quoziente rispetto alle proiezioni sulle basi. Per dimostrare che ϕ è differenziabile, basta osservare che, se $s \in \Gamma_{\xi_1}(U, E(\xi_1))$ per un aperto U di $B(\xi_1)$, allora $\phi|_U = \pi(\xi_2) \circ s$, onde ϕ è differenziabile su U . \square

Proposizione VIII.1.17. Sia $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ un morfismo di fibrati differenziabili. Se $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ è un diffeomorfismo, anche $\phi : B(\xi_1) \rightarrow B(\xi_2)$ è un diffeomorfismo, e la $(f^{-1}, \phi^{-1}) : \xi_2 \rightarrow \xi_1$ è un morfismo di fibrati differenziabili.

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente ϕ è bigettiva. Se W è un aperto di $B(\xi_2)$ ed $s_2 \in \Gamma_{\xi_2}(W, E(\xi_2))$, allora $\phi^{-1}|_W = f^{-1} \circ s_2$ dimostra che ϕ^{-1} è anche differenziabile. \square

Definizione VIII.1.18. Un *isomorfismo* di fibrati differenziabili è un morfismo $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ per cui $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ sia un diffeomorfismo.

Un isomorfismo di fibrati differenziabili $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ con $B(\xi_1) = B(\xi_2) = M$ e $\phi = \text{id}_M$ si dice un'equivalenza.

VIII.2. Fibrati vettoriali differenziabili

Definizione VIII.2.1. Un *fibrato vettoriale differenziabile di rango n* è il dato di un fibrato differenziabile $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$, con π surgettiva, e di una struttura di spazio vettoriale reale di dimensione n su ogni fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$, compatibile con la struttura differenziabile. Ciò significa che le applicazioni

$$\begin{cases} E \oplus_M E \ni (v, w) \rightarrow v + w \in E, \\ \mathbb{R} \times E \ni (k, v) \rightarrow k \cdot v \in E \end{cases}$$

sono differenziabili.

Proposizione VIII.2.2. *Ogni fibrato vettoriale differenziabile di rango n è localmente banale con fibra tipica \mathbb{R}^n .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$ un fibrato differenziabile vettoriale di rango n . Dato un punto $p_0 \in B$, fissiamo una \mathbb{R} -base e_1, \dots, e_n di E_{p_0} . Per il Lemma VIII.1.2 possiamo trovare un intorno aperto U di p_0 in B e sezioni $\eta_i \in \Gamma_{\xi}(U, E)$ con $\eta_i(p_0) = e_i$ per $i = 1, \dots, n$. Per continuità, l'insieme U_0 dei punti p di U in cui $\eta_1(p), \dots, \eta_n(p)$ sono ancora linearmente indipendenti è un intorno aperto di p_0 in B . Allora la

$$U_0 \times \mathbb{R}^n \ni (p; v^1, \dots, v^n) \longrightarrow \sum_{i=1}^n v^i \eta_i(p) \in \pi^{-1}(U_0)$$

è una trivializzazione locale differenziabile di ξ in un intorno aperto del punto p_0 . \square

Se $\sigma \in \Gamma_{\xi}(U, E)$ è una sezione di un fibrato vettoriale differenziabile $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$, il *supporto* di σ in U è la chiusura in U dell'insieme dei punti p in cui $\sigma(p) \neq 0_p$:

$$\text{supp } \sigma = \overline{\{p \in U \mid \sigma(p) \neq 0_p\}} \cap U.$$

Proposizione VIII.2.3. *Sia $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$ un fibrato vettoriale differenziabile. Se U, V sono aperti di B con $\bar{U} \subset V$, allora per ogni $\sigma \in \Gamma_{\xi}(U, E)$ possiamo trovare una sezione globale $\tilde{\sigma} \in \Gamma_{\xi}(B, E)$ tale che $\text{supp } \tilde{\sigma} \subset V$ e $\tilde{\sigma}(p) = \sigma(p)$ per ogni $p \in U$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\chi \in \mathcal{C}^{\infty}(B)$ ha supporto contenuto in V ed è uguale ad 1 in un intorno di \bar{U} , porremo

$$\tilde{\sigma}(p) = \begin{cases} \chi(p)\sigma(p) & \text{se } p \in V, \\ 0_p & \text{se } p \notin V. \end{cases}$$

\square

Se V, W sono spazi vettoriali reali della stessa dimensione n , indichiamo con $\text{Iso}_{\mathbb{R}}(V, W)$ l'insieme degli isomorfismi \mathbb{R} -lineari di V in W .

Definizione VIII.2.4. Una *trivializzazione locale di un fibrato vettoriale differenziabile* $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ è una trivializzazione locale

$$(8.2.1) \quad \phi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow E|_U$$

di ξ compatibile con la struttura lineare, che sia cioè lineare sulle fibre.

Potremo quindi scrivere¹

$$(8.2.2) \quad \phi(p, v) = \phi(p)v, \quad \text{con } \sigma(p) \in \text{Iso}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, E_p) \quad \forall p \in U.$$

Un *atlante di trivializzazione* di un fibrato vettoriale differenziabile ξ è un atlante di trivializzazione di ξ in cui tutte le trivializzazioni locali siano compatibili con la struttura lineare.

Chiameremo *funzioni di transizione* dell'atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_a, \phi_a)\}$ del fibrato vettoriale differenziabile $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$, le applicazioni² $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_a \cap U_b, \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}))$, definite da

$$(8.2.3) \quad g_{\alpha\beta}(p) = \phi_\alpha(p)^{-1} \circ \phi_\beta(p), \quad \forall p \in U_a \cap U_b$$

si dicono le *funzioni di transizione* dell'atlante \mathcal{A} .

VIII.3. Morfismi e operazioni di fibrati vettoriali

Siano ξ_1 e ξ_2 due fibrati vettoriali differenziabili.

Definizione VIII.3.1. Un morfismo di fibrati differenziabili $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ si dice un *morfismo di fibrati vettoriali reali differenziabili* se è lineare sulle fibre, se cioè per ogni $p \in B(\xi_1)$ l'applicazione $E(\xi_1)_p \ni v \rightarrow f(v) \in E(\xi_2)_{\phi(p)}$ è lineare.

Se inoltre la $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ è un diffeomorfismo, allora anche $(f^{-1}, \phi^{-1}) : \xi_2 \rightarrow \xi_1$ è un morfismo di fibrati vettoriali differenziabili.

In questo caso diremo che $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è un *isomorfismo di fibrati vettoriali reali differenziabili*.

Se, ancora, $B(\xi_1) = B(\xi_2) = M$ e $\phi = \text{id}_M$, diremo che la $(f, \text{id}_M) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è un' *equivalenza di fibrati vettoriali reali*.

Dire che un fibrato differenziabile ξ di rango n è *trivializzabile* equivale dunque a dire che è isomorfo al fibrato differenziale triviale $B(\xi) \times V$, con V spazio vettoriale reale di dimensione n .

Le costruzioni dell'algebra lineare si estendono in modo naturale ai fibrati vettoriali.

¹Le $p \rightarrow \phi(p)$ sono *sezioni* del fibrato vettoriale $\xi \otimes_B \xi^*$, che sarà definito nel paragrafo successivo.

²Osserviamo che $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ è un aperto di \mathbb{R}^{n^2} , e quindi una varietà differenziabile di dimensione n^2 .

Fibrato duale. Sia $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$ un fibrato vettoriale reale di rango n . Sia

$$E^* = \bigsqcup_{p \in B} E_p^*$$

l'unione disgiunta dei duali degli spazi vettoriali E_p , al variare di p nella base B .

Indichiamo ancora con $\pi : E^* \rightarrow B$ l'applicazione che associa il punto $p \in B$ ad $\eta \in E_p^* \subset E^*$.

Se $\mathcal{A} = \{(U_a, \psi_a) \mid a \in A\}$ è un atlante di trivializzazione per ξ , per ogni punto $p \in U_a$ la

$$\psi_a(p) : \mathbb{R}^n \ni v \rightarrow \psi_a(p, v) \in E_p$$

è un isomorfismo lineare. La sua trasposta $(\psi(p))^* : E_p^* \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$ è ancora un isomorfismo lineare.

Possiamo così definire su $\xi^* = E^* \xrightarrow{\pi} B$ un'unica struttura di fibrato vettoriale differenziabile, per cui $\mathcal{A}^* = \{(U_a, \psi_a^*) \mid a \in A\}$, ove

$$\psi_a^* : U_a \times \mathbb{R}^n \ni (p, v^*) \rightarrow [(\psi_a(p))^*]^{-1} v^* \in E^*|_{U_a},$$

sia un atlante di trivializzazione.

Definizione VIII.3.2. Dato un fibrato vettoriale differenziabile ξ , il fibrato vettoriale differenziabile ξ^* definito sopra si dice il *fibrato duale* di ξ .

Osservazione VIII.3.3. Se ξ è un fibrato vettoriale differenziabile su M e ξ^* il suo duale, sulla somma di Whitney $\xi \oplus_M \xi^*$ è definito l'*accoppiamento di dualità* $\xi \oplus_M \xi^* \rightarrow (M \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi_M} M)$. Esso associa a due sezioni $\sigma \in \Gamma_\xi(U, E(\xi)), \sigma^* \in \Gamma_{\xi^*}(U, E^*(\xi))$ la funzione $(U \ni p \rightarrow \langle \sigma(p), \sigma^*(p) \rangle) \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

Proposizione VIII.3.4. Ogni fibrato vettoriale è equivalente al suo fibrato duale.

DIMOSTRAZIONE. Sia ξ un fibrato vettoriale di rango n ed $\mathcal{A} = \{(U_a, \psi_a) \mid a \in A\}$ un suo atlante di trivializzazione. Sia $\{\phi_a\}$ una partizione dell'unità subordinata ad $\{U_a \mid a \in A\}$ con $\phi_a \in \mathcal{C}^\infty(B(\xi))$ e $\phi_a \geq 0$ su $B(\xi)$. Definiamo un prodotto scalare sulle fibre di ξ mediante

$$(v_1|v_2) = \sum_{p \in U_a} \phi_a(p) \cdot (\text{pr}_{\mathbb{R}^n}(\psi_a(v_1)|\text{pr}_{\mathbb{R}^n}(\psi_a(v_2)))_{\mathbb{R}^n}, \\ \forall p \in B(\xi), \forall v_1, v_2 \in E(\xi)_p.$$

Il prodotto scalare definisce un isomorfismo (di Riesz) $\rho_p : E_p \rightarrow E_p^*$ per ogni $p \in M$, che ci dà un'equivalenza $(\rho, \text{id}_B) : \xi \rightarrow \xi^*$. \square

Definizione VIII.3.5. Sia M una varietà differenziabile e $TM \xrightarrow{\pi} M$ il suo fibrato tangente. Il fibrato duale $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ del fibrato tangente si dice il *fibrato cotangente* su M .

Somma diretta. Se ξ_1, ξ_2 sono fibrati vettoriali, di ranghi n_1 ed n_2 rispettivamente, allora il prodotto $\xi_1 \times \xi_2$ ha una struttura naturale di fibrato vettoriale di rango $n_1 + n_2$, con fibra sopra il punto $(p_1, p_2) \in B(\xi_1) \times B(\xi_2)$ uguale allo spazio vettoriale somma diretta $E(\xi_1)_{p_1} \oplus E(\xi_2)_{p_2}$.

Se ξ_1 e ξ_2 hanno la stessa base $B(\xi_1) = B(\xi_2) = M$, allora la somma di Whitney $\xi_1 \oplus_M \xi_2$ è un fibrato vettoriale differenziabile di rango $n_1 + n_2$.

Prodotto tensoriale. Dati due fibrati vettoriali differenziabili ξ_1, ξ_2 , di ranghi n_1 ed n_2 rispettivamente, con basi $B(\xi_1) = B_1$ e $B(\xi_2) = B_2$, definiamo il loro *prodotto tensoriale* $\xi_1 \otimes \xi_2$ come il fibrato vettoriale differenziabile di rango $n_1 n_2$ con base $B_1 \times B_2$ e fibra su $E(\xi_1)_{p_1} \otimes_{\mathbb{R}} E(\xi_2)_{p_2}$ sul punto $(p_1, p_2) \in B_1 \times B_2$. Se $B_1 = B_2 = M$, indichiamo con $\xi \otimes_M \xi_2$ l'immagine inversa di $\xi_1 \otimes \xi_2$ rispetto all'immersione $p \rightarrow (p, p)$ di M nella diagonale di $M \times M$. Esso si dice *prodotto di Whitney* dei fibrati ξ_1 e ξ_2 .

Fibrati tensoriali. Le operazioni di somme dirette, prodotti tensoriali, somme e prodotti di Whitney di fibrati vettoriali differenziabili sono associative e commutative, a meno di equivalenze.

In particolare, fissati due interi non negativi r, s possiamo definire, a partire da un fibrato vettoriale reale $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$ di rango n , un fibrato vettoriale differenziabile $\tau^{r,s}(\xi)$ sulla stessa base B , di rango $n(r+s)$, con spazio totale

$$\mathcal{T}^{r,s}(E) = \bigsqcup_{p \in B} \underbrace{E_p \otimes \cdots \otimes E_p}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{E_p^* \otimes \cdots \otimes E_p^*}_{s \text{ volte}}$$

Possiamo descrivere la sua struttura di fibrato vettoriale differenziabile a partire da un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_a, \psi_a) \mid a \in A\}$ di ξ . L'atlante corrispondente $\mathcal{T}^{r,s}\mathcal{A} = \{(U_a, \psi_a^{(r,s)}) \mid a \in A\}$ di $\tau^{r,s}(\xi)$ consiste delle carte

$$U_a \times (\mathbb{R}^n)^{\otimes r} \otimes (\mathbb{R}^n)^{\otimes s} \ni (p, t, \sigma) \rightarrow (\psi_a(p))^{\otimes r} t \otimes ([\psi_a(p)^*]^{-1})^{\otimes s} \sigma \in \mathcal{T}^{r,s}(E)|_{U_a}.$$

Il fibrato vettoriale $\tau^{r,s}(\xi)$ ha rango $n(r+s)$ e si dice la *potenza tensoriale r -covariante ed s -controvariante* di ξ .

Definizione VIII.3.6. Se M è una varietà differenziabile di dimensione m , il fibrato $\tau^{r,s}(TM \xrightarrow{\pi} M)$ si indica con $T^{r,s}M \xrightarrow{\pi} M$ e si dice il fibrato dei tensori r -covarianti ed s -controvarianti su M .

VIII.4. Fibrati vettoriali e fibrato tangente

Definizione VIII.4.1. Sia $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato differenziabile. Il *fibrato verticale* su E è il nucleo del differenziale della proiezione sulla base:

$$(8.4.1) \quad VE = \{v \in TE \mid d\pi(v) = 0\}.$$

Supponiamo ora che $E \xrightarrow{\pi} M$ sia un fibrato vettoriale. Possiamo identificare M alla sezione nulla di E , mediante l'applicazione

$$(8.4.2) \quad \iota : M \ni x \rightarrow 0_x \in E.$$

Abbiamo allora

Proposizione VIII.4.2. Ogni fibrato vettoriale $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$ è equivalente al pullback su M , mediante l'inclusione (8.4.2), del suo fibrato verticale.

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in M$ e $v \in E$. Associamo a v il vettore $\vec{v} \in V_{0_x}E$ definito da

$$\vec{v}f = \frac{d}{dt}f(tv)|_{t=0}.$$

Otteniamo così un'applicazione $E \rightarrow VE|_M = \iota^*(VE)$, che si verifica facilmente essere un'equivalenza di fibrati vettoriali. \square

Proposizione VIII.4.3. *Se $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$ è un fibrato vettoriale differenziabile, allora la restrizione di TE ad M (cioè il suo pullback mediante l'inclusione (8.4.2)) è equivalente alla somma diretta di TM e della restrizione ad M del fibrato verticale:*

$$(8.4.3) \quad TE|_M \simeq TM \oplus_M VE|_M. \quad \square$$

Utilizzando le proposizioni VIII.4.2 e VIII.4.3 ed il teorema d'immersione di Whitney otteniamo il

Teorema VIII.4.4. *Sia $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale differenziabile. Possiamo allora trovare un fibrato vettoriale differenziabile $\zeta = E(\zeta) \xrightarrow{\pi(\zeta)} M$ sulla stessa base M tale che la somma di Whitney $\xi \oplus_M \zeta$ sia equivalente ad un fibrato banale.*

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando il teorema di Whitney, possiamo fissare un'inclusione differenziabile propria $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^\ell$. Identifichiamo ad M la sezione nulla di ξ e sia N la sua immagine in \mathbb{R}^ℓ . Il differenziale $d\Phi$ definisce per restrizione un'inclusione differenziabile di $V_M E$ su un sottofibrato differenziabile ξ' , con base N , della restrizione ad N del fibrato tangente di \mathbb{R}^ℓ , e ξ è equivalente, per la proposizione VIII.4.2, al pullback di ξ' . Identifichiamo $T_N \mathbb{R}^\ell$ al fibrato banale $N \times \mathbb{R}^\ell$. Allora le fibre di ξ' sono della forma $\{y\} \times W_y$, con $y \in N$ e W_y sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^ℓ . Definiamo il fibrato vettoriale differenziabile ζ' su N come il sottofibrato di $N \times \mathbb{R}^\ell$ con fibre $\{y\} \times W_y^\perp$, al variare di y in N , ed indichiamo con ζ il suo pullback mediante Φ . Allora $\xi \oplus_M \zeta$ è il pullback mediante Φ del fibrato vettoriale $\xi' \oplus_N \zeta' \simeq N \times \mathbb{R}^\ell$, e dunque equivalente ad un fibrato banale perché pullback di un fibrato equivalente ad un fibrato banale. \square

VIII.5. Norme differenziabili e strutture Euclidee

Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ un fibrato vettoriale. Indichiamo con 0_E la sua sezione nulla.

Definizione VIII.5.1. Una *norma differenziabile* su ξ è un'applicazione reale continua e non negativa $\| \cdot \|_E \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$ che goda delle proprietà:

$$(8.5.1) \quad \|q\|_E > 0 \quad \text{se} \quad q \notin 0_E,$$

$$(8.5.2) \quad \|kq\|_E = |k| \|q\|_E \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall q \in E,$$

$$(8.5.3) \quad \|q_1 + q_2\|_E \leq \|q_1\|_E + \|q_2\|_E, \quad \forall p \in B, \quad \forall q_1, q_2 \in E_p, \quad \| \cdot \|_E^2 \in \mathcal{C}^\infty(E).$$

Definizione VIII.5.2. Una *struttura Euclidea* su ξ è un'applicazione differenziabile

$$E \oplus_B E \ni (q_1, q_2) \longrightarrow (q_1|q_2)_E \in \mathbb{R}$$

bilineare simmetrica, definita positiva. Valgono cioè

$$(8.5.4) \quad (q_1, q_2)_E = (q_2|q_1)_E, \quad \forall (q_1, q_2) \in E \oplus_B E,$$

$$(8.5.5) \quad (q_1 + q_2, q_3)_E = (q_1|q_3)_E + (q_2|q_3)_E, \quad \forall p \in B, \quad \forall q_1, q_2, q_3 \in E_p,$$

$$(8.5.6) \quad (kq_1|q_2)_E = k(q_1|q_2)_E, \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall (q_1, q_2) \in E \oplus_B E,$$

$$(8.5.7) \quad (q|q)_E > 0 \quad \forall q \in E \setminus 0_E.$$

Osserviamo che, data una struttura Euclidea $(\cdot | \cdot)_E$ su ξ , la $\|q\|_E = \sqrt{(q|q)_E} \geq 0$ è una norma differenziabile su ξ .

L'esistenza di norme differenziabili è garantita quindi dalla

Proposizione VIII.5.3. *Ogni fibrato vettoriale ξ ammette una struttura Euclidea.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ un atlante di trivializzazione di ξ . Se ξ ha rango k , per ogni i la

$$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \ni q \longrightarrow (\pi(q), \phi_i(q)) \in U_i \times \mathbb{R}^k$$

è un'equivalenza di fibrati vettoriali. Se $\{\chi_i\} \subset \mathcal{C}^\infty(B)$ è una partizione dell'unità su B subordinata al ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$, la

$$(q_1|q_2)_E = \sum_{\pi(q_1) \in U_i} \chi_i(\pi(q_1)) (\phi_i(q_1)|\phi_i(q_2))_{\mathbb{R}^k}, \quad \forall (q_1, q_2) \in E \oplus_B E,$$

definisce una struttura Euclidea su ξ . \square

Definizione VIII.5.4. Una struttura Euclidea sul fibrato tangente di una varietà M si dice una *struttura Riemanniana* su M .

VIII.6. Classi di isomorfismo di fibrati vettoriali

Ricordiamo che, se $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$ è un fibrato vettoriale differenziabile di rango k , con base M , data un'altra varietà differenziabile N ed un'applicazione differenziabile $f : N \rightarrow M$ di N nella base di ξ , il pullback $f^*\xi$ è il fibrato differenziabile di rango k su N , con spazio totale f^*E e proiezione π_f definiti da

$$(8.6.1) \quad \begin{cases} f^*E := E(f^*\xi) = \{(x, v) \in N \times E \mid \pi(v) = f(x)\}, \\ \pi_f := \pi(f^*\xi)(x, v) = x, \quad \forall (x, v) \in E(f^*\xi). \end{cases}$$

Se abbiamo una composizione di applicazioni differenziabili

$$M'' \xrightarrow{g} M' \xrightarrow{f} M$$

ed un fibrato vettoriale $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$ su M , allora

$$(f \circ g)^*\xi \equiv g^*f^*\xi$$

sono canonicamente equivalenti: infatti

$$E((f \circ g)^*\xi) = \{(x, v) \in M'' \times E \mid f(g(x)) = \pi(v)\},$$

$$E(g^*f^*\xi) = \{(x, (y, v)) \in M'' \times M' \times E \mid g(x) = y, f(y) = \pi(v)\}$$

e l'equivalenza è definita dall'applicazione $(x, (y, v)) = (x, (f(x), v)) \rightarrow (x, v)$.

Indichiamo con $\text{Vec}_k(M)$ la collezione delle classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali di rango k sulla varietà M . Possiamo considerarlo come un insieme puntato, ove il punto base è costituito dalla classe d'equivalenza del fibrato banale $M \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\pi_M} M$. L'osservazione che abbiamo fatto sopra si può esprimere mediante la

Proposizione VIII.6.1. *$\text{Vec}_k(\cdot)$ è un funtore dalla categoria delle varietà ed applicazioni differenziabili alla categoria degli spazi puntati e delle applicazioni che preservano i punti base.*

Abbiamo la

Proposizione VIII.6.2 (proprietà d'omotopia dei fibrati vettoriali). *Siano M ed N varietà differenziabili, con M compatta. Se $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ sono due applicazioni differenziabili omotope e $\xi = E \xrightarrow{\pi_N} N$ è un fibrato vettoriale su N , allora i fibrati $f_0^*\xi$ ed $f_1^*\xi$ sono isomorfi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $F : M \times I \ni (x, t) \rightarrow f_t(x) \in N$ un'omotopia di classe \mathcal{C}^∞ tra f_0 ed f_1 . Indichiamo con $\text{pr}_M : M \times I \ni (x, t) \rightarrow x \in M$ la proiezione sul primo fattore. Per dimostrare il teorema, sarà sufficiente verificare che, se per un $t_0 \in [0, 1]$ il fibrato $f_{t_0}^*\xi$ è isomorfo ad un fibrato vettoriale ζ su M , cioè è ancora vero per tutti i fibrati $f_t^*\xi$ con $t \in [0, 1]$ e $|t - t_0| < \epsilon$ per qualche $\epsilon > 0$.

Consideriamo sulla varietà compatta con bordo³ $M \times I$ i due fibrati vettoriali $F^*\xi$ e $\text{pr}_M^*\zeta$ e il fibrato principale $\text{Iso}(F^*\xi, \text{pr}_M^*\zeta)$, la cui fibra su (x, t) è l'insieme di tutti gli isomorfismi lineari $\lambda_x : E(f_t^*\xi)_x \rightarrow E(\zeta)_x$. Per ipotesi questo fibrato ha una sezione σ su $M \times \{t_0\}$. Il fibrato principale $\text{Iso}(f^*E, p_M^*F)$ è un aperto del fibrato vettoriale

$$\eta = \text{Hom}(F^*\xi, \text{pr}_M^*\zeta) = (\text{pr}_M^*\zeta)^* \otimes_{M \times I} F^*\xi.$$

La sezione σ si estende a una sezione globale $\tilde{\sigma}$ di η su $M \times I$. La $\tilde{\sigma}$ sarà ancora una sezione di $\text{Iso}(F^*\xi, \text{pr}_M^*\zeta)$ su un intorno aperto di $M \times t_0$. Per la compattezza di M , questo intorno conterrà $M \times t$ per tutti i $t \in [0, 1]$ con $|t - t_0| < \epsilon$ per qualche $\epsilon > 0$. \square

Osservazione VIII.6.3. La proposizione vale anche senza l'ipotesi di compattezza su M . Ricordiamo che tutte le varietà che consideriamo supponiamo siano *paracompatte*.

Corollario VIII.6.4. *Ogni fibrato vettoriale sopra una varietà contrattile è isomorfo al fibrato banale.*

Esempio VIII.6.5. $\text{Vec}_k(S^1)$ si può identificare alle classi di omotopia di applicazioni $f : \{\pm 1\} \rightarrow \mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$ che mandano il punto 1 in I_k . Esso consiste quindi di due punti se $k \geq 1$. Nel caso $k = 1$ i due fibrati corrispondono rispettivamente al cilindro (caso orientabile) e al nastro di Möbius (caso non orientabile).

VIII.7. Fibrati vettoriali sulle sfere

Decomponiamo la sfera

$$S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{h=0}^n x_h^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

nell'unione di due celle chiuse:

$$S^n = D_+^n \cup D_-^n, \quad \text{con} \quad D_+^n = \{x \in S^n \mid x_0 \geq 0\}, \quad D_-^n = \{x \in S^n \mid x_0 \leq 0\}.$$

Sia

$$S^{n-1} = D_+^n \cap D_-^n = \{x \in S^n \mid x_0 = 0\}.$$

³Per evitare di utilizzare nella dimostrazione la varietà compatta a bordo $M \times I$, possiamo osservare che l'omotopia $F = (f_t) : M \times I \rightarrow N$ si estende ad un'applicazione differenziabile $\tilde{F} : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$, e ragionare sulla varietà differenziabile senza bordo $M \times \mathbb{R}$.

Data un'applicazione continua $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$, possiamo definire un fibrato vettoriale di rango r su S^n incollando i fibrati banali $D_n^+ \times \mathbb{R}^k$ e $D_n^- \times \mathbb{R}^k$ mediante la funzione d'incollamento che associa ad $(x, v) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^k \subset D_n^+ \times \mathbb{R}^k$ l'elemento $(x, f(x)v) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^k \subset D_n^- \times \mathbb{R}^k$. La f è detta la funzione di *clutching*⁴. Si dimostra facilmente che

Lemma VIII.7.1. *Siano $f_0, f_1 : S^{n-1} \rightarrow \mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$ due funzioni di clutching. Se f_0 ed f_1 sono omotope, allora i fibrati vettoriali E_{f_1} ed E_{f_2} sono equivalenti. Abbiamo quindi un'applicazione naturale*

$$(8.7.1) \quad \pi(S^{n-1}, \mathbf{GL}(k, \mathbb{R})) \longrightarrow \text{Vec}_k(S^n).$$

Poiché D_+^n e D_-^n sono contrattili, i fibrati vettoriali con basi D_+^n e D_-^n sono banali. Da questa osservazione segue il

Lemma VIII.7.2. *L'applicazione (8.7.1) è surgettiva.*

Lo studio dell'applicazione (8.7.1) è complicato dal fatto che il gruppo $\mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$ ha due componenti connesse. È quindi conveniente considerare dapprima i fibrati vettoriali orientati.

Indichiamo con $\text{Vec}_k^+(M)$ le classi di equivalenza di fibrati vettoriali orientati di rango k sulla varietà differenziabile M . Sia $\mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})$ il gruppo degli endomorfismi lineari di \mathbb{R}^k con determinante positivo. Abbiamo allora

Proposizione VIII.7.3. *L'applicazione $\pi(S^{n-1}, \mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})) \rightarrow \text{Vec}_k^+(S^n)$ è bigettiva.*

Per analizzare $\text{Vec}_k(S^n)$, introduciamo lo spazio $\text{Vec}_k^0(S^n)$ che consiste delle classi di equivalenza di fibrati vettoriali di rango k su S^n che hanno un'orientazione assegnata sul punto $e_1 \in S^{n-1} \subset S^n$. Scegliendo le trivializzazioni su D_\pm^n che mantengono questa orientazione assegnata, le abbiamo fissate entrambe a meno di omotopia. Otteniamo così

Lemma VIII.7.4. *Vi è una bigezione naturale*

$$\pi(S^{n-1}, e_1; \mathbf{GL}(k, \mathbb{R}), \mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})) \rightarrow \text{Vec}_k^0(S^n).$$

Se $n \geq 2$, S^{n-1} è connesso ed abbiamo quindi:

Lemma VIII.7.5. *Se $n \geq 2$, vi è una bigezione naturale*

$$\pi(S^{n-1}, \mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})) \rightarrow \text{Vec}_k^0(S^n).$$

Quindi l'applicazione naturale $\text{Vec}_k^+(S^n) \rightarrow \text{Vec}_k^0(S^n)$ è una bigezione. Ne segue che

Proposizione VIII.7.6. *Se $n \geq 2$, ogni fibrato vettoriale reale su S^n è orientabile, ed ha esattamente due orientazioni, che dipendono dalla scelta dell'orientazione su una singola fibra. L'applicazione (8.7.1) ha fibre che hanno al più due elementi. Hanno un solo elemento le fibre che corrispondono a fibrati vettoriali che ammettono un automorfismo che inverte l'orientazione delle fibre, due elementi altrimenti.*

⁴“clutch” è in inglese la frizione.

Osservazione VIII.7.7. Poiché $\mathbf{SO}(k)$ è un retratto di deformazione di $\mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})$, abbiamo

$$\pi(S^{n-1}, \mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})) \simeq \pi(S^{n-1}, \mathbf{SO}(k)) \simeq \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(k)).$$

VIII.8. Quozienti della sfera e spazi lenticolari

Consideriamo in primo luogo il caso della sfera S^3 . Ricordiamo che essa si può considerare come lo spazio dei quaternioni di modulo 1 ed è quindi un gruppo con la restrizione del prodotto di quaternioni.

I sottogruppi \mathbf{G} di S^3 operano su S^3 , per moltiplicazione a sinistra, in modo libero. In particolare, se \mathbf{G} è un sottogruppo finito, il quoziente $M = S^3/\mathbf{G}$ è una varietà differenziabile di dimensione 3, di cui S^3 è il rivestimento universale.

I gruppi non ciclici che operano su S^3 sono

\mathbf{Q}_8 (*gruppo quaternionale*) che consiste degli elementi $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, caso particolare del

\mathbf{Q}_{4m} (*gruppo quaternionale generalizzato*), che è il sottogruppo di S^3 generato da $a = e^{i\pi/m}$ e $b = j$. Esso è descritto dalle relazioni

$$a^m = -1, b^2 = -1, bab^{-1} = a^{-1}$$

e contiene il sottogruppo ciclico di ordine $2m$ generato da $e^{i\pi/m}$ come sottogruppo normale di indice due. Il gruppo \mathbf{Q}_{4m} si indica anche con \mathbf{D}_{4m}^* e detto *gruppo diedrale binario* perché il suo quoziente rispetto al sottogruppo normale $\{\pm 1\}$ è il gruppo diedrale \mathbf{D}_{2m} di ordine $2m$.

\mathbf{T}_{24}^* (*gruppo binario tetraedrale*),

\mathbf{O}_{48}^* (*gruppo binario ottaedrale*),

\mathbf{I}_{120}^* (*gruppo binario icosaedrale*). Gli ultimi tre sono le immagini inverse dei gruppi tetraedrale, ottaedrale ed icosaedrale delle simmetrie rotazionali del tetraedro, dell'ottaedro o del cubo, dell'icosaedro o del dodecaedro regolari mediante l'omomorfismo $S^3 \rightarrow \mathbf{SO}(3)$.

Consideriamo ora il caso di una sfera di dimensione dispari $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$. Fissato un intero $m \geq 2$ ed interi k_1, \dots, k_n primi con m , definiamo un diffeomorfismo ρ della sfera mediante

$$\rho : S^{2n-1} \ni (z_1, \dots, z_n) \longrightarrow (e^{2\pi i k_1/m} z_1, \dots, e^{2\pi i k_n/m} z_n) \in S^{2n-1}.$$

Esso genera un gruppo ciclico di ordine m di diffeomorfismi di S^{2n-1} , che agisce in modo libero su S^{2n-1} . Il quoziente

$$(8.8.1) \quad \begin{cases} L_m(k_1, \dots, k_n) = S^{2n-1} / \sim, \\ \text{con } z \sim w \text{ se } \exists a \in \{1, \dots, m\} \text{ t.c. } w = \rho^a(z) \end{cases}$$

si dice *lo spazio lenticolare di tipo*⁵ $(m; k_1, \dots, k_n)$.

⁵Spazi lenticolari con la stessa m , ma differenti (k_1, \dots, k_n) possono non essere omeomorfi. A questo proposito, vedi M.Cohen, *A course in Simple-Homotopy theory*, Springer Verlag, GTM 10, 1973.

Sia M uno spazio lenticolare di tipo $(m; k_1, \dots, k_n)$, con $m > 1$. Esso ha una struttura di CW -complesso con una cella di ciascuna dimensione $0, 1, \dots, 2n - 1$ e il corrispondente complesso con i coefficienti in \mathbb{Z} è

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

e quindi otteniamo

$$H_h(M, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & h = 0, 2n - 1, \\ \mathbb{Z}_m & h \text{ pari e } 0 < h < 2n - 1, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$H^h(M, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & h = 0, 2n - 1, \\ \mathbb{Z}_m & h \text{ dispari e } 0 < h < 2n - 1, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dalla successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathcal{E}^* \longrightarrow 0,$$

dove abbiamo indicato con \mathcal{E} il fascio dei germi di funzioni \mathcal{C}^∞ a valori complessi e con \mathcal{E}^* il sottofascio di quelle che non si annullano in nessun punto, otteniamo una successione esatta lunga di coomologia

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{E}) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{E}^*) \\ &\longrightarrow H^1(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{E}) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{E}^*) \\ &\longrightarrow H^2(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M, \mathcal{E}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Consideriamo i fibrati vettoriali in rette complesse su M . Le loro classi di equivalenza sono parametrizzate dagli elementi di $H^1(M, \mathcal{E}^*)$. Utilizzando i risultati sulla coomologia a coefficienti in \mathbb{Z} scritti sopra, e il fatto che la coomologia a coefficienti in \mathcal{E} è banale in dimensione positiva perché \mathcal{E} è un fascio fine, otteniamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^1(M, \mathcal{E}^*) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0,$$

e questo mostra che il gruppo di Picard di M è isomorfo a \mathbb{Z}_m .

Fibrato normale e intorno tubolare

IX.1. Il fibrato normale

Sia M una sottovarietà differenziabile di dimensione m di una varietà differenziabile N , di dimensione n . Indichiamo con¹ $T_M N$ la restrizione ad M del fibrato tangente di N , che possiamo identificare al pullback di TN su M rispetto all'inclusione $M \hookrightarrow N$. Il differenziale dell'inclusione identifica il fibrato tangente TM di M ad un sottofibrato di $T_M N$.

Definizione IX.1.1. Il *fibrato normale* di M in N è il quoziente

$$\nu_N M = T_M N / TM$$

della restrizione ad M del fibrato tangente di N rispetto al fibrato tangente di M .

Abbiamo quindi la successione esatta di fibrati vettoriali

$$(9.1.1) \quad 0 \longrightarrow TM \longrightarrow T_M N \longrightarrow \nu_N M \longrightarrow 0.$$

Lo spazio tangente $T\mathbb{R}^n$ di uno spazio Euclideo \mathbb{R}^n s'identifica in modo naturale al prodotto cartesiano $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$: la coppia $(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ corrisponde al vettore tangente

$$\vec{v}_p f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Se M è una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^n , allora

$$\nu_{\mathbb{R}^n} M = \{(p, v + T_p M) \mid p \in M, v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Lemma IX.1.2. Se M è una sottovarietà differenziabile di dimensione m di uno spazio Euclideo \mathbb{R}^n , allora

$$(9.1.2) \quad T_{\mathbb{R}^n}^\perp M = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \perp T_p M\}$$

è un fibrato vettoriale di rango $n - m$ su M , canonicamente isomorfo al fibrato normale $\nu_{\mathbb{R}^n} M$.

DIMOSTRAZIONE. Si verifica che la restrizione a $T_{\mathbb{R}^n}^\perp M$ della proiezione nel quoziente

$$T_M \mathbb{R}^n = M \times \mathbb{R}^n \ni (p, v) \longrightarrow v + T_p M \in \nu_{\mathbb{R}^n} M$$

è un'equivalenza di fibrati vettoriali. □

Definizione IX.1.3. Il fibrato $T_{\mathbb{R}^n}^\perp M$ descritto dal Lemma IX.1.2 si dice il *fibrato ortogonale* di M in \mathbb{R}^n .

¹Per semplicità, indicheremo a volte con lo stesso simbolo sia il fibrato che il suo spazio totale.

Siano M, N due varietà differenziabili ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ un'immersione di M in N . La f definisce un'inclusione $\hat{f} : TM \rightarrow f^*TN$ di fibrati vettoriali, mediante il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{f_*} & TN \\ & \searrow \hat{f} & \nearrow \pi_{TN} \\ & & f^*TN \end{array}$$

ove

$$\pi_{TN} : f^*TN = \{(p, v) \in M \times TN \mid \pi(v) = f(p)\} \ni (p, v) \longrightarrow v \in TN.$$

L'inclusione \hat{f} ci permette di identificare TM ad un sottofibrato vettoriale di f^*TM .

Definizione IX.1.4. Chiamiamo *fibrato normale dell'immersione f* il fibrato quoziente $\nu_f S = f^*TN / \hat{f}(TM)$.

IX.2. Intorni tubolari

Definizione IX.2.1. Siano N una varietà differenziabile ed M una sua sottovarietà differenziabile. Un *intorno tubolare* di M in N è un fibrato vettoriale differenziabile τ di base M il cui spazio totale U sia un intorno aperto di M in N .

Esempio IX.2.2. Lo spazio totale $E(\xi)$ di un fibrato vettoriale ξ è intorno tubolare in $E(\xi)$ della sua sezione nulla.

Esempio IX.2.3. $U = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ è intorno tubolare di S^n in \mathbb{R}^{n+1} . La struttura di fibrato vettoriale in rette di U su S^n è descritta dal diffeomorfismo di trivializzazione

$$U \ni x \longrightarrow \left(\frac{x}{|x|}, \log |x| \right) \in S^n \times \mathbb{R}.$$

Esempio IX.2.4. Consideriamo il toro

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Un suo intorno tubolare in \mathbb{R}^3 è

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 - 2)^2 + z^2 > 0\}.$$

Infatti, l'applicazione

$$M \times \mathbb{R} \ni ((x, y, z), t) \longrightarrow (1 - e^t) \frac{2(x, y, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + e^t(x, y, z) \in U$$

è un diffeomorfismo che definisce su U una struttura di fibrato vettoriale banale, con sezione nulla M .

Esempio IX.2.5. Siano m, n due interi con $0 \leq m < n$ e sia Σ un sottospazio proiettivo di dimensione m di $\mathbb{R}P^n$. Scegliamo un sottospazio proiettivo Σ' di dimensione $(n-m-1)$ di $\mathbb{R}P^n$ che non intersechi Σ . Per ogni $q \in \mathbb{R}P^n \setminus \Sigma'$ il sottospazio proiettivo

di dimensione $(n-m)$ di $\mathbb{R}P^n$ generato da q e da Σ' interseca Σ in un unico punto $p = \pi(q)$. La $\tau = (\mathbb{R}P^n \setminus \Sigma' \xrightarrow{\pi} \Sigma)$ è un intorno tubolare di Σ in $\mathbb{R}P^n$.

Esempio IX.2.6. Siano m, n due interi con $0 \leq m < n$ e sia Σ un sottospazio proiettivo complesso di dimensione m di $\mathbb{C}P^n$. Scegliamo un sottospazio proiettivo complesso Σ' di dimensione $(n-m-1)$ di $\mathbb{C}P^n$ che non intersechi Σ . Per ogni $q \in \mathbb{C}P^n \setminus \Sigma'$ il sottospazio proiettivo di dimensione $(n-m)$ di $\mathbb{C}P^n$ generato da q e da Σ' interseca Σ in un unico punto $p = \pi(q)$. La $\tau = (\mathbb{C}P^n \setminus \Sigma' \xrightarrow{\pi} \Sigma)$ è un intorno tubolare di Σ in $\mathbb{C}P^n$.

Proposizione IX.2.7. *Ogni intorno tubolare di M in N è equivalente al suo fibrato normale in N .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\tau = (U \xrightarrow{\pi_\tau} M)$ un intorno tubolare di M in N . Per ogni punto $q \in U$, definiamo un elemento $v_\tau(q) \in T_{\pi_\tau(q)}N$ mediante

$$v_\tau(q)f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tq) - f(\pi_\tau(q))}{t}, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(N).$$

L'equivalenza cercata $\psi : U \rightarrow \nu_N M$ è allora definita dal diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{v_\tau} & T_M N \\ & \searrow \psi & \swarrow \pi \\ & \nu_N M & \end{array}$$

in cui abbiamo indicato con $\pi : T_M N \rightarrow \nu_N M$ la proiezione nel quoziente. \square

Teorema IX.2.8 (esistenza dell'intorno tubolare). *Ogni sottovarietà localmente chiusa ammette un intorno tubolare.*

DIMOSTRAZIONE. Sia M una sottovarietà localmente chiusa, di dimensione m , di una varietà differenziabile N , di dimensione n . Sostituendo ad N un intorno aperto di M in N , possiamo supporre che M sia una sottovarietà propria di N . Mediante un'immersione differenziabile propria possiamo ricondurci al caso in cui M ed N siano sottovarietà proprie di uno spazio Euclideo \mathbb{R}^n . Sia

$$E = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \in T_p^\perp M \cap T_p N\}.$$

La varietà E è lo spazio totale di un fibrato vettoriale di rango $n-m$ su M . Per la Proposizione VI.4.2 possiamo trovare una funzione $\rho \in \mathcal{C}^\infty(M)$, a valori positivi, tale che, posto

$$U_\rho = \bigcup_{y \in M} \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < \rho(y)\},$$

risulti determinata un'applicazione $\varpi \in \mathcal{C}^\infty(U_\rho, M)$ tale che

$$\forall x \in U_\rho, \exists! y = \varpi(x) \in M \text{ tale che } |x - y| = \text{dist}(x, M).$$

Allora

$$E_\rho = \{p + v \mid (p, v) \in E, |v| < \rho(p)\}$$

è una sottovarietà propria di dimensione n di U_ρ .

Per ogni punto $q \in N \cap U_\rho$ indichiamo con $\pi_E(q)$ la sua proiezione ortogonale sul sottospazio affine $\varpi(q) + (T_{\varpi(q)}^\perp M \cap T_{\varpi(q)} N)$. Vogliamo verificare che π_E definisce un diffeomorfismo tra un intorno aperto di M in $N \cap U_\rho$ ed un intorno aperto di M in E_ρ . Si verifica facilmente² che $\pi_E \in \mathcal{C}^\infty(U_\rho, E_\rho)$.

La restrizione di π_E ad $N \cap U_\rho$ definisce un diffeomorfismo locale in tutti i punti di M e quindi di un intorno W di M in N su un intorno aperto W' di M in E_ρ . L'insieme

$$A = \{q \in W \mid |\text{pr}_{T_{\varpi(q)} N}(v)| > \frac{1}{2}|v|, \forall v \in T_q N \setminus \{0\}\}$$

è un intorno aperto di M in N su cui π_E è un diffeomorfismo locale iniettivo e quindi un diffeomorfismo su un aperto A' di E_ρ . Infatti, è chiaramente $\pi_E(q_1) \neq \pi_E(q_2)$ se $\varpi(q_1) \neq \varpi(q_2)$; se $\varpi(q_1) = \varpi(q_2)$ e $q_1, q_2 \in A$, allora³ $|\pi_E(q_2) - \pi_E(q_1)| \geq \frac{1}{2}|q_2 - q_1|$.

Possiamo supporre che A' sia della forma

$$A' = \{p + v \mid p \in M, v \in T_p^\perp M \cap T_p N, |v| < \delta(p)\}$$

per una funzione positiva $\delta \in \mathcal{C}^\infty(M)$. La composizione di π_E con il diffeomorfismo

$$A' \ni q \longrightarrow \left(\varpi(q), \frac{q - \varpi(q)}{\sqrt{\delta^2(p) - |q - \varpi(q)|^2}} \right) \in E$$

definisce su U la struttura dello spazio totale di un fibrato vettoriale su M . \square

La proiezione nella base di un intorno tubolare $U \xrightarrow{\pi_\tau} M$ è una retrazione di deformazione

$$\Phi(q, t) = (q, t) \rightarrow (1 - t) \cdot q \in U, \quad \text{per } (x, t) \in U \times [0, 1], \quad 0 \cdot q = \pi_\tau(q) \in M.$$

Inoltre, un intorno tubolare identifica in modo canonico il fibrato normale $\nu_N M$ ad un sottofibrato di $T_M N$, perché la restrizione della proiezione nel quoziente $\ker d\pi_\tau|_M \xrightarrow{\varpi} \nu_N M$ è un'equivalenza di fibrati.

²Fissiamo un punto $p_0 \in M$. Possiamo trovare allora un intorno aperto ω di p_0 in U_ρ e funzioni $f^{m+1}, \dots, f^v \in \mathcal{C}^\infty(\omega)$ tali che

$$\begin{aligned} M \cap \omega &= \{q \in \omega \mid f^{m+1}(q) = 0, \dots, f^v(q) = 0\}, \\ N \cap \omega &= \{q \in \omega \mid f^{m+1}(q) = 0, \dots, f^v(q) = 0\}, \\ df^{m+1}(q) \wedge \dots \wedge df^v(q) &\neq 0, \forall q \in \omega, \\ \frac{\partial f^{m+1}(p)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial f^v(p)}{\partial x} &\in T_p N, \forall p \in M \cap \omega. \end{aligned}$$

Se $q \in N \cap \rho^{-1}(M \cap \omega)$, poiché $q - \varpi(q) \in T_{\varpi(q)}^\perp M$, sono univocamente determinati coefficienti $t_{m+1}, \dots, t_v \in \mathbb{R}$ tali che

$$q = \varpi(q) + \sum_{i=m+1}^v t_i \frac{\partial f^i(\varpi(q))}{\partial x}, \quad \text{ed è } \pi_E(q) = \sum_{i=m+1}^v t_i \frac{\partial f^i(\varpi(q))}{\partial x}.$$

I coefficienti t_i sono funzioni di classe \mathcal{C}^∞ di q e quindi questo dimostra che la π_E è una funzione di classe \mathcal{C}^∞ .

³Si consideri la funzione $\text{dist}(q, N)$ al variare di q sul segmento $[q_1, q_2]$. Questa funzione ha un massimo in un punto interno q_{12} del segmento. Se $q'_{12} \in N$ è tale che $|q_{12} - q'_{12}| = \text{dist}(q_{12}, N)$, allora $q_1 - q_2 \in T_{q'_{12}} N$.

Se M ed N sono orientati, anche $\nu_N M$ ha un'orientazione naturale, che viene scelta per convenzione come quella che rende orientata positivamente la somma diretta $TM \oplus \nu_N M \simeq T_M N$.

Proposizione IX.2.9. *Siano M, N due varietà ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ un'inclusione differenziabile propria. Allora f si estende ad un'inclusione differenziabile \tilde{f} di $\nu_f M$ in N , che ha per immagine un intorno tubolare di $f(M)$ in N .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché f è un'inclusione differenziabile propria, l'immagine $f(M)$ di M è una sottovarietà propria di N e la $f_* : TM \rightarrow T_{f(M)}N$ definisce per passaggio al quoziente un isomorfismo tra i fibrati vettoriali $f^* \nu_N f(M) \simeq \nu_f M$ e $\nu_N f(M)$. Per il Teorema IX.2.8, $f(M)$ ha un intorno tubolare $U \xrightarrow{\pi_\tau} f(M)$ in N e, per la Proposizione IX.2.7 esso è equivalente al fibrato $\nu_N f(M)$. Per composizione, otteniamo un diffeomorfismo di $\nu_f M$ su U . \square

IX.3. Unicità dell'intorno tubolare

L'unicità dell'intorno tubolare è conseguenza del seguente

Teorema IX.3.1. *Siano N una varietà differenziabile di dimensione n , M una sua sottovarietà propria di dimensione m e $\xi = (E \xrightarrow{\pi_\xi} M)$ un fibrato vettoriale di rango $k \leq n - m$, con base M , il cui spazio totale E sia una sottovarietà differenziabile di N . Se $\tau = (U \xrightarrow{\pi_\tau} M)$ è un intorno tubolare di M in N , allora esiste un'isotopia $F = \{f_t\} \in \mathcal{C}^\infty(E \times [0, 1], N)$ dell'inclusione differenziabile $E \hookrightarrow N$ tale che*

$$\begin{aligned} f_0 &= \text{id}_E, & f_1(E) &\subset U, & f_t(p) &= p, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall p \in M, \\ f_1 &: E \rightarrow U & \text{sia un monomorfismo di fibrati vettoriali.} \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Costruiamo innanzi tutto un'isotopia $G = \{g_t\} \in \mathcal{C}^\infty(E \times \mathbb{R}, E)$ dell'inclusione g_0 di E in N con una g_1 per cui $g_1(E) \subset U$. Fissiamo una metrica Euclidea sulle fibre di E (vedi §VIII.5) ed indichiamo con $\|\cdot\|_E$ la corrispondente norma sulle fibre. Possiamo allora trovare una funzione positiva $\rho_E \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tale che

$$\{q \in E \mid \|q\|_E < \rho_E(\pi_\xi(p))\} \subset U.$$

Possiamo allora definire

$$G : E \times \mathbb{R} \ni (q, t) \longrightarrow \left[[1 - t] + \frac{t \rho_E(\pi_\xi(q))}{\sqrt{1 + \|q\|_E^2}} \right] q \in E,$$

dove il prodotto per scalare è riferito alla struttura di fibrato vettoriale di E .

Possiamo quindi supporre, nel seguito della dimostrazione, che sia $E \subset U$. Ricordiamo poi che, per la Proposizione IX.2.7, l'intorno tubolare τ è equivalente al fibrato normale $\nu_N M$. Indichiamo con $\psi : T_M N / TM \rightarrow U$ il corrispondente diffeomorfismo tra gli spazi totali. Definiamo l'omotopia $F = \{f_t\} \in \mathcal{C}^\infty(E' \times [0, 1], N)$ ponendo, per $0 \leq t < 1$,

$$f_t(q) = \left[\frac{1}{1-t} [(1-t)q] \right]_\xi \Big|_\tau,$$

dove abbiamo usato la notazione $[\lambda q]_{\xi}$, per indicare che il prodotto di $q \in E$ per lo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ è fatto rispetto alla struttura vettoriale sulle fibre di ξ e la notazione $[\lambda q]_{\tau}$ per indicare che il prodotto di $q \in U$ per lo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ è fatto rispetto alla struttura vettoriale sulle fibre di τ . Per $t = 0$, poniamo

$$f_0(q) = \psi(\langle v^{\xi}(q) \rangle),$$

ove

$$v^{\xi}(q) \in T_{\pi_{\xi}(q)}N \quad \text{è definito da} \quad v^{\xi}(q)(\phi) = \left. \frac{d\phi([tq]_{\xi})}{dt} \right|_{t=0},$$

e $\langle v^{\xi}(q) \rangle$ è la proiezione di $v^{\xi}(q)$ nel quoziente $T_{\pi_{\xi}(q)}N/T_{\pi_{\xi}(q)}M$. Si verifica che la F così definita dà l'isotopia cercata. \square

Corollario IX.3.2. *Sia N una varietà differenziabile ed M una sottovarietà localmente chiusa. Allora tutti gli intorni tubolari di M in N sono isotopi rispetto ad isotopie stazionarie su M .*

IX.4. Intorni tubolari propri

Siano N una varietà differenziabile, M una sottovarietà localmente chiusa e $\tau = (U \xrightarrow{\pi_{\tau}} M)$ un suo intorno tubolare.

Definizione IX.4.1. Una *norma differenziabile* su τ è un'applicazione $\rho \in \mathcal{C}^0(U)$ tale che

$$\begin{cases} \rho(q) > 0 & \forall q \in U \setminus M, \\ \rho(tq) = |t|\rho(q), & \forall q \in U, \forall t \in \mathbb{R}, \\ \rho(q_1 + q_2) \leq \rho(q_1) + \rho(q_2) & \forall q_1, q_2 \in U_p, \forall p \in M, \\ \rho^2 \in \mathcal{C}^{\infty}(U). \end{cases}$$

Se ρ è una norma differenziabile su τ , l'applicazione

$$F : U \times \mathbb{R} \ni (q, t) \longrightarrow F_t(q) = \frac{q}{\sqrt{1 + t^2\rho^2(q)}} \in U$$

è una isotopia di U , stazionaria su M , tra l'identità e l'intorno aperto U_{ρ} di M , definito da

$$U_{\rho} = \{q \in U \mid \rho(q) < 1\}.$$

In generale, per ogni numero reale t , l'immagine $F_t(U)$ è un intorno aperto $U_{t\rho}$ di M in U , definito da

$$U_{t\rho} = \{q \in U \mid |t|\rho(q) < 1\}$$

e il diffeomorfismo

$$F_t^{-1} : U_{t\rho} \ni q \longrightarrow \frac{q}{\sqrt{1 - t^2\rho^2(q)}} \in U$$

definisce su $\tau_{t\rho} = (U_{t\rho} \xrightarrow{\pi_{\tau}} M)$ un'unica struttura di fibrato vettoriale per cui F_t^{-1} sia un'equivalenza di fibrati vettoriali. Con questa struttura, $\tau_{t\rho}$ è un intorno tubolare di M in N .

Per ogni $t \neq 0$, le fibre $U_{t\rho_p} = U_p \cap U_{t\rho}$ sono relativamente compatte in U e $(\partial U_{t\rho} \xrightarrow{\pi} M)$ è un fibrato differenziabile localmente banale su M , con fibra tipica S^{n-m-1} .

Definizione IX.4.2. L'intorno tubolare τ_ρ si dice una ρ -retrazione di τ .

Definizione IX.4.3. Un intorno tubolare τ_ρ che si possa ottenere da un altro intorno tubolare τ mediante una ρ -retrazione si dice *proprio*.

Lemma IX.4.4. Se M è una sottovarietà propria di N , allora la frontiera ∂U_ρ di un suo intorno tubolare proprio è una sottovarietà propria di N .

Abbiamo:

Teorema IX.4.5. Sia N una varietà differenziabile. Allora

- (1) Ogni sua sottovarietà localmente chiusa M ammette un intorno tubolare proprio.
- (2) Se M è una sottovarietà propria di N , allora due qualsiasi intorni tubolari propri di M in N sono ambientalmente isotopi in un'isotopia stazionaria su M .

DIMOSTRAZIONE. (1) è equivalente al fatto che sia possibile definire su ogni fibrato vettoriale una norma differenziabile. A questo scopo è sufficiente considerare un atlante di trivializzazione $\{(U_a, g_a)\}_{a \in A}$ di τ e fissare una partizione dell'unità $\{\chi_a\}_{a \in A}$ di classe \mathcal{C}^∞ subordinata ad $\{U_a\}_{a \in A}$. Posto

$$\rho^2(q) = \sum_{a \in A} \phi(\pi_\tau(q)) |g_a(q)|^2,$$

la $\rho(q) = |\sqrt{\rho^2(q)}|$ è una norma differenziabile su τ e τ_ρ è un intorno tubolare proprio di M . \square

Premettiamo alla dimostrazione generale del punto (2) la discussione di un caso particolare.

Lemma IX.4.6. Siano M una sottovarietà propria di N e $\tau = (U \xrightarrow{\pi_\tau} M)$ un suo intorno tubolare. Se $\rho, \rho' \in \mathcal{C}^0(U)$ sono due norme differenziabili su τ , allora esiste un'isotopia $F \in \mathcal{C}^\infty(N \times [0, 1], N)$ dello spazio ambiente, stazionaria su M , tale che $F_t(U_p) = U_p$ per ogni $p \in M$, che trasforma U_ρ in $U_{\rho'}$.

DIMOSTRAZIONE. La funzione

$$g(q, t) = \frac{t\rho(q) + (1-t)\rho'(q)}{\rho'(q)}, \quad q \in U \setminus M, \quad t \in [0, 1],$$

è di classe \mathcal{C}^∞ su $(U \setminus M) \times [0, 1]$ e di grado 0 sulle fibre, in particolare è uniformemente limitata su ogni fibra. Quindi

$$G(q, t) = \begin{cases} g(q, t)q & \text{se } q \in U \setminus M, \\ q & \text{se } q \in M, \end{cases}$$

è un'omotopia continua, stazionaria su M , che trasforma U_ρ in $U_{\rho'}$. Inoltre, la restrizione di G ad $(U \setminus M) \times [0, 1]$ è un'isotopia di diffeomorfismi di $U \setminus M$.

Sia $\tilde{G}(q, t) = (G(q, t), t)$ e consideriamo il campo di vettori $\tilde{X} = (X, \partial/\partial t) = \tilde{G}_*(\partial/\partial t) \in \mathfrak{X}((U \setminus M) \times [0, 1])$. Osserviamo che gli insiemi

$$W_0 = \{(q, t) \in U \times [0, 1] \mid \frac{1}{3} < t\rho(q) + (1-t)\rho'(q) < \frac{5}{3}\},$$

$$W_1 = (N \times [0, 1]) \setminus \{(q, t) \in U \times [0, 1] \mid \frac{2}{3} \leq t\rho(q) + (1-t)\rho'(q) \leq \frac{4}{3}\},$$

formano un ricoprimento aperto di $N \times [0, 1]$, perché M è un sottoinsieme chiuso di N . Se $\{\chi_0, \chi_1\}$ è una partizione dell'unità subordinata a $\{W_0, W_1\}$, allora il campo di vettori $(Y, \partial/\partial t) \in \mathfrak{X}(N \times [0, 1])$ con

$$Y(q, t) = \begin{cases} \chi_0(q, t)X(q, t) & \text{se } (q, t) \in (U \setminus M) \times [0, 1], \\ 0 & \text{se } (q, t) \in W_1, \end{cases}$$

è completo. Il suo flusso definisce un'isotopia ambientale che trasforma U_ρ in $U_{\rho'}$. \square

CONCLUSIONE DELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA IX.4.5. Ci resta da dimostrare (2) nel caso generale. Siano $\tau_i = (U_i \xrightarrow{\pi_{\tau_i}} M)$, $i = 0, 1$, sono due intorni tubolari di M in N . Per il Corollario IX.3.2, esiste un'isotopia $F \in \mathcal{C}^\infty(U_0 \times [0, 1], N)$, stazionaria su M , dell'inclusione con un'equivalenza $F_1 : U_0 \rightarrow U_1$ di fibrati vettoriali.

Sia

$$\tilde{F}(q, t) = (F(q, t), t), \quad \tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(U_0 \times [0, 1], N \times [0, 1]).$$

Denotiamo con π_N la proiezione $\pi_N : N \times [0, 1] \rightarrow N$. Fissiamo una norma differenziabile ρ su U_0 . Allora

$$\tilde{W} = \{(F(q, t), t) \mid \frac{1}{2} < \rho(q) < \frac{3}{2}\}$$

è un intorno in $N \times [0, 1]$ della sua sottovarietà propria

$$\tilde{Q} = \{(F(q, t), t) \mid q \in U_0, t \in [0, 1], \rho(q) = 1\}.$$

Possiamo quindi trovare una sezione $X \in \Gamma(N \times [0, 1], TN)$ tale che

$$\begin{cases} X(F(q, t), t) = \pi_{N*} d\tilde{F}(q, t)(\partial/\partial t) & \text{se } \rho(q) = 1, \\ X(q, t) = 0 & \text{su } N \times [0, 1] \setminus \tilde{W}. \end{cases}$$

Allora $\tilde{X} = (X, \partial/\partial t)$ è un campo di vettori completo su $N \times I$. Il suo flusso definisce un'isotopia ambientale tra $U_{0,\rho}$ ed $U_{1,\rho'}$ ove $\rho'(F_1(q)) = \rho(q)$ per ogni $q \in U_0$. La tesi è allora conseguenza del Lemma IX.4.6. \square

Corollario IX.4.7 (Teorema del disco). *Sia N una varietà connessa ed $f \in \mathcal{C}^\infty(D^m, N)$ un'inclusione differenziabile di un disco di dimensione $m < n = \dim N$. Allora la f si estende ad un'inclusione $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(D^n, N)$.*

Sia N è connessa e siano $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(D^m, N)$ due inclusioni differenziabili del disco chiuso m -dimensionale in N . Nel caso in cui $m = n$, supporremo ancora che le due immersioni preservino l'orientazione⁴.

⁴ Cioè che esista un diffeomorfismo $\phi \in \mathbf{Diff}(N)$ che trasformi $f_0(0)$ in $f_1(0)$ per cui $df_1^{-1} \circ d\phi \circ df_0(0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ abbia determinante positivo.

Esiste allora un'isotopia $F \in \mathcal{C}^\infty(N \times [0, 1], N)$ dell'identità di N che trasformi f_0 in f_1 , tale cioè che risulti $F(f_0(x), 1) = f_1(x)$ per ogni $x \in D^m$.

IX.5. Immagine inversa di un valore regolare

Siano M, N due varietà differenziabili ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$. Sia $q_0 \in N$ è un valore regolare di f e consideriamo la sottovarietà $V = f^{-1}(q_0)$ di M . Il differenziale di f definisce, per ogni $p \in V$, un isomorfismo lineare

$$\nu_{M_p} V \ni [w] \longrightarrow f_* w \in T_{q_0} N.$$

Abbiamo indicato qui con $[w]$ la classe di equivalenza di $w \in T_p M$ in $\nu_{M_p} V = T_p M / T_p V$. In particolare, $\nu_M V$ è un fibrato banale. Abbiamo la

Proposizione IX.5.1. *Se V è compatta, esiste un intorno aperto U di q_0 in N ed un'inclusione differenziale $J : V \times U \rightarrow J(V \times U) = f^{-1}(U) \subset M$ che rende commutativo il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} V \times U & \xrightarrow{J} & f^{-1}(U) \\ & \searrow \pi_U & \swarrow f \\ & & U. \end{array}$$

Possiamo inoltre fare in modo che $f^{-1}(U)$ sia lo spazio totale di un intorno tubolare di V in M .

Corollario IX.5.2. *Supponiamo che M sia una varietà connessa e compatta, N una varietà connessa ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ una sommersione differenziabile. Allora N è compatta, f surgettiva e $\xi = (M \xrightarrow{f} N)$ è un fibrato differenziabile localmente banale.*

Trasversalità

X.1. Applicazioni e sottovarietà trasversali

La nozione di *trasversalità* di sottovarietà differenziabili è l'equivalente, in geometria differenziale, di quella di *posizione generale* della geometria algebrica o di *giacitura generica* dell'algebra lineare. La nozione di trasversalità di sottovarietà si estende ad una nozione di trasversalità di applicazioni differenziabili. La possibilità di deformare due applicazioni in modo da metterle in posizione trasversale l'una rispetto all'altra è uno strumento fondamentale nell'applicazione alla topologia di metodi di geometria differenziale.

Definizione X.1.1. Siano M_1, M_2 ed N tre varietà differenziabili ed $f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M_1, N)$, $f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M_2, N)$, due applicazioni differenziabili.

Diciamo che f_1 ed f_2 sono *trasversali in* $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ se

$$o \quad f(p_1) \neq f(p_2),$$

$$o \quad f(p_1) = f(p_2) = q \quad e \quad df_1(T_{p_1}M_1) + df_2(T_{p_2}M_2) = T_qN.$$

Scriviamo $f_1 \pitchfork_{(p_1, p_2)} f_2$ per indicare che f_1 ed f_2 sono trasversali in (p_1, p_2) .

Diciamo che f_1 ed f_2 sono *trasversali*, e scriviamo $f_1 \pitchfork f_2$, se f_1 ed f_2 sono trasversali in ogni $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$:

$$(10.1.1) \quad f_1 \pitchfork f_2 \iff f_1 \pitchfork_{(p_1, p_2)} f_2, \quad \forall (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2.$$

È quindi

$$(10.1.2) \quad f_1 \pitchfork f_2 \iff \boxed{\begin{array}{l} p_1 \in M_1, p_2 \in M_2, f_1(p_1) = f_2(p_2) = q \\ \implies df_1(T_{p_1}M_1) + df_2(T_{p_2}M_2) = T_qN. \end{array}}$$

In particolare, se $\dim M_1 + \dim M_2 < \dim N$, la condizione $f_1 \pitchfork f_2$ significa che $f(M_1) \cap f(M_2) = \emptyset$.

Definizione X.1.2. Siano M, N varietà differenziabili, V una sottovarietà differenziabile di N . Indichiamo con $\iota_V : V \hookrightarrow N$ l'inclusione.

Un'applicazione differenziabile $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ si dice *trasversale a V in un punto $p \in M$* se $f \pitchfork_{(p, f(p))} \iota_V$ cioè se

$$(10.1.3) \quad o \quad f(p) \notin V, \quad o \quad f(p) = q \in V \quad e \quad df(T_pM) + T_qV = T_qN.$$

Scriveremo in questo caso $f \pitchfork_p V$.

Diciamo che f è *trasversale a V* , e scriviamo $f \pitchfork V$, se lo è in tutti i punti $p \in M$, se cioè

$$(10.1.4) \quad \forall q \in V, \quad \forall p \in f^{-1}(q), \quad T_qV + df(T_pM) = T_qN.$$

Definizione X.1.3. Diciamo che due sottovarietà differenziabili V_1, V_2 di una varietà differenziabile N si intersecano trasversalmente in $q \in V_1 \cap V_2$ se

$$T_q V_1 + T_q V_2 = T_q N.$$

Scriviamo $V_1 \pitchfork_q V_2$ per indicare che V_1 e V_2 si intersecano trasversalmente in q .

Diciamo che le due sottovarietà V_1 e V_2 sono *trasversali* in N se

$$o \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset, \quad oppure \quad T_q V_1 + T_q V_2 = T_q N, \quad \forall q \in V_1 \cap V_2.$$

Il simbolo $V_1 \pitchfork V_2$ significa che V_1 e V_2 sono trasversali in N .

Osservazione X.1.4. Siano V_1, V_2 due sottovarietà differenziabili di N . Se V_1 e V_2 si intersecano trasversalmente in un punto di N , allora

$$\dim V_1 + \dim V_2 \geq \dim N.$$

Esempio X.1.5. Sia ξ un fibrato differenziabile, $f \in \mathcal{C}^\infty(M, E(\xi))$ un'applicazione differenziabile a valori nel suo spazio totale. Siano $q \in E(\xi)$, $b = \pi(\xi)(q) \in B(\xi)$ e $p \in f^{-1}(q)$. È $f \pitchfork_p E_b$ se e soltanto se p non è un punto critico di $\pi(\xi) \circ f$.

Esempio X.1.6. Dall'esempio X.1.5 otteniamo che, se M, N_1 ed N_2 sono varietà differenziabili ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N_1 \times N_2)$, allora l'insieme dei punti $p \in N_1$ tali che $f \pitchfork (p \times N_2)$ è denso e di seconda categoria in N_1 .

Osservazione X.1.7. Sia ξ un fibrato differenziabile. Una sottovarietà propria N del suo spazio totale $E(\xi)$ è il grafico di una sezione differenziabile globale $s \in \Gamma_\xi(B(\xi), E(\xi))$ se e soltanto se

- (1) per ogni $p \in B(\xi)$, l'intersezione $N \cap E_p(\xi)$ contiene uno ed un solo punto $s(p)$;
- (2) $\pi(\xi)|_N \pitchfork E_p$ per ogni $p \in N$.

DIMOSTRAZIONE. Le condizioni (1), (2) sono senz'altro necessarie. Per dimostrare che viceversa, se (1) e (2) sono verificate, allora N è il supporto di una sezione, basta osservare che la condizione di trasversalità implica che la restrizione della $\pi(\xi)$ ad N è una sommersione ed applicare il teorema delle funzioni implicite. \square

Proposizione X.1.8. Siano M ed N varietà differenziabili, V una sottovarietà propria di N . Se $f \pitchfork V$, allora $f^{-1}(V)$ è una sottovarietà propria di M , che ha in M la stessa codimensione che V ha in N .

DIMOSTRAZIONE. Sia k la codimensione di V in N . Per ogni punto $q \in V$, possiamo trovare un intorno aperto U di q in N ed una sommersione $\phi \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^k)$ tale che $V \cap U = \phi^{-1}(0)$. Per l'ipotesi che $f \pitchfork V$, abbiamo

$$d(\phi \circ f)(T_p M) = d\phi(df(T_p M)) = d\phi(df(T_p M) + T_q V) = d\phi(T_q N) = \mathbb{R}^k, \\ \forall p \in f^{-1}(U \cap V).$$

Quindi $\phi \circ f$ è una sommersione in ogni punto di $f^{-1}(V \cap U)$ e dunque $f^{-1}(V)$ è una sottovarietà localmente chiusa di codimensione k di M . Essa è un sottoinsieme chiuso di M , perché immagine inversa del chiuso V mediante l'applicazione continua f . \square

Osservazione X.1.9. Possiamo utilizzare la Proposizione X.1.8 per dare un'altra dimostrazione, che non utilizza nozioni omotopiche, del teorema del punto fisso di Brouwer. Ricordiamo che con un argomento standard ci possiamo ridurre a dimostrare che non ci sono retrazioni continue di \mathbb{R}^n su $S^{n-1} = \partial D^n$. Utilizzando l'approssimazione, si verifica che ciò è equivalente al fatto che non ci siano retrazioni differenziabili¹ di \mathbb{R}^n su S^{n-1} . Supponiamo per assurdo che esista una retraction differenziabile $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, S^{n-1})$ di \mathbb{R}^n su S^{n-1} . Scegliamo allora un valore regolare $q_0 \in S^{n-1}$ di ρ . Allora $\rho^{-1}(q_0)$ è una curva semplice propria in \mathbb{R}^n che taglia trasversalmente S^{n-1} in q_0 . Essa deve quindi intersecare S^{n-1} in un altro punto q_1 , distinto da q_0 . Non può allora essere una retraction.

Proposizione X.1.10. *Siano N una varietà differenziabile di dimensione n ed M_1, M_2 due sue sottovarietà differenziabili localmente chiuse, di dimensioni m_1 ed m_2 rispettivamente, che si intersecano trasversalmente in un punto $p_0 \in M_1 \cap M_2$. Sia $m_0 = m_1 + m_2 - n$.*

Esiste allora una carta coordinata (U, x) di N , con centro in p_0 , tale che

$$M_1 \cap U = \{p \in U \mid x^i(p) = 0, \text{ per } m_1 < i \leq n\},$$

$$M_2 \cap U = \{p \in U \mid x^i(p) = 0, \text{ per } m_0 < i \leq m_1\},$$

$$M_1 \cap M_2 \cap U = \{p \in U \mid x^i(p) = 0, \text{ per } m_0 < i \leq n\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché M_1 ed M_2 sono localmente chiuse in N , possiamo trovare un intorno aperto W di p_0 in N e funzioni $f^{m_1+1}, \dots, f^n, g^{m_2+1}, \dots, g^n \in \mathcal{C}^\infty(W)$ tali che

$$M_1 \cap W = \{f^{m_1+1} = 0, \dots, f^n = 0\}, \quad df^{m_1+1}(p) \wedge \dots \wedge df^n(p) \neq 0, \quad \forall p \in W,$$

$$M_2 \cap W = \{g^{m_2+1} = 0, \dots, g^n = 0\}, \quad dg^{m_2+1}(p) \wedge \dots \wedge dg^n(p) \neq 0, \quad \forall p \in W.$$

La condizione che N_1 ed N_2 si intersechino trasversalmente in p_0 significa che

$$df^{m_1+1}(p_0) \wedge \dots \wedge df^n(p_0) \wedge dg^{m_2+1}(p_0) \wedge \dots \wedge dg^n(p_0) \neq 0.$$

Infatti, se così non fosse, esisterebbe un covettore $\xi \in T_{p_0}^* N \setminus \{0\}$, con

$$0 \neq \xi = \sum_{m_1 < i \leq n} a_i df^i(p_0) = \sum_{m_2 < i \leq n} b_i dg^i(p_0), \quad a_i, b_i \in \mathbb{R},$$

e quindi

$$T_{p_0} M_1 = \bigcap_{m_1 < i \leq n} \ker df^i(p_0) \subset \ker \xi,$$

$$T_{p_0} M_2 = \bigcap_{m_2 < i \leq n} \ker dg^i(p_0) \subset \ker \xi,$$

contraddirrebbe l'ipotesi di trasversalità.

¹Utilizzando l'approssimazione possiamo trovare una $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tale che $\frac{3}{4} < |f(x)| < \frac{4}{3}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed $|f(x) - x| < \frac{1}{4}$ se $|x| = 1$. Avremo ancora, per qualche $\epsilon > 0$, $|f(x) - x| < \frac{1}{4}$ se $-\epsilon < 1 - |x| < \epsilon$. Sia $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ una funzione con $0 \leq \psi(x) \leq 1$, $\psi(x) = 1$ se $-\frac{\epsilon}{2} < 1 - |x| < \frac{\epsilon}{2}$ e uguale a 0 in un intorno di S^{n-1} . Allora la $g(x) = \psi(x)f(x) + (1 - \psi(x))x$ è una funzione di classe \mathcal{C}^∞ su \mathbb{R}^n , che non è mai nulla ed è l'identità su S^{n-1} . La $g(x)/|g(x)|$ definisce allora la retraction cercata.

Per il teorema delle funzioni implicite possiamo allora scegliere una carta coordinata (U, x) in p_0 con $U \subset W$ ed

$$x^i(p) = g^{m_2+i-m_0}(p) \quad \text{se } m_0 < i \leq m_1, \quad x^i(p) = f^i(p) \quad \text{se } m_1 < i \leq n.$$

Questo carta (U, x) soddisfa la tesi. \square

Corollario X.1.11 (isotopia). *Siano M_0, M_1 e V tre sottovarietà differenziabili localmente chiuse di una varietà differenziabile N , con*

$$\dim N = n, \quad \dim M_0 = \dim M_1 = m, \quad \dim V = n - m.$$

Supponiamo che²

$$p_0 \in M_0 \cap M_1 \cap V, \quad M_0 \pitchfork_{p_0} V \quad \text{ed} \quad M_1 \pitchfork_{p_0} V.$$

Allora esiste un intorno aperto U di p_0 in N ed un'isotopia $F \in \mathcal{C}^\infty(N \times [0, 1], N)$ dell'identità tali che

$$\begin{cases} F(t, p) = p, & \forall p \in V, \\ F(1, p) \in M_1 & \forall p \in M_0 \cap U. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando la Proposizione X.1.10, possiamo fissare una carta locale (W, x) con centro in p_0 tale che

$$M_0 \cap W = \{x^i = 0 \mid m < i \leq n\}, \quad V \cap W = \{x^i = 0 \mid 1 \leq i \leq m\}.$$

Poiché anche $M_1 \pitchfork_{p_0} V$, per il teorema delle funzioni implicite, a meno di sostituire a W un intorno più piccolo di p_0 , possiamo supporre che $x(W) = B^m \times B^{n-m}$, ove $B^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x| < 1\}$, e che vi siano funzioni $f^{m+1}, \dots, f^n \in \mathcal{C}^\infty(B^m)$, tali che

$$M_1 \cap W = \{x^i = f^i(x^1, \dots, x^m) \quad \text{per } i = m+1, \dots, n, (x^1, \dots, x^m) \in B^m\}.$$

Sia ora $\chi \in \mathcal{C}^\infty(N)$ con supporto compatto in W ed uguale ad 1 in un intorno U di p_0 in W . Il campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$, definito da

$$X(p) = \begin{cases} \chi(p) \sum_{m < i \leq n} f_i(x^1, \dots, x^m) \frac{\partial}{\partial x^i} & \text{se } p \in W, \\ 0 & \text{se } p \in \complement W. \end{cases}$$

ha supporto compatto ed è quindi è completo. Il gruppo a un parametro di diffeomorfismi generato da X definisce l'isotopia differenziabile desiderata. \square

X.2. Il teorema di trasversalità di Thom

Il Teorema di trasversalità di Thom³ ci dice che applicazione differenziabile si può approssimare con una che sia trasversale ad una sottovarietà assegnata. Nella dimostrazione utilizziamo in modo essenziale la struttura di fibrato vettoriale dell'intorno tubolare. Cominciamo quindi con il dimostrare un risultato che riguarda l'esistenza di sezioni di un fibrato vettoriale trasversali ad un'applicazione assegnata.

²I punti in cui M_i interseca V trasversalmente sono punti isolati dell'intersezione $M_i \cap V$.

³René Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*. Comm. Math. Helv. 28 (1954), pp. 17-86.

Teorema X.2.1. Sia $\xi = (E(\xi) \xrightarrow{\pi_\xi} B)$ un fibrato vettoriale differenziabile ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, E(\xi))$ un'applicazione differenziabile di una varietà M nel suo spazio totale. Allora esiste una sezione globale $s \in \Gamma_\xi(B, E(\xi))$, trasversale ad f , che possiamo scegliere vicina quanto si vuole alla sezione nulla su un compatto assegnato.

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema VIII.4.4 esiste un fibrato vettoriale differenziabile $\eta = (E(\eta) \xrightarrow{\pi_\eta} B)$, sulla stessa base B , tale che la somma di Whitney $\zeta = \xi \oplus_B \eta$ sia banale. Lo spazio totale $E(\zeta)$ di ζ si può considerare anche come lo spazio totale di un fibrato vettoriale sulla base $E(\xi)$, con

$$E(\zeta) = \{(v, w) \in E(\xi) \times E(\eta) \mid \pi_\xi(v) = \pi_\eta(w)\} \ni (v, w) \xrightarrow{\pi} v \in E(\xi).$$

Consideriamo il suo pullback $f^*\zeta$ su M . Abbiamo quindi il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} E(f^*\zeta) & \xrightarrow{f'} & E(\zeta) \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & E(\xi), \end{array}$$

ove

$$E(f^*\zeta) = \{(p, v, w) \in M \times E(\xi) \times E(\eta) \mid v = f(p), \pi_\xi(v) = \pi_\eta(w)\}$$

e le applicazioni f', π' del diagramma sono descritte da

$$\begin{aligned} f' : E(f^*\zeta) \ni (p, v, w) &\rightarrow (v, w) \in E(\zeta), \\ \pi' : E(f^*\zeta) \ni (p, v, w) &\rightarrow p \in M. \end{aligned}$$

Una trivializzazione di ζ è definita da un'applicazione $\phi \in \mathcal{C}^\infty(E(\zeta), \mathbb{R}^n)$, la cui restrizione ad ogni fibra di $E(\zeta)$ sia un isomorfismo lineare:

$$\begin{array}{ccc} E(\zeta) & \xrightarrow{\pi_\zeta \times \phi} & B \times \mathbb{R}^n \\ \pi_\zeta \searrow & & \swarrow \pi_B \\ & B & \end{array}$$

Sia $\Phi : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E(\zeta)$ l'inversa di $\pi_\zeta \times \phi$. Ad ogni $z \in \mathbb{R}^n$ corrisponde una sezione costante del fibrato banale $\pi_B : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$ e quindi la sezione

$$\sigma_z \in \Gamma_\zeta(B, E(\zeta)), \quad \text{definita da } \sigma_z(b) = \Phi(b, z), \quad \forall b \in B.$$

Abbiamo osservato (vedi l'Esempio X.1.5) che la condizione che z sia un valore regolare di $g = \phi \circ f'$ è equivalente al fatto che $f' \pitchfork \sigma_z$.

Dalla sezione σ_z ricaviamo una sezione $s_z \in \Gamma_\xi(B, E(\xi))$ ponendo

$$s_z(b) = \pi(\sigma_z(b)), \quad \forall b \in B.$$

Abbiamo cioè il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
 E(f^*\zeta) & \xrightarrow{f'} & E(\zeta) \xleftarrow{\sigma_z} B \\
 \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \swarrow s_z \\
 M & \xrightarrow{f} & E(\xi).
 \end{array}$$

Dico che $f \pitchfork s_z$.

Infatti, se $(p, b) \in M \times B$ ed $f(p) = s_z(b)$, allora $(p, \sigma_z(b)) \in E(f^*\zeta)$ ed $f'(p, \sigma_z(b)) = \sigma_z(b)$. Poiché $f' \pitchfork \sigma_z$, le immagini dei differenziali df' in $(p, \sigma_z(b))$ e $d\sigma_z$ in b generano lo spazio tangente di $E(\zeta)$ nel punto $\sigma_z(b)$. Poiché π è una sommersione, ciò vale allora anche per le immagini delle composizioni $d\pi \circ df' = df \circ d\pi'$ e $d\pi \circ d\sigma_z = ds_z$. Questo completa la dimostrazione. \square

Corollario X.2.2. *Siano M, N, V varietà differenziabili ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$. Per ogni inclusione differenziabile $g \in \mathcal{C}^\infty(V, N)$ di V con immagine $g(V)$ localmente chiusa in N è possibile trovare un'isotopia $G = \{g_t\} \in \mathcal{C}^\infty(V \times [0, 1], N)$ tra $g = g_0$ ed un'inclusione differenziabile g_1 trasversale ad f .*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un intorno tubolare $\tau = (E(\tau) \xrightarrow{\pi_\tau} g(V))$ di $g(V)$ in N . Lo spazio totale $E(\tau)$ è un intorno aperto di $g(V)$ in N e quindi la sua immagine inversa $W = f^{-1}(E(\tau))$ è una sottovarietà aperta di M . Per il Teorema X.2.1, possiamo trovare una sezione $s \in \Gamma_\tau(g(V), E(\tau))$ trasversale ad $f|_W \in \mathcal{C}^\infty(W, E(\tau))$. Chiaramente la $G = \{g_t\} \in \mathcal{C}^\infty(V \times \mathbb{R}, N)$ definita da $g_t(q) = t \cdot s(g(q))$, dove il prodotto per lo scalare t è ben definito per la struttura di fibrato vettoriale dell'intorno tubolare, definisce un'isotopia tra $g = g_0$ e $g_1 = s \circ g$, che è trasversale ad f . \square

Nel caso in cui la g sia un'inclusione differenziabile propria, possiamo ottenere un'altra inclusione differenziabile propria trasversale ad f mediante un'isotopia ambientale. Ciò è conseguenza del seguente lemma.

Lemma X.2.3. *Sia M una sottovarietà propria di una varietà differenziabile N , $\tau = (E(\tau) \xrightarrow{\pi_\tau} M)$ un suo intorno tubolare in N ed $s \in \Gamma_\tau(M, E(\tau))$ una sua sezione globale. Esiste allora un gruppo a un parametro $\Phi = \{\phi_t\} \in \mathcal{C}^\infty(N \times \mathbb{R}, N)$ di diffeomorfismi di N tale che*

$$\begin{aligned}
 \phi_1(p) &= s(p), \quad \forall p \in M, \\
 \phi_t(E_p(\tau)) &\subset E_p(\tau), \quad \forall p \in M, \\
 \phi_t(q) &= q, \quad \forall q \in N \setminus E(\tau).
 \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione

$$G : E(\tau) \times \mathbb{R} \ni (q, t) \longrightarrow q + t s(\pi_\tau(q)) \in E(\tau)$$

è un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di $E(\tau)$. Sia $X \in \mathfrak{X}(E(\tau))$ il suo generatore infinitesimale. Fissiamo una norma differenziabile ρ sulle fibre di τ , tale che $\rho(s(p)) < 1$ per ogni $p \in M$. Poiché M è una sottovarietà propria, gli insiemi

$$W_1 = \{q \in E(\tau) \mid \rho(q) < 2\}, \quad W_2 = \bigcup \{q \in E(\tau) \mid \rho(q) \leq 1\}$$

formano un ricoprimento aperto di N . Sia $\{\chi_1, \chi_2\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\{W_1, W_2\}$. Definiamo un campo di vettori $Y \in \mathfrak{X}(N)$ mediante

$$Y(q) = \begin{cases} \chi_1(q)X(q) & \text{se } q \in W_1, \\ 0 & \text{se } q \in W_2. \end{cases}$$

Poiché Y è nullo fuori da $E(\tau)$ ed in $E(\tau)$ è un campo verticale con supporto che interseca ciascuna fibra in un compatto, Y è completo e definisce perciò un gruppo a un parametro $\Phi = \{\phi_t\}$ di diffeomorfismi di N che soddisfa la tesi del Lemma. \square

Corollario X.2.4. *Siano M, N due varietà differenziabili, V una sottovarietà propria di N ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$. Esiste un gruppo a un parametro $\Phi = \{\phi_t\} \in \mathcal{C}^\infty(N \times [0, 1], N)$ di diffeomorfismi di N tale che $\phi_1 \circ f$ sia trasversale a V .*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un intorno tubolare $\tau = (E(\tau) \xrightarrow{\pi_\tau} V)$ di V in N . La $M' = f^{-1}(E(\tau))$ è una sottovarietà aperta di M e la restrizione di f ad M' un'applicazione in $\mathcal{C}^\infty(M', E(\tau))$. Per il Teorema X.2.1, possiamo trovare una sezione $s \in \Gamma_\tau(M, E(\tau))$ trasversale ad f . Per il Lemma X.2.3 esiste un gruppo a un parametro $\Psi = \{\psi_t\}$ di diffeomorfismi di N con $\psi_1(p) = s(p)$ per ogni $p \in M$. Poiché ψ_{-1} è un diffeomorfismo di N , il fatto che s sia trasversale ad f equivale al fatto che V sia trasversale a $\psi_{-1} \circ f$. Quindi il gruppo a un parametro $\Phi(q, t) = \Psi(q, -t)$ soddisfa la tesi. \square

Corollario X.2.5. *Sia N una varietà differenziabile ed M_1, M_2 due sottovarietà differenziabili di N . Se M_1 è propria, possiamo trovare un gruppo a un parametro $\Phi = \{\phi_t\}$ di diffeomorfismi di N tale che $\phi_1(M_1) \pitchfork M_2$.* \square

Corollario X.2.6. *Sia M una sottovarietà compatta, di dimensione m , di \mathbb{R}^n . Se $k < n - m - 1$, ogni applicazione $f \in \mathcal{C}^\infty(S^k, \mathbb{R}^n \setminus M)$ si può estendere ad un'applicazione $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{k+1}, \mathbb{R}^n \setminus M)$.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo estendere f ad un'applicazione, che possiamo ancora indicare con la stessa lettera f , in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{k+1}, \mathbb{R}^n)$. Sia $\tau = (E(\tau) \xrightarrow{\pi_\tau} M)$ un intorno tubolare di M in \mathbb{R}^n . Possiamo scegliere l'intorno tubolare in modo che sia $E(\tau) \cap f(S^k) = \emptyset$. Consideriamo l'aperto $W = f^{-1}(E(\tau))$ di \mathbb{R}^{k+1} . Per il Teorema X.2.1 possiamo trovare una sezione $s \in \Gamma_\tau(M, E(\tau))$ trasversale ad $f|_W$. Per il Lemma X.2.3 c'è un gruppo a un parametro di diffeomorfismi $\Psi = \{\psi_t\}$ di \mathbb{R}^n che trasforma la sezione s nella sezione nulla di τ ed è costante fuori da $E(\tau)$. La $\tilde{f} = \psi_1 \circ f$ ci dà allora l'estensione cercata, perché $f(\mathbb{R}^{k+1}) \cap M = \emptyset$ per la trasversalità, perché $(k+1) + \dim M < n$. \square

Esempio X.2.7. Il Corollario X.2.6 ci dice che $\mathbb{R}^n \setminus S^1$ e, più in generale, $\mathbb{R}^n \setminus f(S^1)$ per $f \in \mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}^n)$, è semplicemente connesso se $n \geq 4$.

Esempio X.2.8. Consideriamo due immersioni differenziabili $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}$ e $g : S^k \rightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}$ che abbiano immagini disgiunte. Per il Corollario X.2.6 la f si estende ad un'applicazione $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(D^{n+1}, \mathbb{R}^{n+k+1})$. Per il Corollario X.2.4 possiamo supporre, a meno di omotopia, che $\tilde{f} \pitchfork g$. Allora $\tilde{f}(D^{n+1}) \cap g(S^k)$ consiste di un numero finito di punti, in cui le due applicazioni sono trasversali. Possiamo,

in ciascuno di questi punti, considerare il sistema di riferimento che si ottiene come somma diretta dell'immagine del sistema di riferimento canonico di \mathbb{R}^{n+1} mediante $d\tilde{f}$ e del sistema di riferimento canonico di \mathbb{R}^k mediante dg . Assoceremo al punto il valore ± 1 , a seconda che il sistema di riferimento così ottenuto abbia la stessa orientazione od orientazione opposta rispetto al sistema di riferimento canonico di \mathbb{R}^{n+k+1} . La somma algebrica $L(f, g)$ di questi valori si dice l'*indice di link* di f e g . Tale numero è indipendente dalla scelta del prolungamento \tilde{f} di f .

Esempio X.2.9. Sia M una varietà compatta (senza bordo) di dimensione $m \geq 1$ e $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$, con $n \leq m$. Sia y_0 un valore regolare di ϕ . Allora $M_0 = \phi^{-1}(y_0)$ è una sottovarietà di dimensione $m-n$ di M , che è bordo di una sottovarietà N , di dimensione $m-n+1$ di M .

Fissiamo un segmento $[y_0, y_1] \subset \mathbb{R}^n$ di lunghezza $|y_1 - y_0| > \text{diam}(\phi(M))$. Il segmento aperto $\ell =]y_0, y_1[$ ha un intorno tubolare $\tau = (U \xrightarrow{\pi_\tau} \ell)$, con $U \simeq \ell \times \mathbb{R}^{n-1}$, il cui spazio totale è un cono con vertice in y_0 e le cui sezioni costanti sono segmenti aperti con un estremo in y_0 . Se $W = \phi^{-1}(U)$, la restrizione di ϕ a $W \setminus M_0$ è un'applicazione differenziabile a valori in U . Per la dimostrazione del Teorema X.2.1 possiamo trovare una sezione costante $s \in \Gamma(\tau)$ trasversale a $\phi|_{W \setminus M_0}$. L'immagine inversa mediante ϕ del supporto $|s| = \{s(y) \mid y \in (y_0, y_1)\}$ di s è allora una sottovarietà localmente chiusa N , con bordo M_0 .

Enunciamo e dimostriamo ora il teorema fondamentale sulla trasversalità.

Teorema X.2.10 (Thom). *Siano M, N due varietà differenziabili, S una sottovarietà differenziabile propria di N . Per ogni compatto K di M , l'insieme*

$$\mathcal{T}_K(M, N; S) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, N) \mid f \pitchfork_p S, \forall p \in K\}$$

delle applicazioni differenziabili di M in N che sono trasversali ad S in ogni punto di K è un aperto denso di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$.

Se M è numerabile all'infinito, l'insieme

$$\mathcal{T}_M(M, N; S) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, N) \mid f \pitchfork_p S, \forall p \in M\}$$

delle applicazioni differenziabili di M in N che sono trasversali ad S è denso e di seconda categoria di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla definizione di trasversalità segue facilmente che, per ogni compatto K di M , l'insieme $\mathcal{T}_K(M, N; S)$ è aperto in $\mathcal{C}^\infty(M, N)$. Basterà dimostrare che è denso.

Sia $\{(V_j, y_j)\}_{j \in J}$ un atlante numerabile e localmente finito di N , con i V_j relativamente compatti in N e con la proprietà che

$$o \quad \bar{V}_j \cap S = \emptyset, \quad oppure \quad S \cap V_j = \{y_j^1 = 0, \dots, y_j^k = 0\}.$$

Sia poi $\{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$ un atlante numerabile di M tale che gli U_i siano relativamente compatti in M e, per un'applicazione $J : I \rightarrow J$, sia $f_0(\bar{U}_i) \Subset V_{J(i)}$ per ogni $i \in I$. Siano i_1, \dots, i_t un insieme finito di indici in I con $K \subset \bigcup_{\ell=1}^t U_{i_\ell}$. Indichiamo con \mathcal{U}_{f_0} l'intorno aperto di f_0 in $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ formato dalle applicazioni $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ con $f(\bar{U}_{i_\ell}) \subset V_{J(i_\ell)}$.

Se $V_{J(i_\ell)} \cap S = \emptyset$, ogni $f \in \mathcal{U}_{f_0}$ è trasversale ad S in tutti i punti di \bar{U}_{i_ℓ} .

Se $V_{J(i_\ell)} \cap S \neq \emptyset$, fissiamo un intorno \tilde{U}_{i_ℓ} di \bar{U}_{i_ℓ} con chiusura compatta in $f^{-1}(V_{J(i_\ell)})$. Sia $\text{pr} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ la proiezione sulle prime k coordinate. Se $h \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{U}_{i_\ell}, V_{J(i_\ell)})$ non è trasversale ad S su \bar{U}_{i_ℓ} , allora $h_{i_\ell} = (\text{pr} \circ y_{J(i_\ell)} \circ h)$ ha punti critici in \bar{U}_{i_ℓ} . Le applicazioni prive di punti critici in \bar{U}_{i_ℓ} formano un aperto denso di $\mathcal{C}^\infty(\tilde{U}_{i_\ell}, \mathbb{R}^k)$. Quindi

$$\mathcal{V}_{f_0} = \bigcap_{\ell=1}^t \{f \in \mathcal{U}_{f_0} \mid C(\text{pr} \circ y_{J(i_\ell)} \circ f|_{\tilde{U}_{i_\ell}}) \cap \bar{U}_{i_\ell} = \emptyset\}$$

è un sottoinsieme aperto di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ denso in \mathcal{U}_{f_0} e contenuto in $\mathcal{T}_K(M, N; S)$. Questo dimostra la prima affermazione del Teorema.

Dimostriamo ora l'ultima parte. Fissiamo una qualsiasi successione di compatti $\{K_\nu\}$ di M , con $\bigcup_\nu K_\nu = M$. Allora

$$\mathcal{T}_M(M, N; S) = \bigcap_\nu \mathcal{T}_{K_\nu}(M, N; S),$$

cioè l'insieme delle applicazioni differenziabili da M in N che sono trasversali ad S è intersezione di una famiglia numerabile di aperti densi e dunque, per il Teorema di Baire, un sottoinsieme denso di seconda categoria di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$. \square

X.3. Immersioni regolari

Date due varietà differenziabili M, N , indichiamo con

$$\mathcal{J}^\infty(M, N) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, N) \mid \ker df(p) = \{0\}, \forall p \in M\}$$

l'insieme delle immersioni differenziabili di M in N .

Osservazione X.3.1. Osserviamo che $\mathcal{J}^\infty(M, N)$ può essere vuoto. Ad esempio, non ci sono inclusioni differenziabili di $\mathbb{R}P^n$ in \mathbb{R}^n .

Lemma X.3.2. *Siano M, N due varietà differenziabili connesse, di dimensione m ed n rispettivamente, con $m \leq n$.*

Se M è compatto, allora $\mathcal{J}^\infty(M, N)$ è aperto in $\mathcal{C}^\infty(M, N)$.

Se M è numerabile all'infinito, allora $\mathcal{J}^\infty(M, N)$ è intersezione numerabile di aperti di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$. \square

Mostriamo ora che è possibile definire su $\mathcal{J}^\infty(M, N)$ una struttura di spazio metrizzabile completo. A questo scopo, introduciamo strutture Riemanniane su M ed N . Questo ci permette di considerare, per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ ed ogni punto $p \in M$ l'aggiunta $(df(p))^* : T_{f(p)}N \rightarrow T_pM$ del differenziale di f in p . Avremo quindi

$$\mathcal{J}^\infty(M, N) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, N) \mid (df(p))^* df(p) > 0, \forall p \in M\}.$$

Sia σ_M il fibrato vettoriale su M la cui fibra su $p \in M$ è l'insieme degli endomorfismi simmetrici di T_pM . Ogni $f \in \mathcal{J}^\infty(M, N)$ definisce una sezione⁴ $s_f \in \Gamma_{\sigma_M}(M, E(\sigma_M))$, caratterizzata da:

$$s_f(p) \in \text{End}_{\mathbb{R}}(T_pM), \quad s_f(p) = s_f^*(p), \quad \exp(s_f(p)) = (df(p))^* df(p).$$

⁴Vedi il Teorema XX.4.5.

L'applicazione

$$\mathcal{J}^\infty(M, N) \ni f \longrightarrow s_f \in \Gamma_{\sigma_M}(M, E(\sigma_M))$$

è differenziabile. Sia δ_1 una distanza in $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ che lo renda uno spazio metrico completo. Scegliamo poi una successione di compatti $\{K_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ in M con $\bigcup_\nu K_\nu = M$ e poniamo

$$\delta_2(f, g) = \sum_\nu 2^{-\nu} \frac{\sup_{K_\nu} \|s_f - s_g\|_{\sigma_M}}{1 + \sup_{K_\nu} \|s_f - s_g\|_{\sigma_M}}$$

per una norma differenziabile $\| \cdot \|_{\sigma_M}$ sulle fibre σ_M . La distanza su $\mathcal{J}^\infty(M, N)$ definita da

$$\delta(f, g) = \delta_1(f, g) + \delta_2(f, g), \quad \forall f, g \in \mathcal{J}^\infty(M, N)$$

è continua rispetto alla topologia di sottospazio. Si verifica facilmente che δ è una metrica completa. Abbiamo perciò:

Proposizione X.3.3. *La topologia di sottospazio di $\mathcal{J}^\infty(M, N)$ può essere definita da una metrica completa. In particolare, $\mathcal{J}^\infty(M, N)$ è uno spazio di Baire.*

Definizione X.3.4 (Immersione regolare). Sia $f \in \mathcal{J}^\infty(M, N)$ un'immersione differenziabile di M in N e p_1, p_2 due punti distinti di M con la stessa immagine $q = f(p_1) = f(p_2)$ in N . Diciamo che f è *regolare* in (p_1, p_2) se

$$df(T_{p_1}M) + df(T_{p_2}M) = T_qN.$$

Ciò equivale ad affermare che esistano intorno aperti U_1, U_2 di p_1, p_2 rispettivamente, tali che le applicazioni $f|_{U_1} \in \mathcal{C}^\infty(U_1, N)$ ed $f|_{U_2} \in \mathcal{C}^\infty(U_2, N)$ siano trasversali in (p_1, p_2) .

Diciamo che f è un'*immersione regolare* se lo è in tutte le coppie di punti (p_1, p_2) con $p_1 \neq p_2$ ed $f(p_1) = f(p_2)$.

Osservazione X.3.5. Se $2m < n$, allora le immersioni regolari sono inclusioni.

Teorema X.3.6 (Thom). *Siano M, N due varietà differenziabili di dimensione m, n rispettivamente, con $m \leq n$. Per ogni compatto $K \subset M$, le immersioni differenziabili $f \in \mathcal{J}^\infty(M, N)$ che sono regolari su K formano un aperto denso in $\mathcal{J}^\infty(M, N)$.*

L'insieme $\mathcal{J}_{\text{reg}}^\infty(M, N)$ delle immersioni differenziabili regolari è denso e di seconda categoria in $\mathcal{J}^\infty(M, N)$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $\Delta_N = \{(q, q) \mid q \in N\}$ la diagonale in $N \times N$ e $\Delta_M = \{(p, p) \mid p \in M\}$ quella in $M \times M$.

Ad $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ associamo l'applicazione differenziabile

$$f \times f : (M \times M) \setminus \Delta_M \ni (p_1, p_2) \longrightarrow (f(p_1), f(p_2)) \in N \times N.$$

La condizione che $(f \times f) \pitchfork_{(p_1, p_2)} \Delta_N$ significa che

$$0 \quad f(p_1) \neq f(p_2), \quad \text{oppure} \quad f(p_1) = f(p_2) = q, \quad df(T_{p_1}M) + df(T_{p_2}M) = T_qN.$$

Infatti

$$\begin{aligned} f(p_1) = f(p_2) = q, \quad (f \times f) \pitchfork_{(p_1, p_2)} \Delta_N \\ \iff (df(T_{p_1}M) \oplus df(T_{p_2}M)) + \{(v, v) \mid v \in T_qN\} = T_q(N) \oplus T_qN \end{aligned}$$

$$\iff \left(\begin{array}{l} \forall v \in T_q N \exists v_1 \in df(T_{p_1} M), v_2 \in df(T_{p_2} M), v_0 \in T_q N \\ \text{tali che } (v, 0) = (v_1, v_2) + (v_0, v_0) \Leftrightarrow v = v_1 - v_2 \end{array} \right).$$

Vogliamo dimostrare che

$$\mathcal{J}^\infty(M, N; K) = \{f \in \mathcal{J}^\infty(M, N) \mid (f \times f) \pitchfork_{(p_1, p_2)} \Delta_N, \forall p_1, p_2 \in K, p_1 \neq p_2\}.$$

è un aperto denso di $\mathcal{J}^\infty(M, N)$.

Utilizzando il teorema di immersione di Whitney, possiamo supporre che N, M siano sottovarietà proprie di uno spazio Euclideo \mathbb{R}^ℓ . Sia K un compatto di M . Se $f_0 \in \mathcal{J}^\infty(M, N)$, esiste un intorno aperto relativamente compatto U_K della diagonale $\Delta_K = \{(p, p) \mid p \in K\}$ in $M \times M$ ed una costante $c_K > 0$ tale che

$$|f_0(p_1) - f_0(p_2)| \geq c_0 |p_1 - p_2|, \quad \forall p_1, p_2 \in U_K.$$

Osserviamo che

$$\mathcal{W}_1 = \{f \in \mathcal{J}^\infty(M, N) \mid |f(p_1) - f(p_2)| \geq \frac{1}{2} c_0 |p_1 - p_2|, \quad \forall p_1, p_2 \in U_K\}$$

è un intorno di f_0 in $\mathcal{J}^\infty(M, N)$.

Con una dimostrazione analoga a quella del Teorema X.2.10, otteniamo che

$$\mathcal{W}_2 = \{f \in \mathcal{J}^\infty(M, N) \mid (f \times f) \pitchfork_{(p_1, p_2)} \Delta_N, \forall (p_1, p_2) \in K \times K \setminus U_K\}$$

è un aperto denso di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$. Poiché $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 \subset \mathcal{J}^\infty(M, N; K)$, otteniamo la prima parte dell'enunciato.

Fissiamo una successione di compatti $\{K_\nu\}$ di M con $K_\nu \subset \overset{\circ}{K}_{\nu+1}$ ed $\bigcup_\nu K_\nu = M$. Allora

$$\mathcal{J}_{\text{reg}}(M, N) = \bigcap_\nu \mathcal{J}^\infty(M, N; K_\nu)$$

è denso di seconda categoria perché intersezione numerabile di aperti densi dentro uno spazio di Baire. \square

X.4. Funzioni di Morse

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ una funzione reale differenziabile. Nei punti in cui è regolare, in cui cioè $df \neq 0$, la f è equivalente ad una proiezione. Nei punti critici, il comportamento di f può essere molto complicato. Marston Morse⁵ introdusse una classe di funzioni con un comportamento particolarmente semplice nell'intorno dei loro punti singolari. In particolare, una *funzione di Morse* avrà, in un punto singolare, un Hessiano non degenerare e si potrà scrivere, in un opportuno sistema di coordinate, nella forma

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^q (x^i)^2 - \sum_{i=q+1}^m (x^i)^2,$$

per un intero q , con $0 \leq q \leq m$.

Sia $f \in \mathcal{C}^2(M)$ una funzione differenziabile di classe \mathcal{C}^2 su M . Fissata una carta coordinata con centro in un punto $p_0 \in M$, il suo Hessiano è una matrice simmetrica e definisce quindi una forma bilineare simmetrica sullo spazio tangente.

⁵Marston Morse, *The critical points of a function of n variables*. Trans. Amer. Math. Soc. **33** (1931), no. 1, 72–91.

Questa forma non è però definita in modo invariante se p_0 è un punto regolare: abbiamo infatti per due sistemi di coordinate x ed y con centro in p_0

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j} = \sum_{h,k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^h \partial x^k} \frac{\partial x^h}{\partial y^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^j} + \sum_{h=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^h} \frac{\partial^2 x^h}{\partial y^i \partial y^j}, \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq m,$$

e quindi l'Hessiano in p_0 ha un significato tensoriale se e soltanto se p_0 è un punto critico di f . In questo caso, esso definisce una forma bilineare simmetrica sullo spazio tangente $T_{p_0}M$.

Traduciamo questa osservazione nell'enunciato di un lemma e diamone una dimostrazione senza usare carte locali.

Lemma X.4.1. *Sia M una varietà differenziabile ed $f \in \mathcal{C}^2(M)$. Se p_0 è un punto critico di f , risulta univocamente determinata una forma bilineare simmetrica*

$$(10.4.1) \quad d^2f(p_0) : T_{p_0}M \times T_{p_0}M \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$(10.4.2) \quad d^2f(p_0)(X_{p_0}, Y_{p_0}) = XYf(p_0), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché f è un punto critico di f , risulta $Xf(p_0) = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, abbiamo

$$(10.4.3) \quad XYf(p_0) = YXf(p_0) + [X, Y]f(p_0) = YXf(p_0).$$

In particolare, $XYf(p_0) = 0$ se uno dei due campi di vettori X, Y si annulla in 0. Questo dimostra che il valore $XYf(p_0) = YXf(p_0)$ dipende solo dai valori X_{p_0}, Y_{p_0} che i due campi di vettori assumono in p_0 e quindi, per la (10.4.3), la (10.4.2) definisce una forma bilineare simmetrica su $T_{p_0}M$. \square

Definizione X.4.2. *Sia M una varietà differenziabile ed $f \in \mathcal{C}^2(M)$ una funzione differenziabile di classe \mathcal{C}^2 su M . Se p_0 è un punto critico di f , la forma quadratica $d^2f(p_0)(v, v)$ associata alla forma bilineare simmetrica (10.4.1) si dice l'Hessiano di f in p_0 .*

Osservazione X.4.3. In generale, $d^2f(p_0)$ risulta definito in modo invariante soltanto su $\ker df(p_0) \subset T_{p_0}M$.

Supportremo nel seguito che la f sia differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ su M .

Il differenziale di f definisce un'applicazione differenziabile

$$F = df : M \rightarrow T^*M$$

di M nel suo fibrato cotangente T^*M . Fissiamo una carta coordinata (U, x) con centro in un punto $p_0 \in M$, e consideriamo le coordinate canoniche corrispondenti in $T^*M|_U$. In queste coordinate l'applicazione F si scrive

$$x(U) \ni x \longrightarrow \left(x^1, \dots, x^m; \frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m} \right) \in x(U) \times \mathbb{R}^m.$$

La matrice associata al differenziale di F ha quindi la forma

$$\begin{pmatrix} \delta_{i,j} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \end{pmatrix}$$

I vettori tangenti alla sezione nulla di T^*M nel punto $(p_0, 0)$ si scrivono in coordinate locali nella forma

$$\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } v \in \mathbb{R}^m.$$

Quindi, la condizione che l'Hessiano di f in un suo punto critico p_0 sia non degenere è equivalente all'affermazione che il differenziale di df , come applicazione a valori in T^*M , sia trasversale alla sezione nulla nel punto $df(p_0) = (p_0, 0)$. Riformuliamo quindi le nozioni che ci interessano nella forma seguente.

Definizione X.4.4. Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Denotiamo con M_0 la sezione nulla del fibrato cotangente T^*M e con $C(f)$ l'insieme dei punti critici di f .

- Un punto p di M è *punto critico* di f se $df(p) \in M_0$.
- Un punto critico $p \in C(f)$ si dice *non degenere* se df è trasversale ad M_0 in $0_p \in T^*M$. Ciò equivale al fatto che $d^2f(p)$ sia non degenere su T_pM .
- Il numero degli autovalori negativi di $d^2f(p)$ in un punto critico non degenere p di f si dice il suo *indice di Morse* in p .
- La f si dice una *funzione di Morse* se $df \pitchfork M_0$.

Dalla Proposizione X.1.8 otteniamo:

Proposizione X.4.5. *I punti critici non degeneri di una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ sono isolati.* \square

Dimostriamo ora l'esistenza di funzioni di Morse.

Lemma X.4.6. *Siano M una sottovarietà differenziabile di dimensione m di uno spazio Euclideo \mathbb{R}^n ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Allora l'insieme dei funzionali lineari $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ per cui $(f - \phi|_M)$ sia una funzione di Morse è un sottoinsieme denso di seconda categoria in $\mathbb{R}^n \simeq (\mathbb{R}^n)^*$.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $T_M^*\mathbb{R}^n$ lo spazio totale della restrizione ad M del fibrato cotangente di \mathbb{R}^n . Definiamo un fibrato affine $\zeta = T_M^*\mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi_\zeta} T^*M$, con

$$\pi_\zeta(\alpha) = \alpha|_{T_pM}, \quad \forall p \in M, \quad \forall \alpha \in T_p^*\mathbb{R}^n.$$

Sia η il fibrato vettoriale di rango $n - m$ con

$$\begin{aligned} E(\eta) &= \{(\alpha, \beta) \in T^*M \times T_M^*\mathbb{R}^n \mid \pi(\alpha) = \pi(\beta) = p, \beta|_{T_pM} = 0\}, \\ B(\eta) &= T^*M, \quad \pi_\eta(\alpha, \beta) = \alpha. \end{aligned}$$

La struttura affine sulle fibre di ζ è descritta dall'omomorfismo di fibrati

$$E(\zeta \oplus_{T^*M} \zeta) \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha - \beta \in E(\eta).$$

Sia ξ il pullback del fibrato ζ mediante l'applicazione $df \in \mathcal{C}^\infty(M, T^*M)$. Otteniamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{F} & T_M^*\mathbb{R}^n \\ \pi_\xi \downarrow & & \downarrow \pi_\zeta \\ M & \xrightarrow{df} & T^*M. \end{array}$$

Qui $E(\xi) = \{(p, \alpha) \in M \times T_M^* \mid \alpha \in T_p^*M, \alpha|_{T_pM} = df(p)\}$ ed $F(p, \alpha) = \alpha$.

Il fibrato $\theta = T_M^*\mathbb{R}^n \rightarrow M$ è trivializzabile. Per il Teorema X.2.1, i covettori $\beta \in (\mathbb{R}^n)^*$ per cui la corrispondente sezione costante in $\Gamma_\theta(M, T_M^*\mathbb{R}^n)$ sia trasversale ad F formano un sottoinsieme denso della seconda categoria di Baire. Fissiamo un tale β ed indichiamo con $s_\beta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ la funzione lineare $s_\beta(x) = \langle x | \beta \rangle$ su \mathbb{R}^n e con $\sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(M)$ la sua restrizione ad M . Abbiamo allora un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{F} & T_M^*\mathbb{R}^n & \xleftarrow{ds_\beta|_M} & M \\ \pi_\xi \downarrow & & \pi_\zeta \downarrow & \swarrow & d\sigma_\beta \\ M & \xrightarrow{df} & T^*M & & \end{array}$$

Poiché π_ζ e π_ξ sono sommersioni, otteniamo che df e $d\sigma_\beta$ sono trasversali. Questo equivale al fatto che i punti critici di $f - \sigma_\beta$ siano non degeneri, cioè che $f - \sigma_\beta$ sia una funzione di Morse. \square

Teorema X.4.7. *Sia M una varietà differenziabile, numerabile all'infinito. Per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ esiste una funzione di Morse $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tale che $|f(p) - g(p)| < \epsilon$ per ogni $p \in M$. Possiamo inoltre scegliere g in modo tale che g assuma valori distinti nei punti critici distinti.*

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando il teorema d'immersione di Whitney e l'immersione canonica di \mathbb{R}^ℓ nella sfera S^ℓ , possiamo ricondurci al caso in cui M sia una sottovarietà localmente chiusa e limitata di uno spazio Euclideo. L'esistenza di una $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ di Morse con $\sup |f - g| < \epsilon$ è conseguenza del Lemma X.4.6.

Per completare la dimostrazione, sarà sufficiente mostrare che, se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ è una funzione di Morse, fissato $\epsilon > 0$ è possibile trovare un'altra funzione di Morse $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, con $\sup |f - g| < \epsilon$, che assuma valori distinti nei suoi punti critici. Per la Proposizione X.4.5 l'insieme $C(f)$ dei punti critici di f è discreto. Possiamo allora fissare una famiglia localmente finita $\{U_p\}$ di aperti tali che

$$p \in U_p, \quad \bar{U}_p \cap \bar{U}_q = \emptyset \quad \text{se } p, q \in C(f), \quad p \neq q.$$

Fissiamo, per ogni p una funzione $\chi_p \in \mathcal{C}^\infty(M)$ con $\text{supp } \chi_p \subseteq U_p$ e $\chi_p = 1$ in un intorno di p . Esiste allora una successione ϵ_p di numeri reali positivi tali che, se $|c_p| < \epsilon_p$, la funzione

$$g_{(c_p)} = g + \sum_{p \in C(f)} c_p \chi_p$$

sia ancora una funzione di Morse, con gli stessi punti critici di g .

La tesi è allora facilmente verificata nel caso in cui l'insieme $C(f)$ sia finito.

Supponiamo che $C(f)$ sia infinito. Allora è numerabile e possiamo porre $C(f) = \{p_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$. Definiamo allora per ricorrenza la successione $\{c_{p_\nu}\}$ di numeri reali con $|c_{p_\nu}| < \epsilon_{p_\nu}$ per ogni ν , richiedendo che, posto

$$g_\nu = g + \sum_{h \leq \nu} c_{p_h} \chi_{p_h}$$

sia $g_\nu(p_\nu) \notin \{g_{\nu-1}(p_h) \mid h < \nu\}$. Allora la $g_{(c_p)}$ ottenuta assume valori distinti in punti critici distinti. \square

Per le varietà compatte con bordo vale il seguente

Teorema X.4.8. *Sia M una varietà differenziabile compatta con bordo, e supponiamo che il bordo sia unione di due parti N_0 ed N_1 , disgiunte e compatte. Allora esiste una funzione di Morse $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ con $f^{-1}(0) = N_0$, $f^{-1}(1) = N_1$, $0 \leq f \leq 1$ su M , senza punti critici su ∂M .*

Osservazione X.4.9. Sia f una funzione di Morse su una varietà compatta M . Allora M è topologicamente equivalente ad un CW -complesso che si ottiene da successivi attaccamenti di tante celle di dimensione k quanti sono i punti critici con indice di Morse⁶ k di f .

X.5. Descrizione locale delle funzioni di Morse

Descriviamo ora la struttura locale delle funzioni di Morse nell'intorno di un punto critico.

Lemma X.5.1. *Sia Ω un intorno aperto di 0 in \mathbb{R}_x^m ed $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ una funzione differenziabile, con $f(0) = 0$, che ha in 0 un punto critico non degenero. Possiamo allora trovare coordinate locali $y = (y^1, \dots, y^m)$ in 0 tali che, per un intero q con $0 \leq q \leq m$,*

$$(10.5.1) \quad f = -\sum_{1 \leq j \leq q} (y^j)^2 + \sum_{q < j \leq m} (y^j)^2.$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che Ω sia stellato rispetto all'origine. Abbiamo allora

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^m x^i x^j h_{i,j}(x), \quad \text{con} \quad h_{i,j}(x) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f(stx)}{\partial x^i \partial x^j} t ds dt.$$

La matrice $(h_{i,j}(0))$ è l'Hessiano di f in 0. A meno di una trasformazione lineare di coordinate, possiamo allora supporre che $(h_{i,j}(0))_{1 \leq i,j \leq m}$ sia diagonale, con tutti gli elementi sulla diagonale di modulo 1. Poniamo

$$\begin{cases} y_1^1 = \sqrt{|h_{1,1}(x)|} \left(x^1 + \sum_{i=2}^m \frac{h_{1,i}(x)}{|h_{1,1}(x)|} x^i \right), \\ y_1^j = x^j \quad \text{se} \quad 1 < j \leq m. \end{cases}$$

Osserviamo che le y_1^j sono ben definite e differenziabili in un intorno di 0 in Ω . Inoltre lo Jacobiano $\frac{\partial y_1}{\partial x}$ è l'identità nell'origine, e quindi le y_1^j definiscono un sistema di coordinate in un intorno Ω_1 di 0 in Ω . Nelle nuove coordinate risulta:

$$f(y_1) = f(x(y_1)) = h_{1,1}(0)(y_1^1)^2 + \sum_{2 \leq i,j \leq m} h_{i,j}^{(1)}(y) y_1^i y_1^j,$$

con $(h_{i,j}^{(1)})_{2 \leq i,j \leq m}$ simmetrica.

Per ricorrenza, possiamo trovare una sequenza

$$\Omega \supset \Omega_1 \supset \dots \supset \Omega_{m-1} \supset \Omega_m$$

⁶vedi J. Milnor, *Morse Theory*, Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells, Princeton, New Jersey. Princeton University Press, 1963.

di intorni aperti di 0 in \mathbb{R}^m e di coordinate (y_k) in Ω_k ed una sequenza di matrici simmetriche $(h_{i,j}^{(k)})_{k < i, j \leq m}$, ponendo

$$\begin{cases} y_k^k = \sqrt{|h_{k,k}^{(k-1)}(y_{k-1})|} \left(y_{k-1}^k + \sum_{i=k+1}^m \frac{h_{k,i}^{(k-1)}(y_{k-1})}{|h_{k,k}^{(k-1)}(y_{k-1})|} y_{k-1}^i \right), \\ y_k^j = y_{k-1}^j \quad \text{se } j \neq k, \end{cases}$$

in modo che risulti

$$f(y_k) = \sum_{j=1}^k h_{j,j}(0)(y_k^j)^2 + \sum_{i,j=k+1}^m h_{i,j}^{(k)}(y_k) y_k^i y_k^j.$$

□

Il seguente teorema è la riformulazione astratta del lemma precedente:

Teorema X.5.2. *Sia M una varietà differenziabile ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ una funzione che ha in $p_0 \in M$ un punto critico non degenere. Esiste allora una carta locale (U, x) con centro in p_0 tale che, per un intero q con $0 \leq q \leq m$, risulti*

$$(10.5.2) \quad f(p) = f(p_0) - \sum_{1 \leq i \leq q} (x^i(p))^2 + \sum_{q < i \leq m} (x^i(p))^2. \quad \square$$

X.6. Indice d'intersezione

Sia M una varietà differenziabile ed M_1, M_2 due sue sottovarietà proprie, con

$$(10.6.1) \quad \dim M = m, \quad \dim M_1 = m_1, \quad \dim M_2 = m_2, \quad m_1 + m_2 = m, \quad M_1 \pitchfork M_2.$$

L'intersezione $M_1 \cap M_2$ è un sottoinsieme discreto di M . Per l'ipotesi di trasversalità,

$$(10.6.2) \quad T_p M = T_p M_1 \oplus T_p M_2, \quad \forall p \in M_1 \cap M_2.$$

Risulta perciò definita, per ogni $p \in M_1 \cap M_2$, un isomorfismo lineare

$$(10.6.3) \quad T_p M_2 \longrightarrow \nu_{M,p} M_1 = T_p M / T_p M_1$$

di $T_p M_2$ sulla fibra in p del fibrato normale ad M_1 in M .

Siano ora assegnate un'orientazione sul fibrato normale $\nu_M M_1$ di M_1 in M ed un'orientazione sulla varietà M_2 .

Nel caso in cui M_1 sia una sottovarietà orientata di una varietà orientata M , possiamo considerare su $\nu_M M_1$ un'orientazione, che chiameremo *canonica*, per cui l'isomorfismo naturale

$$(10.6.4) \quad \varpi_p : T_p M \longrightarrow T_p M_1 \oplus \nu_{M,p} M_1$$

mantenga l'orientazione.

Assegnate un'orientazione ad $\nu_M M_1$ e ad M_2 , ha senso chiedersi se l'isomorfismo (10.6.3) conservi o inverta l'orientazione. Porremo, per $p \in M_1 \cap M_2$,

$$(10.6.5) \quad \varepsilon(p) = \begin{cases} +1 & \text{se } \varpi \text{ conserva l'orientazione,} \\ -1 & \text{se } \varpi \text{ inverte l'orientazione.} \end{cases}$$

Definizione X.6.1. Siano M_1, M_2 due sottovarietà compatte trasversali di una varietà differenziabile M , con $\dim M_1 + \dim M_2 = \dim M$, e siano assegnate orientazioni di M_2 e del fibrato normale di M_1 .

L'indice d'intersezione di M_1 ed M_2 è il numero intero

$$(10.6.6) \quad [M_1 : M_2] = \begin{cases} 0 & \text{se } M_1 \cap M_2 = \emptyset, \\ \sum_{p \in M_1 \cap M_2} \varepsilon(p) & \text{se } M_1 \cap M_2 \neq \emptyset. \end{cases}$$

Se M_2 è una varietà orientabile compatta e connessa di dimensione m_2 , il suo m_2 -esimo gruppo di omologia a coefficienti interi $H_{m_2}(M_2)$ è isomorfo a \mathbb{Z} . Un'orientazione su M_2 corrisponde alla scelta di un generatore⁷ ω_{M_2} di $H_{m_2}(M_2)$.

Supponiamo che M_1 sia connessa. Ad un'orientazione di $\nu_M M_1$ possiamo associare un elemento γ_{M_1} di $H_{m_2}(M, M \setminus M_1)$. Sia infatti F la fibra di $\nu_M M_1$ in un qualsiasi punto $p \in M_1$. L'orientazione del fibrato normale equivale al dato di un generatore γ_F del gruppo ciclico $H_{m_2}(F, F \setminus \{p\}) \simeq \mathbb{Z}$.

Sia $\tau = (U \xrightarrow{\pi_\tau} M_1)$ un intorno tubolare di M_1 . L'inclusione

$$\iota : (F, F \setminus \{p\}) \hookrightarrow (U, U \setminus M_1)$$

ci permette di considerare l'immagine $\gamma_U = \iota_*(\gamma_F)$ di γ_F in $H_{m_2}(U, U \setminus M_1)$. L'elemento $\gamma_U \in H_{m_2}(U, U \setminus M_1)$ non dipende dalla scelta del punto p , perché abbiamo supposto M_1 connessa.

Utilizzando l'isomorfismo di excisione,

$$H_{m_2}(U, U \setminus M_1) \simeq H_{m_2}(M, M \setminus M_1),$$

la classe γ_U definisce un elemento $\gamma_{M_1} \in H_{m_2}(M, M \setminus M_1)$, che dipende solo dalla sottovarietà M_1 e dalla orientazione del suo fibrato normale.

Consideriamo le inclusioni

$$J : (M_2, \emptyset) \rightarrow (M_2, M_2 \setminus M_1) \quad \text{e} \quad \iota : (M_2, M_2 \setminus M_1) \hookrightarrow (M, M \setminus M_1).$$

Vale la

Proposizione X.6.2. Siano M una varietà differenziabile ed M_1, M_2 due sue sottovarietà connesse e compatte, trasversali e di dimensioni complementari in M . Siano assegnate un'orientazione $\gamma_{M_1} \in H_{m_2}(M, M \setminus M_1)$ sul fibrato normale di M_1 ed un'orientazione $\omega_{M_2} \in H_{m_2}(M_2)$ su M_2 . Allora

$$(10.6.7) \quad \iota_* J_*(\omega_{M_2}) = [M_1 : M_2] \cdot \gamma_{M_1}.$$

Se M, M_1 ed M_2 sono tutte orientate e scegliamo sui fibrati normali le orientazioni canoniche, per ogni punto $p \in M_1 \cap M_2$ risulta

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} +1 & \text{se } T_p M \rightarrow T_p M_1 \oplus T_p M_2 \text{ mantiene l'orientazione,} \\ -1 & \text{se } T_p M \rightarrow T_p M_1 \oplus T_p M_2 \text{ inverte l'orientazione.} \end{cases}$$

In particolare, vale la

$$(10.6.8) \quad [M_2 : M_1] = (-1)^{m_1 m_2} [M_1 : M_2].$$

⁷Esso corrisponde alla classe di coomologia di deRham di una forma di grado m_2 con integrale 1 su M_2 .

Nel caso di due sottovarietà non necessariamente trasversali, ma connesse, compatte e soddisfacenti la (10.6.1), possiamo prendere la (10.6.7) come definizione dell'indice d'intersezione $[M_1 : M_2]$.

Per la Proposizione X.6.2, l'indice d'intersezione è un invariante omotopico.

Se il fibrato normale di M_1 ed M_2 non sono orientate, possiamo utilizzare i gruppi di omotopia a coefficienti in \mathbb{Z}_2 e definire l'indice d'intersezione come un elemento di \mathbb{Z}_2 . In particolare il numero (pari o dispari) di punti d'intersezione di due sottovarietà compatte è un invariante isotopico.

Esempio X.6.3. Consideriamo una circonferenza $S = S^1 \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{RP}^3$. Ogni immagine isotopica di S^1 in \mathbb{RP}^3 che intersechi trasversalmente un iperpiano $\Sigma \simeq \mathbb{RP}^2$ di \mathbb{RP}^3 lo interseca in un numero pari di punti.

In particolare S è diffeomorfa ad una retta proiettiva $\ell \simeq \mathbb{RP}^1$ di \mathbb{RP}^3 , ma non è ad essa isotopica.

Esempio X.6.4. Consideriamo nel piano proiettivo complesso \mathbb{CP}^2 le due sottovarietà $M_1 = \{z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0\}$ ed $M_2 = \{z_0 = 0\}$. Entrambe sono diffeomorfe alla sfera S^2 , ma non possono essere trasformate l'una nell'altra da un'isotopia del piano proiettivo complesso, perché le rette proiettive complesse che intersecano M_1 trasversalmente la intersecano in due punti, mentre quelle che intersecano M_2 trasversalmente la intersecano in un solo punto.

X.7. Indice d'intersezione e grado topologico

Siano M_1 ed M_2 due varietà compatte e connesse orientate, della stessa dimensione m . Abbiamo osservato che l'orientazione definisce canonicamente, per ciascuna di esse, un generatore ω_{M_1} di $H_m(M_1)$ ed un generatore ω_{M_2} di $H_m(M_2)$. Possiamo definire il *grado* di un'applicazione continua $f : M_1 \rightarrow M_2$ come il numero intero $\deg(f)$ per cui

$$(10.7.1) \quad f_*(\omega_{M_1}) = \deg(f) \cdot \omega_{M_2}.$$

Supponiamo ora che f sia differenziabile e consideriamo il grafico di f , cioè l'applicazione

$$(10.7.2) \quad \tilde{f} : M_1 \ni p \longrightarrow (p, f(p)) \in M_1 \times M_2.$$

Sia $\text{pr}_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ la proiezione nella seconda coordinata. Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} H_m(M_1) & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & H_m(\tilde{f}(M_1)) & \xrightarrow{\iota_*} & H_m(M_1 \times M_2, M_1 \times (M_2 \setminus \{p_2\})) \\ f_* \downarrow & & \text{pr}_{2*} \downarrow & & \text{pr}_{2*} \downarrow \\ H_m(M_2) & \xlongequal{\quad} & H_m(M_2) & \xrightarrow{\cong} & H_m(M_2, M_2 \setminus \{p_2\}) \end{array}$$

ove $\iota : \tilde{f}(M_1) \hookrightarrow M_1 \times M_2$ è l'inclusione. Indichiamo con η_{M_1} la classe definita dal fibrato normale di M_1 in $M_1 \times M_2$, con l'orientazione data da quella di M_2 . Poiché

$$\iota_* \circ \tilde{f}_*(\omega_{M_1}) = [\tilde{f}(M_1) : M_{p_2}] \gamma_{M_1},$$

ed il diagramma è commutativo, otteniamo

Lemma X.7.1. *Con le notazioni introdotte sopra, abbiamo*

$$(10.7.3) \quad \deg(f) = [\tilde{f}(M_1) : (M_1 \times \{p_2\})], \quad \forall p_2 \in M_2.$$

Se in particolare scegliamo come p_2 un valore regolare di f , il grado dell'applicazione f si può calcolare come l'indice d'intersezione del grafico di f con quello dell'applicazione costantemente uguale a p_2 .

CAPITOLO XI

Alcune Costruzioni

XI.1. Somme connesse

L'operazione di *somma connessa* consiste nel *congiungere* due varietà connesse, della stessa dimensione $m \geq 2$, con un tubo.

Senza ripeterlo in ogni definizione ed enunciato, supporremo nel seguito che m sia un intero maggiore o uguale a due.

Come spazio topologico, la somma connessa è ottenuta per *incollamento*.

Ricordiamo che, se X e Y sono spazi topologici, A un sottospazio di X ed $f : A \rightarrow Y$ un'applicazione continua, l'incollamento $X \cup_f Y$ di X ad Y mediante la f è il quoziente dell'unione disgiunta $X \sqcup Y$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica $x \in A$ con $y = f(x) \in Y$.

Siano M_1 ed M_2 due varietà differenziabili della stessa dimensione $m \geq 2$. Fissiamo $p_1 \in M_1$, $p_2 \in M_2$ e siano U_1 una carta coordinata di M_1 con centro in p_1 ed U_2 una carta coordinata in M_2 con centro in p_2 , con funzioni coordinate

$$(11.1.1) \quad \phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \text{tali che } \phi_i(U_i) = \mathbb{R}^m, \quad i = 1, 2$$

ed $U_1 \ni p_1$, $U_2 \ni p_2$. Se M_1 ed M_2 sono orientate, richiediamo che la carta locale (U_1, ϕ_1) preservi e la (U_2, ϕ_2) inverta l'orientazione.

Osserviamo che il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\phi_i} & \mathbb{R}^m \\ & \searrow & \swarrow \\ & \{p_i\} & \end{array}$$

descrive U_i come *intorno tubolare* di p_i in M_i .

Definizione XI.1.1. La somma connessa $M_1 \# M_2(\phi_1, \phi_2)$ è lo spazio topologico che si ottiene incollando M_1 ad M_2 mediante l'applicazione

$$(11.1.2) \quad f : U_1 \ni p \rightarrow \phi_2^{-1} \left(\frac{\phi_1(p)}{|\phi_1(p)|^2} \right) \in U_2,$$

con la struttura differenziabile descritta dal seguente Teorema:

Teorema XI.1.2. *Le applicazioni naturali $\iota_i : M_i \setminus \{p_i\} \rightarrow M_1 \# M_2(\phi_1, \phi_2)$, per $i = 1, 2$, sono omeomorfismi con l'immagine ed è possibile definire su $M_1 \# M_2(\phi_1, \phi_2)$ un'unica struttura di varietà differenziabile che le renda diffeomorfismi locali.*

La struttura differenziabile così definita ha le proprietà:

- (1) Se M_1 ed M_2 sono varietà differenziabili connesse della stessa dimensione $m > 1$, la loro somma connessa $M_1 \# M_2(\phi_1, \phi_2)$ è una varietà differenziabile connessa di dimensione m .
- (2) Se M_1 ed M_2 sono orientate, anche $M_1 \# M_2(\phi_1, \phi_2)$ è orientabile ed ammette un'orientazione tale che le inclusioni $M_i \setminus \{p_i\} \hookrightarrow M_1 \# M_2(\phi_1, \phi_2)$ preservino l'orientazione.
- (3) $M_1 \# M_2(\phi_1, \phi_2)$ è compatta se, e soltanto se, entrambe M_1 ed M_2 sono compatte.
- (4) Se M_1 ed M_2 sono connesse, a meno di diffeomorfismi, la $M_1 \# M_2(\phi_1, \phi_2)$ non dipende dalla scelta dei punti $p_i \in M_i$ e delle carte locali (U_i, ϕ_i) .

DIMOSTRAZIONE. Quando ciò non provochi ambiguità, scriveremo nel seguito per semplicità, nel corso della dimostrazione, $M_1 \# M_2$ invece di $M_1 \# M_2(\phi_1, \phi_2)$.

Le $\dot{M}_i = M_i \setminus \{p_i\}$, per $i = 1, 2$, sono due varietà differenziabili di dimensione m . Indichiamo con $\pi : \dot{M}_1 \sqcup \dot{M}_2 \rightarrow M_1 \# M_2$ la proiezione nel quoziente. Osserviamo che per ogni $i = 1, 2$ la composizione

$$i_i : \dot{M}_i \longrightarrow \dot{M}_1 \sqcup \dot{M}_2 \xrightarrow{\pi} M_1 \# M_2,$$

dove la prima freccia è l'inclusione naturale, è aperta ed è un omeomorfismo con l'immagine. In particolare, π è aperta ed è un omeomorfismo locale.

Fissati due atlanti \mathcal{A}_1 di \dot{M}_1 ed \mathcal{A}_2 di \dot{M}_2 , la loro unione disgiunta $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$ è un atlante di $\dot{M}_1 \sqcup \dot{M}_2$. Una carta locale $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ definisce in modo naturale una carta locale in $M_1 \# M_2$. Infatti $\pi(U)$ è un aperto e risulta definito un omeomorfismo $\hat{\phi} : \pi(U) \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ mediante il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\pi|_U} & \pi(U) \\ & \searrow \phi & \swarrow \hat{\phi} \\ & \phi(U) & \end{array}$$

L'atlante $\hat{\mathcal{A}} = \{(\pi(U), \hat{\phi}) \mid (U, \phi) \in \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2\}$ così ottenuto è ancora di classe \mathcal{C}^∞ .

Il fatto che, se M_1 ed M_2 sono orientate, anche $M_1 \# M_2$ sia orientata, è conseguenza del fatto che lo jacobiano dell'inversione¹

$$(11.1.3) \quad \alpha : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \ni y \longrightarrow \frac{y}{|y|^2} \in \mathbb{R}^m$$

ha determinante negativo. Avendo scelto una carta (U_2, ϕ_2) orientata negativamente, la sua composizione con l'inversione dà una mappa che ha la stessa orientazione di (U_1, ϕ_1) .

Per dimostrare che $M_1 \# M_2$, a meno di diffeomorfismi, è indipendente dalla scelta dei punti $p_1 \in M_1$, $p_2 \in M_2$ e delle carte locali (U_1, ϕ_1) , (U_2, ϕ_2) , utilizziamo il Teorema III.11.3 del Capitolo III. Questo dice subito che a meno di diffeomorfismi $M_1 \# M_2$ non dipende dalla scelta di p_1 e p_2 .

¹Per semplicità si può considerare lo Jacobiano in un punto della sfera unitaria $\{|y| = 1\}$. Esso lascia invariati i vettori tangenti alla sfera ed inverte la direzione del vettore normale. Il determinante dello Jacobiano è quindi in tali punti uguale a (-1) ed, essendo $m > 1$, si mantiene negativo sul connesso $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

La tesi è infatti conseguenza dell'unicità dell'intorno tubolare (Teorema IX.3.1, Corollario IX.3.2 e Teorema IX.4.5.) \square

Notazione XI.1.3. Se M_1 ed M_2 sono due varietà differenziabili connesse, indicheremo con $M_1\#M_2$ la loro somma connessa², con la struttura di varietà descritta dal Teorema XI.1.2.

Esempio XI.1.4. Se M è una varietà di dimensione m , allora $M\#S^m$ è diffeomorfa ad M .

Esempio XI.1.5. Se $m > 1$, abbiamo $\mathbb{R}^m\#\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \simeq S^{m-1} \times \mathbb{R}$.

Esempio XI.1.6. In generale, se M è una varietà di dimensione $m > 1$, allora $M\#\mathbb{R}^m \simeq \dot{M} = M \setminus \{p_0\}$, ove p_0 è un punto di M .

Proposizione XI.1.7. Se M_1 ed M_2 sono due varietà connesse di dimensione $m \geq 3$, allora

$$(11.1.4) \quad \pi_1(M_1\#M_2) = \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $p_1 \in M_1$, $p_2 \in M_2$ i centri delle carte locali (U_1, ϕ_1) di M_1 , (U_2, ϕ_2) di M_2 , ed indichiamo con $\varpi : \dot{M}_1 \sqcup \dot{M}_2 \rightarrow M_1\#M_2$ la corrispondente proiezione nel quoziente. Applichiamo il teorema di Seifert-Van Kampen alla coppia di aperti $A_1 = \varpi(\dot{M}_1)$ ed $A_2 = \varpi(\dot{M}_2)$. Poiché $A_1 \cap A_2$ è omeomorfo ad $S^{m-1} \times \mathbb{R}$, abbiamo $\pi_1(A_1 \cap A_2) = 0$. Quindi

$$\pi_1(M_1\#M_2) = \pi_1(M_1 \setminus \{p_1\}) * \pi_1(M_2 \setminus \{p_2\}).$$

Poiché $m \geq 3$, abbiamo³ $\pi_1(\dot{M}_i) \simeq \pi_1(M_i)$ per $i = 1, 2$, e da questa uguaglianza segue la tesi. \square

Proposizione XI.1.8. Indichiamo con T_g una varietà differenziabile di dimensione due omeomorfa alla sfera a g manici e con L_ℓ una varietà differenziabile di dimensione due omeomorfa alla sfera ad ℓ nastri di Moebius. Abbiamo allora

$$(11.1.5) \quad T_{g_1}\#T_{g_2} \simeq T_{g_1+g_2}, \quad T_g\#L_\ell \simeq L_{2g+\ell}, \quad L_{\ell_1}\#L_{\ell_2} \simeq L_{\ell_1+\ell_2}.$$

Teorema XI.1.9. L'insieme \mathfrak{M}_m delle varietà differenziabili compatte, connesse di dimensione m , modulo diffeomorfismi, rispetto all'operazione di somma connessa è un monoide associativo, commutativo e unitario. Abbiamo infatti, per ogni scelta di M, M_1, M_2, M_3 compatte, connesse, di dimensione m ,

$$\begin{aligned} M_1\#M_2 &\simeq M_2\#M_1, \\ (M_1\#M_2)\#M_3 &\simeq M_1\#(M_2\#M_3), \\ M\#S^m &\simeq M. \end{aligned}$$

Le varietà differenziabili compatte, connesse, orientate di dimensione m modulo diffeomorfismi formano un sottomonoido unitario \mathfrak{M}_m^+ di \mathfrak{M}_m .

²per il punto (3), possiamo evitare il riferimento ai punti p_i ed alle carte locali ϕ_i utilizzate per definirla.

³Applichiamo il teorema di Seifert-Van Kampen alla coppia di aperti \dot{M}_i ed U_i . L'aperto U_i è omeomorfo ad \mathbb{R}^m e quindi semplicemente connesso. L'intersezione $\dot{M}_i \cap U_i$ è omotopa ad S^{m-1} e quindi semplicemente connessa. Ne segue che $\pi_1(M_i) \simeq \pi_1(\dot{M}_i)$.

La struttura dei monoidi $\mathfrak{M}_m, \mathfrak{M}_m^+$ non è nota in generale. Nel caso $m = 2$ si sa che, a meno di diffeomorfismi, la struttura topologica determina anche quella differenziabile. Dalla classificazione topologica delle varietà compatte di dimensione due otteniamo allora che

Teorema XI.1.10. *Il monoide \mathfrak{M}_2 è generato dal toro T e dal piano proiettivo $\mathbb{R}P^2$, con la relazione*

$$(11.1.6) \quad T \# \mathbb{R}P^2 \simeq 3 \cdot \mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2.$$

È poi

$$(11.1.7) \quad \mathfrak{M}_2^+ \equiv \mathbb{Z}_+ = \{g \in \mathbb{Z} \mid g \geq 0\},$$

ovvero il genere è l'unico invariante delle superficie compatte connesse orientate.

Infatti, se M è una varietà connessa di dimensione due, $M \# T$ si ottiene incollando ad M un manico, $M \# \mathbb{R}P^2$ incollando ad M un nastro di Moebius.

Esempio XI.1.11. La bottiglia di Klein K^2 è la somma connessa $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ di due copie del piano proiettivo reale.

Calcoliamo $\pi_1(K^2)$ utilizzando il teorema di Seifert-van Kampen. Il piano proiettivo privato di un punto si retrae per deformazione su S^1 . Possiamo scegliere generatori a, b , uno per ciascuna delle due copie di $\pi_1(\mathbb{R}P^2 \setminus \{\text{pt}\})$, in modo che la circonferenza κ , su cui si retrae l'intersezione delle due copie di $\mathbb{R}P^2 \setminus \{\text{pt}\}$, sia omotopa, in ciascuno degli $\mathbb{R}P^2 \setminus \{\text{pt}\}$, al quadrato del generatore. Il sottogruppo di van Kampen di $\mathbb{Z}_a * \mathbb{Z}_b$ è quindi generato da $a^2 b^{-2}$. Otteniamo quindi che $\pi_1(K^2) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, ed il suo abelianizzato è $H_1(K^2) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

La bottiglia di Klein si può anche ottenere identificando i punti del perimetro di un rettangolo mediante la formula $abab^{-1} = 1$. Indicando con c una diagonale del rettangolo, tagliandolo lungo c ed incollando b e b^{-1} , si ottiene K^2 da un triangolo con due lati c ed un lato a^2 , identificando i punti del perimetro mediante la formula $a^2 c^2 = 1$. Questa formula di fornisce immediatamente $\pi_1(K^2) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ ed $H_1(K^2) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

In generale, l'insieme \mathfrak{U}^m degli elementi invertibili di \mathfrak{M}_m è un gruppo. I suoi elementi sono omeomorfi a sfere. Vale infatti la:

Proposizione XI.1.12. *Siano M, N due varietà differenziabili di dimensione m . Se $M \# N$ è omeomorfo ad S^m , allora M ed N sono entrambe omeomorfe ad S^m .*

Osservazione XI.1.13. Una sfera d'omotopia è una varietà differenziabile che ha lo stesso tipo d'omotopia di una sfera. Essa ha quindi gli stessi gruppi di omotopia, di omologia e di coomologia singolare di una sfera.

La congettura di Poincaré generalizzata afferma che una m -sfera di omotopia è omeomorfa alla sfera S^m . Essa è stata risolta nel 1961 da Stephen Smale⁴ nel

⁴Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, Annals of Mathematics, 2nd Ser., 74 (1961), no. 2, 391–406

caso $m \geq 5$, nel 1982 da Michael Hartley Freedman⁵ nel caso $m = 4$ e nel 2003 da Grigori Perelman⁶ nel caso $m = 3$.

Osserviamo che la validità della congettura di Poincaré generalizzata nel caso $m = 2$ è conseguenza del teorema di classificazione delle superficie compatte e nel caso $m = 1$ dal fatto che la circonferenza è l'unica curva connessa e compatta di dimensione 1.

Le sfere di omotopia sono *omeomorfe*, ma possono non essere *diffeomorfe* alle sfere S^m .

L'insieme \mathfrak{A}_m degli elementi invertibili di \mathfrak{M}_m si può identificare al *gruppo delle strutture differenziabili invertibili* sulla sfera topologica di dimensione m . È noto che per $m \neq 4$ tutte le strutture differenziabili sulla sfera di dimensione m sono invertibili, ed \mathfrak{A}_m è finito e Abeliano. Non si sa se esistano sfere esotiche, cioè con una struttura differenziabile diversa da quella standard, in dimensione 4.

Osservazione XI.1.14. Una *sfera di omologia* è una varietà differenziabile che ha gli stessi gruppi di omologia singolare di una sfera. Se una varietà M , di dimensione M , è una sfera di omologia abbiamo cioè

$$H_i(M) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{per } i = 0, m, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In origine la congettura di Poincaré, da lui formulata nel 1900, stabiliva che una sfera di omologia di dimensione tre fosse omeomorfa ad S^3 . Nel 1904 egli stesso trovò un esempio di una sfera di omologia di dimensione tre non semplicemente connessa.

Una sfera di omologia di dimensione 3, non omeomorfa alla sfera S^3 , è lo *spazio dodecaedrale di Poincaré*. Esso può essere definito come uno spazio omogeneo di $\mathbf{SO}(3)$, scegliendo come gruppo di isotropia il *gruppo icosaedrale I* delle rotazioni che trasformano in sé un icosaedro regolare con centro nell'origine. Il gruppo **I** è isomorfo al gruppo alternato \mathbf{A}_5 delle permutazioni di segnatura positiva di cinque elementi.

Ricordiamo che l'icosaedro regolare è il solido platonico con venti facce, che sono triangoli equilateri, dodici vertici, e trenta lati. Il suo duale è il dodecaedro, con dodici facce che sono pentagoni regolari, venti vertici e trenta lati.

Oltre alla sfera S^3 , questa è l'unica sfera d'omologia che ha gruppo fondamentale finito. Il suo gruppo fondamentale è il *gruppo icosaedrale binario 2I*, che ha ordine 120. Indicando con **I** il gruppo delle rotazioni dell'icosaedro regolare, il

⁵The topology of four-dimensional manifolds, Journal of Differential Geometry **17** (3) (1982), 357–453

⁶The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.

arXiv:math.DG/0211159,

Ricci flow with surgery on three-manifolds. arXiv:math.DG/0303109

Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. arXiv:math.DG/0307245

Vedi anche: John W. Morgan, Gang Tian (2006). Ricci Flow and the Poincaré Conjecture. arXiv:math/0607607

gruppo icosaedrale binario si può ottenere dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Spin}(3) & \longrightarrow & \mathbf{SO}(3) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{2I} & \longrightarrow & \mathbf{I}. \end{array}$$

Notiamo che il gruppo $\mathbf{2I}$ ha lo stesso ordine, ma non è isomorfo al gruppo \mathbf{S}_5 delle permutazioni di 5 elementi. Il gruppo \mathbf{A}_5 è un sottogruppo di \mathbf{S}_5 , ma non un suo quoziente, ed un quoziente di $\mathbf{2I}$, ma non un suo sottogruppo.

Lo spazio dodecaedrale di Poincaré è stato recentemente proposto come modello su larga scala dell'Universo⁷.

Esempio XI.1.15. Sia D^m un disco m -dimensionale di una carta coordinata di una varietà M di dimensione m e sia \sim la relazione di equivalenza che identifica punti antipodali di ∂D^m . Il quoziente M/\sim è omeomorfo alla varietà $M\#\mathbb{R}P^m$.

XI.2. Somme connesse di varietà con bordo

Abbiamo definito le varietà differenziabili con bordo nel §III.4 del Capitolo III. Possiamo estendere le definizioni ed i risultati del §XI.1 al caso in cui M_1 ed M_2 siano varietà con bordo ed i punti $p_i \in M_i$ siano *interni* alle varietà. Fissiamo coordinate locali $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ con centro p_i e $\phi_i(U_i) = \mathbb{R}^m$, tali che, se le M_i sono orientate, la ϕ_1 preservi e la ϕ_2 inverta l'orientazione.

Definizione XI.2.1. La somma connessa $M_1\#M_2(\phi_1, \phi_2)$ è lo spazio topologico che si ottiene incollando M_1 ad M_2 mediante l'applicazione

$$(11.2.1) \quad f : U_1 \ni p \rightarrow \phi_2^{-1} \left(\frac{\phi_1(p)}{|\phi_1(p)|^2} \right) \in U_2,$$

con la struttura di varietà differenziabile con bordo descritta dal seguente Teorema XI.2.2.

Teorema XI.2.2. *Le applicazioni naturali $\iota_i : M_i \setminus \{p_i\} \rightarrow M_1\#M_2(\phi_1, \phi_2)$, per $i = 1, 2$, sono omeomorfismi con l'immagine ed è possibile definire su $M_1\#M_2(\phi_1, \phi_2)$ un'unica struttura di varietà differenziabile con bordo che le renda diffeomorfismi locali. Il bordo di $M_1\#M_2(\phi_1, \phi_2)$ è l'unione disgiunta dei bordi di M_1 ed M_2 :*

$$\partial(M_1\#M_2(\phi_1, \phi_2)) = \partial M_1 \sqcup \partial M_2.$$

La struttura differenziabile così definita ha le proprietà:

- (1) *Se M_1 ed M_2 sono varietà differenziabili con bordo connesse della stessa dimensione $m > 1$, la loro somma connessa $M_1\#M_2(\phi_1, \phi_2)$ è una varietà differenziabile con bordo connessa di dimensione m .*

⁷Luminet, Jean-Pierre; Jeff Weeks, Alain Riazuelo, Roland Lehoucq, Jean-Phillipe Uzan (2003-10-09). *Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background.* Nature **425** (6958): 593-595. arXiv:astro-ph/0310253

- (2) Se M_1 ed M_2 sono orientate, anche $M_1 \# M_2(\phi_1, \phi_2)$ è orientabile ed ammette un'orientazione tale che le inclusioni $M_i \setminus \{p_i\} \hookrightarrow M_1 \# M_2(\phi_1, \phi_2)$ preservino l'orientazione.
- (3) $M_1 \# M_2(\phi_1, \phi_2)$ è compatta se, e soltanto se, entrambe M_1 ed M_2 sono compatte.
- (4) Se M_1 ed M_2 sono connesse, a meno di diffeomorfismi, la $M_1 \# M_2(\phi_1, \phi_2)$ non dipende dalla scelta dei punti $p_i \in M_i$ e delle carte locali (U_i, ϕ_i) .

Le considerazioni sono analoghe a quelle svolte nel §XI.1 e saranno quindi omesse.

Notazione XI.2.3. Se M_1 ed M_2 sono due varietà differenziabili con bordo connesse, indicheremo con $M_1 \# M_2$ la loro somma connessa⁸, con la struttura di varietà differenziabile con bordo descritta dal Teorema XI.2.2.

Esempio XI.2.4. Sia D^m il disco chiuso m -dimensionale. Allora $D^m \# D^m$ è diffeomorfo al cilindro $S^{m-1} \times I$.

XI.3. Somme connesse lungo il bordo

Consideriamo ora l'operazione di connettere due varietà con bordo lungo un disco sulla loro frontiera. La *somma connessa lungo il bordo* fa corrispondere a due varietà con bordo una nuova varietà con bordo, il cui bordo è la somma connessa dei bordi delle due varietà.

Siano M_1 ed M_2 due varietà differenziabili, con bordi ∂M_1 e ∂M_2 non vuoti. Fissiamo due punti $p_i \in \partial M_i$, e due carte locali (U_i, ϕ_i) con centri in p_i , $i = 1, 2$, con la proprietà che le $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^m \geq 0\}$ siano diffeomorfismi surgettivi. Se le M_i sono orientate, supporremo che ϕ_1 preservi e ϕ_2 inverta l'orientazione.

Definizione XI.3.1. La somma connessa lungo il bordo di M_1 ed M_2 mediante (ϕ_1, ϕ_2) è lo spazio topologico $M_1 \#_b M_2(\phi_1, \phi_2)$ ottenuto incollando $M_1 \setminus \{p_1\}$ ad $M_2 \setminus \{p_2\}$ mediante l'applicazione⁹

$$f : (U_1) \setminus \{p_1\} \ni p \longrightarrow \phi_2^{-1} \left(\frac{\phi_1(p)}{|\phi_1(p)|^2} \right) \in (U_2) \setminus \{p_2\} \subset M_2 \setminus \{p_2\},$$

con la struttura differenziabile descritta dal Teorema XI.3.2.

Teorema XI.3.2. Si può definire su $M_1 \#_b M_2(\phi_1, \phi_2)$ un'unica struttura di varietà differenziabile con bordo per cui le inclusioni naturali definite dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} M_i \setminus \{p_i\} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (M_1 \setminus \{p_1\}) \sqcup (M_2 \setminus \{p_2\}) \\ & \searrow \quad \quad \quad \swarrow & \\ & & M_1 \#_b M_2(\phi_1, \phi_2) \end{array}$$

⁸per il punto (3), possiamo evitare il riferimento ai punti p_i ed alle carte locali ϕ_i utilizzate per definirla.

⁹Se $\alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ è l'inversione $v \rightarrow v/|v|^2$, identifichiamo tra loro i punti $\phi_1^{-1}(v)$ e $\phi_2^{-1}(\alpha(v))$, al variare di v in \mathbb{R}^m .

siano immersioni differenziabili di varietà con bordo, e risulta

$$\partial(M_1\#_bM_2(\phi_1, \phi_2)) = \partial M_1\#\partial M_2.$$

La struttura differenziabile di $M_1\#_bM_2(\phi_1, \phi_2)$ ha le proprietà:

- (1) Se M_1 ed M_2 sono orientate, anche $M_1\#_bM_2(\phi_1, \phi_2)$ è orientabile ed è possibile definire su di essa un'orientazione in modo tale che le immersioni $M_i \setminus \{p_i\} \hookrightarrow M_1\#_bM_2(\phi_1, \phi_2)$ preservino l'orientazione.
- (2) $M_1\#_bM_2(\phi_1, \phi_2)$ è compatta se e soltanto se entrambe M_1 ed M_2 sono compatte.
- (3) Se i bordi ∂M_1 e ∂M_2 sono connessi, allora, a meno di diffeomorfismi, la struttura differenziabile di $M_1\#_bM_2(\phi_1, \phi_2)$ non dipende dalla scelta dei punti p_i e delle carte locali ϕ_i .

Notazione XI.3.3. Se le M_i hanno bordi connessi, indicheremo semplicemente con $M_1\#_bM_2$, invece che con $M_1\#_bM_2(\phi_1, \phi_2)$, la somma connessa lungo il bordo delle varietà M_1 ed M_2 .

Osservazione XI.3.4. Se M è una varietà con bordo di dimensione m , allora $M\#_bD^m$ è diffeomorfa ad M .

Proposizione XI.3.5. Se M_1, M_2 sono varietà differenziabili connesse con bordi connessi, di dimensione $m \geq 2$, allora $M_1\#_bM_2$ ha il tipo di omotopia del bouquet $M_1 \vee M_2$.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che il bouquet $M_1 \vee M_2$ si ottiene da $M_1 \sqcup M_2$ identificando un punto di M_1 con un punto di M_2 . Sia $M_1\#_bM_2 = M_1\#_bM_2(\phi_1, \phi_2)$ con diffeomorfismi $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}_+^m$. Per verificare la validità dell'enunciato, è sufficiente osservare che gli spazi $U_i \setminus \{p_i\}$ sono contrattili. \square

XI.4. Incollamento lungo una sottovarietà

Possiamo generalizzare l'operazione di somma connessa all'incollamento lungo sottovarietà diffeomorfe. In generale, il risultato dell'incollamento dipenderà dalle classi di isotopia delle due sottovarietà. La costruzione è la seguente.

Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} N)$ un fibrato vettoriale di rango k su una varietà differenziabile N , di dimensione n . Possiamo definire su E una metrica positiva¹⁰, cioè un'applicazione

$$g_E \in \mathcal{C}^\infty(E \oplus_N E, \mathbb{R})$$

con le proprietà

- (1) $g_E(p)$ è bilineare e simmetrica su $E_p \times E_p$ per ogni $p \in N$,
- (2) $g_E(v, v) > 0$ se $p \in N$ e $v \in E_p \setminus \{0\}$.

Utilizzando la metrica g_E , possiamo definire un'involuzione sullo spazio totale E privato della sezione nulla: $\dot{E} = \bigsqcup_{p \in N} (E_p \setminus \{0\})$, mediante

$$\dot{E} = \bigsqcup_{p \in N} (E_p \setminus \{0\}) \ni v \longrightarrow r(v) = \frac{v}{g_E(v, v)} \in \dot{E}.$$

¹⁰Questo è ovvio se ξ è un fibrato banale; nel caso generale si può dimostrare utilizzando una partizione dell'unità subordinata ad un atlante di trivializzazione di ξ .

Identifichiamo N alla sezione nulla $N \times \{0\}$ di E .

Siano poi M_1 ed M_2 due varietà differenziabili della stessa dimensione $m = n + k$ ed $h_i : E \rightarrow M_i$, $i = 1, 2$ due immersioni di E , che siano diffeomorfismi con l'immagine. Definiamo

$$M(h_1, h_2) = (M_1 \setminus h_1(N)) \sqcup (M_2 \setminus h_2(N)) / \sim,$$

ove “ \sim ” è la relazione di equivalenza che identifica i punti

$$h_1(v) \sim h_2\left(\frac{v}{g_E(v, v)}\right), \quad \forall v \in \dot{E}.$$

Teorema XI.4.1. *Le immersioni naturali $M_i \setminus h_i(N) \hookrightarrow M(h_1, h_2)$ ($i = 1, 2$) sono omeomorfismi con le immagini. Esiste un'unica struttura differenziabile su $M(h_1, h_2)$ per cui tali inclusioni siano immersioni differenziabili.*

Se S_1 ed S_2 sono sottovarietà differenziabili proprie di M_1 ed M_2 , rispettivamente, con S_1 ed S_2 diffeomorfe tra loro, il diffeomorfismo tra S_1 ed S_2 induce un diffeomorfismo dei loro intorni tubolari, che ci permette di *incollare M_1 ad M_2 lungo le sottovarietà S_1 ed S_2* , utilizzando la costruzione precedente.

Un caso particolare di questa costruzione è il seguente.

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m ed n un intero positivo minore di m . Consideriamo allora una sottovarietà S di M diffeomorfa ad S^n ed incolliamo S^m ad M lungo $S^n \subset S^m$. Questa operazione si dice *modificazione sferica* o *chirurgia*.

Esempio XI.4.2. Siano ξ_1, ξ_2 due fibrati differenziabili localmente banali con fibra tipica S^n e basi B_{ξ_1}, B_{ξ_2} della stessa dimensione m . Il risultato dell'attaccamento degli spazi totali E_{ξ_1} ed E_{ξ_2} lungo una fibra è allora un fibrato differenziabile localmente banale con fibra S^n e base $B_{\xi_1} \# B_{\xi_2}$.

XI.5. Incollamento lungo sottovarietà del bordo

Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} N)$ un fibrato vettoriale differenziabile di rango k , su una base N di dimensione n , come nel paragrafo precedente.

Sia $m = n+k+1$ e siano M_1 ed M_2 due varietà differenziabili di dimensione m , con bordi ∂M_1 ed ∂M_2 non vuoti. Siano $h_i : E \hookrightarrow \partial M_i$, per $i = 1, 2$, due inclusioni differenziabili dello spazio totale E di ξ nei bordi di M_1 ed M_2 , rispettivamente. Le h_i si possono estendere ad inclusioni differenziabili¹¹ $\tilde{h}_i : E \times \bar{\mathbb{R}}_+ \rightarrow M_i$ di varietà con bordo, in modo tale che le immagini $\tilde{h}_i(E \times \bar{\mathbb{R}}_+)$ siano intorni tubolari di $h_i(N) = N_i$ in M_i ($i = 1, 2$).

XI.6. Attaccamento di manici alla frontiera

L'operazione di *attaccamento di un k -manico*¹² ad una varietà differenziabile M (qui $k < m = \dim M$) con bordo è l'analogo, per le varietà differenziabili, dell'operazione di attaccamento di una k -cella per i complessi cellulari.

¹¹Indichiamo con $\bar{\mathbb{R}}_+$ la semiretta chiusa $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$.

¹²Questa operazione è stata introdotta da STEPHEN SMALE, nell'articolo: *On the structure of manifolds* Amer. J. Math. , **84** (1962) pp. 387-399.

Sia M una varietà di dimensione m , con bordo non vuoto, k un intero con $0 \leq k < m$, ed $f : S^{k-1} \times D^{m-k} \rightarrow \partial M$ un'inclusione differenziabile.

Definizione XI.6.1. Possiamo definire su $M \cup_f D^m$ un'unica struttura di varietà differenziabile con bordo per cui le inclusioni naturali $M \hookrightarrow M \cup_f D^m$ e $D^m \hookrightarrow M \cup_f D^m$ siano inclusioni differenziabili.

Denotiamo con $M \cup_f D^m$ la varietà con bordo ottenuta incollando il disco D^m ad M mediante la f , con la struttura differenziabile che rende l'applicazione naturale $M \sqcup D^m \rightarrow M \cup_f D^m$ differenziabile.

Sia $m = \lambda + \mu$. Scriviamo $x \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^\mu$ come $x = (x_\lambda, x_\mu)$, con $x_\lambda \in \mathbb{R}^\lambda$ ed $x_\mu \in \mathbb{R}^\mu$. Identifichiamo $S^{\lambda-1}$ alla sfera contenuta in $S^{m-1} \subset D^m$ definita da

$$S^{\lambda-1} = \{(x_\lambda, x_\mu) \in D^m \mid x_\mu = 0, |x_\lambda| = 1\}.$$

Per ogni numero reale ϵ , con $0 \leq \epsilon < 1$, l'insieme

$$T_\epsilon = \{x \in D^m \mid |x_\lambda| > \epsilon\}$$

è un intorno tubolare di $S^{\lambda-1}$ in D^m , con proiezione

$$T_\epsilon \ni x = (x_\lambda, x_\mu) \longrightarrow \left(\frac{x_\lambda}{|x_\lambda|}, 0 \right) \in S^{\lambda-1}.$$

Poniamo

$$\dot{T}_\epsilon = T_\epsilon \setminus S^{\lambda-1}.$$

Su \dot{T}_ϵ è definita un'involuzione naturale che preserva le fibre:

$$\alpha_\epsilon(x_\lambda, x_\mu) = \left(\frac{x_\lambda}{|x_\lambda|} \sqrt{1 + \epsilon^2 - |x_\lambda|^2}, x_\mu \frac{\sqrt{|x_\lambda|^2 - \epsilon^2}}{\sqrt{1 - |x_\lambda|^2}} \right)$$

Inoltre, α_ϵ preserva le sfere di dimensione λ di $S^{m-1} = \partial D^m$ che contengono $S^{\lambda-1}$.

Ogni sfera di dimensione λ che contiene $S^{\lambda-1}$ contiene due punti x con $x_\lambda = 0$. Fissiamo un punto $x^0 = (0, x_\mu^0) \in S^{m-1}$ e consideriamo la sfera $S_{x^0}^\lambda$, di dimensione λ , contenuta in S^{m-1} e contenente x^0 ed $S^{\lambda-1}$. Indichiamo con K_{x^0} il suo emisfero chiuso che contiene x^0 ed è delimitato da $S^{\lambda-1}$. Sia κ_{x^0} un disco di dimensione λ , di centro x , contenuto in K_{x^0} . Se $x^0 = (0, x_\mu^0)$, allora¹³

$$\kappa = \{(x_\lambda, x_\mu) \in S^{m-1} \mid x_\mu = tx_\mu^0, t_0 \leq t \leq 1\}.$$

Abbiamo allora

$$\alpha_0(\kappa \setminus \{x^0\}) \cup S^{\lambda-1} = \{x \in S^{m-1} \mid x_\mu = x_\mu^0 \sqrt{1 - t^2}, t_0 \leq t \leq 1\}.$$

Otteniamo perciò il seguente

Lemma XI.6.2. *L'intersezione $K_{x^0} \cap T(t_0^2) = \alpha_0(\kappa \setminus \{x^0\}) \cup S^{\lambda-1}$ è una sottovarietà con bordo di $T(t_0^2)$ ed un collare di $S^{\lambda-1}$ in K_{x^0} . Il suo bordo consiste di $S^{\lambda-1}$ ed $\alpha_0(\partial K)$.*

¹³ $t = 1$ corrisponde al centro di κ e, per ogni $t \in [t_0, 1[$, κ contiene una sfera di dimensione $\lambda - 1$ con $x_\mu = tx_\mu^0$.

Definizione XI.6.3. Sia $h : S^{\lambda-1} \rightarrow \partial M$ un'inclusione differenziabile ed $\tilde{h} : T_0 \rightarrow M$ una sua estensione ed un intorno tubolare di $h(S^{\lambda-1})$ in M . La varietà ottenuta dall'unione disgiunta di $M \setminus h(S^{\lambda-1})$ e di $D^m \setminus S^{\lambda-1}$ identificando il punto $x \in T_0$ con il punto $\tilde{h}(\alpha_0(x)) \in M \setminus h(S^{\lambda-1})$ si dice *ottenuta attaccando ad M un λ -maniglia*. Essa sarà indicata con¹⁴ $M \cup_h H^\lambda$.

La sottovarietà $h(S^{\lambda-1})$ si dice la *sfera d'attaccamento*. Identifichiamo $M \setminus h(S^{\lambda-1})$ e $D^m \setminus S^{\lambda-1}$ alle loro immagini in $M \cup_h H^\lambda$ e chiameremo $D^m \setminus S^{\lambda-1}$ il *manico* ed il disco $D^\mu = \{x \in D^m \mid x_\lambda = 0\}$ il *disco cintura* e la sua frontiera $S^{\mu-1}$ la *sfera cintura*¹⁵.

Osservazione XI.6.4. Se M è orientata e \tilde{h} inverte l'orientazione di M , allora $M \cup_h H^\lambda$ ammette un'orientazione compatibile con quella di M e con l'orientazione standard del disco.

Osservazione XI.6.5. Attaccare un 0-manico significa fare l'unione disgiunta di M e D^m , cioè $M \cup_h H^0 = M \sqcup D^m$.

Osservazione XI.6.6. Siano M_1, M_2 due varietà connesse di dimensione m , con bordi non vuoti e connessi, e fissiamo $p_i \in \partial M_i$, per $i = 1, 2$. Sia $h : S^0 = \{\pm 1\} \rightarrow M_1 \sqcup M_2$ l'applicazione definita da $h(-1) = p_1, h(1) = p_2$. Allora $(M_1 \sqcup M_2) \cup_h H^1 \simeq M_1 \#_b M_2$.

Proposizione XI.6.7. La varietà M ottenuta attaccando un λ -manico ad un disco D^m lungo una sfera $S^{\lambda-1}$ del suo bordo è diffeomorfa a $S^\lambda \times D^\mu$, con $\lambda + \mu = m$.

Osservazione XI.6.8. In particolare, $D^3 \cup H^1 \simeq S^1 \times D^2$ è il toro solido.

¹⁴ H è l'iniziale di *handle*, che significa *manico*, o *maniglia* nella lingua inglese.

¹⁵*belt disc* e *belt sphere*, rispettivamente.

Forme differenziali negli spazi Euclidei

XII.1. Forme differenziali in \mathbb{R}^n

Indichiamo con $\Lambda^q \mathbb{R}^n$ lo spazio vettoriale reale, di dimensione $\binom{n}{q}$, delle forme q -multilineari alternate su \mathbb{R}^n .

Definizione XII.1.1. Sia A un aperto di \mathbb{R}^n . Le applicazioni $\eta \in \mathcal{C}^\infty(A, \Lambda^q \mathbb{R}^n)$ si dicono *forme differenziali alternate, omogenee di grado q e con coefficienti di classe \mathcal{C}^∞ in A* .

Useremo la notazione

$$(12.1.1) \quad \mathcal{Q}^q(A) := \mathcal{C}^\infty(A, \Lambda^q \mathbb{R}^n)$$

Indichiamo con dx^i la forma lineare su \mathbb{R}^n definita da:

$$(12.1.2) \quad dx^i(x) = x^i, \quad \forall x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Le forme:

$$(12.1.3) \quad dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} \quad \text{con} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$$

costituiscono una base di $\Lambda^q \mathbb{R}^n$. Una forma $\eta \in \mathcal{Q}^q(A)$ si scrive in modo unico come:

$$(12.1.4) \quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} \eta_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}, \quad \text{con}$$

$$(12.1.5) \quad \eta_{i_1, \dots, i_q}(x) = \eta(x)(e_{i_1}, \dots, e_{i_q}) \in \mathcal{C}^\infty(A),$$

ove abbiamo indicato con e_1, \dots, e_n i vettori della base canonica di \mathbb{R}^n .

Definizione XII.1.2. L'algebra di Grassmann $\Omega^*(A)$ delle forme alternate di classe \mathcal{C}^∞ su A è la somma diretta

$$\Omega^*(A) = \bigoplus_{q=0}^n \mathcal{Q}^q(A),$$

con il prodotto definito sulle forme omogenee da

$$\begin{aligned} & \eta' \wedge \eta''(x)(v_1, \dots, v_q) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_{q'} \leq q \\ 1 < \sigma_{q'+1} < \dots < \sigma_q \\ \sigma \in \mathcal{S}_q}} \varepsilon(\sigma) \eta'(x)(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_{q'}}) \eta''(x)(v_{\sigma_{q'+1}}, \dots, v_{\sigma_q}) \\ & \forall v_1, \dots, v_q \in \mathbb{R}^n, \quad \eta' \in \mathcal{Q}^{q',(k)}(A), \quad \eta'' \in \mathcal{Q}^{q'',(k)}(A), \quad q' + q'' = q. \end{aligned}$$

XII.2. Pull-back

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$ è una funzione reale di classe \mathcal{C}^∞ , definita sull'aperto A di \mathbb{R}^n , il suo differenziale è l'elemento di $\Omega^1(A)$ definito da:

$$(12.2.1) \quad df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} dx^i.$$

Siano B un aperto di \mathbb{R}^m , A un aperto di \mathbb{R}^n e $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^n) \in \mathcal{C}^\infty(B, A)$.

Definizione XII.2.1. Il *pullback*, o *immagine inversa* di una forma differenziale $\eta \in \Omega^q(A)$, descritta da (12.1.4), è la forma differenziale $\phi^*\eta \in \Omega^q(B)$ definita da:

$$(12.2.2) \quad \phi^*\eta = \sum_{i_1 \dots i_q} \eta_{i_1 \dots i_q}(\phi) d\phi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi^{i_q}.$$

Si verifica immediatamente che il pull-back di forme gode delle proprietà:

Teorema XII.2.2. (1) $\phi^* : \Omega^q(A) \rightarrow \Omega^q(B)$ è un'applicazione \mathbb{R} -lineare.

(2) Se $\eta_1 \in \Omega^{q_1}(A)$ ed $\eta_2 \in \Omega^{q_2}(A)$, allora $\eta_1 \wedge \eta_2 \in \Omega^{q_1+q_2}(A)$ e

$$\phi^*(\eta_1 \wedge \eta_2) = (\phi^*\eta_1) \wedge (\phi^*\eta_2).$$

(3) Se $\psi : D \rightarrow B$ è un'applicazione di classe \mathcal{C}^{k+1} , definita su un aperto D di \mathbb{R}^ℓ , allora

$$(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*.$$

XII.3. Differenziale di una forma

Estendiamo la definizione del differenziale dal caso delle funzioni a quello delle forme differenziali ponendo, per una $\eta \in \Omega^{q,(k+1)}(A)$ descritta dalla (12.1.4):

$$(12.3.1) \quad \begin{aligned} d\eta(x) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} d\eta_{i_1 \dots i_q}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} \frac{\partial \eta_{i_1 \dots i_q}(x)}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}. \end{aligned}$$

Il differenziale delle forme differenziali è caratterizzato dal:

Teorema XII.3.1. Il differenziale è l'unica applicazione \mathbb{R} -lineare

$$d : \Omega^*(A) \longrightarrow \Omega^*(A)$$

che goda delle seguenti proprietà:

(1) Per ogni intero $q \geq 0$, il differenziale definisce un'applicazione \mathbb{R} -lineare:

$$(12.3.2) \quad d : \Omega^q(A) \rightarrow \Omega^{q+1}(A).$$

(2) d coincide con il differenziale definito sulle funzioni nel caso $q = 0$.

(3) Vale la formula del differenziale del prodotto:

$$\begin{aligned} d(\eta_1 \wedge \eta_2) &= d\eta_1 \wedge \eta_2 + (-1)^{q_1} \eta_1 \wedge d\eta_2 \\ &\quad \forall \eta_1 \in \Omega_{k+1}^{q_1}(A), \quad \forall \eta_2 \in \Omega_{k+1}^{q_2}(A) \end{aligned}$$

(4) $d \circ d : \Omega^q(A) \rightarrow \Omega^{q+2}(A)$ è l'applicazione nulla, cioè

$$(12.3.3) \quad d \circ d = d^2 = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Il differenziale definito dalla (12.3.1) soddisfa la (3) per le proprietà del prodotto esterno e la regola di Leibnitz per la derivazione del prodotto di due funzioni. La (12.3.3) è allora conseguenza della:

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0,$$

valida per ogni funzione $f \in \mathcal{C}^2(A, \mathbb{R})$. Viceversa, se valgono le (1), (2), (3), (4) l'espressione del differenziale è data necessariamente dalla (12.3.1). \square

XII.4. Il complesso di de Rham

Per ogni aperto A di \mathbb{R}^n , otteniamo un *complesso di operatori differenziali*:

$$(12.4.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega_{k+n}^0(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_{k+n-1}^1(A) & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \rightarrow & \Omega_{k+n-h}^h(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_{k+n-h-1}^{h+1}(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_{k+n-h-2}^{h+2}(A) \rightarrow \\ & & & & \dots & \xrightarrow{d} & \Omega_k^n(A) \rightarrow 0 \end{array}$$

Definizione XII.4.1. Il complesso (12.4.1) si dice il *complesso di de Rham*¹ sull'aperto A di \mathbb{R}^n .

Poniamo:

$$(12.4.2) \quad \mathcal{Z}^q(A) = \{\eta \in \Omega^q(A) \mid d\eta = 0\} \quad (\text{spazio delle } q\text{-forme chiuse}),$$

$$(12.4.3) \quad \mathcal{B}^q(A) = \{d\eta \mid \eta \in \Omega^{q-1}(A)\} \quad (\text{spazio delle } q\text{-forme esatte}),$$

$$(12.4.4) \quad H^q(A) = \mathcal{Z}^q(A) / \mathcal{B}^q(A) \quad (q\text{-esimo gruppo di coomologia di de Rham}).$$

Se $\alpha \in \mathcal{Z}^q(A)$, indicheremo con $[\alpha]$ la corrispondente classe di coomologia in $H^q(A)$,

Se $q < 0$, oppure $q > n$, porremo $\mathcal{Z}^q(A) = 0$, $\mathcal{B}^q(A) = 0$, $H^q(A) = 0$.

Dalla formula dei differenziali, otteniamo immediatamente il:

Teorema XII.4.2. Siano A un aperto di \mathbb{R}^n , B un aperto di \mathbb{R}^m e $\phi \in \mathcal{C}^\infty(B, A)$. Il pullback commuta con i differenziali:

$$(12.4.5) \quad \phi^*(d\eta) = d\phi^*\eta, \quad \forall \eta \in \Omega^*(A)$$

e definisce quindi, per ogni intero q , un omomorfismo

$$(12.4.6) \quad [\phi^*] : H^q(A) \longrightarrow H^q(B).$$

¹ Georges de Rham, Matematico (Roche, Losanna, 1903 - Losanna 1990). Dal 1932 prof. all'univ. di Losanna e successivamente di Parigi (1943) e Ginevra (1953). Le sue ricerche riguardano soprattutto problemi di natura differenziale e topologica sulle varietà differenziabili. Nel 1931 dimostrò il famoso teorema che identifica i gruppi di coomologia ad invarianti topologici. I suoi risultati hanno aperto nuovi ed elevati settori di ricerca. Il suo lavoro è stato particolarmente importante per lo sviluppo della teoria dei fasci.

Osservazione XII.4.3. Il Teorema XII.4.2 ci dice che la differenziazione è un'operazione invariante rispetto ai cambiamenti di carte locali e ci permetterà perciò di definire le forme differenziali e il differenziale di forme sulle varietà.

Dimostriamo alcuni risultati sui gruppi di coomologia del complesso di de Rham, da cui ricaveremo in particolare il Lemma di Poincaré-Volterra sull'aciclicità locale di (12.4.1).

Lemma XII.4.4. Sia A un aperto di \mathbb{R}^n , I un intervallo aperto di \mathbb{R} e

$$\pi_A : A \times I \ni (x, t) \rightarrow x \in A$$

la proiezione canonica. Allora il pullback di forme induce un isomorfismo lineare

$$(12.4.7) \quad [\pi_A^*] : H^q(A) \longrightarrow H^q(A \times I).$$

In particolare

$$(12.4.8) \quad H^{n+1}(A \times I) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $t_0 \in I$ e consideriamo l'inclusione

$$J_{t_0} : A \ni x \longrightarrow (x, t_0) \in A \times I.$$

Poiché $\pi_A \circ J_{t_0} = \text{id}_A$, abbiamo

$$\text{id}_{H^q(A)} = [(\pi_A \circ J_{t_0})^*] = [J_{t_0}^* \circ \pi_A^*] = [J_{t_0}^*] \circ [\pi_A^*]$$

e quindi $[\pi_A^*]$ è iniettiva.

Resta da dimostrare che $[\pi_A^*]$ è anche surgettiva.

Indichiamo con d_x il differenziale in A e con d quello su $A \times I$. Scriviamo un elemento $\alpha \in \Omega^q(A \times I)$ nella forma

$$\alpha = \alpha' + dt \wedge \alpha'', \quad \text{con } \alpha' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n), \quad \alpha'' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n).$$

Abbiamo allora

$$d\alpha = d_x \alpha + dt \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t} = d_x \alpha' + dt \wedge \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t} - d_x \alpha'' \right).$$

Osserviamo che $\alpha \in \pi_A^*(\Omega^q(A))$ se e soltanto se

$$\alpha'' = 0, \quad \frac{\partial \alpha'}{\partial t} = 0.$$

Se $\alpha \in \mathcal{L}^q(A \times I)$, abbiamo

$$d_x \alpha' = 0, \quad \frac{\partial \alpha'}{\partial t} = d_x \alpha''.$$

Poniamo

$$\beta(x, t) = \int_{t_0}^t \alpha'' dt \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n) \subset \Omega^{q-1}(A \times I).$$

Allora

$$\alpha - d\beta = (\alpha' + dt \wedge \alpha'') - (d_x \beta + dt \wedge \frac{\partial \beta}{\partial t}) = \alpha' - d_x \beta \in \mathcal{L}^q(A \times I) \cap \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n).$$

La forma $\gamma = \alpha' - d_x\beta$ è coomologa ad α e soddisfa le equazioni

$$d_x\gamma = 0, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial t} = 0.$$

In particolare, γ è il pullback mediante π_A^* di un elemento di $\mathcal{L}^q(A)$. La dimostrazione è completa. \square

Ogni elemento $\alpha \in \mathcal{Q}^{n+1}(A \times I) = \mathcal{L}^{n+1}(A \times I)$ è divisibile per dt , risulta cioè

$$\alpha = dt \wedge \alpha'', \quad \text{con } \alpha'' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^n(A)).$$

Allora

$$\beta = \int_{t_0}^t \alpha'' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^n(A)) \subset \mathcal{Q}^n(A \times I)$$

soddisfa l'equazione

$$d\beta = dt \wedge \frac{\partial\beta}{\partial t} = dt \wedge \alpha'' = \alpha.$$

Più in generale abbiamo:

Proposizione XII.4.5. *Siano A un aperto di \mathbb{R}^n e I_1, \dots, I_k intervalli aperti di \mathbb{R} . Allora*

$$H^q(A \times I_1 \times \dots \times I_k) = 0, \quad \forall q > n.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti, per il Lemma XII.4.4, $H^q(A \times I_1 \times \dots \times I_k) \simeq H^q(A \times I_1 \times \dots \times I_{k-1}) \simeq \dots \simeq H^q(A \times I_1) \simeq H^q(A) = \{0\}$. \square

Dalla Proposizione XII.4.5 si ottiene facilmente il

Teorema XII.4.6. *Siano I_1, \dots, I_n intervalli aperti di \mathbb{R} . Allora*

$$(12.4.9) \quad H^q(I_1 \times \dots \times I_n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, \\ \{0\} & \text{se } q \neq 0. \end{cases}$$

In particolare, otteniamo il teorema di Poincaré² e Volterra³ sull'aciclicità locale del complesso di de Rham.

² Jules Henri Poincaré (Nancy, 29 aprile 1854 - Parigi, 17 luglio 1912) è stato un matematico, un fisico teorico e un filosofo naturale francese. Poincaré viene considerato un enciclopedico e in matematica l'ultimo universalista, dal momento che eccelse in tutti i campi della disciplina attivi ai suoi giorni.

Come matematico e fisico, diede molti contributi originali alla matematica pura, alla matematica applicata, alla fisica matematica e alla meccanica celeste. A lui si deve la formulazione della congettura di Poincaré, uno dei più famosi problemi in matematica. Nelle sue ricerche sul problema dei tre corpi, Poincaré fu la prima persona a scoprire un sistema caotico deterministico, ponendo in tal modo le basi della moderna teoria del caos. Viene inoltre considerato come uno dei fondatori della topologia.

Poincaré introdusse il moderno principio di relatività e fu il primo a presentare le trasformazioni di Lorentz nella loro moderna forma simmetrica. Poincaré completò le trasformazioni concernenti la velocità relativistica e le trascrisse in una lettera a Lorentz nel 1905. Ottenne così la perfetta invarianza delle equazioni di Maxwell, un passo importante nella formulazione della teoria della relatività ristretta. Il gruppo di Poincaré usato in fisica e matematica deve a lui il suo nome.

³Vito Volterra (Ancona, 3 maggio 1860 - Roma, 11 ottobre 1940), matematico e fisico italiano. Fu uno dei principali fondatori dell'analisi funzionale e della connessa teoria delle equazioni integrali. Il suo nome noto soprattutto per i suoi contributi alla biologia matematica.

Teorema XII.4.7 (Lemma di Poincaré-Volterra). *Sia $\eta \in \Omega^q(A)$ ($k \geq 1$) una forma differenziale definita su un aperto A di \mathbb{R}^n , che soddisfa*

$$(12.4.10) \quad d\eta = 0$$

in un intorno aperto di un punto p di A . Se $q = 0$, allora f è costante in un intorno di p in A . Se $q > 0$, possiamo trovare un intorno aperto U di p in A ed una forma differenziale $u \in \Omega^{(q-1)}(U)$ tale che:

$$(12.4.11) \quad du = \eta \text{ in } U.$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA XII.4.7. La tesi segue dal Teorema XII.4.6, perché ogni punto $p \in A$ ha in A un intorno aperto della forma $I_1 \times \cdots \times I_n$, con I_1, \dots, I_n intervalli aperti in \mathbb{R} . \square

XII.5. Coomologia di de Rham a supporti compatti

Sia A un aperto di \mathbb{R}^n . Se B è un aperto di A , possiamo definire la restrizione $r_B^A \eta \in \Omega^q(B)$ di una forma $\eta \in \Omega^*(A)$ come il pullback di η rispetto all'inclusione $B \hookrightarrow A$.

Definizione XII.5.1. Il *supporto* di una forma differenziale $\eta \in \Omega^*(A)$ è il complementare del più grande aperto di A su cui la restrizione di η sia nulla.

Indichiamo con $\Omega_0^q(A)$ il sottospazio delle q -forme differenziali alternate, con coefficienti di classe \mathcal{C}^∞ , che hanno supporto compatto in A .

Poiché

$$(12.5.1) \quad \text{supp } d\eta \subset \text{supp } \eta, \quad \forall \eta \in \Omega^*(A),$$

il differenziale di una forma a supporto compatto ha ancora supporto compatto. Otteniamo perciò un sottocomplesso del complesso (12.4.1) restringendoci ai sottospazi $\Omega_0^q(A)$ delle forme con supporto compatto in A .

$$(12.5.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_0^0(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^1(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^2(A) & \longrightarrow & \cdots \\ \cdots & \longrightarrow & \Omega_0^h(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^{h+1}(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^{h+2}(A) & \longrightarrow & \\ & & \cdots & \longrightarrow & \Omega_0^{n-1}(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^n(A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Definizione XII.5.2. Poniamo:

$\mathcal{Z}_0^q(A) = \{\alpha \in \Omega_0^q(A) \mid d\alpha = 0\}$, (spazio delle q -forme chiuse a supporto compatto),

$\mathcal{B}_0^q(A) = \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega_0^{q-1}(A)\}$, (spazio delle q -forme esatte a supporto compatto),

$H_0^q(A) = \mathcal{Z}_0^q(A) / \mathcal{B}_0^q(A)$, (q -esimo gruppo di coomologia di de Rham a supporti compatti).

Osserviamo che $H_0^0(A) = 0$ se A è un aperto di \mathbb{R}^n con $n > 0$, perché $\mathcal{Z}_0^0(A) = 0$, in quanto i suoi elementi sono funzioni localmente costanti con supporto compatto in A .

Sia A un qualsiasi aperto di \mathbb{R}^n , I un intervallo aperto di \mathbb{R} e $\pi_A : A \times I \ni (x, t) \rightarrow x \in A$ la proiezione su A . Se $\eta \in \Omega_0^q(A \times I)$, scriviamo

$$(12.5.3) \quad \eta = \eta' + dt \wedge \eta'', \quad \text{con } \eta' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n), \quad \eta'' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n).$$

e definiamo

$$(12.5.4) \quad \pi_{A_*}(\eta) = \int_I \eta'' dt.$$

Definizione XII.5.3. La forma $\pi_{A_*}(\eta) \in \Omega_0^{q-1}(A)$ si dice ottenuta da $\eta \in \Omega_0^q(A \times I)$ mediante *integrazione sulla fibra*.

Lemma XII.5.4. Siano A un aperto di \mathbb{R}^n ed I un intervallo aperto di \mathbb{R} . L'integrazione sulla fibra anticommuta con i differenziali:

$$(12.5.5) \quad d_x(\pi_{A_*}(\eta)) = -\pi_{A_*}(d\eta), \quad \forall \eta \in \Omega_0(A \times I).$$

DIMOSTRAZIONE. Con η definita dalla (12.5.3), abbiamo

$$d\eta = d_x \eta' + dt \wedge \left(\frac{\partial \eta'}{\partial t} - d_x \eta'' \right).$$

Quindi

$$\pi_{A_*}(d\eta) = \int_I \left(\frac{\partial \eta'}{\partial t} - d_x \eta'' \right) dt = - \int_I d_x \eta'' dt = -d_x \int_I \eta'' dt = -d_x \pi_{A_*}(\eta)$$

perché $\int_I (\partial \eta' / \partial t) dt = 0$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale. \square

In particolare, per ogni intero non negativo q l'integrazione sulla fibra definisce un omomorfismo

$$(12.5.6) \quad [\pi_{A_*}] : H_0^{q+1}(A \times I) \longrightarrow H_0^q(A).$$

Vale il

Lemma XII.5.5. Siano A un qualsiasi aperto di \mathbb{R}^n ed I un intervallo aperto di \mathbb{R} . Allora per ogni intero non negativo q , la (12.5.6) è un isomorfismo.

Utilizzeremo, nella dimostrazione, il seguente

Lemma XII.5.6. Sia I un intervallo aperto di \mathbb{R} e $t_0 = \inf I$. Se $f(t)dt \in \Omega_0^1(I)$, la

$$(12.5.7) \quad u(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

è l'unica soluzione dell'equazione $du = f(t)dt$ che si annulli in un intorno destro di t_0 . La u ha supporto compatto se, e soltanto se,

$$(12.5.8) \quad \int_I f(t) dt = 0.$$

La (12.5.8) è condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione $u' = f$ ammetta in I una soluzione a supporto compatto. \square

Osservazione XII.5.7. Per il Lemma XII.5.5 l'applicazione

$$\mathcal{Z}_0^1(I) = \Omega_0^1(I) \ni f(t)dt \longrightarrow \int_I f(t)dt \in \mathbb{R}$$

è un funzionale lineare non nullo il cui nucleo è $\mathcal{B}_0^1(I)$. È perciò $H_0^1(I) \simeq \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA XII.5.5. Fissiamo una qualsiasi funzione $\chi(t) \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$, con

$$\int_I \chi(t)dt = 1,$$

e definiamo, per ogni intero non negativo q , l'applicazione

$$(12.5.9) \quad \chi^\sharp : \Omega_0^q(A) \ni \alpha \rightarrow \chi(t) \cdot dt \wedge \pi_{A^*}^* \alpha \in \Omega_0^{q+1}(A \times \mathbb{R}).$$

Abbiamo

$$(12.5.10) \quad \pi_{A^*}(\chi^\sharp \alpha) = \alpha, \quad d(\chi^\sharp \alpha) = \chi^\sharp(d\alpha), \quad \forall \alpha \in \Omega_0^q(A).$$

Quindi χ^\sharp definisce per passaggio al quoziente un omomorfismo

$$[\chi^\sharp] : H_0^q(A) \longrightarrow H_0^{q+1}(A \times I).$$

Per (12.5.10) abbiamo

$$\text{id}_{H_0^q(A)} = [(\pi_{A^*} \circ \chi^\sharp)] = [\pi_{A^*}] \circ [\chi^\sharp],$$

Da cui segue subito immediatamente che la $[\pi_{A^*}]$ è surgettiva. Resta da dimostrarne l'iniettività.

Sia $q \geq 1$ ed $\eta = \eta' + dt \wedge \eta'' \in \mathcal{Z}_0^q(A \times \mathbb{R})$, con $\eta' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n)$, $\eta'' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n)$. È

$$d_x \eta' = 0, \quad \frac{\partial \eta'}{\partial t} = d_x \eta''.$$

Osserviamo, in particolare, che, se $\eta'' = 0$, allora $\eta = 0$. Infatti in questo caso η' , essendo indipendente da t ed a supporto compatto, è nulla.

Supponiamo vi sia una forma $\alpha \in \Omega_0^{q-2}(A)$ tale che

$$d\alpha = \pi_{A^*} \eta = \int_I \eta'' dt.$$

Sia

$$\beta = \eta - \chi^\sharp(d\alpha) = \eta - d(\chi^\sharp \alpha).$$

È $[\beta] = [\eta]$ e, per la (12.5.10),

$$\pi_{A^*} \beta = 0.$$

Questo significa che, per

$$\beta = \beta' + dt \wedge \beta'', \quad \text{con} \quad \beta' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n), \quad \beta'' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n),$$

risulta

$$\int_I \beta'' dt = 0.$$

Perciò, se $t_0 = \inf I$,

$$\gamma(x, t) = \int_{t_0}^t \beta''(x, s) ds$$

definisce una forma in $\mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1}\mathbb{R}^n) \subset \Omega_0^{q-1}(A \times I)$ ed abbiamo

$$d\gamma = d_x\gamma + dt \wedge \frac{\partial\gamma}{\partial t} = d_x\gamma + dt \wedge \beta''.$$

Allora

$$\zeta = \beta - d\gamma \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^q\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{Z}_0^q(A \times I)$$

perciò, per quanto osservato in precedenza, $\zeta = 0$ e quindi $\beta = d\gamma$. È dunque $[\eta] = [\beta] = 0$. La dimostrazione è completa. \square

Otteniamo quindi

Proposizione XII.5.8. *Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e siano I_1, \dots, I_k intervalli aperti di \mathbb{R} . Allora, per ogni intero $q \geq 0$,*

$$(12.5.11) \quad H_0^{q+k}(A \times I_1 \times \dots \times I_k) \simeq H_0^q(A).$$

Dalla Proposizione XII.5.8 e dall'Osservazione XII.5.7 otteniamo il

Teorema XII.5.9. *Siano I_1, \dots, I_n intervalli aperti di \mathbb{R} . Allora*

$$(12.5.12) \quad H_0^q(I_1 \times \dots \times I_n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = n, \\ 0 & \text{se } q \neq n. \end{cases}$$

Se $\alpha \in \Omega_0^n(I_1 \times \dots \times I_n)$, allora $\alpha \in \mathcal{B}_0^n(I_1 \times \dots \times I_n)$ se, e soltanto se,

$$(12.5.13) \quad \int_{I_1 \times \dots \times I_n} \alpha = 0.$$

XII.6. Il grado di un'applicazione propria di \mathbb{R}^n in sé

Siano A, B aperti di \mathbb{R}^n ed $f : A \rightarrow B$ un'applicazione propria⁴ di classe \mathcal{C}^∞ . Poiché f è propria, il pullback di una forma a supporto compatto in A ha supporto compatto in B ed otteniamo quindi un'applicazione

$$f^* : \Omega_0^q(B) \rightarrow \Omega_0^q(A)$$

che commuta con in differenziale e definisce perciò, per passaggio al quoziente, un'applicazione

$$(12.6.1) \quad [f^*] : H_0^q(B) \rightarrow H_0^q(A).$$

Identifichiamo il gruppo di coomologia $H_0^n(\mathbb{R}^n)$ con \mathbb{R} mediante il quoziente dell'applicazione

$$(12.6.2) \quad \mathcal{Z}_0^n(\mathbb{R}^n) \ni \alpha \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \alpha \in \mathbb{R}.$$

⁴ Un'applicazione continua $\phi : X \rightarrow Y$ tra due spazi topologici X, Y si dice propria se l'immagine inversa $\phi^{-1}(K)$ di ogni compatto K di Y è un compatto di X . Ciò equivale al fatto che f sia continua, chiusa e che $\phi^{-1}(y)$ sia compatto in X per ogni punto y di Y .

Se f è un'applicazione propria differenziabile di \mathbb{R}^n in sé, la $[f^*]$ definisce un'applicazione lineare di \mathbb{R} in sé, quindi della forma $t \rightarrow c \cdot t$ con $c \in \mathbb{R}$.

Definizione XII.6.1. Si dice *grado* di un'applicazione propria differenziabile di \mathbb{R}^n in sé, e si indica con $\deg(f)$, il numero per cui risulta

$$(12.6.3) \quad [f^*][\alpha] = (\deg(f)) \cdot [\alpha], \quad \forall [\alpha] \in H_0^n(\mathbb{R}^n).$$

Definizione XII.6.2. Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ un'applicazione propria di classe \mathcal{C}^∞ . Se $y \in \mathbb{R}^n$ è un valore regolare di f , definiamo il *grado di f in y* come l'intero

$$(12.6.4) \quad \deg_y f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}(\det df(x)).$$

Vale il

Teorema XII.6.3. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile propria ed $y \in \mathbb{R}^n$ un valore regolare di f . Allora

$$(12.6.5) \quad \deg_y f = \deg(f) \in \mathbb{Z}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus CV(f),$$

$$(12.6.6) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha = \deg(f) \int_{\mathbb{R}^n} \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathcal{Q}_0^n(\mathbb{R}^n).$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente dimostrare che, dato un qualsiasi valore regolare $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus CV(f)$, risulta

$$(12.6.7) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha = (\deg_{y_0} f) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathcal{Q}_0^n(\mathbb{R}^n).$$

L'insieme $f^{-1}(y_0)$ è finito, perché è compatto e consiste di punti isolati. Sia $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_k\}$. Per il teorema dell'applicazione inversa, possiamo trovare un intorno aperto connesso V di Y tale che $f^{-1}(V)$ sia unione disgiunta di aperti U_1, \dots, U_k , con $x_j \in U_j$ per $j = 1, \dots, k$ e la restrizione di f ad U_j sia un diffeomorfismo di U_j su V . Fissiamo una forma $\alpha_0 \in \mathcal{Q}_0^n(V)$, con

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha_0 = \int_V \alpha_0 = 1.$$

Se $\alpha \in \mathcal{Q}_0^n(\mathbb{R}^n)$, la forma

$$\beta = \alpha - \left(\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \right) \cdot \alpha_0$$

soddisfa

$$\int_{\mathbb{R}^n} \beta = 0,$$

quindi, per il Teorema XII.5.9, è $\beta = du$ per qualche $u \in \mathcal{Q}_0^{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha &= \int_{\mathbb{R}^n} \beta + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \right) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} df^* u + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \right) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0 \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \right) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0. \end{aligned}$$

Basterà quindi dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0 = \deg_{y_0} f.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0 &= \sum_{j=1}^k \int_{U_j} f^* \alpha_0 \\ &= \sum_{j=1}^k \text{sign}(\det df(x_j)) \int_{\mathbb{R}^n} \alpha_0 = \deg_{y_0} f, \end{aligned}$$

per le formule di cambiamento di variabile degli integrali multipli. \square

Esempio XII.6.4. Per ogni intero positivo n l'applicazione $f_n : \mathbb{R} \ni t \rightarrow t^n \in \mathbb{R}$ è propria. Osserviamo che 1 è un valore regolare di f_n , che viene assunto nel solo punto 1 se n è dispari, nei punti ± 1 se 1 è pari. Poiché $\frac{d}{dt} f_n(t) = nt^{n-1}$, il grado di f_n è 1 se n è dispari, 0 se n è pari.

Più in generale, si può verificare che una $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è propria se e soltanto se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \pm\infty$. Il grado di f è 0 se f ha segno costante al di fuori di un intervallo limitato, 1 se $tf(t)$ è positiva e -1 se $tf(t)$ è negativa fuori da un intervallo limitato.

Esempio XII.6.5. Per ogni intero positivo n , l'applicazione

$$f_n : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \ni z \rightarrow z^n \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$$

è propria ed 1 è un suo valore regolare, immagine delle n radici n -esime dell'unità. Si verifica facilmente che lo Jacobiano di f_n ha determinante positivo in tutti i punti $z \neq 0$ e quindi il grado di $f_n(z) = z^n$ è n .

Per il Teorema grande di Picard, una funzioni intera $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ è propria se e soltanto se è un polinomio di grado positivo. Se $f \in \mathbb{C}[z]$, il grado dell'applicazione $z \rightarrow f(z)$ da esso definita è uguale al suo grado come polinomio. Infatti i valori regolari w di f sono quelli per cui l'equazione $f(z) = w$ ha un numero di radici distinte uguale al grado di f e in ciascuna di esse il determinante dello Jacobiano della corrispondente applicazione in \mathbb{R}^2 è positivo.

Esempio XII.6.6. Calcoliamo il grado dell'applicazione $f : \mathbb{C} \ni z \rightarrow z^3 - \bar{z} \in \mathbb{C}$. Si verifica facilmente che f è propria e che 0 è un valore regolare di f . Abbiamo

$$f^{-1}(0) = \{0, \pm 1, \pm i\}.$$

Il differenziale di f è $df = 3z^2 dz - d\bar{z}$. Abbiamo, in forma matriciale

$$df(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad df(\pm 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad df(\pm i) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Il grado è quindi $(-1) + 1 + 1 + 1 + 1 = 3$. Osserviamo che $df(z)$ ha determinante positivo se z è sufficientemente grande. Come conseguenza, esiste una costante $c > 0$ tale che $f^{-1}(w)$ contenga esattamente tre elementi se $|w| > c$.

XII.7. Orientazione e sottovarietà di \mathbb{R}^n .

Sia M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$. Un atlante \mathcal{A} di classe \mathcal{C}^k si dice *orientato* se i determinanti degli jacobiani delle sue funzioni di transizione sono positivi. Diremo che due atlanti orientati \mathcal{A}_1 ed \mathcal{A}_2 sono compatibili se la loro unione è ancora un atlante orientato. Una varietà differenziabile che ammetta un atlante orientato si dice *orientabile*. La relazione di compatibilità è allora una relazione di equivalenza tra gli atlanti orientati su M che ne definiscono la struttura differenziabile. Se M è connessa e orientabile, ci sono esattamente due classi di equivalenza di atlanti orientati su M . La scelta di una delle due classi è una *orientazione* della varietà M . Nel caso di una varietà non connessa, un'orientazione di M sarà la scelta di una particolare orientazione su ciascuna delle sue componenti connesse.

Osservazione XII.7.1. Non tutte le varietà sono orientabili. Ad esempio gli spazi proiettivi reali $\mathbb{R}P^n$ sono orientabili se n è dispari, ma non se n è pari.

Consideriamo ora in particolare l'orientabilità di sottovarietà di \mathbb{R}^n . Ricordiamo che una sottovarietà localmente chiusa di \mathbb{R}^n , di classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) e di dimensione m , è un sottoinsieme S di \mathbb{R}^n tale che, per ogni punto $p \in S$, si possano trovare un intorno aperto U di p in \mathbb{R}^n ed $n - m$ funzioni di classe \mathcal{C}^k

$$f_i : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = m + 1, \dots, n$$

tali che

$$(12.7.1) \quad \begin{cases} S \cap U = \{x \in U \mid f_i(x) = 0 \quad i = m + 1, \dots, n\} \\ df_{m+1}(x) \wedge \dots \wedge df_n(x) \neq 0, \quad \forall x \in U. \end{cases}$$

Una *carta locale* su S è una *parametrizzazione*

$$(12.7.2) \quad \mathbb{R}^m \supset B^{\text{aperto}} \xrightarrow{\mathbf{r}} S \subset \mathbb{R}^n$$

di classe \mathcal{C}^k , cioè un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^k , definita su un aperto B di \mathbb{R}^m , a valori in \mathbb{R}^n , *non singolare*, cioè con Jacobiano di rango massimo m in ogni punto di B , e la cui immagine $\mathbf{r}(B)$ sia contenuta in S . L'esistenza di un atlante ottenuto mediante parametrizzazioni è assicurata dal teorema delle funzioni implicite.

La scelta delle funzioni f_{m+1}, \dots, f_n determina un'orientazione su $S \cap U$: una parametrizzazione (12.7.2) con $\mathbf{r}(B) \subset S \cap U$ sarà una carta ammissibile se

$$\det \left(\nabla f_{m+1}(\mathbf{r}), \dots, \nabla f_n(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^m} \right) > 0.$$

Torniamo al caso generale. Sia M una varietà di classe \mathcal{C}^k con $k \geq 1$ e sia D un aperto di M . È allora possibile definire un'applicazione continua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ che assuma valori negativi su D e positivi su $M \setminus \bar{D}$. Infatti M è uno spazio topologico regolare e a base numerabile e dunque metrizzabile. Se d è una distanza

che definisce la topologia di M , e bD è la frontiera di D , basterà porre

$$f(x) = \begin{cases} -d(x, bD) & \text{se } x \in \bar{D} \\ d(x, bD) & \text{se } x \in M - D. \end{cases}$$

Diciamo che D è regolare di classe \mathcal{C}^k se è possibile scegliere una tale funzione f in modo che sia di classe \mathcal{C}^k in un intorno U di bD in M e non abbia punti critici su bD ; diciamo allora che la f definisce D . Se M è orientata, possiamo definire sulla frontiera di un suo aperto D di classe \mathcal{C}^k una struttura di varietà orientata di dimensione $n - 1$. Se f è una funzione che definisce D , costruiamo un atlante orientato su bD nel modo seguente: ogni punto p di bD ammette un intorno coordinato (U, ϕ) , compatibile con l'orientazione di M , della forma

$$\phi = (f, \phi^2, \dots, \phi^n).$$

Considereremo allora la

$$(bD \cap U, (\phi^2, \dots, \phi^n))$$

come una carta dell'atlante che definisce l'orientazione di bD . La frontiera di D , pensata come varietà orientata nel modo che abbiamo precisato, si indica con ∂D e si dice il bordo o la frontiera orientata di D .

Questa nozione è molto importante per la teoria dell'integrazione delle forme differenziali.

XII.8. Integrazione sulle sottovarietà e formule di Stokes

In questo paragrafo, dati un aperto A di \mathbb{R}^n e due interi non negativi h, q , indicheremo con $\mathcal{Q}^{q,(h)}(A)$ lo spazio $\mathcal{C}^h(A, \Lambda^q \mathbb{R}^n)$ delle forme differenziali alternate di grado q , con coefficienti differenziabili di classe \mathcal{C}^h in A .

Sia A un dominio di \mathbb{R}^n . Una n -forma continua $\eta \in \mathcal{Q}^{n,(0)}(A)$ ha l'espressione

$$\eta = \eta_{1,\dots,n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

ove $\eta_{1,\dots,n}$ è una funzione reale, continua in A . Se D è un sottoinsieme misurabile di A ed $\eta_{1,\dots,n}$ è integrabile su D , possiamo definire

$$\int_D \eta = \int_D \eta_{1,\dots,n} dx.$$

Siano B un aperto di \mathbb{R}^q , A un aperto di \mathbb{R}^n ed $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^1(B, A)$ un'inclusione differenziabile. La $\mathbf{r}(B)$ è una sottovarietà parametrica di $A \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione q . Se $\eta \in \mathcal{Q}^{q,(0)}(A)$, il suo pull-back $\mathbf{r}^* \eta$ è una q -forma continua su B . Se D è un dominio misurabile di B , e $\text{supp}(\mathbf{r}^* \eta) \cap \bar{D}$ un compatto contenuto in B , possiamo integrare su D la forma $\mathbf{r}^* \eta$, e porre:

$$\int_{\mathbf{r}(D)} \eta = \int_D \mathbf{r}^* \eta.$$

La formula di cambiamento di variabili negli integrali multipli ci dice che un cambiamento di parametrizzazione di $\mathbf{r}(D)$ che non ne cambi l'orientazione, ottenuto

cioè mediante un diffeomorfismo

$$z : B \rightarrow B' \quad \text{tra aperti } B', B \subset \mathbb{R}^q \quad \text{con} \quad \det \left(\frac{\partial z^i}{\partial y^j} \right)_{1 \leq i, j \leq q} > 0$$

non cambia il valore dell'integrale :

$$\int_{z(D)} (\mathbf{r} \circ z^{-1})^* \eta = \int_D \mathbf{r}^* \eta.$$

Possiamo quindi integrare una q -forma su sottoinsiemi compatti di sottovarietà orientate di dimensione q , usando l'additività dell'integrale e riducendoci, per partizione dell'unità, a considerare soltanto il caso di varietà parametriche (carte locali).

Riconsideriamo ora il concetto di *bordo* di un dominio di \mathbb{R}^n . Supponiamo che D sia un aperto relativamente compatto di \mathbb{R}^n . Sia d la distanza euclidea in \mathbb{R}^n e consideriamo la funzione continua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ negativa in D e positiva su $\mathbb{R}^n - \bar{D}$:

$$f(x) = \begin{cases} -d(x, bD) & \text{se } x \in \bar{D} \\ d(x, bD) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n - D. \end{cases}$$

Allora bD è di classe \mathcal{C}^k con $k \geq 1$ in un punto $p \in bD$ se e soltanto se la funzione f così definita è di classe \mathcal{C}^k in un intorno di p e $\nabla f(p) \neq 0$.

Se bD è di classe \mathcal{C}^k in un punto p , per il teorema delle funzioni implicite potremo trovare un intorno U di p in \mathbb{R}^n tale che $bD \cap U$ sia una sottovarietà chiusa di classe \mathcal{C}^k e di dimensione $n - 1$ dell'aperto U . L'orientazione di ∂D è definita dalle rappresentazioni parametriche

$$\mathbf{r} : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow U$$

con $\mathbf{r}(V) = bD \cap U' \subset U$ che soddisfano la condizione:

$$\det \left(\nabla f(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^{n-1}} \right) > 0.$$

Se la frontiera di un un aperto relativamente compatto D è differenziabile in tutti i punti, indichiamo con ∂D la sua frontiera come sottovarietà differenziabile orientata di dimensione $n - 1$, con l'orientazione definita nel modo precisato sopra.

Teorema XII.8.1 (Formula di Green). *Sia D un aperto relativamente compatto con frontiera differenziabile e sia $\eta \in \mathcal{Q}^{n-1, (1)}(A)$ una forma differenziale definita in un intorno aperto A di \bar{D} . Allora*

$$(12.8.1) \quad \int_{\partial D} \eta = \int_D d\eta.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia A un intorno aperto di \bar{D} ed $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di A . Fissiamo una partizione dell'unità $\{\chi_i\}$ di classe \mathcal{C}^∞ , subordinata ad $\{U_i\}$. Se $\eta \in \mathcal{Q}_1^{n-1}(A)$, per l'additività dell'integrale e del differenziale, è sufficiente dimostrare la (12.8.1) per ciascuna delle forme $\eta_i = \chi_i \cdot \eta$.

Basterà quindi dimostrare che, per ogni punto $x_0 \in A$, esiste un intorno aperto U_{x_0} di x_0 in A tale che la (12.8.1) sia verificata se η ha supporto contenuto in U_{x_0} .

Se η ha supporto compatto contenuto in D , entrambi i termini della (12.8.1) sono nulli. In questo caso infatti il secondo membro è un integrale su un compatto $[-R, R]^n \supset D$. Per il teorema di Fubini, la verifica della formula si riduce all'integrazione per parti per funzioni di una variabile reale.

Sia $x_0 \in \partial D$. Per il teorema delle funzioni implicite, esiste un intorno U di x_0 in cui sono definite coordinate $y = y(x)$ con

$$U = \{|y^h| < 1 \mid 1 \leq h \leq n\},$$

$$D \cap U = \{-1 < y^1 < 0, |y^h| < 1 \text{ per } 2 \leq h \leq n\}.$$

Se η ha supporto contenuto in U , Abbiamo allora

$$\int_D d\eta = \int_{y^{-1}(D \cap U)} y^*(d\eta).$$

Scriviamo

$$\eta = \sum_{h=1}^n (-1)^h \eta_h dy^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy^h} \wedge \cdots \wedge dy^n, \quad \text{con } \eta_h \in \mathcal{C}_0^\infty(y^{-1}(U)).$$

Allora

$$d\eta = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \eta_h}{\partial y^h} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_D d\eta &= \int_{D \cap U} d\eta = \int_{y^{-1}(D \cap U)} y^*(d\eta) = \int_{y^{-1}(D \cap U)} dy^* \eta \\ &= \iint_{[-1,1]^{n-1}} dy^2 \cdots dy^n \int_{-1}^0 \frac{\partial \eta_1}{\partial y^1} dy^1 \\ &\quad + \sum_{h=2}^n \int_{-1}^0 dy^1 \iint_{[-1,1]^{n-1}} \frac{\partial \eta_h}{\partial y^h} dy^2 \cdots dy^n \\ &= \iint_{[-1,1]^{n-1}} \eta_1(0, y^2, \dots, y^n) dy^2 \cdots dy^n = \int_{\partial D} \eta, \end{aligned}$$

perché

$$\int_{-1}^0 \frac{\partial \eta_1}{\partial y^1} dy^1 = \eta_1^{(i)}(0, y^2, \dots, y^n), \quad \int_{-1}^1 \frac{\partial \eta_h}{\partial y^h} dy^h = 0 \quad \text{per } 2 \leq h \leq n.$$

□

Sia ora S una sottovarietà differenziabile orientata di dimensione q e di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, di un aperto A di \mathbb{R}^n . Ciò significa che, per ogni punto $p \in S$, possiamo trovare un intorno U_p di p ed $n - q$ funzioni differenziabili f_i per $i = q + 1, \dots, n$ definite in U_p e tali che :

$$\begin{cases} S \cap U_p = \{x \in U_p \mid f_i(x) = 0, \forall i = q + 1, \dots, n\}, \\ df_{q+1}(x) \wedge \dots \wedge df_n(x) \neq 0, \quad \forall x \in S \cap U_p. \end{cases}$$

e inoltre l'orientazione di S è definita dall'atlante in cui sono carte ammissibili in $S \cap U_p$ le parametrizzazioni :

$$\mathbf{r} : V \subset \mathbb{R}^q \rightarrow S \cap U_p \subset \mathbb{R}^n$$

per cui

$$\det \left(\nabla f_{q+1}(\mathbf{r}), \dots, \nabla f_n(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^q} \right) > 0.$$

Dato un aperto relativamente compatto D di S , diremo che la sua frontiera è di classe \mathcal{C}^k se possiamo trovare una funzione ϕ di classe \mathcal{C}^k con :

$$\begin{cases} D = \{x \in S \mid \phi(x) < 0\} \\ d\phi(x) \wedge df_{q+1}(x) \wedge \dots \wedge df_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in bD, \end{cases}$$

dove bD è la frontiera di D in S e le f_{q+1}, \dots, f_n definiscono l'orientazione di S in un intorno x . Su bD consideriamo allora l'orientazione definita dalle funzioni $f_{q+1}, \dots, f_n, \phi$. La sottovarietà bD , con questa orientazione, si dice il *bordo* di D e si indica con ∂D . Otteniamo allora, per la definizione di integrale di una q -forma su una sottovarietà orientata q -dimensionale e la formula di Green:

Teorema XII.8.2 (Formula di Stokes). *Sia D un dominio relativamente compatto con frontiera di classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) di una sottovarietà orientata S di dimensione q di \mathbb{R}^n (con $q \geq 1$). Sia $\eta \in \Omega_1^{q-1}(U)$ per un intorno U di \bar{D} in \mathbb{R}^n . Allora:*

$$\int_{\partial D} \eta = \int_D d\eta.$$

Osservazione XII.8.3. Le formule di Green e di Stokes si estendono al caso in cui la frontiera dell'aperto relativamente compatto D sia di classe \mathcal{C}^1 a tratti, cioè D si possa ottenere mediante unioni e intersezioni finite di aperti con frontiera regolare di classe \mathcal{C}^1 . In questo caso ∂D risulta un'unione finita di sottoinsiemi chiusi di sottovarietà orientate, due a due senza punti interni comuni e l'integrale sulla frontiera deve intendersi come la somma finita degli integrali effettuati su ciascuno di tali sottoinsiemi.

Osservazione XII.8.4. Concludiamo con alcune osservazioni che collegano le formule di Green-Stokes al lemma di Poincaré-Volterra. Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e sia $\eta \in \Omega_k^q(A)$, ($k, q \geq 1$) con

$$d\eta = 0 \quad \text{in } A.$$

Una tale forma si dice *chiusa*. Allora:

(i) L'integrale della η su sottovarietà compatte di A di dimensione q è invariante per omotopia e la sua definizione si può estendere fino a definire applicazioni :

$$\pi(S^q, A) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \pi_\ell(D^q, S^{q-1}; A) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ciò dipende dal fatto che le applicazioni continue $S^n \rightarrow A$ si possono approssimare mediante applicazioni di classe \mathcal{C}^∞ e queste, per il lemma di Sard, hanno luogo di valori critici di misura q -dimensionale nulla.

(ii) Condizione necessaria e sufficiente affinché si possa trovare una forma $u \in \Omega_{k+1}^{q-1}(A)$ tale che

$$du = \eta \text{ in } A$$

(in questo caso diciamo che η è *esatta* in A) è che l'integrale di η su ogni sottovarietà compatta orientata di dimensione q di A sia 0.

Osservazione XII.8.5. Sia $A = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Consideriamo su A la forma chiusa

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Essa non è esatta in quanto il suo integrale su una qualsiasi circonferenza

$$[0, 2\pi] \ni t \rightarrow {}^t(R \cos t, R \sin t) \in A$$

($R > 0$) è uguale a 2π . L'integrale della forma $d\theta$ su un laccetto in A , diviso per 2π si dice l'*indice* del laccetto rispetto a 0 e l'annullarsi dell'indice del laccetto è condizione necessaria e sufficiente affinché esso sia omotopo al laccetto costante. Intuitivamente l'indice rispetto a 0 di un laccetto in A misura quante volte esso si avvolge intorno all'origine. In generale, dato un laccetto in \mathbb{R}^2 , è possibile definire l'indice del laccetto rispetto a qualsiasi punto di \mathbb{R}^2 che non appartenga al laccetto, considerando le forme:

$$\frac{(x - x_0)dy - (y - y_0)dx}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Nel caso di laccetti semplici, l'indice rispetto al laccetto di ciascun punto che non sia nel suo supporto può assumere solo due valori tra i numeri 0, 1, -1. I punti in cui l'indice è diverso da 0 formano un aperto limitato che ha il laccetto come frontiera (Teorema di Jordan).

L'indice rispetto a 0 della frontiera orientata di un dominio regolare connesso e semplicemente connesso che contenga 0 come suo punto interno è 1, mentre la somma degli indici dei laccetti che compongono la frontiera di un dominio regolare che non contenga 0 nella sua chiusura è uguale a 0.

Calcolo differenziale sulle varietà

XIII.1. Fibrato cotangente e tensori

Definizione XIII.1.1. Sia M una varietà differenziabile. Il fibrato duale T^*M del suo fibrato tangente TM si dice il suo *fibrato cotangente* ed i suoi elementi *vettori cotangenti* o *covettori* di M .

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, per ogni $p \in M$ l'applicazione $T_p \ni v \rightarrow v(f) \in \mathbb{R}$ è un funzionale lineare su $T_p M$ ed è dunque un elemento di $T_p^* M$. Associamo in questo modo ad ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ una sezione differenziabile \widetilde{df} del fibrato T^*M , con

$$df(v) = \langle v, \widetilde{df}(\pi(v)) \rangle, \quad \forall v \in TM.$$

Nel seguito scriveremo per semplicità df invece di \widetilde{df} , identificando il differenziale di una funzione reale alla corrispondente sezione del fibrato cotangente.

Indichiamo con $\mathfrak{X}^*(M)$ il $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo $\Gamma(M, T^*M)$ delle sezioni differenziabili del fibrato T^*M .

Abbiamo un accoppiamento di dualità

$$(13.1.1) \quad \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \ni (X, \xi) \rightarrow \langle X, \xi \rangle \in \mathcal{C}^\infty(M),$$

definito da

$$\langle X, \xi \rangle(p) = \xi_p(X_p) \quad \text{per ogni } p \in M.$$

Definizione XIII.1.2. Indichiamo con $T^{r,s}M$ la potenza tensoriale r -covariante ed s -controvariante di TM . Essa è un fibrato vettoriale con fibra $[T_p M]^{\otimes r} \otimes [T_p^* M]^{\otimes s}$. In particolare, $T^{1,0}M = TM$ e $T^{0,1}M = T^*M$. Indichiamo poi con $\mathfrak{T}^{r,s}(M)$ lo spazio delle sue sezioni, che si dicono *tensori r -covarianti ed s -controvarianti*.

Per estensione dell'accoppiamento (13.1.1), possiamo far corrispondere ad una sezione $\tau \in \mathfrak{T}^{r,s}(M)$ un'applicazione:

$$(13.1.2) \quad \tau : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{X}^*(M)}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{\mathfrak{X}(M) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ volte}} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

Si verifica senza difficoltà il seguente criterio:

Proposizione XIII.1.3. *Un'applicazione \mathbb{R} -multilineare (13.1.2) è associata ad un tensore se e soltanto se è $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare.*

XIII.2. Forme differenziali su una varietà

Sia M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ e di dimensione m . Indichiamo con $\Omega^q(M)$ lo spazio dei tensori alternati q -controvarianti su M . Per la Proposizione XIII.1.3 abbiamo il seguente criterio

Proposizione XIII.2.1. *Un'applicazione \mathbb{R} -multilineare*

$$\tau : (\mathfrak{X}(M))^q \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

definisce un elemento di $\Omega^q(M)$ se e soltanto se verifica le due condizioni:

$$(13.2.1) \quad \tau(X_1, X_2, \dots, X_q) = 0 \quad \text{se } X_1, X_2, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M) \quad \text{ed} \\ \exists 1 \leq i < j \leq q \quad \text{con } X_i = X_j,$$

$$(13.2.2) \quad \tau(fX_1, X_2, \dots, X_q) = f \cdot \tau(X_1, \dots, X_q), \\ \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

La condizione (13.2.1) è equivalente a ciascuna delle

$$(13.2.3) \quad \tau(X_1, \dots, X_q) = 0 \quad \text{se } X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M) \\ \text{sono } \mathbb{R}\text{-linearmente dipendenti,}$$

$$(13.2.4) \quad \tau(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_q}) = \varepsilon(\sigma)\tau(X_1, \dots, X_q), \\ \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_q.$$

Dalle (13.2.1) ed (13.2.2) segue che

$$(13.2.5) \quad \tau(X_1, \dots, X_q)(p) = 0 \quad \text{se } X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), p \in M \\ \text{ed } X_{1p}, \dots, X_{qp} \text{ sono } \mathbb{R}\text{-linearmente dipendenti in } T_pM.$$

Definizione XIII.2.2. Gli elementi di $\Omega^q(M)$ si chiamano *forme alternate di grado q* , o *q -forme alternate*.

Definizione XIII.2.3. Il *differenziale* della q -forma alternata $\tau \in \Omega^q(M)$ è la $(q+1)$ -forma alternata $d\tau \in \Omega^{q+1}(M)$ definita da

$$(13.2.6) \quad d\tau(X_0, X_1, \dots, X_q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i X_i[\tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_q)] \\ + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \tau([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q) \\ \forall X_0, X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M).$$

Verifichiamo che la (13.2.6) definisce una $(q+1)$ -forma alternata. Se, per due indici $0 \leq r < s \leq q$, è $X_r = X_s = Y$, si verifica facilmente che ciascuna delle due somme a secondo membro di (13.2.6) si annulla. Per dimostrare la $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilinearità, è allora sufficiente verificare che $d\tau$ verifica anche la (13.2.2). Abbiamo

$$[fX_0, X_i] = f[X_0, X_i] - (X_i f)X_0.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
d\tau(fX_0, X_1, \dots, X_h) &= f \sum_{i=0}^h (-1)^i (X_i) \tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h) \\
&+ \sum_{i=1}^h (-1)^i (X_i f) \tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h) \\
&+ f \sum_{0 \leq i < j \leq h} (-1)^{i+j} \tau([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_h) \\
&- \sum_{i=1}^h (-1)^i (X_i f) \tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h) \\
&= f d\tau(X_0, X_1, \dots, X_h), \\
&\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \quad \forall X_0, X_1, \dots, X_h \in \mathfrak{X}(M).
\end{aligned}$$

Se x^1, \dots, x^m sono coordinate locali, è

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

Quindi la definizione (13.2.6) coincide, nel caso in cui M sia un aperto di uno spazio Euclideo, con quella data in §XII.3 del Capitolo XII. Poiché, per calcolare il differenziale di una q -forma alternata τ nell'intorno di un punto $p \in M$ possiamo utilizzare nella (13.2.6) campi di vettori definiti soltanto in un intorno di p , otteniamo in particolare il

Teorema XIII.2.4. *Se M è una varietà differenziabile di dimensione m , il differenziale definisce un complesso di operatori differenziali del prim'ordine :*

$$(13.2.7) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M) & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \dots & \xrightarrow{d} & \Omega^{m-1}(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^m(M) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

È $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ e, per ogni aperto connesso U di M , le funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ con $df = 0$ su U sono costanti su U .

Ogni punto $p \in M$ ha un sistema fondamentale di intorni aperti U tali che, se $1 \leq q \leq m$ e $\tau \in \Omega^q(U)$ soddisfa $d\tau = 0$ in U , allora esiste una $\eta \in \Omega^{q-1}(U)$ tale che $d\eta = \tau$ in U .

DIMOSTRAZIONE. Il Teorema segue dal teorema analogo (Lemma di Poincaré-Volterra) dimostrato per le forme differenziali definite sugli aperti degli spazi Euclidei. \square

Definizione XIII.2.5. Poniamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^q(M) &= \{f \in \Omega^q(M) \mid df = 0\} && \text{(spazio delle } q\text{-forme chiuse su } M), \\
\mathcal{B}^q(M) &= \{df \mid f \in \Omega^{q-1}(M)\} && \text{(spazio delle } q\text{-forme esatte su } M), \\
H^q(M) &= \mathcal{Z}^q(M) / \mathcal{B}^q(M) && \text{(} q\text{-esimo gruppo di coomologia} \\
&&& \text{di de Rham di } M).
\end{aligned}$$

XIII.3. Il lemma di Poincaré-Volterra sugli intorni contrattili

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Un aperto U di M si dice *contrattile* se esiste un'omotopia $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(U \times [0, 1], U)$, di un'applicazione costante con l'identità.

Abbiamo:

Teorema XIII.3.1 (Poincaré-Volterra). *Se U è un aperto contrattile di M , allora*

$$H^q(U) = \{0\} \quad \text{per ogni } q \geq 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Phi = \{\phi_t\} \in \mathcal{C}^\infty(U \times [0, 1], U)$ con

$$\phi_0(p) = p_0 \in U, \quad \phi_1(p) = p, \quad \forall p \in U.$$

Sia $q \geq 1$ ed $\alpha \in \Omega^q(U)$ una q -forma chiusa. Poniamo

$$\Phi^*(\alpha) = \alpha_0 + dt \wedge \alpha_1,$$

con $\alpha_0 \in \Gamma(U \times [0, 1], \Lambda^q T^* M)$, $\alpha_1 \in \Gamma(U \times [0, 1], \Lambda^{q-1} T^* M)$. Allora

$$d(\Phi^*(\alpha)) = \Phi^*(d\alpha) = 0 \implies (d_M \alpha_0 = 0, \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial t} = d_M \alpha_1),$$

dove abbiamo indicato con d_M la restrizione del differenziale su $U \times [0, 1]$ ai vettori *orizzontali*, cioè a $\ker dt$. Definiamo:

$$\beta(t) = \int_0^t \alpha_1(s) ds.$$

Otteniamo allora, per differenziazione sotto il segno di integrale,

$$d_M \beta(t) = \int_0^t d_M \alpha_1(s) ds = \int_0^t \frac{\partial \alpha_0}{\partial t}(s) ds = \alpha_0(t),$$

perché $\alpha_0(0) = 0$. Con $u = \beta(1) \in \Omega^{q-1}(U)$, otteniamo $d_M u = \alpha_0(1) = \alpha$ in U . \square

XIII.4. Derivata di Lie di un tensore

Siano M, N due varietà differenziabili. Un'applicazione $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ definisce applicazioni $\psi_* = d\psi : TM \rightarrow TN$ (immagine diretta o *pushdown*) e $\psi^* : \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$, $\psi^* : \mathfrak{X}^*(N) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ (immagine inversa o *pullback*).

Se ψ è un diffeomorfismo, sia ψ_* che ψ^* si estendono ad isomorfismi:

$$\begin{aligned} \psi_* : T^{r,s} M &\longrightarrow T^{r,s} N, & \psi_* : \mathfrak{T}^{r,s}(M) &\longrightarrow \mathfrak{T}^{r,s}(N), \\ \psi^* : T^{r,s} N &\longrightarrow T^{r,s} M, & \psi^* : \mathfrak{T}^{r,s}(N) &\longrightarrow \mathfrak{T}^{r,s}(M), \end{aligned}$$

con $\psi^* = (\psi^{-1})_* = \psi_*^{-1}$ e $\psi_* = (\psi^{-1})^* = (\psi^*)^{-1}$.

Siano $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\Phi^X = \{\phi_t^X\}$ il corrispondente gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di M .

Per ogni aperto U relativamente compatto in M esiste un $\epsilon > 0$ tale che, per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, le ϕ_t^X siano definite su U . Quindi, per ogni $\tau \in \mathfrak{T}^{r,s}(M)$, la $(\phi_t^X)^* \tau$ definisce un tensore di $\mathfrak{T}^{r,s}(U)$. In particolare, per ogni $p \in U$ fissato, è definita

un'applicazione $\{t \rightarrow (\phi_t^X)^* \tau(p)\} \in \mathcal{C}^\infty((-\epsilon, \epsilon), T_p^{r,s}M)$. Otteniamo pertanto un nuovo tensore $L_X(\tau) \in \mathfrak{T}^{r,s}(M)$, ponendo:

$$(13.4.1) \quad L_X(\tau)(p) = \left. \frac{d(\phi_t^X)^* \tau(p)}{dt} \right|_{t=0} = - \left. \frac{d(\phi_t^X)_* \tau(p)}{dt} \right|_{t=0}.$$

Definizione XIII.4.1. Il tensore $L_X(\tau)$ è la *derivata di Lie del tensore τ rispetto al campo di vettori X* .

Si verifica facilmente che:

Proposizione XIII.4.2. Se $f \in \mathfrak{T}^{0,0}(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, allora $L_X f = Xf$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti $L_X f = \left. \frac{d}{dt} f(\phi_t^X) \right|_{t=0} = Xf$, per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. \square

Proposizione XIII.4.3. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora $L_X(Y) = [X, Y]$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Poniamo $Y(t) = (\phi_t^X)_* Y$. In una carta coordinata (U, x) siano $X = \sum_{i=1}^m a^i \partial / \partial x^i$, $Y_i = \sum b^i \partial / \partial x^i$. Scriviamo $\Phi = \Phi(x, t)$ per la funzione che descrive nelle coordinate locali il gruppo locale a un parametro Φ_X . La Φ è soluzione del sistema

$$\dot{\Phi}^i(x, t) = a^i(\Phi(x, t)) \quad i = 1, \dots, m.$$

Scriviamo $\Psi(x, t)$ per l'inversa $\Phi(x, -t)$ della $\Phi(t)$. Abbiamo cioè $\Phi(\Psi(x, t), t) = x$ per ogni t ed x nel dominio di definizione. Abbiamo allora:

$$Y(t) = \sum_{i,j=1}^m b^j(\Psi(x, t)) (\partial \Phi^j / \partial x^i)(\Psi(x, t)) (\partial / \partial x^i).$$

Otteniamo quindi:

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^m \left(\sum_{h=1}^m \frac{\partial b^j}{\partial x^h} \frac{\partial \Psi^h}{\partial t} \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} + b^j \left[\frac{\partial^2 \Phi^j}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial \Psi^k}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi^j}{\partial x^i \partial t} \right] \right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Da $\Psi(\Phi(x, t), t) = x$, abbiamo:

$$\frac{\partial \Psi^h}{\partial t} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \Psi^h}{\partial x^k} \frac{\partial \Phi^k}{\partial t} = 0.$$

Poiché $\partial \Phi / \partial x$ e $\partial \Psi / \partial x$ sono entrambi l'identità per $t = 0$, abbiamo:

$$\sum_{i,j,h=1}^m \left. \frac{\partial b^j}{\partial x^h} \frac{\partial \Psi^h}{\partial t} \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} \right|_{t=0} = - \sum_{h=1}^m a^h \frac{\partial b^j}{\partial x^h}.$$

Per $t = 0$ è $\partial^2 \Phi^j / \partial x^i \partial x^k = 0$, mentre $\partial^2 \Phi^j / \partial x^i \partial t = \partial a^j / \partial x^i$ ed otteniamo quindi la formula desiderata. \square

Definizione XIII.4.4. Dati numeri positivi h, k, r, s con $h \leq r, k \leq s$, definiamo sui tensori l'operazione di *contrazione degli indici (h, k)* :

$$\mathbf{c}_k^h : \mathfrak{T}^{r,s}(M) \longrightarrow \mathfrak{T}^{r-1,s-1}(M)$$

nel modo seguente: siano $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}(M)$ campi di vettori che definiscono un sistema di riferimento su un aperto U di M , tali cioè che $X_1(p), \dots, X_m(p) \in T_p M$ sia una base di $T_p M$ per ogni $p \in U$. Definiamo il sistema di riferimento duale $\xi^1, \dots, \xi^m \in \mathfrak{X}^*(U)$ mediante $\langle X_i, \xi^j \rangle(p) = \delta_j^i$ (delta di Kronecker) per ogni $p \in U$. Allora, su U , poniamo:

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_k^h(\tau)(\eta^1, \dots, \eta^{r-1}, Y_1, \dots, Y_{s-1}) \\ &= \sum_{j=1}^m \tau(\eta^1, \dots, \eta^{k-1}, \xi^j, \eta^k, \dots, \eta^{r-1}, Y_1, \dots, Y_{h-1}, X_j, Y_h, \dots, Y_{s-1}) \\ & \quad \forall \eta^j \in \mathfrak{X}^*(M), Y_i \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

Si verifica che la contrazione è ben definita, che cioè non dipende dalla scelta del sistema di riferimento su U .

Abbiamo:

Proposizione XIII.4.5. *La derivata di Lie commuta con le contrazioni.*

DIMOSTRAZIONE. Ciò è conseguenza del fatto che le contrazioni commutano con gli isomorfismi locali degli spazi di tensori che sono definiti dall'azione di un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi. \square

Utilizzando questa proposizione possiamo calcolare la derivata di Lie dei diversi tensori a partire dalla definizione della derivata di Lie delle funzioni e dei campi di vettori. Ad esempio, se $\alpha \in \mathcal{Q}^1(M)$, abbiamo:

$$(13.4.2) \quad L_X(\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha([X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

e, più in generale:

Proposizione XIII.4.6. *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\alpha \in \mathcal{Q}^h(M)$, allora:*

$$(13.4.3) \quad \begin{aligned} L_X(\alpha)(X_1, \dots, X_h) &= X(\alpha(X_1, \dots, X_h)) \\ &+ \sum_{i=1}^h (-1)^i \alpha([X, X_i], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h), \\ & \quad \forall X_1, \dots, X_h \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

Definizione XIII.4.7. Dato un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$, definiamo il *prodotto interno* rispetto ad $X \in \mathfrak{X}(M)$ mediante:

$$\begin{aligned} \iota_X : \mathfrak{T}^{r,s}(M) &\ni \tau \rightarrow \iota_X(\tau) \in \mathfrak{T}^{r,s-1}(M) \\ \iota_X(\tau)(\xi^1, \dots, \xi^r, X_1, \dots, X_{s-1}) &= \tau(\xi^1, \dots, \xi^r, X, X_1, \dots, X_{s-1}) \\ \xi^1, \dots, \xi^r &\in \mathfrak{X}^*(M), \quad \forall X_1, \dots, X_{s-1} \in \mathfrak{X}(M) \end{aligned}$$

quando $s \geq 1$. Porremo $\iota_X(\tau) = 0$ per ogni tensore 0-controvariante.

Il prodotto interno per il campo di vettori X si indica anche con $X \lrcorner \tau$.

Teorema XIII.4.8. *Valgono le formule:*

$$(13.4.4) \quad L_X(\alpha) = d(\iota_X \alpha) + \iota_X(d\alpha) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall \alpha \in \mathcal{Q}^h(X),$$

$$(13.4.5) \quad [L_X, \iota_Y](\tau) = L_X(\iota_Y(\tau)) - \iota_Y(L_X(\tau)) = \iota_{[X, Y]}(\tau) \\ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tau \in \mathfrak{T}^{r, s}(M).$$

XIII.5. Distribuzioni vettoriali e teorema di Frobenius

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m .

Definizione XIII.5.1. Una *distribuzione vettoriale generalizzata* su M è un sotto- $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo \mathfrak{B} di $\mathfrak{X}(M)$.

Ciò significa che

$$fX + gY \in \mathfrak{B}, \quad \text{per ogni } X, Y \in \mathfrak{B} \text{ e per ogni } f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Per ogni $p \in M$ poniamo

$$\mathfrak{B}_p = \{X_p \mid X \in \mathfrak{B}\} \subset T_p M.$$

La dimensione di \mathfrak{B}_p , come spazio vettoriale reale, è il *rango* di \mathfrak{B} in p .

Definizione XIII.5.2. Una distribuzione vettoriale generalizzata \mathfrak{B} di rango costante si dice una *distribuzione vettoriale*.

In questo caso, gli elementi di \mathfrak{B} sono le sezioni di un sottofibrato vettoriale $\xi_{\mathfrak{B}} = (W \xrightarrow{\pi} M)$ del fibrato tangente e, viceversa, se $\xi = (W \xrightarrow{\pi} M)$ è un sottofibrato vettoriale del fibrato tangente, lo spazio $\mathfrak{B} = \Gamma_{\xi}(M, W)$ delle sue sezioni è una distribuzione vettoriale su M .

Denotiamo con $\Omega^*(M) = \bigoplus_{h=0}^m \Omega^h(M)$ l'algebra delle forme differenziali alternate su M e con $\Omega^+(M) = \bigoplus_{h=1}^m \Omega^h(M)$ l'ideale delle forme di grado positivo, che non contengono cioè componenti di grado 0.

Definizione XIII.5.3. Un *sistema differenziale esterno* su M è un ideale \mathcal{I} dell'algebra di Grassmann $\Omega^*(M)$, contenuto nell'ideale $\Omega^+(M)$.

Associamo alla distribuzione vettoriale \mathfrak{B} il *sistema differenziale esterno*

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{B}} = \{\alpha \in \Omega^+(M) \mid \alpha|_{\mathfrak{B}} = 0\}.$$

Osserviamo che $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$ è un *sotto- $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo graduato* ed un *ideale* di $\Omega^*(M)$, e che, come ideale, è generato dai suoi elementi di grado uno.

Definizione XIII.5.4. Sia \mathcal{I} un sistema differenziale esterno. La sua *distribuzione caratteristica* è la distribuzione vettoriale

$$(13.5.1) \quad \mathfrak{B}_{\mathcal{I}} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \iota_X(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}\}.$$

La relazione tra sistemi differenziali esterni e distribuzioni vettoriali è descritta dal seguente:

Lemma XIII.5.5. Sia \mathfrak{B} una distribuzione vettoriale ed $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$ il sistema differenziale esterno ad essa associato. Allora \mathfrak{B} è la distribuzione caratteristica di $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$.

Se \mathcal{I} è un sistema differenziale esterno e $\mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$ la sua distribuzione caratteristica, abbiamo l'inclusione

$$(13.5.2) \quad \mathcal{I} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{B}_{\mathcal{I}}}.$$

Esempio XIII.5.6. Sia \mathcal{S} il sistema differenziale $\mathcal{Q}^*(\mathbb{R}^m) \wedge (dx^1 + dx^2 \wedge dx^3)$ in \mathbb{R}^m , con $m \geq 3$. Allora $\mathfrak{B}_{\mathcal{S}} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \left[\frac{\partial}{\partial x^4}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right]$ ed $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}_{\mathcal{S}}}$ è l'ideale di $\mathcal{Q}^*(M)$ generato da dx^1, dx^2, dx^3 .

Sia \mathfrak{B} una distribuzione vettoriale su M .

Definizione XIII.5.7. Una sottovarietà N di M si dice una *sottovarietà integrale* di \mathfrak{B} se $T_p N \subset \mathfrak{B}_p$ per ogni $p \in N$.

Diciamo che \mathfrak{B} è *totalmente integrabile* se per ogni punto $p \in M$ esiste una sottovarietà integrale N di \mathfrak{B} con $p \in N$ e $T_p N = \mathfrak{B}_p$.

Diciamo che \mathfrak{B} è *formalmente integrabile* se

$$(13.5.3) \quad [\mathfrak{B}, \mathfrak{B}] \subset \mathfrak{B}.$$

Abbiamo il

Teorema XIII.5.8 (Frobenius). Sia \mathfrak{B} una distribuzione vettoriale di rango k . Sono equivalenti:

- (i) \mathfrak{B} è *totalmente integrabile*;
- (ii) \mathfrak{B} è *formalmente integrabile*;
- (iii) $d\mathcal{I}_{\mathfrak{B}} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$

DIMOSTRAZIONE. (ii) \implies (i). Sia $p \in M$. Poiché \mathfrak{B}_p ha rango k , possiamo fissare k campi vettoriali $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{B}$ con X_{1p}, \dots, X_{kp} linearmente indipendenti in $T_p M$. Possiamo allora trovare una carta locale (U, x) per cui:

$$X_i = \sum_{j=1}^m a_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \text{con } a_i^j(0) = \delta_i^j \quad \text{per } 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m.$$

Consideriamo la matrice $k \times k$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1k}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}(x) & a_{k2}(x) & \cdots & a_{kk}(x) \end{pmatrix}.$$

Poiché $A(0) = I_k$, a meno di restringere l'intorno U di p , possiamo supporre che $A(x)$ sia invertibile in U . Sia $B(x) = (b_i^j(x))$ la sua inversa. Allora i campi di vettori

$$Y_i = \sum_{j=1}^k b_i^j(x) X_j = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=k+1}^m c_i^h(x) \frac{\partial}{\partial x^h} \quad (i = 1, \dots, k)$$

generano \mathfrak{B}_q in ogni punto $q \in U$. La condizione (ii) implica che

$$[Y_i, Y_j]_q \in \langle Y_{1q}, \dots, Y_{kq} \rangle \quad \text{per ogni } q \in U.$$

Poiché i campi di vettori

$$Y_1, \dots, Y_k, \frac{\partial}{\partial x^{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$$

definiscono una base di T_qM in ogni punto $q \in U$, ed

$$[Y_i, Y_j]_q \in \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial x^{k+1}} \right]_q, \dots, \left[\frac{\partial}{\partial x^m} \right]_q \right\rangle,$$

otteniamo che $[Y_i, Y_j] = 0$ in U per ogni $1 \leq i, j \leq k$.

Dimostriamo ora il seguente

Lemma XIII.5.9. *Siano Y_1, \dots, Y_k campi di vettori definiti e linearmente indipendenti in tutti i punti di un intorno aperto U di $p \in M$. Se $[Y_i, Y_j] = 0$ in U per ogni $1 \leq i < j \leq k$, allora esiste una carta locale (U', y) con $p \in U' \subset U$ per cui $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ in U' per $i = 1, \dots, k$.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che (U, x) sia una carta locale in p . Ragioniamo per induzione su k .

Sia $k = 1$. Possiamo supporre che $Y_{1p} = \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \right]_p$. Il campo di vettori Y_1 definisce un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi $x(U) \times \mathbb{R} \supset \tilde{U} \ni (x, t) \rightarrow \Phi(x, t) \in \mathbb{R}^m$, ove \tilde{U} è un intorno di $x(U) \times \{0\}$ in $x(U) \times \mathbb{R}$. Abbiamo $\frac{\partial \Phi^1(x, t)}{\partial t} = 1$ per $x = 0, t = 0$ e quindi, per il teorema delle funzioni implicite, $x = \Phi(0, y^2, \dots, y^m; y^1)$ definisce un nuovo sistema di coordinate in un intorno U' di p in U , per cui $Y_1 = \frac{\partial}{\partial y^1}$.

Sia ora $k > 1$ e supponiamo che il lemma valga per un numero inferiore di campi di vettori linearmente indipendenti che commutano tra loro. Per la prima parte della dimostrazione, possiamo fissare coordinate locali (U, x) tali che:

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad Y_i = \sum_{j=1}^m a_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{per } 2 \leq j \leq k.$$

Poiché

$$[Y_1, Y_i] = \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_i^j(x)}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{per } 2 \leq j \leq k,$$

la condizione $[Y_1, Y_i] = 0$ implica che i coefficienti a_i^j sono indipendenti da x^1 in un intorno $\{-\epsilon < x^1 < \epsilon\} \subset x(U)$.

Poniamo $Z_j = \sum_{i=2}^m a_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ per $2 \leq j \leq k$. Allora $[Z_i, Z_j] = 0$ per $2 \leq i, j \leq k$. Per l'ipotesi induttiva, possiamo trovare un cambiamento delle coordinate x^2, \dots, x^m per cui risulti $Z_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$ per $2 \leq j \leq k$. Otteniamo perciò nelle nuove coordinate x^1, \dots, x^m :

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + a_i^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} \quad \text{per } 2 \leq i \leq k.$$

Da $[Y_i, Y_j] = 0$ per ogni $1 \leq i, j \leq k$ otteniamo allora che le a_i^1 sono indipendenti da x^1 e $\partial a_i^1 / \partial x^j = \partial a_j^1 / \partial x^i$ per $2 \leq i, j \leq k$. Possiamo quindi trovare una funzione

ϕ , indipendente da x^1 , tale che $a_i^1 = \partial\phi/\partial x^i$ per $2 \leq i \leq k$. Nelle nuove variabili :

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + \phi(x^2, \dots, x^m) \\ y^i = x^i \end{cases} \quad \text{per } 2 \leq i \leq m$$

abbiamo $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ per $1 \leq i \leq k$. \square

Completiamo ora la dimostrazione dell'implicazione (ii) \implies (i). Fissata una carta locale (U', y) con centro in p per cui $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ per $i = 1, \dots, k$, la

$$N = \{y^{k+1} = 0, \dots, y^m = 0\}$$

è una sottovarietà di M , contenuta in U' , contenente p e tale che $T_q N = \mathfrak{B}_q$ per ogni $q \in N$.

(ii) \implies (iii) Se $\alpha \in \mathcal{Q}^1(M)$ si annulla su tutti i campi di \mathfrak{B} , abbiamo:

$$(*) \quad d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{B}$$

perché $\alpha(Y) = 0$, $\alpha(X) = 0$ ed anche $\alpha([X, Y]) = 0$ perché $[X, Y] \in \mathfrak{B}$. Si ragiona in modo analogo per forme di grado maggiore di uno.

(iii) \implies (ii) Abbiamo $\mathfrak{B} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \alpha(X) = 0, \forall \alpha \in \mathcal{I}_{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{X}^*(M)\}$. L'implicazione è allora una facile conseguenza della (*).

(ii) \implies (i) Segue dal fatto che il commutatore di due campi di vettori tangenti a una sottovarietà N in tutti i suoi punti è ancora tangente alla sottovarietà N in tutti i suoi punti. \square

Possiamo ancora riformulare il Teorema di Frobenius nella forma

Teorema XIII.5.10 (Frobenius). *Condizione necessaria e sufficiente affinché una distribuzione vettoriale \mathfrak{B} , di rango k , sia formalmente integrabile è che sia verificata una delle condizioni equivalenti:*

(1) per ogni punto $p \in M$ possiamo trovare una carta locale (U, x) con centro in p tale che $\mathfrak{B}|_U$ sia generata dai campi di vettori $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}$;

(2) per ogni punto $p \in M$ possiamo trovare una carta locale (U, x) con centro in p tale che l'ideale $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}|_U$ sia generato dai differenziali dx^{k+1}, \dots, dx^m . \square

Osserviamo infine che vale la :

Proposizione XIII.5.11. *Se \mathcal{I} è un sistema differenziale esterno in M e $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$, allora $\mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$ è formalmente integrabile.*

DIMOSTRAZIONE. Se $X \in \mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$ ed $\alpha \in \mathcal{I}$, allora :

$$L_X(\alpha) = d(\iota_X(\alpha)) + \iota_X(d\alpha) \in \mathcal{I}$$

per l'ipotesi che $d\alpha \in d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$. Poiché la derivata di Lie commuta con la contrazione, abbiamo, per $X, Y \in \mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$ ed $\alpha \in \mathcal{I}$:

$$\iota_{[X, Y]}(\alpha) = \iota_{L_X(Y)}(\alpha) = L_X(\iota_Y(\alpha)) - \iota_Y(L_X(\alpha)) \in \mathcal{I}.$$

Questo vale per ogni $\alpha \in \mathcal{S}$ e quindi anche $[X, Y] \in \mathfrak{B}_{\mathcal{S}}$. \square

Vale ancora il

Lemma XIII.5.12. *Siano \mathfrak{B}_k e \mathfrak{B}_n due distribuzioni vettoriali totalmente integrabili su M , di rango k ed n rispettivamente, con $k < n$ e $\mathfrak{B}_k \subset \mathfrak{B}_n$. Per ogni punto $p_0 \in M$ possiamo trovare un intorno aperto U di p_0 in M e distribuzioni vettoriali totalmente integrabili $\mathfrak{B}_h(U)$ di rango h , per $k < h < n$, tali che $\mathfrak{B}_h \subset \mathfrak{B}_{h+1}$ per ogni $h = k, \dots, n-1$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un punto $p_0 \in M$. Per il Teorema XIII.5.10 possiamo trovare una carta coordinata (U_0, y) , con centro in p_0 , tale che

$$\mathfrak{B}_k(U_0) = \left\langle \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^k} \right\rangle.$$

Possiamo completare i campi di vettori $\frac{\partial}{\partial y^i}$, $i = 1, \dots, k$ a un sistema di generatori di \mathfrak{B}_n , in un intorno U_1 di p_0 in U_0 , aggiungendo campi di vettori Z_i della forma

$$Z_i = \sum_{j=k+1}^m a_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad a_i^j \in \mathcal{C}^\infty(U_1), \quad i = k+1, \dots, n.$$

I campi Z_{k+1}, \dots, Z_n definiscono in tutti i punti di U_1 vettori tangenti linearmente indipendenti. A meno di una permutazione delle coordinate, possiamo supporre che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{k+1}^{k+1} & \dots & a_n^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^{k+1} & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

sia invertibile in p_0 , e quindi in un intorno aperto U_2 di p_0 in U_1 . Posto

$$\begin{pmatrix} Y_{k+1} \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} Z_{k+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix},$$

i campi di vettori $Y_1, \dots, Y_n \in \mathfrak{X}(U_2)$ sono della forma

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i} + \sum_{j=n+1}^m b_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad b_i^j \in \mathcal{C}^\infty(U_2), \quad i = 1, \dots, n$$

e quindi, poiché \mathfrak{B}_n è totalmente integrabile, soddisfano

$$[Y_i, Y_j] = 0, \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq n.$$

Ne segue che le distribuzioni

$$\mathfrak{B}_h = \langle Y_1, \dots, Y_h \rangle, \quad \text{per } k \leq h \leq n.$$

sono totalmente integrabili e soddisfano la tesi. \square

XIII.6. Integrabilità formale e lemma di Poincaré-Volterra

Ci sarà utile utilizzare nel seguito una versione *relativa* del Lemma di Poincaré-Volterra, in cui utilizziamo la nozione di distribuzione totalmente integrabile.

Fissiamo una varietà differenziabile M di dimensione m . Se \mathfrak{B} è una distribuzione vettoriale di rango n su M ed U un aperto di M , indicheremo con $\mathfrak{B}(U)$ la distribuzione vettoriale in U generata da \mathfrak{B} , cioè il $\mathcal{C}^\infty(U)$ -modulo a sinistra generato dalle restrizioni ad U dei campi di vettori di \mathfrak{B} ($= \mathfrak{B}(M)$).

Supponiamo fissata su M una distribuzione vettoriale \mathfrak{B} , di rango n e totalmente integrabile.

Lemma XIII.6.1. *Siano \mathfrak{B} , \mathfrak{B}_1 due distribuzioni totalmente integrabili su M , di ranghi n ed $n-1$ rispettivamente, con $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$. Supponiamo vi sia un campo di vettori $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tale che*

- (i) \mathfrak{B}_1 ed Y generano \mathfrak{B} ;
(ii) $L_Y(\mathfrak{B}_1) \subset \mathfrak{B}_1$.

Allora, per ogni punto $p \in M$ possiamo trovare un intorno aperto U di p in M con la proprietà:

$$(13.6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall f \in \mathcal{C}^\infty(U) \text{ tale che } Xf = 0, \forall X \in \mathfrak{B}_1 \\ \exists g \in \mathcal{C}^\infty(U) \text{ tale che } \begin{cases} Xg = 0 & \text{in } U, \forall X \in \mathfrak{B}_1, \\ Yg = f & \text{in } U. \end{cases} \end{array} \right.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema XIII.5.10 possiamo trovare una carta coordinata (U, x) con centro in p tale che:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathfrak{B}_1}(U) &\text{ è generato da } dx^1, dx^{n+1}, \dots, dx^m; \\ \mathcal{I}_{\mathfrak{B}}(U) &\text{ è generato da } dx^{n+1}, \dots, dx^m. \end{aligned}$$

In particolare, $\mathfrak{B}(U)$ è generato da $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ e quindi

$$Y = \sum_{i=1}^n a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{in } U.$$

Per ipotesi $a^1 \neq 0$ in tutti i punti di U ed

$$L_Y \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \in \left\langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle, \quad \forall i = 2, \dots, n \implies \frac{\partial a^1}{\partial x^i} = 0 \text{ in } U, \quad \forall i = 2, \dots, n.$$

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ed $Xf = 0$, allora

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \quad \text{in } U \text{ per } i = 2, \dots, n.$$

Possiamo supporre che $x(U)$ sia un ipercubo $\{|x^i| < 1, 1 \leq i \leq m\}$. Ponendo

$$g(x) = g(x^1, x^2, \dots, x^m) = \int_0^{x^1} \frac{f(t, x^2, \dots, x^m)}{a^1(t, x^2, \dots, x^m)} dt$$

definiamo allora una funzione $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ che soddisfa il sistema in (13.6.1). \square

Data una distribuzione formalmente integrabile, possiamo sempre ricondurci localmente alla situazione descritta nel Lemma XIII.6.1:

Lemma XIII.6.2. *Sia \mathfrak{B} una distribuzione totalmente integrabile di rango n . Per ogni punto $p \in M$ possiamo trovare un intorno aperto U di p in M ed una distribuzione totalmente integrabile \mathfrak{B}_1 di rango $n - 1$ in U ed un campo di vettori $Y \in \mathfrak{B}(U)$ tali che*

- (i) \mathfrak{B}_1 ed Y generano $\mathfrak{B}(U)$;
- (ii) $L_Y(\mathfrak{B}_1) \subset \mathfrak{B}_1$.

DIMOSTRAZIONE. Scegliamo una carta coordinata (U, x) con centro in p tale che $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}(U) = \langle dx^{n+1}, \dots, dx^m \rangle$ e definiamo

$$\mathfrak{B}_1 = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle \quad \text{ed} \quad Y = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

□

Introduciamo la notazione: se $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ e \mathfrak{B} è una distribuzione vettoriale su M , scriviamo

$$(13.6.2) \quad \alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{B}} \iff \alpha(X_1, \dots, X_p) = \beta(X_1, \dots, X_p), \quad \forall X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{B}.$$

Osserviamo che

Lemma XIII.6.3. *Se \mathfrak{B} è formalmente integrabile, allora*

$$(13.6.3) \quad \alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{B}} \implies d\alpha \equiv d\beta \pmod{\mathfrak{B}}. \quad \square$$

Possiamo enunciare ora il

Teorema XIII.6.4. *Sia \mathfrak{B} una distribuzione vettoriale formalmente integrabile su M . Allora, per ogni $p \in M$ possiamo trovare un intorno aperto U di p in M tale che, per ogni intero k con $1 \leq k \leq m$ ed ogni forma*

$$\alpha \in \Omega^k(U) \quad \text{con} \quad d\alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{B}(U)}$$

possiamo trovare una forma

$$\beta \in \Omega^{k-1}(U) \quad \text{tale che} \quad d\beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{B}(U)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il teorema per induzione sul rango n di \mathfrak{B} . La tesi è banalmente vera se \mathfrak{B} ha rango zero. Supponiamo quindi che $n > 0$ e la tesi sia verificata per tutte le distribuzioni formalmente integrabili di rango inferiore ad n .

Per i Lemmi XIII.6.1 e XIII.6.2 e l'ipotesi induttiva, fissato $p \in M$ possiamo trovare un intorno aperto U di p in M tale che

- (a) esiste un $Y \in \mathfrak{B}(U)$ ed una distribuzione formalmente integrabile $\mathfrak{B}_1(U)$ di rango $n-1$ in U tali che

$$\mathfrak{B}(U) = \langle Y, \mathfrak{B}_1(U) \rangle \quad \text{ed} \quad [Y, \mathfrak{B}_1(U)] \subset \mathfrak{B}_1(U).$$

- (b) Per ogni $\alpha \in \Omega^k(U)$, con $k > 0$ e $d\alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{B}_1(U)}$ possiamo trovare $\beta \in \Omega^{k-1}(U)$ con $d\beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{B}_1(U)}$.

(c) Per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ con $Xf = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{B}_1(U)$ possiamo trovare una $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tale che

$$\begin{cases} Xg = 0 & \forall X \in \mathfrak{B}_1(U), \\ Yg = f & \text{in } U. \end{cases}$$

Sia ora $\alpha \in \mathcal{Q}^k(U)$, con $k > 0$, e supponiamo che

$$d\alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{B}(U)}.$$

In particolare,

$$d\alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{B}_1(U)}$$

e quindi, per (b) possiamo trovare una $\beta \in \mathcal{Q}^{k-1}(U)$ con

$$d\beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{B}_1(U)}.$$

Consideriamo

$$\gamma = Y\lrcorner(\alpha - d\beta) \in \mathcal{Q}^{k-1}(U).$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} d\gamma &= d(Y\lrcorner(\alpha - d\beta)) = L_Y(\alpha - d\beta) - Y\lrcorner(d[\alpha - d\beta]) \\ &= L_Y(\alpha - d\beta) - Y\lrcorner d\alpha. \end{aligned}$$

Poiché $[Y, \mathfrak{B}_1(U)] \subset \mathfrak{B}_1(U)$, otteniamo che

$$d\gamma \equiv 0 \pmod{\mathfrak{B}_1(U)}.$$

Consideriamo ora il caso in cui sia $k = 1$. Allora $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ed $X\gamma = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{B}_1(U)$. Per il punto (c), possiamo trovare una funzione $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tale che

$$\begin{cases} Xg = 0 & \forall X \in \mathfrak{B}_1(U), \\ Yg = \gamma & \text{in } U. \end{cases}$$

Dico che

$$d(\beta + g) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{B}(U)}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} d(\beta + g)(X) &= X\beta + Xg = d\beta(X) = \alpha(X), & \forall X \in \mathfrak{B}_1(U), \\ d(\beta + g)(Y) &= Y\lrcorner(d\beta) + Yg = Y\lrcorner(d\beta) + \gamma = Y\lrcorner\alpha = \alpha(Y). \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione nel caso $k = 1$.

Se $k > 1$, per (b) possiamo trovare $\eta \in \mathcal{Q}^{k-1}(U)$ tale che

$$d\eta \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{B}_1(U)}.$$

Sia $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ una soluzione (che esiste per il punto (c)) di

$$\begin{cases} Xg = 0 & \forall X \in \mathfrak{B}_1(U), \\ Yg = 1 & \text{in } U. \end{cases}$$

Dico che allora

$$\alpha \equiv d(\beta + dg \wedge \eta) \pmod{\mathfrak{B}(U)}.$$

Infatti, se $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{B}_1(U)$, otteniamo

$$\begin{aligned} d(\beta + dg \wedge \eta)(X_1, \dots, X_k) &= d\beta(X_1, \dots, X_k) = \alpha(X_1, \dots, X_k), \\ d(\beta + dg \wedge \eta)(Y, X_2, \dots, X_k) &= (Y \lrcorner d\beta)(X_2, \dots, X_k) + d\eta(X_2, \dots, X_k) \\ &= (Y \lrcorner d\beta)(X_2, \dots, X_k) + \gamma(X_2, \dots, X_k) \\ &= Y \lrcorner \alpha(X_2, \dots, X_k) = \alpha(Y, X_2, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione. \square

XIII.7. Il teorema di Darboux sulle forme canoniche

In questo paragrafo studieremo la forma canonica di Darboux¹ di una uno-forma e di una due-forma chiusa. Questi risultati sono preliminari allo studio delle varietà di contatto e delle varietà symplettiche.

XIII.7.1. Un Lemma di algebra lineare. Sia $\omega \in \Lambda^2 V^*$ una forma bilineare alternata su uno spazio vettoriale reale V . Un sottospazio vettoriale W di V è *isotropo* se la restrizione di ω a W è nulla, cioè se $\omega(w_1, w_2) = 0$ per ogni coppia di vettori $w_1, w_2 \in W$. Chiamiamo *Lagrangiano* un sottospazio isotropo massimale.

Lemma XIII.7.1. *Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita m ed $\omega \in \Lambda^2 V^*$ una forma bilineare antisimmetrica su V . Allora*

- (1) ω ha rango pari $2r$;
- (2) $\ker \omega = \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0, \forall w \in V\}$ ha dimensione $m - 2r$;
- (3) i sottospazi Lagrangiani di V rispetto ad ω hanno dimensione $m - r$;
- (4) ogni sottospazio isotropo è contenuto in un sottospazio Lagrangiano.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che il rango di ω è la dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare $\lambda_\omega : V \rightarrow V^*$ ad essa associata:

$$\langle w, \lambda_\omega(v) \rangle = \omega(v, w), \quad \forall v, w \in V.$$

Per verificare (1) e (2) basta osservare che la matrice $(\omega(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq m}$ associata ad ω in una qualsiasi base e_1, \dots, e_m di V è antisimmetrica e quindi, poiché tutti i suoi autovalori non nulli sono immaginari puri, ha rango pari.

Dimostriamo (3) per ricorrenza sul rango r di ω . Se $r = 0$, allora dobbiamo prendere $W = V$. Se $r > 0$, fissiamo un vettore $v_1 \in V$ per cui $\omega(v_1, \cdot)$ sia un funzionale non nullo. Allora $V_1 = \{v \in V \mid \omega(v_1, v) = 0\}$ è un sottospazio di dimensione $m - 1$ di V e la restrizione di ω a V_1 ha rango $r - 1$. Per l'ipotesi induttiva, V_1 contiene un sottospazio W , di dimensione $(m - 1) - (r - 1) = m - r$ su cui la restrizione di ω è nulla.

Dimostriamo ora (4). Sia W un sottospazio isotropo per ω . La somma $W + \ker \omega$ è ancora un sottospazio isotropo. Sia L un sottospazio isotropo massimale che contenga W . Se $\dim L < m - r$, poiché $\ker \omega \subset L$, l'ortogonale L^ω di L rispetto ad ω avrebbe dimensione $m - \dim L + m - 2r > m - r$. Se $v \in L^\omega \setminus L$, allora il sottospazio $L + \mathbb{R}v$ sarebbe un sottospazio isotropo di dimensione $1 + \dim L$ e conterrebbe propriamente L , contro l'ipotesi di massimalità. \square

¹Jean-Gaston Darboux (14 agosto 1842, Nîmes - 23 febbraio 1917, Parigi) matematico francese che ha dato contributi fondamentali alla geometria differenziale. Ha avuto come allievo Élie Cartan.

Lemma XIII.7.2. *Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita m , $\alpha \in V^*$ un funzionale lineare, ed $\omega \in \Lambda^2 V^*$ una forma alternata di rango $2r$ su V . Allora*

- (1) *Se $\alpha \wedge \omega^r \neq 0$, allora $\ker \omega \not\subset \ker \alpha$ e i sottospazi Lagrangiani della restrizione di ω a $\ker \alpha$ hanno dimensione $m - r - 1$ e sono le intersezioni di $\ker \alpha$ con i sottospazi Lagrangiani di ω in V .*
- (2) *Se $\alpha \wedge \omega^r = 0$, allora $\ker \omega \subset \ker \alpha$ e $\ker \alpha$ contiene sottospazi Lagrangiani di ω in V .*

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma XIII.7.1, ogni sottospazio isotropo di $\ker \alpha$ è contenuto in un sottospazio Lagrangiano di ω in V .

Indichiamo con $\lambda_\omega : V \rightarrow V^*$ l'applicazione lineare associata ad ω . Se ω ha rango $2r$, abbiamo

$$\alpha \wedge \omega^r = 0 \iff \alpha \in \lambda_\omega(V) \iff \ker \omega \subset \ker \alpha.$$

Se $\alpha \wedge \omega^r \neq 0$, allora $\ker \alpha$ non contiene $\ker \omega$ e quindi non può contenere sottospazi Lagrangiani di ω in V . I suoi sottospazi isotropi massimali sono tutte e sole le intersezioni di $\ker \alpha$ con un sottospazio Lagrangiano di ω in V , ed hanno dimensione $m - r - 1$.

Se $\alpha \wedge \omega^r = 0$, allora $\alpha \in \lambda_\omega(V)$ ed esiste quindi un vettore $v_\alpha \in V$ tale che $\alpha(v) = \omega(v_\alpha, v)$ per ogni $v \in V$. I sottospazi Lagrangiani contenuti in $\ker \alpha$ sono tutti e soli quelli che contengono il vettore v_α . \square

XIII.7.2. Il teorema di Darboux per le due-forme. Enunciamo una *versione geometrica*, in termini di distribuzioni totalmente integrabili, del teorema di Darboux sulle forme canoniche delle due-forme alternate.

Lemma XIII.7.3. *Siano M una varietà differenziabile di dimensione m , \mathfrak{B} una distribuzione formalmente integrabile ed $\omega \in \Omega^2(M)$ una due-forma su M . Supponiamo che:*

$$(13.7.1) \quad d\omega(X_1, X_2, X_3) = 0, \quad \forall X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{B}.$$

Allora

$$(13.7.2) \quad \mathfrak{R}_\omega = \{X \in \mathfrak{B} \mid X\omega = 0 \text{ su } \mathfrak{B}\}.$$

è una distribuzione formalmente integrabile su M .

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $X, Y \in \mathfrak{R}_\omega$ e $Z \in \mathfrak{B}$, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 = d\omega(X, Y, Z) &= X\omega(Y, Z) - Y\omega(X, Z) + Z\omega(X, Y) \\ &\quad - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X) = -\omega([X, Y], Z). \end{aligned}$$

Infatti $\omega(X, Y) = 0$, $\omega(X, Z) = 0$, $\omega(Y, Z) = 0$ perché $X, Y \in \mathfrak{R}_\omega$, $Z \in \mathfrak{B}$, e $\omega([X, Z], Y) = 0$, $\omega([Y, Z], X) = 0$ perché $X, Y \in \mathfrak{R}_\omega$, $[X, Z], [Y, Z] \in \mathfrak{B}$. Questo dimostra che \mathfrak{R}_ω è formalmente integrabile. \square

Teorema XIII.7.4. *Sia $\omega \in \Omega^2(M)$ una due-forma alternata su una varietà differenziabile M di dimensione m . Siano \mathfrak{B}_0 e \mathfrak{B} due distribuzioni vettoriali di rango n_0 ed n rispettivamente, totalmente integrabili, con*

$$(13.7.3) \quad \mathfrak{K}_\omega = \{X \in \mathfrak{B} \mid X \lrcorner \omega = 0 \text{ su } \mathfrak{B}\} \subset \mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$$

e supponiamo che:

- (1) $\omega = 0$ su \mathfrak{B}_0 ;
- (2) per ogni $p \in M$, la forma ω_p ha rango costante $2r$ su \mathfrak{B}_p ;
- (3) $d\omega(X_1, X_2, X_3) = 0, \quad \forall X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{B}$.

Allora per ogni punto $p \in M$ possiamo trovare un intorno aperto U di p in M ed una distribuzione totalmente integrabile \mathfrak{B}_1 di rango $n - r$ su U con

$$(4) \quad \mathfrak{B}_0(U) \subset \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}(U) \text{ ed } \omega(X_1, X_2) = 0 \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{B}_1.$$

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per induzione sul rango $2r$ di ω . Se $r = 0$, la tesi è banalmente verificata con $U = M$ e $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}$. Supponiamo quindi $r > 0$ e la tesi vera quando ω abbia rango minore di $2r$.

Per il Lemma XIII.5.12, fissato un punto p di M possiamo trovare un intorno aperto U' di p in M ed una distribuzione totalmente integrabile $\mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{K}(U')$, di rango $n - 1$ su U' , con

$$\mathfrak{B}_0(U') \subset \mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}(U').$$

La restrizione di ω a \mathfrak{B}_2 ha rango $2r - 2$ e verifica le ipotesi del teorema con U' al posto di M , $n - 1$ al posto di n , \mathfrak{B}_2 al posto di \mathfrak{B} . Per l'ipotesi induttiva, possiamo trovare un intorno aperto U di p in U' ed una distribuzione vettoriale totalmente integrabile $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{K}(U)$, di rango $(n - 1) - (r - 1) = n - r$, con $\mathfrak{B}_0(U) \subset \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2(U)$, su cui la restrizione di ω sia identicamente nulla. La distribuzione \mathfrak{B}_1 soddisfa la (4). \square

Possiamo utilizzare il Teorema XIII.7.4 per ottenere una forma canonica di ω . Per il Teorema XIII.6.4, fissato un punto $p_0 \in M$, possiamo trovare un suo intorno U in M ed una forma $\alpha \in \Omega^1(U)$ tali che

$$d\alpha \equiv \omega \pmod{\mathfrak{B}(U)}.$$

Per il Teorema XIII.7.4 possiamo supporre che su U sia definita una distribuzione totalmente integrabile \mathfrak{B}_1 , di rango $n - r$, su cui ω sia identicamente nulla. In particolare

$$d\alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{B}_1}.$$

Utilizzando ancora il Teorema XIII.6.4, a meno di restringere ulteriormente l'intorno U di p_0 , possiamo supporre che vi sia una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tale che

$$df \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{B}_1}.$$

A meno di un'ulteriore restrizione dell'intorno U di p_0 , possiamo supporre che su U sia definito un sistema di coordinate x tali che

- (i) dx^{n+1}, \dots, dx^m generano l'ideale $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}(U)}$;
- (ii) $dx^1, \dots, dx^r, dx^{n+1}, \dots, dx^m$ generano l'ideale $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}_1}$.

Allora:

$$\begin{aligned}\alpha - df &= \sum_{i=1}^r a_j dx^j + \sum_{i=n+1}^m b_j dx^j, \\ \omega - d\alpha &= \sum_{i=n+1}^r \beta_j \wedge dx^j\end{aligned}$$

con $a_j, b_j \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $\beta_j \in \Omega^1(U)$. Differenziando otteniamo

$$d\alpha = \sum_{i=1}^r da_j \wedge dx^j + \sum_{i=n+1}^m db_j \wedge dx^j$$

e quindi

$$\omega = \sum_{i=1}^r da_j \wedge dx^j + \sum_{i=n+1}^m (db_j + \beta_j) \wedge dx^j$$

Poiché la restrizione di ω a \mathfrak{B} ha rango $2r$, abbiamo

$$da_1 \wedge \cdots \wedge da_r \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^r \neq 0 \quad \text{su } \mathfrak{B}_p, \forall p \in U.$$

Possiamo quindi scegliere nuove coordinate $y = (y^1, \dots, y^m)$ in un intorno aperto U' di p in U , con

$$\begin{cases} y^i = x^i & \text{se } 1 \leq i \leq r, n < i \leq m, \\ y^i = a_i & \text{se } r < i \leq 2r. \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto il seguente

Corollario XIII.7.5. *Sotto le ipotesi del Teorema XIII.7.4, per ogni punto $p \in M$ possiamo trovare una carta coordinata (U, x) con centro in p ed $m - n$ forme differenziali $\beta_{n+1}, \dots, \beta_m \in \Omega^1(U)$ tali che*

$$(13.7.4) \quad \mathcal{I}_{\mathfrak{B}}(U) = \langle dx^{n+1}, \dots, dx^m \rangle,$$

$$(13.7.5) \quad \omega = \sum_{i=1}^r dx^i \wedge dx^{r+i} + \sum_{i=n+1}^m \beta_i \wedge dx^i.$$

Dal Teorema XIII.7.4 ricaviamo il risultato di Darboux sulle due forme chiuse:

Teorema XIII.7.6. *Sia $\omega \in \Omega^2(M)$ una forma chiusa, di rango costante $2r$. Per ogni punto p di M possiamo trovare una carta coordinata (U, x) con centro in p tale che*

$$(13.7.6) \quad \omega = \sum_{i=1}^r dx^i \wedge dx^{r+i} \quad \text{su } U.$$

XIII.7.3. Il teorema di Darboux per le uno-forme. Una uno-forma $\alpha \in \Omega^1(M)$, che non si annulli in nessun punto di M , definisce una distribuzione d'iperpiani

$$(13.7.7) \quad \mathfrak{B}_\alpha = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \alpha(X) = 0\}.$$

Per il Lemma di Cartan, \mathfrak{B}_α è totalmente integrabile se e soltanto se

$$(13.7.8) \quad \alpha \wedge d\alpha = 0.$$

In questo caso, per ogni punto $p \in M$ possiamo trovare, in un opportuno intorno aperto U di p , un *fattore integrante* $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ con $f \neq 0$ in tutti i punti di U e

$$(13.7.9) \quad d(f\alpha) = 0, \quad f\alpha = dg \quad \text{con } g \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

Le $\{g = \text{costante}\}$ definiscono in U la foliazione associata alla distribuzione \mathfrak{B}_α .

Più in generale, quando \mathfrak{B}_α non sia totalmente integrabile, possiamo porci il problema di determinare foliazioni locali, di dimensione massimale, di varietà integrali di \mathfrak{B}_α .

Osserviamo che, se $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_\alpha$ è totalmente integrabile, allora

$$d\alpha(X_1, X_2) = X_1\alpha(X_2) - X_2\alpha(X_1) - \alpha([X_1, X_2]) = 0, \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{B}.$$

Dobbiamo quindi cercare le intersezioni della distribuzione \mathfrak{B}_α con le distribuzioni vettoriali massimali su cui si annulla la forma $d\alpha$.

Nel caso in cui il rango di $d\alpha$ su \mathfrak{B}_α sia costante, questo problema è risolto dal seguente

Teorema XIII.7.7 (Darboux). *Sia $\alpha \in \Omega^1(M)$ una forma differenziale che goda delle proprietà:*

$$(13.7.10) \quad \alpha(p) \neq 0, \quad \forall p \in M,$$

$$(13.7.11) \quad d\alpha(p) \text{ ha rango } 2r \text{ su } T_pM, \text{ per ogni } p \in M.$$

Sia $p \in M$. Allora:

(1) Se

$$(13.7.12) \quad \alpha(p) \wedge (d\alpha(p))^r \neq 0,$$

possiamo trovare un intorno aperto U di p in M ed una distribuzione totalmente integrabile $\mathfrak{B}^{m-r-1} \subset \mathfrak{X}(U)$, di rango $m-r-1$ in U , con

$$(13.7.13) \quad \mathfrak{B}^{m-r-1} \subset \mathfrak{B}_\alpha(U).$$

(2) Se

$$(13.7.14) \quad \alpha \wedge (d\alpha)^r = 0 \quad \text{in un intorno di } p,$$

possiamo trovare un intorno aperto U di p in M ed una distribuzione totalmente integrabile $\mathfrak{B}^{m-r} \subset \mathfrak{X}(U)$, di rango $m-r$ in U , con

$$(13.7.15) \quad \mathfrak{B}^{m-r} \subset \mathfrak{B}_\alpha(U).$$

Tali distribuzioni hanno rango massimo tra le distribuzioni totalmente integrabili contenute in $\mathfrak{B}_\alpha(U)$, per un intorno aperto U di p in M .

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo valga la (13.7.12). A meno di sostituire ad M un intorno aperto di p in M , possiamo supporre, per semplicità, che la (13.7.12) valga per tutti i punti di M .

Per il Teorema XIII.7.4, possiamo trovare un intorno aperto U di p in M ed una distribuzione vettoriale totalmente integrabile $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{X}(U)$, di rango $m-r$ su U , su cui $d\alpha$ si annulli identicamente. L'intersezione $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_\alpha$ è una distribuzione di rango $m-r-1$ per il Lemma XIII.7.2. Dico che $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_\alpha$ è totalmente integrabile. Infatti, se $X, Y \in \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_\alpha$, è $[X, Y] \in \mathfrak{B}_1$ perché \mathfrak{B}_1 è totalmente integrabile, ed $[X, Y] \in \mathfrak{B}_\alpha$ perché

$$\alpha([X, Y]) = -d\alpha(X, Y) + X\alpha(Y) - Y\alpha(X) = 0.$$

Consideriamo ora il caso in cui valga la (13.7.14). Possiamo supporre per semplicità che $\alpha \wedge (d\alpha)^r = 0$ su M . Per il Lemma XIII.7.2,

$$\mathfrak{R}_{d\alpha} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid d\alpha(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{X}(M)\} \subset \mathfrak{B}_\alpha.$$

e la distribuzione vettoriale

$$\mathfrak{B}_0 = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \alpha \wedge (X \lrcorner d\alpha) = 0\}$$

contiene $\mathfrak{R}_{d\alpha}$, ha rango $m - 2r + 1$ ed è contenuta in \mathfrak{B}_α .

La distribuzione \mathfrak{B}_0 è formalmente integrabile. Infatti

$$\alpha([X, Y]) = d\alpha(X, Y) - X\alpha(Y) + Y\alpha(X) = 0,$$

in quanto $\alpha(X) = 0$, $\alpha(Y) = 0$ e $d\alpha(X, Y) = (X \lrcorner d\alpha)(Y) = 0$ perché $(X \lrcorner d\alpha)$ è multiplo di α per $X \in \mathfrak{B}_0$. È poi, se $X, Y \in \mathfrak{B}_0$ e $Z \in \mathfrak{B}_\alpha$,

$$\begin{aligned} 0 &= d^2\alpha(X, Y, Z) = Xd\alpha(Y, Z) - Yd\alpha(X, Z) + Zd\alpha(X, Y) \\ &\quad - d\alpha([X, Y], Z) + d\alpha([X, Z], Y) - d\alpha([Y, Z], X) \\ &= -d\alpha([X, Y], Z), \end{aligned}$$

perché $d\alpha(Y, Z) = 0$, $d\alpha(X, Z) = 0$, $d\alpha(X, Y) = 0$, $d\alpha([X, Z], Y) = 0$, $d\alpha([Y, Z], X) = 0$ in quanto le forme $X \lrcorner d\alpha$ ed $Y \lrcorner d\alpha$ sono multiple di α ed $[X, Z], [Y, Z] \in \mathfrak{B}_\alpha$. Quindi $[X, Y] \lrcorner d\alpha$ si annulla su \mathfrak{B}_α e perciò è un multiplo di α .

Per il Teorema XIII.7.4, per ogni punto $p \in M$ possiamo trovare una distribuzione vettoriale \mathfrak{B}_1 in U , di rango $m - r$, che contenga $\mathfrak{B}_0(U)$ e su cui $d\alpha$ sia identicamente nulla. Per il Lemma XIII.7.2, la \mathfrak{B}_1 è contenuta in \mathfrak{B}_α . La dimostrazione è completa. \square

Dalla discussione sulle forme canoniche di una due forma fatta sopra, ricaviamo il

Teorema XIII.7.8 (Darboux). *Sia $\alpha \in \mathcal{Q}^1(M)$ una uno-forma, che non si annulli in nessun punto di M e tale che $d\alpha$ abbia rango costante $2r$ in tutti i punti di M . Sia $p \in M$. Allora:*

- (1) *Se $\alpha \wedge (d\alpha)^r$ non si annulla in p , esiste una carta coordinata (U, x) con centro in p tale che*

$$(13.7.16) \quad \alpha = dx^{2r+1} + \sum_{i=1}^r x^i \wedge dx^{r+i} \quad \text{in } U.$$

- (2) *Se $\alpha \wedge (d\alpha)^r$ è identicamente nulla in un intorno di p , esiste una carta coordinata (U, x) con centro in p tale che*

$$(13.7.17) \quad \alpha = \sum_{i=1}^r x^i \wedge dx^{r+i} \quad \text{in } U.$$

La coomologia di de Rham sulle varietà

XIV.1. Definizioni principali

Definizione XIV.1.1. I complessi di spazi vettoriali ed operatori differenziali

$$(14.1.1) \quad \begin{aligned} 0 &\rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \Omega^{q-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^q(M) \xrightarrow{d} \Omega^{q+1}(M) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

$$(14.1.2) \quad \begin{aligned} 0 &\rightarrow \Omega_c^0(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^1(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^2(M) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \Omega_c^{q-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^q(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^{q+1}(M) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

si dicono il *complesso di de Rham* ed il *complesso di de Rham pei supporti compatti*, rispettivamente. Poniamo

$$(14.1.3) \quad \mathcal{Z}^q(M) = \{\alpha \in \Omega^q(M) \mid d\alpha = 0\}, \quad (\text{forme chiuse})$$

$$(14.1.4) \quad \mathcal{B}^q(M) = \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega^{q-1}(M)\}, \quad (\text{forme esatte})$$

$$(14.1.5) \quad \mathcal{Z}_c^q(M) = \{\alpha \in \Omega_c^q(M) \mid d\alpha = 0\}, \quad (\text{forme chiuse a supporto compatto})$$

$$(14.1.6) \quad \mathcal{Z}_c^q(M) = \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega_c^{q-1}(M)\}, \quad (\text{forme esatte a supporto compatto}).$$

I quozienti

$$(14.1.7) \quad H^q(M) = \mathcal{Z}^q(M) / \mathcal{B}^q(M),$$

$$(14.1.8) \quad H_c^q(M) = \mathcal{Z}_c^q(M) / \mathcal{B}_c^q(M)$$

si dicono, rispettivamente, il q -esimo gruppo di coomologia di de Rham e il q -esimo gruppo di coomologia di de Rham a supporti compatti.

Proposizione XIV.1.2. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m e poniamo

$$(14.1.9) \quad H^*(M) = \bigoplus_{q=0}^m H^q(M), \quad H_c^*(M) = \bigoplus_{q=0}^m H_c^q(M).$$

Il prodotto esterno nell'algebra di Grassmann $\Omega^*(M)$ definisce per passaggio al quoziente una struttura di algebra di Grassmann su $H^*(M)$ ed $H_c^*(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che

$$(d\alpha) \wedge \beta = d(\alpha \wedge \beta), \quad \forall \alpha \in \Omega^{q_1}(M), \quad \beta \in \mathcal{Z}^{q_2}(M).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{q_1}(M) \wedge \mathcal{Z}^{q_2}(M) &\subset \mathcal{Z}^{q_1+q_2}(M) \quad \text{e} \\ \mathcal{B}^{q_1}(M) \wedge \mathcal{Z}^{q_2}(M) + \mathcal{Z}^{q_1}(M) \wedge \mathcal{B}^{q_2}(M) &\subset \mathcal{B}^{q_1+q_2}(M). \end{aligned} \quad \square$$

Se $\alpha \in \mathcal{L}^{q_1}(M)$, $\beta \in \mathcal{L}^{q_2}$ ed $[\alpha]$, $[\beta]$ sono le classi di coomologia da esse definite, poniamo

$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta].$$

Definizione XIV.1.3. Lo spazio vettoriale reale $H^*(M)$, con l'operazione ottenuta per passaggio al quoziente dal prodotto esterno, si dice *l'anello di coomologia reale* della varietà M .

XIV.2. Invarianza omotopica

Siano M, N varietà differenziabili ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ un'applicazione differenziabile. Si verifica facilmente che il pull-back e il differenziale sulle forme commutano. Quindi, per passaggio ai quozienti, la f definisce un'applicazione naturale

$$(14.2.1) \quad f^* : H^q(N) \rightarrow H^q(M)$$

ed anche, se f è propria, un'applicazione $f^* : H_c^q(N) \rightarrow H_c^q(M)$.

Lemma XIV.2.1. Sia M una varietà differenziabile, sia I un intervallo di \mathbb{R} , e consideriamo la proiezione $p_M : M \times I \rightarrow M$ e, per ogni $t \in I$, la sezione $s_t : M \ni x \rightarrow (x, t) \in M \times I$. Allora per ogni intero $q \geq 0$ ed ogni $t \in I$,

$$p_M^* : H^q(M) \rightarrow H^q(M \times I) \quad \text{ed} \quad s_t^* : H^q(M \times I) \rightarrow H^q(M)$$

sono isomorfismi, l'uno inverso dell'altro.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo $s_t \circ \pi = \text{id}_M$ per ogni $t \in I$, e quindi anche $\pi^* \circ s_t^*$ è l'identità in coomologia:

$$\begin{array}{ccc} H^q(M) & \xrightarrow{p_M^*} & H^q(M \times I) \\ & \searrow & \swarrow s_t^* \\ & H^q(M) & \end{array}$$

In particolare, $s_t^* : H^q(M \times I) \rightarrow H^q(M)$ è surgettiva, e $p_M^* : H^q(M) \rightarrow H^q(M \times I)$ è iniettiva.

Per ogni intero $q \geq 1$ indichiamo con $\Omega_M^q(M \times I)$ lo spazio delle q -forme su $M \times I$ che sono localmente combinazioni lineari di elementi di $p_M^*(\Omega^q(M))$, con coefficienti in $\mathcal{C}^\infty(M \times I)$. Abbiamo

$$\Omega^q(M \times I) = \Omega_M^q(M \times I) \oplus \Omega_M^{q-1}(M \times I) \wedge dt.$$

Sia $f \in \mathcal{L}^q(M \times I)$. Scriviamo $f = f^{(q)} + f^{(q-1)} \wedge dt$ con $f^{(h)} \in \Omega_M^h(M \times I)$. La condizione d'integrabilità $df = 0$ ci dà

$$\begin{cases} d_M s_t^* f^{(h)} = 0 & \forall t \in I, \\ \frac{d}{dt} s_t^* f^{(q)} + (-1)^q d_M s_t^* f^{(q-1)} = 0 & \forall t \in I. \end{cases}$$

Fissato $t_0 \in I$, definiamo una forma $g^{(q-1)} \in \Omega_M^{q-1}(M \times I)$ mediante

$$g^{(q-1)}(x, t) = p_M^* \left(\int_{t_0}^t s_\tau^* f^{(h-1)} d\tau \right) (x, t)$$

Allora $\phi^{(q)} = f - d_{M \times I} g^{(q-1)} \in \mathcal{L}^q(M \times I) \cap \Omega_M^q(M \times I)$. In particolare, ϕ soddisfa

$$\frac{d}{dt} s_t^* \phi^{(q)} = 0,$$

onde $s_t^* \phi^{(q)}$ è una forma $\psi \in \Omega^q(M)$, indipendente da $t \in I$, ed abbiamo $\phi^{(q)} = p_M^* \psi$. Inoltre

$$d_M \psi = d_M s_t^* \phi^{(q)} = s_t^* d_{M \times I} \phi^{(q)} = 0.$$

Questo dimostra che $p_M^* : H^q(M) \rightarrow H^q(M \times I)$ è anche surgettiva, e completa quindi la dimostrazione. \square

Abbiamo la

Proposizione XIV.2.2. *Due applicazioni differenziabili $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ omotopiche inducono la stessa applicazione in coomologia.*

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi esiste un'applicazione differenziabile

$$F = (f_t) \in \mathcal{C}^\infty(M \times I, N), \quad \text{con } F(\cdot, 0) = f_0, \quad F(\cdot, 1) = f_1.$$

È $f_t = F \circ s_t$ e quindi $f_t^* = s_t^* \circ F^*$. Per il Lemma XIV.2.1, per ogni $t \in [0, 1]$, s_t^* inverte p_M^* , ove $p_M : M \times [0, 1] \rightarrow M$ è la proiezione sul primo fattore. Abbiamo perciò, in coomologia, $f_0^* = (p_M^*)^{-1} \circ F^* = f_1^*$. \square

Corollario XIV.2.3. *Due varietà che abbiano lo stesso tipo d'omotopia hanno la stessa coomologia di de Rham.*

Ricordiamo, che, per varietà differenziabili, possiamo definire tutte le nozioni usuali dell'omotopia richiedendo che tutte le mappe considerate siano differenziabili. Ad esempio, nell'enunciato del corollario, il fatto che due varietà M ed N abbiano lo stesso tipo d'omotopia si può formulare nel modo seguente:

Esistono applicazioni differenziabili $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$, $g \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$, $\Phi = \{\phi_t\} \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], M)$, $\Psi = \{\psi_t\} \in \mathcal{C}^\infty(N \times [0, 1], N)$, tali che

$$\begin{cases} \phi_0 = g \circ f, & \psi_0 = f \circ g, \\ \phi_1 = \text{id}_M, & \psi_1 = \text{id}_N. \end{cases}$$

XIV.3. Fibrati vettoriali

In un fibrato vettoriale $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ la base M è un retratto di deformazione differenziabile dello spazio totale E . Abbiamo perciò

Teorema XIV.3.1. *Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale. L'applicazione*

$$(14.3.1) \quad \pi^* : H^*(M) \longrightarrow H^*(E)$$

indotta dal pullback di forme è un isomorfismo.

Indichiamo con

$$(14.3.2) \quad \Omega_{ch}^q(E) = \{\alpha \in \Omega^q(E) \mid \pi(\text{supp } \alpha) \Subset M\}$$

lo spazio delle q -forme alternate, di classe \mathcal{C}^∞ su E , il cui supporto sia contenuto nell'immagine inversa di un compatto di M . Poiché il differenziale non accresce i supporti, abbiamo un sottocomplesso del complesso di de Rham:

$$(14.3.3) \quad 0 \longrightarrow \Omega_{ch}^0(E) \xrightarrow{d} \Omega_{ch}^1(E) \xrightarrow{d} \Omega_{ch}^2(E) \longrightarrow \dots$$

Poniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{ch}^q(E) &= \{\alpha \in \Omega_{ch}^q(E) \mid d\alpha = 0\}, \\ \mathcal{B}_{ch}^q(E) &= d\Omega_{ch}^{q-1}(E), \\ H_{ch}^q(E) &= \mathcal{Z}_{ch}^q(E) / \mathcal{B}_{ch}^q(E). \end{aligned}$$

Definizione XIV.3.2. Chiamiamo $H_{ch}^q(E)$ il q -esimo gruppo di coomologia di de Rham con supporti compatti nella base.

Con una dimostrazione analoga a quella del Lemma XIV.2.1 si verifica che vale il

Teorema XIV.3.3. Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale di rango n . Il pullback di forme definisce un isomorfismo

$$(14.3.4) \quad \pi^* : H_c^*(M) \longrightarrow H_{ch}^*(E).$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'applicazione $F = \{f_i\} : E \times \mathbb{R} \rightarrow E$ definita da $f_i(\sigma) = t\sigma$ per ogni $\sigma \in E$ e $t \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \in \Omega_{ch}^q(E)$, allora $F^*\alpha \in \Omega_{ch}^q(E \times \mathbb{R})$ per il fibrato vettoriale $E \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} M$ di rango $n + 1$ ottenuto dalla somma diretta di ξ con il fibrato banale in rette su M . Possiamo scrivere

$$F^*\alpha = \alpha_0 + dt \wedge \alpha_1,$$

ove $\alpha_i \in \Omega_E^{q-i}(E \times \mathbb{R}) \cap \Omega_{ch}^{q-i}(E \times \mathbb{R})$. Se $d_E \alpha = 0$, allora $d_{E \times \mathbb{R}} F^*\alpha = 0$, e questo dà

$$d_E \alpha_0 = 0, \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial t} = d_E \alpha_1.$$

Se

$$\beta(t) = \int_0^t dt \wedge \alpha_1 \in \Omega_{ch}^{q-1}(E \times \mathbb{R}),$$

allora

$$F^*\alpha - d_{E \times \mathbb{R}} \beta = \alpha_0(0) = \pi^*(\alpha|_M),$$

ove abbiamo identificato M alla sezione nulla di ξ . Questo dimostra che l'applicazione (14.3.4) è surgettiva. Poiché la composizione dell'inclusione $\iota : M \hookrightarrow E$ e della proiezione π è l'identità su M , la $\iota^* \circ \pi^*$ è l'identità in coomologia e quindi in particolare π^* è anche iniettiva. Quindi (14.3.4) è un isomorfismo. \square

XIV.4. Coomologia di deRham e rivestimenti

Siano M, N due varietà topologiche e $\pi : N \rightarrow M$ un'applicazione di rivestimento. Il dato di una struttura differenziale su una delle due determina univocamente una struttura differenziabile sull'altra, che renda π un diffeomorfismo locale. Vale la seguente

Proposizione XIV.4.1. *Siano M, N due varietà differenziabili e $\pi \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$ un rivestimento regolare a un numero finito di fogli. Allora $\pi^* : H^*(M) \rightarrow H^*(N)$ è iniettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi il gruppo $\mathbf{G} = \mathbf{Aut}(\pi)$ degli automorfismi del rivestimento¹, che opera in modo semplicemente transitivo sulle fibre del rivestimento, è un gruppo finito e i suoi elementi sono diffeomorfismi di N . Definiamo

$$(14.4.1) \quad \lambda : \Omega^*(N) \ni \alpha \rightarrow \frac{1}{|\mathbf{G}|} \sum_{g \in \mathbf{G}} g^* \alpha \in \Omega^*.$$

Indichiamo con

$$\Omega_{\mathbf{G}}^*(N) = \{\alpha \in \Omega^*(N) \mid g^* \alpha = \alpha, \forall g \in \mathbf{G}\}$$

l' \mathbb{R} -sottospazio vettoriale di $\Omega^*(N)$ delle forme \mathbf{G} -invarianti. Abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(N) & \xrightarrow{\lambda} & \Omega_{\mathbf{G}}^*(N) \\ & \swarrow \pi^* & \nearrow \pi^* \\ & \Omega^*(M) & \end{array}$$

in cui la composizione $\lambda \circ \pi^*$ è un isomorfismo. Indichiamo con μ la sua inversa. Osserviamo che $d_N \Omega_{\mathbf{G}}^*(N) \subset \Omega_{\mathbf{G}}^*(N)$, in quanto λ commuta con il differenziale d_N . Abbiamo

$$\mu(\pi^*(\alpha)) = \alpha, \quad \mu(d_N \beta) = d_M \mu(\beta), \quad \forall \beta \in \Omega_{\mathbf{G}}^*(N).$$

Sia $\alpha \in \Omega^q(M)$, con $d_M \alpha = 0$. Se $\pi^* \alpha = d_N \beta$, con $\beta \in \Omega^{q-1}(N)$, abbiamo, poiché $\pi^* \circ \mu$ è l'identità su $\Omega_{\mathbf{G}}^*(N)$,

$$\pi^* \alpha = \lambda(\pi^* \alpha) = \lambda(d_N \beta) = d_N \lambda(\beta) = d_N \pi^*(\mu(\lambda(\beta))) = \pi^*(d_M \mu(\lambda(\beta))).$$

da cui otteniamo che $\alpha = d_M \mu(\lambda(\beta))$ è coomologa a zero.

□

XIV.5. Complessi differenziali

Ricordiamo qui alcuni fatti algebrici generali che ci saranno utili nel seguito.

¹Gli elementi di $\mathbf{Aut}(\pi)$ si dicono in inglese *deck transformations*. Il rivestimento si dice regolare se i suoi automorfismi operano transitivamente sulle fibre. Il rivestimento universale è regolare, con gruppo degli automorfismi isomorfo al gruppo fondamentale della base.

Definizione XIV.5.1. Un *complesso differenziale* è il dato di uno spazio vettoriale \mathbf{C} su un campo \mathbb{k} , di una sua \mathbb{Z} -gradazione $\mathbf{C} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathbf{C}^q$ e di un omomorfismo $d_C : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, omogeneo di grado 1, con $d_C^2 = 0$. Indichiamo il complesso mediante

$$(14.5.1) \quad \dots \rightarrow \mathbf{C}^{q-1} \xrightarrow{d_C} \mathbf{C}^q \xrightarrow{d_C} \mathbf{C}^{q+1} \rightarrow \dots$$

La *coomologia* di (22.3.1) è la somma diretta di spazi vettoriali:

$$(14.5.2) \quad H(\mathbf{C}, d_C) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^q(\mathbf{C}, d_C),$$

ove $H^q(\mathbf{C}, d_C) = (\ker d_C \cap \mathbf{C}^q) / d_C(\mathbf{C}^{q-1})$.

Lo spazio vettoriale $H^q(\mathbf{C}, d_C)$ si dice anche il q -esimo gruppo di coomologia di (22.3.1).

Dati due complessi differenziali (\mathbf{A}, d_A) e (\mathbf{B}, d_B) sullo stesso campo \mathbb{k} , un'applicazione lineare $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ si dice un *omomorfismo di complessi* se

$$(14.5.3) \quad f(\mathbf{A}^q) \subset \mathbf{B}^q, \quad \forall q \in \mathbb{Z},$$

$$(14.5.4) \quad f \circ d_A = d_B \circ f.$$

Essa induce un'applicazione naturale

$$(14.5.5) \quad f_* : H^q(\mathbf{A}, d_A) \rightarrow H^q(\mathbf{B}, d_B),$$

che fa corrispondere alla classe $[a_q]$ di $a_q \in \ker d_A \cap \mathbf{A}^q$ la classe $[f(a_q)]$ di $f(a_q) \in \ker d_B \cap \mathbf{B}^q$.

Una successione

$$(14.5.6) \quad \dots \rightarrow \mathbf{V}^{q-1} \xrightarrow{f_{q-1}} \mathbf{V}^q \xrightarrow{f_q} \mathbf{V}^{q+1} \rightarrow \dots$$

di \mathbb{k} -spazi vettoriali su di applicazioni \mathbb{k} -lineari si dice *esatta* se

$$(14.5.7) \quad f_{q-1}(\mathbf{V}^{q-1}) = \ker f_q, \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Una successione esatta della forma

$$(14.5.8) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{B} \xrightarrow{\beta} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

si dice una *successione esatta corta*.

Se (\mathbf{A}, d_A) , (\mathbf{B}, d_B) e (\mathbf{C}, d_C) sono complessi differenziali di spazi vettoriali su \mathbb{k} e la (22.3.8) è una successione esatta corta di omomorfismi di complessi, definiamo una corrispondenza tra i cocicli di (\mathbf{C}, d_C) e quelli di (\mathbf{A}, d_A) mediante

$$(14.5.9) \quad \begin{cases} c_q \in \mathbf{C}^q, & d_C c_q = 0, \\ \exists b_q \in \mathbf{B}^q, & \beta(b_q) = c_q, \\ \exists! a_{q+1} \in \mathbf{A}^{q+1}, & \alpha(a_{q+1}) = d_B b_{q+1}, \\ d_A a_{q+1} = 0. \end{cases}$$

L'esistenza di b_q è conseguenza della surgettività di β . L'esistenza e unicità di a_{q+1} segue dal fatto che $\beta(d_B b_q) = d_C \beta(b_q) = d_C c_q = 0$ e dall'esattezza di (22.3.8). Poiché α è iniettiva, otteniamo che $d_A(a_{q+1}) = 0$ perché $\alpha(d_A a_{q+1}) = d_B \alpha(a_{q+1}) = d_B^2 b_q = 0$.

Per verificare che la corrispondenza $c_q \rightarrow a_{q+1}$ definisce un'applicazione

$$(14.5.10) \quad \Delta_q : H^q(\mathbf{C}, d_C) \rightarrow H^{q+1}(\mathbf{A}, d_A)$$

in coomologia, è sufficiente verificare che a_{q+1} è coomologo a 0 se lo è c_q . Supponiamo quindi che sia $c_q = d_C c_{q-1}$ per qualche $c_{q-1} \in \mathbf{C}^{q-1}$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} & \exists b_{q-1} \in \mathbf{B}^{q-1} \text{ t.c. } \beta(b_{q-1}) = c_{q-1} \\ \implies & \beta(b_q) = c_q = d_C c_{q-1} = d_C \beta(b_{q-1}) = \beta(d_B b_{q-1}) \\ \implies & \beta(b_q - d_B b_{q-1}) = 0 \\ \implies & \exists! a_q \in \mathbf{A}^q \text{ t.c. } \alpha(a_q) = b_q - d_B b_{q-1} \\ \implies & \alpha(d_A a_q) = d_B \alpha(a_q) = d_B (b_q - d_B b_{q-1}) = d_B b_q = \alpha(a_{q+1}) \\ \implies & a_{q+1} = d_A a_q. \end{aligned}$$

Quindi la Δ_q risulta ben definita da

$$(14.5.11) \quad \Delta([c_q]) = [a_{q+1}].$$

Abbiamo il

Teorema XIV.5.2. *Se (22.3.8) è una successione esatta corta di complessi differenziali di spazi vettoriali su \mathbb{k} , allora abbiamo una successione esatta lunga*

$$(14.5.12) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \dots & \longrightarrow & H^{q-1}(\mathbf{B}, d_B) & \xrightarrow{\beta_*} & H^{q-1}(\mathbf{C}, d_C) \\ \xrightarrow{\Delta_{q-1}} & H^q(\mathbf{A}, d_A) & \xrightarrow{\alpha_*} & H^q(\mathbf{B}, d_B) & \xrightarrow{\beta_*} & H^q(\mathbf{C}, d_C) & \\ \xrightarrow{\Delta_q} & H^{q+1}(\mathbf{A}, d_A) & \longrightarrow & \dots & & & \end{array}$$

Nello studio dei gruppi di coomologia dei complessi, è spesso utile il seguente lemma algebrico:

Teorema XIV.5.3 (Lemma dei cinque). *Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe e colonne esatte:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Abbiamo supposto cioè che α_1 sia surgettiva, α_2 e α_4 siano isomorfismi ed α_5 sia iniettiva. Allora α_3 è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che α_3 è iniettiva. Sia $a_3 \in \mathbf{A}_3$, con $\alpha_3(a_3) = 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha_4(f_3(a_3)) = g_3(\alpha_3(a_3)) = 0 &\implies f_3(a_3) = 0 \implies \exists a_2 \in \mathbf{A}_2 \text{ t.c. } a_3 = f_2(a_2) \\ &\implies \alpha_3(f_2(a_2)) = g_2(\alpha_2(a_2)) = 0 \implies \exists b_1 \in \mathbf{B}_1 \text{ t.c. } \alpha_2(a_2) = g_1(b_1) \\ &\implies \exists a_1 \in \mathbf{A}_1 \text{ t.c. } \alpha_1(a_1) = b_1, \implies \alpha_2(a_2) = g_1(\alpha_1(a_1)) = \alpha_2(f_1(a_1)) \\ &\implies a_2 = f_1(a_1) \implies a_3 = f_2 \circ f_1(a_1) = 0. \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che α_3 è surgettiva. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \exists a_4 \in \mathbf{A}_4 \text{ t.c. } g_3(b_3) = \alpha_4(a_4) \implies 0 = g_4 \circ g_3(b_3) = g_4 \circ \alpha_4(a_4) = \alpha_5 \circ f_4(a_4) \\ \implies f_4(a_4) = 0 \implies \exists a_3 \in \mathbf{A}_3 \text{ t.c. } f_3(a_3) = a_4 \\ \implies g_3(b_3) = \alpha_4 \circ f_3(a_3) = g_3(\alpha_3(a_3)) \implies g_3(b_3 - \alpha_3(a_3)) = 0 \\ \implies \exists b_2 \in \mathbf{B}_2 \text{ t.c. } g_2(b_2) = b_3 - \alpha_3(a_3) \implies \exists a_2 \in \mathbf{A}_2 \text{ t.c. } \alpha_2(a_2) = b_2 \\ \implies b_3 - \alpha_3(a_3) = g_2 \circ \alpha_2(a_2) = \alpha_3(f_2(a_2)) \implies b_3 = \alpha_3(a_3 + f_2(a_2)). \end{aligned}$$

□

Dalla dimostrazione segue che

Teorema XIV.5.4 (Lemmi dei quattro). *Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe esatte:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Se α_1 è surgettiva ed α_2, α_4 iniettive, allora α_3 è iniettiva.

Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Se α_5 è iniettiva ed α_2, α_4 surgettive, allora α_3 è surgettiva.

XIV.6. Le successioni di Mayer-Vietoris

La successione di Mayer-Vietoris ² è uno degli strumenti fondamentali per il calcolo dei gruppi di coomologia. Essa è una conseguenza del Teorema XIV.5.2 e del

Lemma XIV.6.1. *Siano A, B due aperti di una varietà M . Allora, per ogni intero q , la successione corta*

$$(14.6.1) \quad 0 \rightarrow \Omega^q(A \cup B) \xrightarrow{\alpha} \Omega^q(A) \oplus \Omega^q(B) \xrightarrow{\beta} \Omega^q(A \cap B) \rightarrow 0,$$

ove

$$(14.6.2) \quad \begin{cases} \alpha(f) = f|_A \oplus f|_B & \forall f \in \Omega^q(A \cup B), \\ \beta(g \oplus h) = g|_{A \cap B} - h|_{A \cap B} & \forall g \in \Omega^q(A), h \in \Omega^q(B), \end{cases}$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. L'iniettività di α e il fatto che l'immagine di α sia uguale al nucleo di β sono evidenti. La surgettività di β segue dall'esistenza di una partizione dell'unità su $A \cup B$ subordinata al ricoprimento $\{A, B\}$. Se $\phi_A, \phi_B \in \mathcal{C}^\infty(A \cup B)$ e $\text{supp } \phi_A \subset A$, $\text{supp } \phi_B \subset B$, e $\phi_A + \phi_B = 1$ su $A \cup B$, allora, data $f \in \Omega^q(A \cap B)$, possiamo definire

$$f_A = \begin{cases} \phi_B f & \text{su } A \cap B, \\ 0 & \text{su } A \setminus B, \end{cases}, \quad f_B = \begin{cases} -\phi_A f & \text{su } A \cap B, \\ 0 & \text{su } B \setminus A. \end{cases}$$

Allora $f_A \in \Omega^q(A)$, $f_B \in \Omega^q(B)$ ed $f_A - f_B = f$ su $A \cap B$. □

Otteniamo quindi, per il Teorema XIV.5.2, il

Teorema XIV.6.2 (Mayer-Vietoris). *Se A, B sono due aperti di una varietà differenziabile M abbiamo una successione esatta lunga*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^{q-1}(A) \oplus H^{q-1}(B) & \longrightarrow & H^{q-1}(A \cap B) & & \\ & & & & & & \\ \longrightarrow & H^q(A \cup B) & \longrightarrow & H^q(A) \oplus H^q(B) & \longrightarrow & H^q(A \cap B) & \\ & & & & & & \\ \longrightarrow & H^{q+1}(A \cup B) & \longrightarrow & H^{q+1}(A) \oplus H^{q+1}(B) & \longrightarrow & \dots & \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Il risultato segue dal Teorema XXII.3.2. L'applicazione Δ_q si può descrivere nel modo seguente. Se $f \in \mathcal{L}^q(A \cap B)$ ed $f_A \in \Omega^q(A)$, $f_B \in \Omega^q(B)$ sono forme tali che $f = f_A - f_B$ su $A \cap B$, allora

$$(14.6.3) \quad g = \begin{cases} df_A & \text{su } A, \\ df_B & \text{su } B, \end{cases}$$

²Leopold Vietoris (Radkersburg, 4 giugno 1891 - Innsbruck, 9 aprile 2002), matematico austriaco. I suoi principali contributi sono nel campo della topologia e della storia della matematica.

Meinhard E. Mayer (nato nel 1929 in Romania), ha insegnato a partire dal 1966 presso l'Università della California ad Irvine. I suoi interessi principali sono stati i metodi geometrici delle teorie di gauge e le applicazioni delle ondelette alla turbolenza. Ha contribuito alla teoria dei bosoni-vettori (W e Z bosoni) e dell'unificazione elettro-debole, che sarebbe divenuta poi il modello standard.

definisce un elemento di $\mathcal{Z}^{q+1}(A \cup B)$, la cui classe di coomologia $[g]$ in $H^{q+1}(A \cup B)$ è l'immagine mediante Δ_q della classe $[f]$ di f in $H^q(A \cap B)$. \square

XIV.7. Alcuni esempi

Esempio XIV.7.1. Consideriamo la circonferenza $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Siano $A = S^1 \setminus \{-i\}$, $B = S^1 \setminus \{i\}$. Allora A e B sono diffeomorfi ad \mathbb{R} , $A \cap B$ all'unione disgiunta di due copie di \mathbb{R} . Risulterà quindi:

$$H^q(A) \simeq H^q(B) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{se } q \neq 0, \end{cases} \quad H^q(A \cap B) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{se } q \neq 0. \end{cases}$$

Dalla successione di Mayer-Vietoris ricaviamo allora che $H^q(S^1) = 0$ se $q \neq 0, 1$. Abbiamo poi

$$0 \longrightarrow H^0(S^1) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow H^1(S^1) \longrightarrow 0.$$

È $H^0(S^1) \simeq \mathbb{R}$, perché S^1 è connesso per archi. Quindi la dimensione dello spazio vettoriale $H^1(S^1)$ si ricava da

$$\begin{aligned} 0 &= \dim_{\mathbb{R}} H^0(S^1) - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 - \dim_{\mathbb{R}} H^1(S^1) \\ &= 1 - 2 + 2 - \dim_{\mathbb{R}} H^1(S^1). \end{aligned}$$

È perciò $H^1(S^1) \simeq \mathbb{R}$.

Esempio XIV.7.2. Consideriamo la sfera

$$S^n = \{x = (x^0, x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}, \quad n > 1.$$

Siano $A = \{x \in S^n \mid x^0 > -1\}$, $B = \{x \in S^n \mid x^0 < 1\}$. Poiché A e B sono diffeomorfi ad \mathbb{R}^n , ed $A \cap B$ è connesso, otteniamo dalla successione di Mayer-Vietoris gli isomorfismi

$$H^q(S^n) \simeq H^{q-1}(A \cap B), \quad \text{se } q \neq 0, 1,$$

e la successione esatta

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(S^n) \simeq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow H^0(A \cap B) \simeq \mathbb{R} \\ &\longrightarrow H^1(S^n) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Dalla successione esatta ricaviamo che $H^1(S^n) = 0$ se $n > 1$. Infine, $A \cap B$ si retrae per deformazione su $S^{n-1} = \{x \in S^n \mid x^0 = 0\}$. Vedremo che questo dà $H^q(A \cap B) \simeq H^q(S^{n-1})$ per ogni $q \in \mathbb{Z}$. Ricaviamo così per ricorrenza, utilizzando l'esempio precedente, che

$$H^q(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, n, \\ 0 & \text{se } q \neq 0, n. \end{cases}$$

Esempio XIV.7.3. Se $n > 1$, il rivestimento universale dello spazio proiettivo $\mathbb{R}P^n$ è il rivestimento a due fogli $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$. Abbiamo quindi, per la Proposizione XIV.4.1, applicazioni iniettive $\pi^* : H^q(\mathbb{R}P^n) \rightarrow H^q(S^n)$. In particolare, otteniamo che

$$H^q(\mathbb{R}P^n) = 0 \quad \text{se } 0 < q < n.$$

Inoltre, $H^0(\mathbb{R}P^n) \simeq \mathbb{R}$ perché $\mathbb{R}P^n$ è connesso.

Per calcolare $H^n(\mathbb{R}P^n)$ utilizziamo la successione esatta di Mayer-Vietoris. Sia $\Sigma = \{x^0 = 0\}$ un iperpiano di $\mathbb{R}P^n$. Fissiamo un punto p_0 che non appartenga a Σ , ad esempio il punto di coordinate omogenee $(1, 0, \dots, 0)$. Allora $A = \mathbb{R}P^n \setminus \{p_0\}$ è un intorno tubolare di Σ . La proiezione $\pi : A \rightarrow \Sigma$ associa ad un punto p distinto da p_0 il punto d'intersezione $\pi(p)$ di Σ con la retta pp_0 .

Sia $B = \mathbb{R}P^n \setminus \Sigma$. Abbiamo allora, indicando con \simeq l'equivalenza omotopica,

$$A = \mathbb{R}P^n \setminus \{p_0\} \simeq \mathbb{R}P^{n-1},$$

$$B = \mathbb{R}P^n \setminus \Sigma \simeq \mathbb{R}^n,$$

$$A \cup B = \mathbb{R}P^n,$$

$$A \cap B \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}.$$

Abbiamo perciò la successione esatta in coomologia

$$0 \longrightarrow H^{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^n(\mathbb{R}P^n) \longrightarrow 0,$$

perché $H^{n-1}(\mathbb{R}P^n) \simeq \{0\}$, $H^{n-1}(S^{n-1}) \simeq \mathbb{R}$, $H^n(\mathbb{R}P^{n-1}) \simeq \{0\}$.

Poiché $H^1(\mathbb{R}P^1) \simeq H^1(S^1) \simeq \mathbb{R}$, otteniamo per ricorrenza che

$$H^n(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ \{0\} & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Esempio XIV.7.4. Siano m, n interi con $1 \leq m < n$ e sia Σ un m -piano di $\mathbb{R}P^n$. Sia $M = \mathbb{R}P^n \setminus \Sigma$. Scegliamo un $(n-m-1)$ -piano Σ' di $\mathbb{R}P^n$ con $\Sigma \cap \Sigma' = \emptyset$. Per ogni $q \in M$, l' $(m+1)$ -piano per q e Σ interseca Σ' in uno ed un solo punto $p = \pi(q)$. Poiché $(q\Sigma) \setminus \Sigma \simeq \mathbb{R}^{m+1}$, la $\tau = (M \xrightarrow{\pi} \Sigma')$ definisce un intorno tubolare di Σ' in $\mathbb{R}P^n$, con spazio totale M . L' $(n-m-1)$ -piano Σ' è quindi un retratto di deformazione di M . Otteniamo perciò

$$H^q(\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^m) \simeq H^q(\mathbb{R}P^{n-m-1}), \quad \forall q > 0.$$

Ad esempio,

$$H^q(\mathbb{R}P^{2m+1} \setminus \mathbb{R}P^0) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$H^q(\mathbb{R}P^{2m} \setminus \mathbb{R}P^0) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 2m - 1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$H^q(\mathbb{R}P^3 \setminus \mathbb{R}P^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$H^q(\mathbb{R}P^5 \setminus \mathbb{R}P^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 3, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$H^q(\mathbb{R}P^5 \setminus \mathbb{R}P^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$H^q(\mathbb{R}P^5 \setminus \mathbb{R}P^3) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esempio XIV.7.5. Consideriamo ora lo spazio proiettivo $\mathbb{C}P^n$. Sia $\Sigma = \{z^0 = 0\}$ un suo iperpiano e p_0 un punto non appartenente a Σ , ad esempio il punto di coordinate omogenee $(1, 0, \dots, 0)$. Allora $A = \mathbb{C}P^n \setminus \{p_0\} = \{|z^1|^2 + \dots + |z^n|^2 > 0\}$ è lo spazio totale di un suo intorno tubolare in $\mathbb{C}P^n$. Poniamo $B = \mathbb{C}P^n \setminus \Sigma$. Allora

$$\begin{aligned} A &= \{|z^1|^2 + \dots + |z^n|^2 > 0\} \simeq \mathbb{C}P^{n-1}, \\ B &= \mathbb{C}P^n \setminus \Sigma = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \\ A \cup B &= \mathbb{C}P^n, \\ A \cap B &= \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \simeq S^{2n-1}, \end{aligned}$$

ove \simeq indica equivalenza omotopica. Otteniamo allora la successione esatta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(\mathbb{C}P^n) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{C}P^{n-1}) & \longrightarrow & H^1(S^{2n-1}) \\ & & \longrightarrow & H^2(\mathbb{C}P^n) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow H^{q-1}(S^{2n-1}) \\ & & \longrightarrow & H^q(\mathbb{C}P^n) & \longrightarrow & H^q(\mathbb{C}P^{n-1}) & \longrightarrow H^q(S^{2n-1}) \\ & & \longrightarrow & \dots & & & \end{array}$$

da cui otteniamo

$$H^q(\mathbb{C}P^n) \simeq H^q(\mathbb{C}P^{n-1}), \quad \forall q \leq 2n-2, \quad H^{2n-1}(\mathbb{C}P^n) = 0, \quad H^{2n}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{R}.$$

Ricaviamo perciò, per ricorrenza,

$$H^q(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 2, \dots, 2n, \\ 0 & \text{se } q = 1, 3, \dots, 2n-1. \end{cases}$$

Esempio XIV.7.6. Siano m, n due interi con $1 \leq m < n$ e Σ un m -piano proiettivo complesso in $\mathbb{C}P^n$. Se scegliamo un $(n-m-1)$ -piano proiettivo complesso Σ' che non intersechi Σ , l'applicazione che fa corrispondere ad ogni punto q di $M = \mathbb{C}P^n \setminus \Sigma$ l'unico punto $p = \pi(q)$ di Σ' in cui l' $(m+1)$ -piano proiettivo complesso per Σ e q interseca Σ' definisce un intorno tubolare $\tau = (M \xrightarrow{\pi} \Sigma')$ di Σ' in $\mathbb{C}P^n$. Otteniamo perciò

$$H^q(\mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 2, \dots, 2(n-m-1), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esempio XIV.7.7. Siano M ed N due sottovarietà proprie connesse di \mathbb{R}^n che si intersechino in un punto p_0 . Possiamo scegliere due loro intorni tubolari con spazi totali A e B la cui intersezione $A \cap B$ sia un intorno contrattile di p_0 . Dalla successione esatta di Mayer-Vietoris possiamo allora dedurre che

$$H^0(A \cap B) = \mathbb{R}, \quad H^q(A \cup B) = H^q(A) \oplus H^q(B), \quad \text{per ogni } q > 0.$$

Esempio XIV.7.8. Siano M una varietà connessa di dimensione $m \geq 2$, $p_0 \in M$ ed $N = M \setminus \{p_0\}$. Allora $H^q(M) \simeq H^q(N)$ per ogni $q \neq m, m-1$. Infatti, se A è

un intorno contrattile di p_0 in M , l'intersezione $A \cap N$ è omotopicamente equivalente alla sfera S^{m-1} . La successione di Mayer-Vietoris ci dà quindi l'isomorfismo desiderato se $1 \leq q \leq m - 2$. Abbiamo poi la successione esatta

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^{m-1}(M) \longrightarrow H^{m-1}(N) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\longrightarrow H^m(M) \longrightarrow H^m(N) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Una varietà connessa di dimensione m ha m -esimo gruppo di coomologia di de Rham uguale ad \mathbb{R} se compatta ed orientabile, uguale a 0 altrimenti. Avremo quindi $H^{m-1}(M) \simeq H^{m-1}(N)$ se M è compatta e orientabile, $H^{m-1}(N) \simeq H^{m-1}(M) \oplus \mathbb{R}$ altrimenti.

Esempio XIV.7.9. Siano M_1, M_2 due varietà connesse di dimensione m . Allora

$$H^q(M_1 \sharp M_2) = H^q(M_1) \oplus H^q(M_2) \quad \text{se } q \neq m - 1, m.$$

Esempio XIV.7.10. Introduciamo su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la relazione di equivalenza

$$x \sim y \iff y = 2^k x, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Allora $M = (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) / \sim$ ha un'unica struttura di varietà differenziabile di dimensione n per cui la proiezione nel quoziente $\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow M$ sia un diffeomorfismo locale. Per $n = 1$ la M è diffeomorfa ad S^1 e per $n = 2$ al toro $T^2 = S^1 \times S^1$. Supponiamo quindi nel seguito che $n \geq 3$.

Possiamo ricoprire M con i due aperti

$$A = \pi(\{1 < |x| < 2\}), \quad B = \pi(\{\frac{3}{2} < |x| < 3\}).$$

Allora A e B sono omotopicamente equivalenti ad S^{n-1} ed $A \cap B$ all'unione disgiunta di due copie di S^{n-1} . Otteniamo allora la successione esatta di Mayer-Vietoris:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ &\longrightarrow H^1(M) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow H^q(M) \longrightarrow 0 \quad \text{per } 2 \leq q \leq m - 2 \\ 0 &\longrightarrow H^{m-1}(M) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ &\longrightarrow H^m(M) = \mathbb{R} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Otteniamo perciò

$$H^q(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 1, (m - 1), m, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

XIV.8. La successione di Mayer-Vietoris a supporti compatti

Costruiamo ora la successione esatta di Mayer-Vietoris per le forme a supporto compatto.

Lemma XIV.8.1. Siano A, B due aperti della varietà differenziabile M . Allora, per ogni intero non negativo q abbiamo la successione esatta

$$(14.8.1) \quad 0 \rightarrow \Omega_c^q(A \cap B) \xrightarrow{\alpha} \Omega_c^q(A) \oplus \Omega_c^q(B) \xrightarrow{\beta} \Omega_c^q(A \cup B) \rightarrow 0$$

ove

$$\begin{cases} \alpha(f) = f \oplus f & \forall f \in \Omega_c^q(A \cap B), \\ \beta(f \oplus g) = f - g & \forall f \in \Omega_c^q(A), g \in \Omega_c^q(A \cap B). \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. L'iniettività di α e il fatto che l'immagine di α sia il nucleo di β sono ovvii. La surgettività di β è conseguenza della partizione dell'unità. Se $\phi_A, \phi_B \in \mathcal{C}^\infty(A \cup B)$ e $\text{supp } \phi_A \subset A$, $\text{supp } \phi_B \subset B$, e $\phi_A + \phi_B = 1$ su $A \cup B$, allora, data $f \in \Omega_c^q(A \cup B)$, possiamo definire

$$f_A = \phi_A f, \quad f_B = \phi_B f.$$

Allora $f_A \in \Omega_c^q(A)$, $f_B \in \Omega_c^q(B)$ ed $f_A - f_B = f$ su $A \cup B$. \square

Come conseguenza abbiamo

Teorema XIV.8.2 (Mayer-Vietoris per supporti compatti). *Siano A, B due aperti della varietà differenziabile M . Abbiamo allora una successione esatta lunga per la coomologia di de Rham a supporti compatti:*

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_c^{q-1}(A) \oplus H_c^{q-1}(B) & \longrightarrow & H_c^{q-1}(A \cup B) & & \\ & & & & & & \\ \longrightarrow & H_c^q(A \cap B) & \longrightarrow & H_c^q(A) \oplus H_c^q(B) & \longrightarrow & H_c^q(A \cup B) & \\ \longrightarrow & H_c^{q+1}(A \cap B) & \longrightarrow & H_c^{q+1}(A) \oplus H_c^{q+1}(B) & \longrightarrow & \cdots & \end{array}$$

XIV.9. La dualità di Poincaré

Definizione XIV.9.1. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Un *buon ricoprimento* di M è un suo ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ per cui ogni intersezione non vuota $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$ sia diffeomorfa ad \mathbb{R}^m .

Introducendo una metrica Riemanniana su M e scegliendo intorno aperti convessi possiamo dimostrare il

Teorema XIV.9.2. *Ogni varietà differenziabile M ammette un buon ricoprimento. Ogni ricoprimento aperto di una varietà differenziabile M ammette un buon raffinamento.* \square

Teorema XIV.9.3. *Se una varietà M ammette un buon ricoprimento finito, allora sia la sua coomologia di de Rham che la sua coomologia di de Rham coi supporti compatti hanno dimensione finita. Se inoltre M è una varietà orientata di dimensione m , la forma bilineare*

$$(14.9.1) \quad (f, g) \rightarrow \int_M f \wedge g, \quad \text{per } f \in \Omega^q(M), g \in \Omega_c^{m-q}(M)$$

definisce per passaggio al quoziente un accoppiamento di dualità tra $H^q(M)$ ed $H_c^{m-q}(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Ragionando per induzione sulla cardinalità di un buon ricoprimento, ed utilizzando le successioni esatte di Mayer-Vietoris, si dimostra facilmente la finitezza dei gruppi di coomologia di de Rham, sia con supporti chiusi che con supporti compatti.

Supponiamo ora che M sia orientabile, in modo da poter definire senza ambiguità l'integrale su M delle m -forme. Se f e g sono chiuse, ed una delle due esatta, abbiamo

$$\int_M f \wedge g = 0.$$

Se infatti $f = du$, con $u \in \mathcal{Q}^{q-1}(M)$, allora $f \wedge g = d(u \wedge g)$, con $u \wedge g \in \mathcal{Q}_c^{m-1}(M)$, e quindi l'integrale (14.9.1) è nullo per la formula di Stokes. Se $g = dv$ con $v \in \mathcal{Q}_c^{q-1}(M)$, allora ancora $w = (-1)^q f \wedge v \in \mathcal{Q}_c^{m-1}(M)$ e l'integrale (14.9.1) è nullo per la formula di Stokes perché $f \wedge g = dw$.

Quindi, per passaggio al quoziente la (14.9.1) definisce una forma bilineare

$$(14.9.2) \quad H^q(M) \times H_c^{m-q}(M) \ni ([f], [g]) \longrightarrow \int_M f \wedge g \in \mathbb{R}.$$

Dimostriamo ora che (14.9.2) definisce un accoppiamento di dualità tra i gruppi di coomologia. Osserviamo che questo è vero se $M = \mathbb{R}^m$. Possiamo quindi ragionare per induzione, supponendolo vero per varietà M che ammettano un buon ricoprimento che consista di al più un certo numero $\ell \geq 1$ di aperti, e dimostrandolo quindi per varietà che ammettano un buon ricoprimento con $\ell + 1$ aperti.

Siamo U, V due aperti di M e definiamo

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = H^q(U \cap V), \\ \mathbf{A}_2 = H^q(U) \oplus H^q(V), \\ \mathbf{A}_3 = H^q(U \cup V), \\ \mathbf{A}_4 = H^{q+1}(U \cap V), \\ \mathbf{A}_5 = H^{q+1}(U) \oplus H^{q+1}(V), \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{B}_1 = (H_c^{m-q}(U \cap V))^*, \\ \mathbf{B}_2 = (H_c^{m-q}(U))^* \oplus (H_c^{m-q}(V))^*, \\ \mathbf{B}_3 = (H_c^q(U \cup V))^*, \\ \mathbf{B}_4 = (H_c^{m-q-1}(U \cap V))^*, \\ \mathbf{B}_5 = (H_c^{m-q-1}(U))^* \oplus (H_c^{m-q-1}(V))^*, \end{cases}$$

ove V^* denota il duale dello spazio vettoriale di dimensione finita V . La (14.9.2) definisce le frecce verticali del diagramma commutativo a righe esatte

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5, \end{array}$$

ove le g_i sono ottenute per dualità da quelle della successione esatta di Mayer-Vietoris per i supporti compatti. Se M ammette un buon ricoprimento consistente di $\ell + 1$ aperti U_0, U_1, \dots, U_ℓ e scegliamo $U = U_0, V = \bigcup_{j=1}^\ell U_j$, allora U, V ed $U \cap V$ ammettono buoni ricoprimenti con al più ℓ aperti. Per l'ipotesi induttiva ne segue che $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ sono isomorfismi e dunque, per il lemma dei cinque, anche α_3 è un isomorfismo, che identifica $H^q(M) = H^q(U \cup V)$ al duale di $H_c^{m-q}(M)$. \square

Corollario XIV.9.4. *Sia M una varietà differenziabile orientata che ammette un buon ricoprimento finito.*

Sia $\alpha \in \mathcal{Q}^q(M)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\alpha \in \mathcal{B}^q(M)$ è che

$$(14.9.3) \quad \int_M \alpha \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q}(M).$$

Sia $\alpha \in \mathcal{Q}_c^q(M)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\alpha \in \mathcal{B}_c^q(M)$ è che

$$(14.9.4) \quad \int_M \alpha \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}^{m-q}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\alpha \in \mathcal{Q}^q(M)$ soddisfi la (14.9.4). Abbiamo in particolare

$$\int_M (d\alpha) \wedge \theta = (-1)^{q+1} \int_M \alpha \wedge d\theta = 0, \quad \forall \theta \in \mathcal{Q}_c^{m-q+1}(M),$$

e quindi $\alpha \in \mathcal{L}^q(M)$. Se fosse $[\alpha] \neq 0$ in $H^q(M)$, per il Teorema XIV.9.3 potremmo trovare una $\eta \in \mathcal{L}^{m-q}(M)$ con

$$\int_M \alpha \wedge \eta \neq 0.$$

Quindi $\alpha \in \mathcal{B}^q(M)$. La dimostrazione nel caso delle forme a supporto compatto è analoga. \square

In particolare abbiamo:

Teorema XIV.9.5. *Se M è una varietà differenziabile compatta e orientabile di dimensione m , allora*

$$(14.9.5) \quad \dim_{\mathbb{R}} H^q(M) = \dim_{\mathbb{R}} H^{m-q}(M) < +\infty$$

e, fissata un'orientazione di M , la (14.9.2) definisce un accoppiamento di dualità tra $H^q(M)$ ed $H^{m-q}(M)$. In particolare, per una varietà differenziabile connessa, compatta ed orientabile di dimensione m è $H^m(M) \simeq \mathbb{R}$.

Osservazione XIV.9.6. L'enunciato non vale, in generale, nel caso di varietà non orientabili. Infatti, per uno spazio proiettivo reale di dimensione pari $2m$ abbiamo

$$\mathbb{R} \simeq H^0(\mathbb{R}P^{2m}) \neq H^{2m}(\mathbb{R}P^{2m}) \simeq \{0\}.$$

Esempio XIV.9.7. Sia M una superficie orientabile di genere g . Possiamo ottenere M da un poligono chiuso P di $4g$ identificando a coppie i suoi lati secondo la formula $\partial P = a_1 b_1^{-1} a_1 b_1^{-1} \cdots a_g b_g^{-1} a_g b_g^{-1}$. Sia $\pi : P \rightarrow M$ la proiezione nel quoziente. Utilizziamo un ricoprimento di M mediante i due aperti $A = \pi(\dot{P}) \simeq \mathbb{R}^2$, $B = \pi(P \setminus \{p_0\})$ per un punto $p_0 \in \dot{P}$. L'intersezione $A \cap B$ è omotopicamente equivalente ad S^1 . Per l'Esempio XIV.7.7, poiché B si retrae su un bouquet di $2g$ circonferenze, otteniamo che $H^1(B) = \underbrace{H^1(S^1) \oplus \cdots \oplus H^1(S^1)}_{2g \text{ volte}} = \mathbb{R}^{2g}$. Per

Mayer-Vietoris abbiamo allora la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{2g} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^2(M) \longrightarrow 0.$$

Per la dualità di Poincaré abbiamo $H^2(M) \simeq H^0(M) = \mathbb{R}$ e quindi $H^1(M) = \mathbb{R}^{2g}$.

Osservazione XIV.9.8. I gruppi di coomologia $H^q(M)$ hanno in generale, anche quando non siano di dimensione finita, una struttura naturale di spazi di Fréchet. Se M è orientata, i gruppi $H_c^{m-q}(M)$, con un'opportuna topologia, sono ancora i loro duali topologici. L'accoppiamento di dualità è sempre definito dalla (14.9.2).

XIV.10. Grado di un'applicazione

Dal Teorema XIV.9.5, ed utilizzando gli argomenti della dimostrazione del Teorema XII.6.3, otteniamo

Teorema XIV.10.1. *Siano M, N due varietà connesse, compatte, orientate, della stessa dimensione m . Se $f : M \rightarrow N$ è un'applicazione differenziabile, esiste un numero reale k tale che*

$$(14.10.1) \quad \int_M f^* \phi = k \int_N \phi, \quad \forall \phi \in \Omega^m(N).$$

Il numero k è la somma algebrica delle segnature di $df(p)$, per p che varia nella controimmagine $f^{-1}(q)$ di un valore regolare $q \in N$ di f . È perciò un numero intero ed è uguale a zero se f non è surgettiva. \square

Definizione XIV.10.2. Il numero intero k nella formula (14.10.1) si dice il *grado* dell'applicazione f e si denota con $\deg(f)$.

Esempio XIV.10.3. Su $S^1 = \{z = e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ la forma differenziale

$$\frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{d\bar{z}}{\bar{z}}$$

definisce l'orientazione ed ha integrale 1.

Se $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{D})$ ed $f(z) \neq 0$ per $z \in S^1$, la

$$(14.10.2) \quad g : S^1 \ni z \rightarrow \frac{f(z)}{|f(z)|} \in S^1$$

è un'applicazione di classe \mathcal{C}^∞ . Per calcolarne l'indice, osserviamo che

$$(14.10.3) \quad \begin{aligned} g^* \left(\frac{1}{2\pi} d\theta \right) &= \frac{1}{2\pi i} d \log g = \frac{1}{2\pi i} (d \log f(z) - \frac{1}{2} d \log f(z) \bar{f}(z)) \\ &= \frac{1}{4\pi i} \left(\frac{f'(z) dz}{f(z)} - \frac{\bar{f}'(z) d\bar{z}}{\bar{f}(z)} \right). \end{aligned}$$

Otteniamo allora

$$(14.10.4) \quad \begin{aligned} \deg(g) &= \frac{1}{4\pi i} \int_S \left(\frac{f'(z) dz}{f(z)} - \frac{\bar{f}'(z) d\bar{z}}{\bar{f}(z)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f'(z) dz}{f(z)} = \sum_{z \in D} \nu_z(f), \end{aligned}$$

ove $\nu_z(f)$ è la molteplicità di zero di f in z .

Più in generale se $f \in \mathcal{M}(D) \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{D} \setminus f^{-1}(\infty))$ è una funzione meromorfa su D , che si prolunga ad una funzione \mathcal{C}^∞ in un intorno di S^1 , e definiamo g mediante la (14.10.2), il grado di g è ancora definito dalla (14.10.4), ove $\nu_z(f)$ indica l'intero per cui $\zeta \rightarrow (\zeta - z)^{\nu_z(f)} f(\zeta)$ è definita, olomorfa e non nulla in un intorno di z in D , è cioè o l'ordine di zero o l'opposto dell'ordine di polo di f in z .

XIV.11. La formula di Künnet

Teorema XIV.11.1 (formula di Künnet). *Siano M ed N due varietà differenziabili, di dimensioni m ed n , rispettivamente. Supponiamo che M ammetta un buon ricoprimento finito³. Allora vale la formula di Künnet⁴*

$$(14.11.1) \quad \begin{cases} H^q(M \times N) \simeq \bigoplus_{j=0}^m H^j(M) \otimes H^{q-j}(N), \\ H_c^q(M \times N) \simeq \bigoplus_{j=0}^m H_c^j(M) \otimes H_c^{q-j}(N), \end{cases} \quad \text{per ogni } q \in \mathbb{N}.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano

$$(14.11.2) \quad \begin{array}{ccc} & M \times N & \\ \pi_M \swarrow & & \searrow \pi_N \\ M & & N \end{array}$$

le proiezioni del prodotto $M \times N$ sui singoli fattori, e sia $\Omega^{q_1}(M) \underline{\otimes} \Omega^{q_2}(N)$ il prodotto tensoriale algebrico di $\Omega^{q_1}(M)$ ed $\Omega^{q_2}(N)$. I suoi elementi sono le somme finite

$$(14.11.3) \quad f = \sum_{j=1}^r \pi_M^*(g_j) \wedge \pi_N^*(h_j), \quad \text{con } g_j \in \Omega^{q_1}(M), h_j \in \Omega^{q_2}(N).$$

Abbiamo inclusioni naturali

$$\begin{aligned} \bigoplus_{q_1+q_2=q} \mathcal{L}^{q_1}(M) \underline{\otimes} \mathcal{L}^{q_2}(N) &\hookrightarrow \mathcal{L}^q(M \times N), \\ \bigoplus_{q_1+q_2=q} (\mathcal{B}^{q_1}(M) \underline{\otimes} \mathcal{L}^{q_2}(N) \oplus \mathcal{L}^{q_1}(M) \underline{\otimes} \mathcal{B}^{q_2}(N)) &\hookrightarrow \mathcal{B}^q(M \times N), \end{aligned}$$

che definiscono per passaggio al quoziente applicazioni

$$(14.11.4) \quad \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}(M) \underline{\otimes} H^{q_2}(N) \longrightarrow H^q(M \times N).$$

Fissiamo due aperti U, V di M e poniamo

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}(U \cap V) \underline{\otimes} H^{q_2}(N), \\ \mathbf{A}_2 = \bigoplus_{q_1+q_2=q} (H^{q_1}(U) \oplus H^{q_1}(V)) \underline{\otimes} H^{q_2}(N), \\ \mathbf{A}_3 = \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}(U \cup V) \underline{\otimes} H^{q_2}(N), \\ \mathbf{A}_4 = \bigoplus_{q_1+q_2=q+1} H^{q_1}(U \cap V) \underline{\otimes} H^{q_2}(N), \\ \mathbf{A}_5 = \bigoplus_{q_1+q_2=q+1} (H^{q_1}(U) \oplus H^{q_1}(V)) \underline{\otimes} H^{q_2}(N), \end{cases}$$

³Il teorema vale anche sotto l'ipotesi meno restrittiva che i gruppi di coomologia di M siano di dimensione finita. Nel caso in cui né i gruppi di coomologia di de Rham di M né tutti quelli di N siano tutti di dimensione finita, la tesi vale ancora, purché i prodotti tensoriali nella formula di Künnet si intendano calcolati nel senso degli spazi vettoriali topologici.

⁴Otto Hermann Lorenz Künneth (Neustadt an der Haardt, 6 luglio 1892 – Erlangen, 7 maggio 1975) topologo algebrico tedesco.

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = H^q((U \cap V) \times N), \\ \mathbf{B}_2 = H^q(U \times N) \oplus H^q(V \times N), \\ \mathbf{B}_3 = H^q((U \cup V) \times N), \\ \mathbf{B}_4 = H^{q+1}((U \cap V) \times N), \\ \mathbf{B}_5 = H^{q+1}(U) \oplus H^{q+1}(V \times N), \end{cases}$$

Per la successione esatta di Mayer-Vietoris, otteniamo un diagramma commutativo a righe esatte

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccccc} \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5, \end{array}$$

dove le α_i sono definite dalle (14.11.4), sostituendo ad M le sottovarietà U , V , $U \cap V$. Dimosteremo quindi la formula di Künnet per induzione sul numero di aperti di un buon ricoprimento di M . Infatti, con una dimostrazione analoga a quella del Lemma XII.4.4, si dimostra che

$$H^q(\mathbb{R}^m \times N) \simeq H^q(N), \quad \forall q \in \mathbb{N},$$

e quindi la formula di Künnet vale quando $M = \mathbb{R}^m$. Supponiamo che essa valga per ogni varietà M che ammetta un buon ricoprimento con al più k aperti, per qualche $k \geq 1$. Se $\{U_0, \dots, U_k\}$ è un buon ricoprimento di una varietà M , che consiste di $k + 1$ aperti, consideriamo il diagramma (*) con $U = U_0$ e $V = U_1 \cup \dots \cup U_k$. Allora, per l'ipotesi induttiva, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ sono isomorfismi. Per il lemma dei cinque anche α_3 è un isomorfismo. \square

Con analoga dimostrazione otteniamo la generalizzazione della formula di Künnet al caso di un fibrato⁵ *coomologicamente banale*.

Teorema XIV.11.2 (Leray-Hirsch). *Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato differenziabile, con fibra tipica F . Supponiamo che M abbia un buon ricoprimento finito e che per ogni intero non negativo q vi siano delle classi di coomologia $e_1^q, \dots, e_{v_q}^q \in H^q(E)$ tali che il loro pull-back su ciascuna fibra $\pi^{-1}(x)$, per $x \in M$, sia una base di $H^q(\pi^{-1}(x))$. Allora vale la formula di Künneth:*

$$(14.11.5) \quad H^q(E) = \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}(M) \otimes H^{q_2}(F).$$

Esempio XIV.11.3. Sia $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ volte}}$ il toro n -dimensionale. È $T^n = T^{n-1} \times S^1$.

Allora, per la formula di Künnet, abbiamo

$$H^q(T^n) = (H^q(T^{n-1}) \otimes \mathbb{R}) \oplus (H^{q-1}(T^{n-1}) \otimes \mathbb{R}) = H^{q-1}(T^{n-1}) \oplus H^q(T^{n-1}), \quad \forall q \geq 1.$$

⁵Per calcolare i gruppi di coomologia di un fibrato qualsiasi, si può utilizzare la *successione spettrale di Serre*, introdotta in J.P.Serre: *Homologie singulière des espaces fibrés*, Ann.Math. 54 (1951), pp. 425-505.

Poiché $\binom{n-1}{q} + \binom{n-1}{q-1} = \binom{n}{q}$, otteniamo per ricorrenza

$$H^q(T^n) = \mathbb{R}^{\binom{n}{q}}, \quad \forall q = 0, 1, \dots, n.$$

XIV.12. Duale di Poincaré in una sottovarietà orientata

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m ed S una sua sottovarietà propria orientata di dimensione k . Associamo ad S il funzionale lineare \mathbb{I}_S , definito sulle k -forme a supporto compatto da:

$$(14.12.1) \quad \mathbb{I}_S(f) = \int_S f, \quad \forall f \in \mathcal{Q}_c^k(M).$$

Per la formula di Stokes, $\mathbb{I}_S(f) = 0$ se $f \in \mathcal{B}_c^k(M)$. Per passaggio al quoziente, \mathbb{I}_S definisce quindi un funzionale lineare su $H_c^k(M)$. Supponiamo che M sia orientata ed ammetta un buon ricoprimento finito. Allora, utilizzando la dualità di Poincaré, possiamo identificare \mathbb{I}_S ad un elemento di $H^{m-k}(M)$.

Definizione XIV.12.1. Sia M una varietà orientata ed S una sua sottovarietà propria orientata di dimensione k . Si dice *duale di Poincaré chiuso* di S una qualsiasi forma $\eta_S \in \mathcal{L}^{m-k}(M)$, tale che

$$(14.12.2) \quad \int_M f \wedge \eta_S = \int_S f, \quad \forall f \in \mathcal{L}_c^k(M).$$

La classe $[\eta_S] \in H^{m-k}(M)$ è l'elemento che definisce \mathbb{I}_S nella dualità di Poincaré.

In modo analogo, se S è una sottovarietà compatta orientata di dimensione k di M , possiamo associare ad essa un funzionale definito sulle k -forme differenziali con supporti chiusi in M , mediante

$$(14.12.3) \quad \mathbb{I}_S(f) = \int_S f, \quad \forall f \in \mathcal{Q}^k(M).$$

Poiché $\mathbb{I}_S(f) = 0$ se $f \in \mathcal{B}^k(M)$, la \mathbb{I}_S definisce in questo caso un funzionale lineare su $H^k(M)$. Per la dualità di Poincaré vi è un unico elemento di $H_c^{m-k}(M)$ tale che, se $\eta_S \in \mathcal{L}_c^{m-k}(M)$ è un suo rappresentante, risulti

$$(14.12.4) \quad \int_M f \wedge \eta_S = \int_S f, \quad \forall f \in \mathcal{L}^k(M).$$

Definizione XIV.12.2. Sia M una varietà orientata ed S una sua sottovarietà compatta orientata di dimensione k . Una forma $\eta_S \in \mathcal{L}_c^{m-k}(M)$ per cui valga la (14.12.4) si dice *duale di Poincaré compatto* di S . La sua classe $[\eta_S] \in H_c^{m-k}(M)$ è l'elemento che definisce \mathbb{I}_S nella dualità di Poincaré.

Esempio XIV.12.3. Il duale di Poincaré chiuso di un punto in \mathbb{R}^n è 0, mentre il suo duale di Poincaré compatto è una qualsiasi forma a supporto compatto con integrale 1 su \mathbb{R}^n .

Esempio XIV.12.4. Sia $S = \{(x, 0) \mid x > 0\} \subset M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Introduciamo su M coordinate polari (r, θ) . Il differenziale

$$d\theta = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$$

è ben definito su M .

Sia $f = a(x, y)dx + b(x, y)dy \in \mathcal{Z}_c^1(M)$. Scriviamola nella forma

$$f = \phi dr + \psi d\theta, \quad \text{con} \quad \phi = a \cos \theta + b \sin \theta, \quad \psi = -r(a \sin \theta - b \cos \theta).$$

Abbiamo

$$\iint_M f \wedge d\theta = \iint \phi dr \wedge d\theta = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} \phi(r, \theta) d\theta$$

Integrando per parti abbiamo

$$\int_0^{2\pi} \phi d\theta = 2\pi\phi(r, 0) - \int_0^{2\pi} \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta.$$

Utilizzando le condizioni d'integrabilità e scambiando l'ordine d'integrazione, otteniamo che

$$\int_0^{+\infty} dr \int_0^{2\pi} \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \theta d\theta \int_0^\infty \frac{\partial \psi}{\partial r} dr = 0.$$

Quindi

$$\iint_M f \wedge d\theta = 2\pi \int_0^\infty \phi(r, 0) dr = 2\pi \int_S f.$$

Quindi $(2\pi)^{-1} d\theta$ è il duale di Poincaré chiuso di $S = \{x > 0, y = 0\}$ in $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Osserviamo che, in particolare, se $f = adx + bdy \in \mathcal{L}_c^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, l'integrale

$$\int_{S_\theta} f, \quad \text{per} \quad S_\theta = \{t(\cos \theta, \sin \theta) \mid t > 0\}$$

non dipende dalla scelta dell'angolo θ .

Esempio XIV.12.5. Sia $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Il duale di Poincaré di S^1 è la classe di $\chi(r)dr$ per una qualsiasi funzione $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, con $\text{supp } \chi \subset \{r > 0\}$ ed $\int_{\mathbb{R}} \chi dr = 1$.

XIV.13. La proprietà semi-locale

In questo paragrafo studiamo la coomologia di de Rham su varietà differenziabili che possono non ammettere un buon ricoprimento finito. Dimostriamo innanzi tutto il seguente

Lemma XIV.13.1. *Sia M una varietà differenziabile connessa ed orientabile, che ammetta un buon ricoprimento finito. Sia q un intero con $1 \leq q \leq n$ ed $\eta_1, \dots, \eta_k \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(M)$ forme chiuse a supporto compatto tali che le loro classi di coomologia $[\eta_1], \dots, [\eta_k]$ definiscano una base di $H_c^{m-q+1}(M)$.*

Se $\alpha \in \mathcal{B}^q(M)$, allora esiste una soluzione $\beta \in \Omega^{q-1}$ di

$$(14.13.1) \quad d\beta = \alpha, \quad \int_M \beta \wedge \eta_i = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq k.$$

Se $\beta_1, \beta_2 \in \Omega^{q-1}$ sono soluzioni di (14.13.1), allora $\beta_1 - \beta_2 \in \mathcal{B}^{q-2}(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\beta_0 \in \Omega^{q-1}(M)$ una soluzione di $d\beta_0 = \alpha$ in M . Per la dualità di Poincaré, esiste una $\beta_1 \in \mathcal{L}^{q-1}(M)$ tale che

$$\int_M \beta_1 \wedge \eta_i = \int_M \beta_0 \wedge \eta_i, \quad \text{per } 1 \leq i \leq k.$$

Allora $\beta = \beta_0 - \beta_1$ soddisfa la (14.13.1).

Se β_1, β_2 soddisfano la (14.13.1), allora $\beta_1 - \beta_2 \in \mathcal{L}^{q-1}(M)$ soddisfa

$$\int_M (\beta_1 - \beta_2) \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(M).$$

Infatti, $\eta \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(M)$ si può scrivere in modo unico nella forma $\eta = d\theta + \sum_{i=1}^k c_i \eta_i$ con $\theta \in \Omega_c^{m-q}(M)$ e $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. Abbiamo perciò

$$\begin{aligned} \int_M (\beta_1 - \beta_2) \wedge \eta &= \int_M (\beta_1 - \beta_2) \wedge d\theta + \sum_{i=1}^k c_i \int_M (\beta_1 - \beta_2) \wedge \eta_i \\ &= (-1)^{q-1} \int_M d((\beta_1 - \beta_2) \wedge \theta) = 0 \end{aligned}$$

per la formula di Stokes. Quindi, per il Corollario XIV.9.4, $\beta_1 - \beta_2 \in \mathcal{B}^q(M)$. \square

La coomologia di de Rham gode della proprietà semi-locale, che è descritta dalla seguente

Proposizione XIV.13.2. *Sia M una varietà differenziabile connessa, orientata e numerabile all'infinito. Sia q un intero ≥ 0 . Per $\alpha \in \mathcal{L}^q(M)$ sono equivalenti:*

- (1) $\alpha \in \mathcal{B}^q(M)$,
- (2) $\int_M \alpha \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q}(M)$,
- (3) $\forall U^{\text{aperto}} \Subset M, \alpha|_U \in \mathcal{B}^q(U)$.

DIMOSTRAZIONE. Per $q = 0$, una $\alpha \in \mathcal{L}^0(M)$ è una funzione costante su M e le condizioni (1), (2), (3) equivalgono al fatto che $\alpha = 0$.

Osserviamo che chiaramente (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2).

Fissiamo un buon ricoprimento numerabile e localmente finito $\mathcal{U} = \{U_\nu\}$ di M , con gli U_ν localmente compatti in M . A partire da \mathcal{U} , costruiamo una successione crescente di aperti connessi $\{V_\nu\}_{\nu \geq 0}$, con $V_\nu \Subset V_{\nu+1}$ ed $M = \bigcup_\nu V_\nu$, ciascuno dotato di un buon ricoprimento finito. A questo scopo possiamo definire per ricorrenza:

$$\begin{cases} V_0 = U_0, \\ V_{\nu+1} = \bigcup \{U_\mu \mid U_\mu \cap \bar{V}_\nu \neq \emptyset\}. \end{cases}$$

Se $\alpha \in \mathcal{L}^q(M)$, con $m \geq 1$ e vale la (2), allora abbiamo in particolare

$$\int_{V_\nu} \alpha \wedge \eta, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q}(V_\nu), \quad \forall \nu,$$

e quindi, per il Corollario XIV.9.4, per ogni indice $\nu \geq 0$ possiamo trovare una $\gamma_\nu \in \Omega^{q-1}(V_\nu)$ tale che

$$d\gamma_\nu = \alpha \quad \text{su } V_\nu.$$

Poiché ogni aperto relativamente compatto di M è contenuto in V_ν per qualche ν , otteniamo l'implicazione (2) \Rightarrow (3) e quindi l'equivalenza (2) \Leftrightarrow (3).

Dimostriamo infine l'implicazione (3) \Rightarrow (1). Sia $\{V_\nu\}_{\nu \geq 0}$ la successione di aperti costruita sopra.

Consideriamo in primo luogo il caso $q = 1$. Sia $\alpha \in \mathcal{L}^1(M)$ e supponiamo che per ogni $\nu \geq 0$ vi sia un $u_\nu \in \mathcal{C}^\infty(V_\nu)$ tale che $du_\nu = \alpha$ su V_ν . La funzione $u_\nu - u_{\nu+1}|_{V_\nu}$ ha differenziale nullo e quindi è costante su V_ν , in quanto V_ν è connesso. Perciò, fissato un punto $p_0 \in V_0$, è

$$u_\nu(p) - u_\nu(p_0) = u_{\nu+1}(p) - u_{\nu+1}(p_0) \quad \text{su } V_\nu$$

e quindi possiamo definire una $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ con $du = \alpha$ su M ponendo $u(p) = u_\nu(p) - u_\nu(p_0)$ su V_ν .

Consideriamo infine il caso $q > 1$.

Dico che è possibile costruire una successione $\{\eta_h\}_{h \geq 1} \subset \mathcal{L}_c^{m-q+1}(M)$ ed una successione di aperti $\{W_\nu\}$ di M con le proprietà:

- (1) $([\eta_h]_M)$, ove abbiamo indicato con $[\eta_h]_M$ la classe di coomologia di η_h in $H_c^{m-q+1}(M)$, è una base di $H_c^{m-q+1}(M)$.
- (2) $W_\nu \Subset W_{\nu+1}$ ed $M = \bigcup_\nu W_\nu$.
- (3) Ogni W_ν ammette un buon ricoprimento finito.
- (4) Esiste una successione crescente h_ν di interi positivi tali che $\text{supp } \eta_h \subset W_\nu$ per $h \leq h_\nu$ e l'immagine di $H_c^{n-q+1}(W_\nu) \rightarrow H_c^{n-q+1}(W_{\nu+1})$ sia generata dalle classi di $\eta_1, \dots, \eta_{h_\nu}$ in $H^{n-q+1}(W_{\nu+1})$.

Costruiamo le η_h e i W_ν per ricorrenza. Possiamo fissare $W_0 = V_0$. Sappiamo, per il Teorema XIV.9.5, che $H_c^{m-q+1}(W_0)$ ha dimensione finita. Possiamo quindi scegliere $\eta_1, \dots, \eta_{h_0} \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(W_0)$ in modo tale che le loro classi di coomologia $[\eta_1]_M, \dots, [\eta_{h_0}]_M$ in $H_c^{m-q+1}(M)$ siano linearmente indipendenti e generino l'immagine di $H_c^{m-q+1}(W_0) \rightarrow H_c^{m-q+1}(M)$.

Le classi di coomologia $[\eta_1]_{W_0}, \dots, [\eta_{h_0}]_{W_0}$ di $\eta_1, \dots, \eta_{h_0}$ in $H_c^{m-q+1}(W_0)$ sono a maggior ragione linearmente indipendenti. Possiamo completarle ad una base di $H_c^{m-q+1}(W_0)$, aggiungendo una base $[\theta_1]_{W_0}, \dots, [\theta_k]_{W_0}$ del nucleo dell'applicazione naturale $H_c^{m-q+1}(W_0) \rightarrow H_c^{m-q+1}(M)$. Fissiamo dei loro rappresentanti $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(W_0)$. Per ogni $j = 1, \dots, k$ possiamo trovare una forma $\zeta_j \in \mathcal{Q}_c^{m-q}(M)$ tale che $d\zeta_j = \theta_j$. Sarà quindi sufficiente scegliere $W_1 = V_\nu$ con $\nu > 0$ e tale che $\text{supp } \zeta_j \Subset V_\nu$ per ogni $j = 1, \dots, k$.

Ripetendo questa costruzione otteniamo le successioni $\{[\eta_h]\}$ e $\{W_\nu\}$ desiderate.

Poniamo ora $W_h = \emptyset$ per $h < 0$ e costruiamo, per ricorrenza, una successione $\{\beta_\nu\}$, con

- (a) $\beta_\nu \in \mathcal{Q}^{q-1}(W_\nu)$, $d\beta_\nu = \alpha$, $\int_{W_\nu} \beta_\nu \wedge \eta_j = 0$ per $1 \leq j \leq h_\nu$,
- (b) $\beta_{\nu+1}|_{W_{\nu-2}} = \beta_\nu|_{W_{\nu-2}}$ se $\nu \geq 2$.

Per il Lemma XIV.13.1 possiamo trovare β_0 e β_1 che soddisfino (a). La condizione (b) è banalmente verificata per β_0 e β_1 . Supponiamo di aver costruito $\beta_0, \dots, \beta_\nu$,

con $\nu \geq 1$, che soddisfino (a) e (b). Sia $\gamma \in \Omega^{q-1}(W_{\nu+1})$ una soluzione di

$$d\gamma = \alpha \text{ in } W_{\nu+1}, \quad \int_{W_{\nu+1}} \gamma \wedge \eta_j = 0 \text{ se } j \leq h_{\nu+1}.$$

Dico che

$$(*) \quad \int_{W_{\nu-1}} (\gamma - \beta_\nu) \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(W_{\nu-1}).$$

Infatti una base di $H_c^{m-q+1}(W_{\nu-1})$ è data dalle classi $[\eta_1]_{W_{\nu-1}}, \dots, [\eta_{h_{\nu-1}}]_{W_{\nu-1}}$ definite dalle $\eta_1, \dots, \eta_{h_{\nu-1}}$ e da classi $[\theta_1]_{W_{\nu-1}}, \dots, [\theta_k]_{W_{\nu-1}}$ che appartengono al nucleo dell'applicazione naturale $H_c^{m-q+1}(W_{\nu-1}) \rightarrow H_c^{m-q+1}(M)$. Per la scelta di W_ν possiamo trovare delle forme $\zeta_1, \dots, \zeta_k \in \Omega_c^{m-q}(W_\nu)$ tali che $d\zeta_i = \theta_i$ per $i = 1, \dots, k$. Abbiamo

$$\int_{W_{\nu-1}} (\gamma - \beta_\nu) \wedge \eta_j = 0, \quad 1 \leq j \leq h_{\nu-1}$$

$$\int_{W_{\nu-1}} (\gamma - \beta_\nu) \wedge \theta_j = \int_{W_\nu} (\gamma - \beta_\nu) \wedge d\zeta_j = (-1)^q \int [d(\gamma - \beta_\nu)] \wedge \zeta_j = 0, \quad 1 \leq j \leq k,$$

da cui segue (*). Possiamo allora trovare $\xi \in \Omega^{q-2}(W_{\nu-1})$ tale che

$$d\xi = \gamma - \beta_\nu \quad \text{su } W_{\nu-1}.$$

Se $\tilde{\xi} \in \Omega^{q-2}(W_{\nu+1})$ con $\tilde{\xi} = \xi$ su $W_{\nu-2}$, possiamo porre $\beta_{\nu+1} = \gamma - d\tilde{\xi} \in \Omega^{q-1}(W_{\nu+1})$.

Definiamo infine $\beta \in \Omega^{q-1}(M)$, a partire dalla successione $\{\beta_\nu\}$, mediante

$$\beta|_{W_\nu} = \beta_{\nu+2}|_{W_\nu} \quad \text{per } \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Abbiamo $d\beta = \alpha \in \mathcal{B}^q(M)$. Ciò completa la dimostrazione. \square

Come conseguenza di questo teorema, abbiamo

Teorema XIV.13.3. *Se M è una varietà connessa, numerabile all'infinito, orientabile, allora*

$$(14.13.2) \quad H^q(M) \simeq (H_c^{m-q}(M))^*.$$

DIMOSTRAZIONE. Nella dimostrazione del teorema precedente abbiamo mostrato che si possono costruire una successione $\{\eta_h\} \subset \mathcal{L}_c^{m-q}(M)$ ed una successione di aperti $\{W_\nu\}$ con le proprietà:

- (1) Le classi di coomologia $\{[\eta_h]_M\}$ delle $\{\eta_h\}$ in $H_c^{m-q}(M)$ formano una base di $H_c^{m-q}(M)$;
- (2) ogni W_ν ammette un buon ricoprimento finito,
- (3) $W_\nu \Subset W_{\nu+1}$, $\bigcup W_\nu = M$,
- (4) per una successione non decrescente $\{h_\nu\}$ abbiamo $\text{supp } \eta_h \subset W_\nu$ per $h \leq h_\nu$ e l'immagine di $H_c^{m-q}(W_\nu) \rightarrow H_c^{m-q}(W_{\nu+1})$ è generata dalle classi delle η_h con $h \leq h_\nu$.

Per dimostrare il teorema, è sufficiente provare che, data una qualsiasi successione $\{c_h\}$ di numeri reali, è possibile costruire una $\alpha \in \mathcal{L}^q(M)$ tale che

$$(14.13.3) \quad \int_M \alpha \wedge \eta_h = c_h, \quad \forall h.$$

Sia $\{c_h\}$ una successione di numeri reali. Dico che è possibile determinare una successione $\{\alpha_\nu \in \mathcal{L}(W_\nu)\}$ tale che

$$\int_{W_\nu} \alpha_\nu \wedge \eta_h = c_h, \quad \text{per } h \leq h_\nu, \quad \alpha_{\nu+1}|_{W_{\nu-2}} = \alpha_\nu|_{W_{\nu-2}} \quad \text{per } \nu \geq 2.$$

Poiché i W_ν ammettono un buon ricoprimento finito, per la dualità di Poincaré possiamo trovare $\{\beta_\nu \in \mathcal{L}(W_\nu)\}$ tali che

$$\int_{W_\nu} \beta_\nu \wedge \eta_h = c_h, \quad \text{per } h \leq h_\nu.$$

Possiamo quindi scegliere $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$. Supponiamo di aver costruito $\alpha_0, \dots, \alpha_\nu$, per qualche $\nu \geq 1$, in modo che sia soddisfatta la

$$\alpha_\mu|_{W_{\mu-2}} = \alpha_{\mu+1}|_{W_{\mu-2}}, \quad \text{se } 2 \leq \mu \leq \nu.$$

Abbiamo allora

$$\int_{W_{\nu-1}} (\beta_{\nu+1} - \alpha_\nu) \wedge \eta_h = 0, \quad \text{per } h \leq h_\nu.$$

Questo implica che

$$\int_{W_{\nu-1}} (\beta_{\nu+1} - \alpha_\nu) \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q}(W_{\nu-1})$$

e quindi esiste una $\phi \in \Omega^{q-1}(W_{\nu-1})$ tale che $\beta_{\nu+1}|_{W_{\nu-1}} - \alpha_\nu|_{W_{\nu-1}} = d\phi$. Se $\psi \in \Omega^{q-1}(W_{\nu+1})$ è uguale a ϕ su $W_{\nu-2}$, possiamo definire $\alpha_{\nu+1} = \beta_{\nu+1} - d\psi$. Otteniamo quindi per ricorrenza la successione delle $\{\beta_\nu\}$ e potremo allora definire $\beta \in \mathcal{L}^q(M)$ ponendo $\beta|_{W_\nu} = \beta_{\nu+2}|_{W_\nu}$ per ogni $\nu \geq 0$. La classe di coomologia definita da β è l'elemento del duale di $H_c^{m-q}(M)$ che vale c_h sull'elemento $[\eta_h]$ della base di $H_c^{m-q}(M)$. Ciò completa la dimostrazione. \square

Coomologia di de Rham e fibrati differenziabili

XV.1. Coomologia a supporti compatti nelle fibre

Definizione XV.1.1. Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale. Una forma $\alpha \in \Omega^q(E)$ ha *supporto compatto nella direzione verticale* se

$$\forall K^{\text{compatto}} \subset M, \quad \text{supp } \alpha \cap \pi^{-1}(K) \text{ è compatto in } E.$$

Indichiamo con $\Omega_{cv}^q(E)$ lo spazio vettoriale delle q -forme su E che hanno supporto compatto nella direzione verticale.

Poiché il differenziale non accresce i supporti, abbiamo il complesso di de Rham per le forme con supporto compatto nella direzione verticale:

$$(15.1.1) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow \Omega_{cv}^0(E) &\xrightarrow{d} \Omega_{cv}^1(E) \xrightarrow{d} \Omega_{cv}^2(E) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \Omega_{cv}^{q-1}(E) &\xrightarrow{d} \Omega_{cv}^q(E) \xrightarrow{d} \Omega_{cv}^{q+1}(E) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Porremo

$$(15.1.2) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_{cv}^q(E) = \{\alpha \in \Omega_{cv}^q(E) \mid d\alpha = 0\}, \\ \mathcal{B}_{cv}^q(E) = \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega_{cv}^{q-1}(E)\}, \\ H_{cv}^q(E) = \mathcal{L}_{cv}^q(E) / \mathcal{B}_{cv}^q(E). \end{cases}$$

XV.2. Integrazione sulla fibra e isomorfismo di Thom

Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato differenziabile, con fibre di dimensione n e base di dimensione m .

Teorema XV.2.1 (Integrazione sulla fibra). *Supponiamo che le fibre di ξ siano orientate. Allora, per ogni intero $q \geq 0$, esiste un'unica applicazione lineare*

$$(15.2.1) \quad \pi_* : \Omega_{cv}^{n+q}(E) \longrightarrow \Omega^q(M)$$

tale che

$$(15.2.2) \quad (\pi_*\alpha)(X_1, \dots, X_q)(p) = \int_{E_p} X_q^* \lrcorner \dots \lrcorner X_1^* \lrcorner \alpha$$

per ogni $\alpha \in \Omega_{cv}^{n+q}(E)$ e per ogni $X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M)$, $X_1^*, \dots, X_q^* \in \mathfrak{X}(E)$, con X_i ed X_i^* coppie di campi di vettori π -coniugati per ogni $i = 1, \dots, q$.

Se M è orientata, la forma $\pi_*\alpha \in \Omega^q(M)$ è caratterizzata da:

$$(15.2.3) \quad \int_M (\pi_*\alpha) \wedge \beta = \int_E \alpha \wedge \pi^*\beta. \quad \forall \alpha \in \Omega_{cv}^{n+q}(E), \quad \forall \beta \in \Omega_c^{m-q}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\alpha \in \Omega^{n+q}(E)$. Per ogni scelta di $Y_1, \dots, Y_q \in \mathfrak{X}(E)$ la $Y_q \rfloor \dots \rfloor Y_1 \rfloor \alpha$ è una forma in $\Omega_{cv}^n(E)$. Se $p \in M$, il suo pullback su $E_p = \pi^{-1}(p)$ si annulla nei punti in cui almeno uno dei campi Y_1, \dots, Y_q assuma un valore verticale. Poiché $\pi : E \rightarrow M$ è una sommersione, per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ possiamo trovare un $X^* \in \mathfrak{X}(E)$ ad esso π -correlato, tale cioè che $d\pi(X^*) = X_{\pi(\sigma)}$ per ogni $\sigma \in E$. Poiché la (15.2.2) definisce una forma $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare alternata su $(\mathfrak{X}(M))^q$, essa determina univocamente una forma $\pi_*\alpha \in \Omega^q(M)$.

Si verifica facilmente che, nel caso in cui M sia orientata, vale la (15.2.3), e che questa determina univocamente $\pi_*\alpha$. \square

Definizione XV.2.2. L'applicazione $\pi_* : \Omega^{n+q}(E) \rightarrow \Omega^q(M)$ descritta dal Teorema XV.2.1 si dice *integrazione sulla fibra*.

Proposizione XV.2.3 (Formula della proiezione). *Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato con fibre orientate di dimensione n . Allora*

$$(15.2.4) \quad \pi_*(\alpha \wedge \pi^*\beta) = (\pi_*\alpha) \wedge \beta, \quad \forall \alpha \in \Omega_{cv}^{q_1+n}(E), \quad \forall \beta \in \Omega^{q_2}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché i due membri dell'uguaglianza (15.2.4) sono $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineari rispetto a β , possiamo utilizzare la partizione dell'unità per ricondurci al caso in cui β abbia supporto contenuto in un aperto di un atlante di trivializzazione di ξ . Possiamo così ricondurci al caso in cui anche M sia orientata. Abbiamo allora, per $\alpha \in \Omega_c^{q_1+n}(E)$, $\beta \in \Omega^{q_2}(M)$ e $\gamma \in \Omega_c^{m-q_1-q_2}(M)$,

$$\begin{aligned} \int_M (\pi_*(\alpha \wedge \pi^*\beta)) \wedge \gamma &= \int_E \alpha \wedge (\pi^*\beta) \wedge (\pi^*\gamma) = \int_E \alpha \wedge \pi^*(\beta \wedge \gamma) \\ &= \int_M (\pi_*\alpha) \wedge \beta \wedge \gamma = \int_M [(\pi_*\alpha) \wedge \beta] \wedge \gamma \end{aligned}$$

da cui segue la tesi. \square

Proposizione XV.2.4. *L'integrazione sulla fibra commuta con il differenziale esterno.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché l'enunciato del teorema è locale rispetto ad M , possiamo supporre nel corso della dimostrazione che M sia orientata. Per le formule di Stokes e le (15.2.1), se $\alpha \in \Omega_{cv}^{q-1+n}(E)$ abbiamo, per ogni $\beta \in \Omega_c^{m-q}(M)$:

$$\begin{aligned} \int_M (d_M \pi_*\alpha) \wedge \beta &= (-1)^q \int_M \pi_*\alpha \wedge d_M \beta = (-1)^q \int_E \alpha \wedge \pi^* d_M \beta \\ &= (-1)^q \int_E \alpha \wedge d_E \pi^* \beta = \int (d_E \alpha) \wedge \pi^* \beta = \int_M \pi_*(d_E \alpha) \wedge \beta, \end{aligned}$$

e questo dimostra che $\pi_*(d_E \alpha) = d_M \pi_*\alpha$. \square

Poiché l'integrazione sulla fibra commuta con il differenziale esterno, essa definisce, per passaggio al quoziente, un'applicazione in coomologia, che è un isomorfismo nel caso dei fibrati vettoriali.

Teorema XV.2.5 (Isomorfismo di Thom). *Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale orientato di rango n . Allora l'applicazione*

$$(15.2.5) \quad [\pi_*] : H_{cv}^{n+q}(E) \longrightarrow H^q(M),$$

che si ottiene per passaggio al quoziente dall'integrazione sulla fibra, è, per ogni $q \in \mathbb{Z}$, un isomorfismo di gruppi.

DIMOSTRAZIONE. Siano U, V due aperti di M . Utilizzando la partizione dell'unità, otteniamo per ogni q una successione esatta

$$0 \rightarrow \Omega_{cv}^q(E|_{U \cup V}) \longrightarrow \Omega_{cv}^q(E|_U) \oplus \Omega_{cv}^q(E|_V) \longrightarrow \Omega_{cv}^q(E|_{U \cap V}) \rightarrow 0,$$

che definisce una successione esatta corta di complessi differenziali.

Otteniamo perciò un diagramma commutativo

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccccc} \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5, \end{array}$$

con

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_1 = H_{cv}^{n+q-1}(E|_U) \oplus H_{cv}^{n+q-1}(E|_V), \\ \mathbf{A}_2 = H_{cv}^{n+q-1}(E|_{U \cap V}), \\ \mathbf{A}_3 = H_{cv}^{n+q}(E|_{U \cup V}), \\ \mathbf{A}_4 = H_{cv}^{n+q}(E|_U) \oplus H_{cv}^{n+q}(E|_V), \\ \mathbf{A}_5 = H_{cv}^{n+q}(E|_{U \cap V}), \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}_1 = H^{q-1}(U) \oplus H^{q-1}(V), \\ \mathbf{B}_2 = H^{q-1}(U \cap V), \\ \mathbf{B}_3 = H^q(U \cup V), \\ \mathbf{B}_4 = H^q(U) \oplus H^q(V), \\ \mathbf{B}_5 = H^q(U \cap V), \end{array} \right.$$

in cui le righe sono esatte perché parte di successioni esatte di Mayer-Vietoris, e le α_i sono definite mediante l'integrazione sulla fibra. A questo punto osserviamo che il teorema di isomorfismo di Thom vale senz'altro nel caso di fibrati banali. Se M ammette un atlante di trivializzazione finito, possiamo ragionare per induzione sul numero degli aperti di un atlante di trivializzazione ed applicare quindi il lemma dei cinque alla (*). Completeremo la dimostrazione del caso generale in XVI.7, dopo aver introdotto il complesso di Čech-de Rham. \square

Definizione XV.2.6. Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale orientato di rango n . L'immagine inversa della classe di $1 \in H^0(M)$ mediante l'isomorfismo (15.2.5) è una classe di coomologia $\Phi_\xi \in H_{cv}^n(E)$, che si dice la *classe di Thom* di ξ .

Osserviamo che la classe di Thom si restringe, su ogni singola fibra E_p , ad un generatore di $H_c^n(E_p)$, e che, viceversa, questa proprietà caratterizza la classe di Thom del fibrato. Risulta infatti, per la Proposizione XV.2.3,

$$\pi_*(\Phi_\xi \wedge \pi^*\beta) = \beta, \quad \forall \beta \in \Omega^q(M).$$

Abbiamo quindi, in particolare:

Proposizione XV.2.7. Siano $\xi_i = (E_i \xrightarrow{\pi_i} M)$, per $i = 1, 2$, due fibrati vettoriali orientati sulla stessa base M , di ranghi n_1, n_2 , rispettivamente. Allora la classe di Thom $\Phi_{\xi_1 \oplus_M \xi_2}$ del fibrato $\xi_1 \oplus_M \xi_2$ è il prodotto $\text{pr}_{E_1}^* \Phi_{\xi_1} \wedge \text{pr}_{E_2}^* \Phi_{\xi_2}$, ove $\text{pr}_{E_i} : E(\xi_1 \oplus_M \xi_2) \rightarrow E_i$ è la proiezione naturale e Φ_{ξ_i} la classe di Thom di ξ_i . \square

XV.3. Dualità di Poincaré e classe di Thom

Siano M una varietà differenziabile ed N una sua sottovarietà propria di dimensione n . Fissiamo un intorno tubolare¹ $\tau = (U \xrightarrow{\pi} N)$ di N in M . Indicheremo con m , n e $k = m - n$ le dimensioni di M ed N e la codimensione di N in M , rispettivamente.

Supponiamo che τ sia orientato² ed indichiamo con $\Phi_\tau \in H_{cv}^k(U)$ la sua classe di Thom.

Poiché N è propria, gli elementi di $\Omega_{cv}^*(U)$ sono restrizioni di forme in $\Omega^*(M)$, che si annullano fuori di U . Abbiamo perciò un'inclusione $\iota_* : \Omega_{cv}^*(U) \hookrightarrow \Omega^*(M)$, che commuta con i differenziali e definisce quindi, in coomologia, un omomorfismo $\iota_* : H_{cv}^*(U) \rightarrow H^*(M)$, omogeneo di grado 0. L'isomorfismo di Thom (Teorema XV.2.5) ci permette allora di definire, per ogni intero q , la successione di applicazioni

$$H^q(N) \xrightarrow[\simeq]{\wedge \Phi_\tau} H_{cv}^{q+k}(U) \xrightarrow{\iota_*} H^{q+k}(M).$$

Abbiamo:

Proposizione XV.3.1. *Supponiamo che N sia una sottovarietà propria di M e che M ed N siano orientate. Allora l'immagine $\iota_*(\Phi_\tau)$ in $H^k(M)$ della classe di Thom Φ_τ di un intorno tubolare τ di N in M è il duale di Poincaré della sottovarietà orientata N .*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un intorno tubolare $\tau = (U \xrightarrow{\pi} N)$ di N in M ed indichiamo con $j : N \rightarrow U$ l'inclusione di N nello spazio totale del suo intorno tubolare.

Sia $\alpha \in \Omega_c^n(M)$ una n -forma con supporto compatto in M .

Per il Teorema XIV.3.3 le forme $\alpha|_U$ e $\pi^*(\alpha|_N)$ sono coomologhe in $H_{ch}^n(U)$. Ciò significa che esiste una forma $\beta \in \Omega^{n-1}(U)$ tale che $\pi(\text{supp } \beta)$ sia compatto in N ed

$$(*) \quad \alpha|_U - \pi^*(\alpha|_N) = d\beta, \quad \text{con } \beta \in \Omega_{ch}^{n-1}(U).$$

Abbiamo allora, indicando con lo stesso simbolo Φ_τ una qualsiasi forma chiusa in $\Omega_{cv}^k(U)$ che rappresenti la classe di Thom $\Phi_\tau \in H_{cv}^k(U)$ di τ , poiché $\alpha \wedge \iota_* \Phi_\tau$ e $\beta \wedge \Phi_\tau$ hanno supporto compatto in U ,

$$\begin{aligned} \int_M \alpha \wedge \iota_* \Phi_\tau &= \int_U \alpha \wedge \Phi_\tau \\ &= \int_U (\pi^*(\alpha|_N) + d\beta) \wedge \Phi_\tau \quad (\text{per la } (*)) \end{aligned}$$

¹Ricordiamo che τ è un fibrato vettoriale con base N il cui spazio totale U è un intorno aperto di N in M .

²Ad esempio, se M ed N sono entrambe orientate, ed $\omega_M \in \Omega^m(M)$, $\omega_N \in \Omega^n(N)$ sono forme di grado massimo che ne definiscono l'orientazione, si può definire in modo naturale l'orientazione sulle fibre F di τ mediante forme $\omega_F \in \Omega^k(F)$ per cui $\pi^*\omega_N(p) \wedge \tilde{\omega}_F(p) > 0$ per ogni $p \in F$ ed ogni estensione $\tilde{\omega}_F$ di ω_F a un intorno di p in M .

$$\begin{aligned}
 &= \int_U \pi^*(\alpha|_N) \wedge \Phi_\tau \quad (\text{per la formula di Stokes}) \\
 &= \int_N \alpha, \quad (\text{per integrazione sulla fibra}),
 \end{aligned}$$

perché Φ_τ è la classe di Thom del fibrato. La dimostrazione è completa. \square

Corollario XV.3.2. *Sia M una varietà orientata. Allora il duale di Poincaré di una sua sottovarietà propria orientata N e la classe di Thom di un intorno tubolare di N in M si possono rappresentare mediante la stessa forma. In particolare, il duale di Poincaré di una sottovarietà propria orientata N di M può essere rappresentato da una forma chiusa il cui supporto è contenuto in un arbitrario intorno aperto U di N in M .*

Se $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ è un fibrato vettoriale orientato su una varietà orientata M , allora possiamo immergere M in E come la sezione nulla ed identificare ξ con un intorno tubolare di M in E . Abbiamo dunque:

Proposizione XV.3.3. *La classe di Thom di un fibrato vettoriale orientato $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ e il duale di Poincaré della sua sezione nulla possono essere rappresentati dalla stessa forma.* \square

XV.4. Due proprietà fondamentali della dualità di Poincaré

Ricordiamo che due sottovarietà R ed S di una varietà differenziabile M si intersecano trasversalmente se

$$(15.4.1) \quad T_x R + T_x S = T_x M, \quad \forall x \in R \cap S.$$

Se le due varietà R ed S si intersecano trasversalmente, allora

$$(15.4.2) \quad \text{codim}(R \cap S) = \text{codim} R + \text{codim} S.$$

In particolare, il fibrato normale $\nu_M(R \cap S)$ della loro intersezione è

$$(15.4.3) \quad \nu_M(R \cap S) = \nu_M R|_{R \cap S} \oplus_{R \cap S} \nu_M S|_{R \cap S}.$$

Supponiamo ora che sia M che R ed S siano orientate. Abbiamo allora la relazione tra le classi di Thom:

$$(15.4.4) \quad \Phi_{R \cap S} = \Phi_R \wedge \Phi_S.$$

Quindi nella dualità di Poincaré l'intersezione trasversale di sottovarietà orientate corrisponde al prodotto esterno di forme.

Ricordiamo che, più in generale, un'applicazione $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ si dice *trasversale* a una sottovarietà S di N se

$$(15.4.5) \quad f_*(T_x M) + T_{f(x)} S = T_{f(x)} N, \quad \forall x \in f^{-1}(S).$$

Supponiamo ora che M ed N siano orientate e che $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ preservi l'orientazione. Sia S una sottovarietà orientata di N , trasversale ad f . Se $\tau = (U \xrightarrow{\pi} S)$ è un intorno tubolare sufficientemente piccolo di S in N , allora $f^{-1}(U)$

è lo spazio totale di un intorno tubolare $\tau' = (f^{-1}(U) \xrightarrow{\pi'} f^{-1}(S))$ di $f^{-1}(S)$ in M . Dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} H^q(S) & \xrightarrow{\wedge \Phi_S} & H_{cv}^{q+k}(U) & \xrightarrow{L_*} & H^{q+k}(N) \\ f^* \downarrow & & f^* \downarrow & & f^* \downarrow \\ H^q(f^{-1}(S)) & \xrightarrow{\wedge \Phi_S} & H_{cv}^{q+k}(f^{-1}(U)) & \xrightarrow{L_*} & H^{q+k}(M) \end{array}$$

otteniamo che, se η_S è duale di Poincaré di S in N , allora $f^*\eta_S = \eta_{f^{-1}(S)}$, cioè nella dualità di Poincaré le applicazioni indotte in coomologia corrispondono alle immagini inverse dei corrispondenti oggetti geometrici.

Per il Teorema di trasversalità in omotopia, questa uguaglianza vale anche senza l'ipotesi di trasversalità dell'applicazione f .

Come conseguenza abbiamo

Teorema XV.4.1. *Sia M una varietà connessa orientata. Se N_0 ed N_1 sono due sottovarietà proprie isotope di M in un'isotopia dello spazio ambiente, allora le classi di Thom dei loro intorni tubolari definiscono in M la stessa classe di coomologia.*

Abbiamo inoltre

Teorema XV.4.2. *Se N_1, N_2 sono due sottovarietà orientate, di dimensione n_1, n_2 rispettivamente, di una sottovarietà orientata M , di dimensione m , con $n_1 + n_2 \geq m$, che si intersecano trasversalmente, allora la classe di Thom dell'intersezione è il prodotto delle classi di Thom di N_1 ed N_2 .*

Teorema XV.4.3. *Siano N_1 ed N_2 due sottovarietà compatte orientate, di dimensioni n_1, n_2 di una varietà compatta orientata M , di dimensione m , con $n_1 + n_2 = m$, e siano Φ_{N_1}, Φ_{N_2} due forme che definiscono le classi di Thom di loro intorni tubolari. Allora l'indice d'intersezione di N_1 ed N_2 è dato da*

$$(15.4.6) \quad [N_1 : N_2] = \int_M \Phi_{N_1} \wedge \Phi_{N_2}.$$

XV.5. Coomologia di de Rham relativa

Siano M, N varietà differenziabili. Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$ un'applicazione di classe \mathcal{C}^∞ di N in M .

Definizione XV.5.1. Definiamo

$$(15.5.1) \quad \Omega^q(f) = \Omega^q(M) \oplus \Omega^{q-1}(N), \quad \forall q \in \mathbb{Z}, \quad \Omega^*(f) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \Omega^q(f),$$

ed un'applicazione lineare di grado uno

$$(15.5.2) \quad d_f : \Omega^*(f) \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow (d_M \alpha, f^* \alpha - d_N \beta) \in \Omega^*(f).$$

ove abbiamo indicato con d_M e d_N i differenziali esterni su M ed N , rispettivamente.

Abbiamo

Lemma XV.5.2. *La successione*

$$(15.5.3) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^0(f) & \xrightarrow{d_f} & \Omega^1(f) & \xrightarrow{d_f} & \Omega^2(f) & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \dots & \longrightarrow & \Omega^q(f) & \xrightarrow{d_f} & \Omega^{q+1}(f) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

è un complesso.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti, se $(\alpha, \beta) \in \Omega^q(f)$,

$$d_f^2(\alpha, \beta) = d_f(d_M\alpha, f^*\alpha - d_N\beta) = (d_M^2\alpha, f^*d_M\alpha - d_Nf^*\alpha + d_N^2\beta) = 0,$$

perché $d_M^2 = 0$, $d_N^2 = 0$ e $d_N \circ f^* = f^* \circ d_M$. \square

Definizione XV.5.3. Indichiamo con

$$(15.5.4) \quad H^q(f) = (\ker d_f : \Omega^q(f) \rightarrow \Omega^{q+1}(f)) / d_f \Omega^{q-1}(f)$$

il q -esimo gruppo di coomologia del complesso (15.5.3).

Definiamo applicazioni $\theta : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(f)$ e $\pi : \Omega^*(f) \rightarrow \Omega^*(M)$ ponendo

$$(15.5.5) \quad \theta(\beta) = (0, (-1)^q \beta), \quad \pi(\alpha, \beta) = \alpha, \quad \forall \alpha \in \Omega^q(M), \beta \in \Omega^{q-1}(N).$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \theta(d_N\beta) &= (0, -(-1)^q d_N\beta) = d_f\theta(\beta), & \forall \beta \in \Omega^{q-1}(N), \\ \pi(d_f(\alpha, \beta)) &= d_M\alpha = d_M\pi(\alpha, \beta), & \forall (\alpha, \beta) \in \Omega^q(f). \end{aligned}$$

Quindi gli omomorfismi della successione esatta corta

$$(15.5.6) \quad 0 \longrightarrow \Omega^*(N) \xrightarrow{\theta} \Omega^*(f) \xrightarrow{\pi} \Omega^*(M) \longrightarrow 0$$

commutatno con i differenziali ed abbiamo, utilizzando il Teorema XIV.5.2,

Teorema XV.5.4. *Abbiamo una successione esatta lunga di coomologia*

$$(15.5.7) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(f) & \xrightarrow{[\pi_*]} & H^0(M) & \longrightarrow & H^0(N) & \longrightarrow & \\ & & \xrightarrow{[\theta_*]} & H^1(f) & \xrightarrow{[\pi_*]} & H^1(M) & \longrightarrow & H^1(N) & \longrightarrow & \\ & & \longrightarrow & \dots & & \dots & \longrightarrow & H^{q-1}(N) & \longrightarrow & \\ & & \xrightarrow{[\theta_*]} & H^q(f) & \xrightarrow{[\pi_*]} & H^q(M) & \longrightarrow & H^q(N) & \longrightarrow & \\ & & \longrightarrow & \dots & & & & & & \end{array} \quad \square$$

Definizione XV.5.5. Nel caso in cui N sia una sottovarietà differenziabile di M ed $f : N \rightarrow M$ l'inclusione, scriveremo $H^q(M, N)$ invece di $H^q(f)$ e lo chiameremo il q -esimo gruppo di coomologia di de Rham relativa della coppia (M, N) .

Se N è una sottovarietà differenziabile di M , una $(\alpha, \beta) \in \Omega^q(M) \oplus \Omega^{q-1}(N)$ è chiusa se α è chiusa in M e la sua restrizione ad N è esatta, dovendo risultare $d_M\alpha = 0$ ed $\alpha|_N = d_N\beta$. La forma (α, β) è esatta se α è esatta ed esiste una forma $\phi \in \Omega^{q-1}(M)$ tale che $\alpha = d\phi$ ed inoltre $\phi|_N - \beta$ sia esatta su N .

Se N è una sottovarietà *propria* di M , possiamo dare un'interpretazione più intuitiva del significato dei gruppi di coomologia relativa. Poniamo

$$(15.5.8) \quad \Omega^*(M, N) = \{\alpha \in \Omega^*(M) \mid \alpha|_N = 0\}.$$

Poiché il differenziale commuta con la restrizione, abbiamo

Lemma XV.5.6. $d\Omega^*(M, N) \subset \Omega^*(M, N)$. □

Abbiamo quindi un complesso

$$(15.5.9) \quad 0 \longrightarrow \Omega^0(M, N) \xrightarrow{d} \Omega^1(M, N) \xrightarrow{d} \Omega^2(M, N) \longrightarrow \dots$$

Abbiamo

Proposizione XV.5.7. *Se N è una sottovarietà differenziabile propria di M , allora i gruppi di coomologia di de Rham relativa della coppia (M, N) sono isomorfi ai corrispondenti gruppi di coomologia del complesso (15.5.9).*

DIMOSTRAZIONE. Nel corso della dimostrazione, denoteremo con $H^q(\Omega^*(M, N), d)$ i gruppi di coomologia del complesso (15.5.9). Indichiamo con $f : N \hookrightarrow M$ l'inclusione. L'omomorfismo naturale $\eta : \Omega^*(M, N) \ni \alpha \rightarrow (\alpha, 0) \in \Omega^*(f)$ commuta con il differenziale ed induce quindi un omomorfismo $H^q(\Omega^*(M, N), d) \rightarrow H^q(M, N)$ tra i gruppi di coomologia del complesso (15.5.9) ed i corrispondenti gruppi di coomologia di de Rham relativa per la coppia (M, N) . Verifichiamo che questo omomorfismo è un isomorfismo.

Osserviamo che $H^0(\Omega^0(M, N), d)$ consiste delle funzioni localmente costanti che si annullano sui punti di N e quindi delle funzioni costanti su ciascuna delle componenti connesse di M che si annullano sulle componenti che intersecano N . Abbiamo poi $\Omega^0(f) = \{(u, 0) \mid u \in \mathcal{C}^\infty(M)\}$. La condizione $d_f(u, 0) = 0$ dà $du = 0$ su M ed $u|_M = 0$, onde $H^0(M, N)$ consiste ancora delle funzioni costanti sulle componenti connesse di M , che si annullano su quelle che intersecano N .

Esaminiamo ora il caso $q > 0$.

INIETTIVITÀ. Sia $\alpha \in \Omega^q(M, N)$ una forma chiusa che si annulla su N e supponiamo che la sua immagine $(\alpha, 0)$ in $\Omega^q(f)$ sia coomologa a zero in $H^q(M, N)$. Questo significa che esistono $\eta \in \Omega^{q-1}(M)$ e $\gamma \in \Omega^{q-2}(N)$ tali che

$$\alpha = d_M \eta \text{ su } M \text{ ed } \eta|_N = d_N \gamma \text{ su } N.$$

Se $q = 1$, allora $\gamma = 0$; quindi $\eta \in \Omega^0(M, N)$ ed α è coomologa a zero in $H^1(\Omega^*(M, N), d)$. Se $q > 1$, osserviamo che, poiché N è una sottovarietà propria di M , possiamo trovare una $\tilde{\gamma} \in \Omega^{q-2}(M)$ con $\tilde{\gamma}|_N = \gamma$. Allora $\eta - d_M \tilde{\gamma} \in \Omega^{q-1}(M, N)$ e verifica l'equazione $d_M(\eta - d_M \tilde{\gamma}) = \alpha$. Quindi α è coomologa a zero in $H^q(\Omega^*(M, N), d)$.

SURGETTIVITÀ. Sia $(\alpha, \beta) \in \Omega^q(f)$ una forma chiusa. Abbiamo cioè $\alpha \in \Omega^q(M)$, $\beta \in \Omega^{q-1}(N)$, $d_M \alpha = 0$ e $\alpha|_N - d_N \beta = 0$. Poiché N è una sottovarietà propria di M , possiamo trovare una forma $\tilde{\beta} \in \Omega^{q-1}(M)$ tale che $\tilde{\beta}|_N = \beta$. Allora

$$(\alpha, \beta) - d_f(\tilde{\beta}, 0) = (\alpha - d_M \tilde{\beta}, 0)$$

è l'immagine della forma chiusa $\alpha - d_M \tilde{\beta}$, che appartiene ad $\Omega^q(M, N)$. La dimostrazione è completa. □

Possiamo quindi, nel caso in cui N sia una sottovarietà propria di M , definire i gruppi di coomologia relativa della coppia (M, N) come i gruppi di coomologia del complesso che si ottiene dal complesso di de Rham su M restringendosi alle forme che hanno restrizione nulla su N .

In generale, otteniamo

Teorema XV.5.8 (Successione esatta di una coppia). *Se N è una sottovarietà differenziale di M , abbiamo una successione esatta lunga di coomologia*

$$(15.5.10) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(M, N) & \longrightarrow & H^0(M) & \longrightarrow & H^0(N) & \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & & H^1(M, N) & \longrightarrow & \dots & \\ & & & & & & \dots & \longrightarrow & H^{q-1}(N) & \longrightarrow \\ & & & & \longrightarrow & & H^q(M, N) & \longrightarrow & H^q(M) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Osservazione XV.5.9. Nel caso in cui N sia una sottovarietà propria di M , gli omomorfismi $H^q(N) \rightarrow H^{q+1}(M, N)$ si possono ottenere associando ad una forma d_N -chiusa $\beta \in \Omega^q(N)$ la classe di coomologia in $H^{q+1}(M, N)$ del differenziale $d_M \tilde{\beta}$ di un suo prolungamento³ $\tilde{\beta} \in \Omega^{q-1}(M)$.

XV.6. Il complesso di de Rham twistato

XV.6.1. Fibrato d'orientazione e fibrati vettoriali piatti. Sia M una varietà differenziabile ed $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i)\}$ il suo atlante massimale.

Definiamo un fibrato in rette $\nu_M = (L \xrightarrow{\pi} M)$ su M richiedendo che gli U_i siano gli aperti di un atlante di trivializzazione di ν_M e le funzioni di transizione siano

$$(15.6.1) \quad g_{i,j}(p) = \text{sgn}(\det(\partial x_i / \partial x_j)), \quad p \in U_i \cap U_j.$$

Definizione XV.6.1. Il fibrato ν_M si dice *il fibrato d'orientazione della varietà M* .

Indicheremo con $\phi_{U,x} : U \times \mathbb{R} \rightarrow L_U$ la trivializzazione locale corrispondente alla carta locale (U, x) di M . Se (U, y) è un'altra carta locale sullo stesso aperto U di M , abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id} \times (\text{sgn}(\partial x / \partial y) \cdot)} & U \times \mathbb{R} \\ \searrow \phi_{U,x} & & \swarrow \phi_{U,y} \\ & L_U & \end{array}$$

Lemma XV.6.2. *Il fibrato d'orientazione ν_M della varietà M è banale se e soltanto se la varietà M è orientabile.*

Il fibrato di orientazione è un esempio di fibrato vettoriale piatto:

³Richiediamo cioè che $\tilde{\beta}|_N = \beta$.

Definizione XV.6.3. Sia ξ un fibrato vettoriale di rango k . Un atlante di trivializzazione piatto di ξ è un atlante di trivializzazione $\{(U_i, \phi_i)\}$ di ξ in cui le funzioni di transizione $g_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(U_i \cap U_j, \mathbf{GL}(k, \mathbb{R}))$ siano localmente costanti.

Due atlanti di trivializzazione piatti di ξ sono *equivalenti* se la loro unione è ancora un atlante di trivializzazione piatto di ξ .

Una classe di equivalenza di atlanti di trivializzazione piatti di ξ si dice una *struttura di piattezza* di ξ .

Un *fibrato vettoriale piatto* è un fibrato vettoriale con una struttura di piattezza assegnata.

Osservazione XV.6.4. I fibrati vettoriali banali ammettono una struttura di piattezza, ma non tutti i fibrati vettoriali ammettono una struttura di piattezza. Ad esempio, il fibrato tangente ad una sfera di dimensione $n \geq 2$ non ammette una struttura di piattezza.

XV.6.2. Forme differenziali a coefficienti in un fibrato vettoriale. Sia M una varietà differenziabile e sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato differenziabile con base M .

Definizione XV.6.5. Una q -forma differenziale su M a coefficienti in E è un'applicazione

$$(15.6.2) \quad \alpha : (\mathfrak{X}(M))^q \longrightarrow \Gamma(M, E)$$

tale che, per $X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M)$ risulti:

$$(15.6.3) \quad \alpha(X_1, \dots, X_q) = 0 \quad \text{se } \exists 1 \leq i < j \leq q \text{ tale che } X_i = X_j,$$

$$(15.6.4) \quad \alpha(fX_1, \dots, X_q) = f\alpha(X_1, \dots, X_q), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Indichiamo con $\Omega^q(M, E)$ lo spazio delle q -forme differenziali a coefficienti in E e con $\Omega_c^q(M, E)$ il sottospazio delle q -forme differenziali a coefficienti in E ed a supporto compatto in M .

Per ogni coppia di interi non negativi q_1, q_2 possiamo definire un prodotto

$$(15.6.5) \quad \Omega^{q_1}(M) \times \Omega^{q_2}(M, E) \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha \otimes \beta \in \Omega^{q_1+q_2}(M, E)$$

mediante

$$(\alpha \otimes \beta)(X_1, \dots, X_{q_1+q_2}) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{q_1+q_2}, \\ 1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_{q_1} \leq q_1+q_2, \\ 1 \leq \sigma_{q_1+1} < \dots < \sigma_{q_1+q_2} \leq q_1+q_2}} \varepsilon(\sigma) \alpha(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_{q_1}}) \beta(X_{\sigma_{q_1+1}}, \dots, X_{\sigma_{q_1+q_2}})$$

Scriveremo anche

$$\beta \otimes \alpha = (-1)^{q_1 q_2} \alpha \otimes \beta$$

ed

$$s \otimes \alpha = s \otimes \alpha \in \Omega^q(M, E), \quad \text{se } s \in \Gamma_\xi(M, E) = \Omega^0(M, E), \quad \alpha \in \Omega^q(M).$$

XV.6.3. Integrazione di densità. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m .

Definizione XV.6.6. Una *densità* su M è una m -forma differenziale a coefficienti nel suo fibrato d'orientazione $\nu_M = (L \xrightarrow{\pi} M)$.

Ad ogni carta locale (U, x) in M possiamo associare la sezione $s_{U,x} \in \Gamma_{\nu_M}(U, L)$ definita dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \text{id} \times 1 \swarrow & & \searrow s_{U,x} \\ U \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\phi_{(U,x)}} & L_U \end{array}$$

Se $\omega \in \Omega_c^m(U)$, definiamo

$$(15.6.6) \quad \int_M s_{U,x} \otimes \omega = \int_{x(U)} x^* \omega.$$

Osserviamo che, se y sono diverse coordinate sullo stesso aperto U di M , allora $s_{U,x} \otimes \omega = \text{sgn}(\partial y / \partial x) s_{U,y} \otimes \omega$ ed abbiamo

$$\int_{x(U)} x^* \omega = \int_{y(U)} \text{sgn}(\partial y / \partial x) y^* \omega$$

per le formule di cambiamento di variabili negli integrali multipli.

Utilizzando la partizione dell'unità ricaviamo allora

Teorema XV.6.7. *Esiste un'unica applicazione lineare*

$$(15.6.7) \quad \Omega^m(M, L) \ni \alpha \longrightarrow \int_M \alpha \in \mathbb{R}$$

che coincide con la (15.6.6) sugli elementi della forma $\alpha = s_{U,x} \otimes \omega$ per (U, x) carta coordinata in M ed $\omega \in \Omega_c^m(U)$.

Utilizzando la partizione dell'unità si dimostra facilmente che vale la formula di Stokes per le densità:

Teorema XV.6.8 (Formula di Stokes). *Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Allora*

$$(15.6.8) \quad \int_M d\alpha = 0, \quad \forall \alpha \in \Omega_c^{m-1}(M).$$

Sia S una sottovarietà propria di M , di dimensione k . Un'orientazione del fibrato normale $\nu_M S$ definisce un isomorfismo del fibrato d'orientazione $\nu_S = (L_S \xrightarrow{S} S)$ di S con il pullback su S del fibrato d'orientazione ν_M di M . Questo si può definire nel modo seguente. Sia $\tau_S = (U \xrightarrow{\pi_S} S)$ un intorno tubolare di S in M . Per ogni carta coordinata (W, y) in S possiamo trovare una carta coordinata (V, x) in M tale che

$$\begin{aligned} V \cap S = W, \quad x^i|_W = y^i, \quad \text{per } 1 \leq i \leq k, \quad dx^{k+1} \wedge \dots \wedge dx^m > 0 \\ \text{su } \pi_S^{-1}(p) \cap V, \quad \forall p \in W. \end{aligned}$$

Qui $dx^{k+1} \wedge \cdots \wedge dx^m > 0$ significa che x^{k+1}, \dots, x^m sono coordinate orientate positivamente sulle fibre dell'intorno tubolare. L'isomorfismo è dato allora dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} L_S|_W & \xrightarrow{\sim} & L|_W \\ & \swarrow \phi_{W,y} & \searrow \phi_{V,x} \\ & W \times \mathbb{R}. & \end{array}$$

Quindi, se S è una sottovarietà propria di dimensione k di M con fibrato normale orientato ed $\alpha \in \Omega_c^k(M, L)$, allora $\alpha|_S \in \Omega_c^k(S, L_S)$ e possiamo quindi calcolare l'integrale

$$\int_S \alpha = \int_S \alpha|_S.$$

Osserviamo che viceversa, se $\alpha \in \Omega_c^k(S, L_S)$ e Φ_S è la classe di Thom di S con supporto nell'intorno tubolare U , allora $(\pi_S^* \alpha) \otimes \Phi_S \in \Omega_c^m(M)$ e

$$(15.6.9) \quad \int_S \alpha = \int_M (\pi_S^* \alpha) \otimes \Phi_S.$$

XV.6.4. Il complesso di de Rham per forme a coefficienti in un fibrato vettoriale piatto. In generale, non è possibile estendere la definizione del differenziale esterno alle forme a coefficienti in un fibrato vettoriale. Per scrivere la formula (13.2.6) del Capitolo XIII occorre infatti che sia definita una nozione di derivazione per le sezioni del fibrato. A questo fine introdurremo nel seguito la derivazione covariante, ma, come vedremo, la differenziazione covariante non ci permetterà, in generale, di definire un complesso.

Nel caso di un fibrato vettoriale piatto, c'è però una differenziazione naturale delle sezioni e possiamo quindi definire il differenziale mediante la (13.2.6) del Capitolo XIII.

Abbiamo in particolare, associati al fibrato d'orientazione $\circ_M = (L \xrightarrow{\pi} M)$, i complessi

$$(15.6.10) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^0(M, L) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M, L) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(M, L) \\ & & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \Omega^{m-1}(M, L) & \xrightarrow{d} & \Omega^m(M, L) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

$$(15.6.11) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_c^0(M, L) & \xrightarrow{d} & \Omega_c^1(M, L) & \xrightarrow{d} & \Omega_c^2(M, L) \\ & & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \Omega_c^{m-1}(M, L) & \xrightarrow{d} & \Omega_c^m(M, L) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Definizione XV.6.9. I complessi (15.6.10) e (15.6.11) si dicono, rispettivamente, il *complesso di de Rham twistato* e il *complesso di de Rham twistato a supporti compatti*.

Indichiamo con $H^q(M, L)$ ed $H_c^q(M, L)$ i loro rispettivi gruppi di coomologia.

XV.6.5. Dualità di Poincaré. Sia M una varietà differenziabile. I complessi di de Rham twistati su M sono isomorfi ai rispettivi complessi di de Rham definiti in precedenza nel caso in cui M sia una varietà orientabile, e ne differiscono nel caso in cui M non sia orientabile.

Dalla formula di Stokes ricaviamo

Teorema XV.6.10. (1) *L'applicazione*

$$(15.6.12) \quad \Omega^q(M) \times \Omega_c^{m-q}(M, L) \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow \int_M \alpha \otimes \beta \in \mathbb{R}$$

definisce, per passaggio al quoziente, un'applicazione bilineare

$$(15.6.13) \quad H^q(M) \times H_c^{m-q}(M, L) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

(2) *L'applicazione*

$$(15.6.14) \quad \Omega_c^q(M) \times \Omega^{m-q}(M, L) \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow \int_M \alpha \otimes \beta \in \mathbb{R}$$

definisce, per passaggio al quoziente, un'applicazione bilineare

$$(15.6.15) \quad H_c^q(M) \times H^{m-q}(M, L) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Ripetendo la dimostrazione fatta nel caso delle varietà orientabili e della coomologia di de Rham, otteniamo

Teorema XV.6.11 (dualità di Poincaré). *Se M è una varietà non orientabile con un buon ricoprimento finito, abbiamo gli isomorfismi*

$$(15.6.16) \quad H^q(M) \simeq (H_c^{m-q}(M, L))^*, \quad H^q(M, L) \simeq (H_c^{m-q}(M))^*.$$

Osservazione XV.6.12. Sia S una sottovarietà propria di dimensione k di M .

(1) Ad un'orientazione di S corrisponde una classe $[\eta_S]$ in $H^k(M, L)$, con $\eta_S \in \mathcal{L}^k(M, L)$ ed

$$\int_S \alpha = \int_M \alpha \otimes \eta_S, \quad \forall \alpha \in \mathcal{L}^k(M).$$

(2) Ad un'orientazione del fibrato normale di S corrisponde una classe $[\eta_S]$ in $H^k(M)$, con $\eta_S \in \mathcal{L}^k(M)$ e

$$\int_S \alpha = \int_M \alpha \otimes \eta_S, \quad \forall \alpha \in \mathcal{L}^k(M, L).$$

XV.6.6. Rivestimento a due fogli di una varietà non orientabile. Sia M una varietà differenziabile ed $\nu_M = (L \xrightarrow{\pi} M)$ il suo fibrato d'orientazione. Indichiamo con L_0 la sezione nulla di ν_M e definiamo

$$(15.6.17) \quad \tilde{M} = (L \setminus L_0) / \sim, \quad \text{ove } t \sim t' \Leftrightarrow t' = k \cdot t, \quad \text{con } k > 0.$$

La proiezione nella base definisce un'applicazione $\varpi : \tilde{M} \rightarrow M$, che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} L \setminus L_0 & \xrightarrow{\quad} & \tilde{M} \\ & \searrow \pi & \swarrow \varpi \\ & & M. \end{array}$$

La $\varpi : \tilde{M} \rightarrow M$ è un rivestimento a due fogli ed è possibile definire in modo unico una struttura di varietà differenziabile su \tilde{M} , per cui ϖ sia un diffeomorfismo locale. Vale il seguente

Lemma XV.6.13. *Se M è connessa, allora \tilde{M} è connessa se e soltanto se la M non è orientabile.*

L'applicazione

$$(15.6.18) \quad \varpi^* : H^q(M) \longrightarrow H^q(\tilde{M})$$

è iniettiva per ogni $q \geq 0$.

Esempio XV.6.14. La bottiglia di Klein si può definire come il quoziente M del quadrato $Q = \{0 \leq x, y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ rispetto alla relazione d'equivalenza:

$$(15.6.19) \quad (0, y) \sim (1, y) \text{ per } 0 \leq y \leq 1, \quad \text{e} \quad (x, 0) \sim (1-x, 1) \text{ per } 0 \leq x \leq 1.$$

La M è una varietà differenziabile compatta di dimensione 2 non orientabile. Sia $\pi : Q \rightarrow M$ la proiezione nel quoziente. Siano $A = \pi(\overset{\circ}{Q})$ e $B = \pi(Q \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\})$. Allora A è omotopicamente equivalente ad un disco, B al bouquet di due circonferenze ed $A \cap B$ ad una circonferenza. La successione esatta di Mayer-Vietoris ci dà allora:

$$0 \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow H^1(B) \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^2(M) = \{0\}.$$

Poiché $H^1(B) = \mathbb{R}^2$, otteniamo che $H^1(M) = \mathbb{R}$. Per la dualità di Poincaré

$$H^q(M, L) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 1, 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo che il rivestimento doppio della bottiglia di Klein è il toro T^2 e quindi $H^1(M) \rightarrow H^1(\tilde{M})$ è iniettiva e non surgettiva.

Il complesso di Čech-de Rham

XVI.1. Successione esatta associata ad un ricoprimento

In questo paragrafo introduciamo una successione esatta che ci sarà poi utile per costruire oggetti globali a partire da altri oggetti definiti localmente.

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m , $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un suo ricoprimento aperto e $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale differenziabile di base M . Per ogni sequenza finita di indici i_1, \dots, i_n indichiamo con U_{i_1, \dots, i_n} l'intersezione $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$ dei corrispondenti aperti del ricoprimento. Siano

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, E) &= \bigoplus_{i \in I} \Gamma_{\xi}(U_i, E), \\ \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, E) &= \left\{ f = (f_{i_0, \dots, i_q}) \mid f_{i_0, \dots, i_q} \in \Gamma_{\xi}(U_{i_0, \dots, i_q}, E), f_{i_{\sigma_1} \dots i_{\sigma_q}} = \varepsilon(\sigma) f_{i_0, \dots, i_q}, \forall \sigma \in \mathbf{S}_q \right\}, \\ & \qquad \qquad \qquad q \geq 1, \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}^*(\mathcal{U}, E) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, E).$$

Definiamo un'applicazione lineare $\delta : \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, E) \rightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, E)$, omogenea di grado uno, ponendo

$$(16.1.1) \quad (\delta f)_{i_0, \dots, i_{q+1}} = \sum_{h=0}^{q+1} (-1)^h f_{i_0, \dots, \widehat{i}_h, \dots, i_{q+1}} \Big|_{U_{i_0, \dots, i_{q+1}}}, \quad \forall f = (f_{i_0, \dots, i_q}) \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, E).$$

Definiamo ancora un'applicazione $\epsilon : \Gamma_{\xi}(M, E) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, E)$ mediante

$$(16.1.2) \quad (\epsilon f)_i = f|_{U_i}.$$

Teorema XVI.1.1. *La successione*

$$(16.1.3) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^{\infty}(M) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, E) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, E) & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \longrightarrow & \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, E) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, E) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^{q+1}(\mathcal{U}, E) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

è esatta.

Premettiamo alla dimostrazione del teorema la costruzione di un *operatore d'omotopia* per il complesso (16.1.3).

Fissata una partizione dell'unità $\{\kappa_i\}_{i \in I}$ subordinata al ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di M , indichiamo con κ le applicazioni

$$(16.1.4) \quad \begin{aligned} \kappa : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, E) &\longrightarrow \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, E), & (\kappa f)_{i_1, \dots, i_q} &= \sum_{i \in I} \kappa_i f_{i, i_1, \dots, i_q}, \\ \kappa : \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, E) &\longrightarrow \Gamma_{\xi}(M, E), & \kappa f &= \sum_{i \in I} \kappa_i f_i, \end{aligned}$$

dove per semplicità di notazione abbiamo indicato con $\kappa_i f_{i_1, \dots, i_q}$ la sezione di $\Gamma_{\xi}(U_{i_1, \dots, i_q}, E)$ che è uguale a $\kappa_i f_{i_1, \dots, i_q}$ su U_{i_1, \dots, i_q} e a zero fuori del supporto di κ_i .

Proposizione XVI.1.2. *L'applicazione (16.1.4) soddisfa le identità*

$$(16.1.5) \quad \delta \circ \kappa + \kappa \circ \delta = 1 \text{ su } \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, E) \text{ per } q \geq 1,$$

$$(16.1.6) \quad \epsilon \circ \kappa + \kappa \circ \delta = 1 \text{ su } \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, E).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $f = (f_{i_0, \dots, i_q}) \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, E)$, con $q \geq 1$. Abbiamo

$$\begin{aligned} (\delta(\kappa f))_{i_0, \dots, i_q} &= \sum_{h=0}^q (-1)^h (\kappa f)_{i_0, \dots, \widehat{i}_h, \dots, i_q} = \sum_{h=0}^q \sum_i (-1)^h \kappa_i f_{i, i_0, \dots, \widehat{i}_h, \dots, i_q}, \\ (\kappa(\delta f))_{i_0, \dots, i_q} &= \sum_i \kappa_i (\delta f)_{i, i_0, \dots, i_q} \\ &= \sum_i \kappa_i f_{i_0, \dots, i_q} - \sum_i \sum_{h=0}^q (-1)^h \kappa_i f_{i, i_0, \dots, \widehat{i}_h, \dots, i_q} \\ &= f_{i_0, \dots, i_q} - \sum_i \sum_{h=0}^q (-1)^h \kappa_i f_{i, i_0, \dots, \widehat{i}_h, \dots, i_q}, \end{aligned}$$

dove per semplicità di notazioni abbiamo ommesso di indicare le restrizioni e le estensioni a zero fuori dai supporti delle κ_i . Sommando membro a membro otteniamo che $\delta(\kappa f) + \kappa(\delta f) = f$. Il caso $q = 0$ è analogo. \square

Definizione XVI.1.3. L'applicazione κ definita nella (16.1.4) si dice l'*applicazione di omotopia* associata alla partizione dell'unità $\{\kappa_i\}$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA XVI.1.1. L'esattezza in $\Gamma_{\xi}(M, E)$ ed in $\mathcal{C}^0(\mathcal{U}, E)$ sono ovvie, così come il fatto che $\delta^2 = 0$ e quindi (16.1.3) sia un complesso. L'esattezza è conseguenza dell'esistenza di un operatore d'omotopia. Se infatti $f \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, E)$ e $\delta f = 0$, allora

$$\delta(\kappa f) = \delta(\kappa f) + \kappa(\delta f) = f.$$

Questo completa la dimostrazione dell'esattezza della (16.1.3). \square

XVI.2. La coomologia di Čech-de Rham

Fissata la varietà M ed un suo ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$, indichiamo, per ogni coppia di interi non negativi (q_1, q_2) con \mathcal{K}^{q_1, q_2} lo spazio $\mathcal{C}^{q_1}(\mathcal{U}, \Omega^{q_2})$ delle $(q_1 + 1)$ -uple $f = (f_{i_0, \dots, i_{q_1}})$ con $f_{i_0, \dots, i_{q_1}} \in \Omega^{q_2}(U_{i_0, \dots, i_{q_1}})$ ed $f_{i_{\sigma_0}, \dots, i_{\sigma_{q_1}}} = \varepsilon(\sigma) f_{i_0, \dots, i_{q_1}}$ per ogni permutazione σ di $\{0, 1, \dots, q_1\}$. Possiamo allora costruire il *complesso*

doppio

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Omega^0(M) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{K}^{0,0} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{K}^{1,0} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{K}^{2,0} & \longrightarrow & \dots \\
 & & d \downarrow & & d \downarrow & & d \downarrow & & d \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^1(M) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{K}^{0,1} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{K}^{1,1} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{K}^{2,1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & d \downarrow & & d \downarrow & & d \downarrow & & d \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^2(M) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{K}^{0,2} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{K}^{1,2} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{K}^{2,2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

delle q_1 -cocatene alternate del ricoprimento \mathcal{U} a coefficienti nelle q_2 -forme differenziali. Poniamo

$$(16.2.1) \quad \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, \Omega^*) = \bigoplus_{q_1, q_2 \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{C}^{q_1}(\mathcal{U}, \Omega^{q_2}).$$

Definiamo il *differenziale totale* del complesso doppio

$$(16.2.2) \quad \begin{aligned} D : \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, \Omega^*) &\rightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, \Omega^*), \quad \text{con} \\ Df &= \delta f + (-1)^{q_1} df, \quad \forall f \in \mathcal{C}^{q_1}(\mathcal{U}, \Omega^{q_2}). \end{aligned}$$

Poniamo

$$(16.2.3) \quad \mathcal{K}^{(q)} = \bigoplus_{q_1+q_2=q} \mathcal{K}^{q_1, q_2} = \bigoplus_{q_1+q_2=q} \mathcal{C}^{q_1}(\mathcal{U}, \Omega^{q_2}).$$

Lemma XVI.2.1. $D(\mathcal{K}^{(q)}) \subset \mathcal{K}^{(q+1)}$ per ogni intero $q \geq 0$ e

$$(16.2.4) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{K}^{(0)} \xrightarrow{D} \mathcal{K}^{(1)} \xrightarrow{D} \mathcal{K}^{(2)} \longrightarrow \dots$$

è un complesso.

DIMOSTRAZIONE. La prima osservazione segue dal fatto che $\delta \mathcal{K}^{(q)} \subset \mathcal{K}^{(q+1)}$ e $d \mathcal{K}^{(q)} \subset \mathcal{K}^{(q+1)}$. Sia ora $f \in \mathcal{C}^{q_1}(\mathcal{U}, \Omega^{q_2})$. Abbiamo

$$\begin{aligned} D^2 f &= D(\delta f + (-1)^{q_1} df) = \delta^2 f + (-1)^{q_1} \delta df + (-1)^{q_1+1} d\delta f + (-1)^{2q_1} d^2 f \\ &= (-1)^{q_1} (\delta df - d\delta f) = 0
 \end{aligned}$$

Questo dimostra che (16.2.4) è un complesso. \square

Indichiamo con

$$(16.2.5) \quad H^q(\mathcal{K}^*, D) = (\ker(D : \mathcal{K}^{(q)} \rightarrow \mathcal{K}^{(q+1)})) / D\mathcal{K}^{(q-1)}$$

i gruppi di coomologia del complesso (16.2.4).

Per ogni intero non negativo q abbiamo un'applicazione naturale

$$(16.2.6) \quad \epsilon : \Omega^q(M) \ni \alpha \longrightarrow (\alpha|_{U_i})_{i \in I} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^q) \subset \mathcal{K}^{(q)}.$$

Osserviamo che

$$(16.2.7) \quad \epsilon \circ d = D \circ \epsilon.$$

L'applicazione (16.2.6) induce quindi un'applicazione in coomologia

$$(16.2.8) \quad \epsilon_* : H^q(M) \longrightarrow H^q(\mathcal{K}^*, D).$$

Teorema XVI.2.2 (Mayer-Vietoris generalizzato). *Per ogni intero $q \geq 0$, l'applicazione (16.2.8) è un isomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Il caso $q = 0$ è banale. Dimostriamo l'isomorfismo per $q \geq 1$. **INIETTIVITÀ.** Sia $f \in \mathcal{L}^q(M)$ e supponiamo esista una $g \in \mathcal{K}^{(q-1)}$ tale che $\epsilon f = Dg$.

Dimostriamo per ricorrenza che, per ogni $h = 0, \dots, q-1$, si può trovare una soluzione $g_h \in \bigoplus_{j=0}^{q-h-1} \mathcal{K}^{j,q-j-1}$ dell'equazione $Dg = \epsilon f$. Per ipotesi l'asserzione è vera se $h = 0$, perché $\bigoplus_{j=0}^{q-1} \mathcal{K}^{j,q-j-1} = \mathcal{K}^{(q-1)}$. Supponiamo $0 \leq h < q-1$ e che vi sia una soluzione $g_h \in \bigoplus_{j=0}^{q-h-1} \mathcal{K}^{j,q-j-1}$ dell'equazione $Dg = \epsilon f$. Abbiamo

$$g_h = g_h^0 + \dots + g_h^{q-h-1}, \quad \text{con } g_h^j \in \mathcal{K}^{j,q-j-1}.$$

Abbiamo allora

$$\begin{cases} (f|_{U_i}) = dg_h^0, \\ \delta g_h^0 - dg_h^1 = 0, \\ \dots \\ \delta g_h^{q-h-2} + (-1)^{q-h-1} dg_h^{q-h-1} = 0, \\ \delta g_h^{q-h-1} = 0. \end{cases}$$

Fissata una partizione dell'unità $\{\kappa_i\}$ subordinata ad \mathcal{U} , sia κ il corrispondente operatore di omotopia. Allora $g_{h+1} = g_h - D(\kappa g_h^{q-h-1}) \in \bigoplus_{j=0}^{q-h-2} \mathcal{K}^{j,q-j-1}$ e soddisfa ancora l'equazione $D(g_{h+1}) = D(g_h - D(\kappa g_h^{q-h-1})) = Dg_h = \epsilon f$.

Per ricorrenza otteniamo quindi una soluzione $g_0 = (g_{0,i}) \in \mathcal{K}^{0,q-1}$ di $Dg_0 = \epsilon f$. È allora

$$\begin{cases} dg_{0,i} = f|_{U_i}, \\ g_{0,i} = g_{0,j} \quad \text{su } U_i \cap U_j, \end{cases}$$

e quindi $g_0 = \epsilon g$ per una $g \in \mathcal{Q}^{q-1}(M)$ per cui $dg = f$.

SURGETTIVITÀ. Sia $f \in \mathcal{K}^{(q)}$ con $Df = 0$. Dimostriamo per ricorrenza che, per ogni $h = 0, \dots, q$, esiste una $g_h \in \mathcal{K}^{(q-1)}$ tale che $f_h = f - Dg_h \in \bigoplus_{j=0}^{q-h} \mathcal{K}^{j,q-j}$. Per $h = 0$ possiamo prendere $f_0 = f$ e $g_0 = 0$. Supponiamo, per un h con $0 \leq h < q$, di aver trovato $g_h \in \mathcal{K}^{(q-1)}$ tale che $f_h = f - Dg_h \in \bigoplus_{j=0}^{q-h} \mathcal{K}^{j,q-j}$. Scriviamo $f_h = f_h^0 + \dots + f_h^{q-h}$ con $f_h^j \in \mathcal{K}^{j,q-j}$. Da $Df_h = 0$ ricaviamo che $\delta f_h^{q-h} = 0$. Posto $g'_{h+1} = \kappa f_h^{q-h} \in \mathcal{K}^{q-h-1,h} \subset \mathcal{K}^{(q-1)}$ e $g_{h+1} = g_h + g'_{h+1} \in \mathcal{K}^{(q-1)}$, otteniamo

$$f_{h+1} = f_h - Dg'_{h+1} = f - Dg_{h+1} \in \bigoplus_{j=0}^{q-h-1} \mathcal{K}^{j,q-j}.$$

Per $h = q$ otteniamo una $g_q \in \mathcal{K}^{q-1}$ tale che $f_q = f - Dg_q \in \mathcal{K}^{0,q}$. L'equazione $Df_q = 0$ ci dà allora $f_q = \epsilon \alpha$ per una forma $\alpha \in \mathcal{L}^q(M)$. L'immagine della classe di α in $H^q(M)$ è la classe di f in $H^q(\mathcal{K}^*, D)$. \square

Per ogni intero $q \geq 0$ indichiamo con $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale

$$(16.2.9) \quad \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \{(c_{i_0, \dots, i_q}) \mid U_{i_0, \dots, i_q} \neq \emptyset\}.$$

Possiamo identificare $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ a un sottospazio di $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^0)$ e la restrizione dell'operatore δ definisce un'applicazione

$$(16.2.10) \quad \delta : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R}).$$

Otteniamo un complesso

$$(16.2.11) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow \dots$$

Definizione XVI.2.3. Il complesso (16.2.11) si dice il *complesso di Čech*, a coefficienti reali, relativo al ricoprimento \mathcal{U} . Poniamo

$$\mathcal{Z}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \{\alpha \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \mid \delta\alpha = 0\},$$

$$\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \delta\mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathbb{R}),$$

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \mathcal{Z}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) / \mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}).$$

I gruppi di coomologia $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ e si dicono i *gruppi di coomologia di Čech*, a coefficienti reali, del ricoprimento \mathcal{U} .

Abbiamo un'inclusione naturale

$$(16.2.12) \quad \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{K}^{q,0} \subset \mathcal{K}^{(q)}.$$

Osserviamo ancora che, se $c \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, è $Dc = \delta c$. Quindi (16.2.11) è un sotto-complesso del complesso (16.2.4) ed abbiamo perciò un omomorfismo naturale

$$(16.2.13) \quad \check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow H^*(\mathcal{K}^*, D).$$

Teorema XVI.2.4. Se \mathcal{U} è un buon ricoprimento, allora l'omomorfismo (16.2.13) è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Per $q = 0$ sia $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ che $H^0(\mathcal{K}^*, D)$ si identificano allo spazio delle funzioni localmente costanti su M e sono quindi isomorfi. Nel resto della dimostrazione considereremo gli omomorfismi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow H^q(\mathcal{K}^*, D)$ per $q \geq 1$.

SURGETTIVITÀ. Sia q un intero positivo ed $f \in \mathcal{K}^{(q)}$ con $Df = 0$. Dimostriamo, per induzione su $h = 0, \dots, q$, che è possibile trovare un elemento $f^{(h)} \in \bigoplus_{j=h}^q \mathcal{K}^{j, q-j}$ con $f - f^{(h)} \in D\mathcal{K}^{(q-1)}$. Per $h = 0$ possiamo prendere $f^{(0)} = f$. Supponiamo ora che $0 \leq h < q$ e che vi sia una $f^{(h)} \in \bigoplus_{j=h}^q \mathcal{K}^{j, q-j}$ con $f - f^{(h)} \in D\mathcal{K}^{(q-1)}$. Scriviamo

$$f^{(h)} = f_h^{(h)} + f_{h+1}^{(h)} + \dots + f_q^{(h)}, \quad \text{con } f_j^{(h)} \in \mathcal{K}^{j, q-j}.$$

Poiché $Df^{(h)} = 0$, abbiamo in particolare $df_h^{(h)} = 0$. Per l'ipotesi che \mathcal{U} sia un buon ricoprimento, $H^{q-h}(U_{i_0, \dots, i_h}) = 0$ per ogni scelta degli indici i_0, \dots, i_h e quindi possiamo trovare un elemento $g \in \mathcal{K}^{h, q-h-1}$ tale che $dg = (-1)^h f_h^{(h)}$. Allora $f^{(h+1)} = f^{(h)} - Dg \in \bigoplus_{j=h+1}^q \mathcal{K}^{j, q-j}$ ed $f - f^{(h+1)} \in D\mathcal{K}^{(q-1)}$. Otteniamo in

questo modo un elemento $f^{(q)} = f_q^{(q)} \in \mathcal{K}^{q,0}$, coomologo ad f in $H^q(\mathcal{K}^*, D)$. L'equazione $Df^{(q)} = 0$ ci dà $df^{(q)} = 0$ e $\delta f^{(q)} = 0$ e quindi $f^{(q)}$ è un elemento di $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, che definisce una classe di coomologia in $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ la cui immagine in $H^q(\mathcal{K}^*, D)$ è la classe di coomologia di f .

INIETTIVITÀ. Sia q un intero positivo ed $f \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ con $\delta f = 0$. Abbiamo già osservato che ciò equivale al fatto che $f \in \mathcal{K}^{q,0}$ e $Df = 0$. Supponiamo esista $u \in \mathcal{K}^{(q-1)}$ tale che $Du = f$. Dimostriamo per induzione su $h = 0, \dots, q-1$ che è possibile trovare soluzioni $u^{(h)}$ di $Du^{(h)} = f$ con $u^{(h)} \in \bigoplus_{j=h}^{q-1} \mathcal{K}^{j,q-j-1}$. Possiamo infatti porre $u^{(0)} = u$. Supponiamo di aver costruito $u^{(h)}$ per un h con $0 \leq h < q-1$. Se

$$u^{(h)} = u_h^{(h)} + u_{h+1}^{(h)} + \dots + u_{q-1}^{(h)}, \quad \text{con } u_j^{(h)} \in \mathcal{K}^{j,q-j-1},$$

dall'equazione $du^{(h)} = f$ ricaviamo che $du_h^{(h)} = 0$. Poiché $q-h-1 > 0$ ed \mathcal{U} è un buon ricoprimento, possiamo trovare $w \in \mathcal{K}^{h,q-h-2}$ tale che $dw = (-1)^h u_h^{(h)}$. Quindi $u^{(h+1)} = u^{(h)} - Dw \in \bigoplus_{j=h+1}^{q-1} \mathcal{K}^{j,q-j-1}$ e soddisfa $Du^{(h+1)} = f$. Per $u^{(q-1)} \in \mathcal{K}^{q-1,0}$ l'equazione $Du^{(q-1)} = f$ dà $du^{(q-1)} = 0$, cioè $u^{(q-1)} \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, e $\delta u^{(q-1)} = f$. Ciò dimostra che f è coomologa a zero in $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. La dimostrazione è completa. \square

Abbiamo quindi il

Teorema XVI.2.5 (de Rham). *Se \mathcal{U} è un buon ricoprimento di M , allora abbiamo gli isomorfismi*

$$(16.2.14) \quad H^*(M) \xrightarrow{\cong} H^*(\mathcal{K}^*, D) \xleftarrow{\cong} \check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}).$$

Osservazione XVI.2.6. Per ogni ricoprimento \mathcal{U} di M la composizione $\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(\mathcal{K}^*, D_*) \xrightarrow{\cong} H^q(M)$ definisce un omomorfismo della coomologia di Čech del ricoprimento \mathcal{U} , a coefficienti in \mathbb{R} , e la coomologia di de Rham. In generale, questo omomorfismo può non essere né iniettivo, né surgettivo.

XVI.3. Una formula di omotopia

Ricaviamo in questo paragrafo una *formula di omotopia* che renda esplicito l'omomorfismo di de Rham $\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow H^q(M)$, che diventa un isomorfismo nel caso in cui \mathcal{U} sia un buon ricoprimento.

Fissiamo una partizione dell'unità $\{\kappa_i\}$ subordinata ad \mathcal{U} . Indichiamo con κ le applicazioni descritte in (16.1.4). Osserviamo che $\kappa : \mathcal{K}^{q_1, q_2} \rightarrow \mathcal{K}^{q_1-1, q_2}$ se $q_1 > 0$, mentre $\kappa : \mathcal{K}^{0, q} \rightarrow \Omega^q(M)$ è l'inversa di $\epsilon : \Omega^q \rightarrow \mathcal{K}^{0, q} \subset \mathcal{K}^{(q)}$. È inoltre conveniente introdurre la notazione \mathfrak{d} per l'operatore $\mathfrak{d} : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{K}^*$ descritto sugli elementi bi-omogenei di \mathcal{K} mediante

$$\mathfrak{d} = (-1)^{q_1} d : \mathcal{K}^{q_1, q_2} \rightarrow \mathcal{K}^{q_1, q_2+1},$$

in modo che il differenziale del complesso (\mathcal{K}^*, D_*) si scriva nella forma

$$D = \delta + \mathfrak{d}.$$

L'esistenza di un'equivalenza omotopica $F : \mathcal{K}^* \rightarrow \Omega^*(M)$ è conseguenza di alcuni fatti generali sui complessi di co-catene¹.

L'applicazione $\epsilon : \Omega^*(M) \rightarrow \mathcal{K}^*$ commuta con i differenziali, è cioè

$$D \circ \epsilon = \epsilon \circ d$$

e definisce quindi un omomorfismo di complessi.

Poniamo (con $\mathcal{K}^{(-1)} = 0$)

$$(16.3.1) \quad \mathcal{Q}^q = \Omega^q(M) \oplus \mathcal{K}^{(q-1)}, \quad \text{per } q \in \mathbb{Z}, q \geq 0.$$

e definiamo su $\mathcal{Q}^* = \bigoplus_{q \geq 0} \mathcal{Q}^q$ un differenziale $\mathfrak{D} : \mathcal{Q}^* \rightarrow \mathcal{Q}^*$ mediante la formula:

$$(16.3.2) \quad \mathfrak{D}(f, \alpha) = (-df, \epsilon(f) + D\alpha).$$

Poiché $\epsilon \circ d = D \circ \epsilon$, e $d^2 = 0$, $D^2 = 0$, è

$$\partial^2(f, \alpha) = \partial(-df, \epsilon(f) + D\alpha) = (d^2f, -\epsilon(df) + D\epsilon(f) + D^2\alpha) = 0.$$

Quindi $\mathfrak{D}^2 = 0$ ed otteniamo un complesso $(\mathcal{Q}^*, \mathfrak{D}_*)$:

$$(16.3.3) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{Q}^0 \xrightarrow{\mathfrak{D}_0} \mathcal{Q}^1 \xrightarrow{\mathfrak{D}_1} \mathcal{Q}^2 \longrightarrow \dots$$

dove abbiamo indicato con \mathfrak{D}_q la restrizione di \mathfrak{D} ad un operatore da \mathcal{Q}^q in \mathcal{Q}^{q+1} .

Definizione XVI.3.1. Il complesso (16.3.3) si dice il *cono* dell'omomorfismo di complessi $\epsilon : \Omega^*(M) \rightarrow \mathcal{K}^*$.

Lemma XVI.3.2. Il complesso (16.3.3) è aciclico e possiamo definire un omomorfismo $\mathfrak{s} : \mathcal{Q}^* \rightarrow \mathcal{Q}^*$, con $\mathfrak{s}_q : \mathcal{Q}^q \rightarrow \mathcal{Q}^{q-1}$, tale che

$$(16.3.4) \quad \mathfrak{D}_{q-1}\mathfrak{s}_q(f, \alpha) = (f, \alpha), \quad \forall (f, \alpha) \in \mathcal{Q}^q \text{ t.c. } \mathfrak{D}_q(f, \alpha) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $(f, 0) \in \mathcal{Q}^0$ e $\mathfrak{D}(f, 0) = 0$, è $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ con $df = 0$ ed $\epsilon(f) = 0$, e dunque $f = 0$. Quindi $\mathfrak{D}_0 : \mathcal{Q}^0 \rightarrow \mathcal{Q}^1$ è iniettiva.

Sia $q \geq 1$ ed $(f, \alpha) \in \mathcal{Q}^q$, con $f \in \Omega^q(M)$ ed $\alpha = \alpha_0 + \dots + \alpha_{q-1}$, con $\alpha_j \in \mathcal{K}^{j, q-j-1}$, e $\mathfrak{D}_q(f, \alpha) = 0$. Abbiamo

$$\begin{cases} \delta\alpha_{q-1} = 0, \\ \delta\alpha_{q-2} + \mathfrak{d}\alpha_{q-2} = 0, \\ \dots \\ \delta\alpha_0 + \mathfrak{d}\alpha_1 = 0, \\ \epsilon(f) + \mathfrak{d}\alpha_0 = 0, \\ df = 0. \end{cases}$$

Sia $\kappa : \mathcal{K}^{q_1, q_2} \rightarrow \mathcal{K}^{q_1-1, q_2}$ l'operatore di omotopia descritto dalle (16.1.4), associato ad una partizione dell'unità $\{\kappa_i\}$ subordinata al ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}$.

¹Vedi ad esempio il Cap.4, §2 in: Edvin H. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer, 1966.

Abbiamo allora, con

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{q-2} = \kappa\alpha_{q-1}, \\ \beta_{q-3} = \kappa(\alpha_{q-2} - (\mathfrak{D}\kappa)\alpha_{q-1}), \\ \beta_{q-4} = \kappa(\alpha_{q-3} - (\mathfrak{D}\kappa)\alpha_{q-2} + (\mathfrak{D}\kappa)^2\alpha_{q-1}), \\ \dots \\ \beta_1 = \kappa(\alpha_2 - (\mathfrak{D}\kappa)\alpha_3 - \dots + (-1)^{q-2}(\mathfrak{D}\kappa)^{q-2}\alpha_{q-1}), \\ \beta_0 = \kappa(\alpha_1 - (\mathfrak{D}\kappa)\alpha_2 + \dots - (-1)^{q-1}(\mathfrak{D}\kappa)^{q-1}\alpha_{q-1}), \\ \\ \alpha_{q-1} = \delta\beta_{q-2}, \\ \alpha_{q-2} = \delta\beta_{q-3} + \mathfrak{D}\beta_{q-2}, \\ \alpha_{q-3} + \delta\beta_{q-4} + \mathfrak{D}\beta_{q-3}, \\ \dots \\ \alpha_1 = \delta\beta_0 + \mathfrak{D}\beta_1. \end{array} \right.$$

Abbiamo poi

$$\delta\alpha_0 + \mathfrak{D}\alpha_1 = 0 \implies \delta(\alpha_0 - \mathfrak{D}\beta_0) = 0$$

e quindi esiste un'unica $g \in \Omega^{q-1}(M)$ tale che

$$\alpha_0 = \mathfrak{D}\beta_0 + \epsilon(g),$$

e da questa relazione si deduce che anche

$$-\epsilon(f) = \mathfrak{D}\alpha_0 = \mathfrak{D}\epsilon(g) = \epsilon(dg) \implies -dg = f.$$

Abbiamo perciò ottenuto

$$(f, \alpha) = \mathfrak{D}(g, \beta), \quad \text{con } \beta = \beta_0 + \dots + \beta_{q-2}.$$

L'espressione esplicita della s_q è allora

$$(16.3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon(g(\alpha)) = \sum_{i=0}^{q-1} (-\mathfrak{D}\kappa)^i \alpha_i, \\ s_q(f, \alpha_0 + \dots + \alpha_{q-1}) = \left(g(\alpha), \kappa \sum_{i=0}^{q-2} \sum_{j=0}^i (-1)^j (\mathfrak{D}\kappa)^j \alpha_{i+1} \right). \end{array} \right.$$

□

Siano i s_q omomorfismi che soddisfano (16.3.4).

Poiché l'immagine di $1 - s_q \mathfrak{D}_{q-1}$ è contenuta nel nucleo di \mathfrak{D}_{q-1} , possiamo definire un operatore

$$(16.3.6) \quad R_q = s_q \circ (1 - s_{q+1} \mathfrak{D}_q) : \mathcal{Q}^q \rightarrow \mathcal{Q}^{q-1}.$$

Vale allora

Lemma XVI.3.3. *Per ogni intero $q \geq 0$ abbiamo*

$$(16.3.7) \quad \mathfrak{D}_{q-1} R_q + R_{q+1} \mathfrak{D}_q = 1_{\mathcal{Q}^q}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{q-1}R_q + R_{q+1}\mathfrak{D}_q &= \mathfrak{D}_{q-1} \circ \mathfrak{s}_q \circ (1 - \mathfrak{s}_{q+1}\mathfrak{D}_q) + \mathfrak{s}_{q+1} \circ (1 - \mathfrak{s}_{q+2}\mathfrak{D}_{q+1})\mathfrak{D}_q \\ &= (1 - \mathfrak{s}_{q+1}\mathfrak{D}_q) + \mathfrak{s}_{q+1}\mathfrak{D}_q = 1,\end{aligned}$$

perché $\mathfrak{D}_{q-1} \circ \mathfrak{s}_q$ è l'identità sull'immagine di $(1 - \mathfrak{s}_{q+1}\mathfrak{D}_q)$, che è contenuta nel nucleo di \mathfrak{D}_q . \square

Definiamo operatori $F_q : \mathcal{K}^{(q)} \rightarrow \Omega^q(M)$ e $K_q : \mathcal{K}^{(q)} \rightarrow \mathcal{K}^{(q-1)}$ ponendo

$$(16.3.8) \quad R_q(0, \alpha) = (F_q(\alpha), K_q(\alpha)), \quad \forall \alpha \in \mathcal{K}^{(q)}.$$

Proposizione XVI.3.4. *Le $F = (F_q)$ ed $\epsilon = (\epsilon_q)$ sono inverse omotopiche l'una dell'altra.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \Omega^{q-1}(M)$,

$$R_q(0, \epsilon(f)) = \mathfrak{s}_q(1 - \mathfrak{s}_{q+1}\mathfrak{D}_q)(0, \epsilon(f)) = \mathfrak{s}_q(df, \epsilon(f)) = (f, 0).$$

Quindi $F \circ \epsilon = 1$.

Sia ora $\alpha \in \mathcal{K}^{q-1}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}(0, \alpha) &= \mathfrak{D}(F(\alpha), K(\alpha)) + (F(D\alpha), K(D\alpha)) \\ &= (-dF(\alpha), \epsilon(F(\alpha)) + DK(\alpha)) + (F(D\alpha), K(D\alpha)).\end{aligned}$$

Da questa identità ricaviamo le uguaglianze

$$\begin{aligned}dF(\alpha) &= F(D\alpha), \\ \alpha - \epsilon \circ F(\alpha) &= DK(\alpha) + K(D\alpha)\end{aligned}$$

La prima ci dice che $F : \mathcal{K}^* \rightarrow \Omega^*$ è un omomorfismo di complessi e la seconda che $\epsilon \circ F$ è omotopa all'identità su (\mathcal{K}^*, D_*) . \square

La formula esplicita per l'operatore F è data da

$$(16.3.9) \quad \epsilon \circ F(\alpha) = \sum_{i=0}^q (-\mathfrak{D}\kappa)^i \alpha_i - \sum_{i=0}^q \kappa(-\mathfrak{D}\kappa)^i \beta_{i+1},$$

con $\beta = \beta_0 + \dots + \beta_{q+1} = D\alpha$ e $\beta_i \in \mathcal{K}^{i, q-i+1}$.

XVI.4. La forma di Eulero di un fibrato in sfere orientate

Ricordiamo che le classi di coomologia di de Rham $H^q(S^n)$ della sfera S^n sono 0 per $q \neq 0, n$ ed isomorfe ad \mathbb{R} per $q = 0, n$. L'applicazione

$$\Omega^n(S^n) \ni \alpha \longrightarrow \int_{S^n} \alpha \in \mathbb{R}$$

definisce per passaggio al quoziente l'isomorfismo $H^n(S^n) \simeq \mathbb{R}$.

Indichiamo con ω l'elemento di $H^n(S^n)$ tale che²

$$\int_{S^n} \omega = 1.$$

²Ricordiamo che un rappresentante di ω è il pullback ad S^n della forma

$$\lambda = \frac{1}{(n+1)c_{n+1}} \frac{\sum_{i=0}^n (-1)^i x^i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n}{(\sum_{i=0}^n |x^i|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \in \mathcal{Z}^{n-1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}),$$

Sia $\text{pr} : \mathbb{R}^m \times S^n \rightarrow S^n$ la proiezione sul secondo fattore. Se $\alpha \in \mathcal{Q}^n(\mathbb{R}^m \times S^n)$ e $d\alpha = 0$, allora, per la formula di Stokes

$$I_\alpha(x) = \int_{\{x\} \times S^n} \alpha$$

è costante per $x \in \mathbb{R}^m$ ed α è una forma esatta se e soltanto se $I_\alpha(x) = 0$. L'applicazione $\alpha \rightarrow I_\alpha(x)$ rende esplicito, in grado n , l'isomorfismo $\text{pr}^* : H^*(S^n) \rightarrow H^*(\mathbb{R}^m \times S^n)$ indotto dal pullback, descritto nel Teorema XIV.3.1. In particolare, la classe di $\text{pr}^*\omega$ è una base di $H^n(\mathbb{R}^m \times S^n) \simeq \mathbb{R}$. La forma $\omega_U = \text{pr}^*\omega$ ha la proprietà che il suo pullback ad ogni fibra $\{x\} \times S^n$ definisce il generatore di $H^n(\{x\} \times S^n)$ con integrale 1.

Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato differenziabile localmente banale con fibre S^n orientate. Il pullback $\pi^* : \mathcal{Q}^*(M) \rightarrow \mathcal{Q}^*(E)$ commuta con i differenziali e definisce quindi un omomorfismo di complessi. Il cono di π^* è un complesso

$$(16.4.1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{Q}^0(\xi) \xrightarrow{d_\xi} \mathcal{Q}^1(\xi) \xrightarrow{d_\xi} \mathcal{Q}^2(\xi) \xrightarrow{d_\xi} \dots$$

dove abbiamo posto³

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^q(\xi) &= \mathcal{Q}^q(M) \oplus \mathcal{Q}^{q-1}(E), \quad q \geq 0, \\ d_\xi(f, g) &= (-d_M f, \pi^*(f) + d_E g), \quad \forall f \in \mathcal{Q}^*(M), \forall g \in \mathcal{Q}^*(E). \end{aligned}$$

Dalla successione esatta corta

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{Q}^{q-1}(E) \xrightarrow{a} \mathcal{Q}(\xi) \xrightarrow{b} \mathcal{Q}(M) \longrightarrow 0 \\ \text{con } a(g) = (0, g) \quad \text{e} \quad b(f, g) = f \end{aligned}$$

si ricava la successione esatta lunga di coomologia

$$(16.4.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\xi) & \longrightarrow & H^0(M) & \longrightarrow & H^0(E) \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & & H^1(M) & \longrightarrow & H^1(E) \longrightarrow \dots \\ \dots & \longrightarrow & H^q(\xi) & \longrightarrow & H^q(M) & \longrightarrow & H^q(E) \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & & H^{q+1}(\xi) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

L'integrazione sulla fibra ci permette di definire, per ogni intero q , un'applicazione

$$(16.4.3) \quad \mu : \mathcal{Q}^q(\xi) \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow \pi_* \beta \in \mathcal{Q}^{q-n-1}.$$

Poiché il differenziale commuta con il pullback, la restrizione alla fibra del pullback di una forma di grado positivo su M è nullo, e l'integrale sulla fibra di una forma

ove

$$c_{n+1} = \begin{cases} \frac{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!!} = \frac{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)(n-1)\dots 3 \cdot 1} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \frac{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!!} = \frac{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)(n-1)\dots 4 \cdot 2} & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

è il volume della palla unitaria $(n+1)$ -dimensionale.

³Conveniamo che $\mathcal{Q}^q(E) = 0$ per $q < 0$.

di grado minore di n è nullo, abbiamo

$$\begin{aligned}\mu(d_\xi(\alpha, \beta)) &= \mu(-d_M\alpha, d_E\beta + \pi^*\alpha) = \pi_*(d_E\beta + \pi^*\alpha) \\ &= \pi_*(d_E\beta) + \pi_*(\pi^*\alpha) = d_M(\pi_*\beta) = d_M(\mu(\alpha, \beta)), \quad \forall(\alpha, \beta) \in \Omega^*(\xi).\end{aligned}$$

Quindi

$$(16.4.4) \quad \mu \circ d_\xi = d_M \circ \mu$$

e quindi la μ definisce per passaggio al quoziente un omomorfismo di grado $-(n+1)$

$$(16.4.5) \quad [\mu] : H^{n+q+1}(\xi) \longrightarrow H^q(M).$$

Osservazione XVI.4.1. In particolare, se $(\alpha, \beta) \in \mathcal{Z}^{n+1}(\xi)$, l'integrale sulla fibra $\pi_*\beta$ è una funzione localmente costante su M .

Dimostreremo in XVI.5 che (16.4.5) è un isomorfismo per ogni intero q . Per dimostrare questo risultato consideriamo preliminarmente il caso $q = 0$.

Teorema XVI.4.2. *L'omomorfismo*

$$(16.4.6) \quad [\mu] : H^{n+1}(\xi) \longrightarrow H^0(M)$$

è un isomorfismo.

In particolare vale il

Corollario XVI.4.3. *Esiste un'unica classe di coomologia $[(e_\xi, \psi_\xi)] \in H^{n+1}(\xi)$ tale che*

$$(16.4.7) \quad \pi_*\psi_\xi = 1 \text{ su } M.$$

Definizione XVI.4.4. L'unica classe di coomologia $[(e_\xi, \psi_\xi)] \in H^{n+1}(\xi)$ che soddisfa (16.4.7) si dice la *classe di Eulero totale del fibrato* ξ .

La sua immagine $[e_\xi]$ in $H^{n+1}(M)$ si dice la *classe di Eulero del fibrato* ξ .

Se $(e_\xi, \psi_\xi) \in \mathcal{Z}^{n+1}(\xi)$ è un rappresentante della classe di Eulero totale di ξ , chiamiamo $\psi_\xi \in \Omega^n(E)$ una *forma angolare* ed $e_\xi \in \mathcal{Z}^{n+1}(M)$ la corrispondente *forma di Eulero* del fibrato ξ .

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA XVI.4.2. Possiamo supporre che M sia connessa. La dimostrazione della surgettività di (16.4.6) è allora equivalente all'esistenza di una classe di Eulero del fibrato ξ , cioè di una $(e_\xi, \psi_\xi) \in \mathcal{Z}^{n+1}(\xi)$ con $\pi_*\psi_\xi = 1$.

Se U è un aperto di trivializzazione per ξ , diffeomorfo ad \mathbb{R}^m , la restrizione a $\xi|_U$ della classe di Eulero totale ha un rappresentante della forma $(0, \psi_U)$, con una forma $\psi_U \in \mathcal{Z}^n(E|_U)$ la cui classe di coomologia in $H^n(E|_U)$ è univocamente determinata dalla richiesta⁴ che sia $\pi_*\psi_U = 1$ su U .

Fissiamo un buon ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di M , che consista di aperti di trivializzazione di ξ . Sia $V_i = E|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i)$ ed indichiamo con $\mathcal{V} = \{V_i\}$ il ricoprimento aperto di E immagine inversa del ricoprimento \mathcal{U} di M .

⁴La classe di Eulero di ξ è un'ostruzione all'esistenza di una forma chiusa globale ψ in $\Omega^n(E)$ che abbia integrale uno su tutte le fibre di ξ .

Costruiamo per ricorrenza una sequenza⁵ ψ_0, \dots, ψ_n con

$$(16.4.8) \quad \begin{cases} \psi_h \in \mathcal{C}^h(\mathcal{V}, \Omega^{n-h}), \\ \pi_* \psi_0 = \epsilon(1), \\ \mathfrak{d}_E \psi_0 = 0, \\ \mathfrak{d}_E \psi_h + \delta \psi_{h-1} = 0 \quad \text{se } 1 \leq h \leq n. \end{cases}$$

Per ogni indice i , fissiamo una forma chiusa $u_i \in \mathcal{L}^n(V_i)$ con $\pi_* u_i = 1$ su U_i e poniamo $\psi_0 = (u_i)$. Poiché

$$\pi_*(\delta \psi_0) = \delta(\pi_* \psi_0) = \delta(\epsilon(1)) = 0,$$

possiamo trovare $\psi_1 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{V}, \Omega^{n-1})$ tale che $\mathfrak{d}_E \psi_1 + \delta \psi_0 = 0$. Supponiamo di aver costruito ψ_0, \dots, ψ_h per qualche h con $1 \leq h < n$. Poiché

$$\mathfrak{d}_E \delta \psi_h = -\delta \mathfrak{d}_E \psi_h = \delta^2 \psi_{h-1} = 0$$

e $\delta \psi_h \in \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{V}, \Omega^{n-h})$, con $1 \leq n-h < n$, poiché $H^{n-h}(V_{i_0, \dots, i_{h+1}}) = 0$ per ogni scelta degli indici i_0, \dots, i_{h+1} , possiamo trovare una $\psi_{h+1} \in \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{V}, \Omega^{n-h-1})$ tale che

$$\mathfrak{d}_E \psi_{h+1} + \delta \psi_h = 0.$$

Questo completa la dimostrazione dell'esistenza della successione ψ_0, \dots, ψ_n che soddisfa (16.4.8). Abbiamo poi

$$\mathfrak{d}_E \delta \psi_n = -\delta \mathfrak{d}_E \psi_n = \delta^2 \psi_{n-1} = 0.$$

Quindi $\delta \psi_n \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathcal{V}, \mathbb{R})$.

L'omomorfismo canonico

$$\pi^* : \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, \Omega^*) \longrightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*)$$

dà per restrizione un isomorfismo

$$\pi^* : \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{V}, \mathbb{R}).$$

In particolare, c'è un unico elemento $\theta_{n+1} \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ tale che

$$(16.4.9) \quad \delta \theta_{n+1} = 0, \quad \pi^* \theta_{n+1} + \delta \psi_n = 0.$$

Fissiamo una partizione dell'unità $\{\kappa_i\}$, di classe \mathcal{C}^∞ , su M , subordinata al ricoprimento \mathcal{U} e sia $\{\pi^* \kappa_i\}$ la corrispondente partizione dell'unità su E subordinata al ricoprimento \mathcal{V} . Come in XVI.3, costruiamo a partire dalle due partizioni gli operatori di omotopia

$$F_M : \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, \Omega^*) \rightarrow \Omega^*(M), \quad F_E : \mathcal{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*) \rightarrow \Omega^*(E).$$

Ricordiamo che

$$d_M \circ F_M = F_M \circ D_M, \quad d_E \circ F_E = F_E \circ D_E,$$

⁵Al solito, se $\alpha = (\alpha_{i_0, \dots, i_h}) \in \mathcal{C}^h(\mathcal{V}, \Omega^q)$, poniamo $\mathfrak{d}_E \psi^q = (-1)^q (d_E \psi_{i_0, \dots, i_q}^q)$. Poniamo ancora $D_E = \mathfrak{d}_E + \delta$.

ove abbiamo indicato con $D_M = \mathfrak{d}_M + \delta$ il differenziale totale del complesso di Čech-de Rham associato al ricoprimento \mathcal{U} di M . Inoltre, per la scelta delle partizioni dell'unità, abbiamo

$$F_E \circ \pi^* = \pi^* \circ F_M, \quad \pi_* \circ F_E = F_M \circ \pi_*.$$

Abbiamo

$$D_E(\psi_0 + \cdots + \psi_n) = \mathfrak{d}_E\psi_0 + \delta\psi_n = -\pi^*\theta_{n+1}$$

Poniamo

$$\begin{cases} e_\xi = F_M(\theta_{n+1}) \in \Omega^{n+1}(M), \\ \psi_\xi = F_E(\psi_0 + \cdots + \psi_n). \end{cases}$$

Otteniamo allora

$$\begin{aligned} d_M e_\xi &= d_M F_M(\theta_{n+1}) = F_M(D_M \theta_{n+1}) = F_M(\delta \theta_{n+1}) = 0, \\ d_E \psi_\xi &= d_E F_E(\psi_0 + \cdots + \psi_n) = F_E(D_E(\psi_0 + \cdots + \psi_n)) \\ &= F_E(-\pi^* \theta_{n+1}) = -\pi^* F_M(\theta_{n+1}) = -\pi^* e_\xi, \\ \pi_* \psi &= \pi_* F_E(\psi_0 + \cdots + \psi_n) = F_E(\pi_*(\psi_0 + \cdots + \psi_n)) = F_E(\pi_* \psi_0) = F_E(\epsilon(1)) = 1. \end{aligned}$$

Questo dimostra che $(e_\xi, \psi_\xi) \in \mathcal{L}^{n+1}(\xi)$ e $\mu(e_\xi, \psi_\xi) = 1$, e completa la dimostrazione della surgettività.

La classe di Eulero è un'ostruzione all'esistenza di sezioni globali di ξ . Abbiamo infatti:

Proposizione XVI.4.5. *Se il fibrato ξ ammette una sezione globale, allora $[e_\xi] = 0$. La condizione che sia $[e_\xi] = 0$ è necessaria e sufficiente affinché esista una classe $[\psi_\xi] \in H^n(E)$ con $\pi_* \psi_\xi = 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo esista una sezione globale $\sigma \in \Gamma_\xi(M, E)$. Poiché $\pi \circ \sigma = 1$, la $\sigma^* \circ \pi^*$ è l'identità in coomologia. In particolare π^* è iniettiva e quindi $[e_\xi] = 0$ perché $[\pi^* e_\xi] = -[d_E \psi_\xi] = 0$. La seconda affermazione è ovvia. \square

Per completare la dimostrazione del Teorema XVI.4.2, basterà dimostrare che una $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}^{n+1}(\xi)$ con $\pi_* \beta = 0$ è coomologa a zero in $H^{n+1}(\xi)$. Usiamo le notazioni introdotte in precedenza.

In particolare $\mathcal{U} = \{U_i\}$ è un buon ricoprimento di M e $\{V_i = \pi^{-1}(U_i)\}$ la sua immagine inversa in E .

Le forme $\alpha \in \Omega^{n+1}(M)$ e $\beta \in \Omega^n(E)$ soddisfano

$$d_M \alpha = 0, \quad d_E \beta + \pi^* \alpha = 0, \quad \pi_* \beta = 0.$$

Poiché \mathcal{U} è un buon ricoprimento, possiamo costruire una successione f_0, f_1, \dots, f_n con

$$\begin{cases} f_h \in \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \Omega^{n-q}), \\ \epsilon(\alpha) + \mathfrak{d}_M f_0 = 0, \\ \mathfrak{d} f_h + \delta f_{h-1} = 0 \quad \text{per } 1 \leq h \leq n. \end{cases}$$

Dall'uguaglianza $d_E \beta + \pi^* \alpha = 0$ ricaviamo che

$$0 = \mathfrak{d}_E \epsilon(\beta) + \pi^* \epsilon \alpha_0 = \mathfrak{d}_E \epsilon(\beta) + \pi^* \mathfrak{d}_M f_0 = \mathfrak{d}_E(\epsilon(\beta) - \pi^* f_0).$$

Poiché

$$\pi_*(\epsilon(\beta) - \pi^* f_0) = \pi_* \epsilon(\beta) = \epsilon(\pi_* \beta) = 0,$$

possiamo trovare $u_0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{V}, \Omega^{n-1})$ tale che

$$\mathfrak{d}_E u_0 + \pi^*(f_0) = \epsilon(\beta).$$

Poiché $H^q(V_{i_0, \dots, i_\ell}) = 0$ per ogni $q \neq 0, n$, possiamo costruire una successione u_0, \dots, u_{n-1} con

$$\begin{cases} u_h \in \mathcal{C}^h(\mathcal{V}, \Omega^{n-h-1}), \\ \mathfrak{d}_E u_0 + \pi^*(f_0) = \epsilon(\beta), \\ \mathfrak{d}_E u_h + \delta u_{h-1} + \pi^*(f_h) = 0 \quad \text{per } 1 \leq h \leq n-1. \end{cases}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(\mathfrak{d}_E u_{n-1} + \delta u_{n-2} + \pi^*(f_{n-1})) = -\mathfrak{d}_E \delta u_{n-1} + \pi^*(\delta f_{n-1}) \\ &= -\mathfrak{d}_E \delta u_{n-1} - \pi^*(\mathfrak{d}_M f_n) = -\mathfrak{d}_E(\delta u_{n-1} + \pi^* f_n). \end{aligned}$$

In particolare, è determinata una $\theta_n \in \mathcal{C}^n(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ tale che

$$\delta u_{n-1} + \pi^* f_n = \pi^* \theta_n,$$

ed abbiamo

$$\pi^*(\theta_n - f_n) = \delta u_{n-1} \implies \delta(\theta_n - f_n) = 0.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} D_M(f_0 + \dots + f_n) &= -\epsilon(\alpha) + \delta f_n, \\ D_E(u_0 + \dots + u_{n-1}) &= \epsilon(\beta) - \pi^*(f_0 + \dots + f_{n-1}) + \delta u_{n-1} \\ &= \epsilon(\beta) - \pi^*(f_0 + \dots + f_{n-1} + f_n - \theta_n). \end{aligned}$$

Poniamo

$$\begin{cases} f = F_M(f_0 + \dots + f_n - \theta_n), \\ u = F_E(u_0 + \dots + u_{n-1}). \end{cases}$$

Allora

$$\begin{cases} d_M f = F_M(-\epsilon(\alpha) + \delta f_n - \delta \theta_n) \\ \quad = -\alpha + F_M(\delta(f_n - \theta_n)) = -\alpha, \\ d_E u = \beta - \pi^* f, \end{cases}$$

da cui otteniamo che

$$d_{\mathbb{E}}(f, u) = (\alpha, \beta).$$

La dimostrazione è completa. □

XVI.5. La successione di Gysin

La successione esatta lunga di Gysin⁶ è un caso particolare della successione spettrale di Serre⁷ per la coomologia di un fibrato differenziabile.

Teorema XVI.5.1 (Successione esatta di Gysin). *Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato differenziabile in sfere S^{n-1} orientato, con $n \geq 2$, su una varietà M , e sia $[e_\xi] \in H^n(M)$ la sua classe di Eulero. Abbiamo allora la successione esatta lunga di coomologia*

$$(16.5.1) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^{q-1}(E) & \xrightarrow{\pi_*} & H^{q-n}(M) & \xrightarrow{[e_\xi] \wedge} & H^q(M) \\ & & \xrightarrow{\pi^*} & H^q(E) & \longrightarrow & H^{q-n+1}(M) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

ove π_* è l'applicazione associata all'integrazione sulla fibra, $[e_\xi] \wedge$ quella associata al prodotto esterno per una forma di Eulero e_ξ e la π^* l'applicazione naturale indotta dal pullback.

La successione esatta di Gysin è conseguenza della successione esatta della fibrazione (16.4.2) e della seguente

Proposizione XVI.5.2. *Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato differenziabile localmente banale con fibre S^{n-1} orientate e sia $(e_\xi, \psi_\xi) \in \mathcal{L}^n(\xi)$ una coppia di forme che rappresenti la classe di Eulero totale del fibrato ξ . Allora*

$$(16.5.2) \quad \lambda : \Omega^q(M) \ni \alpha \longrightarrow (e_\xi \wedge \alpha, \psi_\xi \wedge \pi^* \alpha) \in \Omega^{n+q}(\xi), \quad q \in \mathbb{Z},$$

$$(16.5.3) \quad \mu : \Omega^{n+q}(\xi) \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow \pi_* \beta \in \Omega^q(M), \quad q \in \mathbb{Z},$$

definiscono omomorfismi di complessi, di grado n e $-n$ rispettivamente, che inducono per passaggio al quoziente isomorfismi

$$(16.5.4) \quad [\lambda] : H^q(M) \longrightarrow H^{n+q}(\xi), \quad [\mu] : H^{n+q}(\xi) \longrightarrow H^q$$

che sono l'uno l'inverso dell'altro.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo che λ è un omomorfismo di complessi. Se $\alpha \in \Omega^q(M)$, è

$$\begin{aligned} d_\xi(\lambda(\alpha)) &= (-d_M(e_\xi \wedge \alpha), d_E(\psi_\xi \wedge \pi^* \alpha) + \pi^*(e_\xi \wedge \alpha)) \\ &= ((-1)^{n+1} e_\xi \wedge d_M \alpha, (d_E \psi_\xi) \wedge \pi^*(\alpha) + (-1)^{n-1} \psi_\xi \wedge d_E(\pi^* \alpha) + \pi^*(e_\xi \wedge \pi^*(\alpha))) \\ &= (-1)^{n+1} (e_\xi \wedge d_M \alpha, \psi_\xi \wedge (\pi^*(d_M \alpha))) = (-1)^{n+1} \lambda(d_M \alpha). \end{aligned}$$

⁶Werner Gysin è un matematico svizzero, nato nel 1915, studente di Heinz Hopf ed Eduard L. Stiefel. Ha pubblicato un solo lavoro, in cui discute il risultato legato al suo nome: *Zur Homologietheorie der Abbildungen und Faserungen von Mannigfaltigkeiten*, Commentarii Mathematici Helvetici 14 (1942) pp. 61-122.

⁷La successione spettrale di Serre, ottenuta da Jean-Pierre Serre (Bages, 15 settembre 1926) nella sua tesi di dottorato, esprime, nel linguaggio dell'algebra omologica, la coomologia singolare dello spazio totale di una fibrazione di Serre in termini della coomologia della base e della fibra. Il risultato è esposto nell'articolo:

J.-P. Serre, *Homologie singulière des espaces fibrés*, Ann. of Math. (2) 54 (1951), pp 425-505.

Quindi

$$\lambda \circ d_M = (-1)^{n+1} d_\xi \circ \lambda.$$

Se $(\alpha, \beta) \in \mathcal{Q}^{n+q}(\xi)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \mu(d_\xi(\alpha, \beta)) &= \mu(-d_M\alpha, d_E\beta + \pi^*\alpha) = \pi_*(d_E\beta + \pi^*\alpha) \\ &= \pi_*(d_E\beta) = d_M\pi_*\beta = d_M\mu(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Questo dimostra che

$$\mu \circ d_\xi = d_M \circ \mu$$

e quindi sia λ che μ sono omomorfismi di complessi ed inducono perciò omomorfismi (16.5.4) in coomologia. Abbiamo

$$\mu \circ \lambda(\alpha) = \mu(e_\xi \wedge \alpha, \psi_\xi \wedge (\pi^*\alpha)) = \pi_*(\psi_\xi \wedge \pi^*\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathcal{Q}^*(M).$$

Quindi $\mu \circ \lambda$ è l'identità e dunque anche $[\mu] \circ [\lambda]$ è l'identità in coomologia. Questo dimostra che

$$\begin{aligned} [\lambda] : H^q(M) &\longrightarrow H^{n+q}(\xi) \quad \text{è iniettiva per ogni } q \in \mathbb{Z}, \\ [\mu] : H^{n+q}(\xi) &\longrightarrow H^q(M) \quad \text{è surgettiva per ogni } q \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Per dimostrare che $[\mu]$ è iniettiva, utilizzeremo il lemma:

Lemma XVI.5.3. *Consideriamo il fibrato banale*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^m \times S^{n-1} & \\ \pi \swarrow & & \searrow p \\ \mathbb{R}^m & & S^{n-1} \end{array} .$$

Abbiamo

$$(16.5.5) \quad H^q(\mathbb{R}^m \times S^{n-1}) \simeq H^q(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, n-1, \\ 0 & \text{se } q \neq 0, n-1. \end{cases}$$

L'integrazione sulla fibra definisce un omomorfismo surgettivo

$$(16.5.6) \quad \pi_* : \mathcal{Q}^{n+q}(\mathbb{R}^m \times S^{n-1}) \longrightarrow \mathcal{Q}^q(M), \quad \text{per ogni } q \in \mathbb{Z},$$

che per passaggio al quoziente dà, per $q = 0$, un isomorfismo

$$(16.5.7) \quad \pi_* : H^n(\mathbb{R}^m \times S^{n-1}) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^m).$$

Abbiamo inoltre:

$$(16.5.8) \quad \begin{cases} \forall q \geq 1, \quad \forall f \in \mathcal{L}^q(E) \text{ t.c. } \pi_* f = 0, \\ \exists u \in \mathcal{Q}^{q-1}(E) \text{ t.c. } \pi_* u = 0, \quad du = f. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. La (16.5.5) segue dal fatto che S^n è un retratto differenziabile di deformazione di $\mathbb{R}^m \times S^n$.

Se $\omega_n \in \mathcal{L}^n(S^n)$ è una forma⁸ con $\int_{S^n} \omega_n = 1$, abbiamo $\pi_*(p^*\omega_n) = 1$ e quindi l'applicazione $\pi_* : H^n(\mathbb{R}^m \times S^n) \rightarrow H^0(\mathbb{R}^m)$ è surgettiva. La (16.5.6) segue dal fatto che

$$\pi_*(p^*\omega \wedge \pi^*\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in \Omega^*(M).$$

Per completare la dimostrazione, basterà allora verificare la (16.5.8). Osserviamo che $\pi_*u = 0$ se $u \in \Omega^q(E)$ con $q < n$ e quindi, tenuto conto di (16.5.5) e dell'isomorfismo $H^n(\mathbb{R}^m \times S^n) \simeq H^n(S^n) \simeq \mathbb{R}$, la (16.5.8) è senz'altro valida se $q \leq n$.

Sia $q > n$ ed $f \in \mathcal{L}^q(E)$ soddisfi $\pi_*f = 0$. Poiché $H^q(\mathbb{R}^m \times S^n) = 0$, esiste una $v \in \Omega^{q-1}(\mathbb{R}^m \times S^n)$ tale che $dv = 0$. Consideriamo la forma $(p^*\omega_n) \wedge (\pi^*(\pi_*v)) \in \Omega^{q-1}(\mathbb{R}^m \times S^n)$. È

$$d[(p^*\omega_n) \wedge (\pi^*(\pi_*v))] = (-1)^n(p^*\omega_n) \wedge (\pi^*(\pi_*dv)) = (-1)^n(p^*\omega_n) \wedge (\pi^*(\pi_*f)) = 0.$$

Quindi la $u = v - [(p^*\omega_n) \wedge (\pi^*(\pi_*v))] \in \Omega^{q-1}(E)$ è una soluzione di $du = f$ con $\pi_*u = \pi_*v - \pi_*v = 0$. \square

Torniamo alla dimostrazione dell'iniettività di $[\mu]$.

Sia $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}^q(\xi)$ e supponiamo che $\pi_*\beta = d_M f$, con $f \in \Omega^{q-n-1}(M)$. Allora

$$(\alpha, \beta) + (-1)^n d_\xi \lambda(f) = (\alpha - e_\xi \wedge df, \beta - \psi_\xi \wedge (\pi^*df)) = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \ker \mu.$$

Per completare la dimostrazione sarà quindi sufficiente mostrare che

ogni $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}^q(\xi)$ con $\pi_*\beta = 0$ è coomologo a zero in $H^q(\xi)$.

La condizione $\pi_*\beta = 0$ è automaticamente verificata se $q < n$. In particolare, verificheremo che $H^q(\xi) = 0$ se $q < n$.

Un elemento di $\mathcal{L}^0(\xi)$ è una coppia $(f, 0)$, con $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $d_M f = 0$, $\pi^*f = 0$. Quindi $H^0(\xi) = \mathcal{L}^0(\xi) = 0$.

Per dimostrare la nostra tesi per $q \geq 1$, fissiamo un buon ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di M mediante aperti di trivializzazione per ξ , e denotiamo con $\mathcal{V} = \{V_i = \pi^{-1}(U_i)\}$ la sua immagine inversa in E .

Sia $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}^1(\xi)$. È

$$\alpha \in \Omega^1(M), \quad d_M \alpha = 0, \quad \beta \in \mathcal{C}^\infty(E), \quad d\beta + \pi^*\alpha = 0.$$

Poiché $n \geq 2$, la condizione $\pi_*\beta = 0$ è automaticamente verificata. Poiché \mathcal{U} è un buon ricoprimento, possiamo trovare un elemento $f_0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^0)$ tale che

$$\epsilon(\alpha) + \mathfrak{d}_M f_0 = 0.$$

⁸Ricordiamo che un rappresentante di ω è il pullback ad S^n della forma

$$\lambda = \frac{1}{(n+1)c_{n+1}} \frac{\sum_{i=0}^n (-1)^i x^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n}{(\sum_{i=0}^n |x^i|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \in \mathcal{L}^{n-1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}),$$

ove

$$c_{n+1} = \begin{cases} \frac{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!!} = \frac{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)(n-1)\cdots 3 \cdot 1} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \frac{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!!} = \frac{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)(n-1)\cdots 4 \cdot 2} & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

è il volume della palla unitaria $(n+1)$ -dimensionale.

Abbiamo allora

$$0 = \epsilon(d_E\beta + \pi^*\alpha) = \epsilon(\mathfrak{d}_E\beta) + \pi^*(\epsilon\alpha) = \mathfrak{d}_E\epsilon(\beta) - \pi^*(\mathfrak{d}_M f_0) = \mathfrak{d}_E(\epsilon(\beta) - \pi^*f_0).$$

Quindi $\epsilon(\beta) - \pi^*f_0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{V}, \mathbb{R})$.

L'applicazione naturale

$$\pi^* : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^*) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{V}, \Omega^*), \quad \forall q \in \mathbb{Z},$$

dà per restrizione un isomorfismo

$$(16.5.9) \quad \pi^* : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \longleftarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{V}, \mathbb{R}), \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Possiamo quindi trovare un elemento $\theta_0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ tale che

$$\epsilon(\beta) - \pi^*f_0 = \pi^*\theta_0.$$

Abbiamo

$$(16.5.10) \quad \delta(\pi^*(\theta_0 + f_0)) = \delta(\epsilon(\beta)) = 0 \implies \delta(\theta_0 + f_0) = 0.$$

Quindi $\theta_0 + f_0 = \epsilon(f)$ per una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ed otteniamo

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_M\epsilon(f) = \mathfrak{d}_M(\theta_0 + f_0) = \mathfrak{d}_M f_0 = -\epsilon(\alpha) &\implies d_M f = -\alpha, \\ \pi^*\epsilon(f) = \pi^*(\theta_0 + f_0) = \epsilon(\beta) &\implies \pi^*f = \beta, \end{aligned}$$

e dunque

$$d_\xi(f, 0) = (-d_M f, \pi^*f) = (\alpha, \beta).$$

Sia ora $q \geq 2$. Dimostriamo che in questo caso è possibile costruire due successioni f_0, \dots, f_{q-1} ed u_0, \dots, u_{q-2} tali che

$$\begin{cases} f_h \in \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \Omega^{q-h-1}), \\ \epsilon(\alpha) + \mathfrak{d}_M f_0 = 0, \\ \delta f_{h-1} + \mathfrak{d}_M f_h = 0 \\ \text{per } 1 \leq h \leq q-1, \end{cases} \quad \begin{cases} u_h \in \mathcal{C}^h(\mathcal{V}, \Omega^{q-h-2}), \\ \pi_* u_h = 0, \\ \epsilon(\beta) + \mathfrak{d}_E u_0 = \pi^* f_0, \\ \delta u_{h-1} + \mathfrak{d}_E u_h = \pi^* f_h \\ \text{per } 1 \leq h \leq q-2. \end{cases}$$

Costruiamo per ricorrenza prima la successione f_0, \dots, f_{q-1} , poi la successione u_0, \dots, u_{q-2} . Per ipotesi, la coppia (α, β) soddisfa

$$\alpha \in \Omega^q(M), \quad d_M \alpha = 0, \quad \beta \in \Omega^{q-1}(E), \quad d_E \beta + \pi^* \alpha = 0, \quad \pi_* \beta = 0.$$

Poiché \mathcal{U} è un buon ricoprimento, possiamo trovare $f_0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^{q-1})$ tale che $\epsilon(\alpha) + \mathfrak{d}_M f_0 = 0$. Applicando δ ai due membri di questa uguaglianza otteniamo che

$$0 = \delta(\epsilon(\alpha) + \mathfrak{d}_M f_0) = \delta(\mathfrak{d}_M f_0) = -\mathfrak{d}_M \delta f_0.$$

Poiché \mathcal{U} è un buon ricoprimento, possiamo allora trovare $f_1 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^{q-2})$ tale che $\delta f_0 + \mathfrak{d}_M f_1 = 0$. Se $1 \leq h < q-1$ ed abbiamo già costruito f_0, \dots, f_h con $\delta f_{h-1} + \mathfrak{d}_M f_h = 0$, allora

$$\mathfrak{d}_M \delta f_h = -\delta(\mathfrak{d}_M f_h) = \delta^2 f_{h-1} = 0.$$

Poiché \mathcal{U} è un buon ricoprimento, potremo trovare $f_{h+1} \in \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{U}, \Omega^{q-h-2})$ tale che

$$\delta f_h + \mathfrak{d}_M f_{h+1} = 0.$$

Ciò dimostra l'esistenza della successione f_0, \dots, f_{h-1} . Abbiamo poi

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}_E(\epsilon(\beta) - \pi^* f_0) &= \epsilon(d_E \beta) - \pi^*(d_M f_0) = \epsilon(d_E \beta) + \pi^*(\epsilon(\alpha)) = 0, \\ \pi_*(\epsilon(\beta) - \pi^* f_0) &= \pi_*(\epsilon(\beta)) = \epsilon(\pi_* \beta) = 0.\end{aligned}$$

Per il Lemma XVI.5.3 possiamo trovare $u_0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{V}, \Omega^{q-2})$ tale che

$$\epsilon(\beta) + \mathfrak{d}_E u_0 = \pi^* f_0, \quad \pi_* u_0 = 0.$$

Se $q = 2$ abbiamo finito. Altrimenti, se $q > 2$, osserviamo che

$$\begin{aligned}0 &= \delta(\epsilon(\beta) + \mathfrak{d}_E u_0 - \pi^* f_0) = -\mathfrak{d}_E \delta u_0 - \pi^* \delta f_0 = -\mathfrak{d}_E \delta u_0 + \pi^* \mathfrak{d}_M f_1 = \mathfrak{d}_E(\pi^* f_1 - \delta u_0), \\ \pi_*(\pi^* f_1 - \delta u_0) &= -\pi_* \delta u_0 = -\delta(\pi_* u_0) = 0.\end{aligned}$$

Per il Lemma XVI.5.3 possiamo trovare $u_1 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{V}, \Omega^{q-3})$ tale che

$$\delta u_0 + \mathfrak{d}_E u_1 = \pi^* f_1, \quad \pi_* u_1 = 0.$$

Se $q = 3$ abbiamo finito. Se $q > 3$ ed abbiamo già costruito u_0, \dots, u_h con $1 \leq h < q - 2$, da

$$\begin{aligned}0 &= \delta(\delta u_{h-1} + \mathfrak{d}_E u_h - \pi^* f_h) = -\mathfrak{d}_E \delta u_h - \pi^* \delta f_h = -\mathfrak{d}_E \delta u_h + \pi^* \mathfrak{d}_M f_{h+1} = \mathfrak{d}_E(\pi^* f_{h+1} - \delta u_h), \\ \pi_*(\pi^* f_{h+1} - \delta u_h) &= -\pi_*(\delta u_h) = -\delta(\pi_* u_h) = 0,\end{aligned}$$

applicando il Lemma XVI.5.3 possiamo trovare $u_{h+1} \in \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{V}, \Omega^{q-h-3})$ tale che

$$\delta u_h + \mathfrak{d}_E u_{h+1} = \pi^* f_{h+1}, \quad \pi_* u_{h+1} = 0.$$

Quindi per ricorrenza otteniamo anche la successione u_0, \dots, u_{q-2} .

Abbiamo

$$\begin{aligned}0 &= \delta(\delta u_{q-3} + \mathfrak{d}_E u_{q-2} - \pi^* f_{q-1}) = -\mathfrak{d}_E \delta u_{q-2} - \pi^* \delta f_{q-1} \\ &= -\mathfrak{d}_E \delta u_{q-2} + \pi^* \mathfrak{d}_M f_{q-1} = \mathfrak{d}_E(f_{q-1} - \delta u_{q-2}).\end{aligned}$$

Quindi $f_{q-1} - \delta u_{q-2} \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ e quindi risulta univocamente determinato $\theta_{q-1} \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ tale che

$$f_{q-1} - \delta u_{q-2} = \pi^* \theta_{q-1}.$$

Siano F_E e F_M come in XVI.4. Con

$$\begin{cases} f = F_M(f_0 + \dots + f_{q-1} - \theta_{q-1}) \in \Omega^{q-1}(M), \\ u = F_E(u_0 + \dots + u_{q-2}) \in \Omega^{q-2}(M), \end{cases}$$

otteniamo

$$df = -\alpha, \quad du + \pi^* f = \beta, \quad \text{cioè} \quad d_{\xi}(f, u) = (\alpha, \beta).$$

La dimostrazione è completa. \square

Poiché $H^q(M) = 0$ per $q < 0$, il segmento iniziale della successione di Gysin definisce isomorfismi $H^q(E) \simeq H^q(M)$ per $q < n - 1$. Il segmento successivo è quindi

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{n-1}(M) & \xrightarrow{\pi^*} & H^{n-1}(E) & \xrightarrow{\pi_*} & H^0(M) \\ & & \longrightarrow & H^n(M) & \xrightarrow{\pi^*} & H^n(E) & \xrightarrow{\pi_*} & H^1(M) \\ & & \longrightarrow & \dots & & & & \end{array}$$

Osserviamo ancora che, nel caso esista una sezione globale $s \in \Gamma_\xi(M, E)$, $[e_\xi] = 0$ e l'applicazione π^* è iniettiva. Dunque la successione di Gysin si spezza nelle successioni esatte corte

$$0 \longrightarrow H^q(M) \xrightarrow{\pi^*} H^q(E) \xrightarrow{\pi_*} H^{q-n+1}(M) \longrightarrow 0.$$

In effetti, nel caso di un fibrato banale, queste successioni esatte corte sono compatibili con la formula di Künneth

$$H^q(M \times S^{n-1}) \simeq \bigoplus_{q_1+q_2=q} (H^{q_1}(M) \otimes H^{q_2}(S^{n-1})) \simeq H^q(M) \oplus H^{q-n+1}(M).$$

XVI.6. Coomologia delle varietà di Stiefel complesse e quaternioniche

Consideriamo le varietà di Stiefel⁹ $\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})$ dei sistemi di k vettori ortonormali rispetto al prodotto scalare Hermitiano di \mathbb{C}^n . Per ogni $k = 1, \dots, n$ la $\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})$ è una varietà analitica orientabile, connessa e compatta, di dimensione $2kn - n^2$.

È $\mathbb{V}_{n,1} = S^{2n-1}$ e, per ogni $k \geq 1$, abbiamo una fibrazione naturale $\xi_k = (\mathbb{V}_{n,k+1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi_k} \mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C}))$, con fibra $S^{2n-2k-1}$. Le varietà di Stiefel complesse sono orientabili e possiamo quindi utilizzare la successione di Gysin per studiare la loro coomologia di de Rham. Consideriamo innanzi tutto il caso $k = 1$. La forma di Eulero e_{ξ_1} ha grado $2n - 2$ ed è quindi coomologa a zero. La successione di Gysin si spezza quindi nelle successioni esatte corte

$$0 \longrightarrow H^q(S^{2n-1}) \xrightarrow{\pi_1^*} H^q(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C})) \xrightarrow{\pi_{1*}} H^{q-2n+3}(S^{2n-1}) \longrightarrow 0,$$

per ogni intero $q \geq 0$. Sia $\omega_{2n-1} \in \mathcal{Q}^{2n-1}(S^{2n-1})$ un elemento con $\int_{S^{2n-1}} \omega_{2n-1} = 1$. Allora $1 \in \mathcal{Q}^0(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$ e $\pi_1^*(\omega_{2n-1}) \in \mathcal{Q}^{2n-1}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$ sono generatori dei gruppi di coomologia $H^0(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$ ed $H^{2n-1}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$. Poiché la classe di Eulero di ξ_1 è nulla, esiste su $\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C})$ una forma angolare chiusa $\psi_{\xi_1} \in \mathcal{Z}^{2n-3}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$, che definisce una base di $H^{2n-3}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$. Chiaramente la classe di $\psi_{\xi_1} \wedge \pi_1^*(\omega_{2n-1}) \in \mathcal{Q}^{4n-4}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$ è una base di $H^{4n-4}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$ con $\int_{\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C})} \psi_{\xi_1} \wedge \pi_1^*(\omega_{2n-1}) = 1$. Dalla

⁹Alcune delle varietà di Stiefel reali non sono orientabili. Non possiamo quindi applicare ad esse direttamente la successione di Gysin per il calcolo della loro coomologia di de Rham e della loro coomologia singolare. La loro coomologia a coefficienti \mathbb{Z}_2 fu calcolata da Armand Borel in:

A. Borel, *Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Ann. of Math. 57 (1953), 115-207.

Il calcolo completo dell'anello di coomologia a coefficienti interi delle varietà di Stiefel reali è stato ottenuto più recentemente. Vedi:

Martin Čadek, Mamoru Mimura, and Jiří Vanžura: *The cohomology rings of real Stiefel manifolds with integer coefficients*, J. Math. Kyoto Univ. Volume 43, Number 2 (2003), 411-428.

successione di Gysin ricaviamo poi che $H^q(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C})) = 0$ se $q \neq 0, 2n-3, 2n-1, 4n-4$. Se poniamo $a_{2n-1} = [\pi_1^* \omega_{2n-1}]$, $a_{2n-3} = [\psi_{\xi_1}]$, abbiamo:

L'anello di coomologia $H^(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$ è l'algebra reale unitaria libera di Grassmann generata dai due elementi omogenei a_{2n-3} ed a_{2n-1} .*

Possiamo calcolare ricorsivamente la coomologia delle varietà di Stiefel complesse utilizzando la successione di Gysin. Otteniamo, in generale:

Proposizione XVI.6.1. *L'anello di coomologia $H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C}))$ è un'algebra unitaria libera di Grassmann unitaria con k generatori omogenei $a_{2n-1}, a_{2n-3}, \dots, a_{2n-2k+1}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $k \geq 2$ e supponiamo di aver già dimostrato il teorema per la coomologia di de Rham di $\mathbb{V}_{n,k}$. Poiché i gruppi di coomologia di $\mathbb{V}_{n,k}$ sono nulli in grado dispari, la classe di Eulero di ξ_k è nulla e quindi otteniamo una successione esatta

$$0 \longrightarrow H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \xrightarrow{\pi_k^*} H^*(\mathbb{V}_{n,k+1}(\mathbb{C})) \xrightarrow{\pi_{k*}} H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \longrightarrow 0.$$

Poiché la forma di Eulero è nulla, la forma angolare di ξ_k ha un rappresentante chiuso $\psi_{\xi_k} \in \mathcal{L}^{2n-2k-1}(\mathbb{V}_{n,k+1}(\mathbb{C}))$. Poiché π_k^* è iniettiva in coomologia, $H^*(\mathbb{V}_{n,k+1}(\mathbb{C}))$ contiene $\pi_k^* H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \oplus [\psi_{\xi_k}] \wedge H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C}))$, e

$$\begin{aligned} & \pi_{k*}(\pi_k^* H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \oplus [\psi_{\xi_k}] \wedge H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C}))) \\ &= \pi_{k*}([\psi_{\xi_k}] \wedge \pi_k^*(H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})))) = H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})), \end{aligned}$$

otteniamo per la successione esatta di Gysin che

$$H^*(\mathbb{V}_{n,k+1}(\mathbb{C})) = \pi_k^* H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \oplus [\psi_{\xi_k}] \wedge H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})).$$

Da questa uguaglianza segue la tesi. \square

Le varietà di Stiefel quaternioniche $\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{H})$ sono varietà compatte, connesse, orientabili, di dimensione $k(4n-2k+1)$. Abbiamo $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{H}) \simeq S^{4n-1}$ e, per ogni k , otteniamo una fibrazione naturale $\pi: \mathbb{V}_{n,k+1}(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{H})$ con fibra $S^{4(n-k)-1}$. Anche queste fibrazioni hanno classe di Eulero nulla, ed utilizzando la successione esatta di Gysin otteniamo, con un ragionamento analogo a quello svolto nel caso complesso,

Proposizione XVI.6.2. *L'anello di coomologia $H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{H}))$ è un anello unitario con k generatori omogenei $a_{4n-1}, a_{4n-5}, \dots, a_{4n-4k+3}$.*

XVI.7. L'isomorfismo di Thom

In questo paragrafo completiamo la dimostrazione dell'isomorfismo di Thom nel caso in cui non si assuma che la base M del fibrato vettoriale $\theta = (E_\theta \xrightarrow{\pi} M)$ ammetta un buon ricoprimento aperto finito. Sia n il rango di θ .

Ricordiamo che il Teorema di Thom stabilisce che l'integrazione sulla fibra definisce un isomorfismo

$$(16.7.1) \quad \pi_*: H_{cv}^q(E_\theta) \longrightarrow H^{q-n}(M), \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Nella costruzione della classe e dell'isomorfismo di Thom utilizzeremo il

Lemma XVI.7.1. *Consideriamo il fibrato banale*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n & \\ \pi \swarrow & & \searrow p \\ \mathbb{R}^m & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

con base \mathbb{R}^m e fibra \mathbb{R}^n . Allora, per qualsiasi intero q ,

$$(16.7.2) \quad \begin{cases} \forall \alpha \in \mathcal{Z}_{cv}^q(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \text{ t.c. } \pi_* \alpha = 0, \\ \exists \beta \in \Omega_{cv}^{q-1}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \text{ t.c. } d\beta = \alpha, \pi_* \beta = 0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già dimostrato che l'integrazione sulla fibra definisce un isomorfismo $\pi_* : H_{cv}^q(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \rightarrow H^{q-n}(\mathbb{R}^m)$. Poiché $\pi_* \beta = 0$ se $\beta \in \Omega_{cv}^q(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ con $q < n$, basterà dimostrare la (16.7.2) per $q > n$.

Fissiamo $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 1$. Sia $\alpha \in \mathcal{Z}_{cv}^q(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ con $\pi_* \alpha = 0$. Poiché $H_{cv}^q(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \simeq H^{q-n}(\mathbb{R}^m) = 0$, possiamo trovare $\beta_0 \in \Omega_{cv}^{q-1}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ tale che $d\beta_0 = \alpha$. Consideriamo la forma $\beta_1 = \pi^*(\pi_* \beta_0) \wedge p^* \omega$. Abbiamo

$$\begin{aligned} d\beta_1 &= \pi^*(\pi_* d\beta_0) \wedge p^* \omega = \pi^*(\pi_* \alpha) \wedge p^* \omega = 0, \\ \pi_* \beta_1 &= \pi_* [\pi^*(\pi_* \beta_0) \wedge p^* \omega] = \pi_* \beta_0. \end{aligned}$$

Quindi $\beta = \beta_0 - \beta_1 \in \Omega_{cv}^{q-1}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ è una soluzione di $d\beta = \alpha$ con $\pi_* \beta = 0$. \square

Fissiamo un buon ricoprimento finito $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di M mediante aperti di trivializzazione e sia $\mathcal{V} = \{V_i = \pi^{-1}(U_i)\}$ il ricoprimento immagine inversa di E_0 . Considereremo i complessi $(\mathcal{C}^*(\mathcal{U}, \Omega^*), D_M)$ e $(\mathcal{C}^*(\mathcal{V}, \Omega_{cv}^*), D_M)$ e, fissata una partizione dell'unità $\{\kappa_i\}$ su M subordinata ad \mathcal{U} e il suo pullback $\{\pi^* \kappa_i\}$ ad una partizione dell'unità su E_0 subordinata a \mathcal{V} , gli operatori d'omotopia

$$F_M : \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, \Omega^*) \rightarrow \Omega^*(M) \quad \text{e} \quad F_{E_0} : \mathcal{C}^*(\mathcal{V}, \Omega_{cv}^*) \rightarrow \Omega_{cv}^*(E_0).$$

surgettività. La surgettività di (16.7.1) è banalmente verificata per $q < n$. Consideriamo dapprima l'omomorfismo $H_{cv}^n(E_0) \rightarrow H^0(M)$. Sia c una funzione localmente costante su M . Dico che possiamo, per ricorrenza, costruire una successione η_0, \dots, η_n tale che

$$(16.7.3) \quad \begin{cases} \eta_h \in \mathcal{C}^h(\mathcal{V}, \Omega_{cv}^{n-q}), \\ \epsilon(c) = \pi_* \eta_0, \\ \mathfrak{d}_{E_0} \eta_0 = 0, \\ \mathfrak{d}_{E_0} \eta_h + \delta \eta_{h-1} = 0 \quad \text{se } 1 \leq h \leq n. \end{cases}$$

L'esistenza di η_0 segue dalla validità dell'isomorfismo di Thom nel caso in cui la base sia uno spazio Euclideo. Le η_1, \dots, η_n si ottengono poi per ricorrenza utilizzando il Lemma XVI.7.1. Osserviamo poi che

$$\mathfrak{d}_{E_0} \delta \eta_n = -\delta \mathfrak{d}_{E_0} \eta_n = \delta^2 \eta_{n-1} = 0,$$

e quindi $\delta(\eta_n) = 0$ perché le sue componenti sono funzioni localmente costanti con supporti che intersecano le fibre in sottoinsiemi compatti. Allora,

$$\eta = F_{E_0}(\eta_0 + \dots + \eta_n) \quad \text{verifica}$$

$$\begin{aligned} d_{E_0}\eta &= F_{E_0}(D_{E_0}(\eta_0 + \cdots + \eta_n)) = 0, \\ \pi_*\eta &= \pi_*F_{E_0}(u_0 + \cdots + \eta_n) = \pi_*F_{E_0}(\eta_0) = F_M(\pi_*\eta_0) = F_M(\epsilon(c)) = c. \end{aligned}$$

In particolare abbiamo dimostrato che

Esiste una forma chiusa $\eta_\theta \in \mathcal{L}_{cv}^n(E_\theta)$, con supporto compatto rispetto alle fibre e tale che $\pi_*\eta_\theta = 1$.

Ricordiamo che η_θ si dice una *forma di Thom* del fibrato θ e la sua classe di coomologia in $H_{cv}^n(E_\theta)$ la *classe di Thom* di θ .

L'esistenza della classe di Thom ci permette di completare la dimostrazione della surgettività di (16.7.1). Infatti, se $\alpha \in \mathcal{L}^q(M)$, allora $\eta_\theta \wedge \pi^*\alpha \in \mathcal{L}_{cv}^q(E_\theta)$ e $\pi_*(\eta_\theta \wedge \pi^*\alpha) = \alpha$.

Iniettività. Sia $f \in \mathcal{L}_{cv}^q(E_\theta)$ e supponiamo che $[\pi_*f] = 0$ in $H^{q-n}(M)$. Sia $u \in \Omega^{q-n-1}(M)$ tale che $du = \pi_*f$. Allora $f - d(\eta_\theta \wedge \pi^*u)$ è coomologa ad f in $H_{cv}^q(E_\theta)$ ed abbiamo

$$\pi_*(f - d(\eta_\theta \wedge \pi^*u)) = \pi_*f - \pi_*(\eta_\theta \wedge \pi^*(du)) = \pi_*f - \pi^*(\eta_\theta \wedge \pi_*f) = 0.$$

Basterà quindi dimostrare che ogni forma $f \in \mathcal{L}_{cv}^q(E_\theta)$ con $\pi_*f = 0$ è coomologa a zero in $H_{cv}^q(E_\theta)$. Sia quindi f una tale forma. Poiché l'isomorfismo di Thom vale per fibrati banali, possiamo costruire per ricorrenza, utilizzando in Lemma XVI.7.1, una successione u_0, \dots, u_{q-1} con

$$(16.7.4) \quad \begin{cases} u_h \in \mathcal{C}^h(\mathcal{V}, \Omega_{cv}^{q-h-1}), \\ \mathfrak{d}_{E_\theta}u_0 = \epsilon(f), \\ \mathfrak{d}_{E_\theta}u_h + \delta u_{h-1} = 0, \quad \text{se } 1 \leq h \leq q-1. \end{cases}$$

Poiché

$$\mathfrak{d}_{E_\theta}\delta u_{q-1} = -\delta\mathfrak{d}_{E_\theta}u_{q-1} = \delta^2u_{q-1} = 0,$$

è $\delta u_{q-1} \in \mathcal{C}^q(\mathcal{V}, \Omega_{cv}^0) \cap \mathcal{C}^q(\mathcal{V}, \mathbb{R}) = 0$. Otteniamo quindi

$$D_{E_0}(u_0 + \cdots + u_{q-1}) = \mathfrak{d}_{E_\theta}u_0 = \epsilon(f)$$

e quindi è

$$\begin{cases} u = F_E(u_0 + \cdots + u_{q-1}) \in \Omega_{cv}^{q-1}(E), \\ du = F_E(D_E(u_0 + \cdots + u_{q-1})) = F_E(\epsilon(f)) = f. \end{cases}$$

Questo completa la dimostrazione dell'isomorfismo di Thom.

XVI.8. Fibrati in sfere associati a fibrati vettoriali

Sia $\theta = (E_\theta \xrightarrow{\pi_\theta} M)$ un fibrato vettoriale di rango n sulla varietà M . Fissiamo una metrica Riemanniana sulle fibre di θ e indichiamo con $\|\cdot\|_\theta$ la relativa norma sulle fibre di θ . Questo ci permette di definire il fibrato in sfere ξ , come il sottofibrato differenziabile di θ con spazio totale

$$(16.8.1) \quad E_\xi = \{v \in E_\theta \mid \|v\|_\theta = 1\}.$$

Ricordiamo che, se le fibre di θ sono orientate, risulta definita la sua *classe di Thom* $\eta_\theta \in H_{cv}^n(E_\theta)$, caratterizzata dal fatto che la restrizione alle fibre soddisfa

$$\int_{E_p} \eta_\theta = 1, \quad \forall p \in M.$$

In particolare, se sia la base M che le fibre di θ sono orientate, anche E_θ risulta orientata ed abbiamo

$$(16.8.2) \quad \int_M \alpha = \int_{E_\theta} \pi_\theta^* \alpha \wedge \eta_\theta, \quad \forall \alpha \in \Omega_c^m(M).$$

In particolare, la classe di Thom η_θ è il duale di Poincaré chiuso in $H^n(E_\theta)$ della sezione nulla, che possiamo identificare ad M , del fibrato vettoriale θ . Fissiamo una forma, che indicheremo ancora con $\eta_\theta \in \mathcal{L}_{cv}^n(E_\theta)$, che rappresenti la classe di Thom. Possiamo scegliere η_θ con il supporto contenuto in $\{v \in E_\theta \mid \|v\|_\theta < 1\}$.

Poiché $\pi_\theta^* : H^n(M) \rightarrow H^n(E_\theta)$ è un isomorfismo, inverso dell'isomorfismo $H^n(E_\theta) \rightarrow H^n(M)$ indotto dalla restrizione, detto e_ξ il pullback su M della classe di Thom, poiché η_θ e $\pi_\theta^*(e_\xi) = \pi_\theta^*(\eta_\theta|_M)$ sono coomologhi in $H^n(E_\theta)$, esiste una forma $\psi_\xi \in \Omega^{n-1}(E_\theta)$ tale che

$$(16.8.3) \quad \eta_\theta = \pi_\theta^*(e_\xi) + d\psi_\xi.$$

Per la formula di Stokes abbiamo

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{E_{\theta,p}} \eta_\theta = \int_{E_{\theta,p} \cap \{\|v\|_\theta \leq 1\}} \eta_\theta = \int_{E_{\theta,p} \cap \{\|v\|_\theta \leq 1\}} (\pi_\theta^*(e_\xi) + d\psi_\xi) \\ &= \int_{E_{\theta,p} \cap \{\|v\|_\theta \leq 1\}} d\psi_\xi = \int_{E_{\xi,p}} \psi_\xi. \end{aligned}$$

Poiché $\eta_\theta|_{E_\xi} = 0$, se indichiamo ancora con ψ_ξ la restrizione di ψ_ξ ad E_ξ , otteniamo che

$$\int_{E_{\xi,p}} \psi_\xi = 1, \quad \forall p \in M, \quad d\psi_\xi = -\pi_\xi^* e_\xi.$$

Abbiamo quindi ottenuto

Teorema XVI.8.1. *Sia θ un fibrato vettoriale orientato, con base M , e ξ un fibrato in sfere ad esso associato. Allora la classe di Eulero di ξ è il pullback su M , identificata alla sezione nulla di θ , della classe di Thom di θ , o, in modo equivalente, la restrizione ad M del duale di Poincaré chiuso di M in E_θ . \square*

Definizione XVI.8.2. Chiamiamo *classe di Eulero* del fibrato vettoriale reale θ , ed indichiamo con e_θ , la classe di Eulero del suo fibrato in sfere associato.

Sia $\check{\theta}$ il sottofibrato differenziabile del fibrato vettoriale θ che ha spazio totale

$$(16.8.4) \quad \check{E}_\theta = \{v \in E_\theta \mid v \neq 0\}.$$

Consideriamo l'omomorfismo del fibrato $\check{\theta}$ sul fibrato in sfere ξ definito da

$$(16.8.5) \quad v : \check{E}_\theta \ni v \longrightarrow \frac{v}{\|v\|_\theta} \in E_\xi.$$

Lemma XVI.8.3. *L'applicazione*

$$(16.8.6) \quad \Theta : \Omega^*(\xi) \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow (\alpha, \nu^*\beta) \in \Omega^*(\check{\theta})$$

definisce un omomorfismo di complessi che, per passaggio al quoziente, dà un isomorfismo

$$(16.8.7) \quad [\Theta] : H^*(\xi) \longrightarrow H^*(\check{\theta})$$

in coomologia. □

XVI.9. Il numero di Eulero

Supponiamo che $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ sia un fibrato differenziabile orientato, localmente banale, con fibra S^{m-1} , su una varietà orientata, compatta e connessa M , di dimensione m . La *classe di Eulero* $[e_\xi]$ di ξ è un elemento di $H^m(M)$ ed è quindi completamente determinata dal numero

$$(16.9.1) \quad \chi(\xi) = \int_M e_\xi.$$

Definizione XVI.9.1. Chiamiamo $\chi(\xi)$ il *numero di Eulero* del fibrato ξ .

Sia $U \subset M$ un aperto di trivializzazione di ξ . Fissata la trivializzazione, una sezione s definita su un aperto U' contenuto in U determina un'applicazione $s_U \in \mathcal{C}^\infty(U', S^{m-1})$. Siano $p_0 \in U$ ed $s \in \Gamma_\xi(U \setminus \{p_0\}, E)$ una sezione su U , con una singolarità isolata nel punto p_0 . Possiamo supporre che $U \simeq \mathbb{R}^m$ per un diffeomorfismo descritto da una carta coordinata x , compatibile con l'orientazione di M e centrata in p_0 . Consideriamo l'applicazione $s_U \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}, S^{m-1})$ associata alla sezione s . Per ogni $r > 0$ otteniamo un'applicazione

$$\phi_r : S^{m-1} \ni x \longrightarrow s_U(rx) \in S^{m-1}.$$

Il grado di questa applicazione non dipende nè da r né dalla scelta della carta locale di trivializzazione e si dice il *grado locale di s in p_0* . Se $\omega \in \Omega^{m-1}(S^{m-1})$ e $\int_{S^{m-1}} \omega = 1$, allora

$$\deg_{p_0} s = \int_{S^{m-1}} \phi_r^* \omega.$$

Se (e_ξ, ψ_ξ) è la forma di Eulero totale del fibrato ξ e W un intorno relativamente compatto di p_0 in U , con frontiera regolare di classe \mathcal{C}^∞ e diffeomorfo alla palla unitaria di \mathbb{R}^m , abbiamo

$$(16.9.2) \quad \deg_{p_0} s = \int_{\partial W} s^* \psi_\xi.$$

Supponiamo ora che M sia compatta e che vi sia una sezione s di ξ su M con singolarità isolate in un numero finito di punti p_1, \dots, p_k di M . È cioè $s \in \Gamma_\xi(M \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, E)$. Per ogni $i = 1, \dots, k$ possiamo trovare un intorno U_i di p_i ed una forma $u_i \in \Omega^{m-1}(U_i)$ tale che $du_i = e_\xi$ su U_i . Fissiamo degli aperti $W_i \subset U_i$, con chiusure \bar{W}_i due a due disgiunte, e frontiere di classe \mathcal{C}^∞ , ciascuno diffeomorfo ad una palla di \mathbb{R}^m e con $p_i \in W_i$. Siano poi $\kappa_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ con $\text{supp } \kappa_i \Subset U_i$ e $\kappa_i = 1$

su W_i . Allora $e_\xi - \sum_{i=1}^k d_M(\kappa_i u_i)$ è ancora una forma di Eulero ed è identicamente nulla su $\bigcup_{i=1}^k W_i$.

Utilizzando questa osservazione, possiamo fissare una forma di Eulero totale (e_ξ, Ψ_ξ) con $e_\xi = 0$ su $\bigcup_{i=1}^k W_i$. Abbiamo allora, poiché $\pi \circ s(p) = p$ per ogni $p \neq p_1, \dots, p_k$:

$$\begin{aligned} \chi(\xi) &= \int_M e_\xi = \int_{M \setminus \bigcup_{i=1}^k W_i} e_\xi = \int_{M \setminus \bigcup_{i=1}^k W_i} (\pi \circ s)^* e_\xi \\ &= \int_{M \setminus \bigcup_{i=1}^k W_i} s^* \circ \pi^* e_\xi = - \int_{M \setminus \bigcup_{i=1}^k W_i} s^* d_E \Psi_\xi \\ &= - \int_{M \setminus \bigcup_{i=1}^k W_i} d_M s^* \Psi_\xi = \sum_{i=1}^k \int_{\partial W_i} s^* \Psi = \sum_{i=1}^k \deg_{p_i} s. \end{aligned}$$

Osservazione XVI.9.2. Si può dimostrare¹⁰ che ogni fibrato in sfere orientato su una base compatta ammette una sezione globale con un numero finito di singolarità.

Abbiamo dimostrato il seguente

Teorema XVI.9.3. *La caratteristica di Eulero di un fibrato differenziabile in sfere S^{m-1} , su una base compatta di dimensione m ed orientato è la somma dei gradi locali di una sua sezione che abbia un numero finito di singolarità.*

Osservazione XVI.9.4. In particolare, la caratteristica di Eulero è sempre un numero intero.

Sia $\theta = (E_\theta \xrightarrow{\pi_\theta} M)$ un fibrato vettoriale orientato, di rango m uguale alla dimensione della base M . Fissiamo una norma Riemanniana $\| \cdot \|_\theta$ sulle fibre di θ e consideriamo il sottofibrato in sfere ξ di θ , con spazio totale

$$E = \{v \in E_\theta \mid \|v\|_\theta = 1\}.$$

Per il Teorema X.2.1, esistono sezioni $s \in \Gamma_\theta(M, E_\theta)$ trasversali alla sezione nulla. Una tale s ha un numero finito di zeri p_1, \dots, p_k in M . L'applicazione $s \rightarrow s/\|s\|_\theta$ è una sezione di ξ con un numero finito di singolarità negli zeri di s .

Definizione XVI.9.5. Chiamiamo *punto singolare* di una sezione $s \in \Gamma_\theta(M, E_\theta)$ un punto p_0 in cui $s(p_0) = 0$.

Chiamiamo *indice* di s in un suo punto singolare p_0 il grado locale dell'applicazione $p \rightarrow s(p)/\|s(p)\|_\theta$ in p_0 .

Per quanto osservato prima, abbiamo

Teorema XVI.9.6. *Sia $s \in \Gamma_\theta(M, E_\theta)$ una sezione di θ con un numero finito di singolarità. Allora la somma degli indici dei punti singolari di s è uguale alla caratteristica di Eulero di un qualsiasi fibrato in sfere associato ad θ .*

Osserviamo ancora che vale il

¹⁰Vedi N.Steenrod: *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1951.

Teorema XVI.9.7. Sia θ un fibrato vettoriale orientato di rango m sulla varietà Riemanniana orientata compatta M , della stessa dimensione m . Se $s \in \Gamma_\theta(M, E_\theta)$ è una sezione con un numero finito di zeri, allora la classe di Eulero del fibrato in sfere associato ad E è il duale di Poincaré degli zeri di s , contati con le loro molteplicità.

Osservazione XVI.9.8. Se θ è il fibrato tangente di una varietà compatta orientata M , vedremo nel paragrafo successivo che il numero di Eulero del fibrato in sfere associato è la caratteristica di Eulero-Poincaré di M .

Esempio XVI.9.9. Consideriamo la sfera $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$. La proiezione ortogonale sullo spazio tangente di S^m del campo di vettori $\partial/\partial x^0$ definisce un campo di vettori X su S^m , che si annulla in $\pm e_0$. Poiché gli indici di X in $\pm e_0$ sono uguali se la dimensione m è pari, opposti se m è dispari, ne segue che la caratteristica di Eulero-Poincaré di S^m è 2 se m è pari, zero se m è dispari.

Osservazione XVI.9.10. In generale, un fibrato in sfere orientato con fibra di dimensione pari ha classe di Eulero nulla.

Esempio XVI.9.11. Realizziamo il toro T^2 come il sottospazio

$$T^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

La proiezione ortogonale X sullo spazio tangente di T^2 del campo di vettori $\partial/\partial x$ si annulla nei quattro punti $(\pm 3, 0, 0)$ e $(\pm 1, 0, 0)$. Gli indici di X nelle coppie di punti $(-3, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$ e $(1, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$ sono opposti e quindi la caratteristica di Eulero-Poincaré del toro è nulla.

XVI.10. La caratteristica di Eulero

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m , i cui gruppi di coomologia di de Rham abbiano tutti dimensione finita.

Definizione XVI.10.1. La *caratteristica di Eulero* $\chi(M)$ di M è la somma alternata delle dimensioni dei suoi gruppi di coomologia

$$(16.10.1) \quad \chi(M) = \sum_q (-1)^q \dim_{\mathbb{R}} H^q(M).$$

Osservazione XVI.10.2. Per la dualità di Poincaré, se M è una varietà compatta orientabile di dimensione dispari, la sua caratteristica di Eulero è nulla.

Se M è una varietà complessa orientabile di dimensione pari, la sua caratteristica di Poincaré è un numero pari.

Gli spazi proiettivi reali di dimensione dispari sono orientabili ed hanno quindi caratteristica di Eulero zero.

Gli spazi proiettivi reali di dimensione pari sono varietà connesse e compatte non sono orientabili ed hanno tutti i gruppi di coomologia nulli in grado diverso. Hanno quindi caratteristica di Eulero 1.

Supponiamo che M sia una varietà connessa, compatta e orientata di dimensione m . Scegliamo una base $\{\omega_i\}$ di $H^*(M)$ come spazio vettoriale. Per la dualità di Poincaré, risulta determinata una base duale $\{\tau_i\}$ di $H^*(M)$ con

$$(16.10.2) \quad \int_M \omega_i \wedge \tau_j = \delta_{i,j}.$$

Siano $\pi_i : M \times M \rightarrow M$ le proiezioni sulla prima e sulla seconda componente, rispettivamente. Per la formula di Künneth,

$$(16.10.3) \quad H^*(M \times M) = H^*(M) \otimes H^*(M)$$

e $\{\pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j\}$ è una base di $H^*(M \times M)$.

Lemma XVI.10.3. *Sia $\{\omega_i\}$ una base di $H^*(M)$ formata da elementi omogenei. La sua base duale $\{\tau_i\}$ in $H^*(M)$ è ancora formata da elementi omogenei. Il duale di Poincaré della diagonale $\Delta_M = \{(p, p) \mid p \in M\}$ di $M \times M$ è*

$$(16.10.4) \quad \eta_{\Delta_M} = \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_i.$$

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che la base $\{\tau_i\}$ sia anch'essa formata da elementi omogenei è conseguenza del fatto che, per ogni $q = 0, \dots, m$, il gruppo $H^{m-q}(M)$ è duale di $H^q(M)$. Osserviamo ora che $\{(-1)^{(\deg \omega_i)(\deg \tau_i + \deg \omega_j)} \pi_1^* \tau_i \wedge \pi_2^* \omega_j\}$ è la base duale di $\{\pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j\}$ in $H^*(M \times M)$. Infatti

$$\begin{aligned} \int_{M \times M} \pi_1^* \tau_i \wedge \pi_2^* \omega_j \wedge \pi_1^* \omega_h \wedge \pi_2^* \tau_k &= \pm \int_{M \times M} \pi_1^* \omega_h \wedge \pi_1^* \tau_i \wedge \pi_2^* \omega_j \wedge \pi_2^* \tau_k \\ &= \pm \int_M \pi_1^* \omega_h \wedge \pi_1^* \tau_i \cdot \int_M \pi_2^* \omega_j \wedge \pi_2^* \tau_k \end{aligned}$$

è 0 se $(i, j) \neq (h, k)$. Per $(i, j) = (h, k)$ abbiamo, precisando i segni nelle uguaglianze precedenti,

$$\int_{M \times M} \pi_1^* \tau_i \wedge \pi_2^* \omega_j \wedge \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j = (-1)^{(\deg \omega_i)(\deg \tau_i + \deg \omega_j)}.$$

Il duale di Poincaré della diagonale Δ_M è una combinazione lineare degli elementi della base e si scrive quindi nella forma

$$\eta_{\Delta_M} = \sum_{i,j} c_{i,j} \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j.$$

Abbiamo, per la definizione del duale di Poincaré,

$$\begin{aligned} (-1)^{(\deg \omega_i)(\deg \tau_i + \deg \omega_j)} c_{i,j} &= \int_{M \times M} \pi_1^* \tau_i \wedge \pi_2^* \omega_j \wedge \eta_{\Delta_M} \\ &= \int_M \tau_i \wedge \omega_j = (-1)^{(\deg \tau_i)(\deg \omega_j)} \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Da questa identità ricaviamo che

$$c_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{\deg \omega_i} & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Questo completa la dimostrazione. \square

Lemma XVI.10.4. *Il fibrato normale della diagonale Δ_M di $M \times M$ è isomorfo al fibrato tangente di Δ_M ed al fibrato tangente di M .* \square

Indichiamo con $\nu(\Delta_M)$ il fibrato normale di Δ_M in $M \times M$. Ricordiamo che il duale di Poincaré di una sottovarietà compatta orientata e la classe di Thom di un suo intorno tubolare si rappresentano mediante la stessa forma. Inoltre, la restrizione della classe di Thom alla sezione nulla è la classe di Eulero del fibrato in sfere corrispondente. Abbiamo perciò, indicando con $\xi(T\Delta_M)$, $\xi(\nu(\Delta_M))$ e $\xi(TM)$ i fibrati in sfere di $T\Delta_M$, di $\nu(\Delta_M)$ e di TM , rispettivamente:

$$\int_{\Delta_M} \eta_{\Delta_M} = \int_{\Delta_M} e_{\xi(\nu(\Delta_M))} \int_{\Delta_M} e_{\xi(T\Delta_M)} = \int_M e_{\xi(TM)}$$

Poiché

$$(16.10.5) \quad \int_{\Delta_M} \eta_{\Delta_M} = \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \int_M \omega^i \wedge \tau_i = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{R}} H^i(M),$$

abbiamo ottenuto

Teorema XVI.10.5. *Sia M una varietà compatta orientata. Allora il numero di Eulero del fibrato in sfere del fibrato tangente di M è uguale alla sua caratteristica di Eulero.* \square

Come corollario otteniamo

Teorema XVI.10.6 (Teorema dell'indice di Hopf). *Se M è una varietà compatta orientata, ed $X \in \mathfrak{X}(M)$ un qualsiasi campo di vettori con un numero finito di punti critici¹¹, allora la somma degli indici di X nei suoi punti singolari è la caratteristica di Eulero di M .* \square

XVI.11. Caratteristica di Eulero di un complesso

Sia

$$(16.11.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V_0 & \xrightarrow{\lambda_1} & V_1 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & \dots \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & \dots & \longrightarrow & V_{n-1} & \xrightarrow{\lambda_{n-1}} & V_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un complesso di spazi vettoriali di dimensione finita su un campo \mathbb{k} e di applicazioni \mathbb{k} -lineari. Indichiamo con $H^i = \ker \lambda_i / \lambda_{i-1}(V_{i-1})$ i suoi gruppi di coomologia. Allora

Proposizione XVI.11.1. *Vale l'uguaglianza*

$$(16.11.2) \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_{\mathbb{k}} H^i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_{\mathbb{k}} V_i.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\dim_{\mathbb{k}} \ker \lambda_i + \dim_{\mathbb{k}} \lambda_i(V_i) = \dim_{\mathbb{k}} V_i.$$

Quindi

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_{\mathbb{k}} V_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\dim_{\mathbb{k}} \ker \lambda_i + \dim_{\mathbb{k}} \lambda_i(V_i))$$

¹¹Si dicono *critici* i punti in cui un campo di vettori su annulla.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i (\dim_{\mathbb{k}} \ker \lambda_i - \dim_{\mathbb{k}} \lambda_i(V_{i-1})) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_{\mathbb{k}} H^i.
\end{aligned}$$

□

Utilizzando il Teorema XVI.2.4, questa proposizione ci permette di calcolare la caratteristica di Eulero delle varietà che ammettono un buon ricoprimento finito.

Esempio XVI.11.2. Sia $m \geq 2$ e sia M la varietà che si ottiene togliendo n punti da \mathbb{R}^m . Calcoliamo la caratteristica di Eulero di M a partire da un buon ricoprimento finito. Possiamo ottenere questo ricoprimento nel modo seguente. Innanzi tutto, a meno di un diffeomorfismo, possiamo supporre che

$$M = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x \neq (i, 0, \dots, 0), i = 1, \dots, n\}.$$

Costruiamo allora un buon ricoprimento di M utilizzando gli aperti

$$\begin{cases}
U_1 = \{x^1 < 1\}, U_2 = \{1 < x^1 < 2\}, \dots, U_n = \{n-1 < x^1 < n\}, U_{n+1} = \{x^1 > n\}, \\
U_+^2 = \{x^2 > 0\}, U_-^2 = \{x^2 < 0\}, \\
\dots \\
U_+^m = \{x^m > 0\}, U_-^m = \{x^m < 0\}.
\end{cases}$$

Poiché si ottengono intersezioni non nulle soltanto intersecando aperti che siano stati elencati in righe diverse, la dimensione d_h di $\mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ è

$$\begin{cases}
d_0 = (n+1) + 2(m-1) = n + 2m - 1, \\
d_h = 2^h \binom{m-1}{h} (n+1) + 2^{h+1} \binom{m-1}{h+1} & \text{se } 1 \leq h \leq m-2, \\
d_{m-1} = 2^{m-1} (n+1), \\
0 & \text{se } h \geq m.
\end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\chi(M) &= n + 2m - 1 + (n+1) \sum_{h=1}^{m-1} 2^h (-1)^h \binom{m-1}{h} - \sum_{h=1}^{m-2} (-1)^{h+1} 2^{h+1} \binom{m-1}{h+1} \\
&= n + 2m - 1 + n[(-1)^{m-1} - 1] - 2(m-1) = \begin{cases} 1 - n & \text{se } m \text{ è pari,} \\ 1 + n & \text{se } m \text{ è dispari.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Nel caso $m = 2$, poiché $\chi(M) = 1 - \dim_{\mathbb{R}} H^1(M)$, otteniamo che $H^1(M) = \mathbb{R}^n$. In generale, abbiamo

$$H^q(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, \\ \mathbb{R}^n & \text{se } q = m-1, \\ 0 & \text{se } q \neq 0, m-1. \end{cases}$$

Classi caratteristiche

Sia M una varietà differenziabile. Ricordiamo che il prodotto esterno di forme definisce su $H^*(M) = \bigoplus H^q(M)$, per passaggio al quoziente, una struttura di algebra, che chiameremo *algebra di coomologia* di M .

Definiamo ancora, nel caso in cui i gruppi di coomologia di de Rham di M abbiano tutti dimensione finita, il *polinomio di Poincaré* di M come il polinomio

$$P_i(M) = \sum_{q \geq 0} t^q \dim_{\mathbb{R}} H^q(M).$$

XVII.1. La classe di Chern di un fibrato in rette complesse

Consideriamo un fibrato vettoriale $\theta = (E_\theta \xrightarrow{\pi_\theta} M)$ con fibra orientata di rango due. Assegnare una metrica Riemanniana sulle fibre di θ definisce su ciascuna fibra una struttura complessa. Possiamo quindi considerare θ come un fibrato in rette complesse. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento di M mediante aperti di trivializzazione. Le funzioni di transizione $g_{i,j}$ sono allora funzioni complesse a valori diversi da zero. Le $g_{i,j}/|g_{i,j}|$ sono ancora funzioni di transizione di un fibrato equivalente a θ .

Possiamo quindi supporre che le funzioni di transizione $\{g_{i,j}\}$ siano a valori in $S^1 \subset \mathbb{C}$. Esse sono quindi anche le funzioni di transizione del fibrato in circonferenze $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ associato a θ . Calcoliamo una sua forma di Eulero.

Su ciascun U_i è definita una forma angolare $d\theta_i$, associata alla rappresentazione dei punti di S^1 nella forma $z = e^{i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{R}$. Abbiamo

$$e^{i\theta_i} = g_{i,j} e^{i\theta_j} \quad \text{su } U_{i,j}$$

e quindi, differenziando, otteniamo che

$$i g_{i,j} e^{i\theta_j} d\theta_i = e^{i\theta_j} d g_{i,j} + i e^{i\theta_j} g_{i,j} d\theta_j \implies d\theta_i = d\theta_j + \frac{1}{i} \frac{d g_{i,j}}{g_{i,j}}$$

Poiché

$$g_{i,j} g_{j,k} g_{k,i} = 1 \quad \text{su } U_{i,j,k} \implies \frac{d g_{i,j}}{g_{i,j}} + \frac{d g_{j,k}}{g_{j,k}} + \frac{d g_{k,i}}{g_{k,i}} = 0 \quad \text{su } U_{i,j,k},$$

possiamo trovare delle forme $\alpha_i \in \mathcal{Q}^1(U_i)$ tali che

$$\frac{d g_{i,j}}{g_{i,j}} = i\alpha_i - i\alpha_j \quad \text{su } U_{i,j}.$$

Ne segue che

$$d\theta_i - \pi^* \alpha_i = d\theta_j - \alpha_j \quad \text{su } U_{i,j}$$

e quindi risulta definita una forma angolare ψ_ξ con

$$\psi_\xi = d\theta_i - \pi^* \alpha_i \text{ su } U_i, \text{ per ogni indice } i.$$

La corrispondente forma di Eulero è

$$e_\xi = d\alpha_i \text{ su } U_i, \text{ per ogni indice } i.$$

Si ottiene una espressione esplicita della forma di Eulero utilizzando una partizione dell'unità $\{\kappa_j\}$ subordinata al ricoprimento \mathcal{U} . Possiamo allora scegliere

$$\alpha_i = \sum_j \kappa_j \frac{dg_{j,i}}{g_{j,i}} \text{ su } U_i, \text{ per ogni indice } i$$

ed abbiamo allora

$$(17.1.1) \quad e_\xi = \sum_j d\kappa_j \wedge \frac{dg_{j,i}}{g_{j,i}} \text{ su } U_i, \text{ per ogni indice } i.$$

Definizione XVII.1.1. La classe di Eulero $[e_\xi] \in H^2(M)$ si dice la *prima classe di Chern* del fibrato in rette complesse θ e si indica con $c_1(\theta)$.

Dalla descrizione esplicita della prima classe di Chern ricaviamo

Proposizione XVII.1.2. Siano θ_1 e θ_2 due fibrati in rette complesse su M . La prima classe di Chern del fibrato in rette complesse $\theta_1 \otimes \theta_2$ è

$$(17.1.2) \quad c_1(\theta_1 \otimes \theta_2) = c_1(\theta_1) + c_1(\theta_2).$$

Se θ^* è il duale del fibrato in rette complesse θ su M , allora

$$(17.1.3) \quad c_1(\theta^*) = -c_1(\theta).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\{g_{i,j}^1\}$ e $\{g_{i,j}^2\}$ sono le funzioni di transizione dei fibrati θ_1 e θ_2 , rispettivamente, rispetto ad un comune ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di M mediante aperti di trivializzazione, allora $g_{i,j} = g_{i,j}^1 \cdot g_{i,j}^2$ sono le funzioni di transizione di $\theta_1 \otimes \theta_2$. La formula (17.1.2) per la prima classe di Chern di θ segue allora dalla (17.1.1).

Analogamente, se $\{g_{i,j}\}$ sono le funzioni di transizione di un fibrato in rette θ rispetto a un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di M mediante aperti di trivializzazione, le $\{g_{i,j}^* = g_{i,j}^{-1}\}$ sono funzioni di transizione per θ^* rispetto allo stesso ricoprimento \mathcal{U} , che è di trivializzazione anche per θ^* . La (17.1.3) segue allora dalla (17.1.1). \square

Proposizione XVII.1.3. Sia $\theta = (E_\theta \xrightarrow{\pi_\theta} M)$ un fibrato in rette complesse con base M . Sia N un'altra varietà differenziabile ed $f \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$. Allora

$$(17.1.4) \quad c_1(f^*\theta) = \pi^* c_1(\theta).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathcal{U} = \{U_i\}$ è un atlante di trivializzazione di θ in M , allora $\mathcal{W} = \{W_i = f^{-1}(U_i)\}$ è un atlante di trivializzazione di $\pi^*\theta$ in N . Se $\{g_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(U_{i,j}, \mathbb{C}^*)\}$ sono le funzioni di transizione di θ relative ad \mathcal{U} , le $\{\pi^*g_{i,j} = g_{i,j} \circ \pi \in \mathcal{C}^\infty(W_{i,j}, \mathbb{C}^*)\}$ sono le funzioni di transizione di $\pi^*\theta$ relative a \mathcal{W} . Fissiamo una partizione \mathcal{C}^∞ dell'unità $\{\kappa_i\}$ in M relativa al ricoprimento \mathcal{U} . Allora $\{\pi^*\kappa_i\}$ è una

partizione dell'unità \mathcal{C}^∞ in N relativa al ricoprimento \mathcal{W} . Un rappresentante in $H^2(N)$ di $c_1(\pi^*\theta)$ è dato, per la (17.1.1), da

$$\sum_i d_N(\pi^* \kappa_i) \wedge \frac{d_N(\pi^* g_{i,j})}{\pi^* g_{i,j}} = \pi^* \left(\sum_i d_M \kappa_i \wedge \frac{d_M g_{i,j}}{g_{i,j}} \right) \quad \text{su } W_j = f^{-1}(U_j)$$

per ogni indice j . Questo dimostra la Proposizione. \square

XVII.2. La coomologia degli spazi proiettivi complessi

Possiamo utilizzare la successione di Gysin per calcolare con maggior accuratezza la coomologia di de Rham degli spazi complessi $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Abbiamo una fibrazione naturale

$$(17.2.1) \quad S^{2n+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}\mathbb{P}^n$$

con fibra S^1 . Indichiamo con $\mathbf{e} \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ la sua classe di Eulero. Abbiamo allora le successioni esatte

$$(17.2.2) \quad H^{q+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{\pi_*} H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\mathbf{e} \wedge} H^{q+2}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\pi^*} H^{q+2}(S^{2n+1})$$

Abbiamo già visto nell'Esempio XIV.7.5 che il polinomio di Poincaré di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è

$$(17.2.3) \quad P_t(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \sum_{q=0}^n t^{2q} = \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2},$$

cioè $H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ ha dimensione reale 1 per $q = 0, 2, \dots, 2n$, e zero altrimenti. La successione esatta (17.2.2) ci permette di affermare che \mathbf{e} è il generatore di $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$, e che, per ogni $q = 2, \dots, n$,

$$(17.2.4) \quad \mathbf{e}^q = \underbrace{\mathbf{e} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}}_{q \text{ volte}} \quad \text{è il generatore di } H^{2q}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n).$$

Abbiamo ottenuto

Proposizione XVII.2.1. *L'algebra di coomologia $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ è un'algebra unitaria con un unico generatore \mathbf{e} , ed è isomorfa al quoziente $\mathbb{R}[x]/(x^{n+1})$.*

Osserviamo che $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è il fibrato in sfere associato al *fibrato tautologico* di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, che ha come spazio totale

$$(17.2.5) \quad \mathbb{T} = \{(p, v) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in p\},$$

dove abbiamo identificato i punti p di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ alle rette complesse passanti per l'origine di \mathbb{C}^{n+1} . Quindi la classe \mathbf{e} è la prima classe di Chern del fibrato tautologico di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

XVII.3. Le classi di Chern

Sia $\theta = (E_\theta \xrightarrow{\pi_\theta} M)$ un fibrato vettoriale complesso di rango n . Possiamo associare ad esso il suo *proiettivizzato* $\mathbb{P}(\theta) = (\mathbb{P}(E_\theta) \xrightarrow{\pi} M)$. Il suo spazio totale si ottiene come il quoziente di E_θ , privato della sezione nulla, rispetto all'azione

moltiplicativa del gruppo \mathbb{C}^* dei numeri complessi diversi da zero. Lo indicheremo con

$$(17.3.1) \quad \mathbb{P}(E_\theta) = \check{E}_\theta / \mathbb{C}^*, \quad \text{ove} \quad \check{E}_\theta = \{v \in E_\theta \mid v \neq 0\}.$$

La proiezione sulla base è definita dal diagramma commutativo

$$(17.3.2) \quad \begin{array}{ccc} \check{E}_\theta & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}(E_\theta) \\ & \searrow \pi_\theta & \swarrow \pi \\ & & M. \end{array}$$

Identificheremo $\mathbb{P}(E_\theta)$ con l'insieme delle rette per l'origine delle fibre di E_θ .

Definiamo il *fibrato tautologico* di $\mathbb{P}(\theta)$ con spazio totale

$$(17.3.3) \quad \mathbb{T}(\theta) = \{(\sigma, v) \in \mathbb{P}(E_\theta) \times E_\theta \mid v \in \sigma\},$$

base $\mathbb{P}(E_\theta)$ e proiezione $\pi : \mathbb{T}(\theta) \ni (\sigma, v) \rightarrow \sigma \in \mathbb{P}(E_\theta)$ e sia $\zeta \in H^2(\mathbb{P}(E_\theta))$ l'opposto della sua prima classe di Chern.

Lemma XVII.3.1. *Le classi $\zeta^q \in H^{2q}(\mathbb{P}(E_\theta))$, per $q = 0, 1, \dots, n-1$ si restringono, su ogni fibra di $\mathbb{P}(\theta)$, ad una base della coomologia della fibra.*

DIMOSTRAZIONE. Questo segue dal fatto che la classe di Eulero della restrizione di un fibrato in sfere orientate ad una sottovarietà della base è una restrizione alla sottovarietà della classe di Eulero del fibrato. \square

Come conseguenza otteniamo, per il Teorema di Leray-Hirsch, la

Proposizione XVII.3.2. *Abbiamo*

$$(17.3.4) \quad H^*(\mathbb{P}(E_\theta)) \simeq H^*(M) \otimes H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}),$$

$$(17.3.5) \quad P_t(\mathbb{P}(E_\theta)) = P_t(M) \cdot \frac{1 - t^{2n}}{1 - t^2}.$$

Da questa segue il

Teorema XVII.3.3. *Sia $\zeta \in H^2(\mathbb{P}(E_\theta))$ l'opposta della classe di Eulero del fibrato tautologico su $\mathbb{P}(E_\theta)$. Esistono allora delle classi di coomologia*

$$(17.3.6) \quad c_q(\theta) \in H^{2q}(M)$$

tali che

$$(17.3.7) \quad \zeta^n + \pi^*(c_1(\theta)) \wedge \zeta^{n-1} + \dots + \pi^*(c_{n-1}(\theta)) \wedge \zeta + \pi^*(c_n(\theta)) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per la (17.3.4), è

$$H^*(\mathbb{P}(E_\theta)) = \left\{ \sum_{q=0}^{n-1} \pi^*(\alpha_q) \wedge \zeta^q \mid \alpha_q \in H^*(M) \right\}.$$

Le (17.3.6) e (17.3.7) si ottengono esprimendo $\zeta^n \in H^{2n}(\mathbb{P}(E_\theta))$ come combinazione lineare di $1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1}$ a coefficienti in $\pi^*(H^*(M))$. \square

Definizione XVII.3.4. Le classi $c_q(\theta) \in H^{2q}(M)$ definite dalle (17.3.6) e (17.3.7) si dicono le *classi di Chern* del fibrato θ .

Incheremo con

$$(17.3.8) \quad c(\theta) = 1 + c_1(\theta) + c_2(\theta) + \cdots + c_N(\theta) \in H^*(M)$$

la *classe di Chern totale* del fibrato.

Osservazione XVII.3.5. Nel caso di un fibrato in rette complesse, la classe di Chern definita in XVII.1 coincide con quella della Definizione XVII.3.4.

XVII.4. Proprietà delle classi di Chern

Le classi di Chern godono di alcune importanti proprietà, che le caratterizzano assiomaticamente.

Teorema XVII.4.1 (Naturalità). *Siano M, N due varietà differenziabili e sia $\theta = (E_\theta \xrightarrow{\pi_\theta} M)$ un fibrato vettoriale complesso di rango n su M . Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$. Allora le classi di Chern dell'immagine inversa $f^*\theta$ del fibrato θ sono le immagini inverse delle classi di Chern di θ :*

$$(17.4.1) \quad c_q(\pi^*\theta) = f^*(c_q(\theta)), \quad \forall q = 1, \dots, n.$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che $\pi^*\theta$ è il fibrato con spazio totale

$$E_{\pi^*\theta} = \{(a, v) \in N \times E_\theta \mid f(a) = \pi_\theta(v)\}$$

e proiezione $\pi_{\pi^*\theta} : E_{\pi^*\theta} \ni (a, v) \rightarrow a \in N$. La f si solleva ad un omomorfismo di fibrati vettoriali, definito sugli spazi totali da

$$F : E_{\pi^*\theta} \ni (a, v) \longrightarrow v \in E_\theta$$

che, per passaggio ai quozienti, dà un omomorfismo dei proiettivizzati

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(E_{\pi^*\theta}) & \xrightarrow{\hat{F}} & \mathbb{P}(E_\theta) \\ \pi_N \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ N & \xrightarrow{f} & M. \end{array}$$

Indichiamo con ζ_N l'opposta della prima classe di Chern del fibrato tautologico su $\mathbb{P}(E_{\pi^*\theta})$ e con ζ_M quella del fibrato tautologico su $\mathbb{P}(E_\theta)$. Per la Proposizione XVII.1.2 è $\zeta_N = \hat{F}^*\zeta_M$. Applicando \hat{F}^* al primo membro dell'equazione

$$\zeta_M^n + \pi_M^*(c_1(\theta)) \wedge \zeta_M^{n-1} + \cdots + \pi_M^*(c_{n-1}(\theta)) \wedge \zeta_M + \pi_M^*(c_n(\theta)) = 0$$

otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \zeta_N^n + \hat{F}^*(\pi_M^*(c_1(\theta))) \wedge \zeta_N^{n-1} + \cdots + \hat{F}^*(\pi_M^*(c_{n-1}(\theta))) \wedge \zeta_N + \hat{F}^*(\pi_M^*(c_n(\theta))) \\ &= \zeta_N^n + \pi_N^*(f^*(c_1(\theta))) \wedge \zeta_N^{n-1} + \cdots + \pi_N^*(f^*(c_{n-1}(\theta))) \wedge \zeta_N + \pi_N^*(f^*(c_n(\theta))), \end{aligned}$$

da cui segue la (17.4.1). \square

Osservazione XVII.4.2. Ovviamente fibrati complessi isomorfi sulla stessa base hanno uguali classi di Chern.

Teorema XVII.4.3 (formula del prodotto di Whitney). *Se θ_1 e θ_2 sono fibrati vettoriali complessi su M , allora*

$$(17.4.2) \quad c(\theta_1 \oplus_M \theta_2) = c(\theta_1)c(\theta_2).$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $\theta_0 = \theta_1 \oplus_M \theta_2$ e $\theta_i = (E_i \xrightarrow{\pi_i} M)$, per $i = 0, 1, 2$ ed indichiamo con n, n_1, n_2 , ($n = n_1 + n_2$), i ranghi dei fibrati vettoriali complessi θ_0, θ_1 e θ_2 , rispettivamente.

Consideriamo i $\mathbb{P}(E_i)$ come sottospazi di $\mathbb{P}(E_0)$ ed indichiamo con $\lambda_i : \mathbb{P}(E_i) \hookrightarrow \mathbb{P}(E_0)$ le inclusioni naturali. Siano poi

$$\mathbb{T}(E_i) = \{(a, v) \in \mathbb{P}(E_i) \times E_i \mid v \in a\}$$

gli spazi totali dei fibrati tautologici $\mathbb{T}(\theta_i)$. Abbiamo ancora inclusioni naturali $\hat{\lambda}_i : \mathbb{T}(E_i) \rightarrow \mathbb{T}(E_0)$ per $i = 1, 2$. In particolare, la prima classe di Chern di $\mathbb{T}(\theta_i)$ è l'immagine inversa mediante λ_i della prima classe di Chern di $\mathbb{T}(\theta_0)$, per $i = 1, 2$. Quindi, se $\zeta \in H^2(\mathbb{P}(E_0))$ è l'opposto della prima classe di Chern di $\mathbb{T}(\theta_0)$, le classi di Chern di θ_i sono caratterizzate dalle equazioni

$$[\lambda_i^*(\zeta)]^{n_i} + \pi_i^*(c_1(\theta_i))[\lambda_i^*(\zeta)]^{n_i-1} + \cdots + \pi_i^*(c_{n_i-1}(\theta_i))[\lambda_i^*(\zeta)] + \pi_i^*(c_{n_i}(\theta_i)) = 0.$$

Ciò significa che la classe

$$\alpha_i = \zeta^{n_i} + \pi_i^*(c_1(\theta_i))\zeta^{n_i-1} + \cdots + \pi_i^*(c_{n_i-1}(\theta_i))\zeta + \pi_i^*(c_{n_i}(\theta_i)) \in H^{2n_i}(\mathbb{P}(E_0))$$

ha restrizione nulla $\lambda_i^*(\alpha_i)$ su $\mathbb{P}(E_i)$, per $i = 1, 2$.

Dimostriamo che possiamo scegliere dei rappresentanti $f_i \in \mathcal{Z}^{2n_i}(\mathbb{P}(E_0))$ delle classi di coomologia α_i con supporti disgiunti.

Sia $g_1 \in \mathcal{Z}^{2n_1}(\mathbb{P}(E_0))$ un qualsiasi rappresentante di α_1 . Poiché $\mathbb{P}(E_0) \setminus \mathbb{P}(E_2)$ è un intorno tubolare di $\mathbb{P}(E_1)$ in $\mathbb{P}(E_0)$, la restrizione definisce, per passaggio al quoziente, un isomorfismo

$$H^q(\mathbb{P}(E_0) \setminus \mathbb{P}(E_2)) \longrightarrow H^q(\mathbb{P}(E_1)), \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Dunque la restrizione di g_1 a $\mathbb{P}(E_0) \setminus \mathbb{P}(E_2)$ è coomologa a zero e possiamo perciò trovare una forma $u_1 \in \mathcal{Q}^{2n_1-1}(\mathbb{P}(E_0) \setminus \mathbb{P}(E_2))$ tale che $g_1 = du_1$ su $\mathbb{P}(E_0) \setminus \mathbb{P}(E_2)$. Fissiamo un qualsiasi intorno U_2 di $\mathbb{P}(E_2)$ in $\mathbb{P}(E_0)$ e sia $\kappa_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{P}(E_0))$ una funzione che si annulla su un intorno $U'_2 \Subset U_2$ di $\mathbb{P}(E_2)$ in U_2 e vale 1 sul complementare in $\mathbb{P}(E_0)$ di un altro intorno $U''_2 \Subset U_2$ di $\mathbb{P}(E_2)$ in U_2 . Allora

$$f_1 = \begin{cases} g_1 - d(\kappa_2 u_1) & \text{in } \mathbb{P}(E_0) \setminus \mathbb{P}(E_2), \\ g_1 & \text{in } \mathbb{P}(E_2) \end{cases}$$

è un rappresentante della classe α_1 con supporto contenuto in U_2 .

Analogamente, possiamo costruire una forma $f_2 \in \mathcal{Z}^{2n_2}(\mathbb{P}(E_0))$ che rappresenta la classe α_2 , con supporto contenuto in un arbitrario intorno aperto U_1 di $\mathbb{P}(E_1)$. Scegliendo due intorni aperti disgiunti U_1 ed U_2 dei chiusi disgiunti $\mathbb{P}(E_1)$ e $\mathbb{P}(E_2)$, otteniamo per la classe $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ un rappresentante $f_1 \wedge f_2$ identicamente nullo. L'espressione $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0$ ci dà

$$\zeta^n + \beta_1 \wedge \zeta^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} \wedge \zeta + \beta_n = 0$$

$$\begin{aligned} \text{con } \beta_q &= \sum_{q_1+q_2=q} \pi_0^*(c_{q_1}(\theta_1)) \wedge \pi_0^*(c_{q_2}(\theta_2)) \\ &= \pi_0^* \left(\sum_{q_1+q_2=q} c_{q_1}(\theta_1) \wedge c_{q_2}(\theta_2) \right), \end{aligned}$$

ove abbiamo posto $c_0(\theta_i) = 1$. La dimostrazione è completa. \square

Proposizione XVII.4.4. *Sia $\theta = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale complesso di rango n . La sua n -esima classe di Chern $c_n(\theta)$ coincide con la classe di Eulero di θ .*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una metrica Hermitiana sulle fibre di θ ed indichiamo con $\mathbb{S}(\theta) = (\mathbb{S}(E) \xrightarrow{\pi_S} M)$ il corrispondente fibrato in sfere. La corrispondenza

$$\mathbb{S}(E) \ni v \longleftrightarrow ([v], v) \in \mathbb{S}(\mathbb{T}(E))$$

identifica gli spazi totali di $\mathbb{S}(\theta)$ e del fibrato in sfere del fibrato tautologico su $\mathbb{P}(\theta)$. Sia

$$\varpi : \mathbb{S}(E) \ni v \longrightarrow [v] \in \mathbb{P}(\theta)$$

la proiezione naturale. Abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}(E) & \longleftarrow & \mathbb{S}(\mathbb{T}(E)) \\ \downarrow & \swarrow \pi_P & \updownarrow \\ \mathbb{P}(E) & \longleftarrow \varpi & \mathbb{S}(E) \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_S \\ & & M \end{array}$$

Sia (e_P, ψ_P) la forma di Eulero totale del fibrato in sfere $\mathbb{S}(\mathbb{T}(\theta))$. Possiamo leggere ψ_P come una 1-forma su $\mathbb{S}(E)$ e la e_P come una 2-forma chiusa su $\mathbb{P}(E)$. Indicando con ζ l'opposta di e_P , abbiamo, per l'equazione che caratterizza la forma di Eulero,

$$d\psi_P = -\varpi^*(e_P) = \varpi^*(\zeta).$$

Consideriamo la forma

$$\psi_S = \psi_P \wedge \sum_{i=0}^{n-1} \pi_S^*(c_i(\theta)) \wedge (\varpi^*(\zeta))^{n-i-1}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \pi_{S*} \psi_S &= \pi_{S*} (\psi_P \wedge (\varpi^*(\zeta))^{n-1}) = 1, \\ d\psi_S &= \sum_{i=0}^{n-1} \pi_S^*(c_i(\theta)) \wedge (\varpi^*(\zeta))^{n-i} = \varpi^* \left(\sum_{i=0}^{n-1} \pi^*(c_i(\theta)) \wedge \zeta^{n-i} \right) \\ &= -\varpi^*(\pi^*(c_n(\theta))) = -\pi_S^*(c_n(\theta)), \end{aligned}$$

per la (17.3.7). Questo dimostra che $(\psi_S, c_n(\theta))$ è la classe di Eulero totale del fibrato in sfere $\mathbb{S}(\theta)$, e quindi la forma di Eulero di θ . \square

Corollario XVII.4.5. *Sia $\theta = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale complesso di rango n . Se θ ammette una sezione che non si annulli in nessun punto, allora $c_n(\theta) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti una sezione globale di θ che non si annulli in nessun punto ci permette di definire una sezione globale di $\mathbb{S}(\theta)$. Questo implica che la classe di Eulero, e quindi l' n -esima classe di Chern, è nulla. \square

XVII.5. Varietà bandiera e varietà di Grassmann

Richiamiamo la costruzione delle varietà di Grassmann e delle varietà bandiera complesse.

Se V è uno spazio vettoriale complesso di dimensione n e k un intero con $0 < k < n$, la Grassmanniana dei k -piani di V è l'insieme

$$(17.5.1) \quad \mathbb{G}_k(V) = \{\ell \mid \ell \text{ è un sottospazio vettoriale di dimensione } k \text{ di } V\},$$

dotato di un'unica struttura di varietà complessa compatta per cui l'azione naturale del gruppo lineare $\mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ è olomorfa. La $\mathbb{G}_k(V)$ è una varietà complessa, connessa e compatta di dimensione $k(n-k)$, e quindi una varietà reale analitica di dimensione $2k(n-k)$.

Sia ℓ_0 di $\mathbb{G}_k(V)$. Fissiamo una base e_1, \dots, e_n di V tale che e_1, \dots, e_k sia una base di ℓ . Allora l'insieme di tutti i k -piani ℓ che ammettono una base della forma

$$e_1 + \sum_{i=1}^{n-k} x^{1,i} e_{k+i}, \dots, e_k + \sum_{i=1}^{n-k} x^{k,i} e_{k+i}$$

è un intorno aperto U_{e_1, \dots, e_n} di ℓ_0 ed i coefficienti $(x^{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n-k}}$ sono coordinate in U_{e_1, \dots, e_n} . Se fissiamo un prodotto scalare Hermitiano su V , possiamo considerare il gruppo unitario $\mathbf{U}(V)$ e il gruppo speciale unitario $\mathbf{SU}(V)$. Anch'essi operano transitivamente su $\mathbb{G}_k(V)$ che quindi può essere rappresentato come spazio omogeneo

$$\mathbb{G}_k(V) \simeq \mathbf{U}(n)/(\mathbf{U}(k) \times \mathbf{U}(n-k)) \simeq \mathbf{SU}(n)/\mathbf{S}(\mathbf{U}(k) \times \mathbf{U}(n-k)).$$

Più in generale, fissati interi k_1, \dots, k_r con $0 < k_1 < \dots < k_r < n$, definiamo

$$(17.5.2) \quad \mathbb{F}_{k_1, \dots, k_r}(V) = \{(\ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathbb{G}_{k_1}(V) \times \dots \times \mathbb{G}_{k_r}(V) \mid \ell_1 \subset \dots \subset \ell_r\}.$$

La $\mathbb{F}_{k_1, \dots, k_r}(V)$ è una sottovarietà complessa di $\mathbb{G}_{k_1}(V) \times \dots \times \mathbb{G}_{k_r}(V)$, connessa e compatta, di dimensione complessa

$$\begin{aligned} k_1(n-k_1) + (k_2-k_1)(n-k_2) + \dots + (k_r-k_{r-1})(n-k_r) \\ = nk_r - (k_1^2 + \dots + k_r^2) + k_1k_2 + \dots + k_{r-1}k_r \end{aligned}$$

Scriveremo nel seguito $\mathbb{F}_k(V)$ per $\mathbb{F}_{1,2,\dots,k}(V)$ ed $\mathbb{F}(V)$ per $\mathbb{F}_{n-1}(V)$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{F}(V) &= n(n-1), \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{F}_k(V) &= \frac{k(2n-k-1)}{2}. \end{aligned}$$

Definizione XVII.5.1. Le varietà $\mathbb{F}_{k_1, \dots, k_r}(V)$ si chiamano *varietà bandiera*. La $\mathbb{F}_k(V)$ è la *varietà delle k -bandiere complete* e la $\mathbb{F}(V)$ *varietà delle bandiere complete*, o *varietà bandiera associata a V* .

XVII.6. Varietà bandiera di un fibrato vettoriale

Sia $\theta = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale complesso di rango n . Associamo a θ la varietà $\mathbb{F}(E)$

$$(17.6.1) \quad \mathbb{F}(E) = \{(p, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}) \mid p \in M, \ell_1 \subset \dots \subset \ell_{n-1} \subset E_p\},$$

ove abbiamo indicato con ℓ_h un sottospazio vettoriale complesso di dimensione h . La $\mathbb{F}(E)$ ha una struttura naturale di varietà differenziabile di dimensione $m+n(n-1)$ ed è lo spazio totale di un fibrato differenziabile $\mathbb{F}(\theta) = (\mathbb{F}(E) \xrightarrow{\pi_F} M)$ con base M .

Definizione XVII.6.1. La $\mathbb{F}(E)$ si dice la *varietà bandiera* del fibrato vettoriale θ .

Abbiamo

Lemma XVII.6.2. *L'immagine inversa $\pi_F^*(\theta)$ di θ su $\mathbb{F}(E)$ si decompone nella somma diretta*

$$(17.6.2) \quad \pi_F^*(\theta) = \theta_1 \oplus \dots \oplus \theta_n$$

di n fibrati in rette complesse.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un prodotto scalare Hermitiano differenziabile sulle fibre di θ . Allora ad ogni bandiera completa $\ell_1 \subset \dots \subset \ell_{n-1}$ in E_p corrisponde un'unica decomposizione ortogonale $L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ in rette complesse $L_i = L_i(\ell_1, \dots, \ell_{n-1})$ tali che $\ell_1 = L_1$ ed $\ell_i = L_1 \oplus \dots \oplus L_i$ per ogni $1 < i < n$. Definiamo i fibrati in rette θ_i con spazi totali

$$E_i = \{(p, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}; v) \in \mathbb{F}(E) \times E \mid v \in L_i(\ell_1, \dots, \ell_{n-1})\}$$

e proiezioni $\pi_i : E_i \ni (p, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}; v) \rightarrow (p, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}) \in \mathbb{F}(E)$. L'applicazione $\theta_1 \oplus \dots \oplus \theta_n \rightarrow \pi_F^*(\theta)$ definita da

$$(p, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}; v_1) \oplus \dots \oplus (p, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}; v_n) \longrightarrow (p, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}; v_1 + \dots + v_n)$$

definisce l'isomorfismo cercato. \square

Per la formula del prodotto di Whitney, è

$$c(\pi_F^*(\theta)) = c(\theta_1) \cdots c(\theta_n).$$

Poniamo

$$(17.6.3) \quad x_1 = c(\theta_1), \dots, x_n = c(\theta_n).$$

Allora

$$c(\pi_F^*(\theta)) = (1 + x_1) \cdots (1 + x_n) = \sum_{i=0}^n \sigma_i(x_1, \dots, x_n)$$

ove

$$\begin{cases} \sigma_0(x_1, \dots, x_n) = 1, \\ \sigma_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n, \\ \sigma_q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_q}, \quad \text{per } 1 < q < n, \\ \sigma_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n \end{cases}$$

sono le funzioni simmetriche elementari di x_1, \dots, x_n .

Poiché $c(\pi_F^*(\theta)) = \pi_F^*(c(\theta))$, otteniamo

$$(17.6.4) \quad \pi_F^*(c_q(\theta)) = \sigma_q(x_1, \dots, x_n).$$

Esprimeremo questa uguaglianza con la relazione formale

$$(17.6.5) \quad c(\theta) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i).$$

Abbiamo perciò

Teorema XVII.6.3. *Sia $\theta = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale complesso di rango $n \geq 2$. Allora l'anello di coomologia della varietà bandiera associata è*

$$(17.6.6) \quad H^*(\mathbb{F}(E)) = H^*(M)[x_1, \dots, x_n] / \left(\prod_{i=1}^n (1 + x_i) = c(\theta) \right),$$

ove il quoziente si intende rispetto all'ideale generato dalle $\sigma_q(x_1, \dots, x_n) - c_q(\theta)$, per $q = 1, \dots, n$, e la sua serie di Poincaré è

$$(17.6.7) \quad P_t(\mathbb{F}(E)) = P_t(M) \cdot \frac{1 - t^4}{1 - t^2} \cdots \frac{1 - t^{2n}}{1 - t^2}.$$

Possiamo considerare la varietà bandiera di uno spazio vettoriale complesso V di dimensione n come la varietà bandiera associata al fibrato vettoriale banale $\{0\} \times V$. Come conseguenza del teorema precedente abbiamo quindi

Corollario XVII.6.4. *Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione $n \geq 2$ e sia $\mathbb{F}(V)$ la varietà delle sue bandiere complete. L'algebra di coomologia e la serie di Poincaré di $\mathbb{F}(V)$ sono*

$$(17.6.8) \quad H^*(\mathbb{F}(V)) = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] / \left(\prod_{i=1}^n (1 + x_i) = 1 \right),$$

$$(17.6.9) \quad P_t(\mathbb{F}(V)) = \prod_{i=2}^n \frac{1 - t^{2i}}{1 - t^2},$$

ove abbiamo indicato con $\left(\prod_{i=1}^n (1 + x_i) = 1 \right)$ l'ideale generato dalle funzioni simmetriche di grado positivo di x_1, \dots, x_n .

Fasci e coomologia di Čech

XVIII.1. Fasci d'insiemi e morfismi di fasci

Definizione XVIII.1.1. Un *fascio d'insiemi* è un fibrato topologico $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ in cui la proiezione π sia un omeomorfismo locale.

Lo spazio X è la *base*, \mathcal{S} lo *spazio totale* o *étalé* e π la *proiezione sulla base* del fascio.

La fibra $\mathcal{S}_x = \pi^{-1}(x)$ si dice la *spiga* su $x \in X$, o l'insieme dei *germi* di \mathcal{S} in x .

Le spighe \mathcal{S}_x sono sottospazi discreti di \mathcal{S} e sono chiuse se e soltanto se $\pi(\mathcal{S}) \subset X$ è uno spazio T_1 . Infatti la proiezione π è aperta e quindi $\pi(\mathcal{S})$ ha la topologia quoziente, cioè la più fine tra quelle che rendano la proiezione π continua.

Quando ciò non crei confusione, si usa indicare il fascio $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ con la stessa lettera \mathcal{S} che denota il suo spazio totale.

Esempio XVIII.1.2. Siano X uno spazio topologico ed Y uno spazio discreto. Allora $X \times Y \xrightarrow{\pi_X} X$, con $\pi_X(x, y) = x$, è un fascio d'insiemi, che si dice il *fascio costante d'insieme* Y .

Esempio XVIII.1.3. Sia $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ un rivestimento di uno spazio topologico X ed \mathcal{S} un aperto di \tilde{X} . Allora $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ è un fascio d'insiemi di base X .

Definizione XVIII.1.4. Se $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ ed $\mathcal{S}' \xrightarrow{\pi'} X'$ sono due fasci d'insiemi, un morfismo di fibrati

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{S}' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X & \xrightarrow{\phi} & X' \end{array}$$

si dice un *morfismo di fasci*.

Quando $X = X'$ e $\phi = \text{id}_X$, chiameremo Φ un *morfismo di fasci su* X .

Definizione XVIII.1.5. Se $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ è un fascio su X ed Y un sottospazio di X , allora $\pi^{-1}(Y)$, che indicheremo con $\mathcal{S}|_Y$, è lo spazio totale del fascio $\mathcal{S}|_Y \xrightarrow{\pi} Y$, di base Y , che chiamiamo la *restrizione ad* Y del fascio \mathcal{S} .

Più in generale,

Lemma XVIII.1.6. Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio d'insiemi su X , Y uno spazio topologico ed $f : Y \rightarrow X$ un'applicazione continua. Allora

$$(18.1.1) \quad \begin{cases} f^* \mathcal{S} = \{(q, \xi) \in Y \times \mathcal{S} \mid f(q) = \pi(\xi)\}, \\ \varpi(q, \xi) = q, \quad \forall (q, \xi) \in f^* \mathcal{S}, \end{cases}$$

definisce un fascio $f^* \mathcal{S} \xrightarrow{\varpi} Y$ di base Y .

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo dimostrare che ϖ è un omeomorfismo locale. Fissiamo un punto $(q_0, \xi_0) \in f^* \mathcal{S}$. Poiché \mathcal{S} è un fascio, esistono un intorno aperto A di ξ_0 in \mathcal{S} ed un intorno aperto U di $p_0 = f(q_0)$ in X tali che la restrizione $\pi|_A : A \rightarrow U$ sia un omeomorfismo. Poiché f è continua, possiamo trovare un intorno aperto V di q_0 in Y con $f(V) \subset U$. Allora $D = (V \times A) \cap f^* \mathcal{S}$ è un aperto di $f^* \mathcal{S}$ e l'applicazione

$$V \ni q \rightarrow (q, \pi|_A^{-1}(f(q))) \in D$$

è un'applicazione continua che inverte la $\varpi|_D : D \ni (q, \xi) \rightarrow q \in V \subset Y$. La dimostrazione è completa. \square

Definizione XVIII.1.7. Il fascio $f^* \mathcal{S} \xrightarrow{\varpi} Y$ definito nel Lemma XVIII.1.6 si dice il *fascio immagine inversa* di $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ mediante $f \in \mathcal{C}(Y, X)$.

Definizione XVIII.1.8. Un sottospazio \mathcal{T} di \mathcal{S} definisce un *sottofascio* di $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ se $\mathcal{T} \xrightarrow{\pi} X$ è ancora un fascio su X .

Lemma XVIII.1.9. Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio su X . Condizione necessaria e sufficiente affinché un sottospazio \mathcal{T} di \mathcal{S} sia lo spazio totale di un sottofascio di $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ è che \mathcal{T} sia un sottospazio aperto di \mathcal{S} . \square

Definizione XVIII.1.10. Se $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ ed $\mathcal{S}' \xrightarrow{\pi'} X$ sono due fasci su X , il loro *prodotto fibrato*, o *somma di Whitney*, è il fascio d'insiemi su X che ha come spazio totale

$$(18.1.2) \quad \mathcal{S} \oplus_X \mathcal{S}' = \{(\xi, \xi') \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}' \mid \pi(\xi) = \pi(\xi')\},$$

con proiezione definita da

$$(18.1.3) \quad \varpi : \mathcal{S} \oplus_X \mathcal{S}' \ni (\xi, \xi') \rightarrow \pi(\xi) = \pi'(\xi') \in X.$$

Osserviamo che $\varpi(\mathcal{S} \oplus_X \mathcal{S}') = \pi(\mathcal{S}) \cap \pi'(\mathcal{S}')$.

Questa definizione si estende ad un qualsiasi numero finito di fasci d'insiemi su X . In particolare, indicheremo con \mathcal{S}^p la somma di Whitney di p copie del fascio \mathcal{S} :

$$\mathcal{S}^p = \underbrace{\mathcal{S} \oplus_X \cdots \oplus_X \mathcal{S}}_{p \text{ volte}}.$$

Definizione XVIII.1.11. Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio d'insiemi su X ed Y un sottospazio di X .

Una *sezione continua* di \mathcal{S} su Y è un'applicazione $s \in \mathcal{C}(Y, \mathcal{S})$ tale che

$$\pi \circ s = \text{id}_Y.$$

Indicheremo con $\mathcal{S}(Y)$, l'insieme di tutte le sezioni continue su $Y \subset X$ del fascio \mathcal{S} .

Se $s \in \mathcal{S}(Y)$ ed $y \in Y$, il valore di s in y si indica con s_y , od $s_{(y)}$, e si dice il *germe* di s in y .

Proposizione XVIII.1.12. Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio d'insiemi su X .

- (1) Se U è un aperto di X , ogni $s \in \mathcal{S}(U)$ definisce un omeomorfismo di U su un aperto $s(U)$ di \mathcal{S} .
- (2) La famiglia di aperti $\{s(U) \mid U^{\text{aperto}} \subset X, s \in \mathcal{S}(U)\}$ è una base della topologia di \mathcal{S} .
- (3) Per ogni $\xi \in \mathcal{S}$ esiste un intorno aperto U di $\pi(\xi)$ in X ed una $s \in \mathcal{S}(U)$ tale che $\xi = s_{(\pi(\xi))}$.
- (4) Se $Y \subset X$ ed $s, s' \in \mathcal{S}(Y)$, allora l'insieme

$$(18.1.4) \quad \{y \in Y \mid s_y = s'_y\}$$

è un aperto di Y . □

Definizione XVIII.1.13. Un fascio d'insiemi $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ si dice di Hausdorff se il suo spazio totale \mathcal{S} è di Hausdorff.

Proposizione XVIII.1.14 (Principio di continuazione analitica). Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio di Hausdorff. Se $Y \subset X$, $s, s' \in \mathcal{S}(Y)$ ed $s_{(y_0)} = s'_{(y_0)}$ in un punto $y_0 \in Y$, allora $s_y = s'_y$ per ogni punto y della componente connessa di y_0 in Y .

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio di Hausdorff, l'insieme dei punti in cui i germi di due sezioni in $\mathcal{S}(Y)$ coincidono è aperto e chiuso in Y . □

XVIII.2. Prefasci d'insiemi

Definizione XVIII.2.1. Sia X uno spazio topologico. Un *prefascio d'insiemi* su X è un funtore controvariante \mathbb{S} tra la categoria $\text{Ap}(X)$ degli aperti di X , con i morfismi d'inclusione, e la categoria \mathfrak{C} degli insiemi, con i morfismi di applicazioni tra insiemi.

Questo significa assegnare una corrispondenza

$$(18.2.1) \quad \mathbb{S} : \text{Ap}(X) \ni U \longrightarrow \mathbb{S}(U) \in \mathfrak{C},$$

e per ogni coppia di aperti $U \subset V$ di X un'applicazione di restrizione $\rho_U^V : \mathbb{S}(V) \rightarrow \mathbb{S}(U)$ tale che

$$(18.2.2) \quad \begin{cases} \rho_U^U = \text{id}_{\mathbb{S}(U)}, & \forall U \in \text{Ap}(X), \\ \rho_U^V \circ \rho_V^W = \rho_U^W, & \forall U, V, W \in \text{Ap}(X) \text{ con } U \subset V \subset W. \end{cases}$$

Indicheremo il prefascio (X, \mathbb{S}, ρ) con la sola lettera \mathbb{S} , ove ciò non provochi confusione.

Definizione XVIII.2.2. Siano (X, \mathbb{S}, ρ) ed (X, \mathbb{S}', ρ') due prefasci d'insiemi sullo stesso spazio topologico X . Un morfismo di prefasci $\Phi : (X, \mathbb{S}, \rho) \rightarrow (X, \mathbb{S}', \rho')$ è il

dato, per ogni aperto U di X , di un'applicazione $\Phi_U : \mathbb{S}(U) \rightarrow \mathbb{S}'(U)$, tale che, per ogni coppia di aperti $U \subset V \subset X$ vi sia un diagramma commutativo

$$(18.2.3) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{S}(V) & \xrightarrow{\Phi_V} & \mathbb{S}'(V) \\ \rho_U^V \downarrow & & \downarrow \rho_U^{\mathbb{S}'(V)} \\ \mathbb{S}(U) & \xrightarrow{\Phi_U} & \mathbb{S}'(U). \end{array}$$

Lemma XVIII.2.3. Se $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ è un fascio d'insiemi su X , allora la corrispondenza

$$(18.2.4) \quad \text{Ap}(X) \ni U \longrightarrow \mathcal{S}(U)$$

è un prefascio d'insiemi su X . □

Definizione XVIII.2.4. Il prefascio $U \rightarrow \mathcal{S}(U)$ si dice *associato* al fascio $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$. Lo indicheremo con $\Gamma\mathcal{S}$.

Esempio XVIII.2.5. Siano X, Y due spazi topologici. Associamo ad ogni aperto U di X lo spazio $\mathcal{C}(U, Y)$ delle applicazioni continue di U in Y . Con le applicazioni naturali di restrizione, questo si dice il *prefascio delle applicazioni continue di X in Y* .

Esempio XVIII.2.6. Siano M, N due varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^ω e k un ordinale con $0 \leq k \leq \omega$. Facciamo corrispondere ad ogni aperto $U \subset M$ l'insieme $\mathcal{C}^k(U, N)$ delle applicazioni di classe \mathcal{C}^k da U in N . Con le restrizioni naturali, otteniamo il *prefascio delle applicazioni di classe \mathcal{C}^k di M in N* .

Esempio XVIII.2.7. Se M ed N sono varietà complesse, indichiamo con $\mathcal{O}(M, N)$, per ogni aperto U di M , l'insieme delle applicazioni olomorfe di U in N . Con le restrizioni naturali, questo è il *prefascio delle applicazioni olomorfe di M in N* .

Esempio XVIII.2.8. Sia X uno spazio topologico ed Y un insieme. Se poniamo $\mathcal{S}(U) = Y$ per ogni aperto U di X e $\rho_U^V = \text{id}_Y$ per ogni coppia di aperti $U \subset V$ di X , otteniamo il *prefascio delle applicazioni costanti di X in Y* .

XVIII.3. Fascio associato ad un prefascio e prefasci canonici

Dato un prefascio (X, \mathbb{S}, ρ) possiamo definire, per ogni punto $p \in X$, il limite diretto

$$(18.3.1) \quad \underline{\mathbb{S}}_p = \lim_{\longrightarrow U \text{ aperto } \ni p} \mathbb{S}(U).$$

Esso è definito come il quoziente dell'unione disgiunta $\bigsqcup_{U \text{ aperto } \ni p} \mathbb{S}(U)$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$\mathbb{S}(U_1) \ni s_1 \sim s_2 \in \mathbb{S}(U_2) \iff \exists p \in U_3^{\text{aperto}} \subset U_1 \cap U_2 \text{ tale che } r_{U_3}^{U_1}(s_1) = r_{U_3}^{U_2}(s_2).$$

Definizione XVIII.3.1. Chiamiamo $\underline{\mathbb{S}}_p$ l'insieme, o la *spiga*, dei *germi* di sezioni di \mathbb{S} in p .

Se U è un aperto di X , $p \in U$ ed $s \in \mathbb{S}(U)$, indichiamo con $s_{(p)} = \rho_p^U(s)$ il *germe definito da s in p* .

Dato un prefascio (X, \mathbb{S}, ρ) , siano

$$(18.3.2) \quad \underline{\mathbb{S}} = \bigsqcup_{p \in X} \underline{\mathbb{S}}_p, \quad \pi : \underline{\mathbb{S}} \longrightarrow X \text{ con } \pi(\underline{\mathbb{S}}_p) = \{p\}.$$

Proposizione XVIII.3.2. *Sia (X, \mathbb{S}, ρ) è un prefascio, ed $\underline{\mathbb{S}} \xrightarrow{\pi} X$ sia definita dalla (18.3.2). Consideriamo su $\underline{\mathbb{S}}$ la topologia che ha come base degli aperti gli*

$$A(U, s) = \{s_{(p)} \mid p \in U\}, \quad \text{con } U \in \text{Ap}(X), s \in \mathbb{S}(U).$$

Allora $\underline{\mathbb{S}} \xrightarrow{\pi} X$ è un fascio d'insiemi su X . □

Definizione XVIII.3.3. Il fascio $\underline{\mathbb{S}} \xrightarrow{\pi} X$ definito dalla (18.3.2) si dice *associato al prefascio (X, \mathbb{S}, ρ)* .

Se $\underline{\mathbb{S}}$ è il fascio associato al prefascio \mathbb{S} , abbiamo un morfismo canonico di prefasci

$$(18.3.3) \quad \Phi_U : \mathbb{S}(U) \longrightarrow \underline{\mathbb{S}}(U)$$

che fa corrispondere ad $s \in \mathbb{S}(U)$ la sezione $U \ni p \longrightarrow s_{(p)} \in \underline{\mathbb{S}}_p \subset \underline{\mathbb{S}}$.

Osservazione XVIII.3.4. Non è detto, in generale, che questo morfismo sia iniettivo o surgettivo.

Ad esempio, se \mathbb{S} è il prefascio delle applicazioni costanti di X in un insieme Y con almeno due elementi, ed X contiene un aperto U non connesso, allora Φ_U è iniettiva, ma non surgettiva. Infatti $\underline{\mathbb{S}}$ è in questo caso il prefascio delle applicazioni *localmente* costanti di X in Y e quindi $\underline{\mathbb{S}}(U)$ contiene applicazioni non costanti, mentre $\mathbb{S}(U)$ consiste delle sole applicazioni costanti.

Per costruire un esempio in cui Φ non sia iniettiva, consideriamo uno spazio X che contenga almeno due punti ed in cui i punti siano chiusi e fissiamo una coppia d'insiemi Y, Z con $Y \subsetneq Z$. Fissato un elemento $y_0 \in Y$, poniamo

$$\mathbb{S}(U) = \begin{cases} Z & \text{se } U = X, \\ Y & \text{se } U^{\text{aperto}} \subsetneq X, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_U^X(z) = y_0 & \forall z \in Z, \quad \forall U^{\text{aperto}} \subsetneq X, \\ \rho_U^Y(y) = y & \forall y \in Y, \quad \forall U^{\text{aperto}} \subsetneq V^{\text{aperto}} \subsetneq X. \end{cases}$$

Il fascio associato è il fascio costante $X \times Y \xrightarrow{\pi_X} X$. La $\Phi_X : \mathbb{S}(X) \rightarrow \underline{\mathbb{S}}(X)$ non è iniettiva perché associa ad ogni elemento di $\mathbb{S}(X) = Z$ la sezione costante $s_{(p)} = y_0$ per ogni $p \in X$.

Definizione XVIII.3.5. Un prefascio (X, \mathbb{S}, ρ) si dice *canonico* se, per ogni aperto U di X , la $\Phi_U : \mathbb{S}(U) \rightarrow \underline{\mathbb{S}}(U)$ è bigettiva.

Proposizione XVIII.3.6. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un prefascio (X, \mathbb{S}, ρ) sia canonico è che valgano le due proprietà:*

- (S1) *Se $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ è una qualsiasi famiglia di aperti di X , $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, ed $s, s' \in \mathbb{S}(U)$ soddisfano $r_{U_i}^U(s) = r_{U_i}^U(s')$ per ogni $i \in I$, allora $s = s'$;*
- (S2) *Se $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ è una qualsiasi famiglia di aperti di X , $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, per ogni famiglia di $s_i \in \mathbb{S}(U_i)$, che soddisfino $r_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = r_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$ per ogni $i, j \in I$, esiste un $s \in \mathbb{S}(U)$ tale che $r_{U_i}^U(s) = s_i$ per ogni $i \in I$.*

DIMOSTRAZIONE. *Le condizioni (S1) ed (S2) sono necessarie.* Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia di aperti di X , $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ e supponiamo che $s, s' \in \mathbb{S}(U)$ soddisfino $r_{U_i}^U(s) = r_{U_i}^U(s')$ per ogni $i \in I$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} (\Phi_U(s))|_{U_i} &= \Phi_{U_i}(r_{U_i}^U(s)) = \Phi_{U_i}(r_{U_i}^U(s')) = (\Phi_U(s'))|_{U_i}, \quad \forall i \in I \\ &\implies (\Phi_U(s)) = (\Phi_U(s')) \end{aligned}$$

e questo implica che $s = s'$, perché Φ_U è, per ipotesi, iniettiva.

Supponiamo ora che siano assegnate $s_i \in \mathbb{S}(U_i)$, per $i \in I$, e che queste soddisfino $r_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = r_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$ per ogni $i, j \in I$. Le $\Phi_{U_i}(s_i)$ soddisfano allora

$$\Phi_{U_i}(s_i)|_{U_i \cap U_j} = \Phi_{U_i \cap U_j}(r_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i)) = \Phi_{U_i \cap U_j}(r_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)) = \Phi_{U_j}(s_j)|_{U_i \cap U_j}, \quad \forall i, j \in I.$$

Esiste quindi un'unica sezione globale $\sigma \in \underline{\mathbb{S}}(U)$ tale che $\Phi_{U_i}(s_i) = \sigma|_{U_i}$ per ogni $i \in I$. Poiché ϕ_U è surgettiva, $\sigma = \Phi_U(s)$ per una $s \in \mathbb{S}(U)$. Da

$$\Phi_{U_i}(r_{U_i}^U(s)) = \Phi_U(s)|_{U_i} = \sigma|_{U_i} = \Phi_{U_i}(s_i), \quad \forall i \in I$$

otteniamo che $r_{U_i}^U(s) = s_i$, per l'iniettività delle Φ_{U_i} .

Le condizioni (S1) ed (S2) sono sufficienti. Sia U un qualsiasi aperto di X . Se $s, s' \in \mathbb{S}(U)$ e $\Phi_U(s) = \Phi_U(s')$, allora $s_{(p)} = s'_{(p)}$ per ogni $p \in U$. Ciò significa che per ogni $p \in U$ esiste un intorno aperto U_p di p in U tale che $r_{U_p}^U(s) = r_{U_p}^U(s')$. Per la condizione (S1) questo implica che $s = s'$. Quindi $\Phi_U : \mathbb{S}(U) \rightarrow \underline{\mathbb{S}}(U)$ è iniettiva.

Sia ora $\sigma \in \underline{\mathbb{S}}(U)$. Per ogni punto $p \in U$ esistono un intorno aperto U_p di p in U ed una $s_p \in \mathbb{S}(U_p)$ tali che $\Phi_{U_p}(s_p) = \sigma|_{U_p}$. Abbiamo poi

$$\Phi_{U_{p_1} \cap U_{p_2}}(r_{U_{p_1} \cap U_{p_2}}^{U_{p_1}}(s_{p_1})) = \sigma|_{U_{p_1} \cap U_{p_2}} = \Phi_{U_{p_1} \cap U_{p_2}}(r_{U_{p_1} \cap U_{p_2}}^{U_{p_2}}(s_{p_2})).$$

Abbiamo già dimostrato che le $\Phi_{U_{p_1} \cap U_{p_2}}$ sono iniettive. Quindi

$$r_{U_{p_1} \cap U_{p_2}}^{U_{p_1}}(s_{p_1}) = r_{U_{p_1} \cap U_{p_2}}^{U_{p_2}}(s_{p_2}), \quad \forall p_1, p_2 \in U.$$

Per (S2) esiste allora una $s \in \mathbb{S}(U)$ tale che $r_{U_p}^U(s) = s_p$ per ogni $p \in U$. Abbiamo allora $\Phi_U(s) = \sigma$. Abbiamo così dimostrato anche la surgettività di Φ_U . La dimostrazione è completa. \square

Corollario XVIII.3.7. *Il prefascio $\Gamma\mathcal{S}$ associato ad un fascio \mathcal{S} su X è sempre canonico.*

XVIII.4. Il fascio immagine diretta

Se (X, \mathbb{S}, ρ) è un prefascio sullo spazio topologico X , Y è un altro spazio topologico ed $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua, definiamo un prefascio su Y ponendo

$$(18.4.1) \quad f_*\mathbb{S}(V) = \mathbb{S}(f^{-1}(V)), \quad \forall V \in \text{Ap}(Y),$$

$$(18.4.2) \quad (f_*\rho)_{V_1}^{V_2}(s) = \rho_{f^{-1}(V_1)}^{f^{-1}(V_2)}(s) \text{ se } V_1, V_2 \in \text{Ap}(Y), V_1 \subset V_2, s \in f_*\mathbb{S}(V_2).$$

Definizione XVIII.4.1. Il prefascio $(Y, f_*\mathbb{S}, f_*\rho)$ si dice *immagine diretta* di (X, \mathbb{S}, ρ) mediante l'applicazione continua f .

Proposizione XVIII.4.2. *L'immagine diretta di un fascio canonico è un fascio canonico.* \square

Definizione XVIII.4.3. Se \mathcal{S} è un fascio sullo spazio topologico X ed $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua a valori in uno spazio topologico Y , il fascio $f_*\Gamma\mathcal{S}$ si indica con $f_*\mathcal{S}$ e si dice *immagine diretta* del fascio \mathcal{S} mediante l'applicazione continua f .

Osservazione XVIII.4.4. Un germe $\tau_{(q)}$ nel fascio immagine diretta $f_*\mathcal{S}$ è definito da una sezione $s \in \mathcal{S}(f^{-1}(V))$ per un intorno aperto V di q in Y . In particolare, per ogni $p \in f^{-1}(q)$ vi è un germe $s_{(p)}$ di \mathcal{S} in p che corrisponde a τ_q . In particolare, abbiamo un'inclusione naturale $(f_*\mathcal{S})_{q_0} \hookrightarrow \bigsqcup_{p \in f^{-1}(q_0)} \mathcal{S}_p$ e, per ogni $p_0 \in f^{-1}(q_0)$, la f definisce un'applicazione naturale di germi

$$\hat{f}_{p_0} : (f_*\mathcal{S})_{q_0} \longrightarrow \mathcal{S}_{p_0}$$

che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} (f_*\mathcal{S})_{q_0} & \xrightarrow{\hat{f}_{p_0}} & \mathcal{S}_{p_0} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \bigsqcup_{p \in f^{-1}(q_0)} \mathcal{S}_p & \end{array}$$

in cui la freccia a destra è l'inclusione naturale $\mathcal{S}_{p_0} \hookrightarrow \bigsqcup_{p \in f^{-1}(q_0)} \mathcal{S}_p$.

Proposizione XVIII.4.5. *Siano $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ due fasci sulla stessa base X , $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ un morfismo di fasci. Siano poi Y, Z spazi topologici ed $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ applicazioni continue. Allora:*

(1) *Risulta definito un morfismo di fasci*

$$(18.4.3) \quad f_*\Phi : f_*\mathcal{S} \longrightarrow f_*\mathcal{S}',$$

in modo tale che

$$(18.4.4) \quad f_*\Phi(f_*\mathcal{S})(V) = (\Phi(\mathcal{S}))(f^{-1}(V)) = (f_*\mathcal{S}')(V), \quad \forall V \in \text{Ap}(Y).$$

(2) *Abbiamo*

$$(18.4.5) \quad (g \circ f)_*\mathcal{S} = g_*(f_*\mathcal{S}).$$

(3) *Abbiamo*

$$(18.4.6) \quad (g \circ f)_*\Phi = g_*(f_*\Phi).$$

XVIII.5. Fasci dotati di struttura algebrica

Definizione XVIII.5.1. Un *fascio di gruppi abeliani* è un fascio d'insiemi $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$, su ogni spiga \mathcal{S}_x del quale sia assegnata una struttura di gruppo abeliano, in modo tale che la:

$$(18.5.1) \quad \mathcal{S} \oplus_X \mathcal{S} \ni (\xi_1, \xi_2) \rightarrow \xi_1 - \xi_2 \in \mathcal{S}$$

sia un morfismo di fasci (basta cioè che sia un'applicazione continua tra gli spazi étalé).

Indichiamo con $0_{(p)}$ l'elemento neutro di \mathcal{S}_p e con $0 : X \rightarrow \mathcal{S}$ la *sezione nulla*, che associa ad ogni $p \in X$ l'elemento neutro $0_{(p)}$ di \mathcal{S}_p . Chiaramente $0 \in \mathcal{S}(X)$ è una sezione continua.

Osserviamo che le spighe \mathcal{S}_p di un fascio di gruppi abeliani contengono per ogni p l'elemento neutro e quindi sono non vuote.

Per ogni sottospazio Y di X , l'insieme $\mathcal{S}(Y)$ delle sezioni continue di \mathcal{S} su Y è in modo naturale un gruppo abeliano, con l'operazione:

$$(18.5.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{S}(Y) \times \mathcal{S}(Y) \ni (s_1, s_2) &\rightarrow s_1 - s_2 \in \mathcal{S}(Y) \\ \text{ove } (s_1 - s_2)_{(p)} &= s_{1,(p)} - s_{2,(p)} \quad \forall p \in Y. \end{aligned}$$

Definizione XVIII.5.2. Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio di gruppi abeliani, Y un sottospazio di X ed $s \in \mathcal{S}(Y)$. Il *supporto* di s è l'insieme

$$(18.5.3) \quad \text{supp } s = \{p \in Y \mid s_{(p)} \neq 0_{(p)}\}.$$

Osservazione XVIII.5.3. Il supporto di una sezione $s \in \mathcal{S}(Y)$ è un chiuso di Y , perché il luogo dei punti in cui $s_{(p)} = 0_{(p)}$ è aperto.

Definizione XVIII.5.4. Chiamiamo *supporto* del fascio di gruppi abeliani \mathcal{S} l'insieme:

$$(18.5.4) \quad \text{supp } \mathcal{S} = \{x \in X \mid \mathcal{S}_x \neq \{0_{(p)}\}\}.$$

Definizione XVIII.5.5. Un fascio \mathcal{S} di gruppi abeliani su X si dice *un fascio di anelli* se è assegnato un morfismo di fasci:

$$(18.5.5) \quad \mathcal{S} \oplus_X \mathcal{S} \ni (\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow \sigma_1 \sigma_2 \in \mathcal{S}$$

che definisca, su ogni spiga \mathcal{S}_x , insieme alla struttura di gruppo abeliano già assegnata, una struttura di anello.

Supporremo sempre nel seguito che tale anello sia commutativo e unitario e che l'applicazione $1 : X \rightarrow \mathcal{S}$, che associa ad ogni $p \in X$ l'unità $1_{(p)}$ dell'anello \mathcal{S}_p , sia continua.

Proposizione XVIII.5.6. Sia \mathcal{S} un fascio di anelli su X . Allora:

$$(18.5.6) \quad \text{supp } \mathcal{S} = \{x \in X \mid 1_{(p)} \neq 0_{(p)}\}.$$

In particolare, il supporto di un fascio di anelli su X è chiuso.

Definizione XVIII.5.7. Sia \mathcal{A} un fascio di anelli su X . Un *fascio di \mathcal{A} -moduli* su X è un fascio di gruppi abeliani per cui sia definito un morfismo di fasci:

$$(18.5.7) \quad \mathcal{A} \oplus_X \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

che definisca, su ciascuna spiga \mathcal{S}_x , una struttura di \mathcal{A}_x -modulo.

In modo del tutto analogo al caso della categoria dei gruppi abeliani, per ogni aperto U di X le sezioni di $\mathcal{A}(U)$ formano un anello e quelle di $\mathcal{S}(U)$ un $\mathcal{A}(U)$ -modulo.

Se $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$ sono fasci di \mathcal{A} -moduli, anche $\mathcal{S}_1 \oplus_X \dots \oplus_X \mathcal{S}_m$ è un fascio di \mathcal{A} -moduli, e in modo naturale, si può definire anche il fascio di \mathcal{A} -moduli $\mathcal{S}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{S}_m$.

Se $\mathcal{S}_i = \mathcal{A}$ per $i = 1, \dots, m$, scriveremo $\mathcal{S}_1 \oplus_X \dots \oplus_X \mathcal{S}_m = \mathcal{A}^m$.

XVIII.6. Morfismi di \mathcal{A} -moduli e fasci quozienti

Sia \mathcal{A} un fascio di anelli su X , che considereremo fissato una volta per tutte.

Definizione XVIII.6.1. Dati due fasci di \mathcal{A} -moduli $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$, un morfismo di fasci:

$$(18.6.1) \quad \Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$$

si dice un *morfismo di \mathcal{A} -moduli* se, per ogni $x \in X$, l'applicazione tra le spighe:

$$(18.6.2) \quad \Phi_x : \mathcal{S}_x \rightarrow \mathcal{S}'_x$$

è un morfismo di \mathcal{A}_x -moduli.

Gli \mathcal{A} -moduli, con i morfismi di \mathcal{A} -moduli, formano una *categoria*.

Definizione XVIII.6.2. Un sottofascio \mathcal{I} di \mathcal{A} si dice un *fascio di ideali* se, per ogni $x \in X$, l'insieme dei germi \mathcal{I}_x è un ideale di \mathcal{A}_x . Un sottofascio \mathcal{T} di un fascio di \mathcal{A} -moduli \mathcal{S} è un fascio di sotto- \mathcal{A} -moduli di \mathcal{S} se, per ogni $x \in X$, \mathcal{T}_x è un sotto- \mathcal{A}_x -modulo di \mathcal{S}_x .

Proposizione XVIII.6.3. (1) Se $\mathcal{S}', \mathcal{S}''$ sono due fasci di sotto- \mathcal{A} -moduli del fascio di \mathcal{A} -moduli \mathcal{S} , allora anche:

$$(18.6.3) \quad \mathcal{S}' + \mathcal{S}'' = \bigsqcup_{x \in X} (\mathcal{S}'_x + \mathcal{S}''_x) \quad \text{ed} \quad \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}'' = \bigsqcup_{x \in X} (\mathcal{S}'_x \cap \mathcal{S}''_x)$$

sono fasci di sotto- \mathcal{A} -moduli di \mathcal{S} .

(2) Se (18.6.1) è un morfismo di fasci di \mathcal{A} -moduli, allora:

$$(18.6.4) \quad \ker \Phi = \bigsqcup_{x \in X} \ker \Phi_x \quad \text{è un sotto- \mathcal{A} -modulo di } \mathcal{S},$$

$$(18.6.5) \quad \text{Imm } \Phi = \bigsqcup_{x \in X} \text{Imm } \Phi_x \quad \text{è un sotto- \mathcal{A} -modulo di } \mathcal{S}'. \quad \square$$

Le usuali nozioni di monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo si estendono in modo ovvio ai fasci di \mathcal{A} -moduli.

Definizione XVIII.6.4. Una sequenza di \mathcal{A} -moduli e di \mathcal{A} -morfismi:

$$(18.6.6) \quad \cdots \longrightarrow \mathcal{S}_{h-1} \xrightarrow{\phi_{h-1}} \mathcal{S}_h \xrightarrow{\phi_h} \mathcal{S}_{h+1} \longrightarrow \cdots$$

$$(-\infty \leq a < h < b \leq +\infty),$$

si dice una \mathcal{A} -*successione*. Diciamo che (18.6.6) è un *complesso* se:

$$(18.6.7) \quad \text{Imm } \Phi_{h-1} \subset \ker \Phi_h \quad \forall a < h-1 < h < b$$

Diciamo che (18.6.6) è *esatta* in \mathcal{S}_h se:

$$(18.6.8) \quad \text{Imm } \Phi_{h-1} = \ker \Phi_h.$$

Diciamo che (18.6.6) è *esatta*, o *aciclica* se è esatta per ogni h con $a < h-1 < h < b$.

Una \mathcal{A} -*successione esatta corta* è una \mathcal{A} successione esatta della forma:

$$(18.6.9) \quad \underline{0} \longrightarrow \mathcal{S}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S} \xrightarrow{\beta} \mathcal{S}'' \longrightarrow \underline{0},$$

dove abbiamo indicato con $\underline{0}$ il fascio di \mathcal{A} -moduli in cui per ogni $x \in X$ la spiga in x è l' \mathcal{A}_x -modulo nullo.

Osservazione XVIII.6.5. Se (18.6.1) è un morfismo di \mathcal{A} -moduli, allora:

$$(18.6.10) \quad \underline{0} \longrightarrow \ker \Phi \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \text{Imm } \Phi \longrightarrow \underline{0}$$

è una \mathcal{A} -successione esatta corta.

Definizione XVIII.6.6. Se \mathcal{S}' è un sotto- \mathcal{A} -modulo di \mathcal{S} , definiamo l' \mathcal{A} -modulo quoziente \mathcal{S}/\mathcal{S}' ponendo:

$$(18.6.11) \quad \mathcal{S}/\mathcal{S}' = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{S}_x/\mathcal{S}'_x,$$

ove su ogni spiga $\mathcal{S}_x/\mathcal{S}'_x$ si considera la struttura di \mathcal{A}_x -modulo quoziente.

In particolare, se \mathcal{I} è un fascio di ideali di \mathcal{A} , il fascio quoziente \mathcal{A}/\mathcal{I} è un fascio di anelli su X .

La proiezione naturale definisce un morfismo di \mathcal{A} -moduli:

$$(18.6.12) \quad \pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/\mathcal{S}'$$

ed otteniamo una \mathcal{A} -successione esatta corta:

$$(18.6.13) \quad \underline{0} \longrightarrow \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{\pi} \mathcal{S}/\mathcal{S}' \longrightarrow \underline{0}.$$

Proposizione XVIII.6.7. Il funtore $\Gamma(U, \cdot)$ è esatto a sinistra: cioè, per ogni aperto U di X ed ogni successione esatta corta (18.6.10) otteniamo una successione esatta:

$$(18.6.14) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S}'(U) \longrightarrow \mathcal{S}(U) \longrightarrow \mathcal{S}''(U).$$

Osservazione XVIII.6.8. Il funtore $\Gamma(U, \cdot)$ non è, in generale, esatto a destra: questo significa che l'ultima applicazione in (18.6.14) non è necessariamente surgettiva.

Definizione XVIII.6.9. Dato un morfismo (18.6.1), il fascio quoziente $\mathcal{S}'/\text{Imm } \Phi$ si indica anche con $\text{coker } \Phi$. Abbiamo naturalmente una \mathcal{A} -successione esatta corta:

$$(18.6.15) \quad \underline{0} \longrightarrow \text{Imm } \Phi \longrightarrow \mathcal{S}' \longrightarrow \text{coker } \Phi \longrightarrow \underline{0}.$$

Scriveremo nel seguito, per semplicità, 0 invece di $\underline{0}$ per indicare il fascio nullo di \mathcal{A} -moduli.

XVIII.7. Coomologia di Čech con coefficienti in un fascio

Siano X uno spazio topologico ed \mathcal{S} un fascio di gruppi abeliani su X .

Fissiamo un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X . Per ogni intero $q \geq 0$, fissati $i_0, i_1, \dots, i_q \in I$ denotiamo con U_{i_0, i_1, \dots, i_q} l'intersezione $= U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_q}$. Indichiamo con $\mathcal{N}_q(\mathcal{U})$ l'insieme delle $(q+1)$ -uple di indici distinti di I tali che $U_{i_0, i_1, \dots, i_q} \neq \emptyset$.

Definizione XVIII.7.1. Sia $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ il gruppo abeliano delle q -cocatene alterne di \mathcal{U} con coefficienti in \mathcal{S} : esso consiste di tutte le

$$(f_{i_0, i_1, \dots, i_q}) \in \prod_{(i_0, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U})} \mathcal{S}(U_{i_0, i_1, \dots, i_q})$$

che soddisfano¹:

$$f_{i_{\sigma_0}, i_{\sigma_1}, \dots, i_{\sigma_q}} = \varepsilon(\sigma) f_{i_0, i_1, \dots, i_q} \quad \forall \sigma \in \mathbf{S}_{q+1}.$$

Indichiamo con $\delta_q^{\mathcal{U}} = \delta_q = \delta$ l'applicazione:

$$(18.7.1) \quad \delta_q : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \ni (f_{i_0, i_1, \dots, i_q}) \longrightarrow ((\delta f)_{i_0, i_1, \dots, i_{q+1}}) \in \mathcal{C}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$$

definita da:

$$(18.7.2) \quad (\delta f)_{i_0, i_1, \dots, i_{q+1}} = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1}}|_{U_{i_0, i_1, \dots, i_{q+1}}}.$$

Le q -cocatene $f \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ che soddisfano $\delta(f) = 0$ si dicono q -cocicli; quelle della forma $\delta_{q-1}(\phi)$, con $\phi \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, si dicono q -cobordi.

Indicheremo con $\mathcal{Z}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ il gruppo dei q -cocicli e con $\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ il gruppo dei q -cobordi.

Lemma XVIII.7.2. Per ogni $q \geq 0$ risulta $\delta_{q+1} \circ \delta_q = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Se $f = (f_{i_0, \dots, i_q}) \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, abbiamo:

$$\begin{aligned} (\delta_{q+1} \circ \delta_q f)_{i_0, \dots, i_{q+2}} &= \sum_{j=0}^{q+2} (-1)^j (\delta_q f)_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1}}|_{U_{i_0, \dots, i_{q+2}}} \\ &= \sum_{j=0}^{q+2} \sum_{h=0}^{j-1} (-1)^{j+h} f_{i_0, \dots, \hat{i}_h, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1}}|_{U_{i_0, \dots, i_{q+2}}} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{q+2} \sum_{h=j+1}^{q+1} (-1)^{j+h} f_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, \hat{i}_h, \dots, i_{q+1}}|_{U_{i_0, \dots, i_{q+2}}} \\ &= \sum_{0 \leq j < h \leq q+1} f_{i_0, \dots, \hat{i}_h, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1}}|_{U_{i_0, \dots, i_{q+2}}} \end{aligned}$$

¹Abbiamo indicato con \mathbf{S}_{q+1} il gruppo delle permutazioni dei $(q+1)$ elementi $\{0, 1, \dots, q\}$. Se $\sigma \in \mathbf{S}_{q+1}$, il simbolo $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ indica la sua segnatura.

$$\begin{aligned}
& - \sum_{0 \leq h < j \leq q+1} f_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, \hat{i}_h, \dots, i_{q+1}} |_{U_{i_0, \dots, i_{q+2}}} \\
& = 0
\end{aligned}$$

□

Quindi, per ogni intero non negativo q , il gruppo $\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ dei q -cobordi è un sottogruppo del gruppo $\mathcal{Z}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ dei q -cocicli.

La successione dei gruppi delle cocatene e degli omomorfismi $\delta_q = \delta_q^{\mathcal{U}}$ che li legano formano un *complesso*² di gruppi abeliani e di omomorfismi:

(18.7.3)

$$\begin{aligned}
0 & \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow \dots \\
\dots & \rightarrow \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\delta_{q-1}} \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\delta_q} \mathcal{C}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow \dots
\end{aligned}$$

Definizione XVIII.7.3. Indichiamo con δ_{-1} l'applicazione nulla $0 = \mathcal{C}^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{S})$. Con questa convenzione, definiamo per ogni intero $q \geq 0$ il q -esimo gruppo di coomologia di Čech a coefficienti in \mathcal{S} del ricoprimento \mathcal{U} come il quoziente:

$$(18.7.4) \quad \mathbf{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) = \frac{\ker \delta_q}{\operatorname{im} \delta_{q-1}} = \frac{\mathcal{Z}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})}{\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})}.$$

Osserviamo che, poiché \mathcal{S} è un fascio, $\mathbf{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \simeq \mathcal{Z}^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \simeq \mathcal{S}(X)$. Infatti gli elementi (f_i) di $\mathcal{Z}^0(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ sono tutti e soli quelli della forma $f_i = f|_{U_i}$ per una $f \in \mathcal{S}(X)$ e la f è univocamente determinata dalle sue restrizioni agli aperti U_i del ricoprimento.

Un *raffinamento* del ricoprimento aperto \mathcal{U} è il dato di un altro ricoprimento aperto $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ e di una *funzione di raffinamento* $\tau : J \rightarrow I$, tale che $V_j \subset U_{\tau_j}$ per ogni $j \in J$.

Scriveremo $\mathcal{V} <_{\tau} \mathcal{U}$ per indicare che \mathcal{V} è un raffinamento di \mathcal{U} con funzione di raffinamento τ .

Se $\mathcal{V} <_{\tau} \mathcal{U}$, la τ induce un omomorfismo dei cocicli alternati a coefficienti in \mathcal{S} dei due ricoprimenti:

$$\begin{aligned}
\tau^* & = \tau_q^* : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}), \quad \text{definita da} \\
(\tau^* f)_{j_0, \dots, j_q} & = f_{j_0, \dots, j_q} |_{V_{j_0, \dots, j_q}} \quad \forall (j_0, \dots, j_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{V}).
\end{aligned}$$

Abbiamo:

$$(18.7.5) \quad \delta_q^{\mathcal{V}} \circ \tau_q^* = \tau_{q+1}^* \circ \delta_q^{\mathcal{U}} \quad \text{per ogni } q = 0, 1, \dots$$

Valgono dunque le inclusioni

$$\tau_q^*(\mathcal{Z}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})) \subset \mathcal{Z}^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}) \quad \text{e} \quad \tau_q^*(\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})) \subset \mathcal{B}^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}).$$

Per passaggio ai quozienti, otteniamo un omomorfismo

$$(18.7.6) \quad \hat{\tau}_q^* : \mathbf{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathbf{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}) \quad \text{per ogni } q = 0, 1, \dots$$

²La parola *complesso* significa che il nucleo di ciascun omomorfismo contiene l'immagine del precedente.

Definizione XVIII.7.4. Il q -esimo gruppo $H^q(X, \mathcal{S})$ della coomologia di Čech di X a coefficienti nel fascio \mathcal{S} è il limite induttivo, rispetto ai raffinamenti, dei gruppi $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ al variare di \mathcal{U} nella famiglia dei ricoprimenti aperti di X :

$$(18.7.7) \quad \check{H}^q(X, \mathcal{S}) = \operatorname{inj} \lim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \quad \text{per ogni } q = 0, 1, \dots$$

Una classe di coomologia in $\check{H}^q(X, \mathcal{S})$ è rappresentata da un q -cociclo $f \in \mathcal{L}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, modulo la relazione di equivalenza che identifica f a $\tau_q^*(f) + \delta_{q-1}^{\mathcal{V}}(g)$ se $\mathcal{V} <_{\tau} \mathcal{U}$ e $g \in \mathcal{L}^{q-1}(\mathcal{V}, \mathcal{S})$.

Possiamo definire i gruppi di coomologia di Čech anche come gruppi di coomologia di un complesso di cocatene. A questo scopo definiamo, per ogni intero $q \geq 0$, il gruppo abeliano $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{S})$ delle q -cocatene in X a coefficienti nel fascio di gruppi abeliani \mathcal{S} come il limite induttivo rispetto ai ricoprimenti aperti e ai raffinamenti:

$$(18.7.8) \quad \mathcal{C}^q(X, \mathcal{S}) = \operatorname{inj} \lim_{\mathcal{U}} \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$$

Per definizione di limite induttivo, un elemento di $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{S})$ è rappresentato da una $f = (f_{i_0, i_1, \dots, i_q}) \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ e due q -cocicli $f^h = (f_{i_0, i_1, \dots, i_q}^h) \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}^h, \mathcal{S})$ ($h = 1, 2$) definiscono lo stesso elemento di $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{S})$ se esiste un raffinamento comune $\mathcal{V} <_{\tau_h} \mathcal{U}^h$ (per $h = 1, 2$) tale che $\tau_1^*(f^1) = \tau_2^*(f^2)$. Poiché l'addizione commuta con le applicazioni indotte dai raffinamenti, gli insiemi $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{S})$ hanno una struttura naturale di gruppi abeliani. Ancora, poiché le applicazioni di cobordo commutano con gli omomorfismi indotti dai raffinamenti, otteniamo un complesso di gruppi abeliani e di omomorfismi:

$$(18.7.9) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{C}^0(X, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta_0^X} & \mathcal{C}^1(X, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta_1^X} & \mathcal{C}^2(X, \mathcal{S}) & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \rightarrow & \mathcal{C}^{q-1}(X, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta_{q-1}^X} & \mathcal{C}^q(X, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta_q^X} & \mathcal{C}^{q+1}(X, \mathcal{S}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Quando ciò non possa creare confusione, scriveremo a volte per semplicità δ_q , o anche δ , invece di δ_q^X .

I sottogruppi

$$\mathcal{Z}^q(X, \mathcal{S}) = \ker \delta_q^X \quad \text{dei } q\text{-cocicli in } \mathcal{C}^q(X, \mathcal{S}) \text{ e}$$

$$\mathcal{B}^q(X, \mathcal{S}) = \delta_{q-1}^X(\mathcal{C}^{q-1}(X, \mathcal{S})) \quad \text{dei } q\text{-cobordi di } \mathcal{C}^q(X, \mathcal{S})$$

sono i limiti induttivi (rispetto alle applicazioni di raffinamento) dei corrispondenti sottogruppi $\mathcal{Z}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ e $\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$. Il q -esimo gruppo di coomologia di Čech è allora dato da:

$$(18.7.10) \quad \check{H}^q(X, \mathcal{S}) = \frac{\ker \delta_q^X}{\operatorname{im} \delta_{q-1}^X} = \frac{\mathcal{Z}^q(X, \mathcal{S})}{\mathcal{B}^q(X, \mathcal{S})}.$$

Siano $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ ed $\mathcal{F} \xrightarrow{\varpi} X$ due fasci di gruppi abeliani sullo spazio topologico X e $\Phi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}$ un omomorfismo di fasci di gruppi abeliani. Per ogni aperto U di X esso definisce un omomorfismo $\Phi_U: \mathcal{S}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$, che ci permette di

costruire, assegnato un ricoprimento \mathcal{U} di X , un omomorfismo naturale tra le q cocatene alternate di \mathcal{U} a coefficienti in \mathcal{S} e in \mathcal{F} :

$$(18.7.11) \quad \begin{cases} \Phi_q : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ (\Phi_q(f))_{i_0, i_1, \dots, i_q} = (\Phi_{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}}(f_{i_0, i_1, \dots, i_q})). \end{cases}$$

Si verifica facilmente che gli omomorfismi Φ_q commutano con le operazioni di cobordo δ_q dei due complessi di cocatene alternate a coefficienti in \mathcal{S} e in \mathcal{F} . Risultano quindi definite applicazioni naturali

$$(18.7.12) \quad \Phi_* = \Phi_{q*} : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

per ogni $q = 0, 1, \dots$. Queste applicazioni a loro volta commutano con gli omomorfismi dei raffinamenti e quindi, finalmente, otteniamo un'applicazione naturale:

$$(18.7.13) \quad \Phi_* = \Phi_{q*} : \check{H}^q(X, \mathcal{S}) \longrightarrow \check{H}^q(X, \mathcal{F})$$

per ogni $q = 0, 1, \dots$

Osserviamo che per passaggio al quoziente otteniamo ancora omomorfismi $\Phi_q : \mathcal{C}^q(X, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^q(X, \mathcal{F})$ che commutano con le operazioni di cobordo e quindi l'omomorfismo Φ_{q*} tra i gruppi di coomologia si può definire anche a partire dagli omomorfismi dei gruppi di cocatene. Abbiamo il diagramma commutativo (a righe esatte):

$$(18.7.14) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}^q(X, \mathcal{S}) & \longrightarrow & \mathcal{L}^q(X, \mathcal{S}) & \longrightarrow & \check{H}^q(X, \mathcal{S}) \longrightarrow 0 \\ & & \Phi_q \downarrow & & \Phi_q \downarrow & & \Phi_q \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}^q(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{L}^q(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{H}^q(X, \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

XVIII.8. Il teorema di Serre

I gruppi di coomologia di Čech hanno buone proprietà rispetto ai morfismi di fasci quando si assuma che lo spazio di base X sia paracompatto.

Ricordiamo che uno spazio topologico X si dice *paracompatto* se è di Hausdorff e se ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento localmente finito. Gli spazi paracompatti sono normali e tutti gli spazi metrizzabili sono paracompatti. Per uno spazio topologico connesso e localmente compatto, la paracompattatezza equivale all'essere unione numerabile di insiemi compatti (numerabile all'infinito).

Se X è paracompatto ed \mathcal{S} un fascio su X , i gruppi di coomologia di Čech $H^q(X, \mathcal{S})$ si possono calcolare utilizzando soltanto ricoprimenti aperti localmente finiti.

Lemma XVIII.8.1. *Sia X uno spazio normale ed $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un suo ricoprimento aperto localmente finito. Possiamo allora trovare un ricoprimento aperto $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ di X tale che $\bar{V}_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$.*

DIMOSTRAZIONE. Bene-ordiniamo l'insieme I^3 . Costruiremo il ricoprimento \mathcal{V} per induzione transfinita, in modo che

- (1) $\bar{V}_i \subset U_i \quad \forall i \in I$,
- (2) $\forall j \in I, \{V_i \mid i \leq j\} \cup \{U_i \mid i > j\}$ è un ricoprimento aperto di X .

Dimostriamo induttivamente la proposizione

- (P_{j_0}) *Gli aperti V_i sono definiti per ogni $i < j_0$ in modo che la (1) valga per $i < j_0$ e che, per ogni $h \in I$ con $h < j_0$, la famiglia di aperti*

$$\{V_i \mid i \leq h\} \cup \{U_i \mid i > h\}$$

sia un ricoprimento aperto di X .

L'affermazione (P_{j_0}) è banalmente vera se j_0 è il minimo di I .

Osserviamo inoltre che, se (P_{j_0}) è valida per uno $j_0 \in I$, allora:

$$\mathcal{V}_{j_0} = \{V_i \mid i < j_0\} \cup \{U_i \mid i \geq j_0\}$$

è un ricoprimento aperto di X . Infatti, se $x \in X$, allora $I_x = \{i \in I \mid x \in U_i\}$ è finito perché \mathcal{U} è localmente finito. Se qualche $i \in I_x$ è $\geq j_0$, allora \mathcal{V}_{j_0} contiene un aperto U_i che contiene x . Altrimenti, indichiamo con j' il più grande elemento di I_x . Poiché per l'ipotesi induttiva

$$\{V_i \mid i \leq j'\} \cup \{U_i \mid i > j'\}$$

è un ricoprimento aperto di X , $x \in V_i$ per qualche $i \leq j' < j_0$ e dunque appartiene a un $V_i \in \mathcal{V}_{j_0}$.

Consideriamo ora l'insieme

$$F = \mathcal{C} \left(\bigcup_{j < j_0} V_j \cup \bigcup_{j > j_0} U_j \right).$$

Esso è un chiuso contenuto in U_{j_0} in quanto \mathcal{V}_{j_0} è un ricoprimento di X . Essendo X uno spazio T_4 , il chiuso F ha un intorno chiuso G contenuto in U_{j_0} . Posto $V_{j_0} = \mathring{G}$, chiaramente

$$\{V_i \mid i \leq j_0\} \cup \{U_i \mid i > j_0\}$$

è un ricoprimento aperto di X e vale la (1) per $j \leq j_0$. Se I ammette massimo e j_0 è il massimo di I , allora $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ soddisfa la tesi del Lemma. Se j_0 non è il massimo di I , abbiamo ottenuto la ($P_{j'_0}$) ove j'_0 è l'elemento di I successivo a j_0 (esso è ben definito come il minimo dell'insieme non vuoto $\{i \in I \mid i > j_0\}$ di I). Per induzione transfinita otteniamo quindi una famiglia $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ tale che valgano le (1), (2). Chiaramente \mathcal{V} è un ricoprimento aperto di X : se $x \in X$ e j è il minimo indice in I tale che $x \notin U_j$, la (2) ci dice che $x \in V_i$ per qualche $i \leq j$.

La dimostrazione è completa. \square

Da questo Lemma ricaviamo il seguente:

³Ciò significa che I è totalmente ordinato rispetto ad una relazione $<$ e che ogni sottoinsieme non vuoto di I ammette minimo rispetto a $<$.

Lemma XVIII.8.2. *Sia X uno spazio normale ed \mathcal{U} un suo ricoprimento aperto localmente finito. Fissiamo un intero $q \geq 0$ e supponiamo che, per ogni $(i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U})$ sia assegnato un ricoprimento aperto $\mathcal{W}^{i_0, i_1, \dots, i_q} = \{W_\alpha^{i_0, i_1, \dots, i_q}\}_{\alpha \in A_{i_0, i_1, \dots, i_q}}$ di U_{i_0, i_1, \dots, i_q} . Allora esiste un raffinamento $\mathcal{V} <_\tau \mathcal{U}$, mediante un ricoprimento aperto $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$, tale che :*

(18.8.1)

$$\begin{cases} \forall (j_0, j_1, \dots, j_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{V}) \text{ tale che } (\tau(j_0), \tau(j_1), \dots, \tau(j_q)) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U}) \\ \exists \alpha \in A_{\tau(j_0), \tau(j_1), \dots, \tau(j_q)} \text{ tale che } V_{j_0, j_1, \dots, j_q} \subset W_\alpha^{\tau(j_0), \tau(j_1), \dots, \tau(j_q)}. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma XVIII.8.1 possiamo trovare un ricoprimento $\Gamma = \{\Omega_i\}_{i \in I}$ tale che $\bar{\Omega}_i \subset U_i$ per ogni indice $i \in I$. Il ricoprimento Γ è anch'esso localmente finito.

Per ogni $p \in X$, l'insieme I_p degli indici i per cui $U_i \cap G_p \neq \emptyset$ è finito.

Osserviamo che $\{\bar{\Omega}_i\}_{i \in I_p}$ è una famiglia di chiusi localmente finita. Quindi la loro unione $\bigcup_{i \in I_p} \bar{\Omega}_i$ è un chiuso che non contiene il punto p e perciò

$$\tilde{V}_p = \left(\bigcap_{i \in I_p} U_i \right) \setminus \left(\bigcup_{i \in I_p} \bar{\Omega}_i \right)$$

è un intorno aperto di p .

Per ogni $(i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U}) \cap I_p^{q+1}$ scegliamo $\alpha = \alpha_{i_0, i_1, \dots, i_q} \in A_{i_0, i_1, \dots, i_q}$ tale che $p \in W_\alpha^{i_0, i_1, \dots, i_q}$.

A questo punto, definiamo per ogni $p \in X$:

$$V_p = \begin{cases} \tilde{V}_p & \text{se } \mathcal{N}_q(\mathcal{U}) \cap I_p^{q+1} = \emptyset \\ \bigcap_{(i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U}) \cap I_p^{q+1}} (W_{\alpha_{i_0, i_1, \dots, i_q}}^{i_0, i_1, \dots, i_q} \cap \tilde{V}_p) & \text{se } \mathcal{N}_q(\mathcal{U}) \cap I_p^{q+1} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Definiamo $\mathcal{V} = \{V_p\}_{p \in X}$. Abbiamo $\mathcal{V} <_\tau \mathcal{U}$, con una funzione di raffinamento $\tau : X \ni x \rightarrow \tau(x) \in I$ che si può scegliere imponendo la sola condizione che $\tau(p) \in I_p$ per ogni $p \in X$. Per costruzione, se p_0, p_1, \dots, p_q sono punti distinti di X tali che $(p_0, p_1, \dots, p_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{V})$ e $(\tau(p_0), \tau(p_1), \dots, \tau(p_q)) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U})$, allora $\tau(p_i) \in I_{p_j}$ per ogni $0 \leq i, j \leq q$ e

$$V_{p_0, p_1, \dots, p_q} \subset W_{\alpha_{\tau(p_0), \tau(p_1), \dots, \tau(p_q)}}^{\tau(p_0), \tau(p_1), \dots, \tau(p_q)}.$$

Quindi $\mathcal{V} <_\tau \mathcal{U}$ soddisfa la tesi del Lemma. \square

Dimostriamo ora che, se X è paracompatto, il funtore $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}^q(X, \mathcal{S})$, dalla categoria dei fasci di gruppi abeliani su X a quella dei gruppi abeliani, è esatto. Abbiamo cioè:

Teorema XVIII.8.3. *Sia X uno spazio paracompatto e sia*

$$(18.8.2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani. Allora per ogni intero $q \geq 0$ la successione di gruppi abeliani :

$$(18.8.3) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{C}^q(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. (a) Dimostriamo che $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{G})$ è iniettiva.

Sia $f \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, per un qualsiasi ricoprimento aperto \mathcal{U} di X . Dire che l'elemento di $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{G})$ definito da $\alpha_q(f)$ è nullo, equivale a dire che esiste un raffinamento $\mathcal{V} <_{\tau} \mathcal{U}$ tale che $\tau_q^* \circ \alpha_q(f) = 0$. Questa relazione ci dà $\alpha_q(\tau^*(f)) = 0$. Poiché $(\alpha_q(\tau^*f))_{j_0, j_1, \dots, j_q} = \alpha_{V_{j_0, j_1, \dots, j_q}}((\tau^*f)_{j_0, j_1, \dots, j_q})$ per ogni $(j_0, j_1, \dots, j_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{V})$ e la $\alpha_{V_{j_0, j_1, \dots, j_q}} : \mathcal{S}(V_{j_0, j_1, \dots, j_q}) \rightarrow \mathcal{F}(V_{j_0, j_1, \dots, j_q})$ è iniettiva, ne segue che $\tau^*f = 0$ e quindi f definisce l'elemento nullo di $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{F})$.

(b) Dimostriamo l'esattezza della successione

$$\mathcal{C}^q(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{H}).$$

Sia γ un elemento di $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{G})$ con $\alpha_q(\gamma) = 0$. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto localmente finito di X e sia $g \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ una q -cocatena che rappresenta γ . A meno di passare a un raffinamento localmente finito di \mathcal{U} , possiamo supporre che $\alpha_q(g) = 0$. Per l'esattezza di (18.8.2), per ogni $(i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U})$ possiamo trovare un intorno aperto $W_p^{i_0, i_1, \dots, i_q}$ di p in U_{i_0, i_1, \dots, i_q} ed una $f_p^{i_0, i_1, \dots, i_q} \in \mathcal{F}(W_p^{i_0, i_1, \dots, i_q})$ tale che $r_{W_p^{i_0, i_1, \dots, i_q}}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}}(g_{i_0, i_1, \dots, i_q}) = \alpha_{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}}(f_p^{i_0, i_1, \dots, i_q})$. Per il Lemma XVIII.8.2 esiste un raffinamento aperto $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ di \mathcal{U} , che possiamo scegliere localmente finito:

$$\mathcal{V} <_{\tau} \mathcal{U}$$

tale che per ogni $(j_0, j_1, \dots, j_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{V})$ con $(\tau(j_0), \tau(j_1), \dots, \tau(j_q)) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U})$, possiamo trovare un punto $p(j_0, j_1, \dots, j_q)$ con

$$V_{j_0, j_1, \dots, j_q} \subset W_{p(j_0, j_1, \dots, j_q)}^{\tau(j_0), \tau(j_1), \dots, \tau(j_q)} \subset U_{\tau(j_0), \tau(j_1), \dots, \tau(j_q)}.$$

Definiamo un elemento $\phi \in \mathcal{C}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ ponendo:

$$\phi_{j_0, j_1, \dots, j_q} = r_{V_{j_0, j_1, \dots, j_q}}^{W_{p(j_0, j_1, \dots, j_q)}^{\tau(j_0), \tau(j_1), \dots, \tau(j_q)}} \left(f_{p(j_0, j_1, \dots, j_q)}^{\tau(j_0), \tau(j_1), \dots, \tau(j_q)} \right) \quad \text{per } (j_0, j_1, \dots, j_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{V}).$$

Se indichiamo con $[\phi]$ l'elemento di $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{F})$ definito da ϕ , abbiamo $\alpha_q([\phi]) = \gamma$.

(c) La dimostrazione della surgettività dell'applicazione $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{H})$ è del tutto analoga a quella di (b). \square

Osserviamo che abbiamo ottenuto, con la dimostrazione di questo teorema, l'enunciato più preciso:

Proposizione XVIII.8.4. *Sia X uno spazio topologico e sia*

$$(18.8.4) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su X . Allora, per ogni $q \geq 0$, otteniamo una successione esatta di gruppi abeliani:

$$(18.8.5) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{C}^q(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{G}).$$

Supponiamo ora che X sia paracompatto. Allora se la successione di fasci di gruppi abeliani :

$$(18.8.6) \quad \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

è esatta, è esatta anche la successione di gruppi abeliani:

$$(18.8.7) \quad \mathcal{C}^q(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{H}).$$

Come conseguenza del Teorema XVIII.8.3 otteniamo il

Teorema XVIII.8.5 (Serre). *Se X è paracompatto e*

$$(18.8.2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

è una successione esatta di gruppi abeliani su X , allora possiamo definire, per ogni intero $q \geq 0$, un omomorfismo

$$(18.8.8) \quad \vartheta_q : H^q(X, \mathcal{H}) \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{F})$$

in modo tale che la seguente successione lunga di gruppi di coomologia risulti esatta :

$$(18.8.9) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha_{0*}} & H^0(X, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\beta_{0*}} & H^0(X, \mathcal{H}) & \longrightarrow \\ & & \xrightarrow{\vartheta_0} & H^1(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha_{1*}} & \dots & & \\ & & & & & \dots & \xrightarrow{\beta_{q-1*}} & H^{q-1}(X, \mathcal{H}) & \longrightarrow \\ & & \xrightarrow{\vartheta_{q-1}} & H^q(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha_{q*}} & H^q(X, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\beta_{q*}} & H^q(X, \mathcal{H}) & \longrightarrow \\ & & \xrightarrow{\vartheta_q} & H^{q+1}(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha_{q+1*}} & \dots & & & \end{array}$$

La dimostrazione è conseguenza del Teorema XVIII.8.3 e del risultato generale di algebra omologica:

Teorema XVIII.8.6. *Siano*

$$\begin{aligned} (A^*, a_*) &= \{0 \rightarrow A_0 \xrightarrow{a_0} A_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{q-1}} A_q \xrightarrow{a_q} A_{q+1} \xrightarrow{a_{q+1}} \dots\} \\ (B^*, b_*) &= \{0 \rightarrow B_0 \xrightarrow{b_0} B_1 \xrightarrow{b_1} \dots \xrightarrow{b_{q-1}} B_q \xrightarrow{b_q} B_{q+1} \xrightarrow{b_{q+1}} \dots\} \\ (C^*, c_*) &= \{0 \rightarrow C_0 \xrightarrow{c_0} C_1 \xrightarrow{c_1} \dots \xrightarrow{c_{q-1}} C_q \xrightarrow{c_q} C_{q+1} \xrightarrow{c_{q+1}} \dots\} \end{aligned}$$

complessi di gruppi abeliani e siano, per q intero ≥ 0 ,

$$(18.8.10) \quad H^q(A^*, a_*) = \frac{\ker a_q}{\operatorname{im} a_{q-1}}, \quad H^q(B^*, b_*) = \frac{\ker b_q}{\operatorname{im} b_{q-1}}, \quad H^q(C^*, c_*) = \frac{\ker c_q}{\operatorname{im} c_{q-1}}$$

i loro gruppi di coomologia. Supponiamo siano assegnati per ogni intero $q \geq 0$ omomorfismi

$$(18.8.11) \quad \phi_q : A_q \longrightarrow B_q \quad e \quad \psi_q : B_q \longrightarrow C_q$$

tali che il diagramma :

$$(18.8.12) \quad \begin{array}{ccccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_0 & \xrightarrow{a_0} & A_1 & \xrightarrow{a_1} & \cdots & \xrightarrow{a_{q_1}} & A_q & \xrightarrow{a_q} & A_{q+1} & \xrightarrow{a_{q+1}} & \cdots \\ & & \downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi_1 & & & & \downarrow \phi_q & & \downarrow \phi_{q+1} & & \\ 0 & \longrightarrow & B_0 & \xrightarrow{b_0} & B_1 & \xrightarrow{b_1} & \cdots & \xrightarrow{b_{q_1}} & B_q & \xrightarrow{b_q} & B_{q+1} & \xrightarrow{b_{q+1}} & \cdots \\ & & \downarrow \psi_0 & & \downarrow \psi_1 & & & & \downarrow \psi_q & & \downarrow \psi_{q+1} & & \\ 0 & \longrightarrow & C_0 & \xrightarrow{c_0} & C_1 & \xrightarrow{c_1} & \cdots & \xrightarrow{c_{q_1}} & C_q & \xrightarrow{c_q} & C_{q+1} & \xrightarrow{c_{q+1}} & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

sia commutativo e con le colonne esatte. Allora esistono, per ogni intero $q \geq 0$, omomorfismi

$$(18.8.13) \quad \vartheta_q : H^q(C^*, c_*) \longrightarrow H^{q+1}(A^*, a_*)$$

tali che la successione lunga di coomologia :

$$(18.8.14) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(A^*, a_*) & \xrightarrow{\phi_{0*}} & H^0(B^*, b_*) & \xrightarrow{\psi_{0*}} & H^0(C^*, c_*) & \longrightarrow \\ & & \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \phi_{1*} & & \downarrow \psi_{q-1*} & \\ & & H^1(A^*, a_*) & \xrightarrow{\phi_{1*}} & \cdots & & H^{q-1}(C^*, c_*) & \longrightarrow \\ & & & & & & \downarrow \psi_{q-1*} & \\ & & & & & & H^q(C^*, c_*) & \longrightarrow \\ & & \downarrow \varphi_{q-1} & & \downarrow \phi_{q*} & & \downarrow \psi_{0*} & \\ & & H^q(A^*, a_*) & \xrightarrow{\phi_{q*}} & H^q(B^*, b_*) & \xrightarrow{\psi_{0*}} & H^q(C^*, c_*) & \longrightarrow \\ & & \downarrow \varphi_q & & \downarrow \phi_{q+1*} & & \downarrow \psi_{q+1*} & \\ & & H^{q+1}(A^*, a_*) & \xrightarrow{\phi_{q+1*}} & \cdots & & & \end{array}$$

sia esatta.

DIMOSTRAZIONE. Costruiamo in primo luogo gli omomorfismi ϑ_q . A questo scopo dimostriamo che:

- (1) Per ogni $z_q \in \ker c_q$ esistono $y_q \in B_q$ ed $x_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ tali che :

$$(18.8.15) \quad \begin{cases} \psi_q(y_q) = z_q \\ \phi_{q+1}(x_{q+1}) = b_q(y_q) \end{cases}$$

- (2) La x_{q+1} in (18.8.15) è univocamente determinata modulo l'addizione di un elemento di $\text{im } a_q$.

- (3) Se z'_q è un altro elemento di $\ker c_q$, che differisce da z_q per un elemento di $\text{im } c_{q-1}$, ed $x'_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ $y'_q \in B_q$ risolvono :

$$(18.8.16) \quad \begin{cases} \psi_q(y'_q) = z'_q \\ \phi_{q+1}(x'_{q+1}) = b_q(y'_q), \end{cases}$$

allora $x_{q+1} - x'_{q+1} \in \text{im } a_q$.

(1) Sia $z_q \in C_q$ con $c_q(z_q) = 0$. Poiché per ipotesi l'omomorfismo $\psi_q : B_q \rightarrow C_q$ è surgettivo, esiste un elemento $y_q \in B_q$ tale che $z_q = \psi_q(y_q)$. Risulta:

$$\psi_{q+1}(b_q(y_q)) = c_q(\psi_q(y_q)) = c_q(z_q) = 0.$$

Poiché per ipotesi la successione

$$0 \longrightarrow A_{q+1} \xrightarrow{\phi_{q+1}} B_{q+1} \xrightarrow{\psi_{q+1}} C_{q+1} \longrightarrow 0$$

è esatta, vi è un unico elemento $x_{q+1} \in A_{q+1}$ tale che

$$\phi_{q+1}(x_{q+1}) = b_q(y_q).$$

Abbiamo:

$$\phi_{q+2}(a_{q+1}(x_{q+1})) = b_{q+1}(\phi_{q+1}(x_{q+1})) = (b_{q+1} \circ b_q)(y_q) = 0$$

e quindi

$$a_{q+1}(x_{q+1}) = 0$$

perché ϕ_{q+2} è un omomorfismo iniettivo. Gli elementi $y_q \in B_q$ e $x_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ trovati risolvono (18.8.15).

(2) Siano $\tilde{y}_q \in B_q$ e $\tilde{x}_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ soluzione di :

$$\begin{cases} \psi_q(\tilde{y}_q) = z_q, \\ \phi(\tilde{x}_{q+1}) = b_q(\tilde{y}_q). \end{cases}$$

Allora $\psi_q(\tilde{y}_q - y_q) = 0$ e, per l'esattezza della successione:

$$0 \longrightarrow A_q \xrightarrow{\phi_q} B_q \xrightarrow{\psi_q} C_q \longrightarrow 0$$

esiste un unico elemento $x_q \in A_q$ tale che $\tilde{y}_q - y_q = \phi_q(x_q)$. Abbiamo perciò:

$$\phi_{q+1}(\tilde{x}_{q+1} - x_{q+1}) = b_q(\tilde{y}_q - y_q) = b_q(\phi_q(x_q)) = \phi_{q+1}(a_q(x_q)).$$

Poiché l'omomorfismo $\phi_{q+1} : A_{q+1} \rightarrow B_{q+1}$ è iniettivo, ricaviamo che $\tilde{x}_{q+1} = x_{q+1} + a_q(x_q)$.

(3) Tenuto conto della (2), per dimostrare (3) è sufficiente verificare che, se $z_{q-1} \in C_{q-1}$, il sistema :

$$(*) \quad \begin{cases} \psi_q(y''_q) = c_{q-1}(z_{q-1}) \\ \phi_{q+1}(x''_{q+1}) = b_q(y''_q) \end{cases}$$

ammette una soluzione $y''_q \in B_q$, $x''_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ con $x''_{q+1} \in \text{im } a_q$. Poiché $\psi_{q-1} : B_{q-1} \rightarrow C_{q-1}$ è per ipotesi un omomorfismo surgettivo, possiamo trovare $y_{q-1} \in B_{q-1}$ tale che $\psi_{q-1}(y_{q-1}) = z_{q-1}$. Allora

$$\psi_q(b_{q-1}(y_{q-1})) = c_{q-1}(\psi_{q-1}(y_{q-1})) = c_{q-1}(z_{q-1})$$

e quindi, poiché $b_q(b_{q-1}(y_{q-1})) = 0$, la coppia $y''_q = b_{q-1}(y_{q-1})$, $x''_{q+1} = 0$ è soluzione di (*).

Dimostriamo ora l'esattezza di (XVIII.8.6). Per semplicità di notazioni, dato un qualsiasi elemento $x_q \in \ker a_q$ (resp. $y_q \in \ker b_q$, $z_q \in \ker c_q$) indicheremo con

$[x_q]$ (risp. $[y_q]$, $[z_q]$) la corrispondente classe di q -coomologia in $H^q(A_*, a_*)$ (risp. in $H^q(B_*, b_*)$, $H^q(C_*, c_*)$).

Esattezza in $H^q(A_, a_*)$* Sia $x_q \in \ker a_q$. Se $\phi_{q*}([x_q]) = 0$, allora esiste un elemento $y_{q-1} \in B_{q-1}$ tale che $\phi_q(x_q) = b_{q-1}(y_{q-1})$. L'elemento $z_{q-1} = \psi_{q-1}(y_{q-1})$ di C_{q-1} soddisfa:

$$c_{q-1}(z_{q-1}) = c_{q-1}(\psi_{q-1}(y_{q-1})) = \psi_q(b_{q-1}(y_{q-1})) = \psi_q \circ \phi_q(x_q) = 0.$$

Quindi $z_{q-1} \in \ker c_{q-1}$ definisce una classe di coomologia $[z_{q-1}]$ in $H^{q-1}(C_*, c_*)$ e $\vartheta_{q-1}([z_{q-1}]) = [x_q]$.

Ciò dimostra l'esattezza di (XVIII.8.6) in $H^q(A_*, a_*)$.

Esattezza in $H^q(B_, b_*)$* Sia $y_q \in \ker b_q$. Se $\psi_{q*}([y_q]) = 0$, allora esiste $z_{q-1} \in C_{q-1}$ tale che $\psi_q(y_q) = c_{q-1}(z_{q-1})$. Poiché abbiamo supposto che $\psi_{q-1} : B_{q-1} \rightarrow C_{q-1}$ sia iniettiva, esiste un elemento $y_{q-1} \in B_{q-1}$ tale che $z_{q-1} = \psi_{q-1}(y_{q-1})$. Abbiamo allora:

$$\psi_q(y_q - b_{q-1}(y_{q-1})) = \psi(y_q) - c_q(\psi_{q-1}(y_{q-1})) = \psi(y_q) - c_q(z_{q-1}) = 0.$$

Per l'esattezza della successione

$$0 \longrightarrow A_q \xrightarrow{\phi_q} B_q \xrightarrow{\psi_q} C_q \longrightarrow 0$$

v'è un unico $x_q \in A_q$ tale che $\phi_q(x_q) = y_q - b_{q-1}(y_{q-1})$. Abbiamo

$$\phi_{q+1}(a_q(x_q)) = b_q(\phi_q(x_q)) = b_q(y_q - b_{q-1}(y_{q-1})) = 0.$$

Per l'iniettività dell'omomorfismo $\phi_{q+1} : A_{q+1} \rightarrow B_{q+1}$, otteniamo che $a_q(x_q) = 0$. Quindi x_q definisce una classe di coomologia $[x_q] \in H^q(A_*, a_*)$ tale che

$$\phi_{q*}([x_q]) = [\phi_q(x_q)] = [y_q + b_{q-1}(y_{q-1})] = [y_q].$$

Questo dimostra l'esattezza di (XVIII.8.6) in $H^q(B_*, b_*)$.

Esattezza in $H^q(C_, c_*)$* Sia $z_q \in \ker c_q$ e siano $y_q \in B_q$, $x_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ tali che valga la (18.8.15). Sia $[z_q] \in H^q(C_*, c_*)$ la classe di coomologia definita da z_q . Se $\vartheta_q([z_q]) = 0$, allora esiste un elemento $x_q \in A_q$ tale che $x_{q+1} = a_q(x_q)$. Abbiamo

$$b_q(y_q) = \phi_{q+1}(x_{q+1}) = \phi_{q+1}(a_q(x_q)) = b_q(\phi_q(x_q)).$$

Quindi $y'_q = y_q - \phi_q(x_q) \in \ker b_q$ e definisce pertanto una classe di coomologia $[y'_q] \in H^q(B_*, b_*)$ tale che:

$$\psi_{q*}([y'_q]) = [\psi_q(y'_q)] = [\psi_q(y_q)] = [z_q].$$

Questo dimostra l'esattezza di (XVIII.8.6) in $H^q(C_*, c_*)$. \square

XVIII.9. Un teorema di algebra omologica

In questo paragrafo enunceremo e dimostreremo un risultato generale sui complessi bi-graduati che utilizzeremo poi nei paragrafi successivi per discutere alcune proprietà della coomologia di Čech.

Definizione XVIII.9.1. Un *complesso doppio di cocatene* è il dato di una famiglia $\{A_{r,s}\}_{r,s \in \mathbb{N}}$ di gruppi abeliani, indicizzati con le coppie di interi non negativi, e di due famiglie di omomorfismi:

$$(18.9.1) \quad d' = d'_{r,s} : A_{r,s} \longrightarrow A_{r+1,s} \quad \text{e} \quad d'' = d''_{r,s} : A_{r,s} \longrightarrow A_{r,s+1} \quad \forall r, s \in \mathbb{N}$$

tali che:

$$(18.9.2) \quad \begin{cases} d'_{r+1,s} \circ d'_{r,s} = 0 & \forall r, s \in \mathbb{N}, \\ d''_{r,s+1} \circ d''_{r,s} = 0 & \forall r, s \in \mathbb{N}, \\ d'_{r,s+1} \circ d''_{r,s} + d''_{r+1,s} \circ d'_{r,s} = 0 & \forall r, s \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Poniamo $A = \bigoplus_{(r,s) \in \mathbb{N}^2} A_{r,s}$ e definiamo $d' : A \rightarrow A$ e $d'' : A \rightarrow A$ mediante

$$(18.9.3) \quad d'((a_{r,s})_{r,s \in \mathbb{N}}) = (a'_{r,s})_{r,s \in \mathbb{N}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a'_{0,s} = 0 \text{ e} \\ a'_{r,s} = d'_{r-1,s}(a_{r-1,s}) \text{ se } r \geq 1, \end{cases}$$

$$(18.9.4) \quad d''((a_{r,s})_{r,s \in \mathbb{N}}) = (a''_{r,s})_{r,s \in \mathbb{N}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a''_{r,0} = 0 \text{ e} \\ a''_{r,s} = d''_{r,s-1}(a_{r,s-1}) \text{ se } s \geq 1. \end{cases}$$

Definiamo poi

$$(18.9.5) \quad d : A \ni a \longrightarrow d'(a) + d''(a) \in A.$$

La (18.9.2) si può esprimere mediante:

$$(18.9.6) \quad d \circ d = 0.$$

Poniamo:

$$(18.9.7) \quad A_{[q]} = \bigoplus_{r+s=q} A_{r,s}.$$

Allora $d(A_{[q]}) \subset A_{[q+1]}$. Risulta quindi definito, per ogni intero $q \geq 0$, un omomorfismo $d_q = d : A_{[q]} \ni a_{[q]} \rightarrow d(a_{[q]}) \in A_{[q+1]}$ con $d_{q+1} \circ d_q = 0$ per ogni $q \geq 0$, e $d = (d_q)$ è il *differenziale totale* del complesso:

$$(18.9.8) \quad 0 \longrightarrow A_{[0]} \xrightarrow{d_0} A_{[1]} \xrightarrow{d_1} A_{[2]} \xrightarrow{d_2} \dots$$

Indicheremo i gruppi di *coomologia del complesso totale* con:

$$(18.9.9) \quad H^q(A_{[*]}, d_*) = \frac{\ker d_q}{\text{im } d_{q-1}}.$$

Abbiamo poi le due famiglie numerabili di complessi di cocatene

$$(A_{*,s}, d'_{*,s}) = \left\{ 0 \longrightarrow A_{0,s} \xrightarrow{d'_{0,s}} A_{1,s} \xrightarrow{d'_{1,s}} A_{2,s} \xrightarrow{d'_{2,s}} \dots \right\}$$

per ogni $s \in \mathbb{N}$,

$$(A_{r,*}, d''_{r,*}) = \left\{ 0 \longrightarrow A_{r,0} \xrightarrow{d''_{r,0}} A_{r,1} \xrightarrow{d''_{r,1}} A_{r,2} \xrightarrow{d''_{r,2}} \dots \right\}$$

per ogni $r \in \mathbb{N}$,

e indicheremo i loro gruppi di coomologia con :

$$(18.9.10) \quad \begin{aligned} {}''E^{q,s} &= H^q(A_{*,s}, d'_{*,s}) = \frac{\ker d'_{q,s}}{\operatorname{im} d'_{q-1,s}} \quad \text{ed} \\ {}'E^{r,q} &= H^q(A_{r,*}, d''_{r,*}) = \frac{\ker d''_{r,q}}{\operatorname{im} d''_{r,q-1}}. \end{aligned}$$

La *successione spettrale*⁴ mette in relazione i gruppi di coomologia $H^q(A_{*,s}, d'_{*,s})$, $H^q(A_{r,*}, d''_{r,*})$ e i gruppi di coomologia $H^q(A_{[*]}, d_*)$ del complesso totale.

Osserviamo che per le (18.9.2) abbiamo in particolare :

$$d'_{r,s}(\ker d''_{r+1,s}) \subset \ker d''_{r+1,s} \quad \text{e} \quad d'_{r,s}(\operatorname{im} d''_{r,s-1}) \subset \operatorname{im} d''_{r,s},$$

ove abbiamo posto per convenzione $d'_{-1,s} = 0$ e $d''_{r,-1} = 0$ per ogni $r, s \in \mathbb{N}$. Definiamo gli omomorfismi $[d'_{r,s}] : {}'E^{r,s} \rightarrow {}'E^{r+1,s}$ per passaggio al quoziente, mediante il diagramma commutativo a righe esatte:

$$(18.9.11) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{im} d''_{r,s-1} & \longrightarrow & \ker d''_{r,s} & \longrightarrow & {}'E^{r,s} \longrightarrow 0 \\ & & d'_{r,s-1} \downarrow & & d'_{r,s} \downarrow & & \downarrow [d'_{r,s}] \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{im} d''_{r+1,s-1} & \longrightarrow & \ker d''_{r+1,s} & \longrightarrow & {}'E^{r+1,s} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Per ogni intero $s \geq 0$, otteniamo un complesso:

$$(18.9.12) \quad 0 \longrightarrow {}'E^{0,s} \xrightarrow{[d'_{0,s}]} {}'E^{1,s} \xrightarrow{[d'_{1,s}]} {}'E^{2,s} \xrightarrow{[d'_{2,s}]} \dots$$

In modo analogo, definendo gli omomorfismi $[d''_{r,s}] : {}''E^{r,s} \rightarrow {}''E^{r,s+1}$ mediante i diagrammi commutativi a righe esatte:

$$(18.9.13) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} d'_{r-1,s} & \longrightarrow & \ker d'_{r,s} & \longrightarrow & {}''E^{r,s} \longrightarrow 0 \\ & & d''_{r-1,s} \downarrow & & d''_{r,s} \downarrow & & \downarrow [d''_{r,s}] \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} d'_{r-1,s+1} & \longrightarrow & \ker d'_{r,s+1} & \longrightarrow & {}''E^{r,s+1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

ed otteniamo quindi, per ogni intero $r \geq 0$, un complesso :

$$(18.9.14) \quad 0 \longrightarrow {}''E^{r,0} \xrightarrow{[d''_{r,0}]} {}''E^{r,1} \xrightarrow{[d''_{r,1}]} {}''E^{r,2} \xrightarrow{[d''_{r,2}]} \dots$$

Indichiamo come al solito con

$$(18.9.15) \quad H^q({}'E^{*,s}, [d'_{*,s}]) = \frac{\ker [d'_{q,s}]}{\operatorname{im} [d'_{q-1,s}]} \quad \text{e} \quad H^q({}''E^{r,*}, [d''_{r,*}]) = \frac{\ker [d''_{r,q}]}{\operatorname{im} [d''_{r,q-1}]}$$

i gruppi di coomologia dei complessi (18.9.12) e (18.9.14).

⁴Vedi ad esempio: Roger Godement: **Topologie algébrique et théorie des faisceaux** (Troisième édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252), Hermann, Paris, 1973, pp viii+283.

Lemma XVIII.9.2. Per ogni intero $q \geq 0$ vi è un unico omomorfismo

$$(18.9.16) \quad j'_q : H^q('E^{*,0}, [d'_{*,0}]) \rightarrow H^q(A_{[*]}, d_*)$$

che renda commutativo il diagramma a colonne esatte:

$$(18.9.17) \quad \begin{array}{ccc} \ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0} & \longrightarrow & \ker d_q \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q('E^{*,0}, [d'_{*,0}]) & \longrightarrow & H^q(A_{[*]}, d_*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Ogni elemento di $H^q('E^{*,0}, [d'_{*,q}])$ è rappresentato da una classe di coomologia di $H^0(A_{q,*}, d''_{q,*})$, cioè da un $x_{q,0} \in \ker d''_{q,0}$.

La condizione di cociclo $[d'_{q,0}][x_{q,0}] = 0$ dà $d'_{q,0}x_{q,0} = 0$ e dunque abbiamo un'applicazione surgettiva naturale $\ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0} @ \gg H^q('E^{*,0}, [d'_{*,0}])$. Osserviamo che se $x_{q,0} \in \ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0}$, allora $d x_{q,0} = d_q x_{q,0} = d'_{q,0} x_{q,0} + d''_{q,0} x_{q,0} = 0$ e quindi $\ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0} \hookrightarrow \ker d_q$. Se $x_{q,0} = d' x_{q-1,0} = d'_{q-1,0} x_{q-1,0}$ per un elemento $x_{q-1,0} \in \ker d''_{q-1,0}$, allora abbiamo $d x_{q-1,0} = d' x_{q-1,0} = x_{q,0}$. Quindi l'inclusione $\ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0} \hookrightarrow \ker d_q$ trasforma cobordi in cobordi ed otteniamo per passaggio al quoziente il diagramma commutativo (18.9.17). \square

Osservazione XVIII.9.3. Siano q ed s due interi con $q \geq 0$ ed $s > 0$. Un elemento di $'E^{q,s}$ è la classe di equivalenza in $H^s(A_{q,*}, d''_{q,*})$ di un elemento $x_{q,s} \in A_{q,s}$ che soddisfa $d'' x_{q,s} = 0$. Supponiamo che esso rappresenti un cociclo, cioè che

$$[d'] [x_{q,s}] = [d' x_{q,s}] = 0 \text{ in } H^s(A_{q+1,*}, d''_{q+1,*}).$$

Poiché $s > 0$, ciò significa che esiste un elemento $x_{q+1,s-1} \in A_{q+1,s-1}$ tale che $d' x_{q,s} = d'' x_{q+1,s-1}$.

Vale la seguente :

Proposizione XVIII.9.4. Con le notazioni introdotte sopra : se

$$'E^{q,j} = H^j(A_{q,*}, d''_{q,*}) = 0$$

per ogni coppia d'interi $j, q > 0$, allora gli omomorfismi

$$j'_q : H^q('E^{*,0}, [d'_{*,0}]) \longrightarrow H^q(A_{[*]}, d_*)$$

sono isomorfismi per ogni intero $q \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che per $q = 0$ abbiamo

$$H^0('E^{*,0}, [d'_{*,0}]) \simeq \ker d'_{0,0} \cap d''_{0,0}, \quad H^0(A_{[*]}, d_*) \simeq \ker d_0,$$

e quindi j'_0 è sempre un isomorfismo perché $\ker d_0 = \ker d'_{0,0} \cap d''_{0,0}$.

Dimostriamo ora l'isomorfismo per $q > 0$.

J'_q è iniettiva. Sia $x_{q,0} \in \ker d''_{q,0} \cap \ker d'_{q,0}$ un rappresentante di una classe di $H^q(E^{*,0}, [d'_{*,0}])$. Se $J'_q([x_{q,0}]) = 0$, esiste un elemento $y_{[q-1]} \in A_{[q-1]}$ tale che $d_{q-1}y_{[q-1]} = x_{q,0}$. Decomponiamo $y_{[q-1]}$:

$$y_{[q-1]} = y_{q-1,0} + y_{q-2,1} + \cdots + y_{1,q-2} + y_{0,q-1}, \quad \text{con } y_{r,s} \in A_{r,s}.$$

L'equazione $d_{q-1}y_{[q-1]} = x_{q,0}$ equivale al sistema:

$$(*) \quad \begin{cases} d'_{q-1,0}y_{q-1,0} = x_{q,0} \\ d'_{q-2,1}y_{q-2,1} + d''_{q-1,0}y_{q-1,0} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ d'_{0,q-1}y_{0,q-1} + d''_{1,q-2}y_{1,q-2} = 0 \\ d''_{0,q-1}y_{0,q-1} = 0. \end{cases}$$

In particolare, $x_{q,0}$ definisce la classe nulla in $H^q(E^{*,0}, [d'_{*,0}])$ se esiste una soluzione $y_{[q]}$ di (*) con $y_{j,q-j-1} = 0$ per ogni $j < q-1$.

Se $q = 1$, ogni soluzione di (*) è della forma $y_{[0]} = y_{0,0}$. Quindi: J'_1 è sempre iniettiva.

Per dimostrare l'iniettività di J'_q per gli interi $q > 1$, dimostreremo per ricorrenza che per ogni $0 \leq k \leq q-1$

(P'_k) esiste una soluzione $y_{[q-1]}^k$ di (*) con $y_{j,q-j-1}^k = 0$ se $j < k$.

Abbiamo già osservato che l'ipotesi che $J'_q([x_{q,0}]) = 0$ ci dice che ciò è vero per $k = 0$. Supponiamo ora, per un intero k con $0 \leq k < q-1$, di avere una soluzione $y_{[q-1]}^k$ di $d_{q-1}y_{[q-1]}^k = x_{q,0}$ con $y_{j,q-j-1}^k = 0$ se $j < k$. In particolare per (*) risulta $d''_{k,q-k-1}y_{k,q-k-1}^k = 0$. È $(q-k-1) > 0$ e perciò per ipotesi $H^{q-k-1}(A_{k,*}, d''_{k,*}) = 0$ e dunque esiste un elemento $z_{k,q-k-2} \in A_{k,q-k-2}$ tale che $d''_{k,q-k-2}z_{k,q-k-2} = y_{k,q-k-1}^k$. Allora $y_{[q-1]}^{k+1} = y_{[q-1]}^k - d_{q-2}z_{k,q-k-2}$ soddisfa $d_{q-1}y_{[q-1]}^{k+1} = x_{q,0}$ e $y_{j,q-j-1}^{k+1} = 0$ se $j < k+1$.

La $y_{[q-1]}^{q-1}$ è della forma $y_{[q-1]}^{q-1} = x_{q-1,0}$ e quindi l'equazione $d_{[q-1]}y_{[q-1]}^{q-1} = x_{q,0}$ significa che $d'_{q-1,0}x_{q-1,0} = x_{q,0}$ e $d''_{q-1,0}x_{q-1,0} = 0$. Questo prova che $x_{q,0}$ rappresenta la classe di coomologia nulla in $H^q(E^{*,0}, [d'_{*,0}])$.

J'_q è surgettiva. Sia η una classe di coomologia in $H^q(A_{[*]}, d_*)$. Sia $x_{[q]} \in \ker d_q$ un suo rappresentante. Scriviamo $x_q = x_{q,0} + x_{q-1,1} + \cdots + x_{1,q-1} + x_{0,q}$. L'equazione $d_q x_{[q]} = 0$ equivale al sistema:

$$(**) \quad \begin{cases} d'_{q,0}x_{q,0} = 0 \\ d'_{q-1,1}x_{q-1,1} + d''_{q,0}x_{q,0} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ d'_{0,q}x_{0,q} + d''_{1,q-1}x_{1,q-1} = 0 \\ d''_{0,q}x_{0,q} = 0. \end{cases}$$

Se fosse $x_{j,q-j} = 0$ per ogni $j < q$, allora $x_{[q]} = x_{q,0}$ e per (**) l'elemento $x_{q,0}$ apparterrebbe a $\ker d''_{q,0} \cap \ker d'_{q,0}$ e definirebbe una classe di coomologia ξ di

$H^q(E^{*,0}, [d'_{*,0}])$ con $J'_q(\xi) = \eta$. Per dimostrare la surgettività di J'_q dimostreremo quindi per ricorrenza:

$$(P''_k) \quad \begin{cases} \text{per ogni intero } k \text{ con } 0 \leq k \leq q \text{ esiste un rappresentante} \\ x''_{[q]}^k \in \ker d_q \text{ di } \eta \text{ con } x''_{j,q-j}^k = 0 \text{ per ogni intero } j < k. \end{cases}$$

Per $k = 0$ possiamo scegliere come $x''_{[q]}^0$ un qualsiasi rappresentante di η in $\ker d_q$. Supponiamo ora che $0 < k < q$ e vi sia un $x''_{[q]}^k \in \eta$ con $x''_{j,q-j}^k = 0$ per ogni intero $j < k$. Abbiamo in particolare $d''_{k,q-k} x''_{k,q-k} = 0$. Poiché $q - k > 0$, per ipotesi $H^{q-k}(A_{k,*}, d''_{k,*}) = 0$ e quindi esiste $y_{k,q-k-1} \in A_{k,q-k-1}$ tale che $d''_{k,q-k-1} y_{k,q-k-1} = x''_{k,q-k}$. Poniamo allora $x''_{[q]}^{k+1} = x''_{[q]}^k - d_{q-1} y_{k,q-k-1}$, ottenendo in questo modo un elemento $x''_{[q]}^{k+1} \in \eta$ con $x''_{j,q-j}^{k+1} = 0$ se $j < k + 1$.

Per $k = q$, l'elemento $x''_{[q]}^q = x''_{q,0} \in \ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0}$ definisce una classe $\xi \in H^q(E^{*,0}, [d'_{*,0}])$ con $J'_q(\xi) = \eta$. \square

In modo del tutto analogo, abbiamo:

Proposizione XVIII.9.5. *Per ogni intero $q \geq 0$ vi è un unico omomorfismo*

$$(18.9.18) \quad J''_q : H^q(E^{0,*}, [d''_{0,*}]) \longrightarrow H^q(A_{[*]}, d_*)$$

che renda commutativo il diagramma a colonne esatte:

$$(18.9.19) \quad \begin{array}{ccc} \ker d'_{0,q} \cap \ker d''_{0,q} & \longrightarrow & \ker d_q \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(E^{0,*}, [d''_{0,*}]) & \longrightarrow & H^q(A_{[*]}, d_*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Se

$${}''E^{j,q} = H^j(A_{*,q}, d'_{*,q}) = 0$$

per ogni coppia d'interi $j, q > 0$, allora gli omomorfismi (18.9.18) sono isomorfismi per ogni intero $q \geq 0$.

XVIII.10. Il teorema di Leray sui ricoprimenti aciclici

Sia \mathcal{S} un fascio su uno spazio topologico X . Ad ogni aperto Ω di X associamo la restrizione $\mathcal{S}|_{\Omega}$ di \mathcal{S} ad Ω . Essa si definisce con la corrispondenza che ad ogni aperto U di Ω associa il gruppo $\mathcal{S}|_{\Omega}(U) = \mathcal{S}(U)$.

Se q è un intero non negativo, porremo $H^q(\Omega, \mathcal{S}) := H^q(\Omega, \mathcal{S}|_{\Omega})$. Per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X , $\mathcal{U} \cap \Omega := \{U_i \cap \Omega\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di Ω . Possiamo quindi definire per ogni intero $q \geq 0$ delle applicazioni naturali:

$$\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\rho_{\mathcal{U} \cap \Omega}} \mathcal{C}^q(\mathcal{U} \cap \Omega, \mathcal{S}|_{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\Omega, \mathcal{S}|_{\Omega}) := \mathcal{C}^q(\Omega, \mathcal{S}).$$

Poiché le operazioni di restrizione e di cobordo commutano, avremo anche :

$$\rho_{\mathcal{U} \cap \Omega}^{\mathcal{U}}(\mathcal{L}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})) \subset \mathcal{L}^q(\mathcal{U} \cap \Omega, \mathcal{S}), \quad \rho_{\mathcal{U} \cap \Omega}^{\mathcal{U}}(\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})) \subset \mathcal{B}^q(\mathcal{U} \cap \Omega, \mathcal{S}),$$

Fissato un ricoprimento aperto \mathcal{U} , definiamo per ogni intero $q \geq 0$ il fascio $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}^q \mathcal{S}$, facendo corrispondere ad ogni aperto Ω di X il gruppo $\mathcal{C}^q(\mathcal{U} \cap \Omega, \mathcal{S})$.

Poiché \mathcal{S} è un fascio, per ogni aperto Ω di X abbiamo una successione esatta :

$$(18.10.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{S}(\Omega) & \xrightarrow{\iota_{\Omega}} & \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^0 \mathcal{S}(\Omega) & \xrightarrow{\delta_0^{\mathcal{U} \cap \Omega}} & \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^1 \mathcal{S}(\Omega) \\ & & & & \parallel & & \parallel \\ & & & & \mathcal{C}^0(\mathcal{U} \cap \Omega, \mathcal{S}) & & \mathcal{C}^1(\mathcal{U} \cap \Omega, \mathcal{S}) \end{array}$$

ed otteniamo perciò la successione esatta di fasci

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{\iota} \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^0 \mathcal{S} \xrightarrow{\delta_q^{\mathcal{U} \cap *}} \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^1 \mathcal{S}.$$

Gli omomorfismi di cobordo $\delta_q^{\mathcal{U} \cap \Omega} : \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^q \mathcal{S}(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^{q+1} \mathcal{S}(\Omega)$ definiscono un omomorfismo di fasci :

$$(18.10.2) \quad \delta_q^{\mathcal{U} \cap *} : \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^q \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^{q+1} \mathcal{S}.$$

Vale il seguente :

Lemma XVIII.10.1. *Se \mathcal{U} è un ricoprimento aperto localmente finito di X , allora la successione di fasci di gruppi abeliani Sia X uno spazio paracompatto. Allora, per ogni fascio di gruppi abeliani \mathcal{S} su X , la successione di fasci :*

$$(18.10.3) \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{S} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^0 \mathcal{S} & \xrightarrow{\delta_0^{\mathcal{U} \cap *}} & \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^1 \mathcal{S} & \xrightarrow{\delta_1^{\mathcal{U} \cap *}} & \dots \\ \dots & & \xrightarrow{\delta_{q-2}^{\mathcal{U} \cap *}} & \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^{q-1} \mathcal{S} & \xrightarrow{\delta_{q-1}^{\mathcal{U} \cap *}} & \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^q \mathcal{S} & \xrightarrow{\delta_q^{\mathcal{U} \cap *}} & \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^{q+1} \mathcal{S} & \xrightarrow{\delta_{q+1}^{\mathcal{U} \cap *}} & \dots \end{array}$$

è esatta.⁵

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo osservato sopra che $\text{im } \iota = \ker \delta_0^{\mathcal{U} \cap *}$.

Resta quindi da dimostrare che $\text{im } \delta_{q-1}^{\mathcal{U} \cap *} = \ker \delta_q^{\mathcal{U} \cap *}$ quando $q > 0$.

Sia $q > 0$, $p \in X$ e sia $\xi \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^q \mathcal{S}_p$ con $\delta_q^{\mathcal{U} \cap *}(\xi) = 0$. Possiamo rappresentare ξ mediante una $f \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U} \cap \Omega, \mathcal{S})$, ove Ω è un intorno aperto di p in X . A meno di sostituire Ω con un intorno più piccolo di p in X , possiamo supporre che $\delta_q^{\mathcal{U} \cap \Omega}(f) = 0$.

Sia I_p l'insieme finito degli indici $i \in I$ per cui $p \in U_i$. Allora

$$W = \Omega \cap \left(\bigcap_{i \in I_p} U_i \right) \setminus \left(\bigcup_{i \in I \setminus I_p} \bar{U}_i \right)$$

è un intorno aperto di p in X e $\mathcal{U} \cap W$ contiene solo un numero finito di aperti non vuoti, tutti contenenti il punto p . Inoltre per ogni $(i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U} \cap W)$ abbiamo $W \subset U_{i_0, i_1, \dots, i_q}$. Definiamo allora $\phi \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U} \cap W, \mathcal{S})$ fissando

⁵Diciamo anche che (18.10.3) è una *risoluzione* del fascio \mathcal{S} .

arbitrariamente un indice $i_0 \in I_p$ e ponendo $\phi_{i_1, \dots, i_q} = r_{U_{i_1, \dots, i_q} \cap W}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}}(f_{i_0, i_1, \dots, i_q})$. Abbiamo (dove per semplicità di notazione abbiamo ommesso le funzioni di restrizione):

$$(\delta_{q-1}(\phi))_{j_0, j_1, \dots, j_q} = \sum_{h=0}^q (-1)^h f_{i_0, j_0, \dots, \hat{j}_h, \dots, j_q} = f_{j_0, \dots, j_q},$$

per la condizione che $\delta_q^{\mathcal{U} \cap \Omega}(f) = 0$.

La dimostrazione è completa. \square

Dalla Proposizione XVIII.8.4 otteniamo allora:

Proposizione XVIII.10.2. *Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto localmente finito di uno spazio paracompatto X . Allora per ogni fascio di gruppi abeliani \mathcal{S} su X e per ogni intero $q \geq 0$ abbiamo una successione esatta di gruppi abeliani:*

$$(18.10.4) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^q(X, \mathcal{S}) & \xrightarrow{t_q} & \mathcal{C}^q(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^0 \mathcal{S}) & \longrightarrow & \\ & & \xrightarrow{(\delta_0^{\mathcal{U} \cap *})_q} & \mathcal{C}^q(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^1 \mathcal{S}) & \xrightarrow{(\delta_1^{\mathcal{U} \cap *})_q} & \dots & \\ & & & \dots & \xrightarrow{(\delta_{h-2}^{\mathcal{U} \cap *})_q} & \mathcal{C}^q(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^{h-1} \mathcal{S}) & \longrightarrow \\ & & \xrightarrow{(\delta_{h-1}^{\mathcal{U} \cap *})_q} & \mathcal{C}^q(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^h \mathcal{S}) & \xrightarrow{(\delta_h^{\mathcal{U} \cap *})_q} & \mathcal{C}^q(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^{h+1} \mathcal{S}) & \xrightarrow{(\delta_{h+1}^{\mathcal{U} \cap *})_q} \dots \end{array}$$

Un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X si dice \mathcal{S} -aciclico se

$$(18.10.5) \quad H^j(U_{i_0, i_1, \dots, i_q}, \mathcal{S}) = 0 \quad \forall q \geq 0, \forall (i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U}), \forall j > 0.$$

Vale il:

Teorema XVIII.10.3 (Leray). *Sia \mathcal{S} un fascio su uno spazio topologico paracompatto X . Se \mathcal{U} è un ricoprimento aperto localmente finito ed \mathcal{S} -aciclico di X , allora gli omomorfismi naturali:*

$$(18.10.6) \quad H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{S})$$

sono isomorfismi per ogni intero $q \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo

$$A_{r,s} = \mathcal{C}^r(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S})$$

per ogni coppia di interi $r, s \geq 0$, e definiamo gli omomorfismi

$$\begin{cases} d'_{r,s} : A_{r,s} \longrightarrow A_{r+1,s} \\ d''_{r,s} : A_{r,s} \longrightarrow A_{r,s+1} \end{cases}$$

ponendo $d'_{r,s}$ uguale al differenziale del complesso:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta_0} & \mathcal{C}^1(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta_1} & \dots \\ & & \dots & \xrightarrow{\delta_{q-1}} & \mathcal{C}^q(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta_q} & \mathcal{C}^{q+1}(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta_{q+1}} \dots \end{array}$$

e definendo $d''_{r,s}$ come gli omomorfismi indotti da quelli del complesso di fasci (18.10.3):

$$d''_{r,s} = (\delta_r^{\mathcal{U} \cap *})_s : \mathcal{C}^r(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^r(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^{s+1} \mathcal{S}).$$

Per la Proposizione XVIII.10.2, abbiamo $'E^{r,s} = 0$ per ogni $r \geq 0$ ed ogni $s > 0$ ed $'E^{r,0} = \mathcal{C}^r(X, \mathcal{S})$. Abbiamo perciò:

$$H^q('E^{*,0}, [d''_{*,0}]) = H^q(X, \mathcal{S})$$

e, per la Proposizione XVIII.9, l'applicazione:

$$j'_q : H^q(X, \mathcal{S}) \longrightarrow H^q(A_{[*]}, d_*)$$

è un isomorfismo per ogni $q \geq 0$. Osserviamo come questo isomorfismo sia conseguenza delle ipotesi che X sia paracompatto ed \mathcal{U} localmente finito, e sia valido a prescindere dall'ipotesi che \mathcal{U} sia \mathcal{S} -aciclico.

Indichiamo, per ogni $q \geq 0$, con $N_q(\mathcal{U})$ l'insieme:

$$N_q(\mathcal{U}) = \{ \{i_0, i_1, \dots, i_q\} \mid (i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U}) \}.$$

Abbiamo allora:

$$A_{r,s} \simeq \prod_{\{i_0, i_1, \dots, i_s\} \in N_s(\mathcal{U})} \mathcal{C}^r(U_{i_0, i_1, \dots, i_s}, \mathcal{S}).$$

Per verificare questo isomorfismo, definiamo per ogni aperto Ω di X il fascio \mathcal{S}^Ω mediante:

$$\mathcal{S}^\Omega(U) = \mathcal{S}(U \cap \Omega) \text{ per ogni aperto } U \text{ di } X.$$

Il fascio $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S}$ è prodotto diretto, localmente finito, dei fasci $\mathcal{S}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_s}}$. Per la Proposizione XVIII.10.2 l'isomorfismo di fasci:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S} \simeq \prod_{\{i_0, i_1, \dots, i_s\} \in N_s(\mathcal{U})} \mathcal{S}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_s}}$$

dà l'isomorfismo di gruppi abeliani:

$$\begin{aligned} A_{r,s} &= \mathcal{C}^r(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S}) \\ &\simeq \prod_{\{i_0, i_1, \dots, i_s\} \in N_s(\mathcal{U})} \mathcal{C}^r(X, \mathcal{S}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_s}}) \\ &\simeq \prod_{\{i_0, i_1, \dots, i_s\} \in N_s(\mathcal{U})} \mathcal{C}^r(U_{i_0, i_1, \dots, i_s}, \mathcal{S}). \end{aligned}$$

Gli omomorfismi $d''_{r,s}$ si fattorizzano attraverso gli omomorfismi

$$\delta_r^{U_{i_0, i_1, \dots, i_s}} : \mathcal{C}^r(U_{i_0, i_1, \dots, i_s}, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^{r+1}(U_{i_0, i_1, \dots, i_s}, \mathcal{S}).$$

Quindi l'ipotesi che il ricoprimento \mathcal{U} sia \mathcal{S} -aciclico ci dà $''E^{r,s} = 0$ per ogni $s \geq 0$ ed ogni $r > 0$.

Abbiamo poi: $''E^{0,s} \simeq \mathcal{C}^s(\mathcal{U}, \mathcal{S})$

Auindi, per la Proposizione XVIII.9.5, per ogni ricoprimento aperto localmente finito \mathcal{U} di X paracompatto l'omomorfismo

$$j''_q : H^q(''E^{0,*}, [d''_{0,*}]) \simeq H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow H^q(A_{[*]}, d_*)$$

è un isomorfismo per ogni $q \geq 0$.

Componendo i due isomorfismi, per ogni intero $q \geq 0$, otteniamo l'isomorfismo cercato :

$$(j_q'')^{-1} \circ j_q' : H^q(X, \mathcal{S}) \xrightarrow{\cong} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}), \quad \forall q \geq 0.$$

□

Osservazione XVIII.10.4. Ricordiamo che, senza nessuna ipotesi sul ricoprimento \mathcal{U} , ma come conseguenza della definizione di fascio, l'omomorfismo

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{S})$$

è sempre un isomorfismo e che l'omomorfismo

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{S})$$

è sempre iniettivo.

XVIII.11. Il Teorema di de Rham

Sia \mathcal{S} un fascio di gruppi abeliani su uno spazio topologico X . Si dice *risoluzione* di \mathcal{S} una qualsiasi successione esatta di fasci su X :

$$(18.11.1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{i} \mathcal{S}_0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{S}_1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{S}_2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots$$

La risoluzione (18.11.1) di \mathcal{S} si dice *aciclica* se $H^q(X, \mathcal{S}_h) = 0$ per ogni $q > 0$ ed $h \geq 0$.

Teorema XVIII.11.1 (de Rham). *Se X è uno spazio paracompatto e (18.11.1) è una risoluzione aciclica di un fascio \mathcal{S} su X , allora i gruppi di coomologia di Čech $H^q(X, \mathcal{S})$ sono isomorfi ai gruppi di coomologia $H^q(\mathcal{S}_*(X), \alpha_*)$ del complesso :*

$$(18.11.2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S}_0(X) \xrightarrow{\alpha_{0*}} \mathcal{S}_1(X) \xrightarrow{\alpha_{1*}} \mathcal{S}_2(X) \xrightarrow{\alpha_{2*}} \mathcal{S}_3(X) \xrightarrow{\alpha_{3*}} \dots$$

DIMOSTRAZIONE. Utilizziamo i risultati e le notazioni del paragrafo §XVIII.9. Per ogni coppia di interi non negativi r, s definiamo il gruppo abeliano

$$A_{r,s} = \mathcal{C}^r(X, \mathcal{S}_s).$$

Definiamo un complesso doppio di cocatene introducendo gli omomorfismi :

$$d_r' := \delta_r : A_{r,s} = \mathcal{C}^r(X, \mathcal{S}_s) \ni f \longrightarrow \delta_r(f) \in A_{r+1,s} = \mathcal{C}^{r+1}(X, \mathcal{S}_s),$$

$$d_s'' := (-1)^r (\alpha_{s*})_r : A_{r,s} = \mathcal{C}^r(X, \mathcal{S}_s) \ni f \longrightarrow (-1)^r (\alpha_{s*})_r(f) \in \mathcal{C}^r(X, \mathcal{S}_{s+1}).$$

Per l'ipotesi che (18.11.1) sia una risoluzione e per la Proposizione XVIII.8.4, $'E^{r,s} = 0$ per ogni $r \geq 0$ e per ogni $s > 0$. Per l'ipotesi che (18.11.1) sia aciclica, $''E^{r,s} = 0$ per ogni $r > 0$ e per ogni $s \geq 0$. Abbiamo poi :

$$\begin{aligned} 'E^{r,0} = \mathcal{C}^r(X, \mathcal{S}) & \quad \text{e} & \quad H^q('E^{*,0}, [d'_{*,0}]) = H^q(X, \mathcal{S}); \\ ''E^{0,s} = \mathcal{S}_s(X) & \quad \text{e} & \quad H^q(''E^{0,*}, [d''_{0,*}]) = H^q(\mathcal{S}_*(X), \alpha_*). \end{aligned}$$

Per la Proposizione XVIII.9, per ogni $q \geq 0$ l'omomorfismo

$$j_q' : H^q('E^{*,0}, [d'_{*,0}]) = H^q(X, \mathcal{S}) \longrightarrow H^q(A_{[*], d_*})$$

è un isomorfismo. Per la Proposizione XVIII.9.5, per ogni $q \geq 0$ l'omomorfismo

$$j_q'' : H^q(''E^{0,*}, [d''_{0,*}]) = H^q(\mathcal{S}_*(X), \alpha_*) \longrightarrow H^q(A_{[*], d_*})$$

è un isomorfismo. Allora

$$(j'_q)^{-1} \circ j'_q : H^q(X, \mathcal{S}) \longrightarrow H^q(\mathcal{S}_*(X), \alpha_*)$$

è per ogni $q \geq 0$ l'isomorfismo cercato. \square

Osservazione XVIII.11.2. L'isomorfismo $j'_q : H^q(X, \mathcal{S}) \longrightarrow H^q(A_{[*]}, d_*)$ vale sotto la semplice ipotesi che (18.11.1) sia una risoluzione di \mathcal{S} . Quindi, sotto questa ipotesi è comunque definito un omomorfismo

$$j''_q : H^q(\mathcal{S}_*(X), \alpha_*) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{S}).$$

Esso è un isomorfismo quando (18.11.1) è aciclica su X .

XVIII.12. Fasci fiacchi

Per utilizzare il Teorema di de Rham, è utile definire alcune categorie di fasci che sono coomologicamente banali: risoluzioni acicliche ottenute utilizzando fasci di questi tipi ci permettono di ricondurre il calcolo della coomologia di Čech a quello della coomologia di complessi differenziali.

Definizione XVIII.12.1. Un fascio \mathcal{F} su uno spazio topologico X si dice *fiacco* se per ogni aperto Ω di X l'applicazione di restrizione: $r_\Omega^X : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(\Omega)$ è surgettiva.

Esempio XVIII.12.2. Consideriamo su $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ la topologia di Zariski, in cui gli aperti sono i complementari di sottovarietà algebriche. Allora il fascio $\underline{\mathbb{C}}$ delle funzioni localmente costanti su $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è fiacco.

Esempio XVIII.12.3. Sia \mathcal{S} un fascio su uno spazio topologico X . Indichiamo con $\mathcal{S}^\#$ il *fascio dei germi di sezioni discontinue*⁶ di \mathcal{S} , associato al prefascio canonico

$$\text{Ap}(X) \ni U \longrightarrow \{f \in \mathcal{S}^U \mid \pi \circ f(p) = p, \forall p \in U\}.$$

Il fascio $\mathcal{S}^\#$ è un fascio fiacco ed abbiamo un ovvio morfismo iniettivo di fasci $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{S}^\#$.

Proposizione XVIII.12.4. *L'immagine diretta di un fascio fiacco mediante un'applicazione continua è un fascio fiacco.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio fiacco sullo spazio topologico X , Y un altro spazio topologico ed $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Sia V un aperto di Y . Abbiamo allora un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(X) & \xrightarrow{r_{f^{-1}(V)}^X} & \mathcal{S}(f^{-1}(V)) \\ \parallel & & \parallel \\ f_*\mathcal{S}(Y) & \xrightarrow{r_V^Y} & f_*\mathcal{S}(V). \end{array}$$

⁶Cioè non necessariamente continue.

Dalla surgettività di $\mathcal{S}(X) \xrightarrow{r_{f^{-1}(V)}^X} \mathcal{S}(f^{-1}(V))$ segue quella di $f_*\mathcal{S}(Y) \xrightarrow{r_V^Y} f_*\mathcal{S}(V)$. \square

Proposizione XVIII.12.5. *Sia*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}' \xrightarrow{\phi} \mathcal{S} \xrightarrow{\psi} \mathcal{S}'' \longrightarrow 0$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su X . Se \mathcal{S}' è fiacco, allora, per ogni aperto U di X la successione

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}'(U) \xrightarrow{\phi} \mathcal{S}(U) \xrightarrow{\psi} \mathcal{S}''(U) \longrightarrow 0$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché la restrizione ad un aperto di un fascio fiacco è ancora un fascio fiacco, possiamo, per semplicità, limitarci a considerare il caso in cui $U = X$. L'esattezza in $\mathcal{S}'(X)$ ed $\mathcal{S}(X)$ è conseguenza della definizione di fascio. Basterà quindi dimostrare che $\psi : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}''(X)$ è surgettiva. Sia $s'' \in \mathcal{S}''(X)$ e consideriamo la famiglia

$$\Phi = \{(U, s_U) \mid U \in \text{Ap}(X), s_U \in \mathcal{S}(U), \psi(s_U) = s''|_U\}.$$

Introduciamo la relazione d'ordine su Φ :

$$(U, s_U) \leq (V, s_V) \iff U \subset V, s_U = s_V|_U.$$

Chiaramente Φ è una famiglia induttiva. Per il Lemma di Zorn essa ammette un elemento massimale (U_0, s_{U_0}) . Se $U_0 = X$, abbiamo ottenuto la tesi. Supponiamo per assurdo che $U_0 \neq X$ e sia $p_0 \in \mathring{C}U_0$. Vi è allora un intorno V di p_0 in X ed una sezione $s_V \in \mathcal{S}(V)$ tale che $\psi(s_V) = s''|_V$. Se $V \cap U_0 = \emptyset$, allora

$$s_{U_0 \cup V} = \begin{cases} s_{U_0} & \text{su } U_0, \\ s_V & \text{su } V \end{cases}$$

ci dà un elemento $(U_0 \cup V, s_{U_0 \cup V}) \gneq (U_0, s_{U_0})$, contraddicendo la massimalità. Quindi $U_0 \cap V \neq \emptyset$ e $\psi(u_{U_0}|_{U_0 \cap V} - u_V|_{U_0 \cap V}) = 0$. Esiste allora $s'_{U_0 \cap V} \in \mathcal{S}'(U_0 \cap V)$ tale che $\phi(s'_{U_0 \cap V}) = u_{U_0}|_{U_0 \cap V} - u_V|_{U_0 \cap V}$. Poiché \mathcal{S}' è fiacco, abbiamo $s'_{U_0 \cap V} = s'|_{U_0 \cap V}$ per una $s' \in \mathcal{S}'(X)$. Allora

$$s_{U_0 \cup V} = \begin{cases} s_{U_0} & \text{su } U_0, \\ s_V + \phi(s')|_V & \text{su } V \end{cases}$$

è un elemento di $\mathcal{S}(U_0 \cup V)$ e $(U_0 \cup V, s_{U_0 \cup V}) \gneq (U_0, s_{U_0})$ contraddice la massimalità. Quindi $U_0 = X$. La dimostrazione è completa. \square

Segue allora

Proposizione XVIII.12.6. *Sia*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}' \xrightarrow{\phi} \mathcal{S} \xrightarrow{\psi} \mathcal{S}'' \longrightarrow 0$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su X . Se \mathcal{S}' e \mathcal{S} sono fiacchi, allora anche \mathcal{S}'' è fiacco.

DIMOSTRAZIONE. Se U è un aperto di X ed $s''_U \in \mathcal{S}''(U)$, per la Proposizione XVIII.12.5 esiste un $s_U \in \mathcal{S}(U)$ tale che $\phi(s_U) = s''_U$. Poiché abbiamo supposto che \mathcal{S} fosse fiacco, vi è una $s \in \mathcal{S}(X)$ tale che $s_U = s|_U$. È allora $\psi(s) \in \mathcal{S}'(X)$ e $\psi(s)|_U = s''_U$. \square

Proposizione XVIII.12.7. *Se*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{S}^2 \longrightarrow \dots$$

è una successione esatta di fasci di gruppi abeliani fiacchi, allora, per ogni aperto U di X , la successione di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^0(U) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{S}^1(U) \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{S}^2(U) \longrightarrow \dots$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. L'esattezza in $\mathcal{S}^0(U)$ è conseguenza della definizione di fascio. Per ogni $h \geq 0$ abbiamo per ipotesi una successione esatta corta di fasci

$$0 \longrightarrow \ker \delta_h \longrightarrow \mathcal{S}^h \xrightarrow{\delta_h} \ker \delta_{h+1} \longrightarrow 0.$$

Dalla Proposizione XVIII.12.6 segue per ricorrenza che tutti i fasci $\ker \delta_h$ sono fiacchi. La tesi segue allora dalla Proposizione XVIII.12.5. \square

Vale il seguente :

Lemma XVIII.12.8. *Se \mathcal{F} è un fascio di gruppi abeliani fiacco su X , allora*

$$(18.12.1) \quad H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$$

per ogni $q > 0$ ed ogni ricoprimento aperto localmente finito \mathcal{U} di X .

DIMOSTRAZIONE. Sia $q > 0$ e sia $f = (f_{i_0, i_1, \dots, i_q}) \in \mathcal{L}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Sia $<$ un buon ordinamento di I . Per ogni $i \in I$ che non sia massimo in I , indicheremo con $i+1$ l'elemento di I successivo ad i : $i+1$ è il minimo dell'insieme $\{j \in I \mid j > i\}$. Per ogni $i \in I$ definiamo gli aperti :

$$\Omega_i = \bigcup_{j < i} U_j \quad \text{e} \quad \Omega'_i = U_i \cup \Omega_i.$$

Supponiamo che, per un indice $\nu \in I$ fissato, $f^{(\nu)} \in \mathcal{L}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ abbia la proprietà :

$$(\dagger) \quad r_{U_{i_0, i_1, \dots, i_q} \cap \Omega'_\nu}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}}(f_{i_0, i_1, \dots, i_q}^{(\nu)}) = 0 \quad \forall (i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U}).$$

Esiste allora una $\psi^{(\nu)} \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tale che

$$\begin{cases} (i) & r_{U_{i_1, \dots, i_q} \cap \Omega'_\nu}^{U_{i_1, \dots, i_q}}(\psi_{i_1, \dots, i_q}^{(\nu)}) = 0 \quad \forall (i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U}), \\ (ii) & \psi_{i_1, \dots, i_q}^{(\nu)} = 0 \quad \text{se} \quad (\nu, i_1, \dots, i_q) \notin \mathcal{N}_q(\mathcal{U}) \\ (iii) & r_{U_{i_0, i_1, \dots, i_q} \cap \Omega'_\nu}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}}((f^{(\nu)} - \delta_{q-1} \psi^{(\nu)})_{i_0, i_1, \dots, i_q}) = 0 \quad \forall (i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U}). \end{cases}$$

Per ogni $(i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_{q-1}(\mathcal{U})$ per cui $(\nu, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U})$, vi è un elemento $\eta \in \mathcal{S}(U_{\nu, i_1, \dots, i_q} \cup \Omega'_\nu)$ la cui restrizione a U_{ν, i_1, \dots, i_q} è $f_{\nu, i_1, \dots, i_q}^{(\nu)}$ e la cui restrizione a

Ω_ν è 0. Poiché il fascio \mathcal{S} è fiacco, vi è allora una $\tilde{\eta} \in \mathcal{S}(X)$ la cui restrizione a $U_{\nu, i_1, \dots, i_q} \cup \Omega_\nu$ è uguale a η . Definiamo $\psi_{i_1, \dots, i_q}^{(\nu)}$ come la restrizione di $\tilde{\eta}$ a U_{i_1, \dots, i_q} . Se $(\nu, i_1, \dots, i_q) \notin \mathcal{N}_q(\mathcal{U})$ poniamo $\psi_{i_1, \dots, i_q}^{(\nu)} = 0$ su U_{i_1, \dots, i_q} . Chiaramente, possiamo fare in modo che la $\psi^{(\nu)}$ sia alternata rispetto agli indici ($(i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_{q-1}(\mathcal{U})$, dimodochè $\psi^{(\nu)} \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$).

La $\psi^{(\nu)}$ così costruita gode ovviamente delle proprietà (i), (ii). Per dimostrare che gode anche della (iii), basta verificare che

$$r_{U_{\nu, i_0, i_1, \dots, i_q}}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}} ((f - \delta_{q-1} \psi^{(\nu)})_{i_0, i_1, \dots, i_q}) = 0 \quad \text{se } (\nu, i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_{q+1}(\mathcal{U}),$$

in quanto $\Omega'_\nu = U_\nu \cup \Omega_\nu$ e

$$r_{U_{i_0, i_1, \dots, i_q} \cap \Omega_\nu}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}} (f_{i_0, i_1, \dots, i_q}) = 0 \quad \text{per ipotesi e}$$

$$r_{U_{i_0, i_1, \dots, i_q} \cap \Omega_\nu}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}} ((\delta_{q-1} \psi^{(\nu)})_{i_0, i_1, \dots, i_q}) = 0 \quad \text{per la definizione di } \psi^{(\nu)}.$$

Su U_{ν, i_0, \dots, i_q} risulta:

$$(\delta_{q-1} \psi^{(\nu)})_{i_0, \dots, i_q} = \sum_{h=0}^q (-1)^h f_{\nu, i_0, \dots, \hat{i}_h, \dots, i_q} = f_{i_0, \dots, i_q}$$

per la condizione di cociclo $\delta_q f = 0$, e questo mostra che vale anche la (ii).

Se i_{\min} è il minimo di I , poniamo $f^{(i_{\min})} = f$. La (\dagger) è verificata banalmente, perché $\Omega_{i_{\min}} = \emptyset$, e la costruzione appena descritta ci permette di trovare una $\psi^{(i_{\min})}$ che soddisfa (i) e (ii) per $\nu = i_{\min}$. Definiamo $f^{(i_{\min}+1)} = f - \delta_{q-1}(\psi^{(i_{\min})})$.

Dimostriamo per induzione transfinita che è possibile costruire delle famiglie $\{f^{(\nu)}\}_{\nu \in I}$, con $f^{(\nu)} \in \mathcal{L}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, e $\{\psi^{(\nu)}\}_{\nu \in I}$, con $\psi^{(\nu)} \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, che verifichino per ogni $\nu \in I$ le proprietà (\dagger), (i), (ii), (iii) e

$$(\ddagger) \quad f^{(\nu+1)} = f^{(\nu)} - \delta_{q-1}(\psi^{(\nu)}) \quad \forall \nu \in I \quad \text{che non sia massimo.}$$

Fissiamo ora un $\mu \in I$ con $\mu > i_{\min}$ e supponiamo che si siano già ottenute le $\psi^{(j)}$ per tutti gli indici $j < \mu$. Consideriamo ora la somma

$$\sum_{j < \mu} \psi^{(j)}.$$

Poiché \mathcal{U} è localmente finita, per ogni punto p di X esiste un intorno Ω_p di p che interseca soltanto un numero finito di aperti U_i del ricoprimento. Quindi per ogni $(i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_{q-1}(\mathcal{U})$ le somme

$$\sum_{j < \mu} r_{U_{i_1, \dots, i_q} \cap \Omega_p}^{U_{i_1, \dots, i_q}} (\psi_{i_1, \dots, i_q}^{(j)})$$

contengono soltanto un numero finito di addendi diversi da zero. Infatti, per la proprietà (ii), è $r_{U_{i_1, \dots, i_q} \cap \Omega_p}^{U_{i_1, \dots, i_q}} (\psi_{i_1, \dots, i_q}^{(j)}) = 0$ se $(j, i_1, \dots, i_q) \notin \mathcal{N}_q(\mathcal{U} \cap \Omega_p)$ e per la

scelta di Ω_p il numero di tali j , per ogni scelta di $(i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_{q-1}(\mathcal{U})$, è finito. Possiamo allora definire:

$$f^{(\mu)} = f - \delta_{q-1} \left(\sum_{j < i} \psi^{(j)} \right).$$

Osserviamo che, se i ammette un elemento precedente, cioè se $\mu = \nu + 1$ per qualche $\nu \in I$, allora vale la (\ddagger).

Per la prima parte della dimostrazione, possiamo definire $\psi^{(\mu)}$ in modo che siano soddisfatte le (i), (ii), (iii) (con μ al posto di ν).

Una volta costruite le famiglie $\{f^{(\nu)}\}$ e $\{\psi^{(\nu)}\}$, osserviamo che la somma:

$$\psi = \sum_{\nu \in I} \psi^{(\nu)}$$

definisce un elemento $\psi \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ e che

$$(\clubsuit) \quad \delta_{q-1}(\psi) = f.$$

Ciò è vero perché, per ogni aperto Ω di X , se $(i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_{q-1}(\mathcal{U})$ e $(\nu, i_1, \dots, i_q) \notin \mathcal{N}_q(\mathcal{U} \cap \Omega)$, abbiamo $r_{U_{i_1, \dots, i_q} \cap \Omega}^{U_{i_1, \dots, i_q}}(\psi_{i_1, \dots, i_q}^{(\nu)}) = 0$. Quindi, poiché \mathcal{U} è localmente finito, le somme

$$\sum_{\nu \in I} \psi_{i_1, \dots, i_q}^{(\nu)}$$

sono localmente finite. Analogamente, $r_{U_{i_0, i_1, \dots, i_q} \cap \Omega}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}}((f^{(\nu)} - f^{(\nu+1)})_{i_0, i_1, \dots, i_q}) = 0$ a meno che qualcuna delle $(q+1)$ uple $(\nu, i_0, \dots, \hat{i}_h, \dots, i_q)$ o $(\nu+1, i_0, \dots, \hat{i}_h, \dots, i_q)$ non appartengano a $\mathcal{N}_q(\mathcal{U} \cap \Omega)$. Perciò anche le somme:

$$\sum_{\nu \in I} (f_{i_0, \dots, i_q}^{\nu} - f_{i_0, \dots, i_q}^{\nu+1})$$

sono localmente finite e

$$\sum_{\nu \in I} (f_{i_0, \dots, i_q}^{\nu} - f_{i_0, \dots, i_q}^{\nu+1}) = f_{i_0, \dots, i_q}.$$

Otteniamo perciò la (\clubsuit), e quindi la tesi. \square

Utilizziamo il Lemma XVIII.12.8 per dimostrare il:

Teorema XVIII.12.9. *Sia X uno spazio paracompatto. Allora, per ogni fascio fiacco \mathcal{S} su X abbiamo $H^q(X, \mathcal{S}) = 0$ per ogni $q > 0$.*

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza del Lemma XVIII.12.8, perché, essendo X paracompatto, i gruppi di coomologia di Čech si possono calcolare utilizzando i ricoprimenti aperti localmente finiti. \square

Il Teorema di de Rham

XIX.1. Il teorema di de Rham

Teorema XIX.1.1. *Sia M una varietà differenziabile paracompatta ed \mathcal{S} un fascio di \mathcal{E} -moduli su M . Allora*

$$(19.1.1) \quad H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) = 0, \quad \forall q \geq 1,$$

per ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} di M .

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che, per ogni intero $q \geq 0$,

$$(19.1.2) \quad \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathcal{S}) = \{(f_{i_1, \dots, i_h}) \mid f_{i_1, \dots, i_h} \in \mathcal{S}(U_{i_1, \dots, i_h}), f_{i_{\sigma_1}, \dots, i_{\sigma_h}} = \varepsilon(\sigma) f_{i_1, \dots, i_h}\}$$

e che il differenziale del complesso

$$\dots \longrightarrow \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^{h+2}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow \dots$$

è definito da

$$\delta : \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}),$$

$$(\delta(f_{i_0, \dots, i_h}))_{i_0, i_1, \dots, i_{h+1}} = \sum_{j=0}^{h+1} (-1)^j f_{i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_{h+1}}|_{U_{i_0, i_1, \dots, i_{h+1}}}.$$

Sia $\{\chi_i\}_{i \in I}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento \mathcal{U} . Definiamo

$$\chi : \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \quad \text{mediante}$$

$$(\chi(f_{i_0, \dots, i_h}))_{i_1, \dots, i_h} = \sum_{i \in I} [\chi_i f_{i, i_1, \dots, i_h}], \quad \text{ove}$$

$$\mathcal{S}(U_{i_1, \dots, i_h}) \ni [\chi_i f_{i, i_1, \dots, i_h}] = \begin{cases} \chi_i f_{i, i_1, \dots, i_h} & \text{in } U_{i, i_1, \dots, i_h}, \\ 0 & \text{in } U_{i_1, \dots, i_h} \setminus U_{i, i_1, \dots, i_h}. \end{cases}$$

La tesi segue allora dall'identità

$$(\delta \circ \chi + \chi \circ \delta)f = f, \quad \forall f \in \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathcal{S}), \quad \forall h \geq 1.$$

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} (\chi \circ \delta(f))_{i_0, \dots, i_h} &= \chi \left(\sum_{j=0}^{h+1} (-1)^j f_{i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_{h+1}}|_{U_{i_0, i_1, \dots, i_{h+1}}} \right) \\ &= \sum_i \chi_i f_{i_0, \dots, i_h} - \sum_{j=0}^h [\chi_i f_{i, i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_h}] \\ &= f_{i_0, \dots, i_h} - \sum_{j=0}^h (-1)^j [\chi_i f_{i, i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_h}] \\ &= f_{i_0, \dots, i_h} - (\delta \circ \chi(f))_{i_0, \dots, i_h}. \end{aligned}$$

□

Se \mathcal{S} è un fascio su M ed $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di M , definiamo

$$(19.1.3) \quad \delta_0 : \mathcal{S}(M) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}), \quad \text{mediante } (\delta_0 s)_i = s|_{U_i}, \quad \forall i \in I.$$

Se \mathcal{S} è un fascio di gruppi abeliani, allora la

$$(19.1.4) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S}(M) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{S})$$

è esatta per definizione di fascio.

Dal Teorema XIX.1.1 otteniamo allora

Corollario XIX.1.2. *Se M è una varietà differenziabile paracompatta ed \mathcal{S} un fascio di \mathcal{E} -moduli su M , allora la successione*

$$(19.1.5) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{S}(M) & \xrightarrow{\delta_0} & \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \\ & & & & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{S}) & \longrightarrow & \dots & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \\ & & & & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^{h+2}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

è esatta. \square

Per ogni intero $q \geq 0$, i germi di forme differenziali alternate omogenee di grado q formano un fascio di \mathcal{E} -moduli su M , che denoteremo con Ω^q .

Per ogni coppia di interi non negativi h, q definiamo

$$(19.1.6) \quad \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \Omega^q) = \{f = (f_{i_0, \dots, i_h}) \mid f_{i_0, \dots, i_h} \in \Omega^q(U_{i_0, \dots, i_h}), f_{i_{\sigma_0}, \dots, i_{\sigma_h}} = \varepsilon(\sigma) f_{i_0, \dots, i_h}\}.$$

Abbiamo i due omomorfismi

$$\begin{aligned} d : \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \Omega^q) &\longrightarrow \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \Omega^{q+1}), \quad \text{con} \\ (df)_{i_0, \dots, i_h} &= (df_{i_0, \dots, i_h}), \\ \delta : \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \Omega^q) &\longrightarrow \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{U}, \Omega^q), \quad \text{con} \\ (\delta f)_{i_0, i_1, \dots, i_h} &= \sum_{j=0}^h (-1)^j f_{i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_h} |_{U_{i_0, i_1, \dots, i_h}}. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$d \circ \delta = \delta \circ d.$$

Lemma XIX.1.3. *Sia M una varietà differenziabile paracompatta. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di M . Allora*

(1) *per ogni $f_q \in \mathcal{L}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ esistono una successione $\{f_{q-h}^h\}$ ed un elemento f^q con le proprietà:*

$$(19.1.7) \quad \begin{cases} f_{q-h-1}^h \in \mathcal{C}^{q-h-1}(\mathcal{U}, \Omega^h), & h = 0, 1, \dots, q-1 \\ f^q \in \mathcal{L}^q(M), \\ f_q = \delta f_{q-1}^0, \\ df_{q-h-1}^h = \delta f_{q-h-2}^{h+1}, & h = 0, \dots, q-2, \\ df_0^{q-1} = \delta_0 f^q. \end{cases}$$

(2) Se $f_q \in \mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, ed $\{f_{q-h}^h\}$, f^q soddisfano le (19.1.7), allora $f^q \in \mathcal{B}^q(M)$.

DIMOSTRAZIONE. (1). Costruiamo le f_{q-h-1}^h per ricorrenza su h . Per $h = 0$, osserviamo che $f_q \in \mathcal{L}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^q(\mathcal{U}, \Omega^0)$. Possiamo quindi definire la f_{q-1}^0 utilizzando il Teorema XIX.1.1, perché $\Omega^0 \simeq \mathcal{E}$. Supponiamo di aver costruito $f_{q-1}^0, \dots, f_{q-h-1}^h$ con $f_{q-j-1}^j \in \mathcal{C}^{q-j-1}(\mathcal{U}, \Omega^j)$ per $0 \leq j \leq h < q-1$ con

$$\begin{cases} f_q = \delta f_{q-1}^0, \\ df_{q-1}^0 = \delta f_{q-2}^1, \\ \dots \\ df_{q-h+1}^{h-2} = \delta f_{q-h}^{h-1}, \\ df_{q-h}^{h-1} = \delta f_{q-h-1}^h. \end{cases}$$

Allora

$$\delta(df_{q-h-1}^h) = d \circ \delta f_{q-h-1}^h = d^2 f_{q-h}^{h-1} = 0$$

e quindi, per il Teorema XIX.1.1 esiste $f_{q-h-2}^{h+1} \in \mathcal{C}^{q-h-2}(\mathcal{U}, \Omega^{h+1})$ tale che

$$\delta f_{q-h-2}^{h+1} = df_{q-h-1}^h.$$

Dopo aver ottenuto le f_{q-h-1}^h per $h = 0, \dots, q-1$, osserviamo che

$$df_1^{q-2} = \delta f_0^{q-1} \implies \delta(df_0^{q-1}) = d \circ \delta f_0^{q-1} = d^2 f_1^{q-2} = 0.$$

Per il Corollario XIX.1.2 vi è allora una $f^q \in \Omega^q(M)$ per cui $\delta_0(f^q) = df_0^q$. Chiaramente $f^q \in \mathcal{L}^q(M)$.

(2). Esaminiamo dapprima il caso $q = 1$. Abbiamo allora $f_1 \in \mathcal{L}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, $f_0^0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{E})$, $f^1 \in \mathcal{L}^1(M)$ ed

$$\begin{cases} f_1 = \delta f_0^0, \\ df_0^0 = \delta_0 f^1. \end{cases}$$

Se $f_1 = \delta g_0$, con $g_0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, allora $\delta(f_0^0 - g_0^0) = 0$ ed esiste quindi una $g \in \mathcal{E}(M)$ tale che $f_0^0 - g_0^0 = \delta_0(g)$. Questa ci dà $dg = f^1$.

Supponiamo ora che $q \geq 2$ e che $f_q = \delta g_{q-1}$, con $g_{q-1} \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Assegnata una sequenza $\{f_{q-h-1}^h\}_{0 \leq h \leq q-1}$, costruiamo un'altra sequenza $\{g_{q-h-2}^h\}_{0 \leq h \leq q-2}$, con

$$\begin{cases} g_{q-h-2}^h \in \mathcal{C}^{q-h-2}(\mathcal{U}, \Omega^h), & \text{per } h = 0, \dots, q-2, \\ f_{q-1}^0 = g_{q-1} + \delta g_{q-2}^0, \\ f_{q-h-1}^h = dg_{q-h-1}^{h-1} + \delta g_{q-h-2}^h, & \text{per } h = 1, \dots, q-2. \end{cases}$$

Ragioniamo per ricorrenza. Abbiamo

$$\delta(f_{q-1}^0 - g_{q-1}) = f_q - f_q = 0 \implies \exists g_{q-2}^0 \in \mathcal{C}^{q-2}(\mathcal{U}, \Omega^0) \text{ t.c. } f_{q-1}^0 = g_{q-1} + \delta g_{q-2}^0.$$

Se abbiamo definito le g_{q-j-2}^j per $j = 0, \dots, h < q - 2$, abbiamo

$$\begin{aligned} \delta f_{q-h-2}^{h+1} &= df_{q-h-1}^h = d(\delta g_{q-h-2}^h) = \delta(dg_{q-h-2}^h) \\ \implies \exists g_{q-h-3}^{h+1} &\in \mathcal{C}^{q-h-3}(\mathcal{U}, \mathcal{Q}^{h+1}) \text{ t.c. } f_{q-h-2}^{h+1} = dg_{q-h-2}^h + \delta g_{q-h-3}^{h+1} \end{aligned}$$

per il Teorema XIX.1.1. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} \delta f_0^{q-1} &= df_1^{q-2} = d(\delta g_0^{q-2}) = \delta(dg_0^{q-2}) \\ \implies \exists g^{q-1} &\in \mathcal{Q}^{q-1}(M) \text{ t.c. } f_0^{q-1} - dg_0^{q-2} = \delta_0(g^{q-1}). \end{aligned}$$

Abbiamo allora $f^q = dg^{q-1}$. La dimostrazione è completa. \square

Otteniamo così il

Teorema XIX.1.4. *Sia M una varietà differenziabile paracompatta ed \mathcal{U} un suo ricoprimento aperto. Allora per ogni q la (19.1.7) definisce per passaggio ai quozienti un omomorfismo*

$$(19.1.8) \quad \lambda_q : H^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow H^q(M).$$

L'omomorfismo λ_0 è un isomorfismo e λ_1 iniettivo, per ogni ricoprimento \mathcal{U} di M .

DIMOSTRAZIONE. Per $q = 0$ la λ_0 è l'identità tra i due gruppi, identificati allo spazio delle funzioni reali localmente costanti su M . Il fatto che l'omomorfismo λ sia definito per $q \geq 1$ è stato dimostrato nel Lemma XIX.1.3 Dimostriamo l'iniettività di λ_1 . Siano quindi $f_1 \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, $f_0^0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{E})$, $f^1 \in \mathcal{Z}^1(M)$ ed

$$\begin{cases} f_1 = \delta f_0^0, \\ df_0^0 = \delta_0 f^1. \end{cases}$$

Se $f^1 = dg^0$ per qualche $g^0 \in \mathcal{C}^\infty(M)$, otteniamo

$$d(f_0^0 - \delta_0(g^0)) = \delta_0(f^1 - dg^0) = 0.$$

Quindi

$$f_0^0 - \delta_0(g^0) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}), \quad \text{e} \quad \delta(f_0^0 - \delta_0(g^0)) = \delta(f_0^0) = f_1.$$

Ciò dimostra che λ_1 è iniettiva. \square

Esempio XIX.1.5. Consideriamo il ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ del toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, ove U_1 ed U_2 sono gli aperti

$$U_1 = \pi(\{(x, y) \mid \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\}), \quad U_2 = \pi(\{(x, y) \mid x - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}\}),$$

ove $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ è la proiezione nel quoziente. Osserviamo che $U_1 \cap U_2 = U_{1,2}$ ha due componenti connesse. È quindi $\mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$. Poiché $\mathbb{R}(T^2) = \mathbb{R}$, la $\delta : \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ha rango 1. Quindi $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$. L'applicazione $\lambda_1 : H^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(T^2)$ è quindi, in questo caso, iniettiva e non nulla, ma non surgettiva.

Teorema XIX.1.6. *Sia M una varietà differenziabile ed $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un suo buon ricoprimento. Allora l'omomorfismo (19.1.8) è un isomorfismo per ogni $q \geq 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo osservato che λ_q è un isomorfismo per $q = 0$.

Sia $f^1 \in \mathcal{Z}^1(M)$. Poiché gli aperti di \mathcal{U} sono contrattili, esiste una $f_0^0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ tale che

$$df_0^0 = \delta_0 f^1.$$

Allora δf_0^0 soddisfa

$$d(\delta f_0^0) = \delta \circ df_0^0 = \delta \circ \delta_0 f^1 = 0$$

e quindi $f_1 = \delta f_0^0 \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.

Se fosse $f^1 = dg^0$ per qualche $g^0 \in \Omega^0(M) = \mathcal{E}(M)$, avremmo

$$\delta_0 f^1 = \delta_0(dg^0) = d \circ \delta_0(g^0) = df_0^0 \implies u_0^0 = f_0^0 - \delta_0(g^0) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}),$$

$$\delta u_0^0 = \delta f_0^0 = f_1 \in \mathcal{B}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}).$$

La corrispondenza

$$\begin{array}{ccc} f^1 & \longrightarrow & f_0^0 & \longrightarrow & \delta f_0^0 \\ \in \mathcal{Z}^1(M) & & \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^0) & & \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \end{array}$$

definisce quindi per passaggio al quoziente un'applicazione $\psi_1 : H^1(M) \rightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ che inverte la λ_1 .

Generalizziamo questa costruzione e costruiamo, anche per ogni $q \geq 2$, un'applicazione $\psi_q : H^q(M) \rightarrow H^q(M, \mathbb{R})$ che inverte la λ_q .

Sia $f^q \in \mathcal{Z}^q(M)$, con $q \geq 2$. Dico che esiste una successione

$$(19.1.9) \quad f_0^{q-1} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^{q-1}), f_1^{q-2} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^{q-2}), \dots, f_{q-1}^0 \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \Omega^0)$$

tale che

$$(19.1.10) \quad \begin{cases} df_0^{q-1} = \delta_0 f^q, \\ df_1^{q-2} = \delta f_0^{q-1}, \\ \dots\dots\dots \\ df_{q-1}^0 = \delta f_{q-2}^1. \end{cases}$$

Infatti, poiché gli U_i sono contrattili, per ogni $i \in I$ possiamo trovare una forma $f_i^{q-1} \in \Omega^{q-1}(U_i)$ tale che

$$df_i^{q-1} = f|_{U_i}, \quad \forall i \in I.$$

Possiamo quindi definire $f_0^{q-1} = (f_i^{q-1})_{i \in I} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^{q-1})$. Supponiamo per ricorrenza di aver definito $f_0^{q-1}, \dots, f_h^{q-h-1}$ con

$$\begin{cases} f_r^{q-r-1} \in \mathcal{C}^r(\mathcal{U}, \Omega^{q-r-1}), & 0 \leq r \leq h, \\ df_0^{q-1} = \delta_0 f^q, \\ df_r^{q-r-1} = \delta f_{r-1}^{q-r}, & 1 \leq r \leq h. \end{cases}$$

Abbiamo

$$d \circ \delta f_h^{q-h-1} = \delta \circ df_h^{q-h-1} = \delta^2 f_{h-1}^{q-h} = 0$$

e quindi

$$\exists f_{h+1}^{q-h-2} \in \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{U}, \Omega^{q-h-2}) \quad \text{tale che} \quad df_{h+1}^{q-h-2} = \delta f_h^{q-h-1}.$$

Abbiamo quindi ottenuto la successione (19.1.9). Sia

$$f_q = \delta f_{q-1}^0.$$

Poiché

$$df_q = d \circ \delta f_{q-1}^0 = \delta \circ df_{q-1}^0 = \delta^2 f_{q-2}^1 = 0,$$

$f_q = (f_{i_0, \dots, i_q})$ con f_{i_0, \dots, i_q} costante su U_{i_0, \dots, i_q} . Quindi $f_q \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Inoltre

$$\delta f_q = \delta^2 f_{q-1}^0 = 0 \implies f_q \in \mathcal{Z}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}).$$

Per dimostrare che la classe di coomologia definita da f_q in $H^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ dipende solo dalla classe di coomologia di f^q , è sufficiente verificare che, se (19.1.9) è una successione che soddisfa (19.1.10) ed $f^q = dg^{q-1}$ per una $g^{q-1} \in \Omega^{q-1}(M)$, allora $f_q \in \mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} f^q = dg^{q-1} &\implies d(f_0^{q-1} - \delta_0 g^{q-1}) = 0 \\ &\implies \exists g_0^{q-2} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^{q-2}) \text{ t.c. } f_0^{q-1} - \delta_0 g^{q-1} = dg_0^{q-2} \\ &\implies df_1^{q-2} = \delta f_0^{q-1} = \delta(\delta_0 g^{q-1} + dg_0^{q-2}) = \delta \circ dg_0^{q-2} = d\delta g_0^{q-2} \\ &\implies d(f_1^{q-2} - \delta g_0^{q-2}) = 0 \\ &\implies \exists g_1^{q-3} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^{q-3}) \text{ t.c. } f_1^{q-2} - \delta g_0^{q-2} = dg_1^{q-3} \implies \dots \end{aligned}$$

Possiamo cioè costruire per ricorrenza una successione $g_r^{q-r-2} \in \mathcal{C}^r(\mathcal{U}, \Omega^{q-r-2})$, per $r = 0, 1, \dots, q-2$ tale che

$$\begin{cases} f^q = dg^{q-1}, \\ f_0^{q-1} - \delta_0 g^{q-1} = dg_0^{q-2}, \\ f_r^{q-r-1} - \delta g_{r-1}^{q-r-1} = dg_r^{q-r-2} \quad 1 \leq r \leq q-2. \end{cases}$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} df_{q-1}^0 = \delta f_{q-2}^1 = \delta dg_{q-2}^0 &\implies d(f_{q-1}^0 - \delta g_{q-2}^0) = 0 \\ &\implies g_{q-1} = f_{q-1}^0 - \delta g_{q-2}^0 \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

da cui $f_q = \delta g_{q-1}$. Quindi la (19.1.9), (19.1.10) definisce un'applicazione

$$(19.1.11) \quad \psi_q : H^q(M) \longrightarrow H^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}),$$

che, per le (19.1.10) è l'inversa di λ_q . □

Osservazione XIX.1.7. Si possono costruire buoni ricoprimenti di M a partire da una sua triangolazione. A partire da una triangolazione \mathcal{K} di M , ad ogni vertice $p \in \mathcal{K}_0$ possiamo associare l'aperto U_p formato dall'unione di tutte le parti interne relative dei semplici di \mathcal{K} che contengono p , ovvero la parte interna della stella di p in \mathcal{K} . La famiglia $\{U_p \mid p \in \mathcal{K}_0\}$ è allora un buon ricoprimento, localmente finito, di M .

Esempio XIX.1.8. Otteniamo un buon ricoprimento della sfera S^n nel modo seguente.

Consideriamo la frontiera di un semplice $(n + 1)$ -dimensionale Σ circoscritto e sia $\pi : \Sigma \rightarrow S^n$ l'omeomorfismo ottenuto per restrizione dalla proiezione

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \ni x \rightarrow \frac{x}{|x|} \in S^n.$$

Siano F_0, \dots, F_n le facce di Σ . Allora gli

$$U_i = \pi(\Sigma \setminus F_i), \quad i = 0, \dots, n$$

sono gli aperti di un buon ricoprimento di S^n . Abbiamo allora

$$\mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{\binom{n+1}{h}} \simeq \Lambda^h \mathbb{R}^{n+1}.$$

Per descrivere questo isomorfismo, Fissiamo una base e_0, \dots, e_n di \mathbb{R}^{n+1} , e facciamo corrispondere ad $(x_{i_0, \dots, i_h}) \in \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ l'elemento

$$\sum_{0 \leq i_0 < \dots < i_h \leq n} x_{i_0, \dots, i_h} e_{i_0} \wedge \dots \wedge e_{i_h}.$$

Abbiamo allora un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \Lambda^h \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow[e \wedge \cdot]{} & \Lambda^{h+1} \mathbb{R}^{n+1} \end{array}$$

per $0 \leq h \leq n - 1$, con $e = e_0 + \dots + e_n$.

Si verifica facilmente che

$$\Lambda^h \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow[e \wedge \cdot]{} \Lambda^{h+1} \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow[e \wedge \cdot]{} \Lambda^{h+2} \mathbb{R}^{n+1}$$

è esatta per $0 \leq h \leq n$. Ne ricaviamo un'altra dimostrazione del fatto che

$$H^q(S^n) \simeq H^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

XIX.2. Prolungamento di sezioni

Teorema XIX.2.1. Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio su uno spazio paracompatto X . Se Y è un chiuso di X ed $s_Y \in \mathcal{S}(Y)$, allora esiste un intorno aperto U di Y in X ed una sezione $s_U \in \mathcal{S}(U)$ tale che $s_U|_Y = s_Y$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché X è paracompatto, possiamo trovare un ricoprimento aperto localmente finito $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di Y in X tale che per ogni $i \in I$ vi sia una sezione $s_i \in \mathcal{S}(U_i)$ tale che $s_i|_{Y \cap U_i} = s_Y|_{Y \cap U_i}$. Fissiamo un altro ricoprimento aperto $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ di Y con $\bar{V}_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$. Osserviamo che, se $i, j \in I$, gli insiemi

$$F_{i,j} = \{p \in \bar{V}_i \cap V_j \mid s_{i(p)} \neq s_{j(p)}\}$$

sono chiusi che non intersecano Y . Poiché la famiglia $\{F_{i,j}\}_{i,j \in I}$ è localmente finita, l'unione $F = \bigcup_{i,j \in I} F_{i,j}$ è un chiuso che non interseca Y . Allora

$$U = \bigcup_{i \in I} V_i \setminus F$$

è un intorno aperto di Y in X e possiamo definire su U una sezione $s_U \in \mathcal{S}(U)$ con $s_U|_Y = s_Y$ ponendo

$$s_U = s_i \quad \text{su} \quad V_i \setminus F.$$

□

XIX.3. Fasci molli

Definizione XIX.3.1. Un fascio d'insiemi $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ si dice *molle*¹, o *soffice*² se, per ogni chiuso Y di X l'applicazione di restrizione

$$(19.3.1) \quad \mathcal{S}(X) \ni s \longrightarrow s|_Y \in \mathcal{S}(Y)$$

è surgettiva.

Esempio XIX.3.2. Per il Teorema XIX.2.1 Ogni fascio fiacco è molle.

Esempio XIX.3.3. Se X è paracompatto, il fascio \mathcal{C} dei germi di funzioni reali continue su X è molle.

Sia infatti Y un sottoinsieme chiuso di X ed $s \in \mathcal{C}(Y)$. Per ogni punto $q \in Y$, esiste un intorno U_q di q in X ed una $\sigma_q \in \mathcal{C}(U_q)$ tale che $(\sigma_q)_{(p)} = s_{(p)}$ per ogni $p \in Y \cap U_q$. Consideriamo il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_q \mid q \in Y\} \cup \{X \setminus Y\}$ di X e sia $\{\chi_q\} \cup \{\chi_*\}$ una partizione continua dell'unità su X con $\text{supp } \chi_q \subset U_q$, $\text{supp } \chi_* \subset X \setminus Y$. Allora

$$\tilde{s}(p) = \sum_{\text{supp } \chi_q \ni p} \chi_q(p) \sigma_q(p)$$

è una funzione in $\mathcal{C}(X)$ con $\tilde{s}_{(p)} = s_{(p)}$ per ogni $p \in Y$.

La proprietà di essere *molle* è una proprietà locale. Abbiamo infatti

Proposizione XIX.3.4. Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio su uno spazio paracompatto X . Se ogni punto $p \in X$ ha un intorno aperto U_p in X tale che

$\forall F$ chiuso in X e contenuto in U_p la restrizione $\mathcal{S}(U_p) \longrightarrow \mathcal{S}(F)$ è surgettiva, allora \mathcal{S} è molle.

DIMOSTRAZIONE. Sia Y un chiuso di X ed $s_Y \in \mathcal{S}(Y)$ una sezione di \mathcal{S} su Y . Possiamo allora trovare un ricoprimento aperto localmente finito $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X tale che:

- (1) per ogni $i \in I$ con $U_i \cap Y \neq \emptyset$ esiste una $s_i \in \mathcal{S}(U_i)$ tale che $s_i|_{Y \cap U_i} = s|_{Y \cap U_i}$;
- (2) per ogni $i \in I$ ed ogni chiuso F di X tale che $F \subset U_i$ la restrizione $\mathcal{S}(U_i) \rightarrow \mathcal{S}(F)$ è surgettiva.

¹In francese *mou*.

²In inglese, *soft*.

Fissiamo un raffinamento $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ di \mathcal{U} con $\bar{V}_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$ e poniamo, per ogni sottoinsieme J di I ,

$$F_J = \bigcup_{i \in J} \bar{V}_i.$$

Sia

$$\Phi = \{(s_J, J) \mid J \subset I, s_J \in \mathcal{S}(F_J), s_J|_{Y \cap F_J} = s_Y|_{Y \cap F_J}\}.$$

Definiamo su Φ la relazione d'ordine

$$(s_J, J) \leq (s_K, K) \iff J \subset K, s_K|_{F_J} = s_J.$$

Chiaramente Φ è non vuota e induttiva. Essa ha pertanto un elemento massimale (s_{J_0}, J_0) . Dimostriamo che $J_0 = I$. Se così non fosse, fissiamo $i_0 \in I \setminus J_0$. Consideriamo allora la sezione

$$s_{i_0}^* = \begin{cases} s_{J_0} & \text{su } F_{J_0} \cap F_{i_0}, \\ s_{i_0} & \text{su } F_{i_0} \cap Y. \end{cases}$$

Poiché $F_{i_0}^* = (F_{J_0} \cap F_{i_0}) \cup (F_{i_0} \cap Y)$ è un chiuso contenuto in U_{i_0} , per ipotesi possiamo prolungare $s_{i_0}^* \in \mathcal{S}(F_{i_0}^*)$ ad una sezione $\tilde{s}_{i_0} \in \mathcal{S}(U_{i_0})$. Allora

$$s_{J_0 \cup \{i_0\}} = \begin{cases} s_{J_0} & \text{su } F_{J_0}, \\ \tilde{s}_{i_0} & \text{su } F_{i_0} \end{cases}$$

definisce un elemento $(s_{J_0 \cup \{i_0\}}, J_0 \cup \{i_0\})$ di Φ con $(s_{J_0 \cup \{i_0\}}, J_0 \cup \{i_0\}) \succ (s_{J_0}, J_0)$. Abbiamo ottenuto una contraddizione, che dimostra che $J_0 = I$. La dimostrazione è completa. \square

Proposizione XIX.3.5. *Supponiamo che X sia paracompatto e sia*

$$(19.3.2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S}' \xrightarrow{\phi} \mathcal{S} \xrightarrow{\psi} \mathcal{S}'' \longrightarrow 0$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani. Se \mathcal{S}' è molle, allora la successione

$$(19.3.3) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S}'(X) \longrightarrow \mathcal{S}(X) \longrightarrow \mathcal{S}''(X) \longrightarrow 0$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. L'esattezza in $\mathcal{S}'(X)$ ed in $\mathcal{S}(X)$ è conseguenza della definizione di fascio. È quindi sufficiente dimostrare che $\mathcal{S}(X) \xrightarrow{\psi} \mathcal{S}''(X)$ è surgettiva.

Sia $s'' \in \mathcal{S}''(X)$. Per ipotesi, possiamo trovare un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X , che possiamo supporre localmente finito per la paracompattezza di X , e sezioni $s_i \in \mathcal{S}(U_i)$, tali che

$$\psi(s_i) = s''|_{U_i}, \quad \forall i \in I.$$

Sia $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X con la proprietà che $\bar{V}_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$. Bene-ordiniamo I e dimostriamo che, posto $Y_i = \bigcup_{j \leq i} \bar{V}_j$, è possibile trovare una famiglia di sezioni

$$(19.3.4) \quad \sigma_i \in \mathcal{S}(Y_i) \text{ tali che } \psi(\sigma_i) = s''|_{Y_i}, \quad \sigma_i|_{Y_j} = \sigma_j|_{Y_j} \text{ se } j < i.$$

Infatti, sia J l'insieme degli indici $h \in I$ per cui si possono costruire le $\sigma_i \in \mathcal{S}(Y_i)$, per $i \leq h$, in modo che valgano le (19.3.4) per $i \leq h$. L'insieme J è non vuoto

perché contiene il minimo di I . Supponiamo per assurdo che $J \neq I$. Sia allora h_0 il minimo di $I \setminus J$. L'unione $Y' = \bigcup_{i < h_0} \bar{V}_i$ è un chiuso di X perché unione localmente finita di chiusi. Definiamo una sezione $\sigma' \in \mathcal{S}(Y')$ ponendo

$$\sigma'|_{Y_i} = \sigma_i|_{Y_i} \text{ per } i < h_0.$$

Poiché \mathcal{S} è molle, esiste una sezione $\tilde{\sigma}' \in \mathcal{S}(X)$ tale che $\sigma' = \tilde{\sigma}'|_{Y'}$. Osserviamo ora che $\phi(\tilde{\sigma}' - s_{h_0})$ è definita e si annulla in tutti i punti di $\bar{V}_{h_0} \cap Y'$. Per l'esattezza di (19.3.2) esiste allora una sezione $s' \in \mathcal{S}'(\bar{V}_{h_0} \cap Y')$ tale che $(\tilde{\sigma}' - s_{h_0})|_{\bar{V}_{h_0} \cap Y'} = \phi(s')$. Poiché \mathcal{S}' è molle, esiste una $\tilde{s}' \in \mathcal{S}'(X)$ tale che $s' = \tilde{s}'|_{\bar{V}_{h_0} \cap Y'}$. Definiamo allora l'elemento σ_{h_0} ponendo

$$\sigma_{h_0} = \begin{cases} \sigma_i & \text{su } Y_i \text{ se } i < h_0, \\ s_{h_0} + \phi(\tilde{s}') & \text{su } \bar{V}_{h_0}. \end{cases}$$

Allora $\sigma_{h_0} \in \mathcal{S}(Y_{h_0})$ e la famiglia $\{\sigma_i \mid i \leq h_0\}$ soddisfa le (19.3.4) per ogni $i \leq h_0$. Quindi $h_0 \in J$ ci dà una contraddizione e dimostra che è possibile definire una famiglia $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ che soddisfi le (19.3.4) per ogni $i \in I$. Otteniamo allora

$$\psi(s) = s'', \quad \text{con } s \in \mathcal{S}(X) \text{ definito da } s|_{Y_i} = \sigma_i, \quad \forall i \in I.$$

□

Teorema XIX.3.6. *Siano X uno spazio pracompatto e*

$$(19.3.5) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S} \xrightarrow{\beta} \mathcal{S}'' \longrightarrow 0$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su X . Se \mathcal{S} ed \mathcal{S}' sono molli, anche \mathcal{S}'' è molle.

DIMOSTRAZIONE. Sia Y un sottoinsieme chiuso di X ed $s'' \in \mathcal{S}''(Y)$. Per la Proposizione XIX.3.5, esiste una sezione $s \in \mathcal{S}(Y)$ tale che $\alpha(s) = s''$. Poiché \mathcal{S} è molle, abbiamo $s = \tilde{s}|_Y$ per una sezione $\tilde{s} \in \mathcal{S}(X)$. Allora $\tilde{s}'' = \alpha(\tilde{s}) \in \mathcal{S}''(X)$ ed $s''|_Y = \tilde{s}''$. □

Teorema XIX.3.7. *Se*

$$(19.3.6) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S}^0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{S}^2 \longrightarrow \dots$$

è una successione esatta di fasci molli di gruppi abeliani, allora anche la successione

$$(19.3.7) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S}^0(X) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{S}^1(X) \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{S}^2(X) \longrightarrow \dots$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. L'esattezza in $\mathcal{S}^0(X)$ è conseguenza della definizione di fascio.

Per ogni intero $h \geq 0$, per ipotesi la successione esatta corta di fasci

$$0 \longrightarrow \ker \delta_h \longrightarrow \mathcal{S}^h \xrightarrow{\delta_h} \ker \delta_{h+1} \longrightarrow 0.$$

è esatta. Poiché $\ker \delta_0$ è il fascio nullo, che è banalmente molle, segue per ricorrenza, dal Teorema XIX.3.6, che $\ker \delta_h$ è un fascio molle per ogni intero $h \geq 0$. Otteniamo quindi per ogni intero $h \geq 0$, per la Proposizione XIX.3.5, una successione esatta di fasci

$$0 \longrightarrow \ker \delta_h(X) \longrightarrow \mathcal{S}^h(X) \xrightarrow{\delta_h} \ker \delta_{h+1}(X) \longrightarrow 0,$$

che dimostra l'esattezza di (19.3.7) in $S^h(X)$. \square

Sia \mathcal{S} un fascio di gruppi abeliani su uno spazio topologico X ed $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X .

Definizione XIX.3.8. Se $s \in \mathcal{S}(X)$, chiamiamo *partizione di s su X subordinata ad \mathcal{U}* una successione $\{s_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{S}(X)$ tale che

$$(19.3.8) \quad \text{supp } s_i \subset U_i, \quad \{\text{supp } s_i\}_{i \in I} \text{ è localmente finita, } \quad s = \sum_{i \in I} s_i.$$

Abbiamo

Teorema XIX.3.9 (Esistenza di partizioni). *Se X è uno spazio paracompatto ed \mathcal{S} un fascio molle di gruppi abeliani, allora, per ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} di X ed ogni $s \in \mathcal{S}(X)$ esiste una partizione di s su X subordinata ad \mathcal{U} .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ un raffinamento localmente finito di \mathcal{U} , con funzione di raffinamento $j \rightarrow i_j$ e $\bar{V}_j \subset U_{i_j}$ per ogni $j \in J$. Siano $\{W_j\}_{j \in J}, \{G_j\}_{j \in J}$ altri ricoprimenti aperti di X con $\bar{W}_j \subset G_j \subset \bar{G}_j \subset V_j$ per ogni $j \in J$.

Bene-ordiniamo l'insieme J e dimostriamo per induzione transfinita che è possibile trovare sezioni $\sigma_j \in \mathcal{S}(X)$ con $\text{supp } \sigma_j \subset V_j$ e

$$\sum_{h \leq j} \sigma_{h(p)} = s_{(p)}, \quad \forall p \in \bigcup_{h \leq j} \bar{W}_h.$$

Per ogni $j \in J$, poniamo $Y_j = \bigcup_{h \leq j} \bar{W}_h \cup \bigcap G_j$. Gli insiemi Y_j sono chiusi perché unione localmente finita di chiusi. Se $j_0 = \min J$, definiamo $s_{j_0}^* \in \mathcal{S}(Y_{j_0})$ ponendo

$$s_{j_0}^* = \begin{cases} s & \text{su } \bar{W}_{j_0}, \\ 0 & \text{su } \bigcap G_{j_0} \end{cases}$$

Poiché \mathcal{S} è molle, esiste una sezione $s_{j_0} \in \mathcal{S}$ con $\sigma_{j_0}|_{Y_{j_0}} = s_{j_0}^*$.

Supponiamo che $j > j_0$ e di aver costruito σ_h per ogni $h < j$. Definiamo allora una sezione $s_j^* \in \mathcal{S}(Y_j)$ ponendo

$$s_j^* = \begin{cases} s - \sum_{h < j} \sigma_h & \text{su } \bar{W}_j, \\ 0 & \text{su } \bigcap G_j \cup \bigcup_{h < j} \bar{W}_h. \end{cases}$$

La sezione è ben definita perché

$$(s - \sum_{h < j} \sigma_h)_{(p)} = 0_{(p)}, \quad \forall p \in \bar{W}_j \cap (\bigcup_{h < j} \bar{W}_h).$$

Poiché \mathcal{S} è molle, esiste una sezione $\sigma_j \in \mathcal{S}(X)$ tale che $s_j^* = \sigma_j|_{Y_j}$. Chiaramente $\text{supp } \sigma_j \subset \bar{G}_j \subset V_j$. Ciò dimostra l'esistenza della successione $\{\sigma_j\}_{j \in J}$. Basterà allora porre

$$s_i = \sum_{j=i} \sigma_j$$

per avere la (19.3.8). □

Dal Teorema XIX.3.9 ricaviamo immediatamente:

Teorema XIX.3.10. *Se \mathcal{A} è un fascio d'anelli molle sullo spazio paracompatto X , allora ogni fascio di \mathcal{A} -moduli su X è molle.*

DIMOSTRAZIONE. Siano \mathcal{M} un fascio di \mathcal{A} -moduli su X , Y un chiuso di X e $\mu \in \mathcal{M}(Y)$ una sezione di \mathcal{M} su Y . Esistono allora un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di Y in X e sezioni $\mu_i \in \mathcal{M}(U_i)$ tali che $\mu_i|_{U_i \cap Y} = \mu|_{U_i \cap Y}$ per ogni $i \in I$. Per il Teorema XIX.3.9 esiste una partizione $\{\chi_i\} \cup \{\chi_*\}$ di $1 \in \mathcal{A}(X)$ su X subordinata al ricoprimento $\mathcal{U} \cup \{X \setminus Y\}$. Definiamo

$$\alpha_i = \begin{cases} \chi_i \mu_i & \text{su } U_i, \\ 0 & \text{su } X \setminus U_i. \end{cases}$$

Allora

$$\tilde{\mu} = \sum_{i \in I} \alpha_i \in \mathcal{M}(X) \quad \text{e} \quad \tilde{\mu}|_Y = \mu. \quad \square$$

XIX.4. Fasci fini

Definizione XIX.4.1. Un fascio \mathcal{S} di gruppi abeliani su uno spazio topologico X si dice *fine*³ se il fascio $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ è molle.

Teorema XIX.4.2. *Sia X uno spazio paracompatto.*

- (1) *Ogni fascio fine è su X è molle.*
- (2) *Siano \mathcal{S}, \mathcal{T} due fasci di gruppi abeliani su X . Se \mathcal{S} è fine, allora anche $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{T}$ è fine.*

XIX.5. Fasci differenziali

Sia X uno spazio topologico.

Definizione XIX.5.1. Un fascio graduato su X è il dato di una successione $\mathcal{A}^* = (\mathcal{A}^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ di fasci.

Siano $\mathcal{A}^* = (\mathcal{A}^n)_{n \in \mathbb{Z}}, \mathcal{B}^* = (\mathcal{B}^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ due fasci graduati su X . Un morfismo di grado k tra \mathcal{A}^* e \mathcal{B}^* è una successione $(f^n : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{B}^{n+k})$ di morfismi di fasci.

Un fascio differenziale su X è il dato di un fascio graduato di gruppi abeliani $\mathcal{A}^* = (\mathcal{A}^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ su X e di un morfismo di fasci abeliani di grado k

$$(19.5.1) \quad (\mathcal{A}^*, \delta^*) = (\delta^n : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}^{n+k})_{n \in \mathbb{Z}}$$

³Inglese: fine; Francese: fin

tale che

$$(19.5.2) \quad \delta^{n+k} \circ \delta^n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Associamo ad un fascio differenziale $(\mathcal{A}^*, \delta^*)$ i fasci

$$(19.5.3) \quad \mathcal{L}^n(\mathcal{A}^*, \delta^*) = \ker(\mathcal{A}^n \xrightarrow{\delta^n} \mathcal{A}^{n+k}),$$

$$(19.5.4) \quad \mathcal{B}^n(\mathcal{A}^*, \delta^*) = \text{Im}(\mathcal{A}^{n-k} \xrightarrow{\delta^{n-k}} \mathcal{A}^n),$$

$$(19.5.5) \quad \mathcal{H}^n(\mathcal{A}^*, \delta^*) = \mathcal{L}^n(\mathcal{A}^*, \delta^*) / \mathcal{B}^n(\mathcal{A}^*, \delta^*).$$

Il fascio $\mathcal{H}^n(\mathcal{A}^*, \delta^*)$ si dice il *fascio derivato di grado n di $(\mathcal{A}^*, \delta^*)$* .

Considereremo nel seguito, per semplicità e senza perdita di generalità, soltanto differenziali di grado 1.

XIX.6. Risoluzione d'un fascio

Sia \mathcal{A} un fascio di gruppi abeliani di base X .

Definizione XIX.6.1. Una *risoluzione coomologica* di \mathcal{A} è una successione esatta di fasci di gruppi abeliani della forma

$$(19.6.1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{J} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{L}^2 \xrightarrow{\delta^2} \dots$$

Esempio XIX.6.2 (Cocatene di Alexander-Spanier). Sia X uno spazio topologico ed \mathbb{A} un gruppo abeliano. Per ogni intero non negativo n , associamo ad ogni aperto U di X il gruppo abeliano delle applicazioni $f : U^{n+1} \rightarrow \mathbb{A}$. Otteniamo così un prefascio canonico, associato al fascio $\mathcal{F}^n(X, \mathbb{A})$, che si dice il *fascio delle cocatene di Alexander-Spanier di grado n di X a valori in \mathbb{A}* .

Ad $f : U^{n+1} \rightarrow \mathbb{A}$ associamo l'applicazione $\delta_U^n f : U^{n+2} \rightarrow \mathbb{A}$ definita da

$$(19.6.2) \quad (\delta^n f)(x_0, \dots, x_{n+1}) = \sum_{h=0}^{n+1} (-1)^h f(x_0, \dots, \widehat{x}_h, \dots, x_{n+1}).$$

Da questa otteniamo un morfismo di fasci di gruppi abeliani

$$(19.6.3) \quad \delta^n : \mathcal{F}^n(X, \mathbb{A}) \longrightarrow \mathcal{F}^{n+1}(X, \mathbb{A}).$$

Indicando con $\underline{\mathbb{A}}$ il fascio semplice di base X e fibra \mathbb{A} , abbiamo

$$(19.6.4) \quad \underline{\mathbb{A}} = \ker(\delta^0 : \mathcal{F}^0(X, \mathbb{A}) \rightarrow \mathcal{F}^1(X, \mathbb{A})).$$

La

$$(19.6.5) \quad 0 \rightarrow \underline{\mathbb{A}} \longrightarrow \mathcal{F}^0(X, \mathbb{A}) \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{F}^1(X, \mathbb{A}) \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{F}^2(X, \mathbb{A}) \rightarrow \dots$$

è una risoluzione del fascio semplice $\underline{\mathbb{A}}$ su X .

Siano infatti $n \geq 1$ ed $f : U^{n+1} \rightarrow \mathbb{A}$. Fissato un qualsiasi punto $\bar{x} \in U$, poniamo

$$g : U^n \ni (x_0, \dots, x_{n-1}) \longrightarrow f(\bar{x}, x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{A}.$$

Otteniamo allora

$$(\delta_U^{n-1} g)(x_0, \dots, x_n) = \sum_{h=0}^n (-1)^h f(\bar{x}, x_0, \dots, \widehat{x}_h, \dots, x_n)$$

$$= f(x_0, \dots, x_n) - (\delta_U^n f)(\bar{x}, x_0, \dots, x_n),$$

e quindi $\delta_U^{n-1} g = f$ se $\delta_U^n f = 0$.

XIX.7. Risoluzione canonica d'un fascio

Sia \mathcal{A} un fascio di gruppi abeliani sullo spazio topologico X . Per ogni aperto U di X indichiamo con

$$(19.7.1) \quad \mathcal{F}^0(U, \mathcal{A}) = \{s : U \rightarrow \mathcal{A} \mid \pi \circ s = \text{id}_U\}$$

il gruppo abeliano delle sezioni (non necessariamente continue) di \mathcal{A} su U . Allora $U \rightarrow \mathcal{F}^0(U, \mathcal{A})$ è un prefascio canonico. Il fascio associato, che indicheremo con $\mathcal{F}^0(\mathcal{A})$, è un fascio fiacco, ed abbiamo un'inclusione canonica

$$(19.7.2) \quad j : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{F}^0(\mathcal{A}).$$

Definiamo per ricorrenza:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(\mathcal{A}) &= \mathcal{F}^0(\mathcal{A})/\mathcal{A}, & \mathcal{F}^1(\mathcal{A}) &= \mathcal{F}^0(\mathcal{L}^1(\mathcal{A})) \\ \mathcal{L}^2(\mathcal{A}) &= \mathcal{F}^1(\mathcal{A})/\mathcal{L}^1(\mathcal{A}), & \mathcal{F}^2(\mathcal{A}) &= \mathcal{F}^0(\mathcal{L}^2(\mathcal{A})) \\ &\dots\dots & & \dots\dots \\ \mathcal{L}^n(\mathcal{A}) &= \mathcal{F}^{n-1}(\mathcal{A})/\mathcal{L}^{n-1}(\mathcal{A}), & \mathcal{F}^n(\mathcal{A}) &= \mathcal{F}^0(\mathcal{L}^n(\mathcal{A})) \\ \mathcal{L}^{n+1}(\mathcal{A}) &= \mathcal{F}^n(\mathcal{A})/\mathcal{L}^n(\mathcal{A}), & \mathcal{F}^{n+1}(\mathcal{A}) &= \mathcal{F}^0(\mathcal{L}^{n+1}(\mathcal{A})). \end{aligned}$$

Abbiamo degli omomorfismi naturali

$$(19.7.3) \quad \delta^n : \mathcal{F}^n(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{F}^{n+1}(\mathcal{A}),$$

che si ottengono componendo la proiezione nel quoziente

$$\mathcal{F}^n(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{L}^{n+1}(\mathcal{A}) = \mathcal{F}^n(\mathcal{A})/\mathcal{L}^n(\mathcal{A})$$

con l'inclusione

$$\mathcal{L}^{n+1}(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{F}^0(\mathcal{L}^{n+1}(\mathcal{A})) = \mathcal{F}^{n+1}(\mathcal{A}).$$

Dalla costruzione che abbiamo descritto si ha

Teorema XIX.7.1. Per ogni fascio \mathcal{A} di gruppi abeliani la

$$(19.7.4) \quad 0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{F}^0(\mathcal{A}) \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{F}^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{F}^2(\mathcal{A}) \rightarrow \dots$$

è una risoluzione del fascio \mathcal{A} mediante fasci fiacchi.

Appendice: Esponenziale di matrici

XX.1. Spazi di matrici

Sia \mathbb{k} un campo ed indichiamo con $\mathbb{k}^{m \times n}$ lo spazio vettoriale di dimensione mn su \mathbb{k} delle matrici a m righe ed n colonne a coefficienti in \mathbb{k} .

Definizione XX.1.1. Sia $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ una matrice $m \times n$ complessa:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

La trasposta della sua coniugata

$$A^* = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \dots & \bar{a}_{m1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \dots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times m}.$$

si dice l'*aggiunta* della A .

Date due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ in $\mathbb{C}^{m \times n}$ poniamo

$$(A|B) = \text{trac}(B^*A) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij} a_{ij}.$$

L'applicazione

$$\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^{m \times n} \ni (A, B) \rightarrow (A|B) \in \mathbb{C}$$

definisce su $\mathbb{C}^{m \times n}$ un prodotto scalare Hermitiano. Indichiamo con

$$|A| = \sqrt{(A|A)} \quad (\text{per } A \in \mathbb{C}^{m \times n})$$

la norma associata e consideriamo su $\mathbb{C}^{m \times n}$ la relativa distanza:

$$d(A, B) = |A - B| \text{ se } A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

Teorema XX.1.2. L'applicazione $\mathbb{C}^{m \times n} \ni A \rightarrow A^* \in \mathbb{C}^{n \times m}$ è un'isometria anti- \mathbb{C} -lineare.

L'applicazione $\mathbb{C}^{m \times n} \ni A \rightarrow {}^t A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ è un'isometria \mathbb{C} -lineare.

La moltiplicazione righe per colonne definisce un'applicazione analitica

$$\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^{n \times k} \ni (A, B) \rightarrow AB \in \mathbb{C}^{m \times k}$$

e si ha inoltre

$$|AB| \leq |A| \cdot |B| \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}, \forall B \in \mathbb{C}^{n \times k}.$$

DIMOSTRAZIONE. La verifica delle prime due affermazioni è immediata. Per verificare l'ultima, scriviamo

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = (B^1, \dots, B^k) \quad \text{con} \quad A_1, \dots, A_m, B^1, \dots, B^k \in \mathbb{C}^n.$$

Allora

$$|AB|^2 = \sum_{i,j} |(A_i | B^j)_{\mathbb{C}^n}|^2 \leq \sum_i |A_i|^2 \sum_j |B^j|^2 = |A|^2 \cdot |B|^2,$$

ove abbiamo indicato con $(\cdot | \cdot)_{\mathbb{C}^n}$ e con $|\cdot|$ rispettivamente il prodotto scalare Hermitiano canonico di \mathbb{C}^n e la norma ad esso associata. Da questa disuguaglianza segue la tesi. \square

Lemma XX.1.3. Siano m, n interi positivi. Data una matrice complessa $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ poniamo

$$\|A\| = \sup\{|Av| ; v \in \mathbb{C}^n, |v| = 1\}.$$

Allora

$$\mathbb{C}^{m \times n} \ni A \rightarrow \|A\| \in \mathbb{R}$$

è una norma equivalente a $|\cdot|$.

Inoltre, se k è un altro intero positivo, vale la disuguaglianza:

$$(*) \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad B \in \mathbb{C}^{n \times k}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché tutte le norme definite su uno spazio vettoriale di dimensione finita sono equivalenti, basta dimostrare che $\|\cdot\|$ è una norma su $\mathbb{C}^{m \times n}$. A questo scopo osserviamo innanzi tutto che, per il teorema di Weierstrass, poiché l'applicazione $S^{2n-1} \ni v \rightarrow |Av| \in \mathbb{R}$ è continua e $S^{2n-1} = \{v \in \mathbb{C}^n \mid |v| = 1\}$ è compatto, per ogni $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ possiamo trovare un vettore $v_A \in S^{2n-1}$ tale che

$$|Av_A| = \|A\|.$$

Da questo si deduce che $\|\cdot\|$ è ben definita e si ricava immediatamente che

$$\|A\| > 0 \Leftrightarrow 0 \neq A \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad \text{e} \quad \|0\| = 0.$$

È ovvio che

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

Per concludere, dimostriamo la subadditività. Fissate $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ abbiamo, per un vettore $v_{A+B} \in S^{2n-1}$:

$$\|A+B\| = |(A+B)v_{A+B}| \leq |Av_{A+B}| + |Bv_{A+B}| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Siano $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times k}$. Se $B = 0$, la (*) è banalmente vera. Se $B \neq 0$, allora possiamo trovare un vettore $w_{AB} \in \mathbb{C}^k$ tale che $|w_{AB}| = 1$, $Bw_{AB} \neq 0$ e $\|AB\| = |(AB)w_{AB}|$. Risulta allora:

$$\|AB\| = |(AB)w_{AB}| = \left| A \left(\frac{Bw_{AB}}{|Bw_{AB}|} \right) \right| \cdot |Bw_{AB}| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

□

Definizione XX.1.4. Fissato un campo \mathbb{k} , nel seguito useremo le notazioni:

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) = \mathbb{k}^{n \times n}$$

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k}) = \{A \in \mathbb{k}^{n \times n} \mid \text{trac}(A) = 0\}$$

$$\mathbf{GL}_n(\mathbb{k}) = \{a \in \mathbb{k}^{n \times n} \mid \det a \neq 0\} \quad (\text{gruppo lineare su } \mathbb{k})$$

$$\mathbf{SL}_n(\mathbb{k}) = \{a \in \mathbb{k}^{n \times n} \mid \det a = 1\} \quad (\text{gruppo speciale lineare su } \mathbb{k})$$

Se \mathbb{k} è uno dei campi \mathbb{C} o \mathbb{R} , su ciascuno di questi insiemi consideriamo la topologia di sottospazio di $\mathbb{C}^{n \times n} \simeq \mathbb{C}^{n^2}$.

Teorema XX.1.5. *Con le operazioni di prodotto righe per colonne di matrici, $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ e $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ sono gruppi topologici.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma XX.1.3, il prodotto

$$\mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \ni (a, b) \rightarrow ab \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

è un'applicazione continua.

La topologia di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ coincide con la topologia Euclidea di \mathbb{C}^{n^2} . In particolare l'applicazione determinante

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ni A \rightarrow \det(A) \in \mathbb{C}$$

è continua. Indichiamo con $M_j^i(A)$ il determinante della matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta sopprimendo dalla matrice $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ la j -esima riga e la i -esima colonna. Le applicazioni

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ni A \rightarrow M_j^i(A) \in \mathbb{C}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

sono continue. È allora continua l'applicazione

$$\mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \ni a \rightarrow (-1)^{i+j} (\det a)^{-1} M_j^i(a) \in \mathbb{C}$$

che associa a una matrice invertibile a il coefficiente sulla riga i -esima e la colonna j -esima della sua inversa a^{-1} e quindi è continua l'applicazione

$$\mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \ni a \rightarrow a^{-1} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Questo dimostra che $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ è un gruppo topologico.

I gruppi $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ sono gruppi topologici perché sottogruppi di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. □

XX.2. La decomposizione di Wedderburn

Nella proposizione che segue descriviamo la *decomposizione di Wedderburn* di un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo di caratteristica zero.

Teorema XX.2.1 (Decomposizione di Wedderburn). *Sia \mathbb{k} un campo di caratteristica zero. Per ogni $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ sono univocamente determinate una $S \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ semisemplice¹ e una $N \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ nilpotente tali che*

$$(20.2.1) \quad A = S + N \quad \text{ed} \quad [S, N] = SN - NS = 0.$$

Gli endomorfismi S ed N sono polinomi di A .

Se $a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{k})$, sono univocamente determinate una matrice semisemplice $s \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{k})$ e una matrice unipotente² $v \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{k})$ tali che

$$(20.2.2) \quad a = sv = vs.$$

Risultano $s, v \in \mathbb{k}[a]$.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con \mathfrak{n} l'ideale di $\mathbb{k}[A]$ generato dai suoi elementi nilpotenti. Se $\mu_A(\lambda) = p_1^{k_1}(\lambda) \cdots p_m^{k_m}(\lambda)$ è la decomposizione del polinomio minimo $\mu_A(\lambda)$ di A in prodotto di potenze di primi distinti, indichiamo con $f(\lambda) = p_1(\lambda) \cdots p_m(\lambda)$ il prodotto dei primi distinti contenuti in $\mu_A(\lambda)$. Allora \mathfrak{n} è l'ideale principale generato da $f(A) = p_1(A) \cdots p_m(A)$.

Dimostriamo per ricorrenza che per ogni intero positivo k è possibile determinare un $A_k \in \mathbb{k}[A]$ tale che

$$(*) \quad A_k = A - N_k \quad \text{con} \quad N_k \in \mathfrak{n}, \quad f(A_k) \in \mathfrak{n}^k$$

Per $k = 1$ possiamo scegliere $A_1 = A$. Supponiamo di aver ottenuto A_1, \dots, A_k che soddisfino (*), e cerchiamo A_{k+1} nella forma $A_{k+1} = A_k + T$, con $T \in \mathfrak{n}^k$. Utilizzando la formula di Taylor otteniamo:

$$\begin{aligned} f(A_{k+1}) &= f(A_k + T) \\ &= f(A_k) + f'(A_k)T + T_1 \end{aligned}$$

con $T_1 \in \mathfrak{n}^{2k} \subset \mathfrak{n}^{k+1}$ in quanto $f(A_{k+1}) - f(A_k) - f'(A_k)T = T^2B$ per qualche matrice $B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$. Osserviamo ora che, poiché A_k differisce da A per una matrice nilpotente di $\mathbb{k}[A]$, il suo polinomio minimo $\mu_{A_k}(\lambda)$ ha gli stessi fattori primi di $\mu_A(\lambda)$. Poiché $f(\lambda)$ contiene solo fattori primi semplici, $f(\lambda)$ ed $f'(\lambda)$, e quindi anche $\mu_{A_k}(\lambda)$ ed $f'(\lambda)$, sono primi tra loro. Quindi $f'(A_k)$ è invertibile. Otteniamo perciò la (*) per A_{k+1} scegliendo

$$T = -(f'(A_k))^{-1} f(A_k) \in \mathfrak{n}^k.$$

Poiché $\mathfrak{n}^n = 0$, otteniamo la decomposizione cercata con $S = A_n, N = N_n$. Infatti $f(A_n) \in \mathfrak{n}^n = \{0\}$ ci dice che il polinomio minimo μ_{A_n} di A_n è proprio $f(\lambda)$ e quindi A_n è semisemplice perché il suo polinomio minimo contiene solo fattori primi semplici.

¹Un endomorfismo S si dice semisemplice, o completamente decomponibile, se ogni sottospazio S -invariante ammette un complementare S -invariante. Un endomorfismo S è semisemplice se e soltanto se il suo polinomio minimo μ_S è prodotto di fattori primi semplici. Da questa caratterizzazione segue che un endomorfismo $S \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ è semisemplice se e soltanto se è semisemplice come elemento di $\mathfrak{gl}(n, \hat{\mathbb{k}})$ di \mathbb{k} , ed in particolare se è diagonalizzabile in un corpo di spezzamento del suo polinomio minimo. Da ciò segue che la somma di due endomorfismi semisemplici che commutano tra loro è ancora semisemplice.

²Una matrice v si dice unipotente se la matrice $v - e$ è nilpotente.

Dimostriamo ora l'unicità. Se S', N' sono due endomorfismi, il primo semisemplice e il secondo nilpotente, con $A = S' + N'$ ed $S'N' = N'S'$, osserviamo innanzi tutto che ciascuno di essi commuta con A e quindi anche con gli endomorfismi $S, N \in \mathbb{k}[A]$ trovati in precedenza. Poiché S ed S' sono due endomorfismi semisemplici che commutano tra loro anche $S - S'$ è semisemplice, e poiché N ed N' sono due endomorfismi nilpotenti che commutano tra loro anche $N - N'$ è nilpotente. Quindi $S - S' = N' - N$ è al tempo stesso semisemplice e nilpotente e quindi è nullo. Ciò dimostra l'unicità della decomposizione di Wedderburn.

Sia ora $a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{k})$. Esso ha una decomposizione di Wedderburn $a = s + N$, con $s, N \in \mathbb{k}[a]$, per la prima parte della dimostrazione. Basterà allora osservare che la parte semisemplice s di a è anch'essa invertibile e $s^{-1} \in \mathbb{k}[a]$. Quindi $v = I + s^{-1}N$ è un elemento unipotente di $\mathbb{k}[a]$ per cui vale la $a = sv = vs$. L'unicità della decomposizione segue dal fatto che, se vale la (20.2.2), allora $a = s + s(v - I)$ è la decomposizione di Wedderburn (20.2.1) di a . \square

Definizione XX.2.2. Se $A = S + N$ è una decomposizione di Wedderburn di $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$, l'endomorfismo semisemplice S si dice *parte semisemplice* di A e l'endomorfismo nilpotente N *parte nilpotente* di A .

Se $a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{k})$, ed $a = sv = S + N$ con $s, S \in \mathbb{k}[a]$ semisemplici, $N \in \mathbb{k}[a]$ nilpotente e $v \in \mathbb{k}[a]$ unipotente, chiamiamo $s = S$ la sua *parte semisemplice*, N la sua *parte nilpotente*, $v = I_n + S^{-1}N$ la sua *parte unipotente*.

Nel caso complesso, la decomposizione di Wedderburn si può ricavare dalla decomposizione di Jordan: in una matrice di Jordan la diagonale è la sua parte semisemplice nella decomposizione di Wedderburn. Mediante il coniugio possiamo quindi ricondurre la decomposizione di Wedderburn a quella di Jordan.

XX.3. Esponenziale di matrici

Definiamo innanzi tutto l'applicazione esponenziale per endomorfismi nilpotenti. Sia \mathbb{k} un campo di caratteristica zero e sia $N \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ un endomorfismo nilpotente. Poiché $N^m = 0$ se $m \geq n$, la serie:

$$\exp(N) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{N^h}{h!}$$

si riduce alla somma finita dei suoi primi n termini:

$$\exp(N) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{N^h}{h!} = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{N^h}{h!}.$$

Indichiamo con $\mathcal{N}(n, \mathbb{k})$ l'insieme delle matrici nilpotenti di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ e con $\mathcal{U}(n, \mathbb{k})$ l'insieme delle matrici unipotenti di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{k})$. Abbiamo:

Teorema XX.3.1. *L'applicazione $N \rightarrow \exp(N)$ è una trasformazione bigettiva di $\mathcal{N}(n, \mathbb{k})$ su $\mathcal{U}(n, \mathbb{k})$.*

DIMOSTRAZIONE. L'esponenziale di una matrice nilpotente N è l'endomorfismo $e + N'$ dove $N' = \sum_{h=1}^{n-1} \frac{N^h}{h!}$ è nilpotente perché somma di endomorfismi nilpotenti che commutano tra loro. Quindi $\exp(N) \in \mathcal{U}(n, \mathbb{k})$ se $N \in \mathcal{N}(n, \mathbb{k})$.

Indichiamo con $p_n(\lambda)$ il polinomio $p_n(\lambda) = \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h/h!$ e con $q_n(\lambda)$ il polinomio $q_n(\lambda) = \sum_{h=0}^{n-2} (-1)^h \lambda^{h+1}/(h+1) \in \mathbb{k}[\lambda]$.

se $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, essi sono i polinomi di Taylor di grado $(n-1)$ di e^λ e di $\log(1+\lambda)$, rispettivamente.

Poiché $\mathbb{Q} \subset \mathbb{k}$, otteniamo perciò che

$$p_n(q_n(\lambda)) = 1 + \lambda + \lambda^n f(\lambda)$$

per un opportuno polinomio $f(\lambda) \in \mathbb{k}[\lambda]$. Ne segue che, data $v \in \mathcal{U}(n, \mathbb{k})$, la $N = q_n(v - e)$ è una matrice nilpotente per cui $p_n(N) = \exp(N) = v$. Ciò dimostra la surgettività dell'applicazione esponenziale.

Dimostriamo ora l'unicità. Innanzi tutto osserviamo che, se $N_1, N_2 \in \mathcal{N}(n, \mathbb{k})$ ed $\exp(N_1) = \exp(N_2)$, allora $\ker N_1 = \ker N_2$.

Se, per assurdo, ciò non fosse vero, uno dei due sottospazi non sarebbe contenuto nell'altro e quindi, a meno di scambiare gli indici, potremmo trovare un vettore $v \in \ker N_1 \cap \mathbb{C} \ker N_2$. Poiché $\exp(N_2)(v) = \exp(N_1)(v) = v$, otteniamo che $\sum_{h=1}^{n-1} N_2^h(v)/h! = 0$. Avendo supposto che $w = N_2(v)$ non fosse nullo, avremmo $f(N_2)(w) = 0$ con $f(\lambda) = 1 + \sum_{h=1}^{n-2} \lambda^h/(h+1)! \in \mathbb{k}[\lambda]$. Ma allora il polinomio minimo $\mu_{N_2}(\lambda)$ di N_2 dovrebbe contenere un fattore primo di $f(\lambda)$, e quindi un fattore primo che non si annulla per $\lambda = 0$, contro l'ipotesi che N_2 fosse nilpotente. Quindi $\ker N_2 = \ker N_1$.

Posto $W = \ker N_1 = \ker N_2$, possiamo considerare gli endomorfismi nilpotenti \widehat{N}_1 e \widehat{N}_2 definiti da N_1 ed N_2 su \mathbb{k}^n/W per passaggio al quoziente. Da $\exp(\widehat{N}_1) = \exp(\widehat{N}_2)$ ricaviamo, ripetendo il ragionamento precedente, che $\ker \widehat{N}_1 = \ker \widehat{N}_2$, cioè $\ker N_1^2 = \ker N_2^2$.

Per ricorrenza otterremo allora che $\ker N_1^m = \ker N_2^m$ per ogni intero positivo m . Questo ci dice che per una scelta opportuna della base di \mathbb{k}^n , i due endomorfismi nilpotenti N_1 ed N_2 si possono mettere entrambi in forma triangolare superiore. Indichiamo con $\mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k})$ l'insieme di tutte le matrici triangolari superiori nilpotenti.

Esse formano un anello nilpotente e, posto

$$\mathfrak{n}_+^k(n, \mathbb{k}) = \{N_1 \cdots N_k \mid N_1, \dots, N_k \in \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k})\},$$

risulta $\mathfrak{n}_+^n(n, \mathbb{k}) = \{0\}$.

Se $N_1, N_2 \in \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k})$ ed $N_1 - N_2 \in \mathfrak{n}_+^k(n, \mathbb{k})$, allora $N_1^m - N_2^m \in \mathfrak{n}_+^{k+m-1}(n, \mathbb{k})$. Infatti questo è vero se $m = 1$ e segue per ricorrenza dall'uguaglianza: $N_1^m - N_2^m = (N_1 - N_2)N_1^{m-1} + N_2(N_1^{m-1} - N_2^{m-1})$ per $m \geq 2$.

Se $\exp(N_1) = \exp(N_2)$ con $N_1, N_2 \in \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k})$, abbiamo

$$(\dagger) \quad N_1 - N_2 = \sum_{h=2}^{n-1} (N_2^h - N_1^h)/h!.$$

Se fosse $N_1 \neq N_2$, dovrebbe essere $N_1 - N_2 \in \mathfrak{n}_+^k(n, \mathbb{K}) \setminus \mathfrak{n}_+^{k+1}(n, \mathbb{K})$ per qualche $k < n$, ma questo contraddice la (\dagger) perché allora il secondo membro apparterebbe a $\mathfrak{n}_+^{k+1}(n, \mathbb{K})$. \square

Osservazione XX.3.2. Dalla dimostrazione del teorema segue che, se f è un polinomio di $\mathbb{K}[\lambda]$ con $f'(0) \neq 0$, l'applicazione $\mathfrak{n}_+(n, \mathbb{K}) \ni N \rightarrow f(N) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ è iniettiva.

Teorema XX.3.3. Per ogni $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, la serie

$$\exp A = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} A^h$$

converge in $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ e definisce un elemento di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. L'applicazione

$$\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ni A \rightarrow \exp A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

è continua e surgettiva.

Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sono gli autovalori di $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, ripetuti con la loro molteplicità, allora gli autovalori di $\exp A$ sono $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$. In particolare vale la formula

$$(20.3.1) \quad \det(\exp A) = e^{\text{trac}(A)}.$$

Se $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, allora

$$(20.3.2) \quad \exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) \quad \text{se} \quad AB = BA.$$

Se $a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ e $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, allora

$$(20.3.3) \quad a \circ \exp(A) \circ a^{-1} = \exp(a \circ A \circ a^{-1}).$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che la serie a termini positivi

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \|A^h\|$$

è maggiorata termine a termine dalla serie convergente, a termini di segno positivo,

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \|A\|^h$$

e quindi la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} A^h$$

è convergente in $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, uniformemente sui sottoinsiemi compatti di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Poiché per ogni polinomio $p \in \mathbb{C}[z]$ l'applicazione $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ni A \rightarrow p(A) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ è continua, la funzione $\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ è continua perché limite uniforme, su ogni compatto di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, di una successione di applicazioni continue.

Se $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ e $AB = BA$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} (A+B)^h &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \sum_{h_1+h_2=h} \frac{h!}{h_1!h_2!} A^{h_1} B^{h_2} \\ &= \sum_{h_1=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!} A^{h_1} \sum_{h_2=0}^{\infty} \frac{1}{h_2!} B^{h_2} \\ &= \exp(A) \exp(B). \end{aligned}$$

Se $A = S + N$ è la decomposizione di Wedderburn della matrice $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, la

$$\exp(A) = \exp(S + N) = \exp(S) \exp(N)$$

dà la decomposizione dell'esponenziale di A nel prodotto della sua parte semi-semplice e di una matrice unipotente che con essa commuta. Osserviamo che, se $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ e $a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, allora

$$(aAa^{-1})^h = aA^h a^{-1} \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo quindi

$$\exp(aAa^{-1}) = a(\exp A)a^{-1} \quad \forall A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), \forall a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Questa formula ci dà la possibilità di calcolare l'esponenziale di una matrice semi-semplice S utilizzando la sua diagonalizzazione: se $a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ e

$$a \circ S \circ a^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avremo

$$\exp(S) = \exp \left(a^{-1} \circ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \circ a \right) = a^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \circ a.$$

Chiaramente la matrice $\exp S$ è invertibile, ed ha determinante

$$\det(\exp S) = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} = e^{\text{trac}(A)}.$$

La matrice $\exp N$ è unipotente ed ha dunque determinante 1. Quindi

$$\det(\exp A) = \det(\exp(S + N)) = \det(\exp S \cdot \exp N) = \det(\exp S) = e^{\text{trac}(A)} \neq 0$$

ed $\exp A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Dimostriamo ora che $\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ è surgettiva. Fissiamo un isomorfismo lineare a in $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, e siano $s, v \in \mathbb{C}[a]$ la sua parte semisemplice e la sua parte unipotente. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di s e sia $b \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ tale che

$$b \circ s \circ b^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix}$$

con $n_1 + \dots + n_k = n$. Poiché i λ_i sono diversi da zero, possiamo trovare numeri complessi μ_1, \dots, μ_k tali che $e^{\mu_i} = \lambda_i$. Allora la matrice

$$S = b^{-1} \circ \begin{pmatrix} \mu_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_k I_{n_k} \end{pmatrix} \circ b,$$

poiché la sua restrizione ad ogni autospazio di s è un multiplo dell'identità, appartiene a $\mathbb{C}[s]$, e quindi a $\mathbb{C}[a]$, ed $\exp(S) = s$. Sia N la matrice nilpotente tale che $\exp(N) = v$. Poiché $S, N \in \mathbb{C}[a]$, le due matrici commutano tra loro e quindi

$$\exp(S + N) = \exp(S)\exp(N) = sv = a.$$

La dimostrazione è completa. \square

Osservazione XX.3.4. Se $A \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, allora $\exp(A) \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$, ma, se $n \geq 2$, l'applicazione $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{\exp} \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ non è surgettiva. Consideriamo ad esempio il caso $n = 2$. Allora

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\}.$$

Per una matrice triangolare superiore in $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ abbiamo:

$$\exp \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\alpha & \beta \cdot \phi(\alpha) \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \phi(\alpha) = \begin{cases} \frac{\sinh \alpha}{\alpha} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0. \end{cases}$$

Consideriamo ora la matrice $a = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$. Supponiamo per assurdo vi sia $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ con $\exp(A) = a$. La A è coniugata di una triangolare superiore B , e $b = \exp(B)$ è allora una triangolare superiore coniugata ad a : poiché b è della forma $b = \begin{pmatrix} -1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ con $k \neq 0$, e $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$, questo non è possibile: dovrebbe essere infatti $\alpha = (2h + 1)\pi i$ con $h \in \mathbb{Z}$, e quindi $\phi(\alpha) = 0$ ed $\exp(B)$ sarebbe diagonale.

Osservazione XX.3.5. Il determinante dell'esponenziale di una matrice reale è l'esponenziale della sua traccia e quindi è un numero reale positivo. Quindi l'esponenziale definisce un'applicazione di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ nel sottogruppo normale $\mathbf{GL}_+(n, \mathbb{R})$ delle matrici reali invertibili con determinante positivo.

Come nell'osservazione precedente, si può verificare che la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) \subset \mathbf{GL}_+(2, \mathbb{R})$$

non è l'esponenziale di una matrice reale, e che quindi $\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{GL}_+(n, \mathbb{R})$ non è surgettivo, e la sua immagine non contiene $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$.

Osservazione XX.3.6. Se $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ sono due matrici che non commutano tra loro: $[A, B] = A \circ B - B \circ A \neq 0$, in generale non vale la formula di addizione: è cioè in generale $\exp(A + B) \neq \exp A \circ \exp B$.

Lemma XX.3.7. Per ogni $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ l'applicazione

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tA) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

è differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ e

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k \exp(tA) = A^k \exp(tA) = \exp(tA)A^k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $t, s \in \mathbb{R}$ ed $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, abbiamo:

$$\exp((t+s)A) = \exp(tA)\exp(sA) = \exp(sA)\exp(tA).$$

Quindi vale la

$$\begin{aligned} \exp((t+s)A) &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{s^h}{h!} A^h \exp(tA) \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{s^h}{h!} \exp(tA) A^h \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e la serie converge uniformemente in norma su ogni compatto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. La tesi segue allora dalla formula di Taylor. \square

Lemma XX.3.8. Sia $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ tale che $\exp(tA) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, da $\exp(tA) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ ricaviamo, derivando rispetto a t in $t = 0$, che

$$A = \left. \frac{d \exp(tA)}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\exp(tA) - I}{t} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

perché $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ è chiuso in $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. \square

XX.4. Matrici Hermitiane

Definizione XX.4.1. Una matrice $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ si dice *Hermitiana* se $A^* = A$, si dice *antihermitiana* se $A^* = -A$.

Gli insiemi $\mathfrak{p}(n)$ delle matrici Hermitiane ed $\mathfrak{u}(n)$ delle matrici antihermitiane formano sottospazi vettoriali reali di dimensione n^2 di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ (pensato come spazio vettoriale reale di dimensione $2n^2$).

Infatti $*$: $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ è un' involuzione, e quindi $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{p}(n) \oplus \mathfrak{u}(n)$, e la moltiplicazione per l'unità immaginaria i è un isomorfismo lineare che scambia $\mathfrak{p}(n)$ con $\mathfrak{u}(n)$, onde $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p}(n) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}(n)$.

Definizione XX.4.2. Una matrice $u \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ si dice *unitaria* se $uu^* = e$, dove e indica la matrice identità.

Le matrici unitarie sono le matrici di cambiamenti di basi ortonormali per il prodotto scalare Hermitiano canonico di \mathbb{C}^n . Le matrici unitarie formano un sottogruppo di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, che denotiamo con $\mathbf{U}(n)$ e chiamiamo *gruppo unitario di ordine n* .

Lemma XX.4.3. *Ogni matrice Hermitiana è diagonalizzabile ed ha autovalori reali. Se $A \in \mathfrak{p}(n)$, possiamo trovare una trasformazione $u \in \mathbf{U}(n)$ tale che $uAu^{-1} = uAu^*$ sia una matrice reale diagonale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ una matrice Hermitiana. Sia λ un autovalore di A e sia $v \in \mathbb{C}^n$ un autovettore relativo a λ . Abbiamo:

$$\lambda |v|^2 = (Av|v)_{\mathbb{C}^n} = (v|A^*v)_{\mathbb{C}^n} = (v|Av)_{\mathbb{C}^n} = (v|\lambda v)_{\mathbb{C}^n} = \bar{\lambda} |v|^2,$$

da cui $\lambda = \bar{\lambda}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se $w \in \mathbb{C}^n$ è un vettore ortogonale a v , allora

$$(v|Aw)_{\mathbb{C}^n} = (Av|w)_{\mathbb{C}^n} = \lambda (v|w) = 0.$$

Quindi il sottospazio dei vettori di \mathbb{C}^n perpendicolari a v è A -invariante: da questo fatto si ricava immediatamente che \mathbb{C}^n ammette una base ortonormale di autovettori di A . \square

Definizione XX.4.4. Indichiamo con $\mathbf{P}_+(n)$ l'insieme delle matrici Hermitiane definite positive, cioè delle matrici Hermitiane che hanno tutti gli autovalori positivi.

Osserviamo che $\mathbf{P}_+(n)$ è un aperto convesso dello spazio vettoriale reale $\mathfrak{p}(n)$.

Teorema XX.4.5. *Se $A \in \mathfrak{p}(n)$, allora $\exp(A) \in \mathbf{P}_+(n)$. L'applicazione esponenziale definisce un diffeomorfismo analitico*

$$\mathfrak{p}(n) \ni A \rightarrow \exp(A) \in \mathbf{P}_+(n).$$

DIMOSTRAZIONE. Si verifica immediatamente che $(\exp(A))^* = \exp(A^*)$. Quindi l'esponenziale di una matrice Hermitiana è ancora una matrice Hermitiana ed è definita positiva perché i suoi autovalori sono esponenziali di numeri reali.

Sia $a \in \mathbf{P}_+(n)$. Per ogni numero reale positivo t , la $(1-t)I + ta = I + t(a-I)$ è ancora una matrice Hermitiana simmetrica definita positiva. Essa ammette quindi un'inversa. La

$$(20.4.1) \quad \log a = (a-I) \int_0^1 [(1-t)I + ta]^{-1} dt = (a-I) \int_{-\infty}^0 (1-\lambda)^{-1} (\lambda I - a)^{-1} d\lambda$$

è una funzione analitica di a . Osserviamo ancora che, se $u \in \mathbf{U}(n)$, allora

$$\begin{aligned} u^*[a-I][(1-t)I + ta]^{-1}u &= u^*[a-I]uu^*[(1-t)I + ta]^{-1}u \\ &= [(u^*au) - I][u^*((1-t)I + ta)u]^{-1} \\ &= [(u^*au) - I][(1-t)I + t(u^*au)]^{-1} \end{aligned}$$

Abbiamo perciò

$$u^*(\log a)u = \log(u^*au), \quad \forall u \in \mathbf{U}(n), \forall a \in \mathbf{P}_+(n).$$

Utilizziamo questo fatto per dimostrare che $\log \exp(A) = A$ per ogni $A \in \mathfrak{p}(n)$. Fissata $A \in \mathfrak{p}(n)$, sia $u \in \mathbf{U}(n)$ tale che

$$u^*Au = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

sia una matrice diagonale a coefficienti reali. Allora

$$\begin{aligned} u^*(\log(\exp(A)))u &= \log(\exp(u^*Au)) = \int_0^1 \text{diag}\left(\frac{e^{\lambda_1} - 1}{1 - t + t e^{\lambda_1}}, \dots, \frac{e^{\lambda_n} - 1}{1 - t + t e^{\lambda_n}}\right) dt \\ &= \text{diag}\left(\int_0^1 \frac{(e^{\lambda_1} - 1)dt}{1 + t(e^{\lambda_1} - 1)}, \dots, \int_0^1 \frac{(e^{\lambda_n} - 1)dt}{1 + t(e^{\lambda_n} - 1)}\right) \\ &= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{aligned}$$

e quindi

$$\log \exp(A) = u \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) u^* = A.$$

Viceversa, se $a \in \mathbf{P}_+(n)$, possiamo trovare una matrice unitaria u tale che

$$a = u \text{diag}(k_1, \dots, k_n) u^* \quad \text{con } k_1, \dots, k_n \text{ numeri reali positivi.}$$

Allora

$$\begin{aligned} \log(a) &= \log(u \text{diag}(k_1, \dots, k_n) u^*) = u \log(\text{diag}(k_1, \dots, k_n)) u^*, \quad e \\ \log(\text{diag}(k_1, \dots, k_n)) &= \begin{pmatrix} k_1-1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n-1 \end{pmatrix} \int_0^1 \text{diag}\left(\frac{1}{1 + t(k_1 - 1)}, \dots, \frac{1}{1 + t(k_n - 1)}\right) dt \\ &= \text{diag}\left(\int_0^1 \frac{(k_1 - 1)dt}{1 + t(k_1 - 1)}, \dots, \int_0^1 \frac{(k_n - 1)dt}{1 + t(k_n - 1)}\right) \\ &= \text{diag}(\log k_1, \dots, \log k_n). \end{aligned}$$

Otteniamo perciò

$$\exp \log(a) = u \exp(\text{diag}(\log k_1, \dots, \log k_n)) u^* = u \text{diag}(k_1, \dots, k_n) u^* = a.$$

Questo dimostra che l'applicazione analitica $\log : \mathbf{P}_+(n) \rightarrow \mathfrak{p}(n)$ è l'inversa di $\exp : \mathfrak{p}(n) \rightarrow \mathbf{P}_+(n)$, che sono quindi diffeomorfismi analitici. \square

Definizione XX.4.6. L'applicazione \log definita dalla (20.4.1) si dice il *logaritmo Hermitiano* di una matrice Hermitiana definita positiva.

Osservazione XX.4.7. Il *logaritmo Hermitiano* ha un'estensione analitica in campo complesso, analoga all'estensione del logaritmo al piano complesso privato della semiretta reale negativa.

Lo spazio delle matrici complesse che non hanno autovalori reali ≤ 0 è un sottoinsieme aperto Ω di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, su cui la (20.4.1) è ben definita ed analitica. Si verifica facilmente che $\log : \Omega \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ è un'inclusione analitica e che la sua immagine è costituita dall'aperto ω di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ delle A i cui autovalori λ hanno parte immaginaria minore, in modulo, di π . Abbiamo cioè:

Le applicazioni $\exp : \omega \rightarrow \Omega$ e $\log : \Omega \rightarrow \omega$ sono diffeomorfismi analitici, inversi l'uno dell'altro.

Infatti, se $a \in \Omega$ e $b \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, è

$$b[\log(a)]b^{-1} = \log(bab^{-1}).$$

Se $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ è diagonalizzabile e

$$bAb^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \text{con } |\text{Im } \lambda_i| < \pi, \quad i = 1, \dots, n,$$

possiamo trovare numeri complessi $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ tali che $\log \mu_i = \lambda_i$ per $i = 1, \dots, n$. Allora si verifica che

$$\log(b^{-1} \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) b) = A.$$

Se A è una qualsiasi matrice in $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, possiamo trovare una matrice $b \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ tale che $bAb^{-1} = S + N$, con S diagonale ed N triangolare superiore nilpotente, con $SN = NS$ (forma di Jordan). Se $S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, con $|\text{Im } \lambda_i| < \pi$ per $i = 1, \dots, n$, siano $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ numeri complessi tali che $\log \mu_i = \lambda_i$ e $\mu_i = \mu_j$ se $\lambda_i = \lambda_j$. Allora $s = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ ed $n = \exp(N)$ commutano e si verifica che

$$\log(b^{-1} s n b) = b^{-1} (\log(s) + \log(n)) b = b^{-1} (S + N) b = A.$$

In modo analogo, si dimostra che $\exp(\log(a)) = a$ per ogni $a \in \mathbf{\Omega}$.

Indichiamo con $\mathfrak{p}(n, \mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale reale delle matrici simmetriche a coefficienti reali e con $\mathbf{P}_+(n, \mathbb{R})$ il sottoinsieme di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ delle matrici reali simmetriche definite positive. Poiché sia l'esponenziale di una matrice simmetrica reale che il logaritmo Hermitiano di una matrice reale simmetrica definita positiva sono matrici reali, otteniamo:

Teorema XX.4.8. *L'applicazione esponenziale definisce un diffeomorfismo analitico*

$$\exp : \mathfrak{p}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{P}_+(n, \mathbb{R}). \quad \square$$

Appendice: Omologia

XXI.1. Notazione

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ è l'insieme degli interi non negativi.

(X, A) indica una *coppia topologica*, cioè la coppia formata da uno spazio topologico X e da un suo sottospazio topologico A .

La coppia topologica (X, \emptyset) sarà indicata semplicemente con X . Se $A = \{x\}$ è un singleton, scriveremo a volte, per semplicità di notazione, (X, x) invece di $(X, \{x\})$.

Se (X, A) ed (Y, B) sono due coppie topologiche con $X \subset Y$ ed $A \subset B$, indichiamo con $i_{(X,A)}^{(Y,B)}$ l'inclusione $X \hookrightarrow Y$ ed $A \hookrightarrow B$.

Se $A = \emptyset$ scriveremo $i_X^{(Y,B)}$ invece di $i_{(X,\emptyset)}^{(Y,B)}$ e,

se $B = \emptyset$, i_X^Y invece di $i_{(X,\emptyset)}^{(Y,\emptyset)}$.

Useremo la notazione $h_*(X)$ ed $h_p(X)$ invece di $h_*(X, \emptyset)$ ed $h_p(X, \emptyset)$.

Definizione XXI.1.1. Una triade $(X; A, B)$ di spazi topologici, con $A \cup B = X$, si dice *excisiva* se

$$X = \text{int}_X(A) \cup \text{int}_X(B).$$

Definizione XXI.1.2. Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua.

f è una *n-equivalenza debole* se, per ogni $x \in X$, le applicazioni $f_* : \pi_h(X, x) \rightarrow \pi_h(Y, f(x))$ sono bigettive per $h < n$ ed $f_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$ surgettive.

f è un'*equivalenza debole* se è una *n-equivalenza debole* per ogni n .

Siano (X, A) ed (Y, B) coppie topologiche ed $f \in \mathcal{C}(X, A; Y, B)$ un'applicazione continua. f si dice un'*equivalenza debole* se sia $f_X^Y : X \ni x \rightarrow f(x) \in Y$ che $f_A^B : A \ni x \rightarrow f(x) \in B$ sono equivalenze deboli.

Alcune costruzioni topologiche. Ricordiamo che uno spazio puntato è uno spazio topologico non vuoto X su cui si sia fissato un punto distinto $x_0 \in X$. Scriveremo nel seguito X , invece che (X, x_0) , sottintendendo il punto base quando non vi sia rischio di confusione.

Se X, Y sono spazi puntati con punti base $x_0 \in X$ ed $y_0 \in Y$ rispettivamente, definiamo:

$$(21.1.1) \quad X \vee Y = X \times Y / ((X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)) \quad (\text{bouquet di } X \text{ e } Y),$$

$$(21.1.2) \quad X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y \quad (\text{smash di } X \text{ e } Y).$$

Il bouquet e lo smash (che si dice anche *prodotto tensoriale*) sono a loro volta spazi puntati, con punti base corrispondenti alle immagini di $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$ e di $X \vee Y$, rispettivamente.

Siano $I = [0, 1]$, con punto base 1 ed $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, anch'esso con punto base 1. Dato lo spazio puntato X con punto base x_0 definiamo:

$$(21.1.3) \quad CX = X \wedge I \quad (\text{cono ridotto di } X)$$

$$(21.1.4) \quad \Sigma X = X \wedge S^1 \quad (\text{sospensione ridotta di } X).$$

Cofibrazioni. Un'applicazione $\iota : A \rightarrow X$ si dice una *cofibrazione* se ha la proprietà dell'*esensione dell'omotopia*, se cioè, per ogni spazio topologico Y , per ogni applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ ed ogni omotopia $F : A \times I \rightarrow Y$ di $f \circ \iota$, esiste un'omotopia $\tilde{F} : X \times I \rightarrow Y$ che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota_0} & A \times I \\ \downarrow \iota & \searrow f \circ \iota & \swarrow F \\ & & Y \\ & \nearrow f & \nwarrow \tilde{F} \\ X & \xrightarrow{\iota_0} & X \times I \\ & & \downarrow \iota \times \text{id} \end{array}$$

dove abbiamo indicato con ι_0 l'applicazione $A \ni a \rightarrow (a, 0) \in A \times I$.

Esempio XXI.1.3. L'inclusione $\iota : A \hookrightarrow X$, per una coppia cellulare (X, A) , è una cofibrazione.

Definizione XXI.1.4. Un punto x_0 di uno spazio topologico X è un *punto base non degenero* se l'inclusione $\{x_0\} \hookrightarrow X$ è una cofibrazione.

Chiamiamo *spazio puntato non degenero* uno spazio puntato X il cui punto base sia non degenero.

XXI.2. Definizione assiomatica

Un'*omologia* è un funtore covariante

$$(21.2.1) \quad (A, B) \longrightarrow h_*(A, B) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} h_p(A, B)$$

dalla categoria delle coppie topologiche a quella dei gruppi abeliani \mathbb{N} -graduati, che soddisfa gli assiomi 1 – 5 seguenti.

Prima di enunciare gli assiomi, ricordiamo che il fatto che h_* sia un funtore covariante significa:

Funtorialità. Se $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ è un'applicazione continua, allora sono determinati omomorfismi di gruppi abeliani

$$(21.2.2) \quad f_* : h_*(X, A) \longrightarrow h_*(Y, B), \text{ con } f_*(h_p(X, A)) \subset h_p(Y, B) \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

in modo tale che, se $\text{id}_X : (X, A) \rightarrow (X, A)$ è l'identità ed f, g due applicazioni continue con $(X, A) \xrightarrow{f} (Y, B) \xrightarrow{g} (Z, C)$, allora

$$(21.2.3) \quad (\text{id}_X)_* = \text{id}_{h_*(X, A)},$$

$$(21.2.4) \quad (g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Gli assiomi che caratterizzano l'omologia sono i seguenti:

1. Assioma d'omotopia. Se $f_0, f_1 \in \mathcal{C}(X, A; Y, B)$ definiscono la stessa classe di omotopia in $\pi(X, A; Y, B)$, allora $f_{1*} = f_{0*}$.

2. Assioma della frontiera. Ad ogni coppia topologica¹ (X, A) è associato un *omomorfismo frontiera* (che si dice anche *omomorfismo di connessione o differenziale*)

$$(21.2.5) \quad \partial = \partial_{X, A} : h_p(X, A) \longrightarrow h_{p-1}(A)$$

in modo tale che per ogni applicazione continua $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ed ogni intero positivo p si abbia un diagramma commutativo

$$(21.2.6) \quad \begin{array}{ccc} h_p(X, A) & \xrightarrow{f_*} & h_p(Y, B) \\ \partial_{X, A} \downarrow & & \downarrow \partial_{Y, B} \\ h_{p-1}(A) & \xrightarrow{f_{A*}} & h_{p-1}(B). \end{array}$$

3. Assioma di excisione. Se $(X; A, B)$ è una triade excisiva, allora

$$(21.2.7) \quad (i_{A, A \cap B}^{X, B})_* : h_p(A, A \cap B) \xrightarrow{\cong} h_p(X, B),$$

è un isomorfismo per ogni $p \in \mathbb{N}$.

4. Assioma di esattezza. Per ogni coppia topologica (X, A) , abbiamo una successione esatta lunga di omologia:

$$(21.2.8) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & h_{p+1}(A) & \xrightarrow{(i_A^X)_*} & h_{p+1}(X) & \xrightarrow{(i_X^{(X, A)})_*} & h_{p+1}(X, A) \rightarrow \\ & & \xrightarrow{\partial_{X, A}} & h_p(A) & \xrightarrow{(i_A^X)_*} & h_p(X) & \xrightarrow{(i_X^{(X, A)})_*} & h_p(X, A) \rightarrow \\ & & \xrightarrow{\partial_{X, A}} & h_{p-1}(A) & \longrightarrow & \dots & & \end{array}$$

¹Identifichiamo uno spazio topologico X alla coppia topologica (X, \emptyset) . Quindi $h_p(X) := h_p(X, \emptyset)$. Converremo inoltre, per semplicità, che $h_p(X, A)$ sia definito per ogni $p \in \mathbb{Z}$ ed uguale a 0 per ogni p negativo.

5. Assioma dimensionale. Se pt è uno spazio topologico composto di un solo punto, allora

$$(21.2.9) \quad h_p(\text{pt}) = 0 \quad \forall p > 0.$$

Definizione XXI.2.1. Il gruppo $\mathbf{G} = h_0(\text{pt})$ si dice il *gruppo dei coefficienti* dell'omologia h_* .

Osservazione XXI.2.2. Se rafforziamo l'assioma di omotopia richiedendo in più che per ogni equivalenza debole $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ la corrispondente $f_* : h_*(X, A) \rightarrow h_*(Y, B)$ sia un isomorfismo, allora l'omologia h_* è completamente determinata dal suo gruppo dei coefficienti. Scriveremo allora

$$(21.2.10) \quad h_p(X, A) = H_p(X, A; \mathbf{G}) \quad \text{se} \quad h_0(\text{pt}) = \mathbf{G}.$$

Il gruppo $h_*(X, A)$ è comunque completamente determinato dal gruppo dei coefficienti nel caso in cui (X, A) sia una coppia cellulare².

Osservazione XXI.2.3. Per ogni spazio topologico X ed ogni omologia, abbiamo $h_p(X, X) = h_p(\emptyset) = 0$ per ogni intero p . L'uguaglianza $h_p(X, X) \simeq h_p(\emptyset)$ segue dall'assioma di excisione, applicato ad $A = \emptyset, B = X$. Applicando l'assioma di esattezza al caso $A = \emptyset, B = \emptyset$, troviamo una successione esatta lunga di omomorfismi di gruppi in cui tutti i termini sono uguali e le applicazioni i_* e j_* sono isomorfismi. Se ne conclude che tutti i gruppi sono banali.

XXI.3. Prime conseguenze degli assiomi

Si ricava immediatamente dagli assiomi

Teorema XXI.3.1 (invarianza omotopica). *Se (X, A) ed (Y, B) sono due coppie omotopicamente equivalenti, allora $h_*(X, A) \simeq h_*(Y, B)$.*

Abbiamo poi, nel caso dei complessi di celle:

Teorema XXI.3.2 (quoziente). *Sia (X, A) una coppia cellulare. Allora*

$$(21.3.1) \quad h_p(X, A) = h_p(X/A, \text{pt}_A), \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

ove pt_A è l'immagine di A nella proiezione sul quoziente $X \rightarrow X/A$.

DIMOSTRAZIONE. Il cono $CA = (A \times [0, 1]) / (A \times \{0\})$ di base A ha lo stesso tipo d'omotopia di un punto. Poiché (X, A) è una coppia cellulare, possiamo estendere un'omotopia che collassa CA ad un punto ad un'omotopia F della somma topologica $X \cup_A CA$. Otteniamo così un'equivalenza omotopica

$$(X \cup_A CA, CA) \simeq (X/A, \text{pt}_A).$$

Per l'assioma di excisione,

$$h_p(X \cup_A CA, CA) \equiv h_p(X, X \cap CA) = h_p(X, A).$$

La tesi segue quindi per l'invarianza omotopica. \square

²Vedi ad esempio il Cap. 13 in J.P.May: *A concise course in Algebraic Topology*, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1999.

Osservazione XXI.3.3. Nell'enunciato del teorema precedente potremmo sostituire all'ipotesi che (X, A) sia una coppia cellulare l'ipotesi che $\iota : A \hookrightarrow X$ sia una cofibrazione.

Teorema XXI.3.4. *Sia X uno spazio topologico non vuoto ed $x_0 \in X$. Allora*

$$\begin{aligned} h_0(X) &= h_0(X, x_0) \oplus h_0(\text{pt}), \\ h_p(X) &= h_p(X, x_0) \quad \forall p > 0. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando la successione esatta lunga della coppia (X, x_0) si ottiene subito che $h_p(X) = h_p(X, x_0)$ per ogni $p \geq 2$. Abbiamo quindi una successione esatta

$$(*) \quad 0 \rightarrow h_1(X) \rightarrow h_1(X, x_0) \rightarrow h_0(x_0) \rightarrow h_0(X) \rightarrow h_0(X, x_0) \rightarrow 0.$$

Consideriamo l'applicazione costante $f : X \rightarrow \{x_0\}$. Essa induce un omomorfismo $f_* : h_0(X) \rightarrow h_0(x_0)$. Se $\iota : \{x_0\} \ni x_0 \rightarrow x_0 \in X$, da $f \circ \iota = \text{id}_{x_0}$ otteniamo che la composizione

$$h_0(x_0) \xrightarrow{\iota_*} h_0(X) \xrightarrow{f_*} h_0(x_0)$$

è l'identità. In particolare, ι_* è iniettiva e quindi la successione esatta $(*)$ si spezza nelle due successioni esatte

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow h_1(X) \longrightarrow h_1(X, x_0) \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow h_0(x_0) \xrightarrow{\iota_*} h_0(X) \longrightarrow h_0(X, x_0) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Inoltre, $h_0(X, x_0) \simeq \ker(f_* : h_0(X) \rightarrow h_0(x_0))$, perché f_* è un'inversa destra di ι_* . Otteniamo così la tesi. \square

Definizione XXI.3.5. Il gruppo $h_p(X, x_0)$ non dipende dalla scelta del punto base x_0 . Lo indichiamo con $\tilde{h}_p(X)$ e lo chiamiamo *omologia ridotta* di X .

Se $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$, ed $f : X \rightarrow \{x_0\}$ è l'applicazione costante, abbiamo

$$\tilde{h}_p(X) = \ker(f_* : h_p(X) \rightarrow h_p(x_0)), \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Se (X, A) è una coppia con $A \neq \emptyset$, poniamo $\tilde{h}_p(X, A) = h_p(X, A)$.

Possiamo allora riformulare il Teorema XXI.3.2 nella forma

Teorema XXI.3.6 (quoziente). *Siano X uno spazio topologico ed A un sottoinsieme non vuoto di X . Se l'inclusione $A \hookrightarrow X$ è una cofibrazione, allora*

$$(21.3.2) \quad h_p(X, A) = \tilde{h}_p(X, A) = \tilde{h}_p(X/A), \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Proposizione XXI.3.7. *Se (X, A) è una coppia topologica, con $A \neq \emptyset$, allora abbiamo anche per l'omologia ridotta la successione esatta lunga:*

$$(21.3.3) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \tilde{h}_{p+1}(A) & \xrightarrow{\iota_*} & \tilde{h}_{p+1}(X) & \xrightarrow{J_*} & \tilde{h}_{p+1}(X, A) \longrightarrow \\ & & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_p(A) & \xrightarrow{\iota_*} & \tilde{h}_p(X) & \xrightarrow{J_*} & \tilde{h}_p(X, A) \longrightarrow \\ & & & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_{p-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Proposizione XXI.3.8 (omologia delle sfere). *Per ogni intero $n \geq 0$ abbiamo*

$$(21.3.4) \quad \tilde{h}_p(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbf{G} & \text{se } p = n, \\ 0 & \text{se } p \neq n. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Calcoliamo l'omologia della sfera $S^0 = \{\pm 1\}$. Per l'excisione, abbiamo $h_p(S^0, -1) \simeq h_p(\text{pt})$ per ogni $p \in \mathbb{N}$. Otteniamo perciò dalla successione esatta della coppia $(S^0, -1)$ che $h_p(S^0) = 0$ se $p > 0$ ed $h_0(S^0) \simeq \mathbf{G} \oplus \mathbf{G}$, che equivale ad $\tilde{h}_0(S^0) \simeq \mathbf{G}$.

Utilizziamo poi il fatto che S^n si ottiene dal disco D^n identificando ad un punto la sua frontiera $\partial D^n = S^{n-1}$. Poiché (D^n, S^{n-1}) è una coppia cellulare, otteniamo che $h_p(S^n) \simeq h_p(D^n, S^{n-1})$ per ogni intero p . Dalla successione esatta della coppia (D^n, S^{n-1}) , poiché D^n ha il tipo di omotopia di un punto, otteniamo che $\tilde{h}_p(S^n) \simeq h_{p-1}(S^{n-1})$ per ogni $n \geq 1$. La tesi segue per ricorrenza su n dal caso $n = 1$. \square

Teorema XXI.3.9 (omologia della sospensione). *Se X è uno spazio cellulare puntato, allora*

$$(21.3.5) \quad \tilde{h}_p(X) \simeq \tilde{h}_{p+1}(\Sigma X), \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché il cono CX è contrattile, abbiamo $\tilde{h}_p(CX) = 0$ per ogni $p \in \mathbb{N}$. La successione esatta lunga di omologia della coppia (CX, X) ci dà allora isomorfismi

$$\partial : h_p(X) \xrightarrow{\simeq} h_{p-1}(CX, X), \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Osserviamo ora che, se X è cellulare, allora (CX, X) è una coppia cellulare e quindi, poiché ΣX è omeomorfo al quoziente CX/X ,

$$\tilde{h}_p(CX, X) \simeq \tilde{h}_p(CX/X) \simeq \tilde{h}_p(\Sigma X), \quad \forall p \in \mathbb{Z},$$

da cui segue la tesi. \square

Questo risultato ci permette di calcolare in un altro modo l'omologia ridotta delle sfere, utilizzando il fatto che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo un omeomorfismo $\Sigma S^n \simeq S^{n+1}$.

Data una tripla di spazi topologici $A \subset Y \subset X$ definiamo un differenziale $\partial : h_p(X, Y) \rightarrow h_{p-1}(X, A)$ mediante la composizione

$$(21.3.6) \quad h_p(X, Y) \xrightarrow{\partial} h_{p-1}(Y) \xrightarrow{J_*} h_{p-1}(Y, A),$$

ove $J = i_Y^{(Y, A)}$ è l'inclusione $(Y, \emptyset) \hookrightarrow (Y, A)$.

Teorema XXI.3.10 (successione esatta di una tripla). *Sia X uno spazio topologico e siano A, Y due sottospazi di X con $A \subset Y \subset X$. Abbiamo allora una successione esatta lunga*

$$(21.3.7) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \cdots & \longrightarrow & h_{p+1}(X, Y) & \longrightarrow \\ & \longrightarrow & h_p(Y, A) & \longrightarrow & h_p(X, A) & \longrightarrow & h_p(X, Y) & \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & h_{p-1}(Y, A) & \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

Definiamo le applicazioni

$$\begin{aligned}\phi &: h_p(A \cap B) \ni \gamma \longrightarrow ((i_{A \cap B}^A)_*(\gamma), (i_{A \cap B}^B)_*(\gamma)) \in h_p(A) \oplus h_p(B), \\ \psi &: h_p(A) \oplus h_p(B) \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow (i_A^{A \cup B})_*(\alpha) - (i_B^{A \cup B})_*(\beta) \in h_p(A \cup B), \\ \partial &: h_p(A \cup B) \xrightarrow{i_*} h_p(A \cup B, A) \simeq h_p(B, A \cap B) \xrightarrow{\partial} h_{p-1}(A \cap B),\end{aligned}$$

cioè

$$\partial = \partial_{B, A \cap B} \circ (i_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_*^{-1} \circ (i_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_*.$$

Teorema XXI.3.11 (successione di Mayer-Vietoris). *Se A e B sono sottospazi topologici di uno spazio topologico X , abbiamo una successione esatta lunga*

$$(21.3.8) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & h_{p+1}(A \cup B) \longrightarrow \\ \xrightarrow{\partial} & h_p(A \cap B) & \xrightarrow{\phi} & h_p(A) \oplus h_p(B) & \xrightarrow{\psi} & h_p(A \cup B) & \longrightarrow \\ \xrightarrow{\partial} & h_{p-1}(A \cap B) & \longrightarrow & \cdots & & & \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE.

1. Esattezza in $h_p(A) \oplus h_p(B)$. Chiaramente $\phi \circ \psi = 0$. Sia $(\alpha, \beta) \in h_p(A) \oplus h_p(B)$, con $J_{A*}(\alpha) = J_{B*}(\beta)$. Consideriamo dapprima il caso in cui $\alpha = 0$. Abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} h_{p+1}(A, A \cap B) & \xrightarrow{\partial_{A, A \cap B}} & h_p(A \cap B) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow (i_{A \cap B}^B)_* \\ h_{p+1}(A \cup B, B) & \xrightarrow{\partial_{A \cup B, B}} & h_p(B), \end{array}$$

dove la prima freccia verticale è l'isomorfismo dato dall'excisione. Allora, per l'esattezza della successione

$$h_p(A, A \cap B) \simeq h_p(A \cup B, B) \xrightarrow{\partial_{(A \cup B), B}} h_p(B) \xrightarrow{(i_B^{A \cup B})_*} h_p(A \cup B)$$

esiste un elemento $\delta \in h_p(A, A \cap B)$ tale che

$$\beta = (i_{A \cap B}^B)_* \partial_{A, A \cap B}(\delta).$$

Otteniamo allora

$$\phi(\partial_{A, A \cap B}(\delta)) = ((i_{A \cap B}^A)_*(\partial_{A, A \cap B}(\delta)), (i_{A \cap B}^B)_*(\partial_{A, A \cap B}(\delta))) = (0, \beta).$$

Consideriamo ora il caso generale.

Se $\alpha \in h_p(A)$, $\beta \in h_p(B)$ e $(i_A^{A \cup B})_*(\alpha) = (i_B^{A \cup B})_*(\beta)$, allora

$$(i_{A \cup B}^{(A \cup B, B)})_*((i_A^{A \cup B})_*(\alpha)) = (i_{A \cup B}^{(A \cup B, B)})_*((i_B^{A \cup B})_*(\beta)) = 0.$$

Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} h_p(A) & \xrightarrow{(t_A^{A \cup B})_*} & h_p(A \cup B) \\ (t_A^{(A, A \cap B)})_* \downarrow & & \downarrow (t_{A \cup B}^{(A \cup B, B)})_* \\ h_p(A, A \cap B) & \xrightarrow[\cong]{(t_{(A, A \cap B)})_*} & h_p(A \cup B, B). \end{array}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} (t_{(A, A \cap B)}^{(A \cup B, B)})_* \circ (t_A^{(A, A \cap B)})_*(\alpha) &= (t_{A \cup B}^{(A \cup B, B)})_* \circ (t_A^{A \cup B})_*(\alpha) \\ &= (t_{A \cup B}^{(A \cup B, B)})_* \circ (t_B^{A \cup B})_*(\beta) = 0. \end{aligned}$$

Quindi, per l'excisione, $(t_A^{(A, A \cap B)})(\alpha) = 0$. Per l'esattezza della successione

$$h_p(A \cap B) \xrightarrow{(t_{A \cap B}^A)_*} h_p(A) \xrightarrow{(t_A^{(A, A \cap B)})_*} h_p(A, A \cap B)$$

otteniamo che esiste un elemento $\gamma \in h_p(A \cap B)$ tale che $\alpha = (t_{A \cap B}^A)_*(\gamma)$. Abbiamo

$$(\alpha, \beta) - \phi(\gamma) = (0, \beta - (t_{A \cap B}^B)_*(\gamma)) = (0, \beta'), \quad \text{con } \psi(0, \beta') = 0,$$

e ci siamo quindi ricondotti al caso speciale considerato all'inizio.

2. Esattezza in $h_p(A \cup B)$. Osserviamo innanzi tutto che $\delta \circ \psi = 0$. Infatti, se $\alpha \in h_p(A)$, allora $(t_A^{A \cup B})_* \circ (t_{A \cup B}^{(A \cup B, A)}) = 0$ e quindi a maggior ragione

$$\partial_{B, A \cap B} \circ (t_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_*^{-1} \circ (t_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_* (t_A^{A \cup B})_*(\alpha) = 0.$$

Se $\beta \in h_p(B)$, utilizziamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} h_p(B) & \xrightarrow{(t_B^{A \cup B})_*} & h_p(A \cup B) \\ (t_B^{(B, A \cap B)})_* \downarrow & & \downarrow (t_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_* \\ h_p(B, A \cap B) & \xrightarrow[\cong]{(t_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_*} & h_p(A \cup B, A). \end{array}$$

Otteniamo

$$\begin{aligned} \partial_{B, A \cap B} \circ (t_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_*^{-1} \circ (t_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_* (t_B^{A \cup B})_*(\beta) \\ = \partial_{B, A \cap B} \circ (t_B^{(B, A \cap B)})_*(\beta) = 0 \end{aligned}$$

per l'esattezza della successione

$$(*) \quad h_p(B) \xrightarrow{(t_B^{(B, A \cap B)})_*} h_p(B, A \cap B) \xrightarrow{\partial_{B, A \cap B}} h_{p-1}(A \cap B).$$

Sia ora $\delta \in h_p(A \cup B)$ con $\delta(\delta) = 0$. Per l'esattezza di (*), otteniamo che

$$\exists \beta \in h_q(B) \quad \text{tale che} \quad (t_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_*(\delta) = (t_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_* \circ (t_B^{(B, A \cap B)})_*(\beta).$$

Per la commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccc} h_p(B) & \xrightarrow{(i_B^{(B,A \cap B)})_*} & h_p(A, A \cap B) \\ (i_B^{(A \cup B)})_* \downarrow & & \simeq \downarrow (i_{(A,A \cap B)}^{(A \cup B,A)})_* \\ h_p(A \cup B) & \xrightarrow{(i_{A \cup B}^{(A \cup B,A)})_*} & h_p(A \cup B, A) \end{array}$$

otteniamo che

$$(i_{A \cup B}^{(A \cup B,A)})_*(\delta - (i_B^{(A \cup B)})_*(\beta)) = 0.$$

Per l'esattezza della successione

$$h_p(A) \xrightarrow{(i_A^{(A \cup B)})_*} h_p(A \cup B) \xrightarrow{(i_{A \cup B}^{(A \cup B,A)})_*} h_p(A \cup B, A)$$

segue che esiste un $\alpha \in h_p(A)$ tale che

$$\delta - (i_B^{(A \cup B)})_*(\beta) = (i_A^{(A \cup B)})_*(\alpha), \quad \text{cioè} \quad \delta = \psi(\alpha, \beta).$$

3. Esattezza in $h_p(A \cap B)$. Dimostriamo in primo luogo che $\phi \circ \delta = 0$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} (i_{A \cap B}^B)_* \circ \delta &= (i_{A \cap B}^B)_* \circ \partial_{B,A \cap B} \circ (i_{(B,A \cap B)}^{(A \cup B,A)})_*^{-1} \circ (i_{A \cup B}^{(A \cup B,A)})_* \\ &= 0 \circ (i_{(B,A \cap B)}^{(A \cup B,A)})_*^{-1} \circ (i_{A \cup B}^{(A \cup B,A)})_* = 0. \end{aligned}$$

D'altra parte, dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} h_{p+1}(B, A \cap B) & \xrightarrow{(i_{(B,A \cap B)}^{(A \cup B,A)})_*} & h_{p+1}(A \cup B, A) \\ \partial_{B,A \cap B} \downarrow & & \downarrow \partial_{A \cup B,A} \\ h_p(A \cap B) & \xrightarrow{(i_{A \cap B}^A)_*} & h_p(A) \end{array}$$

segue che

$$\begin{aligned} (i_{A \cap B}^A)_* \circ \delta &= (i_{A \cap B}^A)_* \circ \partial_{B,A \cap B} \circ (i_{(B,A \cap B)}^{(A \cup B,A)})_*^{-1} \circ (i_{A \cup B}^{(A \cup B,A)})_* \\ &= \partial_{A \cup B,A} \circ (i_{(B,A \cap B)}^{(A \cup B,A)})_* \circ (i_{(B,A \cap B)}^{(A \cup B,A)})_*^{-1} \circ (i_{A \cup B}^{(A \cup B,A)})_* \\ &= \partial_{A \cup B,A} \circ (i_{A \cup B}^{(A \cup B,A)})_* = 0. \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione del fatto che $\phi \circ \delta = 0$.

Sia ora $\gamma \in h_p(A \cap B)$, con $\phi(\gamma) = 0$. Dalla $(i_{A \cap B}^B)_*(\gamma) = 0$ segue che esiste un elemento $\mu \in h_{p+1}(B, A \cap B)$ tale che $\gamma = \partial_{B,A \cap B}(\mu)$. Sia $\eta = (i_{(B,A \cap B)}^{(A \cup B,A)})_*(\mu)$. Poiché

$$\begin{aligned} 0 &= (i_{A \cap B}^A)_*(\gamma) = (i_{A \cap B}^A)_* \circ \partial_{B,A \cap B}(\mu) \\ &= (i_{A \cap B}^A)_* \circ \partial_{B,A \cap B} \circ (i_{(B,A \cap B)}^{(A \cup B,A)})_*^{-1}(\eta) \\ &= \partial_{A \cup B,A}(\eta), \end{aligned}$$

abbiamo $\eta = (i_{A \cup B}^{(A \cup B,A)})_*(\delta)$ per un elemento $\delta \in h_{p+1}(A \cup B)$. Quindi

$$\gamma = \partial_{B,A \cap B}(\mu)$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_{B,A \cap B} \circ (i_{(B,A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_*^{-1}(\eta) \\
&= \partial_{B,A \cap B} \circ (i_{(B,A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_*^{-1} \circ (i_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_*(\delta) \\
&= \mathfrak{d}(\delta).
\end{aligned}$$

La dimostrazione è completa. \square

XXI.4. La formula di Künnet

Definiamo il prodotto di due coppie topologiche nel modo seguente:

$$(21.4.1) \quad (X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y).$$

Vale il

Teorema XXI.4.1 (Künnet). *Se (X, A) , (Y, B) sono due coppie topologiche ed $(X \times B, A \times Y)$ è una coppia excisiva, allora, per ogni intero non negativo p , abbiamo*

$$(21.4.2) \quad h_p((X, A) \times (Y, B)) = \bigoplus_{p_1+p_2=p} h_{p_1}(X, A) \otimes_{\mathbb{Z}} h_{p_2}(Y, B).$$

XXI.5. Gruppi di omologia dei complessi cellulari

Sia X un complesso cellulare di dimensione m . Indichiamo con X^n lo scheletro n -dimensionale di X , cioè l'unione delle sue celle di dimensione $\leq n$.

Se $\mathbf{G} = h_0(\text{pt})$, definiamo i gruppi abeliani $\mathbf{C}_n(X, \mathbf{G})$ mediante

$$(21.5.1) \quad \mathbf{C}_n(X, \mathbf{G}) = h_n(X^n, X^{n-1})$$

e consideriamo le applicazioni

$$(21.5.2) \quad \partial_n = (i_{X^{n-1}}^{(X^{n-1}, X^{n-2})})_* \circ \partial_{X^n, X^{n-1}} : \mathbf{C}_n(X, \mathbf{G}) \longrightarrow \mathbf{C}_{n-1}(X, \mathbf{G}).$$

Otteniamo in questo modo una successione di gruppi abeliani e di omomorfismi:

$$(21.5.3) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & \mathbf{C}_n(X, \mathbf{G}) & \xrightarrow{\partial_n} & \mathbf{C}_{n-1}(X, \mathbf{G}) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \mathbf{C}_{n-2}(X, \mathbf{G}) \rightarrow \\ \cdots & \rightarrow & \mathbf{C}_2(X, \mathbf{G}) & \xrightarrow{\partial_2} & \mathbf{C}_1(X, \mathbf{G}) & \xrightarrow{\partial_1} & \mathbf{C}_0(X, \mathbf{G}) \rightarrow 0 \end{array}$$

Teorema XXI.5.1. *Se X è un complesso cellulare, allora (21.5.4) è un complesso, cioè*

$$(21.5.4) \quad \partial_{n-1} \circ \partial_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti $\partial_n \circ \partial_{n-1}$ è la composizione

$$\begin{array}{ccccc}
h_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_{X^n, X^{n-1}}} & h_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{(i_{X^{n-1}}^{(X^{n-1}, X^{n-2})})_*} & h_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \\
& & \xrightarrow{\partial_{X^{n-1}, X^{n-2}}} & h_{n-2}(X^{n-2}) & \xrightarrow{(i_{X^{n-2}}^{(X^{n-2}, X^{n-3})})_*} & h_{n-1}(X^{n-2}, X^{n-3}),
\end{array}$$

che è nulla perché $(i_{X^{n-1}}^{(X^{n-1}, X^{n-2})})_* \circ \partial_{X^{n-1}, X^{n-2}} = 0$. \square

Proposizione XXI.5.2. *Sia X un complesso cellulare finito e sia q_n il numero di celle di dimensione n di X . Se $h_0(\text{pt}) = \mathbf{G}$, allora*

$$(21.5.5) \quad \mathbf{C}_n(X, \mathbf{G}) \simeq \mathbf{G}^{q_n} = \underbrace{\mathbf{G} \oplus \cdots \oplus \mathbf{G}}_{q_n \text{ volte}}$$

Abbiamo inoltre

$$(21.5.6) \quad h_p(X^n, X^{n-1}) = 0, \quad \forall p \neq n, \quad p > 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il caso $n = 0$. Poiché $X^{n-1} = \emptyset$, $\mathbf{C}(X, \mathbf{G}) = h_0(X^0) \simeq \mathbf{G}^{q_0}$ perché X^0 è uno spazio discreto con q_0 punti.

Sia ora $n > 0$. Per il Teorema XXI.3.2, abbiamo

$$\begin{aligned} h_p(X^n, X^{n-1}) &\simeq h_p(X^n/X^{n-1}, \text{pt}_{X^{n-1}}) = \tilde{h}_p(X^n/X^{n-1}), \quad \forall p, \\ &= h_p(X^n/X^{n-1}) \quad \text{se } p > 0. \end{aligned}$$

Il quoziente X^n/X^{n-1} è un bouquet di q_n sfere S^n . Dalla successione esatta di Mayer-Vietoris ricaviamo immediatamente che $h_p(X^n/X^{n-1}) = 0$ se $p \neq n$, $p > 0$, e che $h_n(X^n/X^{n-1})$ è la somma diretta di q_n copie di $h_n(S^n)$, che, per la Proposizione XXI.3.8 è isomorfo a \mathbf{G} . \square

Proposizione XXI.5.3. *Se X è un complesso cellulare di dimensione finita, abbiamo:*

$$(21.5.7) \quad h_p(X^n) = 0 \quad \text{se } p > n,$$

$$(21.5.8) \quad (i_{X^n}^X)_* : h_p(X^n) \longrightarrow h_p(X) \quad \text{è un isomorfismo per } p < n.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo le successioni esatte della coppie cellulari (X^n, X^{n-1}) :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & h_{p+1}(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow \\ & & & & & & \\ \longrightarrow & h_p(X^{n-1}) & \longrightarrow & h_p(X^n) & \longrightarrow & h_p(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow & \\ & & & & & & \\ & \longrightarrow & h_{p-1}(X^{n-1}) & \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

Se $p > 0$, $p \neq n$, da $h_p(X^n, X^{n-1}) \simeq h_{p+1}(X^n, X^{n-1}) = 0$ ricaviamo che $h_p(X^n) \simeq h_p(X^{n-1})$. Se $p > n$, abbiamo per ricorrenza $h_p(X^n) \simeq (h_p(\text{pt}))^{q_0} \simeq 0$.

Se invece $p < n$, otteniamo per ricorrenza che $h_p(X^{n-1}) \simeq h_p(X^n)$ se $n-1 > p$. Questa dà per ricorrenza un isomorfismo $h_p(X^n) \simeq h_p(X^m)$ per $m, n > p$. Poiché X ha dimensione finita, $X = X^m$ per m sufficientemente grande, ed otteniamo perciò la tesi. \square

Definizione XXI.5.4. Se

$$(21.5.9) \quad \cdots \rightarrow \mathbf{C}_n \xrightarrow{D_n} \mathbf{C}_{n-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{D_2} \mathbf{C}_1 \xrightarrow{D_1} \mathbf{C}_0 \longrightarrow 0$$

è un complesso di gruppi abeliani e di omomorfismi, il quoziente

$$(21.5.10) \quad H_p(\mathbf{C}_*, D_*) = \frac{\ker(D_p : \mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{C}_{p-1})}{\text{Imm}(D_{p+1} : \mathbf{C}_{p+1} \rightarrow \mathbf{C}_p)}$$

si dice il p -esimo gruppo di omologia del complesso (21.5.9).

Per il Teorema XXI.5.1 ad ogni complesso cellulare X e ad ogni gruppo abeliano \mathbf{G} è associato un complesso $(\mathbf{C}_n(X, \mathbf{G}), \partial_*)$ di gruppi abeliani e di omomorfismi (21.5.4).

Teorema XXI.5.5. *Se X è un complesso cellulare, abbiamo un isomorfismo naturale*

$$(21.5.11) \quad h_p(X) \simeq H_p(\mathbf{C}(X; \mathbf{G}), \partial_*).$$

DIMOSTRAZIONE. Formiamo un diagramma commutativo scrivendo in orizzontale la successione esatta della tripla (X^{p+1}, X^p, X^{p-1}) ed in verticale quella della tripla (X^p, X^{p-1}, X^{p-2}) . Poiché $h_p(X^{p+1}, X^p) = 0$, $h_{p+1}(X^{p+1}, X^p) = \mathbf{C}_{p+1}(X, \mathbf{G})$ ed $h_p(X^p, X^{p-1}) = \mathbf{C}_p(X, \mathbf{G})$, abbiamo un diagramma commutativo con righe e colonne esatte:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & & \parallel & & & \\
 & & & h_p(X^{p-1}, X^{p-2}) & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 \mathbf{C}_{p+1}(X, \mathbf{G}) & \longrightarrow & h_p(X^p, X^{p-2}) & \longrightarrow & h_p(X^{p+1}, X^{p-2}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathbf{C}_p(X, \mathbf{G}) & & & & \\
 & & \partial_p \downarrow & & & & \\
 & & \mathbf{C}_{p-1}(X, \mathbf{G}) & & & &
 \end{array}$$

Per l'esattezza della colonna, otteniamo

$$\ker \partial_p = h_p(X^p, X^{p-2}).$$

D'altra parte, $(t_{(X^p, X^{p-2})}^{(X^p, X^{p-1})})_*$ è iniettiva. Quindi, poiché

$$\partial_{p+1} = (t_{(X^p, X^{p-2})}^{(X^p, X^{p-1})})_* \circ (t_{X^p}^{(X^p, X^{p-1})})_* \circ \partial_{X^{p+1}, X^p}$$

abbiamo

$$\text{Imm } \partial_{p+1} \simeq \text{Imm } (t_{X^p}^{(X^p, X^{p-1})})_* \circ \partial_{X^{p+1}, X^p}.$$

Questo ci dà

$$h_p(\mathbf{C}_*(X, \mathbf{G}), \partial_*) \simeq h_p(X^{p+1}, X^{p-2}).$$

Dalla successione esatta

$$0 = h_p(X^{p-2}) \rightarrow h_p(X^{p+1}) \rightarrow h_p(X^{p+1}, X^{p-2}) \rightarrow h_{p-1}(X^{p-2}) = 0$$

otteniamo che $h_p(X^{p+1}, X^{p-2}) \simeq h_p(X^{p+1})$. La tesi segue quindi dalla (21.5.8) della Proposizione XXI.5.3. \square

Calcolo esplicito dei gruppi di omologia a coefficienti in \mathbb{Z} di un complesso cellulare.

Per ogni cella $e_\lambda \in \mathbf{C}_p(X)$ indichiamo con $\langle e_\lambda \rangle$ il generatore 1 corrispondente alla p -cella e_λ . Possiamo scrivere

$$(21.5.12) \quad \partial_p \langle e_\lambda \rangle = \sum_{e_\mu \in X^{p-1}} [e_\lambda : e_\mu] \langle e_\mu \rangle,$$

per opportuni numeri interi $[e_\lambda, e_\mu]$, che si dicono *numeri d'incidenza*.

Sia

$$h_\lambda : \partial e_\lambda \longrightarrow X^{p-1}$$

la funzione d'attaccamento. Poiché le celle chiuse hanno lo stesso tipo di omotopia del punto, abbiamo, per ogni $p > 0$, un isomorfismo

$$\partial_{\bar{e}_\lambda, \partial e_\lambda} : H_p(\bar{e}_\lambda, \partial e_\lambda; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{p-1}(\partial e_\lambda; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}.$$

Definiamo quindi un omomorfismo

$$\tilde{h}_{\lambda*} = h_{\lambda*} \circ \partial_{\bar{e}_\lambda, \partial e_\lambda} : H_p(\bar{e}_\lambda, \partial e_\lambda; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \longrightarrow H_{p-1}(X^{p-1}, \mathbb{Z}).$$

Inoltre, l'applicazione caratteristica di e_μ

$$\phi_\mu : \bar{e}_\mu \longrightarrow X^{p-1}$$

induce un omomorfismo iniettivo

$$\phi_{\mu*} : H_{p-1}(\bar{e}_\mu, \partial e_\mu; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \longrightarrow H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2}; \mathbb{Z}) = \mathbf{C}_{p-1}(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{q_{p-1}}.$$

Possiamo definire un'inversa destra di $\phi_{\mu*}$ mediante

$$\mathbf{C}_{p-1}(X, \mathbb{Z}) \ni \sum_{e_\nu \in X^{p-1}} k_\nu \langle e_\nu \rangle \longrightarrow k_\mu \in \mathbb{Z} \simeq H_{p-1}(\bar{e}_\mu, \partial e_\mu; \mathbb{Z}).$$

Otteniamo allora

Teorema XXI.5.6. *Sia X un complesso cellulare, $e_\lambda \in X^p$, $e_\mu \in X^{p-1}$. Il numero d'incidenza $[e_\lambda : e_\mu]$ è definito dalla formula*

$$(21.5.13) \quad [e_\lambda : e_\mu] = \left((\phi_{\mu*})^{-1} \circ (i_{X^{p-1}}^{(X^{p-1}, X^{p-2})})_* \circ \tilde{h}_{\lambda*} \right) (1) \in \mathbb{Z} \simeq H_{p-1}(\bar{e}_\mu, \partial e_\mu; \mathbb{Z}),$$

ove $1 \in \mathbb{Z} \simeq H_p(\bar{e}_\lambda, \partial e_\lambda; \mathbb{Z})$.

Nel caso di un complesso cellulare *regolare*, per cui cioè le applicazioni caratteristiche $\phi_\lambda : \bar{e}_\lambda \rightarrow X$ siano omeomorfismi con l'immagine, il valore dei numeri d'incidenza $[e_\lambda : e_\mu]$ è 0 se $\phi_\mu(e_\mu)$ non è contenuto in $h_\lambda(\partial e_\lambda)$, altrimenti è uguale a ± 1 , ove il segno dipende dal fatto che l'orientamento di e_μ coincida o sia opposto a quello della frontiera di e_λ .

Appendice: Elementi di algebra omologica

XXII.1. Complessi

Definizione XXII.1.1. Chiamiamo *complesso* una coppia (\mathbf{A}, α) formata da un gruppo abeliano \mathbf{A} e da un suo endomorfismo nilpotente $\alpha \in \text{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ con $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha = 0$.

Poniamo

$$(22.1.1) \quad B(\mathbf{A}, \alpha) = \alpha(\mathbf{A}) = \{\alpha(a) \mid a \in \mathbf{A}\},$$

$$(22.1.2) \quad Z(\mathbf{A}, \alpha) = \ker \alpha = \{a \in \mathbf{A} \mid \alpha(a) = 0\}.$$

Per la condizione $\alpha^2 = 0$, abbiamo

$$B(\mathbf{A}, \alpha) \subset Z(\mathbf{A}, \alpha)$$

e possiamo quindi considerare il gruppo quoziente

$$(22.1.3) \quad H(\mathbf{A}, \alpha) = \frac{Z(\mathbf{A}, \alpha)}{B(\mathbf{A}, \alpha)}.$$

Definizione XXII.1.2. Il gruppo $H(\mathbf{A}, \alpha)$ si dice l'*omologia* del complesso differenziale (\mathbf{A}, α) .

Definizione XXII.1.3. Siano (\mathbf{A}, α) , (\mathbf{B}, β) due complessi. Un omomorfismo $\phi \in \text{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ è un omomorfismo di complessi se commuta con i differenziali, se cioè il diagramma

$$(22.1.4) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{A} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbf{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{B} \end{array}$$

è commutativo.

Lemma XXII.1.4. Siano (\mathbf{A}, α) , (\mathbf{B}, β) due complessi e $\phi \in \text{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ un omomorfismo di complessi. Allora

$$\phi(B(\mathbf{A}, \alpha)) \subset B(\mathbf{B}, \beta),$$

$$\phi(Z(\mathbf{A}, \alpha)) \subset Z(\mathbf{B}, \beta),$$

e risulta perciò definito un unico omomorfismo dei gruppi di omologia $[\phi] : H(\mathbf{A}, \alpha) \rightarrow H(\mathbf{B}, \beta)$ tale che

$$[\phi]([a]) = [\phi(a)], \quad \forall a \in Z(\mathbf{A}, \alpha).$$

Definizione XXII.1.5. Una successione di gruppi abeliani

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\iota} \mathbf{B} \xrightarrow{J} \mathbf{C}$$

è *esatta* se $\text{im } \iota = \ker J$.

Se inoltre ι è iniettiva e J surgettiva, diciamo che

$$(22.1.5) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\iota} \mathbf{B} \xrightarrow{J} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

è una *successione esatta corta*.

Una *successione esatta corta di omomorfismi di complessi* è il dato di tre complessi di catene (\mathbf{A}, α) , (\mathbf{B}, β) , (\mathbf{C}, γ) e di una successione esatta corta (22.2.8) in cui ι e J siano omomorfismi di complessi.

XXII.2. Complessi di catene

Definizione XXII.2.1. Un *complesso di catene* è il dato di un gruppo abeliano \mathbb{Z} -graduato $\mathbf{C} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathbf{C}_p$ e di un omomorfismo omogeneo di grado (-1) $\delta : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ con $\delta^2 = \delta \circ \delta = 0$, che si dice il *differenziale* od *operatore bordo* del complesso.

Per ogni intero p , la restizione a \mathbf{C}_p del differenziale definisce un omomorfismo $\delta_p : \mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{C}_{p-1}$, e $\delta_{p-1} \circ \delta_p = 0$.

Indichiamo con (\mathbf{C}, δ) il complesso di catene

$$(22.2.1) \quad \dots \longrightarrow \mathbf{C}_{p+1} \xrightarrow{\delta_{p+1}} \mathbf{C}_p \xrightarrow{\delta_p} \mathbf{C}_{p-1} \xrightarrow{\delta_{p-1}} \mathbf{C}_{p-2} \longrightarrow \dots$$

Anche le δ_p si dicono i *differenziali*, od anche *operatori bordo* del complesso (\mathbf{C}, δ) .

Poiché $\delta^2 = 0$, abbiamo

$$(22.2.2) \quad \delta(\mathbf{C}) = B(\mathbf{C}, \delta) \subset Z(\mathbf{C}, \delta) = \ker \delta.$$

Definizione XXII.2.2. Il quoziente

$$(22.2.3) \quad H(\mathbf{C}, \delta) = \frac{Z(\mathbf{C}, \delta)}{B(\mathbf{C}, \delta)}$$

si dice l'*omologia* del complesso di catene (\mathbf{C}, δ) .

L'omologia di (\mathbf{C}, δ) è un gruppo \mathbb{Z} -graduato: abbiamo

$$(22.2.4) \quad H(\mathbf{C}, \delta) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(\mathbf{C}, \delta),$$

ove gli $H_p(\mathbf{C}, \delta)$ sono i gruppi quoziente

$$(22.2.5) \quad H_p(\mathbf{C}, \delta) = \frac{\ker \delta_p : \mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{C}_{p-1}}{\text{im } \delta_{p+1} : \mathbf{C}_{p+1} \rightarrow \mathbf{C}_p}.$$

Chiamiamo gli $H_p(\mathbf{C}, \delta)$ i *gruppi di omologia* del complesso (\mathbf{C}, δ) .

Scriveremo anche

$$Z_p(\mathbf{C}, \delta) = \ker \delta_p : \mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{C}_{p-1},$$

$$B_p(\mathbf{C}, \delta) = \text{im } \delta_{p+1} : \mathbf{C}_{p+1} \rightarrow \mathbf{C}_p,$$

dimodoché

$$Z(\mathbf{C}, \delta) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} Z_p(\mathbf{C}, \delta),$$

$$B(\mathbf{C}, \delta) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} B_p(\mathbf{C}, \delta),$$

$$H_p(\mathbf{C}, \delta) = \frac{Z_p(\mathbf{C}, \delta)}{B_p(\mathbf{C}, \delta)}.$$

Definizione XXII.2.3. Siano (\mathbf{A}, α) e (\mathbf{B}, β) due complessi di catene. Un omomorfismo $\phi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ si dice un *omomorfismo di complessi di catene* se è omogeneo di grado zero e commuta con i differenziali, se cioè

$$(22.2.6) \quad \phi(\mathbf{A}_p) \subset \mathbf{B}_p, \quad \forall p \in \mathbb{Z},$$

$$(22.2.7) \quad \phi \circ \alpha = \beta \circ \phi.$$

Un omomorfismo di complessi di catene determina un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{A} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbf{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{B}. \end{array}$$

Indicando con $\phi_p : \mathbf{A}_p \ni a_p \rightarrow \phi(a_p) \in \mathbf{B}_p$ gli omomorfismi definiti da ϕ per ogni intero p , possiamo riscrivere il diagramma precedente come:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathbf{A}_{p+1} & \xrightarrow{\alpha_{p+1}} & \mathbf{A}_p & \xrightarrow{\alpha_p} & \mathbf{A}_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \phi_{p+1} \downarrow & & \phi_p \downarrow & & \phi_{p-1} \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & \mathbf{B}_{p+1} & \xrightarrow{\beta_{p+1}} & \mathbf{B}_p & \xrightarrow{\beta_p} & \mathbf{B}_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Lemma XXII.2.4. Sia $\phi : (\mathbf{A}, \alpha) \rightarrow (\mathbf{B}, \beta)$ un omomorfismo di complessi di catene. Allora, per ogni intero $p \in \mathbb{Z}$,

$$\phi_p(Z_p(\mathbf{A}, \alpha)) \subset Z_p(\mathbf{B}, \beta), \quad \phi_p(B_p(\mathbf{A}, \alpha)) \subset B_p(\mathbf{B}, \beta)$$

e risulta perciò definito un unico omomorfismo dei gruppi di omologia $[\phi]_p : H_p(\mathbf{A}, \alpha) \rightarrow H_p(\mathbf{B}, \beta)$ tale che

$$[\phi]_p([a]) = [\phi_p(a)], \quad \forall a \in Z_p(\mathbf{A}, \alpha).$$

Definizione XXII.2.5. Una successione di gruppi abeliani

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\iota} \mathbf{B} \xrightarrow{J} \mathbf{C}$$

è esatta se $\text{im } \iota = \ker J$.

Se inoltre ι è iniettiva e J surgettiva, diciamo che

$$(22.2.8) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\iota} \mathbf{B} \xrightarrow{J} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

è una *successione esatta corta*.

Una *successione esatta corta di omomorfismi di complessi* è il dato di tre complessi di catene (\mathbf{A}, α) , (\mathbf{B}, β) , (\mathbf{C}, γ) e di una successione esatta corta (22.2.8) in cui ι e J siano omomorfismi di complessi di catene.

In particolare

$$0 \longrightarrow \mathbf{A}_p \xrightarrow{\iota_p} \mathbf{B}_p \xrightarrow{J_p} \mathbf{C}_p \longrightarrow 0$$

è, per ogni $p \in \mathbb{Z}$, una successione esatta corta ed abbiamo

$$\beta \circ \iota = \iota \circ \alpha, \quad \gamma \circ J = J \circ \beta,$$

cioè

$$\beta_p \circ \iota_p = \iota_{p-1} \circ \alpha_p, \quad \gamma_p \circ J_p = J_{p-1} \circ \beta_p, \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

L'omomorfismo di connessione. Ad una successione esatta corta di omomorfismi di complessi di catene

$$(22.2.9) \quad 0 \longrightarrow (\mathbf{A}, \alpha) \xrightarrow{\iota} (\mathbf{B}, \beta) \xrightarrow{J} (\mathbf{C}, \gamma) \longrightarrow 0$$

possiamo associare una corrispondenza

$$(22.2.10) \quad \iota_{p-1}^{-1} \circ \beta_p \circ J_p^{-1} : Z_p(\mathbf{C}, \gamma) \ni c_p \rightsquigarrow a_{p-1} \in Z_{p-1}(\mathbf{A}, \alpha)$$

nel modo seguente.

Sia $c_p \in Z_p(\mathbf{C}, \gamma)$. Poiché $J_p : \mathbf{B}_p \rightarrow \mathbf{C}_p$ è, per ipotesi, surgettiva, possiamo trovare un elemento

$$b_p \in \mathbf{B}_p \quad \text{tale che} \quad J_p(b_p) = c_p.$$

Abbiamo allora

$$J_{p-1} \circ \beta_p(b_p) = \gamma_p \circ J_p(b_p) = \gamma_p(c_p) = 0$$

e quindi, per ipotesi,

$$\exists! a_{p-1} \in \mathbf{A}_{p-1} \quad \text{tale che} \quad \iota_{p-1}(a_{p-1}) = \beta_p(b_p).$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \iota_{p-2} \circ \alpha_{p-1}(a_{p-1}) &= \beta_{p-1} \circ \iota_{p-1}(a_{p-1}) = \beta_{p-1} \circ \beta_p(b_p) = 0 \\ \implies \alpha_{p-1}(a_{p-1}) &= 0, \quad \text{cioè} \quad a_{p-1} \in Z_{p-1}(\mathbf{A}_*, \alpha_*). \end{aligned}$$

Abbiamo cioè $c_p \rightsquigarrow a_{p-1}$ se:

$$(22.2.11) \quad \begin{cases} a_{p-1} \in Z_{p-1}(\mathbf{A}_*, \alpha_*), \quad b_p \in \mathbf{B}_p, \quad c_p \in Z_p(\mathbf{C}_*, \gamma_*), \\ J_p(b_p) = c_p, \\ \beta_p(b_p) = \iota_{p-1}(a_{p-1}). \end{cases}$$

Osserviamo che, se fosse $c_p = \gamma_{p+1}(c_{p+1})$ per qualche $c_{p+1} \in \mathbf{C}_{p+1}$, esisterebbero un $b_{p+1} \in \mathbf{B}_{p+1}$ ed $a_p \in \mathbf{A}_p$ tali che

$$\begin{cases} c_p = \gamma_{p+1}(c_{p+1}), \\ J_p b_p = \gamma_{p+1}(c_{p+1}) = \gamma_{p+1} \circ J_{p+1}(b_{p+1}) = J_p \circ \beta_{p+1}(b_{p+1}), \\ b_p - \beta_{p+1}(b_{p+1}) = \iota_p(a_p), \\ \implies \beta_p(b_p) = \beta_p(b_p - \beta_{p+1}(b_{p+1})) = \beta_p \iota_p(a_p) = \iota_{p-1}(\alpha_p(a_p)), \\ \implies a_{p-1} = \alpha_p(a_p) \in B_p(\mathbf{A}_*, \alpha_*). \end{cases}$$

Quindi $\iota_{p-1}^{-1} \circ \beta_p \circ J_p^{-1}(B_p(\mathbf{C}_*, \gamma_*)) \subset B_{p-1}(\mathbf{A}_*, \alpha_*)$ e perciò la corrispondenza (22.2.10) definisce, per passaggio al quoziente, un'applicazione

$$(22.2.12) \quad \delta_p = [\iota_{p-1}^{-1} \circ \beta_p \circ J_p^{-1}] : H_p(\mathbf{C}_*, \gamma_*) \rightarrow H_{p-1}(\mathbf{A}_*, \alpha_*).$$

Definizione XXII.2.6. L'applicazione (22.2.12) si dice l'*omomorfismo di connessione* associato alla successione esatta corta (22.2.9).

Teorema XXII.2.7. Ad ogni successione esatta corta di complessi di catene

$$0 \longrightarrow (\mathbf{A}_*, \alpha_*) \xrightarrow{\iota_*} (\mathbf{B}_*, \beta_*) \xrightarrow{J_*} (\mathbf{C}_*, \gamma_*) \longrightarrow 0$$

corrisponde una successione esatta lunga in omologia:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_p(\mathbf{A}_*, \alpha_*) & \xrightarrow{[\iota]_p} & H_p(\mathbf{B}_*, \beta_*) & \xrightarrow{[J]_p} & H_p(\mathbf{C}_*, \gamma_*) \\ & & \delta_p \searrow & & & & \\ & & H_{p-1}(\mathbf{A}_*, \alpha_*) & \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

ove $\delta_p = [\iota_{p-1}^{-1} \circ \beta_p \circ J_p^{-1}]$ è l'omomorfismo di connessione.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo in primo luogo che la successione lunga è un complesso.

Abbiamo $[J_p] \circ [\iota_p] = [J_p \circ \iota_p] = [0] = 0$.

Sia poi $b_p \in Z_p(\mathbf{B}_*, \beta_*)$ e sia $c_p = J_p(b_p)$. La (22.2.11) è verificata da

$$\begin{cases} 0 \in Z_{p-1}(\mathbf{A}_*), & b_p \in Z_p(\mathbf{B}_*, \beta_*), & c_p \in Z_p(\mathbf{C}_*, \gamma_*), \\ c_p = J_p(b_p), \\ 0 = \beta_p(b_p) = \iota_{p-1}(0) \end{cases}$$

e quindi $c_p \rightsquigarrow 0$ e $\delta_p([c_p]) = \delta_p \circ [J_p]([b_p]) = 0$.

Siano ora a_{p-1}, b_p, c_p elementi che soddisfano la (22.2.11). Allora

$$\iota_{j-1}(a_{p-1}) = \beta_p(b_p) \in B_{p-1}(\mathbf{B}_*, \beta_*)$$

e quindi anche $[\iota_p] \circ \delta_p = 0$.

Dimostriamo ora l'esattezza.

Esattezza in $H_p(\mathbf{A}_, \alpha_*)$.* Sia $a_p \in Z_p(\mathbf{A}_*, \alpha_*)$ e supponiamo che esista $b_{p+1} \in \mathbf{B}_{p+1}$ tale che

$$\beta_{p+1}(b_{p+1}) = \iota_p(a_p).$$

Allora, posto $c_{p+1} = J_{p+1}(b_{p+1}) \in J_{p+1} \circ \beta_{p+1}^{-1} \circ \iota_p(Z_p(\mathbf{A}_*, \alpha_*))$, abbiamo

$$\begin{aligned} \gamma_{p+1}(c_{p+1}) &= \gamma_{p+1} \circ J_{p+1}(b_{p+1}) = J_p \circ \beta_{p+1}(b_{p+1}) = J_p \circ \iota_p(a_p) = 0 \\ &\implies c_{p+1} \in Z_{p+1}(\mathbf{C}_*, \gamma_*). \end{aligned}$$

Quindi $[\alpha_p] = \delta_{p+1}(c_{p+1})$.

Esattezza in $H_p(\mathbf{B}_, \beta_*)$.* Sia $b_p \in Z_p(\mathbf{B}_*, \beta_*)$ e supponiamo che esista un $c_{p+1} \in \mathbf{C}_{p+1}$ tale che

$$c_p = J_p(b_p) = \gamma_{p+1}(c_{p+1}).$$

Sia $b_{p+1} \in \mathbf{B}_{p+1}$ tale che

$$c_{p+1} = J_{p+1}(b_{p+1}).$$

Allora

$$J_p(b_p - \beta_{p+1}(b_{p+1})) = c_p - \gamma_{p+1} \circ J_{p+1}(b_{p+1}) = c_p - \gamma_{p+1}(c_{p+1}) = 0$$

e vi è quindi un unico $a_p \in \mathbf{A}_p$ tale che

$$\iota_p(a_p) = b_p - \beta_{p+1}(b_{p+1})$$

$$\begin{aligned} \implies \iota_{p-1} \circ \alpha_p(a_p) &= \beta_p \circ \iota_p(a_p) = \beta_p(b_p - \beta_{p+1}(b_{p+1})) = 0 \\ \implies \alpha_p(a_p) &= 0, \quad \text{cioè } a_p \in Z_p(\mathbf{A}_*, \alpha_*). \end{aligned}$$

Abbiamo chiaramente $[\iota_p]([a_p]) = [b_p - \beta_{p+1}(b_{p+1})] = [b_p]$.

Esattezza in $H_p(\mathbf{C}_, \gamma_*)$.* Sia $c_p \in Z_p(\mathbf{C}_*, \gamma_*)$. Dire che $\delta_p([c_p]) = 0$ è equivalente ad affermare che se Sa_{p-1}, b_p, c_p soddisfano (22.2.11), allora vi è $a_p \in \mathbf{A}_p$ tale che

$$a_{p-1} = \alpha_p(a_p).$$

Abbiamo allora

$$\beta_p(b_p) = \iota_{p-1}(a_{p-1}) = \iota_{p-1} \circ \alpha_p(a_p) = \beta_p \circ \iota_p(a_p).$$

Allora $b'_p = b_p - \iota_p(a_p) \in Z_p(\mathbf{B}_*, \beta_*)$ e, poiché $J_p(b'_p) = J_p(b_p - \iota_p(a_p)) = J_p(b_p) = c_p$, otteniamo che $[J_p]([b'_p]) = [c_p]$. \square

Definizione XXII.2.8. Diciamo che una successione esatta corta

$$(22.2.13) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\iota} \mathbf{B} \xrightarrow{j} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

si spezza se esiste un endomorfismo di proiezione $\varpi : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ su $\ker j$. Abbiamo cioè:

$$(22.2.14) \quad \varpi \in \text{Hom}(\mathbf{B}, \mathbf{B}), \quad \varpi^2 = \varpi \circ \varpi = \varpi, \quad j \circ \varpi = 0, \quad \varpi \circ \iota = \iota.$$

Lemma XXII.2.9. Sia (22.2.13) una successione esatta corta. Sono equivalenti

- (1) (22.2.13) si spezza;
- (2) ι ammette un'inversa sinistra in $\text{Hom}(\mathbf{B}, \mathbf{A})$;
- (3) j ammette un'inversa destra in $\text{Hom}(\mathbf{C}, \mathbf{B})$;
- (4) esistono un'inversa sinistra $\phi \in \text{Hom}(\mathbf{B}, \mathbf{A})$ di ι ed un'inversa destra $\psi \in \text{Hom}(\mathbf{C}, \mathbf{B})$ di j tali che

$$(22.2.15) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{C} \xrightarrow{\psi} \mathbf{B} \xrightarrow{\phi} \mathbf{A} \longrightarrow 0$$

sia una successione esatta corta.

DIMOSTRAZIONE. (1) \implies (2), (3), (4). Abbiamo la decomposizione

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \oplus \mathbf{B}_1, \quad \text{con } \mathbf{B}_0 = \ker \varpi, \quad \mathbf{B}_1 = \text{im } \varpi.$$

Le applicazioni

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbf{A} \ni a &\rightarrow \iota(a) \in \mathbf{B}_0 \quad \text{e} \\ \beta : \mathbf{B}_1 \ni b &\rightarrow j(b) \in \mathbf{C} \end{aligned}$$

sono isomorfismi e le applicazioni

$$\begin{aligned} \phi : \mathbf{B} \ni b &\rightarrow \alpha^{-1}(\varpi(b)) \in \mathbf{A} \quad \text{e} \\ \psi : \mathbf{C} \ni c &\rightarrow \beta^{-1}(c) \in \mathbf{B} \end{aligned}$$

sono, rispettivamente, un'inversa sinistra di ι ed un'inversa destra di j . Inoltre, per costruzione, esse definiscono una successione esatta corta (22.2.15)

(2) \Rightarrow (1). Se $\phi : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ è un'inversa sinistra di ι , possiamo porre $\varpi = \iota \circ \phi$. Verifichiamo la (22.2.14). Abbiamo

$$\begin{cases} \varpi^2 = \iota \circ (\phi \circ \iota) \circ \phi = \iota \circ \text{id}_{\mathbf{A}} \circ \phi = \iota \circ \phi = \varpi, \\ J \circ \varpi = (J \circ \iota) \circ \phi = 0 \circ \phi = 0, \\ \varpi \circ \iota = \iota \circ (\phi \circ \iota) = \iota \circ \text{id}_{\mathbf{A}} = \iota. \end{cases}$$

(3) \Rightarrow (1). Se $\psi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B}$ è un'inversa destra di J , possiamo definire ϖ mediante $\mathbf{B} \ni b \rightarrow \varpi(b) = b - \psi(J(b)) \in \mathbf{B}$. Abbiamo

$$\begin{cases} \varpi^2 = \varpi \circ (\text{id}_{\mathbf{B}} - \psi \circ J) = \text{id}_{\mathbf{B}} - \psi \circ J - \psi \circ J \circ (\text{id}_{\mathbf{B}} - \psi \circ J) \\ \quad = \text{id}_{\mathbf{B}} - \psi \circ (J \circ \psi) \circ J = \text{id}_{\mathbf{B}} - \psi \circ \text{id}_{\mathbf{C}} \circ J \\ \quad = \text{id}_{\mathbf{B}} - \psi \circ J = \varpi, \\ J \circ \varpi = J \circ (\text{id}_{\mathbf{B}} - \psi \circ J) = J - (J \circ \psi) \circ J = J - \text{id}_{\mathbf{C}} \circ J = 0, \\ \varpi \circ \iota = (\text{id}_{\mathbf{B}} - \psi \circ J) \circ \iota = \iota - \psi \circ J \circ \iota = \iota - 0 = \iota. \end{cases}$$

□

Definizione XXII.2.10. La (22.2.15) si dice *inversa* della (22.2.13).

Osserviamo che le successioni esatte corte che si spezzano sono esattamente quelle che ammettono un'inversa, in generale non unica. Nello studio dei gruppi di coomologia dei complessi, è spesso utile il seguente lemma algebrico:

Teorema XXII.2.11 (Lemma dei cinque). *Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe e colonne esatte:*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 & \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow & \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5 & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & & \\ 0 & & 0 & & & & 0 & & & \end{array}$$

Abbiamo supposto cioè che α_1 sia surgettiva, α_2 e α_4 siano isomorfismi ed α_5 sia iniettiva. Allora α_3 è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che α_3 è iniettiva. Sia $a_3 \in \mathbf{A}_3$, con $\alpha_3(a_3) = 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha_4(f_3(a_3)) = g_3(\alpha_3(a_3)) = 0 &\implies f_3(a_3) = 0 \implies \exists a_2 \in \mathbf{A}_2 \text{ t.c. } a_3 = f_2(a_2) \\ &\implies \alpha_3(f_2(a_2)) = g_2(\alpha_2(a_2)) = 0 \implies \exists b_1 \in \mathbf{B}_1 \text{ t.c. } \alpha_2(a_2) = g_1(b_1) \\ &\implies \exists a_1 \in \mathbf{A}_1 \text{ t.c. } \alpha_1(a_1) = b_1, \implies \alpha_2(a_2) = g_1(\alpha_1(a_1)) = \alpha_2(f_1(a_1)) \\ &\implies a_2 = f_1(a_1) \implies a_3 = f_2 \circ f_1(a_1) = 0. \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che α_3 è surgettiva. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \exists a_4 \in \mathbf{A}_4 \text{ t.c. } g_3(b_3) = \alpha_4(a_4) &\implies 0 = g_4 \circ g_3(b_3) = g_4 \circ \alpha_4(a_4) = \alpha_5 \circ f_4(a_4) \\ &\implies f_4(a_4) = 0 \implies \exists a_3 \in \mathbf{A}_3 \text{ t.c. } f_3(a_3) = a_4 \\ &\implies g_3(b_3) = \alpha_4 \circ f_3(a_3) = g_3(\alpha_3(a_3)) \implies g_3(b_3 - \alpha_3(a_3)) = 0 \\ &\implies \exists b_2 \in \mathbf{B}_2 \text{ t.c. } g_2(b_2) = b_3 - \alpha_3(a_3) \implies \exists a_2 \in \mathbf{A}_2 \text{ t.c. } \alpha_2(a_2) = b_2 \\ &\implies b_3 - \alpha_3(a_3) = g_2 \circ \alpha_2(a_2) = \alpha_3(f_2(a_2)) \implies b_3 = \alpha_3(a_3 + f_2(a_2)). \end{aligned}$$

□

Dalla dimostrazione segue che

Teorema XXII.2.12 (Lemmi dei quattro). *Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe esatte:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Se α_1 è surgettiva ed α_2, α_4 iniettive, allora α_3 è iniettiva.

Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & & & \downarrow \\ \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Se α_5 è iniettiva ed α_2, α_4 surgettive, allora α_3 è surgettiva.

XXII.3. Complessi di cocatene

Definizione XXII.3.1. Un *complesso di cocatene*, o *complesso differenziale*, è il dato di uno spazio vettoriale \mathbf{C} su un campo \mathbb{k} , di una sua \mathbb{Z} -gradazione $\mathbf{C} =$

$\bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathbf{C}^q$ e di un omomorfismo $d_C : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, omogeneo di grado 1, con $d_C^2 = 0$. Indichiamo il complesso mediante

$$(22.3.1) \quad \dots \rightarrow \mathbf{C}^{q-1} \xrightarrow{d_C} \mathbf{C}^q \xrightarrow{d_C} \mathbf{C}^{q+1} \rightarrow \dots$$

La *coomologia* di (22.3.1) è la somma diretta di spazi vettoriali:

$$(22.3.2) \quad H(\mathbf{C}, d_C) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^q(\mathbf{C}, d_C),$$

ove $H^q(\mathbf{C}, d_C) = (\ker d_C \cap \mathbf{C}^q) / d_C(\mathbf{C}^{q-1})$.

Lo spazio vettoriale $H^q(\mathbf{C}, d_C)$ si dice anche il q -esimo gruppo di coomologia di (22.3.1).

Dati due complessi differenziali (\mathbf{A}, d_A) e (\mathbf{B}, d_B) sullo stesso campo \mathbb{k} , un'applicazione lineare $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ si dice un *omomorfismo di complessi* se

$$(22.3.3) \quad f(\mathbf{A}^q) \subset \mathbf{B}^q, \quad \forall q \in \mathbb{Z},$$

$$(22.3.4) \quad f \circ d_A = d_B \circ f.$$

Essa induce un'applicazione naturale

$$(22.3.5) \quad f_* : H^q(\mathbf{A}, d_A) \rightarrow H^q(\mathbf{B}, d_B),$$

che fa corrispondere alla classe $[a_q]$ di $a_q \in \ker d_A \cap \mathbf{A}^q$ la classe $[f(a_q)]$ di $f(a_q) \in \ker d_B \cap \mathbf{B}^q$.

Una successione

$$(22.3.6) \quad \dots \rightarrow \mathbf{V}^{q-1} \xrightarrow{f_{q-1}} \mathbf{V}^q \xrightarrow{f_q} \mathbf{V}^{q+1} \rightarrow \dots$$

di \mathbb{k} -spazi vettoriali su di applicazioni \mathbb{k} -lineari si dice *esatta* se

$$(22.3.7) \quad f_{q-1}(\mathbf{V}^{q-1}) = \ker f_q, \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Una successione esatta della forma

$$(22.3.8) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{B} \xrightarrow{\beta} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

si dice una *successione esatta corta*.

Se (\mathbf{A}, d_A) , (\mathbf{B}, d_B) e (\mathbf{C}, d_C) sono complessi differenziali di spazi vettoriali su \mathbb{k} e la (22.3.8) è una successione esatta corta di omomorfismi di complessi, possiamo definire delle applicazioni \mathbb{k} -lineari

$$(22.3.9) \quad \Delta_q : H^q(\mathbf{C}, d_C) \rightarrow H^{q+1}(\mathbf{A}, d_A)$$

nel modo seguente.

Sia $c_q \in \mathbf{C}^q$ con $d_C c_q = 0$. Poiché β è surgettiva, esiste un elemento $b_q \in \mathbf{B}^q$ tale che $c_q = \beta(b_q)$. Abbiamo

$$\beta(d_B b_q) = d_C \beta(b_q) = d_C c_q = 0$$

e quindi, per l'esattezza di (22.3.8) esiste uno ed un solo $a_{q+1} \in \mathbf{A}^{q+1}$ tale che

$$\alpha(a_{q+1}) = d_B b_q.$$

Poiché

$$\alpha(d_A a_{q+1}) = d_B \alpha(a_{q+1}) = d_B^2 b_q = 0 \implies d_A a_{q+1} = 0$$

per l'esattezza di (22.3.8), l'elemento a_{q+1} definisce per passaggio al quoziente una classe $[a_{q+1}] \in H^{q+1}(\mathbf{A}, d_A)$.

Siano ora

$$\begin{aligned} c'_q &= c_q + d_C c_{q-1}, & \text{con } c_{q-1} &\in \mathbf{C}^{q-1}, \\ b'_q &\in \mathbf{B}^q & \text{con } \beta(b'_q) &= c'_q = c_q + d_C c_{q-1}, \\ a'_{q+1} &\in \mathbf{A}^{q+1} & \text{con } \alpha(a'_{q+1}) &= d_B b'_q. \end{aligned}$$

Utilizzando ancora l'esattezza di (22.3.8), otteniamo

$$\begin{aligned} &\exists b_{q-1} \in \mathbf{B}^{q-1} \text{ tale che} \\ \beta(b'_q - b_q) &= c'_q - c_q = d_C c_{q-1} = d_C \beta(b_{q-1}) = \beta(d_B b_{q-1}) \\ \implies \exists a_q \in \mathbf{A}^q &\text{ tale che } b'_q - b_q - d_B b_{q-1} = \alpha(a_q) \\ \implies \alpha(a'_{q+1} - a_{q+1}) &= d_B b'_{q+1} - d_B b_q \\ &= d_B (b'_q - b_q - d_B b_{q-1}) \\ &= d_B \alpha(a_q) = \alpha(d_A a_q) \\ \implies a'_{q+1} - a_{q+1} &= d_A a_q. \end{aligned}$$

Quindi la Δ_q risulta ben definita da

$$(22.3.10) \quad \Delta([c_q]) = [a_{q+1}].$$

Abbiamo il

Teorema XXII.3.2. *Se (22.3.8) è una successione esatta corta di complessi differenziali di spazi vettoriali su \mathbb{k} , allora abbiamo una successione esatta lunga*

$$(22.3.11) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & & & H^{q-1}(\mathbf{B}, d_B) & \xrightarrow{\beta_*} & H^{q-1}(\mathbf{C}, d_C) \\ & & & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & & & H^q(\mathbf{A}, d_A) & \xrightarrow{\alpha_*} & H^q(\mathbf{B}, d_B) & \xrightarrow{\beta_*} & H^q(\mathbf{C}, d_C) \\ & & & & & & \uparrow & & \uparrow \\ \Delta_{q-1} & \longrightarrow & & & & & H^{q+1}(\mathbf{A}, d_A) & \longrightarrow & \dots & & \end{array}$$

Nello studio dei gruppi di coomologia dei complessi, è spesso utile il seguente lemma algebrico:

Teorema XXII.3.3 (Lemma dei cinque). *Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe e colonne esatte:*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & & & 0 & & \end{array}$$

Abbiamo supposto cioè che α_1 sia surgettiva, α_2 e α_4 siano isomorfismi ed α_5 sia iniettiva. Allora α_3 è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che α_3 è iniettiva. Sia $a_3 \in \mathbf{A}_3$, con $\alpha_3(a_3) = 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha_4(f_3(a_3)) = g_3(\alpha_3(a_3)) = 0 &\implies f_3(a_3) = 0 \implies \exists a_2 \in \mathbf{A}_2 \text{ t.c. } a_3 = f_2(a_2) \\ &\implies \alpha_3(f_2(a_2)) = g_2(\alpha_2(a_2)) = 0 \implies \exists b_1 \in \mathbf{B}_1 \text{ t.c. } \alpha_2(a_2) = g_1(b_1) \\ &\implies \exists a_1 \in \mathbf{A}_1 \text{ t.c. } \alpha_1(a_1) = b_1, \implies \alpha_2(a_2) = g_1(\alpha_1(a_1)) = \alpha_2(f_1(a_1)) \\ &\implies a_2 = f_1(a_1) \implies a_3 = f_2 \circ f_1(a_1) = 0. \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che α_3 è surgettiva. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \exists a_4 \in \mathbf{A}_4 \text{ t.c. } g_3(b_3) = \alpha_4(a_4) &\implies 0 = g_4 \circ g_3(b_3) = g_4 \circ \alpha_4(a_4) = \alpha_5 \circ f_4(a_4) \\ &\implies f_4(a_4) = 0 \implies \exists a_3 \in \mathbf{A}_3 \text{ t.c. } f_3(a_3) = a_4 \\ &\implies g_3(b_3) = \alpha_4 \circ f_3(a_3) = g_3(\alpha_3(a_3)) \implies g_3(b_3 - \alpha_3(a_3)) = 0 \\ &\implies \exists b_2 \in \mathbf{B}_2 \text{ t.c. } g_2(b_2) = b_3 - \alpha_3(a_3) \implies \exists a_2 \in \mathbf{A}_2 \text{ t.c. } \alpha_2(a_2) = b_2 \\ &\implies b_3 - \alpha_3(a_3) = g_2 \circ \alpha_2(a_2) = \alpha_3(f_2(a_2)) \implies b_3 = \alpha_3(a_3 + f_2(a_2)). \end{aligned}$$

□

Dalla dimostrazione segue che

Teorema XXII.3.4 (Lemmi dei quattro). *Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe esatte:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Se α_1 è surgettiva ed α_2, α_4 iniettive, allora α_3 è iniettiva.

Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\
 \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\
 \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5 \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 0 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

Se α_5 è iniettiva ed α_2, α_4 surgettive, allora α_3 è surgettiva.

XXII.4. I funtori Hom e Tor

Richiamiamo in questo paragrafo alcuni risultati standard di algebra omologica.

Sia \mathbb{A} un anello commutativo e unitario e siano E_1, E_2 due \mathbb{A} -moduli unitari. Indichiamo con $\text{Hom}(E_1, E_2)$ l' \mathbb{A} -modulo delle applicazioni \mathbb{A} -lineari di E_1 in E_2 e con $E_1 \otimes E_2$ il loro prodotto tensoriale su \mathbb{A} , cioè il quoziente dell' \mathbb{A} -modulo libero generato da $E_1 \times E_2$ rispetto all'ideale bilatero generato dagli elementi

$$(a_1u_1 + a_2u_2, b_1v_1 + b_2v_2) - \sum_{i,j=1}^2 a_i b_j (u_i, v_j),$$

con $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{A}$, $u_1, u_2 \in E_1$, $v_1, v_2 \in E_2$.

Teorema XXII.4.1. *Sia E un \mathbb{A} -modulo unitario. Allora*

- (1) $\text{Hom}(\cdot, E)$ è un funtore controvariante esatto a destra sulla categoria degli \mathbb{A} -moduli unitari.
- (2) $\text{Hom}(E, \cdot)$ è un funtore covariante esatto a sinistra sulla categoria degli \mathbb{A} -moduli unitari.
- (3) $E \otimes \cdot$ è un funtore covariante esatto a sinistra sulla categoria degli \mathbb{A} -moduli unitari.

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato del teorema è equivalente all'affermazione che, se

$$(22.4.1) \quad 0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

è una successione esatta di \mathbb{A} -moduli unitari, allora sono esatte le

$$(22.4.2) \quad 0 \longrightarrow \text{Hom}(E_3, E) \xrightarrow{\beta^*} \text{Hom}(E_2, E) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Hom}(E_1, E),$$

$$(22.4.3) \quad 0 \longrightarrow \text{Hom}(E, E_1) \longrightarrow \text{Hom}(E, E_2) \longrightarrow \text{Hom}(E, E_3),$$

$$(22.4.4) \quad 0 \longrightarrow E_1 \otimes E \longrightarrow E_2 \otimes E \longrightarrow E_3 \otimes E.$$

Dimostriamo l'esattezza della (22.4.2).

Fissata una $\phi_3 \in \text{Hom}(E_3, E)$ e supponiamo che $\beta^*(\phi_3) = \phi_3 \circ \beta = 0$. Poiché β è surgettiva, questa relazione implica che $\phi_3 = 0$.

Sia ora $\phi_2 \in \text{Hom}(E_2, E)$ e supponiamo che $\alpha^*\phi_2 = \phi_2 \circ \alpha = 0$. □

XXII.5. Relazione con l'omologia singolare

Per collegare la coomologia di de Rham e l'omologia singolare, è conveniente restringere la classe dei semplici singolari ai semplici singolari *lisci*. Indichiamo con

$$(22.5.1) \quad \Delta_k = \left\{ t \in \mathbb{R}^{k+1} \mid t^i \in [0, 1], \sum_{i=0}^k t^i = 1 \right\}$$

il simplesso k -dimensionale standard.

Definizione XXII.5.1. Sia M una varietà differenziabile. Δ_k in M . Gli elementi dello spazio $\mathcal{C}^\infty(\Delta_k, M)$ delle applicazioni di classe \mathcal{C}^∞ di Δ_k in M si dicono *semplici singolari lisci k -dimensionali* in M . Indichiamo poi con $\Delta_k(M)$ l'insieme delle k -catene singolari lisce di M , cioè di quelle della forma $\sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma$ (somme finite) con $n_{\sigma} \in \mathbb{Z}$ e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\Delta_k, M)$.

Osservazione XXII.5.2. Si possono utilizzare solo semplici lisci per calcolare l'omologia singolare di una varietà differenziabile. Utilizzando l'approssimazione, si può verificare che l'omologia calcolata con i semplici singolari lisci è la stessa che si ottiene utilizzando tutti i semplici singolari.

Definizione XXII.5.3. Definiamo l'orientazione del simplesso standard Δ_k per ricorrenza, fissando l'orientazione positiva per Δ_0 e definendo su Δ_k , per $k > 0$, l'orientazione per cui l'applicazione $\Delta_{k-1} \ni (t^1, \dots, t^k) \rightarrow (t^0, t^1, \dots, t^k) \in \partial\Delta_k$ preserva l'orientazione.

Se $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\Delta_k, M)$, possiamo definire

$$(22.5.2) \quad \int_{\sigma} \omega = \int_{\Delta_k} \sigma^* \omega.$$

Se $c = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma \in \Delta_k(M)$, porremo

$$(22.5.3) \quad \int_c \omega = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \int_{\sigma} \omega.$$

Otteniamo così un'applicazione bilineare

$$(22.5.4) \quad \Delta_k(M) \times \Omega^k(M) \ni (c, \omega) \longrightarrow \langle c, \omega \rangle = \int_c \omega \in \mathbb{R}.$$

Lemma XXII.5.4 (Stokes). Per ogni intero $k \geq 1$ abbiamo¹

$$(22.5.5) \quad \langle c, d\omega \rangle = \langle \partial c, \omega \rangle, \quad \forall c \in \Delta_k(M), \quad \forall \omega \in \Omega^{k-1}(M).$$

¹Ricordiamo che, se $k \geq 1$,

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \circ F_i, \quad \forall \sigma \in \Sigma_k(M),$$

ove $F_i : \Delta_{k-1} \ni (t^0, \dots, t^{k-1}) \rightarrow (t^0, \dots, t^{i-1}, 0, t^i, \dots, t^{k-1}) \in \partial\Delta_k$.

Abbiamo quindi un diagramma commutativo

$$(22.5.6) \quad \begin{array}{ccc} \Omega^{k-1}(M) & \longrightarrow & \text{Hom}(\Delta_{k-1}(M), \mathbb{R}) \\ d \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(\mathfrak{d}, 1) \\ \Omega^k(M) & \longrightarrow & \text{Hom}(\Delta_k(M), \mathbb{R}). \end{array}$$

Le applicazioni $\text{Hom}(\mathfrak{d}, 1)$ sono definite per dualità:

$$(22.5.7) \quad \text{Hom}(\mathfrak{d}, 1)(\phi) = \phi \circ \mathfrak{d}, \quad \forall \phi \in \text{Hom}(\Delta_{k-1}(M), \mathbb{R}).$$

Definizione XXII.5.5. I gruppi $\text{Hom}(\Delta_k(M), \mathbb{R})$ si dicono i *gruppi delle k -cocatene singolari lisce* di M . La successione

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \text{Hom}(\Delta_0(M), \mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{Hom}(\mathfrak{d}, 1)} & \text{Hom}(\Delta_1(M), \mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{Hom}(\mathfrak{d}, 1)} & \dots & & \\ & & & & & & \\ & & \dots & \longrightarrow & \text{Hom}(\Delta_{k-1}(M), \mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{Hom}(\mathfrak{d}, 1)} & \text{Hom}(\Delta_k(M), \mathbb{R}) \\ & & & & \xrightarrow{\text{Hom}(\mathfrak{d}, 1)} & \text{Hom}(\Delta_{k+1}(M), \mathbb{R}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

è un complesso, che si dice il *complesso delle cocatene singolari* di M .

Appendice: Fibrati di Steenrod

XXIII.1. Azione di gruppo

Sia \mathbf{G} un gruppo ed F un insieme.

Definizione XXIII.1.1. Un'azione a sinistra di \mathbf{G} su F è un'applicazione

$$(23.1.1) \quad \mathbf{G} \times F \ni (g, x) \longrightarrow gx \in F$$

tale che

$$(i) \quad ex = x, \quad \forall x \in F,$$

$$(ii) \quad g_1(g_2x) = (g_1g_2)x, \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbf{G}, \forall x \in F.$$

In modo analogo si definisce un'azione a destra di \mathbf{G} su F come un'applicazione

$$(23.1.2) \quad F \times \mathbf{G} \ni (x, g) \longrightarrow xg \in F$$

tale che

$$(i') \quad xe = x, \quad \forall x \in F,$$

$$(ii') \quad (xg_1)g_2 = x(g_1g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbf{G}, \forall x \in F.$$

Se (23.1.1) è un'azione a sinistra, la

$$(23.1.3) \quad F \times \mathbf{G} \ni (x, g) \longrightarrow g^{-1}x \in F$$

è un'azione a destra e, se (23.1.2) è un'azione a destra, la

$$(23.1.4) \quad \mathbf{G} \times F \ni (g, x) \longrightarrow xg^{-1} \in F$$

è un'azione a sinistra. Non sarà quindi restrittivo limitarsi, nel seguito della discussione, a considerare azioni a sinistra.

Se (23.1.1) è un'azione a sinistra, possiamo associare all'elemento g di \mathbf{G} l'applicazione

$$(23.1.5) \quad \rho(g) : F \ni x \longrightarrow gx \in F.$$

Per (i), $\rho(e)$ è l'identità su F . Per (ii), abbiamo dunque

$$\rho(g_1g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2), \quad \rho(g^{-1}) = [\rho(g)]^{-1}, \quad \forall g_1, g_2, g \in \mathbf{G}.$$

Questo si dice che

$$(23.1.6) \quad \rho : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{S}(F)$$

è un omomorfismo di \mathbf{G} nel gruppo $\mathbf{S}(F)$ delle permutazioni degli elementi di F . Viceversa, un omomorfismo (23.1.6) definisce un'azione a sinistra di \mathbf{G} su F mediante

$$(23.1.7) \quad \mathbf{G} \times F \ni (g, x) \longrightarrow \rho(g)(x) \in F.$$

Definizione XXIII.1.2. L'omomorfismo ρ per cui valgano le (23.1.5), (23.1.7) si dice *associato* all'azione (23.1.1).

Osservazione XXIII.1.3. Se (23.1.2) è un'azione a destra, allora l'applicazione $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{S}(F)$ definita da $\rho(g)(x) = xg$ è un anti-omomorfismo di gruppi; soddisfa cioè la $\rho(g_1g_2) = \rho(g_2)\rho(g_1)$ per ogni $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$.

Definizione XXIII.1.4. Diciamo che l'azione (23.1.1) è *fedele* (o *effettiva*) se l'omomorfismo ρ associato è iniettivo. In generale, $\ker \rho$ si dice il *nucleo d'infedeltà* dell'azione.

Definizione XXIII.1.5. Se $x \in F$, l'insieme $\mathbf{G}x = \{gx \mid g \in \mathbf{G}\}$ si dice l'*orbita* di x (per l'azione di \mathbf{G}).

Le orbite degli elementi di F definiscono una partizione di F e quindi la relazione di appartenere alla stessa orbita è una relazione di equivalenza. Il quoziente corrispondente si indica con F/\mathbf{G} e si dice *spazio delle orbite*.

Se $\mathbf{G}x = F$ per ogni $x \in F$, se cioè F/\mathbf{G} contiene un solo punto, diciamo che l'azione è *transitiva*.

Un'azione transitiva e fedele si dice *semplicemente transitiva*.

Osservazione XXIII.1.6. Il nucleo d'infedeltà $\mathbf{K} = \ker \rho$ dell'azione (23.1.1) è un sottogruppo normale di \mathbf{G} . Poiché $g_1x = g_2x$ se $g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{K}$, fissato $x \in F$ l'elemento gx dipende solo dalla classe di equivalenza di g in \mathbf{G}/\mathbf{K} . Possiamo quindi far corrispondere all'azione di \mathbf{G} su F un'azione fedele di \mathbf{G}/\mathbf{K} su F e, viceversa, ad ogni azione transitiva di \mathbf{G}/\mathbf{K} su F determina un'azione di \mathbf{G} su F con nucleo d'infedeltà \mathbf{K} , dimodoché $[g]x = gx$ per ogni $g \in \mathbf{G}$ ed $x \in F$, ove abbiamo indicato con $[g]$ la classe laterale di g in \mathbf{G}/\mathbf{K} .

Osservazione XXIII.1.7. Sia (23.1.1) un'azione di gruppo. Se \mathbf{H} è un altro gruppo ed $\phi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}$ un omomorfismo di gruppi, allora anche la

$$(23.1.8) \quad \mathbf{H} \times F \ni (h, x) \longrightarrow \phi(h)x \in F$$

è un'azione di gruppo. Se ϕ è iniettiva e (23.1.1) è fedele, allora anche (23.1.8) è fedele. Se ϕ è surgettiva e (23.1.1) è transitiva, allora anche (23.1.8) è transitiva.

Se \mathbf{H} è un sottogruppo di \mathbf{G} e ϕ l'inclusione, allora diciamo che la (23.1.8) è una *restrizione* ad \mathbf{H} di (23.1.1) e che (23.1.1) è un'*estensione* a \mathbf{G} di (23.1.8).

Definizione XXIII.1.8. Un sottoinsieme E di F è *invariante* per l'azione di \mathbf{G} se $gx \in E$ per ogni $x \in E$. In questo caso la

$$\mathbf{G} \times E \ni (g, x) \longrightarrow gx \in E$$

è ancora un'azione di gruppo.

Osservazione XXIII.1.9. Se \mathbf{G}_i sono gruppi, F_i insiemi, e $\mathbf{G}_i \times F_i \ni (g_i, x_i) \rightarrow g_i x_i$ azioni (a sinistra) di gruppo, per i che varia in un insieme I di indici, allora anche

$$\left(\prod_{i \in I} \mathbf{G}_i\right) \times \left(\prod_{i \in I} F_i\right) \ni ((g_i), (x_i)) \longrightarrow (g_i x_i) \in \prod_{i \in I} F_i$$

è un'azione di gruppo (a sinistra). Se tutte le azioni sono fedeli anche il loro prodotto è fedele e se tutte sono transitive anche il loro prodotto è transitivo.

Definizione XXIII.1.10. Chiamiamo un \mathbf{G} -insieme un insieme F su cui sia assegnata un'azione (23.1.1) del gruppo \mathbf{G} .

Se F_1, F_2 sono due \mathbf{G} -insiemi, una \mathbf{G} -applicazione di F_1 in F_2 è un'applicazione $f : F_1 \rightarrow F_2$ tale che

$$f(gx) = gf(x), \quad \forall g \in \mathbf{G}, \forall x \in F_1.$$

Più in generale, se F_i è un \mathbf{G}_i -spazio, per $i = 1, 2$ e $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ un omomorfismo di gruppi, una ϕ -applicazione di F_1 in F_2 è una $f : F_1 \rightarrow F_2$ con $f(gx) = \phi(g)f(x)$ per ogni $g \in \mathbf{G}_1$ ed $x \in F_1$.

Definizione XXIII.1.11. Due azioni dello stesso gruppo \mathbf{G} su due insiemi F_1, F_2 si dicono *equivalenti* se esiste una \mathbf{G} -applicazione bigettiva $f : F_1 \rightarrow F_2$.

Definizione XXIII.1.12. Se F è uno spazio topologico e le applicazioni $\rho(g)$ corrispondenti all'azione (23.1.1) di \mathbf{G} su F sono degli omeomorfismi, diciamo che \mathbf{G} opera su F per omeomorfismi.

Se F è una varietà differenziabile e le applicazioni $\rho(g)$ corrispondenti all'azione (23.1.1) di \mathbf{G} su F sono degli diffeomorfismi, diciamo che \mathbf{G} opera su F per diffeomorfismi.

Se F ha una struttura algebrica (un gruppo, un anello, un'algebra ...) e le applicazioni $\rho(g)$ corrispondenti all'azione (23.1.1) di \mathbf{G} su F sono degli automorfismi, diciamo che \mathbf{G} opera su F mediante automorfismi.

Esempio XXIII.1.13. Se $F = \mathbf{G}$ è un gruppo, le traslazioni a destra $(g, h) \rightarrow L_g h = gh$ e l'aggiunta $(g, h) \rightarrow \text{ad}(g)h = ghg^{-1}$ sono azioni di gruppo a sinistra, che si dicono, rispettivamente, *azione canonica a sinistra* ed *azione interna a sinistra*. La traslazione a destra $(h, g) \rightarrow R_g h = hg$ è un'azione a destra, che si dice *azione canonica a destra*.

Esempio XXIII.1.14. Sia \mathbf{H} un sottogruppo del gruppo \mathbf{G} . La restrizione ad \mathbf{H} dell'azione canonica a destra definisce un'azione di \mathbf{H} su \mathbf{G} le cui orbite formano lo spazio quoziente $F = \mathbf{G}/\mathbf{H}$. Poiché l'azione canonica a sinistra di \mathbf{G} opera sulle classi laterali sinistre di \mathbf{H} , risulta definita un'azione a sinistra canonica di \mathbf{G} su F .

Definizione XXIII.1.15. Fissiamo un'azione di gruppo (23.1.1). Se $x_0 \in F$, l'insieme

$$(23.1.9) \quad \mathbf{G}_{x_0} = \{g \in \mathbf{G} \mid gx_0 = x_0\}$$

è un sottogruppo di \mathbf{G} , che si dice lo *stabilizzatore* (o *sottogruppo di stabilità*) del punto x_0 .

Lemma XXIII.1.16. *Supponiamo che l'azione (23.1.1) sia transitiva. Allora stabilizzatori corrispondenti a punti distinti di F sono tra loro coniugati.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $x_0, x_1 \in F$. Poiché abbiamo supposto l'azione transitiva, possiamo trovare un elemento $a \in \mathbf{G}$ tale che $ax_0 = x_1$. Abbiamo allora

$$g \in \mathbf{G}_{x_1} \iff gax_0 = ax_0 \iff a^{-1}gax_0 = x_0 \iff a^{-1}ga \in \mathbf{G}_{x_0}.$$

Quindi $\mathbf{G}_{x_0} = a^{-1}\mathbf{G}_{x_1}a$ e i due sottogruppi \mathbf{G}_{x_0} e \mathbf{G}_{x_1} sono coniugati. \square

Proposizione XXIII.1.17. *Ogni azione transitiva di un gruppo è equivalente alla sua azione canonica su un suo quoziente.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che il gruppo \mathbf{G} agisca transitivamente su un insieme F . Fissiamo un qualsiasi punto x_0 di F e sia \mathbf{G}_{x_0} lo stabilizzatore del punto x_0 .

L'applicazione $\mathbf{G} \ni g \rightarrow gx_0 \in F$ definisce per passaggio al quoziente un'applicazione $f : \mathbf{G}/\mathbf{G}_{x_0} \rightarrow F$. Infatti, se $g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{G}_{x_0}$, abbiamo

$$g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{G}_{x_0} \iff g_1^{-1}g_2x_0 = x_0 \iff g_2x_0 = g_1x_0.$$

Queste equivalenze dimostrano che la f è ben definita ed iniettiva. Essa è anche bigettiva perché abbiamo supposto che l'azione fosse transitiva. Poiché $f(g[h]) = f([gh]) = ghx_0 = gf([h])$ (al solito indichiamo con $[h]$ la classe di equivalenza di $h \in \mathbf{G}$ in \mathbf{G}/\mathbf{H}), la f è una \mathbf{G} -applicazione e quindi, essendo invertibile, una \mathbf{G} -equivalenza. \square

XXIII.2. Azioni continue

Siano \mathbf{G} un gruppo topologico ed F uno spazio topologico.

Definizione XXIII.2.1. Un'azione (23.1.1) di \mathbf{G} su F si dice *continua* se l'applicazione $\mathbf{G} \times F \ni (g, x) \rightarrow gx \in F$ è continua.

In questo caso \mathbf{G} agisce su F mediante omeomorfismi.

Definizione XXIII.2.2. Chiamiamo \mathbf{G} -spazio uno spazio topologico F su cui sia definita un'azione continua di un gruppo topologico \mathbf{G} .

Lemma XXIII.2.3. *Se F è un \mathbf{G} -spazio, la proiezione $\pi : F \rightarrow F/\mathbf{G}$ sullo spazio delle orbite è aperta.*

Se inoltre F è uno spazio di Hausdorff compatto e \mathbf{G} un gruppo compatto, allora la proiezione $\pi : F \rightarrow F/\mathbf{G}$ è anche chiusa.

DIMOSTRAZIONE. Se A è un aperto di F , allora

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{x \in A} \mathbf{G}x = \bigcup_{g \in \mathbf{G}} gA$$

è aperto, perché ciascuno degli insiemi gA , immagine di A mediante l'omeomorfismo di F definito da g , è aperto. Questo equivale ad affermare che $\pi(A)$ è aperto

Supponiamo ora che F sia di Hausdorff compatto e \mathbf{G} sia compatto. Allora l'applicazione (23.1.1) è chiusa. Infatti un chiuso di $\mathbf{G} \times F$ è compatto, e quindi la sua immagine in F mediante l'applicazione continua (23.1.1) è compatta e quindi

chiusa, perché i compatti di F sono chiusi. Se K è un sottoinsieme chiuso di F , allora $\pi^{-1}(\pi(K))$ è l'immagine del chiuso $\mathbf{G} \times K$ mediante la (23.1.1) e quindi è un chiuso. Questo dimostra che $\pi(K)$ è chiuso per ogni chiuso K di F . \square

Definizione XXIII.2.4. Siano \mathbf{G}_1 e \mathbf{G}_2 due gruppi topologici e $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ un omomorfismo di gruppi topologici. Dati due \mathbf{G}_i -spazi F_i ($i = 1, 2$) diciamo che una $f : F_1 \rightarrow F_2$ è una ϕ -applicazione di un \mathbf{G}_1 -spazio in un \mathbf{G}_2 -spazio se $f(gx) = \phi(g)f(x)$ per ogni $x \in F_1$ e $g \in \mathbf{G}_1$.

Se $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}$, ϕ l'identità, ed $f : F_1 \rightarrow F_2$ un omeomorfismo ed una \mathbf{G} -applicazione, anche $f^{-1} : F_2 \rightarrow F_1$ è una \mathbf{G} -applicazione. In questo caso diciamo che f è un'equivalenza di \mathbf{G} -spazi.

Osservazione XXIII.2.5. Se \mathbf{H} è un sottogruppo del gruppo topologico \mathbf{G} , l'azione di \mathbf{G} su \mathbf{G}/\mathbf{H} è transitiva e continua.

Osservazione XXIII.2.6. Sia F un \mathbf{G} -spazio su cui \mathbf{G} operi transitivamente. Fissiamo un punto $x_0 \in F$ e sia \mathbf{H} lo stabilizzatore di x_0 . Risulta allora definita una \mathbf{G} -applicazione bigettiva e continua $f : \mathbf{G}/\mathbf{H} \rightarrow F$. Non possiamo dire in generale che questa sia un'equivalenza di \mathbf{G} -spazi.

Ciò vale senz'altro nel caso in cui \mathbf{G} sia compatto ed F di Hausdorff, perché un'applicazione continua e bigettiva tra spazi di Hausdorff compatti è anche un omeomorfismo.

XXIII.3. Alcuni fibrati principali

In questo paragrafo descriviamo alcuni fibrati principali di gruppi di Lie compatti.