

Lezioni sui Fibrati
(a.a. 2018/19)

Mauro Nacinovich

Indice

Parte 1. Nozioni topologiche	11
Capitolo I. Fibrati topologici	13
1.1. Prime definizioni	13
1.2. Prodotti	15
1.3. Restrizioni e fibrati indotti	16
1.4. Fibrati localmente banali	16
1.5. Un lemma di trivializzazione	18
1.6. Prolungamento di sezioni	18
1.7. Esempi	19
1.8. Fibrati di Serre	20
1.9. Condizione di Serre forte	24
1.10. Associato di Serre di un fibrato	26
1.11. Successione esatta di omotopia di un fibrato	27
1.12. Esempi	30
Capitolo II. Fibrati topologici con strutture di gruppo	37
2.1. Azioni di gruppo	37
2.2. Gruppi topologici	40
2.3. Azioni continue	50
2.4. Azioni di gruppo su un fibrato	52
2.5. Fibrati di Steenrod e fibrati principali	52
2.6. Un Lemma di trivializzazione	57
2.7. Invarianza omotopica	57
2.8. Fibrati universali	59
2.9. Fibrati di Milnor	62
Capitolo III. Alcuni spazi omogenei	69
3.1. Varietà di Stiefel reali	69
3.2. Varietà di Grassmann reali	71
3.3. Varietà di Stiefel e di Grassmann complesse	74
3.4. Varietà di Stiefel e di Grassmann quaternioniche	76
3.5. Varietà di sottospazi isotropi	79
3.6. Classificazione omotopica dei fibrati principali	80
3.7. Sottospazi Lagrangiani reali	82
3.8. Sottospazi Lagrangiani complessi	83
3.9. Sottospazi proiettivi di una quadrica proiettiva complessa	84

Capitolo IV. Fibrati vettoriali	87
4.1. Fibrati vettoriali	87
4.2. Gruppo strutturale	88
4.3. Fibrati vettoriali associati a rappresentazioni lineari	89
4.4. Equivalenza di fibrati vettoriali	90
4.5. Fibrati vettoriali sulle sfere	92
4.6. La proprietà (S)	93
4.7. Classificazione omotopica I: base CW	95
4.8. Classificazione omotopica II: base compatta	96
Capitolo V. Elementi di K -teoria	101
5.1. Addendi banali	101
5.2. Gruppo di K -teoria ed equivalenza stabile	102
5.3. Caratterizzazione omotopica dell'equivalenza stabile	104
5.4. Gruppi si K -teoria relativi	106
5.5. I gruppi $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}^{-1}(B)$	109
Parte 2. Connessioni principali	115
Capitolo VI. Fibrati principali differenziabili	117
6.1. Prime definizioni	117
6.2. La distribuzione verticale	118
6.3. Morfismi di fibrati principali	120
6.4. Classificazione dei fibrati principali	121
6.5. Il fibrato dei sistemi di riferimento	123
6.6. Fibrati vettoriali associati a rappresentazioni lineari	124
6.7. Riduzione del gruppo strutturale e \mathbf{G} -strutture	125
6.8. \mathbf{G} -strutture su una varietà differenziabile	126
6.9. Forme tensoriali e pseudotensoriali	127
Capitolo VII. Connessioni principali	131
7.1. Il concetto di connessione principale	131
7.2. Pullback di una connessione principale	133
7.3. Forme di Christoffel ed equazioni di gauge	133
7.4. Sollevamento orizzontale di campi di vettori	135
7.5. Sollevamento orizzontale di cammini e trasporto parallelo	136
7.6. Il gruppo di olonomia	138
Capitolo VIII. Differenziazione covariante e curvatura	141
8.1. Differenziazione covariante	141
8.2. Espressione locale del differenziale covariante	144
8.3. Forma di curvatura ed equazioni di struttura	145
8.4. Connessioni piatte	146
8.5. La famiglia delle connessioni principali	147
8.6. Fibrato degli endomorfismi e rappresentazione aggiunta	147
8.7. Tensore di curvatura	148

8.8.	Trasporto parallelo di vettori	150
8.9.	Differenziazione covariante secondo Koszul	151
8.10.	Il Teorema di Ambrose-Singer	152
8.11.	L'olonomia infinitesima	153
Capitolo IX.	Connessioni principali invarianti	155
9.1.	Automorfismi di un fibrato principale	155
9.2.	Automorfismi di una connessione principale	156
9.3.	Connessioni invarianti su uno spazio omogeneo	158
9.4.	Connessioni invarianti su uno spazio riduttivo	159
9.5.	Olonomia di una connessione invariante	160
Capitolo X.	Varietà affini e riemanniane	161
10.1.	Connessioni lineari e varietà affini	161
10.2.	Forme di torsione e di curvatura	163
10.3.	Derivazione covariante, tensori di torsione e di curvatura	164
10.4.	Le identità algebriche di Bianchi	167
10.5.	Interpretazione geometrica della torsione e della curvatura	168
10.6.	Derivata covariante lungo una curva e parallelismo	169
10.7.	Geodetiche	171
10.8.	Esistenza di connessioni simmetriche	173
10.9.	Metriche (pseudo-)riemanniane e connessione di Levi-Civita	174
10.10.	Esempi	176
10.11.	Estensione della metrica ai fibrati tensoriali	179
10.12.	Tensore di curvatura di una varietà pseudo-riemanniana	180
10.13.	Connessioni principali su varietà dotate di una connessione lineare	181
Capitolo XI.	Applicazione esponenziale e campi di Jacobi	185
11.1.	L'applicazione esponenziale	185
11.2.	Intorni normali ed intorni convessi	186
11.3.	Definizione dei campi di Jacobi	188
11.4.	Campi di Jacobi su una varietà Riemanniana	191
11.5.	Punti coniugati	194
Capitolo XII.	Tensore di curvatura	197
12.1.	Proprietà del tensore di curvatura	197
12.2.	Curvatura sezionale	198
12.3.	Il tensore di Ricci	199
12.4.	Un Teorema di Myers	201
12.5.	Curvatura scalare	202
12.6.	Metriche di Einstein	203
Capitolo XIII.	Connessioni lineari invarianti	205
13.1.	Rappresentazione lineare d'isotropia	205
13.2.	Connessioni canoniche sugli spazi riduttivi	208
13.3.	Connessioni di Cartan-Shauten	212
13.4.	Caratterizzazione della connessione canonica	215

13.5. Spazi affini simmetrici	216
Capitolo XIV. Proprietà metriche delle varietà Riemanniane	225
14.1. Geodetiche e distanza Riemanniana	225
14.2. Il funzionale dell'energia	227
14.3. Varietà di Riemann compatte	227
14.4. Il teorema di Hopf-Rinow	228
14.5. Varietà Riemanniane con curvatura sezionale negativa	231
14.6. Un teorema di Bochner	238
Capitolo XV. Gruppi di trasformazioni	241
15.1. Isometrie di uno spazio metrico	241
15.2. Un teorema di Bochner-Montgomery	244
15.3. Alcuni risultati sui gruppi di trasformazioni	248
15.4. Parallelismo assoluto	251
Capitolo XVI. Trasformazioni e decomposizione di de Rham	255
16.1. Applicazioni affini	255
16.2. Sottovarietà affini	256
16.3. Varietà totalmente geodetiche	257
16.4. Trasformazioni affini	258
16.5. Affinità infinitesime	259
16.6. Isometrie di una varietà Riemanniana	262
16.7. Campi di Killing	264
16.8. Riducibilità	265
16.9. Decomponibilità e teorema di de Rham	267
Capitolo XVII. Immersioni, isometrie, campi di Killing	271
17.1. Immersioni pseudo-Riemanniane	271
17.2. Proprietà algebriche del tensore di curvatura	277
17.3. La curvatura sezionale	280
Capitolo XVIII. Operatori differenziali sulle varietà Riemanniane	283
18.1. Elemento di volume ed operatore di Hodge	283
18.2. Codifferenziale, operatore di Laplace-Beltrami, divergenza	284
18.3. Co-differenziazione covariante di forme differenziali	288
18.4. Divergenza di tensori simmetrici	290
18.5. L'operatore di Laplace-Beltrami	293
18.6. Il Laplaciano naturale	296
18.7. Il Laplaciano di Lichnerowicz	297
18.8. Laplaciano sulle forme differenziali alternate	299
Capitolo XIX. Metriche invarianti	303
19.1. Metriche pseudo-Riemanniane su spazi omogenei	303
19.2. La connessione di Levi-Civita sugli spazi omogenei	304
Capitolo XX. Spazi simmetrici	307

20.1.	Spazi affini localmente simmetrici	307
20.2.	Alcuni risultati sui gruppi di trasformazioni	309
20.3.	Automorfismi affini e isometrie	314
20.4.	Spazi Riemanniani globalmente simmetrici	320
20.5.	Coppie simmetriche e simmetriche Riemanniane	323
Capitolo XXI.	Mappa momento	327
21.1.	Varietà simplettiche	327
21.2.	Campi simplettici e hamiltoniani	328
21.3.	Definizione della mappa momento	330
21.4.	Gruppi di coomologia delle algebre di Lie	332
Parte 3.	Algebre di Clifford	335
Capitolo XXII.	Campi di vettori sulle sfere	337
22.1.	Vettori tangenti unitarii sulle sfere	338
22.2.	Moltiplicazione ortogonale	338
Capitolo XXIII.	Algebre	341
23.1.	Prime definizioni	341
23.2.	Algebre artiniane e noetheriane	341
23.3.	Prodotto tensoriale	343
23.4.	Centro	344
23.5.	Gruppo delle unità	344
23.6.	\mathbb{A} -moduli	345
23.7.	Algebre semisemplici	352
23.8.	Algebre semplici	352
23.9.	Algebre semplici centrali di dimensione finita	356
23.10.	Algebre graduate e superalgebre	360
Capitolo XXIV.	Algebre di Clifford	361
24.1.	Algebre di Clifford associate al prodotto scalare reale	361
24.2.	Algebre di Clifford di spazi vettoriali quadratici	368
24.3.	Proprietà generali delle algebre di Clifford	372
24.4.	Algebre di Clifford di spazi split	376
24.5.	Spazi quadratici reali di segnatura (p, q)	381
24.6.	Sottoalgebre $\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^{p,q})$	385
Capitolo XXV.	Gruppi ortogonali e spinoriali	387
25.1.	Gruppi ortogonali e loro algebre di Lie	387
25.2.	Rappresentazioni spinoriali dell'algebra ortogonale	390
25.3.	Antinvoluzioni canoniche	393
25.4.	Gruppi spinoriali e loro rappresentazione vettoriale	394
25.5.	Rappresentazione spinoriale	398
25.6.	Forme bilineari invarianti	399
25.7.	Prodotto vettore di spinori	404
25.8.	Gruppi spinoriali e gruppi classici	405

Capitolo XXVI. Spinori reali e complessi	409
26.1. Spinori degli spazi split	410
Dimensione dispari	410
Dimensione pari	414
Tabella riassuntiva delle rappresentazioni spinoriali split	417
26.2. Spinori degli spazi quadratici reali	420
26.3. Forma bilineare canonica sugli spinori reali	421
26.4. Prodotto vettore di spinori reali	422
26.5. Appendice: Forme bilineari su \mathbb{C} e su \mathbb{H}	423
26.6. Rappresentazione mediante diagrammi di Satake	429
Capitolo XXVII. Ottonioni	433
27.1. Richiami sulle algebre	433
27.2. La costruzione di Cayley-Dickson	438
27.3. Un teorema di Hurwitz	441
27.4. Gli ottonioni	444
27.5. \mathbf{G}_2	445
27.6. Algebre di Jordan, geometria proiettiva ed \mathbf{F}_4	449
Parte 4. Appendice	
Gruppi ed algebre di Lie	453
Capitolo XXVIII. Algebre di Lie	455
28.1. Nozioni fondamentali	455
28.2. Algebre di Lie lineari, derivazioni, rappresentazione aggiunta	456
28.3. Rappresentazioni lineari	459
28.4. Forme invarianti	461
28.5. Automorfismi	462
28.6. Algebre di Lie risolubili	463
28.7. Algebre di Lie semisemplici	464
28.8. Algebre di Lie nilpotenti	464
28.9. Il teorema di Engel	465
28.10. Il Teorema di Lie	467
28.11. Il più grande ideale di nilpotenza di una rappresentazione	470
28.12. Il radicale nilpotente e il nilradicale	471
28.13. Automorfismi speciali	474
Capitolo XXIX. Gruppi di Lie	475
29.1. Gruppi di Lie e loro algebre di Lie	475
29.2. Alcune osservazioni sull'applicazione esponenziale	479
29.3. Sottogruppi di Lie	480
29.4. La forma di Maurer-Cartan	481
29.5. Applicazioni a valori in un gruppo di Lie	484
29.6. Omomorfismi di gruppi di Lie	486
29.7. Rappresentazioni lineari	486
29.8. Spazi omogenei	487

29.9. Gruppi di Lie di trasformazioni	488
Capitolo XXX. Gruppi di Lie di matrici	493
30.1. La trasformata di Cayley	493
30.2. Alcuni gruppi lineari	495
30.3. Decomposizione di Cartan	496
Capitolo XXXI. Alcuni gruppi classici di piccola dimensione	501
31.1. I gruppi $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(1, \mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$, $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$, $\mathbf{SO}(1, 2)$	501
31.2. La quadrica di \mathbb{CP}^5 ed alcuni omomorfismi di gruppi ($\mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$, $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$, $\mathbf{SO}^+(3, 3)$, $\mathbf{SU}(4)$, $\mathbf{SO}(6)$)	503
31.3. I gruppi $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(5)$	506
31.4. Rappresentazione spinoriale di alcuni gruppi di Lorentz	508
Capitolo XXXII. Gruppi ed algebre di matrici quaternioniche	515
32.1. I quaternioni e la struttura differenziale di $\mathbf{SU}(2)$, $\mathbf{SO}(3)$, $\mathbf{SO}(4)$	515
32.2. Matrici di quaternioni e matrici complesse di tipo quaternionico	517
32.3. Gruppo lineare quaternionico	521
32.4. Gruppi unitari quaternionici	522
32.5. Gruppi ortogonali quaternionici	525
Capitolo XXXIII. Gruppi classici compatti	527
33.1. Il gruppo unitario $\mathbf{U}(n)$	527
33.2. Il gruppo speciale unitario $\mathbf{SU}(n)$	528
33.3. I gruppi ortogonali $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$	529
33.4. Il gruppo unitario simplettico $\mathbf{Sp}(n)$	531
33.5. Sfere e gruppi compatti	533
33.6. Gruppi di omotopia dei gruppi classici	534
Capitolo XXXIV. Gruppi classici non compatti	539
34.1. La lista dei gruppi classici non compatti	539
34.2. I gruppi $\mathbf{U}(p, q)$ e $\mathbf{SU}(p, q)$	541
34.3. I gruppi $\mathbf{SO}(p, q)$	542
34.4. I gruppi $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ e $\mathbf{SU}^*(2n)$	542
34.5. I gruppi $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ ed $\mathbf{SO}^*(2n)$	543
34.6. I gruppi $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$	545
34.7. Connessione dei gruppi simplettici	546
Capitolo XXXV. Coomologia delle algebre di Lie e teorema di Levi-Malcev	549
35.1. Coomologia delle algebre di Lie	549
35.2. Una successione esatta lunga	555
35.3. Un criterio di Cartan	557
35.4. Elemento di Casimir di una rappresentazione	558
35.5. Coomologia delle algebre di Lie semisemplici. I	560
35.6. Un teorema di Weyl	562
35.7. Coomologia delle algebre di Lie semisemplici. II	563
35.8. Il teorema di Levi-Malcev	563

Capitolo XXXVI. Algebra involuante universale e teorema di Ado	567
36.1. Algebra involuante universale	567
36.2. Ideali cofiniti e rappresentazioni ideali	568
36.3. Rappresentazioni di dimensione finita ed ideali cofiniti	570
36.4. Estensioni di rappresentazioni	571
36.5. Il teorema di Ado	574
Bibliografia	577

Parte 1

Nozioni topologiche

CAPITOLO I

Fibrati topologici

Per le nozioni topologiche discusse in questo e nei capitoli successivi si possono utilmente consultare [28, 32].

1.1. Prime definizioni

DEFINIZIONE 1.1.1. Un *fibrato* ξ è una terna (E, π, B) , in cui $E = E(\xi)$, $B = B(\xi)$ sono spazi topologici e $\pi = \pi_\xi : E \rightarrow B$ un'applicazione continua. Chiamiamo B *base*, E *spazio totale* e π *proiezione* di ξ .

Per ogni punto B di B , la $E_b = E_b(\xi) = \pi^{-1}(b)$ si dice *la fibra* di ξ su B .

Possiamo pensare un fibrato come una collezione di *fibres*, parametrizzate dai punti di B e legate tra loro dalla *topologia* di E .

ESEMPIO 1.1.2. Il *fibrato banale* con fibra tipica F e base B ha come spazio totale il prodotto topologico $B \times F$ e come proiezione quella sul primo fattore $\pi : B \times F \ni (b, v) \rightarrow b \in B$.

DEFINIZIONE 1.1.3. Un fibrato η è un *sottofibrato* di ξ se

$$E(\eta) \subseteq E(\xi), \quad B(\eta) \subseteq B(\xi) \quad \text{e} \quad \pi_\eta = \pi_\xi|_{E(\eta)}.$$

DEFINIZIONE 1.1.4. Una *sezione* di ξ è un'applicazione continua $s : B(\xi) \rightarrow E(\xi)$ tale che $\pi_\xi \circ s = \text{id}_B$. Indicheremo con $\Gamma_\xi(B, E)$ l'insieme delle sezioni di ξ .

OSSERVAZIONE 1.1.5. Le *sezioni* di un fibrato banale $(B \times F, \text{pr}_B, B)$ con fibra tipica F si possono identificare alle funzioni continue di B in F .

DEFINIZIONE 1.1.6. Un *morfismo di fibrati* $f : \xi \rightarrow \eta$ è il dato di una coppia di applicazioni continue $(f_E, f_B) : (E(\xi), B(\xi)) \rightarrow (E(\eta), B(\eta))$ che rendano commutativo il diagramma

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{f_E} & E(\eta) \\ \pi_\xi \downarrow & & \downarrow \pi_\eta \\ B(\xi) & \xrightarrow{f_B} & B(\eta). \end{array}$$

PROPOSIZIONE 1.1.7. Se le mappe f_E, f_B di un morfismo di fibrati $f : \xi \rightarrow \eta$ sono omeomorfismi, allora la coppia $(f_E^{-1}, f_B^{-1}) : (E(\eta), B(\eta)) \rightarrow (E(\xi), B(\xi))$ definisce ancora un morfismo di fibrati $f^{-1} : \eta \rightarrow \xi$. \square

DEFINIZIONE 1.1.8. Un morfismo di fibrati $f : \xi \rightarrow \eta$ per cui f_E, f_B siano omeomorfismi si dice un *isomorfismo di fibrati* e la $f^{-1} : \eta \rightarrow \xi$ la sua *inversa*.

PROPOSIZIONE 1.1.9. *La composizione di morfismi di fibrati è ancora un morfismo di fibrati.* \square

Queste osservazioni si possono riassumere nella :

PROPOSIZIONE 1.1.10. *I fibrati e i loro morfismi formano gli "oggetti" e le "frece", o "morfismi", di una categoria.* \square

Indicheremo con \mathcal{F} la categoria dei fibrati.

Ricordiamo che una *categoria* C consiste dei dati di una famiglia di insiemi $\text{ob}(C)$, gli *oggetti* di C , e per ogni coppia (a, b) di oggetti, di un insieme $\text{hom}_C(a, b)$ di frecce da a a b . Per ogni tripla (a, b, c) di oggetti c'è una *composizione* $\text{hom}_C(a, b) \times \text{hom}_C(b, c) \rightarrow \text{hom}_C(a, c)$ che si suppone *associativa*. Inoltre, si richiede che per ogni $a \in \text{ob}(C)$ vi sia un'identità $1_a \in \text{hom}_C(a, a)$ per cui $f \circ 1_a = f$ per ogni $f \in \text{hom}_C(a, b)$ ed $1_a \circ g = g$ per ogni $g \in \text{hom}(B, A)$.

ESEMPIO 1.1.11. Sia S^n la sfera unitaria in \mathbb{R}^{n+1} . Allora

$$TS^n = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid (x \mid v) = 0\}$$

è lo spazio totale di un fibrato di base S^n , sottofibrato del fibrato banale $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$. Chiamiamo TS^n il *fibrato tangente* di S^n . Le sue fibre sono spazi vettoriali reali di dimensione n .

ESEMPIO 1.1.12. Con la proiezione

$$\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \ni x \longrightarrow \frac{x}{\|x\|} \in S^n$$

la terna $\tau = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \pi, S^n)$ è un fibrato, che si dice anche *intorno tubolare di S^n in \mathbb{R}^{n+1}* . Si può identificare τ al fibrato banale $(S^n \times \mathbb{R}, \text{pr}_{S^n}, S^n)$. mediante l'isomorfismo di fibrati descritto da $f_E: S^n \times \mathbb{R} \ni (x, t) \rightarrow e^t \cdot x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ed $f_B = \text{id}_{S^n}$.

ESEMPIO 1.1.13. Sia $1 \leq k \leq n$. La proiezione $\pi: S^{k+1} \ni (v_0, v_1, \dots, v_k) \rightarrow v_0 \in S^n$ definisce il fibrato banale $([S^n]^{k+1}, \pi, S^n)$ di base S^n e fibra tipica $[S^n]^k$. Possiamo definire il fibrato $\xi = \tau_k(S^n)$ dei k -riferimenti ortonormali su S^n come il suo sottofibrato che ha spazio totale

$$E(\xi) = \{(v_0, v_1, \dots, v_k) \in [S^n]^{k+1} \mid (v_i \mid v_j) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 0, \dots, k\},$$

base $B(\xi) = S^n$ e proiezione $\pi_\xi(v_0, v_1, \dots, v_k) = v_0$.

ESEMPIO 1.1.14. Sia $\mathcal{G}r_k(\mathbb{R}^n)$ la varietà di Grassmann (vedi §3.2) dei k -piani lineari di \mathbb{R}^n . Il suo *fibrato tautologico* $\gamma(\mathcal{G}r_k(\mathbb{R}^n))$ è il sottofibrato del fibrato banale $(\mathcal{G}r_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n, \text{pr}_{\mathcal{G}r_k(\mathbb{R}^n)}, \mathcal{G}r_k(\mathbb{R}^n))$ che ha come spazio totale

$$E = \{(\alpha, v) \in \mathcal{G}r_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mid v \in \alpha\}.$$

Possiamo considerare anche il suo *ortogonale*, con spazio totale

$$E^\perp = \{(\alpha, v) \in \mathcal{G}r_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mid v \perp \alpha\}.$$

L'applicazione $(\alpha, v) \rightarrow (\alpha^\perp, v)$ definisce un isomorfismo tra il fibrato tautologico di $\mathcal{G}r_k(\mathbb{R}^n)$ e il fibrato ortogonale di $\mathcal{G}r_{n-k}(\mathbb{R}^n)$.

Possiamo definire in modo analogo i fibrati tautologici ed ortogonali associati alle grassmanniane di m -piani complessi o quaternionici.

Lo spazio tangente, l'intorno tubolare ed il fibrato canonico sono tutti esempi di *fibrati vettoriali*, cioè fibrati le cui fibre sono spazi vettoriali in cui le operazioni vettoriali si possono descrivere come morfismi di fibrati.

1.2. Prodotti

DEFINIZIONE 1.2.1. Il *prodotto* $\xi_1 \times \xi_2$ di due fibrati è il fibrato che ha come spazio totale il prodotto degli spazi totali, come basi il prodotto delle basi e come proiezione il prodotto delle proiezioni :

$$\begin{cases} E(\xi_1 \times \xi_2) = E(\xi_1) \times E(\xi_2), \\ B(\xi_1 \times \xi_2) = B(\xi_1) \times B(\xi_2), \\ \pi_{\xi_1 \times \xi_2}(v_1, v_2) = (\pi_{\xi_1}(v_1), \pi_{\xi_2}(v_2)), \quad \forall (v_1, v_2) \in E(\xi_1) \times E(\xi_2). \end{cases}$$

Il prodotto di fibrati così definito è il prodotto *nella categoria* \mathcal{F} .

Ad uno spazio topologico B fissato possiamo associare la sottocategoria \mathcal{F}_B di \mathcal{F} , i cui oggetti sono i fibrati sulla base B e le cui frecce sono i morfismi che inducono l'identità su B . Un morfismo tra due elementi ξ ed η di \mathcal{F}_B è completamente determinato dall'applicazione $f_E : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ tra gli spazi totali. In questo caso identifichiamo per semplicità i morfismi della categoria con le applicazioni dello spazio $\mathcal{C}_B(E(\xi), E(\eta))$ delle applicazioni continue $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ che rendono commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{f} & E(\eta) \\ & \searrow \pi_\xi & \swarrow \pi_\eta \\ & B & \end{array}$$

DEFINIZIONE 1.2.2. Un isomorfismo di due fibrati sulla stessa base, che induca l'identità sulla base, si dice un'*equivalenza*.

Scriveremo $\xi_1 \approx \xi_2$ per indicare che i due fibrati ξ_1, ξ_2 sulla stessa base B sono equivalenti.

Chiamiamo *trivializzabile* un fibrato equivalente ad un fibrato banale.

Il prodotto in \mathcal{F}_B si dice *prodotto fibrato*. Diamone la definizione esplicita.

DEFINIZIONE 1.2.3. Siano ξ_1, ξ_2 due fibrati con la stessa base B . Il loro *prodotto fibrato*, o *somma di Whitney*, è il fibrato ξ di base B con spazio totale

$$(1.2) \quad E(\xi) = E(\xi_1) \times_B E(\xi_2) = \{(v_1, v_2) \in E(\xi_1) \times E(\xi_2) \mid \pi_{\xi_1}(v_1) = \pi_{\xi_2}(v_2)\}$$

e proiezione $\pi_\xi(v_1, v_2) = \pi_{\xi_1}(v_1) = \pi_{\xi_2}(v_2)$.

Indicheremo il prodotto fibrato con $\xi_1 \times_B \xi_2$, oppure $\xi_1 \oplus_B \xi_2$ (la seconda soprattutto per fibrati vettoriali), omettendo a volte l'indicazione della base quando questa sia chiara dal contesto e l'omissione non provochi quindi confusione.

PROPOSIZIONE 1.2.4. Se $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{F}_B$ sono fibrati banali con fibre F_1, F_2 , rispettivamente, allora $\xi_1 \times_B \xi_2$ è ancora banale con fibra $F_1 \times F_2$. \square

PROPOSIZIONE 1.2.5. Le sezioni di una somma di Whitney $\xi_1 \times_B \xi_2$ sono tutte e sole quelle della forma $b \rightarrow (s_1(b), s_2(b))$, con $s_i \in \Gamma_{\xi_i}(B(\xi_i), E(\xi_i))$. \square

ESEMPIO 1.2.6. Una somma di Whitney di fibrati non banali può essere banale. Ad esempio, questo è il caso dei fibrati tangente e normale di una sfera di dimensione $n \geq 2$. [Il fibrato tangente della circonferenza S^1 è banale.]

1.3. Restrizioni e fibrati indotti

DEFINIZIONE 1.3.1. Dato un fibrato ξ ed un sottospazio topologico A della sua base $B(\xi)$, la *restrizione* di ξ ad A è il fibrato $\xi|_A$ con

$$E(\xi|_A) = \pi_\xi^{-1}(A) \subseteq E(\xi), \quad B(\xi|_A) = A, \quad \pi_{\xi|_A} : E(\xi|_A) \ni v \rightarrow \pi_\xi(v) \in A.$$

Chiamiamo $\xi|_A$ *restrizione ad A del fibrato ξ* .

Si verifica facilmente che, se $A \subseteq B$, la restrizione è un funtore di categorie $\mathcal{F}_B \rightarrow \mathcal{F}_A$ e che per le restrizioni di fibrati vale la proprietà transitiva.

Siano A, B due spazi topologici e $\phi : A \rightarrow B$ un'applicazione continua. Dato un fibrato ξ di base B , poniamo

$$(1.3) \quad \begin{cases} E(\phi^*\xi) = \{(x, v) \in A \times E \mid \pi_\xi(v) = \phi(x)\}, \\ \pi_{\phi^*\xi}(x, v) = x, \quad \forall (x, v) \in E(\phi^*\xi). \end{cases}$$

DEFINIZIONE 1.3.2. $\phi^*\xi = (E(\phi^*\xi), \pi_{\phi^*\xi}, A)$ è un fibrato di base A , che si dice *indotto* su A da ϕ . Chiamiamo $\phi^*\xi$ il *pullback* di ξ su A , ovvero *il fibrato su A indotto dall'applicazione ϕ* .

La $f : \phi^*\xi \rightarrow \xi$ con $f_E(x, v) = v$ ed $f_B = \phi$ è il *morfismo canonico* del fibrato indotto. In questo caso si usa indicare con $\tilde{\phi}$ (sollevamento di ϕ) l'applicazione tra gli spazi totali.

Sia $f : \xi \rightarrow \eta$ un morfismo di fibrati. Il pullback $f_B^*\eta$ è un fibrato di base $B(\xi)$ e la

$$E(\xi) \ni v \longrightarrow (\pi_\xi(v), f_E(v)) \in E(\phi^*\eta)$$

definisce un morfismo $f^! : \xi \rightarrow f_B^*\eta$ di fibrati di base $B = B(\xi)$. Il morfismo assegnato f si può scrivere come la sua composizione con il morfismo canonico $f_B^*\eta \rightarrow \eta$ del fibrato indotto.

1.4. Fibrati localmente banali

DEFINIZIONE 1.4.1. Due fibrati ξ ed η sulla stessa base B si dicono *localmente equivalenti* se, per ogni punto B di B possiamo trovare un intorno aperto U_b di B in B tale che $\xi|_{U_b}$ ed $\eta|_{U_b}$ siano equivalenti.

PROPOSIZIONE 1.4.2. *I pullback e le restrizioni di fibrati (localmente) equivalenti sono (localmente) equivalenti.* \square

DEFINIZIONE 1.4.3. Un fibrato ξ si dice *localmente banale con fibra tipica F* se è localmente equivalente al fibrato banale $(B(\xi) \times F, \pi_{B(\xi)}, B(\xi))$.

Useremo a volte la notazione $\xi = (E, \pi, B, F)$ per indicare un fibrato localmente banale con fibra tipica F .

Poiché la proiezione del prodotto topologico su uno dei fattori è un'applicazione aperta, la proiezione sulla base in un fibrato localmente banale $\xi = (E, \pi, B, F)$ è un'applicazione aperta e quindi B ha la topologia quoziente indotta dalla proiezione $\pi : E \rightarrow B$. Abbiamo perciò

PROPOSIZIONE 1.4.4. *Se ξ, η sono due fibrati localmente banali, allora ogni applicazione continua $\Phi : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ che trasformi fibre di ξ in fibre di η definisce un morfismo di fibrati di ξ in η .*

DIMOSTRAZIONE. L'ipotesi è che si possa trovare un'applicazione ϕ che renda commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{\Phi} & E(\eta) \\ \pi_\xi \downarrow & & \downarrow \pi_\eta \\ B(\xi) & \xrightarrow{\phi} & B(\eta). \end{array}$$

Dobbiamo dimostrare che ϕ è continua: Se U è un aperto di $B(\eta)$, allora $\phi^{-1}(U) = \pi_\xi^{-1}(\Phi^{-1}(\pi_\eta^{-1}(U)))$ è aperto perché π_η e Φ sono continue e π_ξ aperta. \square

Sia $\xi = (E, \pi, B, F)$ un fibrato localmente banale con fibra tipica F e $\{B_i\}$ un ricoprimento fondamentale della sua base $B = B(\xi)$ mediante sottospazi di trivializzazione. Per ogni indice i sia $\phi_i : B_i \times F \rightarrow E_i = \pi^{-1}(B_i)$ un omeomorfismo di trivializzazione, che renda cioè commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} B_i \times F & \xrightarrow{\phi_i} & E_i \\ \pi_{B_i} \searrow & & \swarrow \pi \\ & B_i & \end{array}$$

Se $B_{i,j} = B_i \cap B_j \neq \emptyset$, per ogni $b \in B_{i,j}$ l'applicazione $\phi_{i,j}(b) : F \rightarrow F$ definita da

$$(1.4) \quad (b, \phi_{i,j}(b)(v)) = \phi_i^{-1} \circ \phi_j(b, v), \quad \forall v \in F.$$

è un omeomorfismo della fibra. La $\phi_{i,j} = \phi_i^{-1} \circ \phi_j : B_{i,j} \times F \rightarrow B_{i,j} \times F$ definisce un'equivalenza del fibrato banale.

DEFINIZIONE 1.4.5. Chiamiamo $\mathcal{A} = \{(B_i, \phi_i)\}$ un atlante di trivializzazione del fibrato ξ e le $\{\phi_{i,j}\}$ le sue funzioni di transizione.

Le funzioni di transizione $\phi_{i,j}$ sono caratterizzate dalle proprietà:

- (i) $\phi_{i,i} = \text{id}_{B_i}$,
- (ii) $\phi_{i,j} \circ \phi_{j,k}(b) = \phi_{i,k}(b), \quad \forall b \in B_{i,j,k} = B_i \cap B_j \cap B_k$,
- (iii) $B_i \times F \ni (b, v) \rightarrow \phi_{i,j}(b)(v) \in F$ è continua.

Viceversa, queste proprietà caratterizzano le funzioni di transizione di un fibrato localmente banale:

PROPOSIZIONE 1.4.6. *Siano B, F spazi topologici e $\{B_i\}$ è un ricoprimento fondamentale di B . Data una famiglia $\{\phi_{i,j}\}$ di funzioni definite sulle intersezioni $B_{i,j}$, a valori negli omeomorfismi di F , che soddisfino le proprietà (i), (ii) ed (iii), vi è,*

a meno di equivalenza, un unico fibrato localmente banale con fibra tipica F di cui esse siano le funzioni di transizione.

DIMOSTRAZIONE. Il fibrato ξ si costruisce incollando i fibrati localmente banali di spazio totale $B_i \times F$ mediante le funzioni di transizione. \square

1.5. Un lemma di trivializzazione

LEMMA 1.5.1. Siano ξ un fibrato localmente banale, con fibra tipica F e B_1, B_2 due sottoinsiemi chiusi della sua base $B = B(\xi)$, tali che $B_1 \cup B_2 = B$ e $B_1 \cap B_2$ sia un retratto¹ di B_2 . Se i fibrati $\xi|_{B_1}$ e $\xi|_{B_2}$ sono trivializzabili, allora lo è anche ξ .

Se $\phi_1 : B_1 \times F \rightarrow E|_{B_1}$ definisce una F -trivializzazione di ξ su B_1 , è possibile trovare una trivializzazione di ξ su B definita da una $\phi : B \times F \rightarrow E$ che estenda ϕ_1 .

DIMOSTRAZIONE. Siano $\rho \in \mathcal{C}(B_2, B_1 \cap B_2)$ una retrazione e $\phi_i : B_i \times F \rightarrow E|_{B_i}$ per $i = 1, 2$, omeomorfismi di trivializzazione.

La funzione di transizione $\phi_{1,2}$ verifica la

$$\phi_1(\rho, v) = \phi_2(\rho, \phi_{1,2}(\rho)(v)), \quad \forall \rho \in B_1 \cap B_2, \quad \forall v \in F.$$

Dico che la $\phi : B \times F \rightarrow E$, definita da

$$\phi(\rho, v) = \begin{cases} \phi_1(\rho, v), & \text{se } \rho \in B_1, v \in F, \\ \phi_2(\rho, \phi_{1,2}(\rho)(v)), & \text{se } \rho \in B_2, v \in F, \end{cases}$$

è una trivializzazione di ξ su B . Infatti l'inversa

$$\phi^{-1}(\sigma) = \begin{cases} \phi_1^{-1}(\sigma), & \text{se } \pi(\sigma) \in B_1, \\ (\pi(\sigma), \phi_{2,1}^{-1}(\pi(\sigma))(v)), & \text{se } \pi(\sigma) \in B_2, \end{cases}$$

è ancora un morfismo di fibrati. \square

Possiamo ora dimostrare

LEMMA 1.5.2. Ogni fibrato localmente banale su $[0, 1]^n$ è trivializzabile.

DIMOSTRAZIONE. Sia ξ un fibrato localmente banale su $[0, 1]^n$, con fibra tipica F . Per un intero positivo v sufficientemente grande possiamo suddividere $[0, 1]^n$ in v^n ipercubi di lato $1/v$, su ciascuno dei quali ξ sia trivializzabile. Ordiniamo gli v^n ipercubi Q_1, \dots, Q_{v^n} in ordine lessicografico. In questo modo, per ogni h con $2 \leq h \leq v^n$ l'ipercubo Q_h si retrae per deformazione sulla sua intersezione con $\bigcup_{i < h} Q_i$. La tesi segue allora per ricorrenza, utilizzando il Lemma 1.5.1. \square

1.6. Prolungamento di sezioni

TEOREMA 1.6.1. Siano ξ un fibrato localmente banale con fibra tipica F , A un sottoinsieme chiuso di $B := B(\xi)$ e supponiamo che $(B, A; \mathcal{K})$ sia uno spazio cellulare relativo. Ciascuna delle due seguenti condizioni è sufficiente affinché ogni sezione di $\xi|_A$ si estenda ad una sezione globale di ξ :

- (1) F è m -connesso per ogni $m < \dim(B, A; \mathcal{K})$;

¹Questo significa che esiste un'applicazione continua $\rho \in \mathcal{C}(B_2, B_1 \cap B_2)$ tale che $\rho(p) = p$ per ogni $p \in B_1 \cap B_2$.

(2) vi è una coppia cellulare relativa $(Y, X; \mathcal{K}')$ tale che
 $B = Y \times I$ ed $A = (X \times I) \cup (Y \times \{0\})$.

DIMOSTRAZIONE. La prima è un'ipotesi sulla fibra, la seconda sulla base.

Supponiamo valga la (1) e dimostriamo per ricorrenza che, data una sezione di $\xi|_A$, si può costruire una sequenza $\{s_m\}$ di sezioni, definite su $\xi|_{A \cup B_m}$, dove $A \cup B_m$ è lo scheletro m -dimensionale di $(B, A; \mathcal{K})$ (unione di A e delle celle di dimensione minore o uguale ad m di $B \setminus A$), con $s_m|_A = s$ ed $s_m|_{A \cup B_{m-1}} = s_{m-1}$ se $m \geq 1$.

Poiché $A \cup B_0$ è unione di A e di un sottospazio discreto disgiunto da A , possiamo definire il prolungamento $s_0 \in \Gamma_\xi(A \cup B_0, E)$ di s assegnando arbitrariamente i valori di s_0 nei punti di $(A \cup B_0) \setminus A$. Proseguiamo la dimostrazione ragionando per ricorrenza. Supponiamo sia $1 \leq m \leq \dim(B, A)$ e che il teorema valga per coppie cellulari relative di dimensione minore di m ed, in particolare, di aver definito $s_{m-1} \in \Gamma_\xi(A \cup B_{m-1}, E)$. Osserviamo che, se $\{(L_i, A; \mathcal{K}_{(i)})\}_{i \in I}$ è una catena di sottospazi cellulari relativi di $(A \cup B_m, A; \mathcal{K}_m)$, ordinati mediante inclusione e contenenti $(A \cup B_{m-1}, A; \mathcal{K}_{m-1})$, e per ogni i sia definito un prolungamento $s^{(i)}$ di s_{m-1} la cui restrizione a ciascun $L_j \subset L_i$ sia $s^{(j)}$, allora risulta definito un prolungamento \tilde{s} di s su $\bigcup L_i$, con $\tilde{s}|_{L_i} = s^{(i)}$. Per il lemma di Zorn ci sarà quindi un sottospazio massimale L , con $A \cup B_{m-1} \subseteq L \subseteq A \cup B_m$ su cui la sezione s_{m-1} si estende ad una sezione s_L . Dimostriamo che $L = A \cup B_m$. Se così non fosse, potremmo trovare una cella m -dimensionale di $(B, A; \mathcal{K})$ non contenuta in L . Possiamo supporre la cella definita da una mappa $\phi: I^m \rightarrow B$, dove abbiamo posto $I = [0, 1]$, che si restringe ad un omeomorfismo su $(0, 1)^m$. Possiamo suddividere I^m in ν^m cubi m -dimensionali di lato $1/\nu$ e considerare su $\phi(I^m)$ la struttura cellulare \mathcal{K}_ϕ , in cui le immagini degli ν^m cubi sono le celle chiuse di dimensione m . Scegliendo ν abbastanza grande, possiamo supporre che la restrizione del fibrato a ciascuna di queste ν^m celle sia banale. Per l'ipotesi di ricorrenza, applicata a $(\phi(I^m), A \cap \phi(I^m); \mathcal{K}_\phi)$, la sezione definita su L si estende ad una sezione s' definita su $A \cup L \cup \phi(I^m)_{m-1}$. Per l'ipotesi che F sia $(m-1)$ -connesso, la s' , definita sul bordo dei cubetti, si estende ad un'applicazione continua sui cubetti. Otteniamo in questo modo un prolungamento di s_L ad $A \cup L \cup \phi(I^m)$. Questo contraddice la massimalità di L . Quindi deve essere $L = A \cup B_m$. Le $\{s_m\}$, ottenute per ricorrenza, ci danno una sezione \tilde{s} che estende s su B .

La dimostrazione del teorema sotto l'ipotesi (2) si fa estendendo la sezione alle celle relative di (B, A) , dopo averle ordinate in modo che ciascuna corrisponda a un ipercubo che ha una retrazione sulla parte della sua frontiera coperta da A e dalle celle precedenti. Utilizzando la trivializzazione data dal Lemma 1.5.2, si ottiene l'estensione. \square

1.7. Esempi

ESEMPIO 1.7.1. Sulle sfere di dimensione dispari S^{2n-1} è possibile definire un campo analitico di vettori tangenti X con $\|X\| \equiv 1$.

Consideriamo S^{2n-1} come una sottovarietà analitica reale di \mathbb{C}^n e descriviamo il suo spazio tangente TS^{2n-1} come un sottofibrato del fibrato banale:

$$TS^{2n-1} = \{(z, w) \in S^{2n-1} \times \mathbb{C}^n \mid \Re(w^*z) = 0\}.$$

Allora $X(z) = iz$ è un campo analitico di vettori tangenti ad S^{2n-1} che ha in ogni punto lunghezza 1.

ESEMPIO 1.7.2. Su S^{4n-1} è possibile definire un campo analitico (X_1, X_2, X_3) di terne di vettori tangenti ortonormali in ogni punto. In particolare, TS^3 è trivialisabile.

Possiamo considerare S^{4n-1} come un sottospazio analitico dello spazio \mathbb{H}^n , dove \mathbb{H} è l'algebra associativa dei quaternioni di Hamilton. Allora

$$TS^{4n-1} = \{(q, \xi) \in S^{4n-1} \times \mathbb{H}^n \mid \Re(\xi^*q) = 0\}.$$

Se i, j, κ sono le unità immaginarie di \mathbb{H} , allora $X_1(q) = q \cdot i$, $X_2(q) = q \cdot j$ ed $X_3(q) = q \cdot \kappa$ definiscono la terna desiderata.

ESEMPIO 1.7.3. Il pullback ad S^n del fibrato tangente di S^{n+m} è equivalente alla somma di Whitney del fibrato tangente di S^n e del fibrato banale $(S^n \times \mathbb{R}^m, \pi_{S^n}, S^n)$.

1.8. Fibrati di Serre

Indichiamo con I l'intervallo chiuso $[0, 1]$ di \mathbb{R} . Per ogni coppia di interi positivi m, n con $m < n$ consideriamo I^m come il sottospazio delle n -uple (t_1, \dots, t_n) di I^n con $t_i = 0$ per $i > m$. Conveniamo che $I^0 = \{0\}$.

DEFINIZIONE 1.8.1. Chiamiamo *di Serre*² un fibrato ξ che soddisfi la condizione

- (S) per ogni intero positivo n ed ogni coppia di applicazioni continue $f: I^n \rightarrow B(\xi)$ ed $\tilde{f}_0: I^{n-1} \rightarrow E(\xi)$, con $\pi_\xi \circ \tilde{f}_0(t) = f(t)$, $\forall t \in I^{n-1} \subset I^n$, esiste un'applicazione continua $\tilde{f}: I^n \rightarrow E(\xi)$ che renda commutativo il diagramma

$$(1.5) \quad \begin{array}{ccc} I^{n-1} & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & E(\xi) \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi_\xi \\ I^n & \xrightarrow{f} & B(\xi) \end{array}$$

Una \tilde{f} che renda commutativo il diagramma (7.12) si dice un *sollevamento* o *rialzamento* di f .

OSSERVAZIONE 1.8.2. Prodotti e restrizioni di fibrati di Serre sono ancora fibrati di Serre.

²Jean-Pierre Serre (n. 1926) è un matematico francese che ha dato contributi fondamentali alla topologia e alla geometria algebriche, e alla teoria algebrica dei numeri. Medaglia Fields nel 1954, ha ricevuto il premio Wolf nel 2000 ed il premio Abel nel 2003.

ESEMPIO 1.8.3. Il fibrato ξ , con $E(\xi) = I$, $B(\xi) = I$ e $\pi_\xi(x) = x/2$ non è di Serre : le sue fibre sopra i punti $b \in (\frac{1}{2}, 1]$ sono vuote e quindi la $f: I^1 \rightarrow I = B(\xi)$ definita da $f(b) = b$, $\tilde{f}_0(0) = 0$ non ammette un sollevamento.

Il fibrato ξ , con $E(\xi) = I$, $B(\xi) = I$ e $\pi_\xi(x) = 4x(1-x)$ non è localmente banale, perché la sua fibra è $\{\frac{1}{2}\}$ sul punto 1, mentre consiste dei due punti $x_\pm = (1 \pm \sqrt{1-b})/2$ se $b \neq 1$. Qui la condizione di Serre non è soddisfatta per $n = 2$: se $f(t_1, t_2) = 4t_1(1-t_1)(1-t_2)$ per $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$ ed $\tilde{f}_0(t_1) = t_1$, non ci può essere un sollevamento \tilde{f} di f ad I^2 con dato iniziale \tilde{f}_0 . Infatti, $f(0, I) = \{0\}$ e quindi dovrebbe essere $\tilde{f}(0, t) = 0$ ed $\tilde{f}(1, t) = 1$ per ogni $t \in I$. È poi $f(I, 1) = \{0\}$ e quindi $\tilde{f}(t, 1)$ sarebbe un cammino, sulla fibra di ξ su 0, che congiunge 0 a 1; questo non è possibile perché la fibra consiste dei due punti 0, 1.

LEMMA 1.8.4 (Località della condizione di Serre). *Sia ξ un fibrato. Se per ogni punto p della base $B(\xi)$ possiamo trovare un intorno aperto U_p di p in $B(\xi)$ per cui $\xi|_{U_p}$ sia di Serre, allora ξ è di Serre.*

DIMOSTRAZIONE. Sia n un intero positivo ed $(f, \tilde{f}_0) \in \mathcal{C}(I^n, I^{n-1}; B(\xi), E(\xi))$, con $\pi_\xi \circ \tilde{f}_0 = f|_{I^{n-1}}$. L'immagine $f(I^n)$ è compatta e può quindi essere ricoperta con un numero finito di aperti di $B(\xi)$ su cui la restrizione di ξ sia un fibrato di Serre. Potremo quindi trovare un intero positivo ν , sufficientemente grande, tale che ciascun ipercubo Q di lato $1/\nu$ contenuto in I^n abbia immagine $f(Q)$ su cui la restrizione $\xi|_Q$ sia di Serre. Quadrettiamo I^n in ν^n ipercubi

$$Q_{i_1, \dots, i_n} = \{i_k - 1 \leq t_k \leq i_k, 1 \leq k \leq n\}, \text{ per } 1 \leq i_1, \dots, i_n \leq \nu,$$

ordinati lessicograficamente rispetto agli indici. Per ogni (i_1, \dots, i_n) indichiamo con Q'_{i_1, \dots, i_n} l'unione di I^{n-1} e di tutti i Q_{j_1, \dots, j_n} con $(j_1, \dots, j_n) < (i_1, \dots, i_n)$. L'osservazione fondamentale è che tutte le coppie $(Q_{i_1, \dots, i_n}, Q_{i_1, \dots, i_n} \cap Q'_{i_1, \dots, i_n})$ sono omeomorfe alla coppia (I^n, I^{n-1}) . Infatti $Q_{i_1, \dots, i_n} \cap Q'_{i_1, \dots, i_n}$ è un connesso non vuoto, unione di facce dell'ipercubo Q_{i_1, \dots, i_n} , che si retrae in $\partial Q_{i_1, \dots, i_n}$ su una delle facce dell'ipercubo. Questo ci permette di costruire per ricorrenza la \tilde{f} , estendendo prima \tilde{f}_0 ad un sollevamento su $I^{n-1} \cup Q_{1, \dots, 1}$, utilizzando il fatto che $(Q_{1, \dots, 1}, Q_{1, \dots, 1} \cap I^{n-1})$ è omeomorfa ad (I^n, I^{n-1}) e $\xi|_{f(Q_{1, \dots, 1})}$ è di Serre. Dopo aver esteso \tilde{f}_0 ad un sollevamento su $I^{n-1} \cup Q'_{i_1, \dots, i_n}$, con $(i_1, \dots, i_n) \leq (\nu, \dots, \nu)$, si ottiene la sua estensione a un sollevamento su $I^{n-1} \cup Q'_{i_1, \dots, i_n} \cup Q_{i_1, \dots, i_n}$, utilizzando il fatto che la coppia $(Q_{i_1, \dots, i_n}, Q_{i_1, \dots, i_n} \cap Q'_{i_1, \dots, i_n})$ è omeomorfa alla coppia (I^n, I^{n-1}) e che $\xi|_{f(Q_{i_1, \dots, i_n})}$ è di Serre. \square

COROLLARIO 1.8.5. *Ogni fibrato localmente banale è di Serre.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 1.8.4, è sufficiente verificare che ogni fibrato banale è di Serre. Consideriamo un fibrato banale $(B \times F \xrightarrow{\pi} B)$ e, per un intero $n > 0$, siano $f \in \mathcal{C}(I^n, B)$ ed $\tilde{f}_0 \in \mathcal{C}(I^{n-1}, B \times F)$ due applicazioni continue con $\pi \circ \tilde{f}_0 = f|_{I^{n-1}}$. Osserviamo che si può scrivere $\tilde{f}_0(t) = (f(t), \phi(t))$, per ogni $t \in I^{n-1}$, per un'applicazione continua $\phi \in \mathcal{C}(I^{n-1}, F)$. Basterà porre

$$\tilde{f}(t_1, \dots, t_n) = (f(t_1, \dots, t_n), \phi(t_1, \dots, t_{n-1})).$$

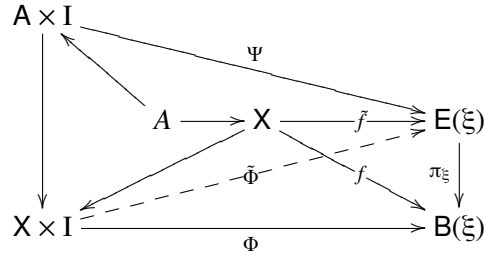
La dimostrazione è completa. \square

ESEMPIO 1.8.6. Fissiamo due funzioni continue $\phi_1 \leq \phi_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ e siano $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$, $B = I$ e $\pi(x, y) = x$. Allora (E, π, B) è sempre un fibrato di Serre, anche se non è localmente banale quando

$$\emptyset \subsetneq \{x \in I \mid \phi_1(x) = \phi_2(x)\} \subsetneq I.$$

TEOREMA 1.8.7 (di omotopia del sollevamento). *Siano ξ un fibrato di Serre ed (X, A) una coppia cellulare relativa. Allora, per ogni applicazione $\tilde{f}: X \rightarrow E(\xi)$ ed ogni omotopia $\Phi \in \mathcal{C}(X \times I, B(\xi))$ di $f = \pi_\xi \circ \tilde{f}$ ed ogni omotopia $\Psi \in \mathcal{C}(A \times I, E(\xi))$ di $\tilde{f}|_A$ che solleva $\Phi|_{A \times I}$, possiamo trovare un'omotopia $\tilde{\Phi} \in \mathcal{C}(X \times I, E(\xi))$ di \tilde{f} che solleva Φ ed estende Ψ .*

[L'enunciato è illustrato dal diagramma]



DIMOSTRAZIONE. Per ogni intero $m \geq 0$ indichiamo con $A \cup X_m$ l'unione di A e delle celle di dimensione minore o uguale di m di $X \setminus A$.

Dimostriamo per ricorrenza su m che, per ogni intero $m \geq 0$, è possibile costruire un'omotopia $\tilde{\Phi}_m \in \mathcal{C}((A \cup X_m) \times I, E(\xi))$ con $\tilde{\Phi}_m|_{A \times I} = \Psi$, $\tilde{\Phi}_m|_{(A \cup X_{m-1}) \times I} = \tilde{\Phi}_{m-1}$ se $m > 0$, $\tilde{\Phi}_m(x, 0) = \tilde{f}(x)$ su $A \cup X_m$ e $\pi_\xi \circ \tilde{\Phi}_m = \Phi|_{(A \cup X_m) \times I}$.

Per $m = 0$, le celle di dimensione zero di (X, A) formano un sottoinsieme discreto disgiunto da A . Se $\{x\}$ è una di queste celle, per la proprietà di Serre l'applicazione $I \ni t \rightarrow \Phi(x, t) \in B(\xi)$ ha un sollevamento $I \ni t \rightarrow \tilde{\Phi}_0(x, t)$ con $\tilde{\Phi}_0(x, 0) = \tilde{f}(x)$. Definendola uguale a Ψ su $A \times I$, otteniamo così la $\tilde{\Phi}_0$.

Sia ora $m > 0$ e supponiamo di aver già costruito $\tilde{\Phi}_{m-1}$. Consideriamo la famiglia delle coppie (L, Ψ_L) in cui L è unione di $A \cup X_{m-1}$ e di celle di dimensione m di $X \setminus A$ e Ψ_L un'omotopia di $\tilde{f}|_L$ che coincide con $\tilde{\Phi}_{m-1}$ su $(A \cup X_{m-1}) \times I$ e solleva $\Phi|_{L \times I}$ con valore iniziale \tilde{f} . Semiordiniamo questa famiglia mediante la relazione $(L', \Psi_{L'}) < (L, \Psi_L)$ se $L' \subset L$ e $\Psi_{L'} = \Psi_L$ su $L' \times I$. Poiché ogni catena massimale ammette un maggiorante, per il lemma di Zorn c'è un (L, Ψ_L) massimale. Basta verificare che $L = A \cup X_m$. Infatti, se (L, Ψ_L) è una coppia con $L \subsetneq A \cup X_m$, vi è una cella di dimensione m di $X \setminus A$ non contenuta in L . Possiamo descriverla come una $\psi \in \mathcal{C}(I^m, X)$ la cui restrizione ad \dot{I}^m è un omeomorfismo con $\psi(\dot{I}^m) \subset X \setminus A$. Per composizione con la Ψ_L otteniamo un'applicazione che è definita su tutte le facce dell'ipercubo I^{m+1} , tranne che sulla

$$\{(t_1, \dots, t_m, 1) \mid 0 < t_i < 1, 1 \leq i \leq m\},$$

corrispondente a $t_{m+1} = 1$. Detto $\partial_0 I^{m+1}$ tale insieme, osserviamo che la coppia $(I^{m+1}, \partial_0 I^{m+1})$ è omeomorfa alla coppia (I^{m+1}, I^m) . Per la proprietà di Serre, possiamo allora prolungare il sollevamento dell'omotopia Ψ_L ad $(L \cup \psi(I^m)) \times I$, con valore iniziale \tilde{f} su $L \cup \psi(I^m)$. Quindi, per la massimalità, deve essere $L = A \cup X_m$ e possiamo allora definire $\tilde{\Phi}_m = \Psi_L$.

Otteniamo il sollevamento dell'omotopia cercato ponendo $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_m$ su $A \cup X_m$, per ogni intero $m \geq 0$. \square

DEFINIZIONE 1.8.8. Chiamiamo *rivestimento generalizzato* un fibrato ξ localmente banale con fibre discrete. Togliamo l'aggettivo *generalizzato* se richiediamo che $E(\xi)$ e $B(\xi)$ siano connessi e non vuoti.

LEMMA 1.8.9 (unicità del sollevamento). *Siano ξ un rivestimento generalizzato, X uno spazio connesso ed $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 \in \mathcal{C}(X, E(\xi))$ due applicazioni continue, a valori nello spazio totale, che inducono una stessa applicazione a valori nella base: tali cioè che $\pi_\xi \circ \tilde{f}_0 = \pi_\xi \circ \tilde{f}_1$. Se $\tilde{f}_1(x_0) = \tilde{f}_2(x_0)$ per un punto x_0 di X , allora $\tilde{f}_0 = \tilde{f}_1$.*

DIMOSTRAZIONE. Punti distinti sulla stessa fibra di un rivestimento generalizzato hanno intorni aperti disgiunti: infatti, se $b \in B(\xi)$ ed indichiamo con F la fibra tipica di ξ in un intorno di b , possiamo trovare un intorno aperto U ed un omeomorfismo $\phi: U \times F \rightarrow \pi_\xi^{-1}(U)$ con $\pi_U = \pi_\xi \circ \phi$. Se v_1 e v_2 sono punti distinti di $\pi_\xi^{-1}(b)$, allora $\phi(U \times \{v_1\})$ e $\phi(U \times \{v_2\})$ sono intorni disgiunti di v_1 e v_2 in $E(\xi)$. Da questo segue che sia l'insieme $\{x \in X \mid f_0(x) = f_1(x)\}$ in cui f_0 ed f_1 assumono lo stesso valore, sia il suo complementare $\{x \in X \mid f_0(x) \neq f_1(x)\}$ sono aperti. Se X è connesso, uno dei due deve essere vuoto e l'altro uguale ad X . \square

PROPOSIZIONE 1.8.10. *Siano ξ un rivestimento generalizzato, X uno spazio cellulare connesso ed x_0 un punto di X corrispondente ad una sua cella di dimensione zero. Siano $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 \in \mathcal{C}(X, E(\xi))$ con $\tilde{f}_0(x_0) = \tilde{f}_1(x_0)$. Se $f_0 = \pi_\xi \circ \tilde{f}_0$ ed $f_1 = \pi_\xi \circ \tilde{f}_1$ sono $\{x_0\}$ -omotope, allora anche \tilde{f}_0 e \tilde{f}_1 lo sono.*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema sul rialzamento dell'omotopia, una $\{x_0\}$ -omotopia Φ tra f_0 ed f_1 si rialza ad una $\{x_0\}$ -omotopia $\tilde{\Phi}$ di \tilde{f}_0 . Per il Lemma 1.8.9, è $\tilde{\Phi}(x, 1) = \tilde{f}_1(x)$ perché $\tilde{\Phi}(\cdot, 1)$ è un rialzamento di f_1 che ha in x_0 lo stesso valore di \tilde{f}_1 . \square

Più in generale, per un qualsiasi fibrato di Serre diversi sollevamenti con lo stesso dato iniziale sono omotopi.

TEOREMA 1.8.11 (di omotopia del sollevamento). *Siano ξ un fibrato di Serre, (X, A) una coppia cellulare relativa, $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 \in \mathcal{C}(X, E(\xi))$ due applicazioni con $\tilde{f}_0|_A = \tilde{f}_1|_A$. Se $f_0 = \pi_\xi \circ \tilde{f}_0$ ed $f_1 = \pi_\xi \circ \tilde{f}_1$ sono A -omotope, anche \tilde{f}_0 e \tilde{f}_1 sono A -omotope.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in \mathcal{C}(X \times I, B(\xi))$ una A -omotopia tra f_0 ed f_1 . Poiché anche $(X \times I, (A \times I) \cup (X \times \{0, 1\}))$ è una coppia cellulare relativa, per il teorema di sollevamento dell'omotopia, l'omotopia costante $\Phi \in \mathcal{C}((X \times I) \times I, B(\xi))$, definita da

$$\Phi(x, t; s) = f(x, t), \quad \forall (x, t) \in X \times I, \quad \forall s \in I.$$

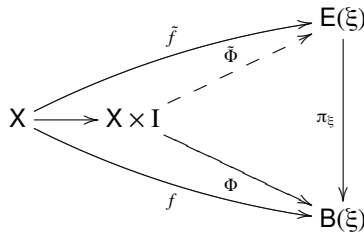
si rialza ad un'omotopia $\tilde{\Phi} \in \mathcal{C}((X \times I) \times I, E(\xi))$ con

$$\begin{cases} \pi_\xi \circ \tilde{\Phi} = \Phi, \\ \tilde{\Phi}(x, t; 0) = \tilde{f}_0(x) = \tilde{f}_1(x), \quad \forall x \in A, \forall t \in I, \\ \tilde{\Phi}(x, 0; 0) = \tilde{f}_0(x), \quad \forall x \in X, \\ \tilde{\Phi}(x, 1; 0) = \tilde{f}_1(x), \quad \forall x \in X. \end{cases}$$

La $\tilde{f}(x, t) = \tilde{f}_t(x) = \tilde{\Phi}(x, t; 0)$ definisce allora un'A-omotopia tra \tilde{f}_0 e \tilde{f}_1 . □

1.9. Condizione di Serre forte

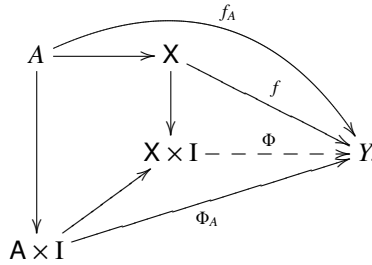
DEFINIZIONE 1.9.1. Diciamo che il fibrato ξ soddisfa la *condizione di Serre forte* se, per ogni spazio topologico X ed ogni applicazione continua $\tilde{f} \in \mathcal{C}(X, E(\xi))$ di X nel suo spazio totale, ogni omotopia Φ di $f = \pi_\xi \circ \tilde{f}$ si rialza ad un'omotopia $\tilde{\Phi}$ di \tilde{f} .



Una classe importante di fibrati che soddisfano la condizione di Serre forte è associata alla nozione topologica di *cofibrazione*.

DEFINIZIONE 1.9.2. Una coppia topologica (X, A) si dice una *cofibrazione*, o *coppia di Borsuk*³ se $X \times I$ ammette una retrazione su $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$.

Questa condizione è equivalente al fatto che per ogni spazio topologico Y , ogni omotopia Φ_A della restrizione ad A d'un'applicazione continua $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ si estende ad un'omotopia di f . La possiamo rappresentare con il diagramma :



³Karol Borsuk (1905-1982), topologo polacco. A lui si devono diverse nozioni sulle retrazioni e l'introduzione, insieme a Spanier, dei gruppi di *coomotopia*, da cui è derivata l'*omotopia stabile*. Introdusse inoltre una *teoria delle forme*. Il teorema di Borsuk-Ulam dice che, per ogni applicazione continua f di S^n in \mathbb{R}^n , c'è almeno un punto $x \in S^n$ per cui $f(x) = f(-x)$.

Siano infatti Y uno spazio topologico, $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ e $\Phi_A \in \mathcal{C}(A \times I, Y)$ un'omotopia di $f_A = f|_A$. Se $\rho: X \times I \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ è una retrazione, la $\Phi = \Phi_A \circ \rho \in \mathcal{C}(X \times I, Y)$ è un'omotopia di f che estende la Φ_A .

Viceversa, possiamo considerare l'immersione

$$\rho_A: A \times I \ni (a, t) \rightarrow (a, t) \in ([A \times I] \cup [X \times \{0\}])$$

come un'omotopia della restrizione ad A dell'applicazione

$$f: X \ni x \rightarrow (x, 0) \in ([A \times I] \cup [X \times \{0\}]).$$

L'estensione ρ della ρ_A ad un'omotopia di f è la retrazione cercata.

Se (X, A) è una coppia topologica ed Y uno spazio topologico, possiamo definire un fibrato $\Xi = \Xi(X, A; Y)$ ponendo

$$E(\Xi) = \mathcal{C}(X, Y), \quad B(\Xi) = \mathcal{C}(A, Y), \quad \pi_\Xi(f) = f|_A, \quad \forall f \in \mathcal{C}(X, Y).$$

PROPOSIZIONE 1.9.3. *Se (X, A) è una cofibrazione con X di Hausdorff localmente compatto ed Y un qualsiasi spazio topologico, allora Ξ soddisfa la condizione di Serre forte.*

DIMOSTRAZIONE. Sia Z uno spazio topologico, $\tilde{f} \in \mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X, Y))$ un'applicazione continua e $\Phi' \in \mathcal{C}(Z \times I, \mathcal{C}(A, Y))$ un'omotopia della $\pi_\Xi \circ \tilde{f}$. Poiché abbiamo supposto che X fosse di Hausdorff e localmente compatto, le applicazioni

$$\tilde{g}: Z \times X \ni (z, x) \longrightarrow [\tilde{f}(z)](x) \in Y,$$

$$G: Z \times A \times I \ni (z, a, t) \longrightarrow [\Phi'(z, t)](a) \in Y$$

sono continue e quindi G è un'omotopia della restrizione di \tilde{g} a $Z \times A$. La coppia $(Z \times X, Z \times A)$ è ancora una cofibrazione e quindi G si prolunga ad un'omotopia \tilde{G} di \tilde{g} . Otteniamo quindi l'omotopia cercata definendo

$$\Phi: Z \times I \ni (z, t) \rightarrow \Phi(z, t) \in \mathcal{C}(X, Y) \quad \text{mediante} \quad [\Phi(z, t)](x) = \tilde{G}(z, x, t). \quad \square$$

PROPOSIZIONE 1.9.4. *Le fibre di un fibrato ξ che abbia base connessa per archi e soddisfi la condizione di Serre forte sono omotopicamente equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $s_0 \in \mathcal{C}(I, B(\xi))$ un cammino continuo che congiunge due punti b_0 e b_1 della base. Indichiamo con s_1 il cammino inverso $s_1(t) = s_0(1-t)$, da b_1 a b_0 . Siano $F_0 = \pi_\xi^{-1}(b_0)$ ed $F_1 = \pi_\xi^{-1}(b_1)$ le fibre sopra i due punti. I cammini s_0 ed s_1 si possono considerare come omotopie delle proiezioni delle applicazioni d'inclusione $\iota_0: F_0 \rightarrow E(\xi)$ ed $\iota_1: F_1 \rightarrow E(\xi)$, cioè delle $F_0 \ni v \rightarrow b_0 \in B(\xi)$, $F_1 \ni v \rightarrow b_1 \in B(\xi)$. Per la condizione di Serre forte, possiamo trovare delle omotopie

$$\tilde{s}_0: F_0 \times I \rightarrow E(\xi) \quad \text{ed} \quad \tilde{s}_1: F_1 \times I \rightarrow E(\xi)$$

che li sollevano. Abbiamo ottenuto così due mappe

$$f_0: F_0 \ni v \rightarrow \tilde{s}_0(v, 1) \in F_1 \quad \text{ed} \quad f_1: F_1 \ni v \rightarrow \tilde{s}_1(v, 1) \in F_0.$$

Dico che f_0 ed f_1 sono l'una un'inversa omotopica dell'altra. Poiché possiamo scambiare tra loro, nel ragionamento, i punti b_0 e b_1 , possiamo limitarci a

dimostrare che $f_1 \circ f_0 \in \mathcal{C}(F_0, F_0)$ è omotopa all'identità su F_0 . Definiamo

$$j: F_0 \times I \ni (v, t) \longrightarrow \begin{cases} \tilde{s}_0(v, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \tilde{s}_1(\tilde{s}_0(v, 1), 2t - 1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Poiché $s_0 \cdot s_1(t) = s_0(1 - |1 - 2t|)$, l'applicazione

$$H(x, t; \tau) = s_0((1 - \tau)(1 - |1 - 2t|))$$

definisce un'omotopia di $\pi_{\xi} \circ j(v, t) = s_0 \cdot s_1(t)$. Per la proprietà di Serre forte, questa si solleva ad un'omotopia $\tilde{H}: (F_0 \times I) \times I \rightarrow E(\xi)$ di j . È $(1 - \tau)(1 - |1 - 2t|) = 0$ sui tre dei lati del quadrato $\{0 \leq t, \tau \leq 1\}$ corrispondenti a $\tau = 1$ e a $t = 0, t = 1$. Quindi, quando (t, τ) percorre questi tre lati del quadrato, la $\tilde{H}(v, t; \tau)$ assume valori in F_0 . Possiamo quindi definire un'omotopia di applicazioni continue di F_0 in sé ponendo

$$K(v, t) = \begin{cases} \tilde{H}(v, 0; 3t), & 0 \leq t \leq 1/3, \\ \tilde{H}(v, 3t - 1; 1), & 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ \tilde{H}(v, 1; 3 - 3t), & 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Poiché $K(v, 0) = v$ e $K(v, 1) = \tilde{s}_1(\tilde{s}_0(v, 1), 1) = f_1 \circ f_0(v)$, questo completa la dimostrazione. \square

LEMMA 1.9.5. *Se X è connesso per archi ed $x_0, x_1, x'_0, x'_1 \in X$ sono quattro suoi punti, allora gli spazi $\mathcal{C}(I, 0, 1; X, x_0, x_1)$ e $\mathcal{C}(I, 0, 1; X, x'_0, x'_1)$ sono omotopicamente equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Gli spazi $\mathcal{C}(I, 0, 1; X, x_0, x_1)$ e $\mathcal{C}(I, 0, 1; X, x'_0, x'_1)$ sono le fibre del fibrato $\Xi = \Xi(I, \{0, 1\}; X)$ sui punti (x_0, x_1) ed (x'_0, x'_1) della sua base $\mathcal{C}(\{0, 1\}, X) = X \times X$. La tesi è allora conseguenza della Proposizione 1.9.4, perché, per la Proposizione 1.9.3, vale per Ξ la condizione di Serre forte. \square

1.10. Associato di Serre di un fibrato

Sia ξ un fibrato. Poniamo

$$(1.6) \quad E(\xi^*) = \{(v, s) \in E(\xi) \times \mathcal{C}(I, B(\xi)) \mid s(0) = \pi_{\xi}(v)\}, \quad \pi_{\xi^*}(v, s) = s(1).$$

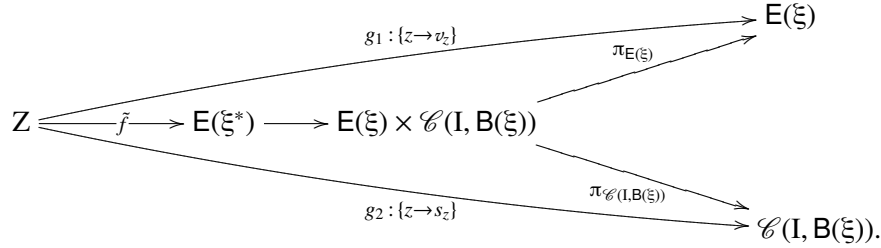
DEFINIZIONE 1.10.1. Chiamiamo *associato di Serre* di ξ il fibrato ξ^* che ha la stessa base di ξ , mentre lo spazio totale $E(\xi^*)$ e la proiezione π_{ξ^*} sono definiti dalla (1.6).

Possiamo considerare ξ come un sottofibrato di ξ^* , facendo corrispondere a $v \in E(\xi)$ la coppia (v, s_v) formata da v e dal cammino costante $\{t \rightarrow \pi_{\xi}(v)\}$. Lo spazio totale $E(\xi^*)$ si retrae per deformazione su $E(\xi)$, mediante la

$$E(\xi^*) \times I \ni (v, s; \tau) \rightarrow (v, r_{\tau}s) \in E(\xi), \text{ definita da } r_{\tau}s(t) = s([1 - \tau]t).$$

PROPOSIZIONE 1.10.2. *Per ogni fibrato ξ , il suo associato di Serre ξ^* soddisfa la condizione di Serre forte.*

DIMOSTRAZIONE. Sia Z un qualsiasi spazio topologico, $\tilde{f} \in \mathcal{C}(Z, E(\xi^*))$ un'applicazione continua e $\Phi \in \mathcal{C}(Z \times I, B(\xi))$ (ricordiamo che $B(\xi^*) = B(\xi)$) un'omotopia di $f = \pi_{\xi^*} \circ \tilde{f}$. Siano g_1 e g_2 le applicazioni composte definite dal diagramma



Per ogni $z \in Z$ è $\tilde{f}(z) = (v_z, s_z)$, ed s_z è un cammino continuo in $B(\xi)$ che congiunge $\pi_{\xi}(v_z)$ ad $s_z(1) = \pi_{\xi^*}(\tilde{f}(z))$, mentre l'omotopia Φ definisce un cammino continuo $\{t \rightarrow \Phi(z, t)\}$ in $B(\xi)$, di punto iniziale $s_z(1)$. Possiamo quindi definire un'omotopia di cammini sommando i cammini s_z e quelli dati dall'omotopia Φ , mediante

$$[\Psi(z, t)](\tau) = \begin{cases} s_z(\tau(1+t)) & \text{se } \tau \leq 1/(1+t), \\ \Phi(z, \tau(1+t) - 1) & \text{se } \tau \geq 1/(1+t). \end{cases}$$

Il cammino $\tau \rightarrow [\Psi(z, t)](\tau)$ ha punto iniziale $s_z(0) = \pi_{\xi}(v_z)$ e punto finale $\Phi(z, 1)$. Poiché $[\Psi(z, 0)](\tau) = s_z(\tau)$, l'applicazione $\tilde{\Phi}(z, t) = (v_z, \Psi(z, t))$ definisce un'omotopia di \tilde{f} che solleva Φ . \square

1.11. Successione esatta di omotopia di un fibrato

Siano (X, x_0) ed (Y, y_0) due spazi puntati. Dall'omeomorfismo

$$\mathcal{C}(S^n, e_0; X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \mathcal{C}(S^n, e_0; X, x_0) \times \mathcal{C}(S^n, e_0; Y, y_0)$$

ricaviamo il teorema sui gruppi di omotopia del prodotto.

TEOREMA 1.11.1. Per ogni intero $n \geq 1$ abbiamo l'isomorfismo

$$(1.7) \quad \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0) \quad (\text{prodotto diretto}). \quad \square$$

Quindi i gruppi di omotopia dello spazio totale di un fibrato banale si possono calcolare come prodotti dei corrispondenti gruppi di omotopia della base e della fibra. Questo non vale per fibrati generali, ma, per i fibrati di Serre, e quindi in particolare per i fibrati localmente banali, vi sono delle relazioni tra i gruppi di omotopia dello spazio totale, della base e della fibra, che sono espresse da una *successione esatta*.

1.11.1. Successioni esatte. Richiamiamo la nozione di successione esatta, a livello di insiemi puntati e di gruppi.

Sia $\{A_k\}_{k=0,1,\dots}$ una successione di insiemi non vuoti, su ciascuno dei quali sia fissato un punto base $a_0^k \in A_k$. Consideriamo una sequenza di applicazioni:

$$(1.8) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & A_n & \xrightarrow{f_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & A_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & \cdots & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_0. \end{array}$$

DEFINIZIONE 1.11.2. La (1.8) si dice un *complesso di insiemi puntati* se

$$(1.9) \quad f_{n+2}(A_{n+2}) \subset f_{n+1}^{-1}(a_0^n), \quad \forall n \geq 0,$$

ovvero se, per ogni $n \geq 0$, la composizione $f_{n+1} \circ f_{n+2}$ è l'applicazione costante che trasforma tutti gli elementi di A_{n+2} nel punto a_0^n .

Diciamo che la (1.8) è una *successione esatta di insiemi puntati* se

$$(1.10) \quad f_n(A_n) = f_{n-1}^{-1}(a_0^{n-2}) \quad \forall n \geq 2.$$

Se gli A_k hanno ciascuno una struttura di gruppo, con identità a_0^k , e se tutte le f_n ($n \geq 1$) sono omomorfismi di gruppi, diremo che (1.8) è, rispettivamente, un *complesso*, o una *successione esatta di gruppi*.

Nei paragrafi successivi, mostreremo come ad un fibrato di Serre corrisponda una *successione esatta di omotopia* (che è una successione esatta di insiemi ed una successione esatta di gruppi se si cancellano i termini relativi all'omotopia in grado zero).

1.11.2. Definizione dell'applicazione Δ . Sia ξ un fibrato di Serre. Porremo per semplicità $E = E(\xi)$, $B = B(\xi)$. Fissato un punto base b_0 di B , sia $F = p^{-1}(b_0)$ la fibra su b_0 e v_0 un punto di F , che considereremo come punto base sia di F che di E .

Indichiamo con A la frontiera dell'ipercubo I^n , privata dei punti interni della faccia $I^n \cap \{s_n = 0\}$:

$$A = (\partial I^n \cap \{s_n > 0\}) \cup \partial I^{n-1}.$$

La coppia (I^n, A) è omeomorfa alla coppia (I^n, I^{n-1}) . Quindi, per la proprietà di Serre, ogni $f \in \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; B, b_0)$ si solleva ad una $\tilde{f} \in \mathcal{C}(I^n, A; E, v_0)$, che assume il valore v_0 in tutti i punti di A . Abbiamo cioè

$$\begin{cases} \tilde{f}(s) = v_0, & \forall s \in A, \\ \pi_\xi \circ \tilde{f} = f. \end{cases}$$

Per il Teorema 1.8.11, la classe di omotopia $[\tilde{f}]_{I^{n-1}} \in \pi_{n-1}(F, v_0)$ dipende solo dalla classe di omotopia di f in $\pi_n(B, b_0)$.

Abbiamo definito in questo modo un'applicazione

$$(1.11) \quad \Delta = \Delta_n : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, v_0), \quad n \geq 1.$$

1.11.3. La successione esatta di un fibrato di Serre.

L'inclusione $\iota : F = p^{-1}(b_0) \hookrightarrow E$ e la proiezione $\pi_\xi : E \rightarrow B$ definiscono applicazioni $\iota_* : \pi_n(F, v_0) \rightarrow \pi_n(E, v_0)$ e $\pi_{\xi_*} : \pi_n(E, v_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$. Abbiamo:

TEOREMA 1.11.3. Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi_\xi} B)$ un fibrato di Serre. Allora la:

$$(1.12) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(F, v_0) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_{n+1}(E, v_0) & \xrightarrow{\pi_{\xi_*}} & \pi_{n+1}(B, b_0) \\ & \xrightarrow{\Delta} & \pi_n(F, v_0) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_n(E, v_0) & \xrightarrow{\pi_{\xi_*}} & \pi_n(B, b_0) \\ & & & & \dots\dots\dots & \longrightarrow & \pi_2(B, b_0) \\ & \xrightarrow{\Delta} & \pi_1(F, v_0) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_1(E, v_0) & \xrightarrow{\pi_{\xi_*}} & \pi_1(B, b_0) \\ & \xrightarrow{\Delta} & \pi_0(F, v_0) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_0(E, v_0) & \xrightarrow{\pi_{\xi_*}} & \pi_0(B, b_0) \end{array} \right.$$

è una successione esatta di insiemi puntati ed una successione esatta di gruppi, se si sopprime l'ultima riga della (1.12).

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che (1.12) sia un complesso di insiemi puntati e che $\pi_{\xi_*}, \iota_*, \Delta$ siano omomorfismi di gruppi quando i due insiemi tra cui agiscono hanno una struttura di gruppo, sono facili conseguenze delle definizioni. Dimostriamo l'esattezza di (1.12).

Esattezza in $\pi_n(F, v_0)$. Sia $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I}^n, \partial\mathbb{I}^n; F, v_0)$, con $\iota_*([f]) = 0$. Ciò significa che esiste un'omotopia $F : \mathbb{I}^n \times \mathbb{I} \rightarrow E$ tale che

$$\begin{cases} F(s, 0) = f(s) & \forall s \in \mathbb{I}^n, \\ F(s, t) = v_0 & \forall (s, t) \in (\partial\mathbb{I}^n) \times \mathbb{I}, \\ F(s, 1) = v_0 & \forall s \in \mathbb{I}^n. \end{cases}$$

Allora $\pi_\xi \circ \Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{I}^{n+1}, \mathbb{I}^n; B, b_0)$ ed $[f] = \Delta([\pi_\xi \circ \Phi])$.

Esattezza in $\pi_n(E, v_0)$. Sia $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{I}^n, \partial\mathbb{I}^n; E, v_0)$, con $\pi_{\xi_*}([\tilde{f}]) = 0$. Ciò significa che esiste un'omotopia $F \in \mathcal{C}(\mathbb{I}^n \times \mathbb{I}, (\partial\mathbb{I}^n) \times \mathbb{I}; B, b_0)$ tale che

$$\begin{cases} F(s, 0) = f = \pi_\xi \circ \tilde{f}(s) & \forall s \in \mathbb{I}^n, \\ F(s, t) = b_0 & \forall (s, t) \in (\partial\mathbb{I}^n) \times \mathbb{I}, \\ F(s, 1) = b_0 & \forall s \in \mathbb{I}^n. \end{cases}$$

Per la proprietà di Serre, possiamo rialzare F ad un'omotopia $\tilde{F} : \mathbb{I}^n \times \mathbb{I} \rightarrow E$ con le proprietà:

$$\begin{cases} \tilde{F}(s, 0) = \tilde{f}(s) & \forall s \in \mathbb{I}^n, \\ \tilde{F}(s, t) = v_0 & \forall (s, t) \in (\partial\mathbb{I}^n) \times \mathbb{I}, \\ \pi_\xi \circ \tilde{F}(s, t) = F(s, t) & \forall (s, t) \in \mathbb{I}^n \times \mathbb{I}. \end{cases}$$

La $g : \mathbb{I}^n \ni s \rightarrow \tilde{F}(s, 1) \in F$ è un'applicazione in $\mathcal{C}(\mathbb{I}^n, \partial\mathbb{I}^n; F, v_0)$ e $\iota_*([g]) = [f]$.

Esattezza in $\pi_n(B, b_0)$. Siano $f \in \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; B, b_0)$ ed $\tilde{f} \in \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; E, v_0)$ un suo sollevamento, con la condizione iniziale di assumere il valore costante v_0 sulle facce in ∂I^n diverse dalla faccia $\{s_n = 0\}$. La \tilde{f} soddisfa cioè le condizioni

$$\begin{cases} \tilde{f}(s', s_n) = v_0 & \forall s = (s', s_n) \in (\partial I^{n-1}) \times I, \\ \tilde{f}(s', 1) = v_0 & \forall s' \in I^{n-1}, \\ \pi_{\xi} \circ \tilde{f}(s) = f(s) & \forall s \in I^n. \end{cases}$$

Supponiamo sia $\Delta([\phi]) = 0$. Allora esiste un'omotopia $\Phi : I^{n-1} \times I \rightarrow F$ con le proprietà:

$$\begin{cases} \Phi(s', 1) = \tilde{f}(s', 0) & \forall s' \in I^{n-1}, \\ \Phi(s', t) = v_0 & \forall s' \in \partial I^{n-1}, \\ \Phi(s', 0) = v_0 & \forall s' \in I^{n-1}. \end{cases}$$

Questa omotopia ci permette di *estendere* \tilde{f} ad una $\tilde{g} \in \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; E, v_0)$, che definisce un elemento $[\tilde{g}] \in \pi_n(E, v_0)$. Definiamo infatti

$$\tilde{g}(s) = \begin{cases} \Phi(s', 2s_n) & \text{se } 0 \leq s_n \leq \frac{1}{2}, \\ f(s', 2s_n - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s_n \leq 1. \end{cases}$$

Poiché

$$g(s) = \pi_{\xi} \circ \tilde{g}(s) = \begin{cases} b_0 & \text{se } 0 \leq s_n \leq \frac{1}{2}, \\ f(s', 2s_n - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s_n \leq 1, \end{cases}$$

la f e la g definiscono lo stesso elemento di $\pi_n(B, b_0)$. Quindi $\pi_{\xi_*}([\tilde{g}]) = [g] = [\hat{b}_0 \cdot f] = [\hat{b}_0] \cdot [f] = [f]$.

La dimostrazione è completa. \square

COROLLARIO 1.11.4. Se $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ è un rivestimento, $v_0 \in E$ e $b_0 = p(v_0)$, allora $\pi_n(E, v_0) \simeq \pi_n(B, b_0)$ per ogni $n \geq 2$, e, per $n = 1$ abbiamo la successione esatta d'insiemi puntati:

$$(1.13) \quad 0 \rightarrow \pi_1(E, v_0) \xrightarrow{\pi_{\xi_*}} \pi_1(B, b_0) \longrightarrow \pi_0(F, v_0).$$

Se E è connesso per archi, allora la $\pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi_0(F, v_0)$ è surgettiva. \square

Abbiamo qui indicato con 0 l'insieme (o il gruppo) che contengono un solo elemento.

1.12. Esempi

ESEMPIO 1.12.1 (SFERE). I primi n gruppi di omotopia della sfera S^n sono

$$(1.14) \quad \pi_n(S^m, e_0) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq m - 1 \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Rappresentanti di $\pi_m(S^m, e_0)$ si possono descrivere in questo modo.

Sia $S^m = \{(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{m-1} \mid |z|^2 + \|x\|^2 = 1\}$. L'elemento corrispondente all'intero k è descritto, nelle coordinate polari della variabile complessa z , da

$$f_k(\rho \exp(it), x) = (\rho \exp(ikt), x).$$

S^1 ha come rivestimento universale la retta reale, che è contrattile, e quindi $\pi_n(S^1, e_0) = 0$ per ogni $n > 1$.

Se $m < n$, possiamo considerare la sfera S^m come il sottospazio

$$S^m = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in S^n \mid x_i = 0, \forall m < i \leq n\} \text{ di } S^n.$$

Ricordiamo che, dato uno spazio topologico X , possiamo definire la sua *sospensione* \hat{X} come il quoziente di $X \times [-1, 1]$ ottenuto identificando i punti di $X \times \{-1\}$ ad uno stesso punto \hat{x}_{-1} ed i punti di $X \times \{1\}$ ad un altro punto \hat{x}_1 . Indicheremo con \hat{x}_t il punto corrispondente ad (x, t) . La proiezione $X \times [-1, 1] \rightarrow \hat{X}$ dà per restrizione un omeomorfismo di $X \times (-1, 1)$ su un aperto denso di \hat{X} . Se su X abbiamo fissato un punto base \bar{x} , è conveniente considerare come punto base di \hat{X} il punto \hat{x}_0 . Per ogni $n \geq 0$, la sfera S^{n+1} è omeomorfa alla sospensione della sfera S^n .

Ad una qualsiasi applicazione $f \in \mathcal{C}(S^n, e_0; X, \bar{x})$ possiamo far corrispondere l'applicazione $\hat{f} \in \mathcal{C}(S^{n+1}, e_0; \hat{X}, \hat{x}_0)$ definita da

$$\hat{f}(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \hat{x}_{x_{n+1}}, \quad \text{se } f(x_0, x_1, \dots, x_n) = x.$$

La sospensione ci permette di definire, per passaggio ai quozienti, un'applicazione

$$(1.15) \quad \sigma : \pi_k(X, \bar{x}) \ni [f] \longrightarrow [\hat{f}] \in \pi_{k+1}(\hat{X}, \hat{x}_0).$$

Per le sfere, vale il fondamentale teorema:

TEOREMA 1.12.2. *L'omomorfismo di sospensione $\sigma : \pi_k(S^n, e_0) \rightarrow \pi_{k+1}(S^{n+1}, e_0)$ è un isomorfismo per $k = n \geq 1$ e per $k \leq 2(n-1)$; è surgettivo per $k = 2n-1$. \square*

Osserviamo che, a differenza di quanto avviene per la circonferenza, se $m > 1$, i gruppi $\pi_n(S^m, e_0)$ possono essere non banali per $n > m$.

Il problema di calcolare *tutti* i gruppi di omotopia di ordine $> m$ della sfera S^m , per un m arbitrario, non è ancora completamente risolto. Sono stati calcolati tutti i gruppi $\pi_n(S^m, e_0)$ per $n \leq m+30$.

Le sfere si sono rivelati, dal punto di vista della topologia, oggetti relativamente *complicati*. A titolo di esempio, riportiamo nel seguito alcuni risultati sull'omotopia delle sfere di dimensione piccola.

Abbiamo:

$$(1.16) \quad \pi_n(S^1, e_0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Riportiamo qui di seguito la tabella dei gruppi di omotopia superiore di ordine minore o uguale di 21 della sfera S^2 .

$\pi_2(S^2, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_3(S^2, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_4(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2$
$\pi_5(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_6(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_{12}$	$\pi_7(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2$
$\pi_8(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_9(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_3$	$\pi_{10}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_{15}$
$\pi_{11}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{12}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2^2$	$\pi_{13}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2^2$
$\pi_{14}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_{84} \times \mathbb{Z}_2^2$	$\pi_{15}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2^2$	$\pi_{16}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$
$\pi_{17}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\pi_{18}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\pi_{19}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3$
$\pi_{20}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3$	$\pi_{21}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3$	

Per $n \geq 3$ i gruppi di omotopia della sfera di dimensione tre sono gli stessi di quelli della sfera di dimensione due:

$$(1.17) \quad \pi_n(S^3, e_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq 2 \\ \pi_n(S^2, e_0) & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

L'uguaglianza segue qui dalla *fibrazione di Hopf*: infatti S^2 è omeomorfo alla retta proiettiva complessa $\mathbb{C}P^1$. Allora l'applicazione naturale:

$$S^3 \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \ni z \rightarrow [z] \in \mathbb{C}P^1$$

definisce un fibrato localmente banale $S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$ con fibra S^1 . Dalla successione esatta di Serre

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_n(S^1, e_0) & \longrightarrow & \pi_n(S^3, e_0) & \longrightarrow & \pi_n(S^2, e_0) \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \cdots, \end{array}$$

poiché $\pi_n(S^1, e_0) = 0$ per $n \geq 2$, otteniamo che $\pi_n(S^3, e_0) \simeq \pi_n(S^2, e_0)$ per ogni $n \geq 3$.

Analogamente, S^4 si può identificare alla retta proiettiva quaternionica $\mathbb{H}P^1$, definita da

$$\mathbb{H}P^1 = (\mathbb{H}^2 \setminus \{0\}) / \sim$$

$$\text{con } (q_1, q_2) \sim (q'_1, q'_2) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{H} \text{ tale che } q'_i = q_i \cdot q \text{ per } i = 1, 2.$$

Possiamo identificare S^7 con $\{(q_1, q_2) \in \mathbb{H}^2 \mid |q_1|^2 + |q_2|^2 = 1\}$. Otteniamo allora la *fibrazione di Hopf*

$$S^7 \ni (q_1, q_2) \rightarrow [(q_1, q_2)] \simeq S^4.$$

La sua fibra tipica è S^3 ed abbiamo perciò la successione esatta di omotopia

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_n(S^3, e_0) & \longrightarrow & \pi_n(S^7, e_0) & \longrightarrow & \pi_n(S^4, e_0) \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \cdots \end{array}$$

Per $n < 7$, abbiamo $\pi_n(S^7, e_0) = 0$ e dunque $\pi_n(S^4, e_0) \simeq \pi_{n-1}(S^3, e_0)$. Per $n = 7$, dalla successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}_2 \simeq \pi_7(S^3, e_0) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \simeq \pi_7(S^7, e_0) & \longrightarrow & \pi_7(S^4, e_0) \\ \longrightarrow & \pi_6(S^3, e_0) = \mathbb{Z}_{12} & \longrightarrow & 0 = \pi_6(S^7, e_0) \end{array}$$

ricaviamo che $\pi_7(S^4, e_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$.

OSSERVAZIONE 1.12.3. I soli gruppi $\pi_n(S^m, e_0)$ con $n > m$ che contengano infiniti elementi sono i gruppi $\pi_{4m-1}(S^{2m}, e_0)$. Ciascuno di essi è la somma diretta di \mathbb{Z} e di un gruppo finito.

Abbiamo osservato sopra che $\pi_3(S^2, e_0) = \mathbb{Z}$ e $\pi_7(S^4, e_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$. È poi, ad esempio, $\pi_{11}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}$ e $\pi_{15}(S^8, e_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{120}$.

Si può definire un omomorfismo non banale $\pi_{4m-1}(S^{2m}, e_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ nel modo seguente.

Se $f \in \mathcal{C}(S^{4m-1}, e_0; S^{2m}, e_0)$, possiamo innanzi tutto supporre, a meno di un'omotopia, che la f sia di classe \mathcal{C}^∞ . Per il lemma di Sard, possiamo poi scegliere due valori non critici distinti $a, b \in S^{2m}$ di f . Allora $M_a = f^{-1}(a)$ ed $M_b = f^{-1}(b)$ sono due sottovarietà di dimensione $(m-1)$ di

S^{4m-1} . Se \tilde{M}_b è una sottovarietà di dimensione $(2m)$ di S^{4m-1} con bordo M_b , pur di aver scelto \tilde{M}_b in modo generico, M_a intersecherà \tilde{M}_b trasversalmente in un numero finito di punti. Poiché sia M_a che \tilde{M}_b sono orientate, potremo attribuire a ciascun punto dell'intersezione un valore ± 1 a seconda che i sistemi di riferimento di S^{4m-1} che si ottengono mettendo insieme sistemi di riferimento postivamente orientati di M_a e di \tilde{M}_b siano orientati positivamente oppure negativamente. La somma algebrica di questi valori ± 1 definisce l'indice di allacciamento $\lambda(M_a, M_b)$ di M_a ed M_b . Si verifica che questa costruzione definisce un omomorfismo non banale $\pi_{4m-1}(S^{2m}, e_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ (omomorfismo di Hopf).

Abbiamo ancora una *fibrato di Hopf*

$$S^{15} \rightarrow S^8 \quad \text{con fibra } S^7.$$

Essa si ottiene come restrizione alla sfera unitaria della proiezione di \mathbb{O}^2 sulla retta proiettiva $\mathbb{O}Pr^1$, dove \mathbb{O} è l'algebra degli *ottonioni* o *ottave di Cayley* (vedi Cap. XXVII). Ricordiamo che

$$\mathbb{O} \simeq \mathbb{H}^2 \quad \text{con } (q_1, q_2) \cdot (q'_1, q'_2) = (q_1 q_2 + \bar{q}'_2 q_2, q_2 \bar{q}'_1 + q'_2 q_1).$$

Gli elementi non nulli di \mathbb{O} sono invertibili e $\mathbb{O}Pr^1$ si definisce come il quoziente di $\mathbb{O}^2 \setminus \{0\}$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica (α_1, α_2) ad (α'_1, α'_2) se esiste un ottonione non nullo γ per cui $\alpha'_i = \alpha_i \cdot \gamma$ per $i = 1, 2$. Risulta $\mathbb{O}Pr^1 \simeq S^8$ e la restrizione della proiezione sul quoziente ad

$$S^{15} = \{(q_1, q_2; q_3, q_4) \in \mathbb{H}^4 \mid |q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2 + |q_4|^2 = 1\}$$

definisce una fibrazione con fibra S^7 . Abbiamo allora la successione esatta di omotopia

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_n(S^7, e_0) & \longrightarrow & \pi_n(S^{15}, e_0) & \longrightarrow & \pi_n(S^8, e_0) \\ & & \longrightarrow & \pi_{n-1}(S^7, e_0) & \longrightarrow & \cdots & \end{array}$$

da cui otteniamo che $\pi_n(S^8, e_0) \simeq \pi_{n-1}(S^7, e_0)$ per $1 \leq n < 15$. Per $n = 15$ otteniamo $\pi_{15}(S^8, e_0) \simeq \mathbb{Z} \times \pi_{14}(S^7, e_0) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{120}$.

Riportiamo nella tabella seguente i gruppi di omotopia di ordine $m \leq n \leq 15$ delle sfere S^m per

$4 \leq m \leq 8$.

$\pi_4(S^4, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_5(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_6(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_7(S^4, e_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$
$\pi_8(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2^2$	$\pi_9(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2^2$	$\pi_{10}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	$\pi_{11}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_{15}$
$\pi_{12}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{13}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2^3$	$\pi_{14}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_{120} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$	
$\pi_{15}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_{84} \times \mathbb{Z}_2^5$			
$\pi_5(S^5, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_6(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_7(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_8(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_{24}$
$\pi_9(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{10}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{11}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{12}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_{30}$
$\pi_{13}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{14}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2^3$	$\pi_{15}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_{72} \times \mathbb{Z}_2$	
$\pi_6(S^6, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_7(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_8(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_9(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_{24}$
$\pi_{10}(S^6, e_0) = 0$	$\pi_{11}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_{12}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{13}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_{60}$
$\pi_{14}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_2$	$\pi_{15}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_2^3$		
$\pi_7(S^7, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_8(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_9(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{10}(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_{24}$
$\pi_{11}(S^7, e_0) = 0$	$\pi_{12}(S^7, e_0) = 0$	$\pi_{13}(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{14}(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_{120}$
$\pi_{15}(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_2^3$			
$\pi_8(S^8, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_9(S^8, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{10}(S^8, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{11}(S^8, e_0) = \mathbb{Z}_{24}$
$\pi_{12}(S^8, e_0) = 0$	$\pi_{13}(S^8, e_0) = 0$	$\pi_{14}(S^8, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{15}(S^8, e_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{120}$

OSSERVAZIONE 1.12.4. La tabella sopra è organizzata rispetto ai parametri n e k di $\pi_{n+k}(S^n, e_0)$ e illustra, per valori $5 \leq n \leq 8$ un fatto generale. Fissato un intero positivo k , i gruppi di omotopia $\pi_{n+k}(S^n, e_0)$, per $n \geq k+2$, sono tutti isomorfi tra loro. Il gruppo corrispondente si dice il k -esimo *gruppo di omotopia stabile* delle sfere. I gruppi $\pi_{n+k}(S^n, e_0)$ sono stati calcolati per $k \leq 64$. Indichiamo con Π_k il k -esimo gruppo di omotopia stabile delle sfere. Riportiamo nella seguente tabella i gruppi $\Pi_k \simeq \pi_{2k+2}(S^{k+2}, e_0)$ per $1 \leq k \leq 15$:

$\Pi_1 \simeq \pi_4(S^3) \simeq \mathbb{Z}_2$	$\Pi_2 \simeq \pi_6(S^4) \simeq \mathbb{Z}_2$	$\Pi_3 \simeq \pi_8(S^5) \simeq \mathbb{Z}_{24}$
$\Pi_4 \simeq \pi_{10}(S^6) = 0$	$\Pi_5 \simeq \pi_{12}(S^7) = 0$	$\Pi_6 \simeq \pi_{14}(S^8) \simeq \mathbb{Z}_2$
$\Pi_7 \simeq \pi_{16}(S^9) \simeq \mathbb{Z}_{240}$	$\Pi_8 \simeq \pi_{18}(S^{10}) \simeq \mathbb{Z}_2^2$	$\Pi_9 \simeq \pi_{20}(S^{11}) \simeq \mathbb{Z}_2^3$
$\Pi_{10} \simeq \pi_{22}(S^{12}) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$	$\Pi_{11} \simeq \pi_{24}(S^{13}) \simeq \mathbb{Z}_{540}$	$\Pi_{12} \simeq \pi_{26}(S^{14}) = 0$
$\Pi_{13} \simeq \pi_{28}(S^{15}) \simeq \mathbb{Z}_3$	$\Pi_{14} \simeq \pi_{30}(S^{16}) \simeq \mathbb{Z}_2^2$	$\Pi_{15} \simeq \pi_{32}(S^{17}) \simeq \mathbb{Z}_{480} \times \mathbb{Z}_2$

ESEMPIO 1.12.5 (SPAZI PROIETTIVI REALI). È $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \simeq S^1$ e, per ogni $m > 1$, la sfera S^m è il rivestimento universale, a due fogli, di $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$. Abbiamo perciò:

$$(1.18) \quad \begin{cases} \pi_n(\mathbb{R}\mathbb{P}^1, [e_0]) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } n \neq 1, \end{cases} \\ \pi_n(\mathbb{R}\mathbb{P}^m, [e_0]) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } 1 < n < m, \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n = m, \\ \pi_n(S^m, e_0), & \text{se } n \geq 2, \end{cases} \quad \text{se } m > 1. \end{cases}$$

ESEMPIO 1.12.6 (SPAZI PROIETTIVI COMPLESSI). L'applicazione $p : S^{2m+1} \ni z \rightarrow [z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^m$ è, per ogni $m \geq 1$, un fibrato topologico localmente banale con fibra S^1 .

Dalla successione esatta di omotopia dei fibrati ricaviamo allora:

$$(1.19) \quad \pi_n(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, [e_0]) \simeq \pi_n(\mathbb{S}^{2m+1}, e_0), \quad \forall n \geq 3.$$

Abbiamo poi la successione esatta:

$$(1.20) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \simeq & \pi_2(\mathbb{S}^{2m+1}, e_0) & \longrightarrow & \pi_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, [e_0]) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1, e_0) \\ \longrightarrow & & 0 \simeq \pi_1(\mathbb{S}^{2m+1}, e_0) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, [e_0]) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

e quindi:

$$(1.21) \quad \begin{cases} \pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, [e_0]) = 0 \\ \pi_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, [e_0]) \simeq \mathbb{Z}. \end{cases}$$

ESEMPIO 1.12.7 (SPAZI PROIETTIVI QUATERNIONI). Lo spazio proiettivo di dimensione m sui quaternioni $\mathbb{H}\mathbb{P}^m$ è definito come il quoziente di $\mathbb{H}^{m+1} \setminus \{0\}$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$(q_0, q_1, \dots, q_m) \sim (q'_0, q'_1, \dots, q'_m) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{H} \text{ tale che } q'_i = q_i \cdot q \text{ per } 0 \leq i \leq m.$$

La restrizione alla sfera $\mathbb{S}^{4m+3} = \{(q_0, q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{H}^{m+1} \mid \sum_{i=0}^m |q_i|^2 = 1\}$ della proiezione $pr : \mathbb{H}^{m+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{H}\mathbb{P}^m$ definisce una fibrazione localmente banale $\mathbb{S}^{4m+3} \rightarrow \mathbb{H}\mathbb{P}^m$, con fibra \mathbb{S}^3 . Otteniamo perciò la successione esatta di omotopia

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_n(\mathbb{S}^3, e_0) & \longrightarrow & \pi_n(\mathbb{S}^{4m+3}, e_0) & \longrightarrow & \pi_n(\mathbb{H}\mathbb{P}^m, [e_0]) \\ & & \longrightarrow & & \pi_{n-1}(\mathbb{S}^3, e_0) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Poiché $\pi_n(\mathbb{S}^{4m+3}, e_0) = 0$ per $n < 4m+3$, otteniamo che $\pi_n(\mathbb{H}\mathbb{P}^m, [e_0]) \simeq \pi_{n-1}(\mathbb{S}^3, e_0)$ se $n < 4m+3$. Abbiamo poi $\pi_{4m+3}(\mathbb{H}\mathbb{P}^m, [e_0]) \simeq \mathbb{Z} \times \pi_{4m+2}(\mathbb{S}^3, e_0)$ se $m \geq 1$.

ESEMPIO 1.12.8 (LENTI). Fissiamo una $(n+1)$ -upla (m, m_1, \dots, m_n) , con m intero positivo ed m_1, \dots, m_n interi relativamente primi con m . Sia $\mathbb{S}^{2n-1} = \{(z_1, \dots, z_n) \mid \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1\}$ la sfera unitaria di \mathbb{C}^n e consideriamo l'applicazione

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{S}^{2n-1} \ni (k, z_1, \dots, z_n) \rightarrow (z_1 e^{2k\pi i m_1/m}, \dots, z_n e^{2k\pi i m_n/m}) \in \mathbb{S}^{2n-1}.$$

Per passaggio al quoziente essa definisce un'azione su \mathbb{S}^{2n-1} del gruppo abeliano \mathbb{Z}_m . Il quoziente $\mathbb{S}^{2n-1}/\mathbb{Z}_m$ si dice una *lente* e si indica con $L(m; m_1, \dots, m_n)$. La proiezione nel quoziente $p : \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow L(m; m_1, \dots, m_n)$ è un rivestimento connesso ad m fogli. Il gruppo fondamentale di $L(m; m_1, \dots, m_n)$ è isomorfo a \mathbb{Z}_m , mentre i gruppi di omotopia d'ordine superiore sono isomorfi a quelli della sfera \mathbb{S}^{2m-1} .

CAPITOLO II

Fibrati topologici con strutture di gruppo

I fibrati che si considerano più spesso sono dotati, oltre alla struttura topologica, di strutture aggiuntive: le fibre possono essere ad esempio spazi vettoriali, su cui, eventualmente, può essere definita una struttura euclidea o hermitiana o симпlettica. Si caratterizzano cioè per l'azione sullo spazio totale di un gruppo che ne preserva le fibre.

2.1. Azioni di gruppo

Siano \mathbf{G} un gruppo ed F un insieme.

DEFINIZIONE 2.1.1. Un'azione a sinistra di \mathbf{G} su F è un'applicazione

$$(2.1) \quad \mathbf{G} \times F \ni (x, v) \longrightarrow x \cdot v \in F$$

tale che

$$e \cdot v = v, \quad x_1 \cdot (x_2 \cdot v) = (x_1 x_2) \cdot v, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}, \quad \forall v \in F.$$

In modo analogo si definisce un'azione a destra di \mathbf{G} su F come un'applicazione

$$(2.2) \quad F \times \mathbf{G} \ni (v, x) \longrightarrow v \cdot x \in F$$

tale che

$$v \cdot e = v, \quad (v \cdot x_1) \cdot x_2 = v \cdot (x_1 x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}, \quad \forall v \in F.$$

Se (2.1) è un'azione a sinistra, la

$$(2.3) \quad F \times \mathbf{G} \ni (v, x) \longrightarrow x^{-1} \cdot v \in F$$

è un'azione a destra e, se (2.2) è un'azione a destra, la

$$(2.4) \quad \mathbf{G} \times F \ni (x, v) \longrightarrow v \cdot x^{-1} \in F$$

un'azione a sinistra. Non sarà quindi restrittivo limitarsi, in una trattazione generale delle azioni di gruppo, a considerare soltanto quelle a sinistra.

Fissata un'azione a sinistra (2.1), associamo all'elemento x di \mathbf{G} l'applicazione (*traslazione*)

$$(2.5) \quad \rho_x : F \ni v \longrightarrow x \cdot v \in F.$$

Dalle relazioni che caratterizzano l'azione di gruppo segue che

$$\rho_e = \text{id}_F, \quad \rho_{x_1 x_2} = \rho_{x_1} \circ \rho_{x_2}, \quad \rho_{x^{-1}} = \rho_x^{-1}, \quad \forall x, x_1, x_2, g \in \mathbf{G}.$$

Quindi la

$$(2.6) \quad \rho : \mathbf{G} \ni x \longrightarrow \rho_x \in \mathbf{S}(F)$$

è un omomorfismo di \mathbf{G} nel gruppo $\mathbf{S}(F)$ delle permutazioni degli elementi di F e, viceversa, ogni omomorfismo (2.6) definisce un'azione a sinistra di \mathbf{G} su F mediante

$$(2.7) \quad \mathbf{G} \times F \ni (x, v) \longrightarrow \rho_x(v) \in F.$$

DEFINIZIONE 2.1.2. L'omomorfismo ρ per cui valgano le (2.5), (2.7) si dice *associato* all'azione (2.1).

OSSERVAZIONE 2.1.3. L'applicazione $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{S}(F)$ definita da $\rho_x(v) = v \cdot x$, associata ad un'azione a destra (2.2), è un *antiomorfismo di gruppi*; soddisfa cioè la $\rho_{x_1 x_2} = \rho_{x_2} \circ \rho_{x_1}$ per ogni $x_1, x_2 \in \mathbf{G}$.

DEFINIZIONE 2.1.4. Chiamiamo $\ker(\rho)$ il *nucleo d'infedeltà dell'azione* (2.1). Se ρ è iniettivo diciamo che l'azione (2.1) è *fedele* (o *effettiva*).

DEFINIZIONE 2.1.5. L'*orbita* di un punto $v \in F$ (per l'azione di \mathbf{G}) è il sottoinsieme $\mathbf{G}v = \{x \cdot v \mid x \in \mathbf{G}\}$ di F .

Le orbite degli elementi di F definiscono una partizione di F e quindi la relazione di appartenere alla stessa orbita è una relazione di equivalenza. Il quoziente corrispondente si indica con F/\mathbf{G} e si dice *spazio delle orbite*.

Se $\mathbf{G}v = F$ per uno, e quindi per tutti gli elementi v di F , diciamo che l'azione di \mathbf{G} è *transitiva*.

Un'azione transitiva e fedele si dice *semplicemente transitiva*.

OSSERVAZIONE 2.1.6. Il nucleo d'infedeltà $\mathbf{K} = \ker(\rho)$ dell'azione (2.1) è un sottogruppo normale di \mathbf{G} . Sia $v \in F$; poiché $x_1 \cdot v = x_2 \cdot v$ se $x_1^{-1}x_2 \in \mathbf{K}$, l'elemento $x \cdot v$ dipende solo dalla classe di equivalenza di x in \mathbf{G}/\mathbf{K} . Possiamo quindi far corrispondere all'azione di \mathbf{G} su F un'azione fedele di \mathbf{G}/\mathbf{K} su F e, viceversa, ogni azione di \mathbf{G}/\mathbf{K} su F determina un'azione di \mathbf{G} su F il cui nucleo d'infedeltà contiene \mathbf{K} , dimodoché $[x] \cdot v = x \cdot v$ per ogni $x \in \mathbf{G}$ e $v \in F$ (abbiamo indicato con $[x]$ la classe laterale di x in \mathbf{G}/\mathbf{K}).

OSSERVAZIONE 2.1.7. Diciamo che l'azione di \mathbf{G} su F è *n-transitiva* se, date due *n*-uple di punti distinti (v_1, \dots, v_n) e (w_1, \dots, w_n) di F vi è un elemento x di \mathbf{G} tale che $x \cdot v_i = w_i$ per $1 \leq i \leq n$.

L'azione si dice *primitiva* se è transitiva e non preserva nessuna partizione non banale di F .

Un'azione doppiamente transitiva è necessariamente primitiva, ma non vale il viceversa. Ad esempio, il gruppo delle rotazioni piane intorno all'origine agisce sulla circonferenza in modo primitivo, ma non doppiamente transitivo.

OSSERVAZIONE 2.1.8. Sia (2.1) un'azione di gruppo. Se \mathbf{H} è un altro gruppo e $\phi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}$ un omomorfismo di gruppi, allora anche la

$$(2.8) \quad \mathbf{H} \times F \ni (h, v) \longrightarrow \phi(h) \cdot v \in F$$

è un'azione di gruppo. Se ϕ è iniettiva e (2.1) fedele, allora anche (2.8) è fedele. Se ϕ è surgettiva e (2.1) transitiva, allora anche (2.8) è transitiva.

Se \mathbf{H} è un sottogruppo di \mathbf{G} e ϕ l'inclusione, allora diciamo che la (2.8) è una *restrizione* ad \mathbf{H} di (2.1) e che (2.1) è un'*estensione* a \mathbf{G} di (2.8).

DEFINIZIONE 2.1.9. Un sottoinsieme E di F è *invariante* per l'azione di \mathbf{G} se $x \cdot v \in E$ per ogni $v \in E$. In questo caso la

$$\mathbf{G} \times E \ni (x, v) \longrightarrow x \cdot v \in E$$

è ancora un'azione di gruppo.

OSSERVAZIONE 2.1.10. Se \mathbf{G}_i sono gruppi, F_i insiemi, e

$$\mathbf{G}_i \times F_i \ni (x_i, v_i) \rightarrow x_i \cdot v_i \in F_i$$

azioni di gruppi (a sinistra), per i che varia in un insieme I di indici, allora anche

$$\left(\prod_{i \in I} \mathbf{G}_i \right) \times \left(\prod_{i \in I} F_i \right) \ni ((x_i), (v_i)) \longrightarrow (x_i \cdot v_i) \in \prod_{i \in I} F_i$$

è un'azione di gruppo (a sinistra). Se tutte le azioni sono fedeli anche il loro prodotto è fedele e se tutte sono transitive anche il loro prodotto è transitivo.

DEFINIZIONE 2.1.11. Chiamiamo *\mathbf{G} -insieme* un insieme F su cui sia assegnata un'azione del gruppo \mathbf{G} .

Se F_1, F_2 sono due \mathbf{G} -insiemi, una *\mathbf{G} -applicazione*, o *applicazione \mathbf{G} -equivariante* di F_1 in F_2 , è un'applicazione $f : F_1 \rightarrow F_2$ che commuti con l'azione di \mathbf{G} , cioè tale che

$$f(x \cdot v) = x \cdot f(v), \quad \forall x \in \mathbf{G}, \forall v \in F_1.$$

Più in generale, se F_i è un \mathbf{G}_i -spazio, per $i = 1, 2$ e $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ un omomorfismo di gruppi, una *ϕ -applicazione* di F_1 in F_2 è una $f : F_1 \rightarrow F_2$ con

$$f(x \cdot v) = \phi(x) \cdot f(v), \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{G}_1 \text{ e } v \in F_1.$$

DEFINIZIONE 2.1.12. Due azioni dello stesso gruppo \mathbf{G} su due insiemi F_1, F_2 si dicono *equivalenti* se esiste una \mathbf{G} -applicazione bigettiva $f : F_1 \rightarrow F_2$.

DEFINIZIONE 2.1.13. Se F è uno spazio topologico e le ρ_x corrispondenti all'azione (2.1) di \mathbf{G} su F sono degli omeomorfismi, diciamo che \mathbf{G} opera su F *mediante omeomorfismi*.

Se F è una varietà differenziabile e le ρ_x corrispondenti all'azione (2.1) di \mathbf{G} su F sono dei diffeomorfismi, diciamo che \mathbf{G} opera su F *mediante diffeomorfismi*.

Se F ha una struttura algebrica (di gruppo, di anello, di algebra ...) e le ρ_x corrispondenti all'azione (2.1) di \mathbf{G} su F sono automorfismi, diciamo che \mathbf{G} opera su F *mediante automorfismi*.

Nel caso di un'azione fedele, parleremo ancora di *gruppo di omeomorfismi*, di *diffeomorfismi* o di *automorfismi*, rispettivamente.

ESEMPIO 2.1.14. Se \mathbf{G} è un gruppo, le traslazioni a destra $(x, h) \rightarrow L_x h = xh$ e l'aggiunta $(x, h) \rightarrow \text{ad}(x)h = xhx^{-1}$ sono azioni a sinistra di \mathbf{G} su \mathbf{G} , che si dicono, rispettivamente, *azione canonica a sinistra* ed *azione aggiunta, o interna*. La traslazione a destra $(h, x) \rightarrow R_x h = hx$ è un'azione a destra, che si dice *azione canonica a destra*.

ESEMPIO 2.1.15. Sia \mathbf{H} un sottogruppo del gruppo \mathbf{G} . La restrizione ad \mathbf{H} dell'azione canonica a destra definisce un'azione di \mathbf{H} su \mathbf{G} le cui orbite formano lo spazio quoziente $F = \mathbf{G}/\mathbf{H}$. Poiché l'azione canonica a sinistra di \mathbf{G} opera sulle classi laterali sinistre di \mathbf{H} , risulta definita un'azione a sinistra canonica di \mathbf{G} su F .

DEFINIZIONE 2.1.16. Fissiamo un'azione di gruppo (2.1). Se $v_0 \in F$, l'insieme

$$(2.9) \quad \mathbf{G}_{v_0} = \{x \in \mathbf{G} \mid x \cdot v_0 = v_0\}$$

è un sottogruppo di \mathbf{G} , che si dice lo *stabilizzatore* (o *sottogruppo di stabilità*) di v_0 .

Se $v_0, v_1 \in F$, $a \in \mathbf{G}$, e $v_1 = a \cdot v_0$, allora

$$x \in \mathbf{G}_{v_1} \iff x \cdot a \cdot v_0 = a \cdot v_0 \iff a^{-1}xa \cdot v_0 = v_0 \iff a^{-1}xa \in \mathbf{G}_{v_0}$$

e quindi

$$\mathbf{G}_{v_1} = \mathbf{G}_{a \cdot v_0} = a\mathbf{G}_{v_0}a^{-1} = \text{ad}(a)(\mathbf{G}_{v_0}).$$

In particolare

LEMMA 2.1.17. *Se l'azione (2.1) di \mathbf{G} su F è transitiva, allora gli stabilizzatori dei diversi punti di F sono coniugati tra loro.* \square

PROPOSIZIONE 2.1.18. *Ogni azione transitiva di un gruppo è equivalente alla sua azione canonica su un suo quoziente.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che il gruppo \mathbf{G} agisca transitivamente su un insieme F . Fissiamo un qualsiasi punto v_0 di F e sia \mathbf{G}_{v_0} il suo stabilizzatore.

L'applicazione $\mathbf{G} \ni x \rightarrow x \cdot v_0 \in F$ definisce per passaggio al quoziente un'applicazione $f : \mathbf{G}/\mathbf{G}_{v_0} \rightarrow F$. Infatti abbiamo

$$x_1^{-1}x_2 \in \mathbf{G}_{v_0} \iff x_1^{-1}x_2 \cdot v_0 = v_0 \iff x_2 \cdot v_0 = x_1 \cdot v_0.$$

Queste equivalenze dimostrano che la f è ben definita ed iniettiva. Essa è anche bigettiva perché abbiamo supposto che l'azione fosse transitiva. Poiché $f(x \cdot [h]) = f([xh]) = xh \cdot v_0 = x \cdot (h \cdot v_0) = x \cdot f([h])$ (al solito indichiamo con $[h]$ la classe di equivalenza di $h \in \mathbf{G}$ in \mathbf{G}/\mathbf{H}), la f è una \mathbf{G} -applicazione e quindi, essendo invertibile, una \mathbf{G} -equivalenza. \square

2.2. Gruppi topologici

DEFINIZIONE 2.2.1. Una topologia τ su un gruppo \mathbf{G} si dice *compatibile con la struttura di gruppo* se l'applicazione

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g_1, g_2) \rightarrow g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{G}$$

è continua (per la topologia prodotto su $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$).

Ciò equivale al fatto che siano continue le due applicazioni

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g_1, g_2) \rightarrow g_1g_2 \in \mathbf{G} \quad \text{e} \quad \mathbf{G} \ni g \rightarrow g^{-1} \in \mathbf{G}.$$

Un *gruppo topologico* è un gruppo \mathbf{G}

su cui si sia fissata una topologia τ compatibile con la sua struttura di gruppo.

LEMMA 2.2.2. *Se \mathbf{G} è un gruppo topologico, allora per ogni $a \in \mathbf{G}$ le applicazioni R_a, L_a, ad_a sono omeomorfismi di \mathbf{G} in sè. Se $\{e\}$ è chiuso, allora il centro $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) = \{x \in \mathbf{G} \mid xg = gx, \forall g \in \mathbf{G}\}$ è chiuso in \mathbf{G} . Se \mathbf{H} è un sottogruppo di \mathbf{G} , esso è un gruppo topologico con la topologia di sottospazio indotta da \mathbf{G} .* \square

OSSERVAZIONE 2.2.3. La topologia discreta e la topologia indiscreta sono entrambe compatibili con la struttura di gruppo di un qualsiasi gruppo \mathbf{G} . Quindi ogni gruppo può essere considerato come gruppo topologico.

2.2.1. Gruppo degli omeomorfismi. L'insieme $\mathbf{S}_\tau(X)$ di tutti gli omeomorfismi di uno spazio topologico $X = (X, \tau_X)$ in sè è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni. Consideriamo su $\mathbf{S}_\tau(X)$ la topologia $\tilde{\tau}_X$ che ha come prebase¹ \mathcal{U} degli aperti gli insiemi

$$\begin{aligned} U(K, A) &= \{\phi \in \mathbf{S}_\tau(X) \mid \phi(K) \subset A\} \quad e \\ U^{-1}(K, A) &= \{\phi \in \mathbf{S}_\tau(X) \mid \phi^{-1}(K) \subset A\} \end{aligned}$$

al variare di K tra i compatti e di A tra gli aperti di X .

Si ottiene una prebase della stessa topologia di $\mathbf{S}_\tau(X)$ se si fa variare A in una prebase degli aperti di X .

TEOREMA 2.2.4. *Se X è uno spazio di Hausdorff localmente compatto, allora $\mathbf{S}_\tau(X)$, con la topologia $\tilde{\tau}_X$, è un gruppo topologico.*

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente la $\mathbf{S}_\tau(X) \ni \phi \rightarrow \phi^{-1} \in \mathbf{S}_\tau(X)$ è continua perché scambia tra loro gli aperti $U(K, A)$ e $U^{-1}(K, A)$ della prebase \mathcal{U} .

Dimostriamo che anche la

$$\lambda : \mathbf{S}_\tau(X) \times \mathbf{S}_\tau(X) \ni (\phi, \psi) \rightarrow \phi \circ \psi \in \mathbf{S}_\tau(X)$$

è continua. Siano K un compatto, A un aperto di X e ϕ_0, ψ_0 due omeomorfismi in $\mathbf{S}_\tau(X)$ tali che $\phi_0(\psi_0(K)) \subset A$.

Poiché $\psi_0(K)$ è un compatto di X contenuto in A , possiamo trovare un intorno aperto relativamente compatto V di $\psi_0(K)$ tale che

$$\psi_0(K) \subset V \subset \bar{V} \Subset A.$$

Allora, se $\psi \in U(K, V)$ e $\phi \in U(\bar{V}, A)$, abbiamo $\phi \circ \psi(K) \subset A$.

Quindi $\lambda^{-1}(U(K, A)) \supset U(\bar{V}, A) \times U(K, V) \ni (\phi_0, \psi_0)$ è un intorno aperto di ogni suo punto e quindi un aperto.

In modo analogo, se $(\phi_0 \circ \psi_0)^{-1}(K) \subset A$, scegliamo un intorno aperto V del compatto $\phi_0^{-1}(K)$ con

$$\phi_0^{-1}(K) \subset V \subset \bar{V} \Subset A.$$

Allora $\lambda^{-1}(U^{-1}(K, A)) \supset U^{-1}(K, V) \times U^{-1}(\bar{V}, A) \ni (\phi_0, \psi_0)$ dimostra che l'insieme $\lambda^{-1}(U^{-1}(K, A))$ è intorno di ogni suo punto e quindi aperto.

Pertanto λ è continua. □

TEOREMA 2.2.5. *Se $X = (X, \tau_X)$ è uno spazio di Hausdorff localmente compatto e localmente connesso, allora la topologia $\tilde{\tau}_X$ su $\mathbf{S}_\tau(X)$ coincide con la topologia compatta-aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Sarà sufficiente dimostrare che, se K è un compatto ed A un aperto di X , l'insieme $U^{-1}(K, A)$ è aperto nella topologia compatta-aperta di $\mathbf{S}_\tau(X)$. Poiché per ipotesi gli aperti relativamente compatti di X formano una base di τ_X , possiamo limitarci a considerare il caso in cui A sia relativamente compatto in

¹Data una famiglia \mathcal{U} di sottoinsiemi di un insieme Y , è univocamente determinata la topologia $\tau(\mathcal{U})$ su Y , meno fine tra tutte quelle per cui tutti i sottoinsiemi di \mathcal{U} siano aperti. Se su Y è assegnata una topologia τ , diciamo che la famiglia \mathcal{U} di sottoinsiemi di Y è una *prebase* della τ se $\tau(\mathcal{U}) = \tau$.

X . Possiamo inoltre supporre che K abbia parte interna non vuota e connessa. Infatti, fissato ϕ_0 in $U^{-1}(K, A)$, possiamo trovare un ricoprimento finito $\{U_1, \dots, U_n\}$ di K mediante aperti connessi e relativamente compatti con $\phi_0^{-1}(\bar{U}_j) \subset A$ per ogni $j = 1, \dots, n$. Allora

$$\phi_0 \in \bigcap_{j=1}^n U^{-1}(\bar{U}_j, A) \subset U^{-1}(K, A)$$

è sar  allora sufficiente verificare che ciascuno degli insiemi $U^{-1}(\bar{U}_j, A)$ sia aperto in $S_\tau(X)$ per la topologia compatta-aperta.

Supponiamo quindi che A sia un aperto relativamente compatto di X e K un compatto di X con parte interna connessa.

Sia ϕ_0 un elemento di $U^{-1}(K, A)$; fissiamo un punto $x_0 \in A$ la cui immagine $\phi_0(x_0)$ sia un punto interno di K , e consideriamo l'aperto

$$W = U(\{x_0\}, \text{int } K) \cap U(\bar{A} \cap \complement A, \complement K)$$

della topologia compatta-aperta di $S_\tau(X)$. L'immagine della frontiera $bA = \bar{A} \cap \complement A$ dell'aperto A mediante un omeomorfismo ϕ di W non interseca il compatto K ; quindi $\phi^{-1}(K) \subset A \cup \complement \bar{A}$.

Osserviamo che K   connesso perch  ha parte interna connessa. Essendo connesso, $\phi^{-1}(K)$   contenuto o in A o nel complementare $\complement \bar{A}$ della sua chiusura. Poich  $\phi \in U(\{x_0\}, \text{int } K)$, otteniamo $\phi^{-1}(x_0) \in \phi^{-1}(K) \cap A$ e dunque $\phi^{-1}(K) \subset A$. Ci  dimostra che $W \subset U^{-1}(K, A)$. Abbiamo verificato in questo modo che $U^{-1}(K, A)$   intorno di ogni suo punto e quindi aperto nella topologia compatta-aperta di $S_\tau(X)$. \square

2.2.2. Alcune propriet  generali.

TEOREMA 2.2.6. *La componente connessa \mathbf{G}_e dell'identit  in un gruppo topologico \mathbf{G}   un sottogruppo chiuso normale di \mathbf{G} . Analogamente, la componente connessa per archi dell'identit    un sottogruppo normale di \mathbf{G} .*

DIMOSTRAZIONE. L'immagine di $\mathbf{G}_e \times \mathbf{G}_e$ mediante l'applicazione

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g, h) \rightarrow gh^{-1} \in \mathbf{G}$$

  un connesso di \mathbf{G} che contiene e e dunque   contenuta in \mathbf{G}_e . Ci  dimostra che \mathbf{G}_e   un sottogruppo di \mathbf{G} . Se $a \in \mathbf{G}$, allora l'immagine di \mathbf{G}_e mediante $\text{ad}(a)$   un connesso di \mathbf{G} che contiene e ed   dunque contenuta in \mathbf{G}_e . Ci  dimostra che \mathbf{G}_e   un sottogruppo normale.

La seconda affermazione del teorema si dimostra in modo analogo, in quanto immagini continue di sottoinsiemi connessi per archi sono ancora connesse per archi. \square

TEOREMA 2.2.7. *Un sottogruppo aperto \mathbf{H} di \mathbf{G}   anche chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Se \mathbf{H}   un sottogruppo aperto di \mathbf{G} , allora il suo complementare $\complement \mathbf{H}$   aperto in \mathbf{G} perch  unione di aperti:

$$\complement \mathbf{H} = \bigcup \{R_g(\mathbf{H}) \mid g \notin \mathbf{H}\}. \quad \square$$

DEFINIZIONE 2.2.8. Dato un sottogruppo \mathbf{H} di un gruppo \mathbf{G} , indichiamo con \mathbf{G}/\mathbf{H} l'insieme delle sue classi laterali sinistre ²:

$$\mathbf{G}/\mathbf{H} = \{g\mathbf{H} \mid g \in \mathbf{G}\}.$$

Esso è il quoziente di \mathbf{G} rispetto alla relazione di equivalenza

$$g_1 \sim g_2 \iff g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{H}.$$

Se \mathbf{G} è un gruppo topologico, consideriamo su \mathbf{G}/\mathbf{H} la topologia quoziente.

TEOREMA 2.2.9. *Siano \mathbf{G} un gruppo topologico ed \mathbf{H} un suo sottogruppo. La proiezione nel quoziente $\pi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}$ è un'applicazione aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Se A è un aperto di \mathbf{G} , allora

$$\pi^{-1}\pi(A) = \bigcup \{R_h(A) \mid h \in \mathbf{H}\}$$

è aperto perché unione di aperti. \square

TEOREMA 2.2.10. *Siano \mathbf{G} un gruppo topologico ed \mathbf{H} suo sottogruppo. La chiusura $\overline{\mathbf{H}}$ di \mathbf{H} è ancora un sottogruppo di \mathbf{G} . Se \mathbf{H} è normale in \mathbf{G} , anche la sua chiusura $\overline{\mathbf{H}}$ è normale in \mathbf{G} .*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con r l'applicazione $r : \mathbf{G} \ni g \rightarrow g^{-1} \in \mathbf{G}$ che ad ogni elemento di \mathbf{G} fa corrispondere il suo inverso. La r è un omeomorfismo e quindi $r(\overline{A}) = \overline{r(A)}$ per ogni sottoinsieme A di \mathbf{G} . Se \mathbf{H} è un sottogruppo di \mathbf{G} , $r(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ ed otteniamo:

$$r(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{r(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}}.$$

Analogamente, poiché per ogni $g \in \mathbf{G}$ le applicazioni L_g ed R_g sono omeomorfismi, abbiamo $L_g(\overline{A}) = \overline{L_g(A)}$ e $R_g(\overline{A}) = \overline{R_g(A)}$ per ogni sottoinsieme A di \mathbf{G} . Se $g \in \mathbf{H}$, poiché $L_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ e $R_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$, avremo:

$$L_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{L_g(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}}, \quad R_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{R_g(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}} \quad \forall g \in \mathbf{H}.$$

Queste relazioni implicano che

$$R_g(\mathbf{H}) \subset \overline{\mathbf{H}}, \quad L_g(\mathbf{H}) \subset \overline{\mathbf{H}} \quad \forall g \in \overline{\mathbf{H}},$$

e pertanto, passando alle chiusure,

$$L_g(\overline{\mathbf{H}}) = R_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{\mathbf{H}} \quad \forall g \in \overline{\mathbf{H}}.$$

Quindi $\overline{\mathbf{H}}$ è un sottogruppo di \mathbf{G} .

²Si possono in modo analogo considerare le classi laterali destre $\mathbf{H}\backslash\mathbf{G} = \{\mathbf{H}g \mid g \in \mathbf{G}\}$. Indicando con $r : \mathbf{G} \ni x \rightarrow x^{-1} \in \mathbf{G}$ l'inversione, abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \xrightarrow{r} & \mathbf{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}\backslash\mathbf{G} & \xrightarrow{\hat{r}} & \mathbf{G}/\mathbf{H} \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono le proiezioni nel quoziente. La \hat{r} è bigettiva e, nel caso in cui \mathbf{G} sia un gruppo topologico, un omeomorfismo. Potremo quindi nella discussione seguente limitarci a considerare soltanto classi laterali sinistre, poiché i risultati ottenuti si applicheranno automaticamente anche alle classi laterali destre.

Poiché ad_g è, per ogni $g \in \mathbf{G}$ un omeomorfismo di \mathbf{G} in sè, abbiamo $\text{ad}_g(\overline{\mathbf{A}}) = \overline{\text{ad}_g(\mathbf{A})}$ per ogni sottoinsieme \mathbf{A} di \mathbf{G} . Dire che \mathbf{H} è un sottogruppo normale di \mathbf{G} equivale al fatto che $\text{ad}_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ per ogni $g \in \mathbf{G}$. Se quindi \mathbf{H} è normale, risulta:

$$\text{ad}_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{\text{ad}_g(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}} \quad \forall g \in \mathbf{G}$$

e questa uguaglianza dimostra che anche $\overline{\mathbf{H}}$ è normale. \square

TEOREMA 2.2.11. *Se \mathbf{H} è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico \mathbf{G} , allora \mathbf{G}/\mathbf{H} è uno spazio regolare. In particolare, \mathbf{G} è uno spazio regolare se e soltanto se è uno spazio ³T₁ e ciò equivale al fatto che $\{e\}$ sia chiuso in \mathbf{G} .*

DIMOSTRAZIONE. Se \mathbf{H} è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico \mathbf{G} , allora tutte le sue classi laterali sinistre sono chiusi di \mathbf{G} e quindi \mathbf{G}/\mathbf{H} è uno spazio topologico T₁.

Siano F un chiuso di \mathbf{G}/\mathbf{H} e g un elemento di \mathbf{G} tale che $\pi(g) \notin F$. Consideriamo l'applicazione continua $\lambda : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (a, b) \rightarrow a^{-1}b \in \mathbf{G}$.

Poiché $\pi^{-1}(F)$ è un chiuso che non contiene $\lambda(e, g)$, possiamo trovare un intorno aperto U_e di e ed un intorno aperto U_g di g in \mathbf{G} tali che

$$g_1^{-1}g_2 \notin \pi^{-1}(F), \quad \text{per ogni } g_1 \in U_e, g_2 \in U_g.$$

Consideriamo gli insiemi:

$$\tilde{U}_g = \pi^{-1}(\pi(U_g)) \text{ e } \tilde{V} = \bigcup \{R_a(U_e) \mid a \in \pi^{-1}(F)\} = \bigcup \{L_a(\pi^{-1}(F)) \mid a \in U_e\}.$$

Poiché π è aperta, il primo è un aperto saturo che contiene g , il secondo un aperto saturo che contiene $\pi^{-1}(F)$. Dimostriamo che $\tilde{U}_g \cap \tilde{V} = \emptyset$. Se così non fosse, potremmo trovare $g_1 \in U_g, g_2 \in \mathbf{H}, g_3 \in U_e, g_4 \in \pi^{-1}(F)$ tali che $g_1g_2 = g_3g_4$.

Ma questa relazione implicherebbe che $g_3^{-1}g_1 = g_4g_2^{-1} \in \pi^{-1}(F)$, contraddicendo la scelta di U_e e U_g .

Ciò dimostra che \mathbf{G}/\mathbf{H} soddisfa anche l'assioma T₃ e quindi è regolare. \square

DEFINIZIONE 2.2.12. Un gruppo topologico \mathbf{G} in cui $\{e\}$ sia un sottoinsieme chiuso si dice *separato*. Per il teorema precedente, questa condizione equivale al fatto che \mathbf{G} sia uno spazio topologico regolare.

Se \mathbf{G} è un gruppo topologico, per il Teorema 2.2.10, la chiusura $\overline{\{e\}}$ di $\{e\}$ è un sottogruppo chiuso normale di \mathbf{G} e quindi $\mathbf{G}/\overline{\{e\}}$, con la topologia quoziente, è un gruppo topologico separato. Esso si dice il *separato* di \mathbf{G} e si indica con \mathbf{G}_{sep} .

TEOREMA 2.2.13. *Se \mathbf{G} è un gruppo topologico separato, allora la chiusura di un suo sottogruppo abeliano è ancora un sottogruppo abeliano.*

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathbf{A} un sottogruppo abeliano di \mathbf{G} . Fissato un elemento a di \mathbf{G} l'applicazione $f_a : \mathbf{G} \ni x \rightarrow [a, x] = axa^{-1}x^{-1} \in \mathbf{G}$ è continua. Inoltre, $f_a(\mathbf{A}) = \{e\}$, per ogni $a \in \mathbf{A}$, perché \mathbf{A} è abeliano. Per l'ipotesi che $\{e\}$ sia chiuso,

³Uno spazio topologico X soddisfa l'assioma di separazione T₁ se tutti i suoi sottoinsiemi finiti sono chiusi; soddisfa l'assioma di separazione T₃ se dati un punto a ed un chiuso A di X che non contenga a , esistono aperti disgiunti U e V con $a \in U$ e $A \subset V$; è regolare se soddisfa entrambi gli assiomi T₁ e T₃.

$f_a^{-1}(e)$ è un chiuso che contiene \mathbf{A} . Quindi $ax = xa$ per ogni $x \in \overline{\mathbf{A}}$ ed ogni $a \in \mathbf{A}$, ma questo equivale al fatto che $f_a(x) = e$ per ogni $a \in \overline{\mathbf{A}}$ ed ogni $x \in \mathbf{A}$. Poiché $\{e\}$ è un chiuso di \mathbf{G} , per ogni $a \in \overline{\mathbf{A}}$, l'insieme $f_a^{-1}(e)$ è un chiuso che contiene \mathbf{A} : perciò $f_a^{-1}(e) \supset \overline{\mathbf{A}}$ per ogni $a \in \overline{\mathbf{A}}$, cioè $\overline{\mathbf{A}}$ è abeliano. \square

Più in generale, abbiamo:

PROPOSIZIONE 2.2.14. *Se \mathbf{G} è un gruppo separato ed E un sottoinsieme di \mathbf{G} , il centralizzatore*

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(E) = \{g \in \mathbf{G} \mid \text{ad}_g(x) = x, \forall x \in E\}$$

di E in \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di \mathbf{G} .

DIMOSTRAZIONE. Infatti, con la notazione del teorema precedente:

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(E) = \bigcap_{x \in E} f_x^{-1}(e)$$

è chiuso perché intersezione di chiusi. \square

PROPOSIZIONE 2.2.15. *Se \mathbf{H} è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico \mathbf{G} , allora il normalizzatore di \mathbf{H} in \mathbf{G}*

$$\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}) = \{g \in \mathbf{G} \mid \text{ad}_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}\}$$

è un sottogruppo chiuso di \mathbf{G} .

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $g \in \mathbf{G}$ l'applicazione $\lambda_g : \mathbf{G} \ni x \rightarrow xgx^{-1} \in \mathbf{G}$ è continua. Quindi il normalizzatore $\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}) = \bigcap_{h \in \mathbf{H}} \lambda_h^{-1}(\mathbf{H})$ è chiuso perché intersezione di chiusi. \square

PROPOSIZIONE 2.2.16. *Sia \mathbf{H} un sottogruppo di un gruppo topologico \mathbf{G} . Allora:*

- (1) \mathbf{H} è chiuso se e soltanto se è localmente chiuso in un punto;
- (2) \mathbf{H} è aperto se e soltanto se contiene un punto interno;
- (3) \mathbf{H} è discreto se e soltanto se ha un punto isolato.

Un sottogruppo discreto di un gruppo separato è chiuso.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che \mathbf{H} è localmente chiuso in un suo punto h se esiste un intorno aperto U di h in \mathbf{G} tale che $\mathbf{H} \cap U$ sia chiuso in U , cioè $\overline{\mathbf{H}} \cap U = \mathbf{H} \cap U$. Poiché le traslazioni a destra e a sinistra sono omeomorfismi, se \mathbf{H} è localmente chiuso in h è anche localmente chiuso in $e = \mathbf{R}_{h^{-1}}(h)$. Possiamo quindi trovare un intorno aperto U di e tale che $\mathbf{H} \cap U$ sia chiuso in U . Poiché anche $\mathbf{H} \cap U \cap U^{-1}$ è chiuso in $U \cap U^{-1}$, non è restrittivo supporre che $U = U^{-1}$. Sia ora $x \in \overline{\mathbf{H}}$. Allora $(xU) \cap \mathbf{H}$ non è vuoto: possiamo quindi fissare un elemento $y \in \mathbf{H}$ e un $g \in U$ tali che $xg = y$. Osserviamo che

$$y^{-1}x = L_{y^{-1}}(x) \in L_{y^{-1}}(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{L_{y^{-1}}(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}}$$

e quindi $y^{-1}x = g^{-1} \in \overline{\mathbf{H}} \cap U = \mathbf{H} \cap U$ implica che $x = yg^{-1} \in \mathbf{H}$. Abbiamo così dimostrato che $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$, cioè che \mathbf{H} è chiuso.

Poiché ogni chiuso è localmente chiuso, la (1) è completamente dimostrata. La (2) e la (3) sono immediate e l'osservazione finale segue dalla (1).

TEOREMA 2.2.17. *Ogni intorno dell'identità di un gruppo connesso è un insieme di generatori del gruppo.*

DIMOSTRAZIONE. Siano \mathbf{G} un gruppo topologico connesso ed U un intorno dell'identità e di \mathbf{G} , che possiamo prendere aperto. Se $U^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in U\}$, allora anche $V = U \cap U^{-1}$ è un intorno aperto dell'identità. L'insieme

$$\mathbf{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n, \quad \text{con } V^n = \{x_1 \cdots x_n \mid x_i \in V\},$$

è un sottogruppo aperto di \mathbf{G} . Esso è anche chiuso per il Teorema 2.2.7 e quindi coincide con \mathbf{G} perché \mathbf{G} è connesso. \square

TEOREMA 2.2.18. *Un gruppo topologico separato e localmente compatto è paracompatto, e quindi, in particolare, uno spazio topologico normale⁴.*

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathbf{G} un gruppo topologico separato localmente compatto. Se $A \subset \mathbf{G}$, poniamo

$$A^n = \{x_1 \cdots x_n \mid a_i \in A\} \quad \text{e} \quad A^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in A\}.$$

Fissiamo un intorno aperto V di e con $V = V^{-1}$ e \bar{V} compatto. Per ogni n , \bar{V}^n è compatto, perché immagine del compatto $\bar{V} \times \cdots \times \bar{V}$ (n volte) mediante l'applicazione continua $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_1 \cdots x_n$.

Osserviamo poi che $\bar{V} \subset V^2$: infatti per ogni $g \in \bar{V}$ è $gV \cap V \neq \emptyset$; otteniamo perciò $gx_1 = x_2$ con $x_1, x_2 \in V$ e quindi $g = x_1^{-1}x_2 \in V^2$ perché $V^{-1} = V$.

Da questa relazione segue che il sottogruppo

$$\mathbf{G}_0 = \bigcup_n \bar{V}^n = \bigcup_n V^n.$$

di \mathbf{G} è aperto, e perciò anche chiuso per il Teorema 2.2.7, ed è paracompatto perché localmente compatto e unione numerabile di compatti. Ne segue che \mathbf{G} , unione disgiunta delle classi laterali $g\mathbf{G}_0$ ($g \in \mathbf{G}$) di \mathbf{G}_0 , è paracompatto. \square

COROLLARIO 2.2.19. *Siano \mathbf{G} un gruppo topologico separato e localmente compatto ed \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso. Allora lo spazio omogeneo \mathbf{G}/\mathbf{H} è separato, localmente compatto, paracompatto, ed in particolare uno spazio topologico normale.*

DIMOSTRAZIONE. Lo spazio omogeneo \mathbf{G}/\mathbf{H} è regolare perché \mathbf{H} , essendo compatto in uno spazio di Hausdorff, è chiuso; inoltre è localmente compatto perché immagine di uno spazio localmente compatto mediante un'applicazione aperta. Infine, con la notazione introdotta nella dimostrazione del teorema precedente, osserviamo che le orbite $\mathbf{G}_0 \cdot p$ ($p \in \mathbf{G}/\mathbf{H}$) di \mathbf{G}_0 in \mathbf{G}/\mathbf{H} sono aperte e paracompatte (i sottoinsiemi $\bar{V}^n \cdot p$ formano una successione di compatti la cui unione è l'orbita $\mathbf{G}_0 \cdot p$) e quindi \mathbf{G}/\mathbf{H} è paracompatto perché unione disgiunta di spazi paracompatti. \square

⁴Ricordiamo che uno spazio topologico X è *paracompatto* se è di Hausdorff ed ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento chiuso localmente finito. Uno spazio di Hausdorff localmente compatto è paracompatto se e soltanto se è unione disgiunta di sottospazi che sono ciascuno un'unione numerabile di compatti. Lo spazio topologico X si dice *normale* se è di Hausdorff e chiusi disgiunti hanno interni aperti disgiunti. Ogni spazio topologico paracompatto è normale.

2.2.3. Omomorfismi.

TEOREMA 2.2.20. *Siano \mathbf{G}_1 e \mathbf{G}_2 gruppi topologici e $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ un omomorfismo di gruppi. Condizione necessaria e sufficiente affinché ϕ sia continua è che essa sia continua nell'identità.*

DIMOSTRAZIONE. La condizione è ovviamente necessaria. Dimostriamo la sufficienza. Siano $g \in \mathbf{G}_1$ e V un intorno aperto di $\phi(g)$ in \mathbf{G}_2 . Allora $(\phi(g))^{-1}V$ è un intorno aperto dell'identità e_2 di \mathbf{G}_2 e, per l'ipotesi che ϕ fosse continua nell'identità, possiamo trovare un intorno aperto U dell'identità e_1 di \mathbf{G}_1 tale che $\phi(U) \subset V$. Il traslato gU è un intorno aperto di g in \mathbf{G}_1 e risulta

$$\phi(gh) = \phi(g)\phi(h) \in \phi(g)\left((\phi(g))^{-1}V\right) = V \quad \forall h \in U,$$

onde $\phi(gU) \subset V$. Quindi ϕ è continua in ogni punto $g \in \mathbf{G}_1$ e perciò continua. \square

DEFINIZIONE 2.2.21. Un omomorfismo di gruppi topologici è un'applicazione continua $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ che sia anche un omomorfismo di gruppi.

Se, in più, ϕ è un omeomorfismo di spazi topologici, essa è anche un isomorfismo di gruppi e si dice un *isomorfismo topologico*.

Un omomorfismo di gruppi topologici iniettivo (risp. surgettivo) si dice un *monomorfismo topologico* (risp. *epimorfismo topologico*).

Indichiamo con $\mathcal{A}ut_c(\mathbf{G})$ l'insieme degli isomorfismi topologici del gruppo topologico \mathbf{G} in sè.

Si verifica facilmente che $\mathcal{A}ut_c(\mathbf{G})$ è un gruppo per l'operazione di composizione di applicazioni. Se \mathbf{G} è localmente compatto, $\mathcal{A}ut_c(\mathbf{G})$ è un gruppo topologico con la topologia $\tau_{\mathbf{G}}$ definita nel §2.2.1; questa coincide con la topologia compatta-aperta se \mathbf{G} è anche localmente compatto. \square

TEOREMA 2.2.22. *Un epimorfismo topologico $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ è un'applicazione aperta se e soltanto se il suo quoziente iniettivo*

$$\hat{\phi} : \mathbf{G}_1/\ker \phi \rightarrow \mathbf{G}_2$$

è un isomorfismo topologico.

DIMOSTRAZIONE. Ciò è conseguenza del fatto che la proiezione nel quoziente $\mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_1/\ker \phi$ è un'applicazione aperta. \square

TEOREMA 2.2.23. *Se \mathbf{G}_1 e \mathbf{G}_2 sono gruppi topologici compatti e \mathbf{G}_2 è separato, allora ogni epimorfismo topologico $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ è un'applicazione aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ un epimorfismo topologico. Poiché \mathbf{G}_2 è separato, $\ker \phi$ è un sottogruppo normale chiuso di \mathbf{G}_1 . Ne segue, passando al quoziente iniettivo, che l'applicazione

$$\hat{\phi} : \mathbf{G}_1/\ker \phi \rightarrow \mathbf{G}_2$$

è continua e bigettiva tra spazi compatti di Hausdorff e dunque un omeomorfismo. La tesi segue allora dal teorema precedente. \square

ESEMPIO 2.2.24. Sia \mathbb{H} il corpo dei quaternioni, che possiamo identificare alla sottoalgebra dell'algebra delle matrici 2×2 a coefficienti complessi formata dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{C}.$$

Le matrici di \mathbb{H} con determinante 1 formano un gruppo moltiplicativo, che è un gruppo topologico per la topologia definita dall'identificazione standard con la sfera $S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Esso è un gruppo topologico separato e compatto, che si indica con $\mathbf{SU}(2)$. Il suo sottogruppo $\{I, -I\}$ è un sottogruppo chiuso normale e il gruppo quoziente $\mathbf{SU}(2)/\{\pm I\}$ è omeomorfo ad $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ e ad $\mathbf{SO}(3)$.

TEOREMA 2.2.25. *Se \mathbf{H} è un sottogruppo normale di un gruppo topologico \mathbf{G} , allora \mathbf{G}/\mathbf{H} è un gruppo topologico per la topologia quoziente e l'omomorfismo $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}$ è un omomorfismo di gruppi topologici. Inoltre:*

- (1) \mathbf{G}/\mathbf{H} è separato se e soltanto se \mathbf{H} è chiuso in \mathbf{G} ;
- (2) \mathbf{G}/\mathbf{H} è discreto se e soltanto se \mathbf{H} è aperto in \mathbf{G} ;
- (3) se \mathbf{H} è discreto, allora la proiezione nel quoziente $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}$ è un omeomorfismo locale. \square

2.2.4. Rivestimenti.

TEOREMA 2.2.26. *Se \mathbf{G} è un gruppo topologico connesso e localmente connesso per archi, allora il gruppo fondamentale $\pi_1(\mathbf{G})$ è commutativo.*

Sia $\hat{\mathbf{G}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}$ un rivestimento connesso di \mathbf{G} . Fissato un punto $\hat{e} \in \pi^{-1}(e)$, vi è un'unica struttura di gruppo topologico su $\hat{\mathbf{G}}$ per cui \hat{e} sia l'identità di $\hat{\mathbf{G}}$ e π sia un omomorfismo di gruppi topologici.

DIMOSTRAZIONE. Se $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbf{G}$ sono cammini continui con $\alpha(0) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(1) = e$, consideriamo l'applicazione continua:

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \ni (t, s) \rightarrow \alpha(t) \cdot \beta(s) \in \mathbf{G}.$$

Allora

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \begin{cases} F(2t, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(1, 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e

$$(\beta \cdot \alpha)(t) = \begin{cases} F(0, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(2t - 1, 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e possiamo definire un'omotetia tra $\alpha \cdot \beta$ e $\beta \cdot \alpha$ mediante:

$$G(s, t) = \begin{cases} F((1-s)2t, 2st) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F((1-s) + s(2t-1), s + (1-s)(2t-1)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ciò dimostra che $\pi_1(\mathbf{G})$ è un gruppo abeliano.

Sia ora $\pi : \hat{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ un rivestimento connesso di \mathbf{G} . Osserviamo che $\hat{\mathbf{G}}$ è connesso per archi.

Per ogni $\hat{g} \in \hat{\mathbf{G}}$ indichiamo con $\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{g})$ il gruppo fondamentale di $\hat{\mathbf{G}}$ con punto base \hat{g} . Dimostriamo innanzitutto il seguente:

LEMMA 2.2.27. Sia $g \in \mathbf{G}$ e sia $\hat{g} \in \pi^{-1}(g)$. Allora per ogni $\xi \in \pi_*(\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{e}))$ risulta $L_{g_*}(\xi) \in \pi_*(\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{g}))$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\hat{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$ un laccetto con $\hat{\alpha}(0) = \hat{\alpha}(1) = \hat{e}$ e poniamo $\alpha = \pi \circ \hat{\alpha}$. Dobbiamo dimostrare che il laccetto $L_g \circ \alpha : [0, 1] \ni t \rightarrow L_g(\alpha(t)) \in \mathbf{G}$, si rialza a un laccetto di punto iniziale \hat{g} .

Sia $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$ un cammino continuo con estremi \hat{e} e \hat{g} e sia $\gamma = \pi \circ \hat{\gamma}$. Consideriamo l'applicazione continua:

$$[0, 1] \times [0, 1] \ni (t, s) \rightarrow G(t, s) = \gamma(s) \cdot \alpha(t) \in \mathbf{G}.$$

Essa si rialza ad un'applicazione continua $\hat{G}(t, s)$ e $t \rightarrow \hat{G}(t, 1)$ rialza $L_g \circ \alpha$. Per dimostrare che questo è un laccetto, consideriamo l'insieme \mathbf{A} degli $s \in [0, 1]$ tali che $\hat{G}(0, s) = \hat{G}(1, s)$. Esso contiene 0, è chiuso perché $\hat{\mathbf{G}}$ è uno spazio di Hausdorff, ed è aperto perché $\pi \circ \hat{G}(0, s) = \gamma(s) = \pi \circ \hat{G}(1, s)$ e $\hat{\mathbf{G}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}$ è un rivestimento. Coincide quindi con $[0, 1]$: in particolare $\hat{G}(0, 1) = \hat{G}(1, 1)$ e $t \rightarrow \hat{G}(t, 1)$ è un laccetto. \square

CONCLUSIONE DELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 7.1

Siano \hat{g}_1 e \hat{g}_2 due elementi di $\hat{\mathbf{G}}$ e siano $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$ cammini continui con $\hat{\alpha}_i(0) = \hat{\beta}_i(0) = \hat{e}$, $\hat{\alpha}_i(1) = \hat{\beta}_i(1) = \hat{g}_i$, per $i = 1, 2$. Poniamo $\alpha_i = \pi \circ \hat{\alpha}_i$, $\beta_i = \pi \circ \hat{\beta}_i$ ($i = 1, 2$). Consideriamo i cammini continui $\alpha : [0, 1] \ni t \rightarrow \alpha_1(t)\alpha_2(t) \in \mathbf{G}$ e $\beta : [0, 1] \ni t \rightarrow \beta_1(t)\beta_2(t) \in \mathbf{G}$ e siano $\hat{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$ e $\hat{\beta} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$ i loro rialzamenti con punto iniziale \hat{e} . Dimostriamo che $\hat{\alpha}(1) = \hat{\beta}(1)$. A questo scopo osserviamo che

$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha_1(t+st) \cdot \alpha_2(t-st) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_1(s+t-st) \cdot \alpha_2(t+st-s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è un'omotetia tra α e

$$\alpha' = \alpha_1 \cdot (L_{g_1} \circ \alpha_2) = \begin{cases} \alpha_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1 \cdot \alpha_2(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Se indichiamo con $\hat{\alpha}'$ il rilevamento di α' con punto iniziale \hat{e} , avremo quindi $\hat{\alpha}'(1) = \hat{\alpha}(1)$. Analogamente, posto

$$\beta' = \beta_1 \cdot (L_{g_1} \circ \beta_2) = \begin{cases} \beta_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1 \cdot \beta_2(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

i rilevamenti $\hat{\beta}$ e $\hat{\beta}'$ di β e β' con punto iniziale \hat{e} hanno lo stesso punto finale in $\hat{\mathbf{G}}$.

Osserviamo ora che i punti finali di $\hat{\alpha}$ e di $\hat{\beta}$ sono i punti finali dei rialzamenti dei cammini $L_{g_1} \circ \alpha_2$ e $L_{g_1} \circ \beta_2$ con punto iniziale \hat{g}_1 . Questi coincidono perché $(L_{g_1} \circ \alpha_2) \cdot (L_{g_1} \circ \beta_2)^{-1} = L_{g_1} \circ (\alpha_2 \cdot \beta_2^{-1})$ è l'immagine mediante la traslazione a sinistra per g_1 del laccetto $\alpha_2 \cdot \beta_2^{-1}$, che per ipotesi è immagine mediante π di un laccetto in $\hat{\mathbf{G}}$ di punto iniziale \hat{e} . Per il Lemma 2.2.27, esso è allora l'immagine di un laccetto di punto iniziale \hat{g}_1 in $\hat{\mathbf{G}}$.

Possiamo quindi definire:

$$\hat{g}_1 \hat{g}_2 = \hat{\alpha}(1)$$

in quanto la definizione non dipende dalla scelta dei cammini α_1 e β_1 che congiungono \hat{e} ai punti \hat{g}_1, \hat{g}_2 rispettivamente.

Si verifica poi senza difficoltà che con questa definizione di prodotto $\hat{\mathbf{G}}$ è un gruppo topologico con unità \hat{e} e che $\pi : \hat{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ è un omomorfismo di gruppi. \square

2.2.5. Caratteri.

DEFINIZIONE 2.2.28. Un *carattere* di un gruppo topologico \mathbf{G} è un omomorfismo continuo $\chi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{S}^1$ di \mathbf{G} nel gruppo moltiplicativo \mathbf{S}^1 dei numeri complessi di modulo 1.

L'insieme \mathbf{G}' dei caratteri di \mathbf{G} è un gruppo abeliano rispetto all'operazione di moltiplicazione di funzioni: la funzione $1_{\mathbf{G}}$, costantemente uguale ad 1 su \mathbf{G} , è l'identità di \mathbf{G}' .

Si verifica facilmente che vale il:

TEOREMA 2.2.29. *Se \mathbf{G} è un gruppo topologico, anche il gruppo \mathbf{G}' dei suoi caratteri è un gruppo topologico per la topologia compatta-aperta. Se \mathbf{G} è separato, anche \mathbf{G}' è separato.* \square

TEOREMA 2.2.30. *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico localmente compatto e separato. Allora anche \mathbf{G}' è localmente compatto e separato. Inoltre, se \mathbf{G} è a base numerabile, anche \mathbf{G}' è a base numerabile. Se \mathbf{G} è compatto e separato, allora \mathbf{G}' è discreto. Se \mathbf{G} è discreto, allora \mathbf{G}' è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Se \mathbf{G} è compatto,

$$U(\mathbf{G}, \mathbf{S}_\epsilon) = \{\chi \in \mathbf{G}' \mid \text{Arg}(\chi(g)) \in (-\epsilon, \epsilon) \quad \forall g \in \mathbf{G}\}$$

è un aperto di \mathbf{G}' . Se $\epsilon < \pi/2$, il suo unico elemento è $1_{\mathbf{G}}$. Quindi $\{1_{\mathbf{G}}\}$ è aperto e \mathbf{G}' ha la topologia discreta.

Se \mathbf{G} è discreto, allora l'applicazione $\mathbf{G}' \ni \chi \rightarrow (\chi(g))_{g \in \mathbf{G}} \in [\mathbf{S}^1]^{\mathbf{G}}$ è un'immersione di \mathbf{G}' in un sottospazio chiuso di $[\mathbf{S}^1]^{\mathbf{G}}$, e quindi \mathbf{G}' è compatto in quanto sottospazio chiuso di uno spazio compatto. \square

2.3. Azioni continue

Sia \mathbf{G} un gruppo topologico con identità e .

DEFINIZIONE 2.3.1. Un *\mathbf{G} -spazio a destra* è uno spazio topologico \mathbf{E} per cui sia definita un'applicazione continua, che chiameremo *azione continua di \mathbf{G} su \mathbf{E}* ,

$$(2.10) \quad \mathbf{E} \times \mathbf{G} \ni (v, x) \longrightarrow v \cdot x \in \mathbf{E}$$

con le proprietà

- (i) $(v \cdot x_1)x_2 = v \cdot (x_1x_2), \quad \forall v \in \mathbf{E}, x_1, x_2 \in \mathbf{G},$
- (ii) $v \cdot e = v \quad \forall v \in \mathbf{E}.$

In modo analogo si definisce un \mathbf{G} -spazio a sinistra.

Osserviamo che un \mathbf{G} spazio a sinistra E è un \mathbf{G} -spazio a destra per l'azione $E \times \mathbf{G} \ni (v, x) \rightarrow x^{-1} \cdot v \in E$ e, viceversa, un \mathbf{G} -spazio a destra E è un \mathbf{G} -spazio a sinistra per l'azione $\mathbf{G} \times E \ni (x, v) \rightarrow v \cdot x^{-1} \in E$.

Nella discussione seguente, ci limiteremo a considerare \mathbf{G} -spazi a destra: risultati analoghi varranno anche per i \mathbf{G} -spazi a sinistra.

PROPOSIZIONE 2.3.2. *Sia E un \mathbf{G} -spazio. Allora*

- (1) *per ogni $x \in \mathbf{G}$ l'applicazione $E \ni v \rightarrow v \cdot x \in E$ è un omeomorfismo;*
- (2) *la proiezione nel quoziente $\pi : E \rightarrow E/\mathbf{G}$ è un'applicazione aperta;*
- (3) *se E è di Hausdorff compatto e \mathbf{G} compatto, allora la proiezione nel quoziente $\pi : E \rightarrow E/\mathbf{G}$ è anche chiusa.*

Ricordiamo che E/\mathbf{G} è lo spazio delle orbite di \mathbf{G} in E . Il quoziente è definito dalla relazione di equivalenza $v \sim v \cdot x$ per $v \in E$ ed $x \in \mathbf{G}$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Indichiamo con $\tau_x \in \mathcal{C}(E, E)$ l'applicazione continua $v \rightarrow v \cdot x$. Per le proprietà (i) ed (ii) è $\tau_x \circ \tau_{x^{-1}} = \tau_{x^{-1}} \circ \tau_x = \text{id}_E$. Quindi τ_x ha un'inversa continua ed è perciò un omeomorfismo.

(2) Se U è un aperto di E , allora

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{x \in \mathbf{G}} \tau_x(U)$$

è aperto perché unione d'aperti. Infatti tutti i traslati $\tau_x(U)$ sono aperti, in quanto le τ_x sono, per il punto (i), degli omeomorfismi.

(3) Supponiamo ora che \mathbf{G} ed E siano compatti, e che, inoltre, E sia di Hausdorff. Allora i chiusi di E sono tutti e soli i suoi sottoinsiemi compatti. Se K è un chiuso di E , allora $\pi^{-1}(\pi(K)) = \{x \cdot v \mid x \in \mathbf{G}, v \in K\}$ è compatto perché immagine del compatto $K \times \mathbf{G}$ mediante l'applicazione continua $E \times \mathbf{G} \rightarrow E$ che definisce l'azione del gruppo e quindi chiuso perché i compatti di uno spazio di Hausdorff sono chiusi. \square

PROPOSIZIONE 2.3.3. *Se E è un \mathbf{G} -spazio, allora $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$, con B uguale allo spazio E/\mathbf{G} delle orbite di \mathbf{G} in E e π alla proiezione canonica nel quoziente, è un fibrato.* \square

Siano \mathbf{G}_1 e \mathbf{G}_2 due gruppi topologici e $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ un omomorfismo continuo.

DEFINIZIONE 2.3.4. Dati due \mathbf{G}_i -spazi E_i ($i = 1, 2$), un ϕ -omomorfismo di E_1 in E_2 è un'applicazione continua $f \in \mathcal{C}(E_1, E_2)$ che soddisfa

$$f(v \cdot x) = f(v) \cdot \phi(x), \quad \text{per ogni } v \in E_1 \text{ ed } x \in \mathbf{G}_1.$$

Se $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}$ e ϕ è l'identità, una $f \in \mathcal{C}(E_1, E_2)$ che commuti con l'azione di \mathbf{G} si dice un \mathbf{G} -omomorfismo, o applicazione \mathbf{G} -equivariante.

Se inoltre f è un omeomorfismo, anche la sua inversa è un \mathbf{G} -omomorfismo. Diremo, in questo caso, che f è un \mathbf{G} -isomorfismo.

2.4. Azioni di gruppo su un fibrato

Sia ξ un fibrato.

DEFINIZIONE 2.4.1. Una \mathbf{G} -struttura su ξ è il dato di un'azione continua di \mathbf{G} sulle fibre di ξ , cioè di un'applicazione continua

$$E(\xi) \times \mathbf{G} \ni (v, x) \longrightarrow v \cdot x \in E(\xi), \quad \text{con } \pi_{E(\xi)}(v \cdot x) = \pi(v), \quad \forall v \in E, \quad \forall x \in \mathbf{G}$$

tale che l'applicazione indotta sulle basi

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \pi \swarrow & & \searrow \pi_{E(\xi)} \\ E/\mathbf{G} & \text{-----} & B(\xi) \end{array}$$

sia un omeomorfismo.

Richiediamo perciò che \mathbf{G} agisca transitivamente su ciascuna fibra di ξ e che la topologia sulla base sia la topologia quoziente, cioè la più fine tra quelle per cui la proiezione $\pi_{E(\xi)}$ sia continua.

OSSERVAZIONE 2.4.2. Sia \mathbf{H} un sottogruppo del gruppo topologico \mathbf{G} . Il quoziente \mathbf{G}/\mathbf{H} è uno spazio omogeneo, su cui \mathbf{G} opera transitivamente per traslazioni a sinistra. Possiamo considerare $\xi = (\mathbf{G}, \pi, \mathbf{G}/\mathbf{H}, \mathbf{H})$ come un \mathbf{H} -fibrato per l'azione a destra

$$\mathbf{G} \times \mathbf{H} \ni (x, h) \longrightarrow x \cdot h \in \mathbf{G}.$$

DEFINIZIONE 2.4.3. Un \mathbf{G} -fibrato ξ si dice *principale* se è localmente banale e se l'azione di \mathbf{G} su ciascuna delle fibre è semplicemente transitiva.

I fibrati nell'Osservazione 2.4.2 sono esempi di fibrati principali.

2.5. Fibrati di Steenrod e fibrati principali

2.5.1. G-spazi a sinistra. Un \mathbf{G} -spazio a sinistra è uno spazio topologico F su cui è assegnata un'azione continua

$$\mathbf{G} \times F \ni (x, v) \longrightarrow x \cdot v \in F \quad \text{con} \quad \begin{cases} e \cdot v = v, & \forall v \in F, \\ x_1(x_2 \cdot v) = (x_1 x_2) \cdot v, & \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}, \forall v \in F. \end{cases}$$

Diciamo che F è un \mathbf{G} -spazio *fedele* se l'azione di \mathbf{G} su F è fedele, se cioè

$$x \cdot v = v, \quad \forall v \in F \implies x = e.$$

Nel caso di un'azione fedele, identificheremo spesso \mathbf{G} al gruppo degli omeomorfismi di F definiti dai suoi elementi.

OSSERVAZIONE 2.5.1. Se l'azione di \mathbf{G} su F è transitiva, fissato un punto v_0 di F e detto \mathbf{H} il suo stabilizzatore in \mathbf{G} , la $\mathbf{G} \ni x \rightarrow x \cdot v_0 \in F$ definisce, per passaggio al quoziente iniettivo, una \mathbf{G} -applicazione bigettiva e continua $f : \mathbf{G}/\mathbf{H} \rightarrow F$. Non è detto, in generale, che questa sia un omeomorfismo, e quindi un \mathbf{G} -isomorfismo.

Ciò vale sempre se \mathbf{G} è compatto ed F di Hausdorff, perché un'applicazione continua e bigettiva tra spazi di Hausdorff compatti è anche un omeomorfismo.

Il nucleo d'infedeltà \mathbf{N} dell'azione di \mathbf{G} su F è un suo sottogruppo normale chiuso ed il quoziente \mathbf{G}/\mathbf{N} un gruppo topologico che ha una naturale azione continua e fedele su F . Potremo quindi, se necessario, ridurci sempre allo studio di azioni fedeli, identificando in questo caso \mathbf{G} con un sottogruppo di $\mathbf{S}(F)$.

ESEMPIO 2.5.2. Lo spazio proiettivo $\mathbb{R}P^n$ è un $\mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ -spazio per il quoziente dell'azione di $\mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Il nucleo d'infedeltà è formato dalle matrici diagonali e possiamo allora considerare $\mathbb{R}P^n$ come un \mathbf{G} -spazio fedele per l'azione di $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{R})/\Delta_{n+1}(\mathbb{R})$.

2.5.2. F-strutture. Siano X uno spazio topologico ed F un \mathbf{G} -spazio a sinistra. Supponiamo l'azione di \mathbf{G} fedele, dimodochè \mathbf{G} è identificato a un gruppo di omeomorfismi di F . Sia X un insieme.

DEFINIZIONE 2.5.3. Una F -struttura su X è il dato di una famiglia non vuota $\mathcal{D}(F, X)$ di omeomorfismi di F su X tali che

- (i) $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2 \in \mathbf{G}, \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{D}(F, X),$
- (ii) $\sigma \circ \mathbf{a} \in \mathcal{D}(F, X), \quad \forall \sigma \in \mathcal{D}(F, X), \forall \mathbf{a} \in \mathbf{G}.$

Chiamiamo gli elementi di $\mathcal{D}(F, X)$ *omeomorfismi distinti*.

ESEMPIO 2.5.4. Possiamo considerare \mathbb{R}^m come un $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ -spazio fedele per l'azione standard del gruppo lineare. Se V è uno spazio vettoriale reale di dimensione m , la

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^m, V) = \{\text{isomorfismi lineari } \mathbb{R}^m \rightarrow V\}$$

è una \mathbb{R}^m -struttura su V . Fissare un omeomorfismo distinto equivale a fissare una base di V . Possiamo quindi considerare $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m, V)$ come l'insieme dei *sistemi di riferimento* di V .

Con l'azione standard su \mathbb{R}^m di uno dei gruppi lineari $\mathbf{GL}_m^+(\mathbb{R}), \mathbf{SL}_m(\mathbb{R}), \mathbf{O}(m), \mathbf{SO}(m)$, una \mathbb{R}^m -struttura su V corrisponde ad una scelta di un'orientazione, di un'unità di volume orientato, di una struttura ortogonale, di una struttura ortogonale orientata su V , rispettivamente.

Analoghi esempi si possono fare scegliendo $F = \mathbb{C}^m$ e \mathbf{G} uguale ad uno dei gruppi $\mathbf{GL}_m(\mathbb{C}), \mathbf{SL}_m(\mathbb{C}), \mathbf{U}(m), \mathbf{SU}(m)$.

2.5.3. F-fibrati in senso debole.

DEFINIZIONE 2.5.5. Chiamiamo *F-fibrato in senso debole* un fibrato ξ su ogni fibra del quale sia assegnata, in modo continuo, una F -struttura.

Ciò significa che è assegnata una famiglia continua di *omeomorfismi distinti* $\mathcal{D}_F(\xi) \subset \mathcal{C}(F, E(\xi))$ tali che

- (i) $\pi_\xi(\sigma(v_1)) = \pi_\xi(\sigma(v_2)), \quad \forall \sigma \in \mathcal{D}_F(\xi), \quad \forall v_1, v_2 \in F;$
- (ii) $\mathcal{D}(F, E_p(\xi)) = \{\sigma \in \mathcal{D}_F(\xi) \mid \pi_\xi(\sigma(F)) = \{p\}\}$ è un' F -struttura su $E_p(\xi)$,
 $\forall p \in B(\xi).$

Chiamiamo F la *fibra standard* e \mathbf{G} il *gruppo strutturale* di ξ . Indicheremo il fibrato ξ con $(E(\xi), \pi, B, F, \mathbf{G})$ per precisarne fibra tipica e gruppo strutturale.

La

$$(2.11) \quad \mathcal{D}_F(\xi) \times \mathbf{G} \ni (\sigma, \mathbf{a}) \longrightarrow \sigma \circ \mathbf{a} \in \mathcal{D}_F(\xi)$$

è un'azione naturale a destra di \mathbf{G} su $\mathcal{D}_F(\xi)$.

Se $F=\mathbf{G}$, con \mathbf{G} che opera su se stesso per traslazioni a sinistra, diciamo che ξ è un *fibrato principale in senso debole con gruppo strutturale \mathbf{G}* , o un *fibrato \mathbf{G} -principale in senso debole*.

Ad un F -fibrato in senso debole ξ possiamo associare in modo canonico un fibrato \mathbf{G} -principale in senso debole $\xi^\sharp = (\mathbf{P}(\xi), \pi, \mathbf{B}(\xi), \mathbf{G})$ con

$$(2.12) \quad \mathbf{P}(\xi) = \mathcal{D}_F(\xi) \text{ e } \pi(\sigma) = \pi_\xi(\sigma(v)), \forall v \in F.$$

La (2.11) definisce l'azione canonica (a destra) di \mathbf{G} sulle fibre di ξ^\sharp . Lo spazio $\mathcal{D}_F(\xi)$ ha una topologia naturale di sottospazio di $\mathcal{C}(F, E(\xi))$, rispetto alla quale la proiezione π_{ξ^\sharp} è continua.

DEFINIZIONE 2.5.6. Chiamiamo ξ^\sharp il *fibrato \mathbf{G} -principale (in senso debole) associato all' F -fibrato (in senso debole) ξ* .

ESEMPIO 2.5.7. Possiamo considerare \mathbb{R}^m come un $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ -spazio fedele per l'azione canonica del gruppo lineare. Se M è una varietà differenziabile di dimensione m , il suo fibrato tangente $\tau(M) = (TM, \pi, M)$ ha una \mathbb{R}^m -struttura naturale, in cui, per ogni $p \in M$,

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^m, T_p M) = \{\sigma : \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M \mid \sigma \text{ è un isomorfismo lineare}\}.$$

In questo caso indichiamo $[\tau(M)]^\sharp$ con $\mathbb{L}(M)$. Gli elementi della fibra $L_p(M)$ di $\mathbb{L}(M)$ sul punto p sono gli isomorfismi lineari σ di \mathbb{R}^m sullo spazio tangente $T_p M$. Le σ sono determinate dalle immagini v_1, \dots, v_m dei vettori e_1, \dots, e_m della base canonica di \mathbb{R}^m e possiamo quindi identificare la fibra $L_p(M)$ con l'insieme delle basi di $T_p M$: chiamiamo $\mathbb{L}(M)$ il fibrato dei *sistemi di riferimento su M* .

Chiaramente, se U è un aperto di B , la restrizione $\xi|_U$ di ξ ad U è ancora un F -fibrato con gruppo strutturale \mathbf{G} se tale era ξ .

DEFINIZIONE 2.5.8. Se $\xi_i = (E_i, \pi_i, B_i, F, \mathbf{G})$, $i = 1, 2$, sono F -fibrati, un morfismo di fibrati $f : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è un *F -morfismo* se

$$(2.13) \quad f_E \circ \sigma \in \mathcal{D}_F(\xi_2), \forall \sigma \in \mathcal{D}_F(\xi_1).$$

Osserviamo che un F -morfismo si restringe, su ciascuna fibra di ξ_1 , ad un omeomorfismo con la corrispondente fibra di ξ_2 .

DEFINIZIONE 2.5.9. Se $B_1=B_2=B$, $f_B=\text{id}_B$ ed f_E è un omeomorfismo, diciamo che f è una *F -equivalenza*.

Una F -equivalenza è invertibile e l'inversa è ancora una F -equivalenza.

2.5.4. Fibrati di Steenrod. Siano B uno spazio topologico ed F un \mathbf{G} -spazio fedele.

DEFINIZIONE 2.5.10. Chiamiamo *fibrato banale* di base B , fibra F e gruppo strutturale \mathbf{G} , il fibrato $(B \times F, \text{pr}_B, B, F, \mathbf{G})$ con

$$(2.14) \quad \mathcal{D}(F, \{p\} \times F) = \mathcal{D}(F, F) = \mathbf{G}, \quad \forall p \in \mathbf{G}.$$

DEFINIZIONE 2.5.11. Un F -fibrato ξ si dice *di Steenrod* se è localmente F -equivalente a un fibrato banale.

OSSERVAZIONE 2.5.12. I *fibrati principali* sono i \mathbf{G} -*fibrati di Steenrod*.

PROPOSIZIONE 2.5.13. Sia $\xi = (E, \pi, B, F, \mathbf{G})$ un F -fibrato in senso debole. Condizione necessaria e sufficiente affinché ξ sia di Steenrod è che lo sia $\xi^\#$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\phi : U \times F \rightarrow E|_U$ è una trivializzazione di ξ su un aperto U di B , allora $\hat{\phi} : U \times \mathbf{G} \ni (p, a) \rightarrow (p, \phi(p, a(\cdot))) \in P(E)|_U$ è una trivializzazione di $\xi^\#$ su U . La $\phi(p, a(\cdot))$ rappresenta la trasformazione

$$\{F \ni v \rightarrow \phi(p, a(v)) \in E_p\} \in \mathcal{D}(F, E_p).$$

Viceversa, se

$$\Psi : U \times \mathbf{G} \ni (p, a) \rightarrow (p, \psi(p, a)) \in P(E)|_U, \quad \text{con } \psi(p, a) \in \mathcal{D}(F, E_p)$$

è una trivializzazione di $\xi^\#$ su U , allora $\phi : U \times F \ni (p, v) \rightarrow \psi(p, e_{\mathbf{G}})(v) \in E|_U$ è una trivializzazione di ξ su U . \square

2.5.5. Atlanti di trivializzazione. Sia ξ un F -fibrato di Steenrod, di base B , spazio totale E , gruppo strutturale \mathbf{G} .

Un *atlante di trivializzazione* di ξ è il dato di un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di B e, per ogni indice i , di una $\phi_i \in \mathcal{C}(U_i \times F, E|_{U_i})$ che definisca un' F -equivalenza di $\xi|_{U_i}$ con il fibrato banale.

Per ogni $p \in U_i$, la $F \ni v \rightarrow \phi_i(p, v) \in E_p$ è un elemento di $\mathcal{D}(F, E_p)$. Le funzioni di transizione sono quindi della forma

$$(2.15) \quad (p, v) \rightarrow (p, \phi_{i,j}(p)(v)), \quad \text{con } \phi_{i,j} \in \mathcal{C}(U_{i,j}, \mathbf{G}).$$

Viceversa, abbiamo

PROPOSIZIONE 2.5.14. Siano F un \mathbf{G} -spazio fedele, B uno spazio topologico ed $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un suo ricoprimento aperto. Data una famiglia $\{\phi_{i,j} \in \mathcal{C}(U_{i,j}, \mathbf{G})\}$ con

$$\phi_{i,j} \phi_{j,k} \phi_{k,i} = e_{\mathbf{G}} \quad \text{su } U_{i,j,k}, \quad \forall i, j, k,$$

esiste, unico a meno di equivalenze, un F -fibrato di Steenrod su B , con gruppo strutturale \mathbf{G} , che ammetta un atlante di trivializzazione con ricoprimento aperto \mathcal{U} e funzioni di transizione $\{\phi_{i,j}\}$. \square

I fibrati ξ e $\xi^\#$ si possono definire utilizzando le stesse funzioni di transizione. Ne segue la

PROPOSIZIONE 2.5.15. Se ξ è un fibrato \mathbf{G} -principale ed F un \mathbf{G} -spazio fedele, esiste unico, a meno di equivalenze, un F -fibrato di Steenrod θ con $\xi = \theta^\#$. \square

La Proposizione 2.5.15 riconduce lo studio dei fibrati di Steenrod generali a quello dei fibrati principali.

Gli F-fibrati in senso debole ed i fibrati di Steenrod formano categorie stabili rispetto alle diverse operazioni, quali il pullback, la restrizione, la somma di Whitney, etc. Useremo dunque le operazioni standard introdotte per i fibrati generali, senza formulare e svolgere le ovvie verifiche sulle proprietà di queste operazioni.

OSSERVAZIONE 2.5.16. Osserviamo ancora che, se F è un \mathbf{G} -spazio qualsiasi, possiamo associare ad ogni fibrato \mathbf{G} -principale ξ un F-fibrato ξ_F sulla base $B(\xi)$, unico a meno di equivalenza, incollando i fibrati banali con fibra F sugli aperti di un qualsiasi atlante di trivializzazione di ξ mediante le stesse funzioni di transizione di ξ . Il fibrato ξ_F è di Steenrod rispetto al quoziente \mathbf{G}/\mathbf{N} di \mathbf{G} rispetto al nucleo d'infedeltà \mathbf{N} della rappresentazione di \mathbf{G} su F .

Un vantaggio della riduzione al caso dei fibrati principali è illustrato dal seguente

TEOREMA 2.5.17. *Siano $\xi = (P(\xi), \pi_\xi, B(\xi), \mathbf{G})$ e $\zeta = (P(\zeta), \pi_\zeta, B(\zeta), \mathbf{G})$ due fibrati principali con lo stesso gruppo strutturale \mathbf{G} . Se $f : \xi \rightarrow \zeta$ è un morfismo di fibrati \mathbf{G} -principali, allora ξ è equivalente ad $f^*(\zeta)$.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo definire un'equivalenza $\phi : \xi \rightarrow f^*(\xi)$ mediante

$$P(\xi) \ni v \rightarrow \phi(v) = (\pi_\xi(v), f_P(v)) \in P(f^*(\xi)) = \{(p, w) \mid w \in P(\zeta), \pi_\zeta(w) = f(v)\}.$$

Poiché \mathbf{G} opera in modo semplicemente transitivo sulle fibre di ξ e di ζ , per ogni $p \in B(\xi)$ la f definisce un'applicazione bigettiva $f_p : P_p(\xi) \rightarrow P_{f_B(p)}(\zeta)$. La ϕ ammette quindi un'inversa, in senso insiemistico, definita da

$$\phi^{-1}(p, w) = f_p^{-1}(w).$$

Questa è continua perché i fibrati ξ e ζ sono localmente banali. Fissato un punto $p_0 \in B(\xi)$ possiamo infatti trovare intorno di trivializzazione U di p_0 in $B(\xi)$ e W di $f_B(p_0)$ in $B(\zeta)$ con $f_B(U) \subset W$. Possiamo allora descrivere le applicazioni f e ϕ , nelle trivializzazioni locali, mediante una $\psi \in \mathcal{C}(U, \mathbf{G})$ che renda commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} P(\xi)|_U & \xrightarrow{f|_U} & P(f^*(\zeta))|_U \\ \uparrow & & \uparrow \\ U \times G & \xrightarrow{(p,x) \rightarrow (p,\psi(p)x)} & U \times G \\ \swarrow & & \searrow \\ (p,x) \rightarrow (f_B(p), \psi(p)x) & & (p,y) \rightarrow (f(p), y) \\ & W \times G & \\ & \downarrow & \\ & P(\zeta)|_W & \end{array}$$

La ϕ^{-1} è rappresentata quindi localmente dalla

$$(p, y) \rightarrow (p, [\psi(p)]^{-1}y)$$

ed è perciò continua. □

OSSERVAZIONE 2.5.18. Una trivializzazione di un fibrato \mathbf{G} -principale ξ su un aperto U di $\mathbf{B}(\xi)$ equivale al dato di una sezione $\sigma \in \Gamma_\xi(U, \mathbf{P}(\xi))$. Infatti, se σ è una sezione, allora

$$U \times \mathbf{G} \ni (\mathfrak{p}, x) \longrightarrow \sigma(\mathfrak{p}) \cdot x \in \mathbf{P}(\xi)|_U$$

è una trivializzazione e viceversa, la trivializzazione

$$\phi : U \times \mathbf{G} \ni (\mathfrak{p}, x) \longrightarrow \phi(\mathfrak{p}, x) \in \mathbf{P}(\xi)|_U$$

è associata alla sezione $\sigma(\mathfrak{p}) = \phi(\mathfrak{p}, e_{\mathbf{G}})$.

2.6. Un Lemma di trivializzazione

Siano fissati un gruppo topologico \mathbf{G} ed un \mathbf{G} -spazio fedele F . Poiché un F -fibrato di Steenrod ξ è trivializzabile se e soltanto se lo è il fibrato \mathbf{G} -principale $\xi^\#$ associato, utilizzando l'Oss.2.5.18 ed i Lemmi 1.5.1,1.5.2, otteniamo:

LEMMA 2.6.1. *Siano ξ un F -fibrato di Steenrod e B_1, B_2 due chiusi di $B = \mathbf{B}(\xi)$ tali che $B_1 \cup B_2 = B$ e $B_1 \cap B_2$ sia un retracts di B_2 su $B_1 \cap B_2$. Se i fibrati $\xi|_{B_1}$ e $\xi|_{B_2}$ sono trivializzabili, allora anche ξ è trivializzabile.*

Se $\phi_1 : B_1 \times F \rightarrow E|_{B_1}$ definisce una F -trivializzazione di ξ su B_1 , è possibile trovare una trivializzazione di ξ su B definita da una $\phi : B \times F \rightarrow E$ che estenda ϕ_1 . \square

COROLLARIO 2.6.2. *Sia F uno spazio \mathbf{G} -fedele. Ogni F -fibrato di Steenrod su $[0, 1]^n$ è trivializzabile.* \square

2.7. Invarianza omotopica

Siano \mathbf{G} un gruppo topologico, F uno spazio \mathbf{G} -fedele, ξ un F -fibrato di Steenrod, M un CW -complesso. Vogliamo mostrare in questo paragrafo che, data una $f \in \mathcal{C}(M, \mathbf{B}(\xi))$, il pullback $f^*(\xi)$ è univocamente determinato, a meno di equivalenza, dalla classe di omotopia di f .

LEMMA 2.7.1. *Siano \bar{e} una cella chiusa di uno spazio topologico M e ξ_1, ξ_2 due F -fibrati di Steenrod su $\bar{e} \times [0, 1]$. Sia $N = (\bar{e} \times \{0\}) \cup (\partial e \times [0, 1])$ il cilindro su \bar{e} , privato dei punti interni del coperchio. Se ξ_1 e ξ_2 sono F -equivalenti su N , allora ξ_1 e ξ_2 sono F -equivalenti su $\bar{e} \times [0, 1]$ ed ogni F -equivalenza $\psi_N : \xi_1|_N \rightarrow \xi_2|_N$ si estende ad una F -equivalenza $\psi : \xi_1 \rightarrow \xi_2$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché le equivalenze di fibrati inducono l'identità sulla base, useremo, per semplificare la notazione, la stessa lettera per indicare sia l'applicazione tra i fibrati che quella tra i loro spazi totali.

Sia $\phi : D^n \times [0, 1] \rightarrow \bar{e} \times I \subset M \times [0, 1]$ il prodotto della funzione caratteristica della cella e per l'identità sull'intervallo $[0, 1]$. Allora

$$\phi^{-1}(N) = (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times [0, 1]).$$

Fissiamo una retrazione $\tilde{\rho} : D^n \times [0, 1] \rightarrow \phi^{-1}(N)$. Poiché $D^n \times [0, 1]$ è omeomorfo a $[0, 1]^{n+1}$, per il Lemma 2.6.2 i fibrati di Steenrod sulla base $D^n \times [0, 1]$, sono trivializzabili. Lo sono in particolare i pullback $\phi^*(\xi_i)$ e $\rho^*(\phi^*(\xi_i))$, per $i = 1, 2$. Fissiamo omeomorfismi di trivializzazione

$\lambda_i : (D^n \times [0, 1]) \times F \rightarrow E(\phi^*(\xi_i))$ ed $\eta_i : (D^n \times [0, 1]) \times F \rightarrow E(\rho^*(\phi^*(\xi_i)))$.

Per $i = 1, 2$, la $\lambda_i \circ \eta_i^{-1} : E_{\rho^*(\phi^*(\xi_i))} \rightarrow E_{\phi^*(\xi_i)}$ definisce una F-equivalenza tra $\rho^*(\phi^*(\xi_i))$ e $\phi^*(\xi_i)$ che è l'identità su $\phi^{-1}(N)$.

Osserviamo ora che la F-equivalenza $\psi_N : E(\xi_1)|_N \rightarrow E(\xi_2)|_N$ definisce una F-equivalenza $\psi_N^* : E(\phi^*(\xi_1))|_{\phi^{-1}(N)} \rightarrow E(\phi^*(\xi_2))|_{\phi^{-1}(N)}$, mediante

$$\begin{aligned} \{(x, t; v) \in \phi^{-1}(N) \times E(\xi_1) \mid \phi(x, t) = \pi_1(v)\} &\ni (x, t; v) \rightarrow \psi_N^*(x, t; v) \\ &= (x, t; \psi_N(\phi(x, t), v)) \in \{(x, t; v) \in \phi^{-1}(N) \times E(\xi_2) \mid \phi(x, t) = \pi_2(v)\}. \end{aligned}$$

La ψ_N^* si estende in modo naturale ad un'F-equivalenza tra $\rho^*(\phi^*(\xi_1))$ e $\rho^*(\phi^*(\xi_2))$. Per composizione, otteniamo così un'equivalenza tra $\phi^*(\xi_1)$ e $\phi^*(\xi_2)$ che estende quella data tra le loro restrizioni a $\phi^{-1}(N)$. Poiché la ϕ è un omeomorfismo fuori di $\phi^{-1}(N)$, questa F-equivalenza tra $\phi^*(\xi_1)$ e $\phi^*(\xi_2)$ definisce un'F-equivalenza tra ξ_1 e ξ_2 che estende quella assegnata su N . \square

TEOREMA 2.7.2. *Siano ξ un F-fibrato di Steenrod, M un CW-complesso, (M, A) una coppia cellulare ed $f = \{f_i\} \in \mathcal{C}(M \times [0, 1], B(\xi))$ un'A-omotopia⁵. Allora i pullback $f_0^*(\xi)$ ed $f_1^*(\xi)$ sono equivalenti e possiamo trovare un'equivalenza $\phi : f_0^*(\xi) \rightarrow f_1^*(\xi)$ che sia l'identità su $f_0^*(\xi)|_A$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo fissata la struttura di CW-complesso di M ed indichiamo con $p_M : M \times [0, 1] \rightarrow M$ la proiezione sul primo fattore. Consideriamo su $M \times [0, 1]$ i due F-fibrati

$$\zeta_0 = \text{pr}_M^*(f_0^*(\xi)) \quad \text{e} \quad \zeta_1 = f_1^*(\xi).$$

Le loro restrizioni ad $(M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1])$ coincidono e l'omeomorfismo $M \ni p \rightarrow (p, 1) \in M \times \{1\}$ ci permette di identificare $\zeta_0|_{M \times \{1\}}$ con $f_0^*(\xi)$ e $\zeta_1|_{M \times \{1\}}$ con $f_1^*(\xi)$. Basterà quindi costruire una F-equivalenza tra ζ_0 e ζ_1 che sia l'identità su $(M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1])$.

Sia $N_{-1} = (M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1])$ e, per ogni intero non negativo q , poniamo

$$N_q = (M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1]) \cup (M_q \times [0, 1]),$$

ove abbiamo indicato con M_q lo scheletro q -dimensionale $S_q(M)$ di M , cioè l'unione delle sue celle di dimensione minore o uguale a q .

Dimostriamo per ricorrenza che è possibile definire una successione $\{\phi_q\}_{q \geq -1}$ di applicazioni continue $\phi_q : E(\zeta_0)|_{N_q} \rightarrow E(\zeta_1)|_{N_q}$, tali che

- (1) ϕ_{-1} sia l'identità su $E(\zeta_0)|_{N_{-1}} = E(\zeta_1)|_{N_{-1}}$;
- (2) $(\text{id}_{N_q}, \phi_q) : \zeta_0|_{N_q} \rightarrow \zeta_1|_{N_q}$ sia una F-equivalenza;
- (3) $\phi_{q+1} = \phi_q$ su $E(\zeta_0)|_{N_q}$.

La ϕ_{-1} è assegnata. Dimostriamo per ricorrenza che, fissato $q \geq 0$ ed assegnata ϕ_{q-1} , è possibile costruire ϕ_q . Utilizziamo a questo scopo il lemma di Zorn. Indichiamo con Ψ l'insieme delle coppie (Q, ψ) formate da un sotto-CW-complesso Q di M con

$$N_{q-1} \subseteq Q \subseteq N_q$$

⁵Ciò significa che $t \rightarrow f_i(p)$ è costante per $p \in A$.

e da un'applicazione continua

$\Psi_Q : E(\zeta_0)|_Q \longrightarrow E(\zeta_1)|_Q$ t.c. $(\text{id}_Q, \Psi_Q) : \zeta_1|_Q \longrightarrow \zeta_2|_Q$ sia una F-equivalenza.

Definiamo una relazione d'ordine su Ψ ponendo

$$(Q_1, \Psi_{Q_1}) < (Q_2, \Psi_{Q_2}) \iff Q_1 \subsetneq Q_2 \text{ e } \Psi_{Q_2} = \Psi_{Q_1} \text{ su } E(\zeta_0)|_{Q_1}.$$

La famiglia Ψ è non vuota, perché contiene (N_{q-1}, ϕ_{q-1}) ed è induttiva perché ogni unione di celle Q con $N_{q-1} \subset Q \subset N_q$ è ancora un sotto- CW -complesso di M . Per il Lemma di Zorn Ψ contiene un elemento massimale (Q, Ψ_Q) . Dal Lemma 2.7.1 segue che deve essere $Q = N_q$. La tesi è conseguenza del fatto che gli N_q formano un ricoprimento fondamentale di M , e quindi gli $E(\zeta_0)|_{N_q}$ un ricoprimento fondamentale di $E(\zeta_0)$. Possiamo quindi definire $\phi : E(\zeta_0) \rightarrow E(\zeta_1)$ ponendo $\phi = \phi_q$ su $E_{\zeta_0}|_{N_q}$. \square

COROLLARIO 2.7.3. *Ogni fibrato di Steenrod la cui base sia uno spazio cellulare contrattile è trivializzabile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia ξ un F-fibrato di Steenrod con base $B = B(\xi)$ cellulare. Supponiamo vi sia una retrazione di deformazione $(\rho_t) \in \mathcal{C}(B \times I, B)$ con $\rho_0 = \text{id}_B$ e $\rho_1(b) = b_0$ per ogni $b \in B$. Allora, per il Teorema 2.7.2, $\xi = \rho_0^*(\xi)$ è equivalente a $\rho_1^*(\xi)$, che è il fibrato banale $B \times E_{b_0}(\xi) \rightarrow B$. \square

2.8. Fibrati universali

Siano \mathbf{G} un gruppo topologico, F un \mathbf{G} -spazio fedele ed m un intero non negativo o $(+\infty)$.

DEFINIZIONE 2.8.1. Un F-fibrato di Steenrod ζ si dice *m-universale* se per ogni F-fibrato di Steenrod ξ la cui base $B(\xi)$ sia un CW -complesso di dimensione minore o uguale ad m esiste un'applicazione continua $f \in \mathcal{C}(B(\xi), B(\zeta))$ tale che $f^*(\zeta)$ sia equivalente a ξ .

Possiamo ricondurre il problema della costruzione di fibrati m -universali al caso dei fibrati principali.

PROPOSIZIONE 2.8.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un F-fibrato di Steenrod ζ sia m-universale è che lo sia il fibrato \mathbf{G} -principale ζ^\sharp ad esso associato.* \square

Ci limiteremo quindi, nel seguito di questo paragrafo, a considerare fibrati \mathbf{G} -principali.

Per il Teorema 2.5.17, un fibrato \mathbf{G} -principale ζ è m -universale se e soltanto se, per ogni fibrato \mathbf{G} -principale ξ con $B(\xi)$ spazio cellulare di dimensione minore o uguale di m , esiste un morfismo di fibrati \mathbf{G} -principali $f : \xi \rightarrow \zeta$.

TEOREMA 2.8.3. *Un fibrato \mathbf{G} -principale ζ il cui spazio totale $E(\zeta)$ sia $(m-1)$ -connesso è m-universale.* \square

Per fibrati con struttura di gruppo vale ancora il teorema di estensione che abbiamo dimostrato senza ipotesi di struttura sulle fibre (Teorema 1.6.1).

PROPOSIZIONE 2.8.4. *Siano ζ, ξ due fibrati \mathbf{G} -principali ed $A \subset B(\xi)$ un sottospazio per cui $(B(\xi), A)$ sia una coppia cellulare relativa di dimensione minore o uguale ad m . Se $E(\zeta)$ è $(m-1)$ -connesso, allora ogni \mathbf{G} -morfismo $f_A : \xi|_A \rightarrow \zeta$ si estende ad un morfismo di fibrati \mathbf{G} -principali $f : \xi \rightarrow \zeta$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo fissata la struttura di CW -complesso relativo di $(B(\xi), A)$. Poniamo $A_{-1} = A$ e, per $k \geq 0$, indichiamo con $A_k = S_k(B(\xi), A)$ il suo scheletro k -dimensionale (unione di A e delle celle di dimensione minore o uguale a k di $B(\xi) \setminus A$). Dimostriamo per ricorrenza che è possibile definire, per ogni intero k con $0 \leq k \leq m$, un'estensione $f^{(k)} : \xi|_{A_k} \rightarrow \zeta$ di $f_A : \xi|_A \rightarrow \zeta$.

Indichiamo con \mathcal{K}_k l'insieme delle celle di dimensione k in $B(\xi) \setminus A$. Per l'argomento che utilizzeremo, è utile osservare che, per ogni intero $k \geq 0$ ed ogni $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}_{k+1}$, la coppia $(A_k \cup (\bigcup \mathcal{E}), A)$ è ancora un sotto- CW -complesso relativo di $(B(\xi), A)$.

Poiché $A_0 \setminus A$ è un sottospazio discreto, l'esistenza di $f^{(0)}$ è banale.

Sia $0 \leq k < m$ e supponiamo di aver già costruito l'estensione $f^{(k)}$.

Per ogni $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}_{k+1}$ poniamo $A_{\mathcal{E}} = A_k \cup (\bigcup \mathcal{E})$. Sia \mathcal{J} la famiglia delle $(\mathcal{E}, f_{\mathcal{E}})$ che consistono di un sottoinsieme \mathcal{E} di \mathcal{K}_{k+1} e di un morfismo di fibrati \mathbf{G} -principali $f_{\mathcal{E}} : \xi|_{A_{\mathcal{E}}} \rightarrow \zeta$ che coincida con $f^{(k)}$ su $A_k = A_0$. Introduciamo su \mathcal{J} l'ordinamento

$$(\mathcal{E}_1, f_{\mathcal{E}_1}) < (\mathcal{E}_2, f_{\mathcal{E}_2}) \iff \mathcal{E}_1 \subsetneq \mathcal{E}_2 \text{ ed } f_{\mathcal{E}_2}|_{A_{\mathcal{E}_1}} = f_{\mathcal{E}_1}.$$

La famiglia \mathcal{J} è non vuota perché contiene $(A_0, f^{(k)})$ ed è induttiva. Per il Lemma di Zorn ammette un elemento massimale $(\mathcal{E}_0, f_{\mathcal{E}_0})$. Supponiamo per assurdo che questo elemento massimale sia diverso da A_{k+1} . Scriviamo per semplicità di notazione $A_{\mathcal{E}_0} = A'$, $[f_{\mathcal{E}_0}]_B = g$ ed $[f_{\mathcal{E}_0}]_E = \tilde{g}$.

Dunque (A', A) è un sotto- CW -complesso relativo di $(B(\xi), A)$ che contiene (A_k, A) , per cui è definito un omomorfismo $f_{\mathcal{E}_0} = (g, \tilde{g}) : \xi|_{A'} \rightarrow \zeta$ di fibrati \mathbf{G} -principali.

Per ipotesi, vi è almeno una cella $\mathbf{e} \in \mathcal{K}_{k+1}$ non contenuta in A' .

Sia $\phi_{\mathbf{e}} \in \mathcal{C}(D^{k+1}, B(\xi))$ la sua funzione caratteristica. Poiché $\bar{\mathbf{e}}$ è contrattile, la restrizione di ξ ad $\bar{\mathbf{e}}$ è banale. Fissata una trivializzazione $\lambda_{\bar{\mathbf{e}}} : \bar{\mathbf{e}} \times \mathbf{G} \rightarrow \pi_{\xi}^{-1}(\bar{\mathbf{e}})$, consideriamo l'applicazione continua $\gamma \in \mathcal{C}(S^k, E(\zeta))$ definita dalla composizione

$$S^k \xrightarrow{\phi_{\mathbf{e}}} \partial e \xrightarrow{\lambda_{\bar{\mathbf{e}}}(\cdot, e_{\mathbf{G}})} \pi_{\xi}^{-1}(\partial e) \xrightarrow{\tilde{g}} E(\zeta).$$

Poiché abbiamo supposto che $E(\zeta)$ fosse k -connesso, la γ si estende ad un'applicazione continua $\tilde{\gamma} \in \mathcal{C}(D^{k+1}, E(\zeta))$. Poniamo

$$\tilde{u}(\sigma) = \begin{cases} \tilde{g}(\sigma), & \text{se } \pi_{\xi}(\sigma) \in A', \\ \tilde{\gamma}(\phi_{\mathbf{e}}^{-1}(p)) \cdot \lambda_{\bar{\mathbf{e}}}^{-1}(\sigma), & \text{se } p = \pi_{\xi}(\sigma) \in \mathbf{e}, \end{cases}$$

ed $u = \pi_{\zeta} \circ \tilde{u}$. La coppia (u, \tilde{u}) definisce un morfismo f_u di fibrati \mathbf{G} -principali che estende $f_{\mathcal{E}_0} = (g, \tilde{g})$ a $\xi|_{A' \cup \mathbf{e}}$. Poiché $(\mathcal{E}_0 \cup \{\mathbf{e}\}, f_u) \in \mathcal{J}$ e

$$(\mathcal{E}_0, f_{\mathcal{E}_0}) < (\mathcal{E}_0 \cup \{\mathbf{e}\}, f_u),$$

questo contraddice la massimalità di $(\mathcal{E}_0, f_{\mathcal{E}_0})$. Ciò dimostra l'esistenza dell'estensione $f^{(k+1)}$ e dunque, per ricorrenza, se $m < \infty$, dell'estensione $f = f^{(m)}$.

Se $m = \infty$, osserviamo che, dal momento che gli A_k formano un ricoprimento fondamentale di $B(\xi)$ e gli $E(\xi)|_{A_k}$ un ricoprimento fondamentale di $E(\xi)$. Quindi la $f : \xi \rightarrow \zeta$, definita da $f|_{A_k} = f^{(k)}$ per ogni $k \geq 0$, è un omomorfismo di \mathbf{G} -fibrati principali che estende f_A . La dimostrazione è completa. \square

OSSERVAZIONE 2.8.5. La condizione che $E(\zeta)$ sia $(m-1)$ -connesso è necessaria perché l'enunciato della Prop.2.8.4 sia valido per ogni fibrato \mathbf{G} -principale ξ la cui base sia un CW -complesso di dimensione minore o uguale ad m . Infatti ogni applicazione continua $\phi \in \mathcal{C}(S^n, E(\zeta))$ definisce un \mathbf{G} -omomorfismo $(f_{S^{n-1}}, \tilde{f}_{S^{n-1}})$ del fibrato banale $S^n \times \mathbf{G} \rightarrow S^n$ in ζ , ove si ponga $\tilde{f}(x, a) = \phi(x) \cdot a$ per ogni $x \in S^n$ ed $a \in \mathbf{G}$. Un'estensione (f, \tilde{f}) di $(f_{S^{n-1}}, \tilde{f}_{S^{n-1}})$ ad un \mathbf{G} -omomorfismo del fibrato banale $D^{n+1} \times \mathbf{G} \rightarrow D^{n+1}$ in ζ definisce un'estensione $\tilde{f}(x, e_G)$ di ϕ ad un'applicazione continua da D^{n+1} in $E(\zeta)$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.8.3. Fissiamo una cella $A = \{b_0\}$ di dimensione 0 di $B(\xi)$ e consideriamo l'applicazione che fa corrispondere al punto b_0 un qualsiasi punto z_0 di $B(\zeta)$. Fissati $\sigma_0 \in \pi_{\xi}^{-1}(b_0)$ e $\tau_0 \in \pi_{\zeta}^{-1}(z_0)$, la $\sigma_0 a \rightarrow \tau_0 a$, per ogni $a \in \mathbf{G}$, definisce un morfismo di \mathbf{G} -fibrati principali $f_{b_0} : \xi|_{\{b_0\}} \rightarrow \zeta$. Per la Proposizione 2.8.4 esso si estende ad un omomorfismo di \mathbf{G} -fibrati principali $f : \xi \rightarrow \zeta$, che definisce l'equivalenza $\xi \simeq f^*(\zeta)$. \square

TEOREMA 2.8.6. *Siano ζ un fibrato \mathbf{G} -principale con $E(\zeta)$ m -connesso e B un CW -complesso di dimensione minore o uguale ad m . Se $f_0, f_1 \in \mathcal{C}(B, B(\zeta))$ ed $f_0^*(\zeta)$ ed $f_1^*(\zeta)$ sono equivalenti, allora f_0 ed f_1 sono omotope.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo i pullback $f_i^*(\zeta) = (\pi_i : E_i \rightarrow B)$, con

$$E_i = \{(b, \tau) \in B \times E_{\zeta} \mid f_i(b) = \pi_{\zeta}(\tau)\}, \quad \pi_i : E_i \ni (b, \tau) \rightarrow b \in B.$$

Gli omomorfismi standard $(f_i, \tilde{f}_i) : f_i^*(\zeta) \rightarrow \zeta$ sono definiti da $\tilde{f}_i(b, \tau) = \tau$ per ogni $(b, \tau) \in E_i$. Per ipotesi esiste un'equivalenza $\phi : f_1^*(\zeta) \rightarrow f_2^*(\zeta)$ di \mathbf{G} -fibrati principali, con $\phi_B(b) = b$ e $\phi_E(b, \tau) = (b, \hat{\phi}(b, \tau))$ per $(b, \tau) \in E_1$, ove $\hat{\phi} \in \mathcal{C}(E_1, E(\zeta))$ e $\hat{\phi}(b, \tau \cdot a) = \hat{\phi}(b, \tau) \cdot a$, per ogni $(b, \tau) \in E_1$ ed $a \in \mathbf{G}$.

Il prodotto $B \times [0, 1]$ è un CW -complesso di dimensione minore o uguale ad $(m+1)$. Sia $\text{pr}_B : B \times [0, 1] \rightarrow B$ la proiezione sul primo fattore e $\xi = \text{pr}_B^*(f_0^*(\zeta))$ l'immagine inversa su $B \times [0, 1]$ di $f_0^*(\zeta)$. Osserviamo che $A_i = B \times \{i\}$, per $i = 0, 1$, ed $A = A_0 \cup A_1$, sono sottospazi cellulari di $B \times [0, 1]$. Definiamo $\phi_A : \xi|_A \rightarrow \zeta$ ponendo

$$[\phi_A]_B(b, i) = f_i(b) \text{ se } b \in B, i = 0, 1, \text{ e}$$

$$[\phi_A]_E(b, i; \tau) = \begin{cases} \tilde{f}_1(p, \tau), & \text{se } (b, \tau) \in E_1, i = 0, \\ \tilde{f}_2(p, \hat{\phi}(b, \tau)), & \text{se } (b, \tau) \in E_1, i = 1. \end{cases}$$

Per la Proposizione 2.8.4 la ϕ_A si estende ad una $\phi : \xi \rightarrow \zeta$. In particolare, $\phi_B = (f_i) \in \mathcal{C}(B \times [0, 1], B(\zeta))$ definisce un'omotopia tra f_0 ed f_1 . \square

Come conseguenza dei Teoremi 2.8.3 e 2.8.6 abbiamo

TEOREMA 2.8.7. *Sia ζ un fibrato \mathbf{G} -principale, con spazio totale m -connesso. Allora, per ogni CW-complesso B di dimensione minore o uguale ad m , la corrispondenza*

$$\mathcal{C}(B, B(\zeta)) \ni f \longrightarrow f^*(\zeta)$$

definisce per passaggio ai quozienti una bigezione tra l'insieme $\pi(B, B(\zeta))$ delle classi di omotopia di applicazioni continue da B in $B(\zeta)$ e l'insieme dei fibrati \mathbf{G} -principali con base B modulo equivalenza. \square

OSSERVAZIONE 2.8.8. Osserviamo che, se il gruppo \mathbf{G} è m -connesso, allora il fibrato banale ζ con $B(\zeta) = \{\text{un punto}\}$ è $(m+1)$ -universale.

2.9. Fibrati di Milnor

J. Milnor, in [53, 55] ha dato una costruzione canonica di fibrati m -universali. Per descriverla, dobbiamo richiamare la nozione di *giunto* di spazi topologici.

Giunto di spazi topologici. Siano A, B due spazi topologici non vuoti. Consideriamo lo spazio vettoriale libero generato dall'unione disgiunta di A e B , ed indichiamo con $A * B$ l'insieme⁶

$$(2.16) \quad A * B = \{(1-t)a + tb \mid a \in A, b \in B, 0 \leq t \leq 1\}.$$

L'applicazione

$$\pi : A \times B \times [0, 1] \ni (a, b, t) \longrightarrow (1-t)a + tb \in A * B$$

è surgettiva e possiamo quindi considerare su $A * B$ la topologia quoziente: $A * B$ si ottiene dal cilindro $A \times B \times [0, 1]$ di base $A \times B$, identificando ad un punto ciascuno dei sottoinsiemi $\{a\} \times B \times 0$ ed $A \times \{b\} \times 1$.

DEFINIZIONE 2.9.1. Con questa topologia, $A * B$ si dice *il giunto* degli spazi A, B .

Il giunto $A * B$ è connesso per archi e contiene i sottospazi chiusi $\pi(A \times B \times \{0\})$, omeomorfo ad A , $\pi(A \times B \times \{1\})$ omeomorfo a B , mentre i sottospazi $\pi(A \times B \times \{t\})$, per $0 < t < 1$, sono omeomorfi ad $A \times B$. Si usano identificare, per semplicità di scrittura, A e B ai corrispondenti sottospazi di $A * B$ ed $A \times B$ a $\pi(A \times B \times \{\frac{1}{2}\})$.

Casi particolari sono il *cono di base* A , che è il giunto $A * D^0$ di A con l'insieme formato da un solo punto e la *sospensione di* A , che è il giunto $A * S^0$ di A con lo spazio formato da due punti.

La *giunzione* di spazi topologici è un'operazione *associativa*: si verifica facilmente che, se A_1, A_2, A_3 sono tre spazi topologici, allora $(A_1 * A_2) * A_3$ è omeomorfo ad $A_1 * (A_2 * A_3)$. Potremo quindi indicare senza ambiguità con $A_1 * \cdots * A_n$ il giunto di n spazi topologici. Possiamo ancora scrivere

$$(2.17) \quad A_1 * \cdots * A_n = \{t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n \mid a_i \in A_i, t_i \geq 0, t_1 + \cdots + t_n = 1\},$$

come sottospazio dello spazio vettoriale libero generato dalla loro unione disgiunta $A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$. Identifieremo A_i al sottospazio formato dai punti con $t_i = 1$.

⁶Supponiamo per semplicità di scrittura che A e B siano disgiunti. Altrimenti, dovremmo considerare l'unione disgiunta $A \sqcup B$ come il sottoinsieme di $(A \cup B) \times \{0, 1\}$ formato dalle coppie $(a, 0)$ con $a \in A$ e $(b, 1)$ con $b \in B$ e scrivere, in (2.16), $(1-t)(a, 0) + t(b, 1)$ invece di $(1-t)a + tb$.

ESEMPIO 2.9.2. Osserviamo che $S^0 * S^0 \simeq S^1$, ed, in generale,

$$\underbrace{S^0 * \dots * S^0}_{(n+1) \text{ volte}} \simeq S^n.$$

PROPOSIZIONE 2.9.3. *Il giunto di n spazi topologici è $(n-2)$ -connesso.*

Divideremo la dimostrazione di questa proposizione in quella di una serie di lemmi.

LEMMA 2.9.4. *Se A_1 è connesso per archi ed $A_2 \neq \emptyset$, allora $A_1 * A_2$ è semplicemente connesso.*

DIMOSTRAZIONE. La proiezione $\text{pr}_I : A_1 \times A_2 \times I \rightarrow I$ sulla terza coordinata definisce per passaggio al quoziente un'applicazione continua $\hat{\text{pr}}_I : A_1 * A_2 \rightarrow I$. Data quindi una $f \in \mathcal{C}(S^1, A_1 * A_2)$, la $t(s) = \hat{\text{pr}}_I \circ f(s)$, per $s \in S^1$, definisce un'applicazione continua $t \in \mathcal{C}(S^1, I)$. Possiamo allora rappresentare f mediante

$$f(s) = (1 - t(s))a_1(s) + t(s)a_2(s),$$

con $a_1 \in \mathcal{C}(S^1 \setminus t^{-1}(1), A_1)$, $a_2 \in \mathcal{C}(S^1 \setminus t^{-1}(0), A_2)$.

Possiamo definire una funzione continua $b_1 \in \mathcal{C}(S^1, A_1)$ che coincida con a_1 quando $t(s) \leq \frac{1}{2}$. Infatti, l'insieme $\{s \in S^1 \mid t(s) > \frac{1}{2}\}$ è unione, al più numerabile, di archi aperti $\widehat{s's''}$. Poiché A_1 è connesso per archi, possiamo trovare per ciascuno di essi un'applicazione continua $b_{\widehat{s's''}} \in \mathcal{C}(\widehat{s's''}, A_1)$ con $b_{\widehat{s's''}}(s') = a_1(s')$ e $b_{\widehat{s's''}}(s'') = a_1(s'')$. Definiamo allora

$$b_1(s) = \begin{cases} a_1(s) & \text{se } t(s) \leq \frac{1}{2}, \\ b_{\widehat{s's''}}(s) & \text{se } \widehat{s's''} \text{ è una componente connessa di } \{t(s) > \frac{1}{2}\}. \end{cases}$$

Introduciamo un nuovo parametro $\tau \in [0, 1]$ e poniamo

$$t(s, \tau) = \min\{1, (1 + \tau)t(s)\}, \quad f_\tau(s) = (1 - t(s, \tau))a_1(s) + t(s, \tau)a_2(s).$$

Poiché $t(s, \tau) = 0$ quando $t(s) = 0$ e $t(s, \tau) = 1$ quando $t(s) = 1$, la $f_\tau(s)$ è definita e continua su $S^1 \times [0, 1]$ e descrive perciò un'omotopia tra la f assegnata ed

$$f_1(s) = (1 - t_1(s))b_1(s) + t_1(s)a_2(s), \quad \text{con } t_1(s) = \min\{1, 2t(s)\}.$$

Poiché $b_1 \in \mathcal{C}(S^1, A_1)$, la

$$S^1 \times [0, 1] \ni (s, \tau) \longrightarrow (1 - \tau t_1(s))b_1(s) + \tau t_1(s)a_2(s) \in A_1 * A_2$$

è definita e continua e descrive un'omotopia di f_1 con un laccetto continuo f_2 a valori in A_1 . Fissiamo ora un punto $p_2 \in A_2$. La

$$S^1 \times [0, 1] \ni (s, \tau) \longrightarrow (1 - \tau)b_1(s) + \tau p_2 \in A_1 * A_2$$

è un'omotopia tra f_2 ed un'applicazione costante. La dimostrazione è completa. \square

Indichiamo con $\tilde{H}_q(A)$ il q -esimo gruppo di omologia *ridotta* (a coefficienti interi) di A . Ricordiamo che $H_q(A) = \tilde{H}_q(A)$ se $q > 0$, mentre $H_0(A) = \tilde{H}_0(A) \oplus \mathbb{Z}$.

LEMMA 2.9.5. *Siano A_1 ed A_2 spazi topologici non vuoti e siano $k_1, k_2 \geq -1$ due interi per cui $\tilde{H}_q(A_i) = 0$ se $0 \leq q \leq k_i$, $i = 1, 2$. Allora $\tilde{H}_q(A_1 * A_2) = 0$ per $q \leq k_1 + k_2 + 2$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la successione esatta di Mayer-Vietoris associata alla coppia di aperti $U_1 = (A_1 * A_2) \setminus A_2$ ed $U_2 = (A_1 * A_2) \setminus A_1$. È $U_1 \cup U_2 = A_1 * A_2$, mentre A_2 è un retratto di deformazione di U_1 , A_1 un retratto di deformazione di U_2 ed $A_1 \times A_2$ un retratto di deformazione di $A_1 \times A_2$. Abbiamo quindi una successione esatta di gruppi abeliani

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow \tilde{H}_q(A_1 \times A_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(A_1) \oplus \tilde{H}_q(A_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(A_1 * A_2) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(A_1 \times A_2) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Le inclusioni $A_i \rightarrow A_1 * A_2$ sono omotope ad applicazioni costanti e quindi dalla successione di Mayer-Vietoris ricaviamo le successioni esatte corte

$$0 \rightarrow \tilde{H}_{q+1}(A_1 * A_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(A_1 \times A_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(A_1) \oplus \tilde{H}_q(A_2) \rightarrow 0.$$

Per la formula di Künnet, se $\tilde{H}_q(A_i) = 0$ per $q \leq k_i$, otteniamo che $\tilde{H}_q(A_1 \times A_2) = 0$ per $q \leq k_1 + k_2 + 1$ e quindi $\tilde{H}_q(A_1 * A_2) = 0$ se $q \leq k_1 + k_2 + 2$. \square

Per un teorema di Hurewicz⁷, uno spazio topologico semplicemente connesso A è k -connesso se e soltanto se $\tilde{H}_q(A) = 0$ per ogni $q \leq k$. Otteniamo quindi la

PROPOSIZIONE 2.9.6. *Se A_i è k_i -connesso, per $i = 1, 2$, allora $A_1 * A_2$ è $k_1 + k_2 + 2$ connesso.* \square

Da questa segue la Proposizione 2.9.3. \square

Consideriamo ora una successione $\{A_n\}_{n \geq 1}$ di spazi topologici non vuoti. Possiamo identificare il limite diretto (o induttivo)

$$J(\{A_n\}) = \operatorname{inj} \lim_{n \rightarrow \infty} A_1 * \cdots * A_n$$

con l'insieme

$$J(\{A_n\}) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1, \#\{i \mid t_i \neq 0\} < \infty, a_i \in A_i \right\}.$$

Per ogni n , l'inclusione naturale $\iota_n : A_1 * \cdots * A_n \hookrightarrow J(\{A_n\})$ ci permette di considerare ogni giunto $A_1 * \cdots * A_n$ come un sottoinsieme di $J(\{A_n\})$. La topologia di limite induttivo su $J(\{A_n\})$ è quella per cui $\{A_1 * \cdots * A_n\}_{n \geq 1}$ è un ricoprimento chiuso fondamentale. Un sottoinsieme E di $J(\{A_n\})$ è cioè chiuso se interseca ogni $A_1 * \cdots * A_n$ in un chiuso. Abbiamo

⁷Witold Hurewicz (1904 -1956), matematico polacco. Dopo la formazione a Vienna, fu assistente di Brouwer ad Amsterdam dal 1928 al 1936. Si trasferì poi negli Stati Uniti. A lui si deve la definizione dei gruppi di omotopia di ordine superiore (1935-36), la successione esatta lunga delle fibrazioni e il teorema che mette in relazione omotopia ed omologia.

Sia M è uno spazio topologico. Ad ogni applicazione $f \in \mathcal{C}(S^n, M)$ corrisponde un omomorfismo $f_* : H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z} \rightarrow H_n(M)$. L'immagine $f_*(1)$ dipende soltanto dalla classe di omotopia di f e definisce quindi un'applicazione $\lambda_n : \pi_n(M) \ni [f] \rightarrow f_*(1) \in H_n(M)$, che è un omomorfismo (l'omomorfismo di Hurewicz) per ogni $n \geq 1$. Poniamo $\pi_1^*(M) = \pi_1(M)/[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ (l'abelianizzato del gruppo fondamentale), e $\pi_n^*(M) = \pi_n(M)$ se $n \geq 2$. Il Teorema di Hurewicz ci dice che:

Se $n \geq 1$ ed M è $(n-1)$ -connesso, allora l'applicazione $\lambda_n : \pi_n^*(M) \rightarrow H_n(M)$ è un isomorfismo.

PROPOSIZIONE 2.9.7. *Se tutti gli spazi topologici A_n sono di Hausdorff, anche $J(\{A_n\})$ è di Hausdorff ed è uno spazio topologico ∞ -connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo due punti $a = \sum \tau_i a_i$ e $b = \sum \lambda_i b_i$ di $J(\{A_n\})$. Se $\tau_{i_0} \neq \lambda_{i_0}$ per qualche indice i_0 , allora $\{t_{i_0} < \frac{1}{2}(\tau_{i_0} + \lambda_{i_0})\}$ e $\{t_{i_0} > \frac{1}{2}(\tau_{i_0} + \lambda_{i_0})\}$ sono intorni disgiunti dei due punti. Se $\tau_i = \lambda_i$ per ogni i , allora $\tau_{i_0} > 0$ ed $a_{i_0} \neq b_{i_0}$ per un indice i_0 . Fissiamo quindi intorni disgiunti U_a ed U_b di a_{i_0} e b_{i_0} in A_{i_0} . Allora gli insiemi $\{t_{i_0} > 0, x_i \in U_a\}$ e $\{t_{i_0} > 0, x_i \in U_b\}$, ove abbiamo indicato con $\sum t_i x_i$ il generico punto di $J(\{A_n\})$, sono intorni aperti disgiunti di a e b in $J(\{A_n\})$.

Osserviamo ora che ogni compatto K di $J(\{A_n\})$ è contenuto in uno dei sottospazi $A_1 * \dots * A_n$. Infatti, se così non fosse, potremmo trovare una successione $\{x^{(n)}\}$ di punti di K con $x^{(n)} \notin A_1 * \dots * A_n$ per ogni intero positivo n . Questa successione sarebbe chiusa, e discreta, perché interseca ciascun $x^{(m)} \in A_1 * \dots * A_n$ al più per un numero finito di indici m . Essendo contenuta nel compatto K , l'insieme $K_0 = \{x^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ dovrebbe essere compatto, ma questo non è possibile perché è infinito e ha la topologia discreta. Abbiamo ottenuto una contraddizione che dimostra che K è contenuto in uno dei sottospazi $A_1 * \dots * A_n$.

Sia $f \in \mathcal{C}(S^n, J(\{A_i\}))$. Essendo un compatto, $f(S^n)$ è contenuto in $A_1 * \dots * A_\nu$ per qualche intero positivo ν .

Possiamo allora estendere la F ad una $\tilde{f} : D^{n+1} \rightarrow A_1 * \dots * A_\nu * A_{\nu+1}$, fissando un punto $p_0^{(\nu+1)} \in A_{\nu+1}$ e ponendo

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} |y|f(y/|y|) + (1 - |y|)b_0^{\nu+1}, & \text{se } y \neq 0, \\ b_0^{(\nu+1)}, & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Questo completa la dimostrazione. Osserviamo che la ∞ -connessione si può anche ottenere come una conseguenza della Proposizione 2.9.3. \square

Costruzione del fibrato standard. Se \mathbf{G} è un gruppo topologico, possiamo definire un'azione di \mathbf{G} sul giunto

$$J^n(\mathbf{G}) = \underbrace{\mathbf{G} * \dots * \mathbf{G}}_{n \text{ volte}}$$

di n copie di \mathbf{G} mediante

$$g \cdot (t_1 g_1 + \dots + t_n g_n) = t_1(gg_1) + \dots + t_n(gg_n).$$

La proiezione nel quoziente $\pi : J^n(\mathbf{G})/\mathbf{G}$ rispetto a quest'azione di gruppo definisce un \mathbf{G} -fibrato principale con spazio totale $(n - 2)$ -connesso.

DEFINIZIONE 2.9.8. Il fibrato $J^{n+2}(\mathbf{G}) \rightarrow J^{n+2}(\mathbf{G})/\mathbf{G}$ si dice *il fibrato di Milnor* con spazio totale n -connesso del gruppo topologico \mathbf{G} .

Come nel paragrafo precedente, possiamo considerare il limite diretto $J^\infty(\mathbf{G})$ dei giunti $J^n(\mathbf{G})$. Risulta definita un'azione di \mathbf{G} su $J^\infty(\mathbf{G})$, che sui sottospazi $J^n(\mathbf{G})$ coincide con quella precedentemente descritta. La proiezione nel quoziente

$$(2.18) \quad \mathfrak{M}(\mathbf{G}) = J^\infty(\mathbf{G}) \longrightarrow J^\infty(\mathbf{G})/\mathbf{G}$$

è un \mathbf{G} -fibrato principale con spazio totale ∞ -connesso.

DEFINIZIONE 2.9.9. Il fibrato (2.18) si dice il *fibrato universale* di Milnor del gruppo topologico \mathbf{G} .

Per il Teorema 2.8.7 abbiamo

TEOREMA 2.9.10. *Sia M un CW-complesso. La corrispondenza*

$$f \in \mathcal{C}(M, J^\infty(\mathbf{G})/\mathbf{G}) \longleftrightarrow f^*(\mathfrak{M}(\mathbf{G}))$$

definisce per passaggio ai quozienti una bigezione tra l'insieme $\pi(M, J^\infty(\mathbf{G})/\mathbf{G})$ delle applicazioni continue da M in $J^\infty(\mathbf{G})/\mathbf{G}$ modulo omotopia e l'insieme dei \mathbf{G} -fibrati principali con base M , modulo equivalenza. \square

ESEMPIO 2.9.11. Consideriamo il gruppo \mathbb{Z}_2 . Poiché la sfera S^n è $(n-1)$ -connessa, la proiezione naturale $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ definisce un fibrato \mathbb{Z}_2 -principale, che è n -universale per \mathbb{Z}_2 e coincide con il fibrato di Milnor.

Ogni fibrato \mathbb{Z}_2 -principale su S^1 si può ottenere, a meno di equivalenza, come il pullback di un'applicazione continua $f \in \mathcal{C}(S^1, S^1)$. Queste sono classificate da $\pi(S^1, S^1) \simeq \mathbb{Z}$. Per classificare i fibrati \mathbb{Z}_2 -principali su S^1 abbiamo però bisogno di un fibrato \mathbb{Z}_2 -principale con spazio totale semplicemente connesso, ad esempio $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$. Quindi le classi di equivalenza dei fibrati \mathbb{Z}_2 -principali su S^1 è in corrispondenza biunivoca con $\pi(S^1, \mathbb{R}P^2) \simeq \pi_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}_2$.

ESEMPIO 2.9.12. Consideriamo il gruppo abeliano \mathbb{Z}_3 . Possiamo raffigurarci $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$ facendo corrispondere alle due copie $\{a_0, a_1, a_2\}$ e $\{b_0, b_1, b_2\}$ i vertici del perimetro di un esagono regolare, nell'ordine, ad esempio, $a_0 b_3 a_1 b_0 a_2 b_1$, aggiungendovi le diagonali dei vertici opposti $a_0 b_0, a_1 b_1, a_2 b_2$ e muovendo nello spazio queste diagonali in modo che non si intersechino tra loro. Il quoziente $(\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3)/\mathbb{Z}_3$ è omeomorfo all'unione di una circonferenza con un suo diametro ed è omotopicamente equivalente al bouquet di due circonferenze. Infatti $\{a_0, a_1, a_2\}$ si identifica ad un punto e così $\{b_0, b_1, b_2\}$. Il quoziente inoltre identifica i punti dei segmenti (a_i, b_j) con $i + j \equiv k \pmod{3}$. La figura che otteniamo è quindi un'unione di tre archi con estremi in comune.

Esaminiamo la costruzione utilizzando su $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$ la struttura di complesso simpliciale. Essa può essere descritta assegnando i vertici $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ ed i lati (a_i, b_j) con $i, j \in \{0, 1, 2\}$. Abbiamo quindi 6 vertici e 9 lati. Nel passaggio al quoziente i vertici a_i si identificano tra loro e così anche i vertici b_i , mentre i tre segmenti che escono da ciascun vertice rimangono distinti. Per calcolare la struttura simpliciale del quoziente $(\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3)/\mathbb{Z}_3$ è quindi conveniente considerare la suddivisione baricentrica di $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$. Aggiungiamo ai 6 vertici i punti medi $c_{i,j} = \frac{1}{2}(a_i + b_j)$ dei 9 lati. I lati nella nuova suddivisione sono gli $(a_i, c_{i,j})$ e i $(b_i, c_{j,i})$ con $i, j \in \{0, 1, 2\}$. Abbiamo così 15 vertici e 18 lati. Osserviamo ora che nel passaggio al quoziente si identificano i vertici che appartengono allo stesso insieme della partizione $\{a_0, a_1, a_2\}, \{b_0, b_1, b_2\}, \{c_{i,j} \mid i + j \equiv k \pmod{3}\}$, per $k = 0, 1, 2$. Possiamo interpretare le loro proiezioni come i 5 vertici di una triangolazione di $(\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3)/\mathbb{Z}_3$. I lati $(a_i, c_{i,j})$ con $i + j \equiv k$, per $k = 0, 1, 2$ sono ancora identificati tra loro e così lo sono i $(b_j, c_{i,j})$. Otteniamo quindi 6 lati, che insieme ai 5 vertici definiscono una triangolazione di $(\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3)/\mathbb{Z}_3$.

Il giunto $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$ è un complesso simpliciale di dimensione due, di cui è facile descrivere una triangolazione: gli elementi $\{a_0, a_1, a_2\}$, $\{b_0, b_1, b_2\}$, $\{c_0, c_1, c_2\}$ delle tre copie di \mathbb{Z}_3 si prendono come i 9 vertici, le coppie (a_i, b_j) , (a_i, c_j) e (b_i, c_j) con $i, j \in \{0, 1, 2\}$ sono i 27 lati e le triplette (a_i, b_j, c_k) con $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$ le 27 facce. La caratteristica di Eulero $9 - 27 + 27 = 9$ è dispari (la superficie ottenuta non è orientabile).

Il quoziente $(\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3)/\mathbb{Z}_3$ si può ancora descrivere come un complesso simpliciale. Nel passaggio al quoziente, i vertici relativi ad uno stesso \mathbb{Z}_3 sono identificati dalla relazione d'equivalenza. Non si identificano però tra loro i diversi segmenti che li uniscono. Per calcolare il quoziente si può allora partire dalla suddivisione baricentrica del complesso simpliciale associato a $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$. Il numero dei vertici è uguale alla somma di quello dei vertici, di quello dei lati, e quello delle facce cioè $9 + 27 + 27 = 63$. Il numero dei lati è il doppio di quello dei lati del non suddiviso, più sei volte il numero delle facce, cioè $2 \times 27 + 6 \times 27 = 216$. Il numero delle facce è sestuplicato. Sono cioè $6 \times 27 = 162$. Osserviamo che si è conservata la caratteristica di Eulero: $63 - 216 + 162 = 9$. Passando al quoziente, $(\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3)/\mathbb{Z}_3$ ha una triangolazione che si ottiene per passaggio al quoziente, dal momento che lati e facce che abbiano un punto interno equivalente sono equivalenti. In questa triangolazione ci sono 21 vertici, 72 lati e 54 facce, per una caratteristica di Eulero $21 - 72 + 54 = 3$.

CAPITOLO III

Alcuni spazi omogenei

Le varietà di Stiefel e di Grassmann reali, complesse e quaternioniche ci permettono di costruire fibrati universali che possiamo utilizzare per classificare, modulo equivalenza, i fibrati vettoriali sui campi corrispondenti. In questo capitolo discutiamo alcune loro proprietà e sviluppiamo altri interessanti esempi di spazi omogenei.

3.1. Varietà di Stiefel reali

Associamo ad una m -upla di vettori di \mathbb{R}^n la matrice $X = (v_1, \dots, v_m)$ di $\mathbb{R}^{n \times m}$ di cui essi formano le colonne. La condizione che gli m vettori formino un sistema ortonormale si può esprimere con l'equazione $X^T X = I_m$ e quindi

$$(3.1) \quad \mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times m} \mid X^T X = I_m\}$$

identifica le m -uple ortonormali di \mathbb{R}^n a un sottospazio dello spazio euclideo $\mathbb{R}^{n \times m}$.

DEFINIZIONE 3.1.1. Chiamiamo $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ la *varietà di Stiefel* degli m -riferimenti ortonormali di \mathbb{R}^n .

Consideriamo su $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ la topologia e la struttura differenziale di sottospazio.

Osserviamo che

- $\mathcal{V}_1(\mathbb{R}^n)$ è la sfera $(n-1)$ -dimensionale S^{n-1} di \mathbb{R}^n ;
- $\mathcal{V}_{n-1}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbf{SO}(n)$;
- $\mathcal{V}_n(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbf{O}(n)$.

Le varietà di Stiefel reali generalizzano quindi, allo stesso tempo, le sfere, i gruppi ortogonali e i gruppi speciali ortogonali.

TEOREMA 3.1.2. *La varietà di Stiefel reale $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ è una varietà analitica compatta di dimensione $m(2n-m-1)/2$. Se $1 \leq m < n$, allora $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ è diffeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-m)$ e quindi, in particolare, connessa per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già osservato che $\mathcal{V}_{n,n} = \mathbf{O}(n)$ e quindi una varietà compatta di dimensione $n(n-1)/2$, con due componenti connesse, ciascuna diffeomorfa ad $\mathbf{SO}(n)$.

Se $1 \leq m < n$, allora $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ è l'orbita, per l'azione a sinistra di $\mathbf{SO}(n)$ su $\mathbb{R}^{n \times m}$, di (e_1, \dots, e_m) : questa affermazione equivale al fatto che ogni m -upla (v_1, \dots, v_m) di vettori ortonormali può completarsi ad una base ortonormale (v_1, \dots, v_n) di \mathbb{R}^n con $\det(v_1, \dots, v_n) = 1$. Lo stabilizzatore di (e_1, \dots, e_m) è il sottogruppo

$$\left\{ \begin{pmatrix} I_m & \\ & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{SO}(n-m) \right\} \simeq \mathbf{SO}(n-m).$$

La $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ è quindi \mathcal{C}^ω -diffeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-m)$ e perciò una varietà analitica compatta di dimensione

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{SO}(n) - \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{SO}(n-m) = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2} = \frac{m(2n-m-1)}{2}.$$

Poiché $\mathbf{SO}(n)$ è connesso per archi, anche $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ è connessa per archi. \square

Dalla rappresentazione di $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ come spazio omogeneo $\mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-m)$, ricaviamo la successione esatta di omotopia¹

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{SO}(n-m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{SO}(n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(n-m)) & \longrightarrow & \cdots & \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n-m)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)) \\ & & \longrightarrow & 0. & & & \end{array}$$

Inoltre, per ogni coppia d'interi k, m con $1 \leq k < m < n$, la

$$(3.3) \quad \varpi : \mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow (v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{V}_k(\mathbb{R}^n)$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathcal{V}_{m-k}(\mathbb{R}^{n-k})$. Otteniamo quindi una successione esatta di omotopia

$$(3.4) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathcal{V}_k(\mathbb{R}^n)) \\ \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}_{m-k}(\mathbb{R}^{n-k})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}_k(\mathbb{R}^n)) \\ \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathcal{V}_{m-k}(\mathbb{R}^{n-k})) & \longrightarrow & \cdots & & & \end{array}$$

Possiamo utilizzare le (3.2) e (3.4) per studiare l'omotopia delle varietà di Stiefel reali.

PROPOSIZIONE 3.1.3. *Sia m un intero con $1 \leq m < n$. La varietà di Stiefel reale $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$, è $(n-m-1)$ -connessa e*

$$(3.5) \quad \pi_{n-m}(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n-m \text{ è pari, o } m = 1, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } n-m \text{ è dispari ed } m \geq 2. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per ricorrenza su $m \geq 1$. Poiché, come abbiamo osservato in precedenza, $\mathcal{V}_1(\mathbb{R}^n) = \mathbf{S}^{n-1}$, la tesi è vera se $m = 1$. Sia ora $m > 1$ e supponiamo la tesi sia verificata per le varietà di Stiefel reali $\mathcal{V}_k(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq k < m$. Per $k = m-1$, poiché $\mathcal{V}_1(\mathbb{R}^{n-m+1}) \simeq \mathbf{S}^{n-m}$, la (3.4) ci dà la successione esatta

$$(3.6) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{S}^{n-m}) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}_{m-1}(\mathbb{R}^n)) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{S}^{n-m}) & \longrightarrow & \cdots & \end{array}$$

Se $h < n-m$, allora $\pi_h(\mathbf{S}^{n-m}) = 0$, e $\pi_h(\mathcal{V}_{m-1}(\mathbb{R}^n)) = 0$ per l'ipotesi induttiva. Quindi anche $\pi_h(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)) = 0$. Questo prova che $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ è $(n-m-1)$ -connessa.

¹Per semplicità in questa, e nelle altre successioni esatte in questo paragrafo ometteremo di indicare il punto base.

Rimane da verificare la (3.5). Sappiamo che essa vale per $m = 1$. Per $k = 1$, la (3.4) dà la successione esatta di omotopia

$$\pi_{n-m+1}(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_{n-m}(\mathcal{V}_{m-1}(\mathbb{R}^{n-1})) \longrightarrow \pi_{n-m}(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow \pi_{n-m}(S^{n-1}).$$

Se $m > 2$, è $\pi_{n-m+1}(S^{n-1}) = 0$ e $\pi_{n-m}(S^{n-1}) = 0$, da cui ricaviamo l'isomorfismo $\pi_{n-m}(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)) \simeq \pi_{n-m}(\mathcal{V}_{m-1}(\mathbb{R}^{n-1}))$ per ogni m con $2 < m < n$.

Per completare la dimostrazione, sarà quindi sufficiente verificare che la (3.5) vale nel caso $m = 2$. Per $k = 1$ ed $m = 2$ la (3.4) ci dà la successione esatta di omotopia:

$$(3.7) \quad \mathbb{Z} = \pi_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\Delta_*} \mathbb{Z} = \pi_{n-2}(S^{n-2}) \longrightarrow \pi_{n-2}(\mathcal{V}_2(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow 0.$$

Per semplificare la notazione, è conveniente porre $v = (n-1)$ e fissare in \mathbb{R}^{v+1} la base ortonormale e_0, e_1, \dots, e_v . Scegliamo, come punti base,

- (e_v, e_0) in $\mathcal{V}_2(\mathbb{R}^{v+1})$,
- e_v in S^v ,
- e_0 in $S^{v-1} = S^v \cap e_v^\perp$.

Posto $S_+^v = \{\mathbf{x} \in S^v \mid x_v = (\mathbf{x}|e_v) \geq 0\}$, è $\pi_v(S^v, e_v) \simeq \pi(S_+^v, S^{v-1}; S^v, e_v)$. Una $f \in \mathcal{C}(S_+^{v-1}, S^{v-2}; S^{v-1}, e_v)$ si rialza ad una $\tilde{f} \in \mathcal{C}(S_+^{v-1}, e_0; \mathcal{V}_2(\mathbb{R}^{v+1}), (e_v, e_0))$. La sua restrizione ad S^{v-1} è la classe di omotopia di $\Delta_*([f])$. Per calcolare l'immagine di Δ_* , osserviamo che la $\psi(\mathbf{x}) = e_v - 2x_v \cdot \mathbf{x}$ è un'applicazione in $\mathcal{C}(S_+^v, S^{v-1}; S^v, e_v)$ la cui classe di omotopia corrisponde a quella dell'identità su S^v . Quindi $\Delta_*(\pi_v(S^v))$ è generato da $\Delta_*([\psi])$. Possiamo considerare il rialzamento

$$\tilde{\psi} = \{\mathbf{x} \longrightarrow (e_v - 2x_v \cdot \mathbf{x}, 2x_0 \cdot \mathbf{x} - e_0)\} \in \mathcal{C}(S^v, e_0; \mathcal{V}_2(\mathbb{R}^{v+1}), (e_v, e_0)).$$

Allora $\Delta_*([\tilde{\psi}])$ è la classe di omotopia di $\psi_0(\mathbf{x}) = 2x_0 \cdot \mathbf{x} - e_0$ in $\pi_{v-1}(S^{v-1}, e_0)$.

Ricordiamo che l'intero corrispondente alla classe di ψ_0 in $\pi_{v-1}(S^{v-1}, e_0)$ è il suo *grado* (vedi §??), che si può calcolare sommando le segnature del suo jacobiano nelle controimmagini di un suo valore regolare. Possiamo scegliere il valore regolare e_0 , che ha come controimmagini $\pm e_0$. Abbiamo $d\psi(e_0)(v) = 2 \cdot v$ e $d\psi_0(-e_0)(v) = -2v$ per $v \in \mathbb{R}^{v-2}$. Poiché $\det(-I_{v-2}) = (-1)^v$, abbiamo $[\psi_0] = 2$ se v è pari, $[\psi_0] = 0$ se v è dispari.

Ricordando che $n = v + 1$, abbiamo ottenuto che l'immagine di $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}$ in $\pi_{n-2}(S^{n-2}) \simeq \mathbb{Z}$ è $2\mathbb{Z}$ quando n è dispari e $\{0\}$ quando n è pari. Quindi

$$\pi_{n-2}(\mathcal{V}_2(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Questo completa la dimostrazione. \square

3.2. Varietà di Grassmann reali

Dati due interi positivi $m < n$, indichiamo con $\mathcal{G}_m(\mathbb{R}^n)$ l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione m di \mathbb{R}^n . Se $\ell_m \in \mathcal{G}_m(\mathbb{R}^n)$, il prodotto esterno $v_1 \wedge \dots \wedge v_m$ dei vettori di una sua base è univocamente determinato a meno di moltiplicazione

per uno scalare. Viceversa, un elemento α di rango uno² di $\Lambda^m(\mathbb{R}^n)$ determina univocamente l' m -piano $[\alpha] = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \wedge v = 0\}$ di \mathbb{R}^n . Possiamo quindi identificare l'insieme degli n -piani di \mathbb{R}^n ad un sottospazio dello spazio proiettivo associato a $\Lambda^m(\mathbb{R}^n)$:

$$(3.8) \quad \mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n) = \{[\alpha] \mid \text{rk}(\alpha) = 1\} \subset \mathbb{P}(\Lambda^m(\mathbb{R}^n)).$$

DEFINIZIONE 3.2.1. Chiamiamo $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$ *varietà di Grassmann* degli m -piani di \mathbb{R}^n .

PROPOSIZIONE 3.2.2. $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio topologico di Hausdorff, connesso e compatto ed una varietà analitica di dimensione $m(n-m)$.

DIMOSTRAZIONE. La grassmanniana $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$ è l'orbita di $p_0 = [e_1 \wedge \cdots \wedge e_m]$ per l'azione naturale di $\mathbf{SO}(n)$ su $\mathbb{P}(\Lambda^m \mathbb{R}^n)$. Lo stabilizzatore di p_0 è il sottogruppo

$$\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{O}(m), y \in \mathbf{O}(n-m), \det(x) \cdot \det(y) = 1 \right\} \simeq \mathbf{S}(\mathbf{O}(m) \times \mathbf{O}(n-m)).$$

Poiché $\mathbf{SO}(n)$ ed \mathbf{H} sono gruppi di Lie compatti, $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$ è un compatto di Hausdorff e l'applicazione naturale

$$\mathbf{SO}(n)/\mathbf{S}(\mathbf{O}(m) \times \mathbf{O}(n-m)) \rightarrow \mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$$

un diffeomorfismo analitico, che ne definisce la struttura di varietà analitica di dimensione

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2} = m(n-m). \quad \square$$

PROPOSIZIONE 3.2.3. Fissato un prodotto scalare su \mathbb{R}^n , l'applicazione

$$(3.9) \quad \mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n) \ni \ell_m \rightarrow \ell_m^\perp \in \mathcal{G}r_{n-m}(\mathbb{R}^n)$$

che associa ad ogni m -piano ℓ_m l' $(n-m)$ -piano ad esso ortogonale è un diffeomorfismo analitico³. \square

Nello studio delle proprietà geometriche delle varietà di Grassmann potremo quindi, nel seguito, limitarci a considerare il caso in cui $n \geq 2m$.

Consideriamo l'applicazione naturale

$$(3.10) \quad \pi : \mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow \langle v_1, \dots, v_m \rangle \in \mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$$

che associa ad un sistema di m vettori ortonormali di \mathbb{R}^n il sottospazio da essi generato. L'azione a destra di $\mathbf{O}(m)$ su $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ definisce su $(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n), \pi, \mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n), \mathbf{O}(m))$ una struttura di fibrato principale con gruppo strutturale $\mathbf{O}(m)$. I gruppi di omotopia

²Definiamo il *rango* di un tensore alternato di $\Lambda^m(\mathbb{R}^n)$ come il numero minimo di addendi di una sua decomposizione in somma di *monomi* $v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$.

³Per $m = 1$, l'applicazione è una polarità proiettiva rispetto ad una quadrica senza punti reali.

delle varietà di Stiefel e di Grassmann sono quindi legati dalla successione esatta di Serre:

$$(3.11) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)) \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{O}(m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{O}(m)) & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^n)) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

LEMMA 3.2.4. *Per ogni intero non negativo h ed ogni coppia d'interi positivi m, k , con $m \leq k$, le applicazioni $\iota_* : \pi_h(\mathbf{O}(m)) \rightarrow \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^{k+m}))$ hanno immagine nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo presentato $\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^{k+m})$ in (3.1) come lo spazio delle matrici X di $\mathbb{R}^{(k+m) \times m}$ per cui $X^\top X = I_{k+m}$. Identifichiamo $\mathbf{O}(m)$ alla fibra di $\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^{k+m})$ sopra il punto base $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$ di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$ mediante l'inclusione

$$\mathbf{O}(m) \ni x \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^{k+m}).$$

L'omotopia $F : \mathbf{O}(m) \times I \rightarrow \mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^n)$ definita da

$$F(x, t) = \begin{pmatrix} x \cos^2(t\pi/2) + I_m \sin^2(t\pi/2) \\ (x^\top - I_m) \sin(t\pi/2) \cos(t\pi/2) \\ 0_{n-2m,m} \end{pmatrix}$$

definisce una retrazione di deformazione di $\mathbf{O}(m)$ sul punto base $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$ di $\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^n)$. Da questo segue la tesi. \square

In particolare, dalla successione esatta (3.11) ricaviamo, per ogni intero $h \geq 0$, le successioni esatte corte:

$$(3.12) \quad 0 \rightarrow \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{O}(m)) \rightarrow 0.$$

Abbiamo perciò, tenuto conto del diffeomorfismo (3.9),

TEOREMA 3.2.5. *Siano $1 \leq m < n$ e $v = \min\{m, n-m\}$. Allora*

$$(3.13) \quad \pi_1(\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)) = \mathbb{Z}_2, \quad \forall n \geq 3 \quad \text{ed} \quad 1 \leq m < n$$

ed inoltre

$$(3.14) \quad \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } 2 \leq h < n - v, \\ \mathbb{Z} \oplus \pi_{n-v-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } h = n - v \text{ è pari o } v = 1, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \pi_{n-v-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } h = n - v \text{ è dispari e } v \geq 3. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza della successione esatta (3.12) e del fatto che la varietà di Stiefel $\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^n)$ è $(n-m-1)$ -connessa. \square

La classica struttura di CW-complesso di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$ si definisce utilizzando le celle di Schubert, associate al metodo di eliminazione di Gauss. Ad una matrice $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ di rango m possiamo associare m interi $s_i(X)$ nel modo seguente: $s_1(X)$ è l'indice della prima riga non nulla di X . Moltiplicando a sinistra la X per una matrice di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$, possiamo ottenere una nuova matrice X'_1 che rappresenta lo

stesso elemento di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$, ma ha un solo elemento diverso da zero sulla $s_1(X)$ -esima riga. Consideriamo allora la matrice X_1 che si ottiene cancellando la colonna di X' che contiene tale elemento. Indichiamo con $s_2(X)$ l'indice della prima riga di X_1 diversa da zero. Ripetendo il procedimento, definiamo per ricorrenza una sequenza crescente d'interi $1 \leq s_1(X) < s_2(X) < \dots < s_m(X) \leq n$. Questi numeri sono gli stessi per la matrice X e per quelle che si ottengono moltiplicando a destra X per un elemento di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ e sono perciò degli invarianti associati al sottospazio generato dalle colonne della matrice. Le *celle di Schubert* si definiscono mediante

$$C_{k_1, \dots, k_m} = \{[X] \mid s_i(X) = k_i\},$$

ove abbiamo indicato con $[X]$ il sottospazio generato dalle colonne della matrice X , che supponiamo in $\mathbb{R}^{n \times m}$ e di rango m . La dimensione della cella C_{k_1, \dots, k_m} è

$$\sum_{i=1}^m (n - m + i - k_i) = m(n - m) + \frac{m(m-1)}{2} - \sum_{i=1}^m k_i.$$

In particolare, $C_{1,2,\dots,m}$ è l'unica cella che sia un aperto di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$.

Se $n' > n$, possiamo considerare \mathbb{R}^n come il sottospazio di $\mathbb{R}^{n'}$ formato dai vettori che hanno nulle tutte le componenti di indice minore o uguale ad $(n' - n)$. Da questa inclusione $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n'}$, otteniamo un'inclusione naturale

$$(3.15) \quad \mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^{n'}).$$

PROPOSIZIONE 3.2.6. *L'applicazione $\pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)) \rightarrow \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^{n'}))$ indotta dalla (3.15) è un isomorfismo per ogni $h < \min\{m, n-m\}$ ed ogni $n' > n$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $h < n-m$, e consideriamo la partizione cellulare di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^{n'})$ data dalle celle di Schubert, lo scheletro $(h+1)$ -dimensionale di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^{n'})$ è contenuto in $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$. \square

3.3. Varietà di Stiefel e di Grassmann complesse

Introduciamo in questo paragrafo le varietà di Stiefel e di Grassmann complesse.

DEFINIZIONE 3.3.1. *La varietà di Stiefel complessa*

$$(3.16) \quad \mathcal{V}_m(\mathbb{C}^n) = \{Z \in \mathbb{C}^{n \times m} \mid Z^*Z = I_m\}.$$

è costituita dalle m -uple di vettori ortonormali di \mathbb{C}^n .

Poiché

$$\mathcal{V}_1(\mathbb{C}^n) = S^{2n-1}, \quad \mathcal{V}_{n-1}(\mathbb{C}^n) \simeq \mathbf{SU}(n), \quad \mathcal{V}_n(\mathbb{C}^n) = \mathbf{U}(n),$$

le varietà di Stiefel complesse generalizzano le sfere di dimensione dispari ed i gruppi unitari. Abbiamo:

PROPOSIZIONE 3.3.2. *Per ogni $1 \leq m \leq n$, la $\mathcal{V}_m(\mathbb{C}^n)$ è una varietà analitica di dimensione reale $m(2n-m)$, compatta e connessa per archi. Se $1 \leq m < n$, essa è omeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-m)$.*

DIMOSTRAZIONE. I gruppi di Lie $\mathbf{U}(n)$ ed $\mathbf{SU}(n)$ sono compatti e connessi per archi. Se $1 \leq m < n$, $\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)$ è un'orbita dell'azione naturale a sinistra di $\mathbf{SU}(n)$ su $\mathbb{C}^{n \times m}$. Il gruppo d'isotropia è $\mathbf{SU}(n-m)$. Quindi $\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)$ è \mathcal{C}^ω -diffeomorfo al quoziente $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-m)$ e perciò compatto e connesso per archi ed è una varietà analitica di dimensione $(n^2-1) - ((n-m)^2-1) = 2mn-m^2$. \square

PROPOSIZIONE 3.3.3. $\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)$ è $(2n-2m)$ -connessa e $\pi_{2n-2m+1}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)) = \mathbb{Z}$.

DIMOSTRAZIONE. Fissato un intero positivo k minore di m , l'applicazione

$$(3.17) \quad \mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow (v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{V}'_k(\mathbb{C}^n)$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathcal{V}'_{m-k}(\mathbb{C}^{n-k})$. I gruppi di omotopia delle varietà di Stiefel complesse sono quindi legate dalla successione esatta

$$(3.18) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathcal{V}'_k(\mathbb{C}^n)) & & \\ & & & & & & \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_{m-k}(\mathbb{C}^{n-k})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_k(\mathbb{C}^n)) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathcal{V}'_{m-k}(\mathbb{C}^{n-k})) & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Ragioniamo per ricorrenza su $m \geq 1$ (ed $n > m$ qualsiasi).

Per $m = 1$, $\mathcal{V}'_1(\mathbb{C}^n) = \mathbb{S}^{2n-1}$. La sfera di dimensione $(2n-1)$ è $(2n-2)$ -connessa e $\pi_{2n-1}(\mathbb{S}^{2n-1}) \simeq \mathbb{Z}$. La tesi è quindi verificata per $m = 1$. Fissiamo ora $m > 1$ e supponiamo che, per ogni r con $1 \leq r < m$ la $\mathcal{V}'_r(\mathbb{C}^n)$ sia $(2n-2r)$ -connessa, con $\pi_{2n-2r-1}(\mathcal{V}'_r(\mathbb{C}^n)) \simeq \mathbb{Z}$. Per $k = 1$, la (3.18) ci dà la successione esatta $\cdots \rightarrow \pi_{h+1}(\mathbb{S}^{2n-1}) \longrightarrow \pi_h(\mathcal{V}'_{m-1}(\mathbb{C}^{n-1})) \longrightarrow \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{S}^{2n-1}) \rightarrow \cdots$

Poiché per l'ipotesi induttiva $\mathcal{V}'_{m-1}(\mathbb{C}^{n-1})$ è $(2n-2m)$ -connesso e $\mathcal{V}'_1(\mathbb{C}^n) = \mathbb{S}^{2n-1}$ è $(2n-2)$ -connesso, otteniamo che anche $\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)$ è $(2n-2)$ -connesso.

Utilizziamo ancora la (3.18) con $k = (m-1)$ ed $h = 2n-2m+1$. Abbiamo la successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{2n-2m+2}(\mathcal{V}'_{m-1}(\mathbb{C}^n)) & & \\ & & & & & & \\ & \longrightarrow & \pi_{2n-2m+1}(\mathbb{S}^{2n-2m+1}) & \longrightarrow & \pi_{2n-2m+1}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)) & \longrightarrow & \pi_{2n-2m+1}(\mathcal{V}'_{m-1}(\mathbb{C}^n)) \rightarrow \cdots \end{array}$$

Poiché $\mathcal{V}'_{m-1}(\mathbb{C}^n)$ è $(2n-2m+2)$ -connessa, otteniamo l'isomorfismo

$$\pi_{2n-2m+1}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)) \simeq \pi_{2n-2m+1}(\mathbb{S}^{2n-2m-1}) = \mathbb{Z}. \quad \square$$

DEFINIZIONE 3.3.4. Chiamiamo *varietà di Grassmann complessa* degli m -piani di \mathbb{C}^n lo spazio

$$(3.19) \quad \mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n) = \{[\alpha] \mid \alpha \in \Lambda^m(\mathbb{C}^n), \text{rk}(\alpha) = 1\} \subset \mathbb{P}(\Lambda^m(\mathbb{C}^n)).$$

La corrispondenza $\alpha \rightarrow \ell_m = \{v \in \mathbb{C}^n \mid \alpha \wedge v = 0\}$ dà l'interpretazione geometrica della (3.19).

L'applicazione

$$(3.20) \quad \varpi : \mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow \langle v_1, \dots, v_m \rangle \in \mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n)$$

definisce $\mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n)$ come la base di un fibrato $\mathbf{U}(m)$ -principale, per l'azione a destra di $\mathbf{U}(m)$ sulla varietà di Stiefel $\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)$.

I gruppi di omotopia delle varietà di Grassmann e di Stiefel complesse sono perciò legati dalla successione esatta di Serre:

$$(3.21) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{U}(m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n)) \\ & & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \cdots \\ & & \pi_{h-1}(\mathbf{U}(m)) & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Con una dimostrazione analoga a quella del Lemma 3.2.4 otteniamo

LEMMA 3.3.5. *Se $1 < 2m \leq n$, allora l'applicazione*

$$\pi_h(\mathbf{U}(m)) \rightarrow \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n))$$

in (3.35) ha immagine nulla. \square

Questo ci dà, per ogni intero $h \geq 1$ e per $1 < 2m \leq n$, le successioni esatte corte

$$(3.22) \quad 0 \rightarrow \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)) \longrightarrow \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n)) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{U}(m)) \rightarrow 0.$$

Otteniamo perciò il

TEOREMA 3.3.6. *Sia $v = \min\{m, n-m\}$. Allora, per ogni $1 \leq m < n$ ed $h \geq 1$*

$$(3.23) \quad \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n)) = \pi_{h-1}(\mathbf{U}(v)), \quad \forall h \leq 2n - 2v$$

DIMOSTRAZIONE. Se $2m \leq n$, la tesi segue dalla (3.36) e dal fatto che $\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)$ è $2(n-m)$ -connessa. Per completare la dimostrazione, è sufficiente utilizzare l'omeomorfismo

$$(3.24) \quad \mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n) \ni \ell_m \rightarrow \ell_m^\perp \in \mathcal{G}r_{n-m}(\mathbb{C}^n),$$

dove ℓ_m^\perp è l' $(n-m)$ -piano ortogonale a ℓ_m , rispetto ad un prodotto scalare Hermitiano in \mathbb{C}^n . \square

In particolare, $\pi_1(\mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n)) = 0$ e $\pi_2(\mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n)) = \mathbb{Z}$ per ogni $1 \leq m < n$.

3.4. Varietà di Stiefel e di Grassmann quaternioniche

Nel definire le varietà di Stiefel e di Grassmann su \mathbb{H} dobbiamo tener conto della non commutatività dei quaternioni. Consideriamo \mathbb{H}^n come uno spazio vettoriale *a destra* su \mathbb{H} . In questo modo un'applicazione \mathbb{H} -lineare $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^m$ si può rappresentare mediante la moltiplicazione righe per colonne di una matrice in $\mathbb{H}^{m \times n}$ a sinistra per un vettore colonna in \mathbb{H}^n a destra. La trasformazione \mathbb{H} -lineare a destra definita da una matrice $A \in \mathbb{H}^{n \times n}$ è in particolare \mathbb{R} -lineare ed ammette un'inversa in $\mathbb{H}^{n \times n}$ (che sarà sia destra che sinistra perché l'algebra \mathbb{H} è associativa) se e soltanto se è invertibile come applicazione \mathbb{R} -lineare. Se $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{H}^{m \times n}$, poniamo $A^* = (\bar{a}_{j,i}) \in \mathbb{H}^{n \times m}$.

Su \mathbb{H}^n introduciamo un prodotto scalare iperhermitiano mediante

$$(v|w)_{\mathbb{H}} = w^* v \quad (\text{prodotto riga per colonna}), \quad \forall v, w \in \mathbb{H}^n.$$

Esso è naturalmente additivo rispetto a ciascun fattore, mentre alla sesquilinearità si sostituisce la

$$(v \cdot q_1 | w \cdot q_2)_{\mathbb{H}} = \bar{q}_2 \cdot (v|w)_{\mathbb{H}} \cdot q_1, \quad \forall v, w \in \mathbb{H}^n, \quad \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}.$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathcal{V}'_{m-k}(\mathbb{H}^{n-k})$. Otteniamo quindi una successione esatta di omotopia

$$(3.33) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathcal{V}'_k(\mathbb{H}^n)) \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_{m-k}(\mathbb{H}^{n-k})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_k(\mathbb{H}^n)) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathcal{V}'_{m-k}(\mathbb{H}^{n-k})) & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Ragioniamo per ricorrenza su $m \geq 1$. Per $m = 1$, $\mathcal{V}'_1(\mathbb{H}^n) = \mathbf{S}^{4n-1}$, e sappiamo che la sfera di dimensione $(4n - 1)$ è $(4n - 2)$ -connessa e che $\pi_{4n-1}(\mathbf{S}^{4n-1}) = \mathbb{Z}$. Supponiamo ora che $m > 1$ e che, per ogni r con $1 \leq r < m$ la varietà di Stiefel $\mathcal{V}'_r(\mathbb{H}^n)$ sia $(4n-4r+2)$ -connessa e $\pi_{4n-4r+3}(\mathcal{V}'_r(\mathbb{H}^n)) = \mathbb{Z}$. Utilizziamo la successione esatta (3.33) con $k = 1$. Poiché $\mathcal{V}'_1(\mathbb{H}^n) = \mathbf{S}^{4n-1}$, abbiamo la successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbf{S}^{4n-1}) \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_{m-1}(\mathbb{H}^{n-1})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{S}^{4n-1}) \rightarrow \cdots \end{array}$$

da cui segue che

$$\pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)) \simeq \pi_h(\mathcal{V}'_{m-1}(\mathbb{H}^{n-1})) \quad \text{se } h < 4n - 2.$$

Poiché $(4n - 4m + 3) < (4n - 2)$ se $m > 1$, la tesi segue dall'ipotesi induttiva. \square

Sia $\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)$ l'insieme degli m -piani quaternionici (a destra) di \mathbb{H}^n . Una matrice (v_1, \dots, v_m) i cui vettori siano una base di $\ell_m \in \mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)$ è determinata a meno della moltiplicazione a destra per una matrice invertibile di $\mathbb{H}^{m \times m}$. Se ci limitiamo a considerare basi ortonormali di ℓ_m , le matrici (v_1, \dots, v_m) delle basi ortonormali di ℓ_m sono determinate a meno di moltiplicazione a destra per un elemento di $\mathbf{Sp}(m)$. Il gruppo $\mathbf{Sp}(m)$ opera, per moltiplicazione a destra, su $\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)$. Abbiamo:

LEMMA 3.4.3. *L'applicazione*

$$(3.34) \quad \mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n) \ni (v_1, \dots, v_m) \longrightarrow \langle v_1, \dots, v_m \rangle \in \mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)$$

è surgettiva e definisce, per passaggio al quoziente, una bigezione tra $\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)$ ed il quoziente $\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)/\mathbf{Sp}(m)$. \square

DEFINIZIONE 3.4.4. La varietà di Grassmann $\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)$ consiste degli m -piani quaternionici di \mathbb{H}^n , con la struttura di varietà analitica compatta e connessa che rende (3.34) la mappa di proiezione di un fibrato $\mathbf{Sp}(m)$ -principale.

La dimensione reale di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)$ è quindi

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)) - \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{Sp}(m)) = 4m(n-m).$$

I gruppi di omotopia delle varietà di Grassmann e di Stiefel quaternioniche sono legati dalla successione esatta di Serre:

$$(3.35) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{Sp}(m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{Sp}(m)) & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Con una dimostrazione analoga a quella del Lemma 3.2.4 otteniamo

LEMMA 3.4.5. *Se $1 < 2m \leq n$, allora, per ogni intero h , le applicazioni*

$$\pi_h(\mathbf{Sp}(m)) \rightarrow \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n))$$

in (3.35) hanno immagine nulla. \square

Questo dà, per ogni intero $h \geq 1$ e per $1 < 2m \leq n$, le successioni esatte corte

$$(3.36) \quad 0 \rightarrow \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)) \longrightarrow \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{Sp}(m)) \rightarrow 0.$$

Otteniamo perciò il

TEOREMA 3.4.6. *Sia $v = \min\{m, n-m\}$. Allora, per ogni $1 \leq m < n$*

$$(3.37) \quad \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)) = \pi_{h-1}(\mathbf{Sp}(v)), \quad \forall 1 \leq h \leq 4n - 4v + 2$$

DIMOSTRAZIONE. Se $2m \leq n$, la tesi segue dalla (3.36) e dal fatto che $\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)$ sia $(4n - 4m + 2)$ -connessa. Per completare la dimostrazione, è sufficiente utilizzare l'omeomorfismo

$$(3.38) \quad \mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n) \ni \ell_m \rightarrow \ell_m^\perp \in \mathcal{G}r_{n-m}(\mathbb{H}^n),$$

dove ℓ_m^\perp è l' $(n-m)$ -piano ortogonale a ℓ_m , rispetto ad un prodotto scalare iperhermitiano in \mathbb{H}^n . \square

In particolare, $\pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)) = 0$ per $h = 0, 1, 2$ e $\pi_3(\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)) = \mathbb{Z}$ per ogni $1 \leq m < n$.

3.5. Varietà di sottospazi isotropi

Consideriamo su \mathbb{R}^{m+n} una forma bilineare simmetrica di segnatura (m, n) . Possiamo supporre che $m \leq n$ e che, nella base canonica, la matrice associata alla forma sia la

$$I_{m,n} = \begin{pmatrix} I_m & \\ & -I_n \end{pmatrix}.$$

L'intero m è l'*indice di Witt* della forma: ciò significa che \mathbb{R}^{m+n} contiene sottospazi totalmente isotropi (su cui cioè la forma si restringe alla forma nulla) massimali di dimensione m . Questi formano un sottoinsieme chiuso della grassmanniana $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^{m+n})$.

PROPOSIZIONE 3.5.1. *I sottospazi totalmente isotropi massimali rispetto ad una forma simmetrica di segnatura (m, n) su \mathbb{R}^{m+n} , con $m \leq n$, formano una sottovarietà analitica di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^{m+n})$, diffeomorfa alla varietà di Stiefel $\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^n)$.*

DIMOSTRAZIONE. Un vettore $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$, con $v \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^n$, è totalmente isotropo se e soltanto se $\|v\|_{\mathbb{R}^m} = \|w\|_{\mathbb{R}^n}$. Quindi un sottospazio ℓ_m di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^{m+n})$ totalmente isotropo definisce un'isometria L_{ℓ_m} di \mathbb{R}^m in \mathbb{R}^n , cioè un elemento di $\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^n)$. \square

In modo analogo, possiamo considerare forme hermitiane simmetriche di segnatura (m, n) su \mathbb{C}^{m+n} ed iperhermitiane simmetriche di segnatura (m, n) su \mathbb{H}^{m+n} .

PROPOSIZIONE 3.5.2. *I sottospazi totalmente isotropi massimali rispetto ad una forma hermitiana simmetrica di segnatura (m, n) su \mathbb{C}^{m+n} , con $m \leq n$, formano una sottovarietà analitica di $Gr_m(\mathbb{C}^{m+n})$, diffeomorfa alla varietà di Stiefel $\mathcal{V}_m(\mathbb{C}^n)$.*

I sottospazi totalmente isotropi massimali rispetto ad una forma iperhermitiana simmetrica di segnatura (m, n) su \mathbb{H}^{m+n} , con $m \leq n$, formano una sottovarietà analitica di $Gr_m(\mathbb{H}^{m+n})$, diffeomorfa alla varietà di Stiefel $\mathcal{V}_m(\mathbb{H}^n)$. \square

3.6. Classificazione omotopica dei fibrati principali

Il Teorema 2.8.3 è fondamentale per la classificazione dei fibrati principali la cui base B sia uno spazio cellulare di dimensione finita. Ricordiamo la nozione di fibrato universale introdotta da Milnor (vedi §2.8).

DEFINIZIONE 3.6.1. Un fibrato \mathbf{G} -principale $\zeta = (\pi_\zeta : E(\zeta) \rightarrow B(\zeta))$ si dice *m-universale* se per ogni fibrato \mathbf{G} -principale $\xi = (\pi_\xi : E(\xi) \rightarrow B(\xi))$ la cui base $B(\xi)$ sia un complesso cellulare di dimensione minore o uguale ad m esiste, unica a meno di omotopia, un'applicazione $f \in \mathcal{C}(B(\xi), B(\zeta))$ tale che $f^*(\zeta)$ sia equivalente a ξ .

Per i Teoremi 2.8.3 e 2.8.6 abbiamo:

TEOREMA 3.6.2. *Ogni fibrato \mathbf{G} -principale ζ il cui spazio totale $E(\zeta)$ sia m -connesso⁴ è m -universale. \square*

Costruiamo in questo paragrafo alcuni fibrati principali m -universali che ci permetteranno di classificare omotopicamente diversi fibrati vettoriali muniti di \mathbf{G} -struttura.

3.6.1. Sottogruppi del gruppo ortogonale. Fissiamo due interi positivi m ed n e consideriamo $\mathbf{O}(m)$ ed $\mathbf{O}(n)$ come sottogruppi disgiunti di $\mathbf{O}(m+n)$, ciascuno contenuto nel commutatore dell'altro. Il quoziente $E(\zeta) = \mathbf{O}(m+n)/\mathbf{O}(n)$ è la varietà di Stiefel $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^{m+n})$ delle m -uple ortonormali di \mathbb{R}^{m+n} . Fissiamo un sottogruppo chiuso \mathbf{G} di $\mathbf{O}(m)$ e poniamo $B(\zeta) = \mathbf{O}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{O}(n))$. L'inclusione $\{e\} \times \mathbf{O}(n) \leq \mathbf{G} \times \mathbf{O}(n)$ definisce un'applicazione $\mathbf{O}(m+n)$ -equivariante $\pi_\zeta : E(\zeta) \rightarrow B(\zeta)$ ed una struttura di \mathbf{G} -fibrato principale su ζ . Ricordiamo che la varietà di Stiefel $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^{m+n})$ è $(n-1)$ -connessa e

$$\pi_n(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^{m+n})) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

DEFINIZIONE 3.6.3. Chiamiamo il fibrato ζ , con

$$(3.39) \quad \begin{cases} E(\zeta) = \mathcal{V}_m(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathbf{O}(m+n)/\mathbf{O}(n), \\ B(\zeta) = \mathbf{O}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{O}(n)), \\ \pi_\zeta : \mathbf{O}(m+n)/\mathbf{O}(n) \longrightarrow \mathbf{O}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{O}(n)) \end{cases}$$

l' n -fibrato principale ortogonale standard con gruppo strutturale $\mathbf{G} \leq \mathbf{O}(m)$.

TEOREMA 3.6.4. *Il fibrato (3.39) è \mathbf{G} -principale ed $(n-1)$ -universale. \square*

⁴Ricordiamo che uno spazio topologico E è m -connesso se è connesso per archi ed i suoi gruppi di omotopia $\pi_i(E)$ sono banali per $1 \leq i \leq m$.

Osserviamo che, se $\mathbf{G} = \mathbf{O}(m)$, allora $B(\zeta) = \mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^{m+n})$ è la varietà di Grassmann reale.

3.6.2. Sottogruppi del gruppo unitario. Siano m, n due interi positivi e consideriamo $\mathbf{U}(m)$ ed $\mathbf{U}(n)$ come sottogruppi disgiunti di $\mathbf{U}(m+n)$ contenuti ciascuno nel commutatore dell'altro. Il quoziente $E(\zeta) = \mathbf{U}(m+n)/\mathbf{U}(n)$ è la varietà di Stiefel $\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^{m+n})$. Ricordiamo che

$$\pi_q(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^{m+n})) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq q < 2n, \\ \mathbb{Z}, & \text{se } q = 2n. \end{cases}$$

Se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{U}(m)$, la proiezione naturale $\pi_\zeta : E(\zeta) \rightarrow B(\zeta)$ su $B(\zeta) = \mathbf{U}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{U}(n))$ definita dall'inclusione $\{e\} \times \mathbf{U}(n) \leq \mathbf{G} \times \mathbf{U}(n)$ definisce un fibrato \mathbf{G} -principale.

DEFINIZIONE 3.6.5. Chiamiamo

$$(3.40) \quad \begin{cases} E(\zeta) = \mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^{m+n}) = \mathbf{U}(m+n)/\mathbf{U}(n), \\ B(\zeta) = \mathbf{U}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{U}(n)), \\ \pi_\zeta : \mathbf{U}(m+n)/\mathbf{U}(n) \rightarrow \mathbf{U}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{U}(n)), \end{cases}$$

l' n -fibrato principale unitario standard con gruppo strutturale $\mathbf{G} \leq \mathbf{U}(m)$.

TEOREMA 3.6.6. *Il fibrato (3.40) è \mathbf{G} -principale $(2n-1)$ -universale.* \square

Osserviamo che, se $\mathbf{G} = \mathbf{U}(m)$, allora $B(\zeta) = \mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^{m+n})$ è la varietà di Grassmann complessa.

3.6.3. Sottogruppi del gruppo unitario simplettico. Il gruppo unitario simplettico, o iperunitario, $\mathbf{Sp}(n)$ è il gruppo delle trasformazioni \mathbb{H} -lineari a destra di \mathbb{H}^n che ne lasciano invariato il prodotto scalare iperunitario. Si può anche identificare al sottogruppo di $\mathbf{U}(2n)$ delle trasformazioni che lasciano invariante la forma alternata $\omega = dz^1 \wedge dz^{n+1} + \cdots + dz^{2n-1} \wedge dz^{2n}$. Dati interi positivi m, n , consideriamo $\mathbf{Sp}(m)$ ed $\mathbf{Sp}(n)$ come sottogruppi di $\mathbf{Sp}(m+n)$, ciascuno contenuto nel commutatore dell'altro. Il quoziente $E(\zeta) = \mathbf{Sp}(m+n)/\mathbf{Sp}(n)$ è la varietà di Stiefel quaternionica $\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^{m+n})$ delle m -uple ortonormali di \mathbb{H}^n . Abbiamo

$$\pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^{m+n})) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq h < 4n, \\ \mathbb{Z}, & \text{se } h = 4n. \end{cases}$$

Se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{Sp}(m)$, allora $(\pi_\zeta : E(\zeta) \rightarrow B(\zeta))$, con $B(\zeta) = \mathbf{Sp}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n))$, definita dall'inclusione $\{e\} \times \mathbf{Sp}(n) \leq \mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n)$, è un fibrato \mathbf{G} -principale.

DEFINIZIONE 3.6.7. Chiamiamo

$$(3.41) \quad \begin{cases} E(\zeta) = \mathbf{Sp}(m+n)/\mathbf{Sp}(n) = \mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^{m+n}), \\ B(\zeta) = \mathbf{Sp}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n)), \\ \pi_\zeta : \mathbf{Sp}(m+n)/\mathbf{Sp}(n) \rightarrow \mathbf{Sp}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n)) \end{cases}$$

l' n -fibrato principale iperunitario standard con gruppo strutturale $\mathbf{G} \leq \mathbf{Sp}(m)$.

TEOREMA 3.6.8. *Il fibrato (3.41) è \mathbf{G} -principale $(4n-1)$ -universale.* \square

Per $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}(m)$, la $B(\zeta)$ è la grassmanniana quaternionica $\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^{m+n})$.

3.6.4. Sottogruppi del gruppo lineare. Siano m ed n due interi positivi. Consideriamo $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ ed $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ come due sottogruppi disgiunti di $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})$ che commutano tra loro. Le loro rappresentazioni in $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})$ sono date rispettivamente da

$$\begin{aligned} \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \ni x &\rightarrow \begin{pmatrix} x & & \\ & \text{sgn}(\det x) & \\ & & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R}) \quad \text{ed} \\ \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \ni x &\rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ & x \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Per la decomposizione di Cartan, $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ è omotopicamente equivalente al quoziente $\mathbf{O}(m+n)/\mathbf{O}(n)$, cioè alla varietà di Stiefel $\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^{n+n})$, ed è quindi $(n-1)$ -connesso. Ne segue che, se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$, allora

$$(3.42) \quad \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/(\mathbf{G} \times \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}))$$

è un fibrato \mathbf{G} -principale $(n-1)$ -universale.

Costruzioni analoghe ci permettono di ottenere fibrati \mathbf{G} -principali n -universali per sottogruppi chiusi di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{C})$ e $\mathbf{GL}_m(\mathbb{H})$.

3.7. Sottospazi Lagrangiani reali

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione pari $2n$. Una forma bilineare alternata non degenere ω su V ne definisce una *struttura simplettica*.

DEFINIZIONE 3.7.1. Chiamiamo *totalmente isotropo* un sottospazio W di V per cui sia $\omega(w_1, w_2) = 0$ per ogni $w_1, w_2 \in W$. Un sottospazio totalmente isotropo di dimensione massimale n si dice *lagrangiano*. Indichiamo con $\mathcal{L}(V)$, o $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(V)$, la grassmanniana dei sottospazi lagrangiani di V .

Spazi vettoriali simplettici reali della stessa dimensione sono simpletticamente isomorfi. Possiamo quindi limitarci a discutere un modello standard. Consideriamo $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ e sia ω la parte immaginaria del prodotto scalare hermitiano di \mathbb{C}^n :

$$\omega(v, w) = \text{Im}(w^* v), \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^n.$$

Lo spazio vettoriale reale generato dai vettori di una base ortonormale (v_1, \dots, v_n) di \mathbb{C}^n è un sottospazio lagrangiano di \mathbb{R}^{2n} . Viceversa, ogni sottospazio lagrangiano contiene una base ortonormale rispetto al prodotto scalare hermitiano. Questo ci dice che il gruppo unitario $\mathbf{U}(n)$ opera transitivamente su $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$. Lo stabilizzatore di $\langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ è il gruppo ortogonale $\mathbf{O}(n)$. Otteniamo quindi

PROPOSIZIONE 3.7.2. *La varietà $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ dei sottospazi lagrangiani di \mathbb{R}^{2n} è una varietà analitica, connessa e compatta di dimensione reale $n(n+1)/2$, diffeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{U}(n)/\mathbf{O}(n)$.*

DIMOSTRAZIONE. Connessione e compattezza sono conseguenze della connessione e compattezza del gruppo unitario $\mathbf{U}(n)$. La dimensione di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ è

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{U}(n)) - \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{O}(n)) = n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2. \quad \square$$

La descrizione di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ come spazio omogeneo, ne dà una presentazione come base di un fibrato principale con spazio totale $\mathbf{U}(n)$ e gruppo strutturale $\mathbf{O}(n)$. I gruppi di omotopia della varietà dei sottospazi lagrangiani sono legati a quelli dei gruppi unitario ed ortogonale dalla successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{O}(n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{U}(n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})) \longrightarrow \\ & & & & & & \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{O}(n)) & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{U}(n)) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

che mette in relazione i gruppi di omotopia di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ con quelli del gruppo unitario e del gruppo ortogonale. In particolare, per calcolare il gruppo fondamentale, osserviamo che, poiché $\mathbf{U}(n)$ ed $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ sono connessi ed $\mathbf{O}(n)$ ha due componenti connesse, abbiamo una successione esatta di omotopia

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(\mathbf{O}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{U}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0, \\ \simeq \mathbb{Z}_2 & & \simeq \mathbb{Z} & & & & \end{array}$$

da cui ricaviamo che $\pi_1(\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})) \simeq \mathbb{Z}$. Abbiamo ottenuto

PROPOSIZIONE 3.7.3. *La varietà $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ non è semplicemente connessa, ed ha gruppo fondamentale isomorfo a \mathbb{Z} .* \square

Descriviamo alcuni altri spazi omogenei del gruppo unitario.

Il quoziente $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^{2n}) = \mathbf{U}(n)/\mathbf{SO}(n)$ si può interpretare come lo spazio dei sottospazi lagrangiani *orientati* di \mathbb{R}^{2n} ed è un rivestimento a due fogli di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$.

Una *forma reale* di \mathbb{C}^n è il sottospazio reale generato da una qualsiasi sua base. Ad una forma reale $\ell = \langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{R}}$ possiamo associare il numero complesso

$$\varepsilon(\ell) = \left(\frac{\det(v_1, \dots, v_n)}{|\det(v_1, \dots, v_n)|} \right)^2 \in \mathbb{S}^1.$$

La grassmanniana delle forme reali ℓ per cui $\varepsilon(\ell) = 1$ è una varietà omogenea M , omeomorfa al quoziente $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SO}(n)$ e quindi compatta, connessa e semplicemente connessa di dimensione $(n^2 + n - 2)/2$.

3.8. Sottospazi Lagrangiani complessi

Uno *spazio simplettico complesso* è uno spazio vettoriale complesso V di dimensione pari su cui sia stata fissata una forma bilineare non degenera ω .

DEFINIZIONE 3.8.1. Chiamiamo *totalmente isotropo* un sottospazio W di V per cui sia $\omega(w_1, w_2) = 0$ per ogni $w_1, w_2 \in W$. Un sottospazio totalmente isotropo di dimensione massimale n si dice *lagrangiano*. Indichiamo con $\mathcal{L}(V)$, o con $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V)$, la grassmanniana dei sottospazi lagrangiani di V .

Poiché spazi simplettici complessi della stessa dimensione sono isomorfi, possiamo limitarci a considerare un caso modello.

Siano i, j, k le unità immaginarie standard dell'algebra \mathbb{H} dei quaternioni ed identifichiamo \mathbb{C} il sottospazio reale di \mathbb{H} generato da 1 ed i . Possiamo considerare \mathbb{H}^n come uno spazio vettoriale complesso per restrizione degli scalari. Il prodotto iperunitario di \mathbb{H}^n si potrà scrivere allora nella forma

$$(v|w)_{\mathbb{H}} = w^* v = \text{hor}(v, w) + j \cdot \omega(v, w), \quad \text{con } \text{hor}(v, w), \omega(v, w) \in \mathbb{C}, \forall v, w \in \mathbb{H}^n.$$

Sia hor che ω sono additive rispetto a ciascun argomento. Se $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, abbiamo

$$\begin{aligned} (v \cdot \lambda | w \cdot \mu)_{\mathbb{H}} &= \bar{\mu} \cdot w^* v \cdot \lambda = \bar{\mu} \cdot (\text{hor}(v, w) + j \cdot \omega(v, w)) \cdot \lambda \\ &= (\lambda \cdot \bar{\mu} \cdot \text{hor}(v, w)) + j \cdot (\lambda \cdot \bar{\mu} \cdot \omega(v, w)) \end{aligned}$$

perché $\bar{\mu} \cdot j = j \cdot \mu$. Quindi, la hor è una forma hermitiana simmetrica, mentre la ω è bilineare ed antisimmetrica perché $\omega(v, v) = 0$ per ogni v , in quanto $(v|v)_{\mathbb{H}}$ è reale. Si verifica facilmente che hor è definita positiva ed ω non degenera: infatti $\text{hor}(v, v) = \|v\|^2$ ed $\omega(v, w \cdot j) = \text{hor}(v, w)$.

Ragionando come nel caso reale, possiamo identificare gli n -piani Lagrangiani di $\mathbb{C}^{2n} \simeq \mathbb{H}^n$ agli n -piani complessi generati dalle basi ortonormali di \mathbb{H}^n . Quindi il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ opera transitivamente su $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{2n})$. Lo stabilizzatore in $\mathbf{Sp}(n)$ dell' n -piano complesso $\langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{C}}$ generato dai vettori della base canonica è il gruppo unitario $\mathbf{U}(n)$. Quindi $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{2n}) \simeq \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{U}(n)$ è una varietà connessa e compatta di dimensione $n(2n+1) - n^2 = n(n+1)$. Abbiamo perciò

PROPOSIZIONE 3.8.2. *La grassmanniana $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{2n})$ dei sottospazi lagrangiani complessi di $(\mathbb{C}^{2n}, \omega)$ è una varietà compatta, connessa e semplicemente connessa, di dimensione reale $n(n+1)$, \mathcal{C}^ω -diffeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{Sp}(n)/\mathbf{U}(n)$. \square*

OSSERVAZIONE 3.8.3. In effetti,

M è una varietà complessa compatta di dimensione $n(n+1)/2$. Per dimostrarlo, è conveniente considerarla come il quoziente di $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ rispetto ad un suo sottogruppo parabolico (vedi [8, 31]).

3.9. Sottospazi proiettivi di una quadrica proiettiva complessa

Sia Q una quadrica non degenera di $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$. Per ogni intero positivo h con $2h \leq n$, la quadrica contiene sottospazi proiettivi di dimensione $(h-1)$. Indichiamo con $M_h(\mathbb{C}^n)$ l'insieme degli elementi di $\mathcal{G}r_h(\mathbb{C}^n)$ corrispondenti ai sottospazi proiettivi di dimensione $(h-1)$ contenuti in Q .

Per descrivere la struttura di $M_h(\mathbb{C}^n)$, è conveniente premettere un'osservazione sull'azione dei gruppi unitari sulle varietà di Stiefel reali. Fissiamo un intero positivo h con $2h \leq n$. Se $(u_1, \dots, u_h, v_1, \dots, v_h) \in \mathcal{V}_{2h}(\mathbb{R}^n)$, allora i vettori $(w_i = u_i + i \cdot v_i)_{1 \leq i \leq h}$ formano una base ortogonale di \mathbb{C}^h , con $\|w_i\|^2 = 2$ per $1 \leq i \leq h$. Se $x \in \mathbf{U}(h)$, possiamo allora considerare $(w_1, \dots, w_h) \cdot x = (w'_1, \dots, w'_h)$ e porre

$$(\mathcal{R}e(w'_1), \dots, \mathcal{R}e(w'_h), \text{Im}(w'_1), \dots, \text{Im}(w'_h)) = (u_1, \dots, u_h, v_1, \dots, v_h) \cdot x.$$

Abbiamo definito in questo modo un'azione a destra

$$(3.43) \quad \mathcal{V}_{2h}(\mathbb{R}^n) \times \mathbf{U}(h) \ni (X, x) \longrightarrow X \cdot x \in \mathcal{V}_{2h}(\mathbb{R}^n).$$

PROPOSIZIONE 3.9.1. *Per ogni intero h con $1 < 2h \leq n$, la $M_h(\mathbb{C}^n)$ è la base di un fibrato $\mathbf{U}(h)$ -principale con spazio totale $\mathcal{V}_{2h}(\mathbb{R}^n)$ ed azione di gruppo descritta da (3.43). In particolare, M_h è una varietà analitica compatta di dimensione reale $h(2n-3h-1)$, che è connessa se $2h < n$ ed ha due componenti connesse se $h=2n$,*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{w^\top w = 0\}$ l'equazione in coordinate omogenee di Q . Dato un qualsiasi h -piano ℓ in $M_h(\mathbb{C}^n)$, possiamo fissarne una base (w_1, \dots, w_h) con la proprietà che $w_j^* w_i = 2 \cdot \delta_{i,j}$ per ogni $1 \leq i, j \leq h$. Poiché $w_j^\top w_i = 0$ per $1 \leq i, j \leq h$, i vettori $\Re(w_1), \dots, \Re(w_h), \Im(w_1), \dots, \Im(w_h)$ formano un sistema ortonormale in \mathbb{R}^n . Viceversa, se $(u_1, \dots, u_h, v_1, \dots, v_h) \in \mathcal{V}_{2h}(\mathbb{R}^n)$, allora l' h -piano $\ell = \langle u_1 + i \cdot v_1, \dots, u_h + i \cdot v_h \rangle_{\mathbb{C}}$ è un punto di $M_h(\mathbb{C}^n)$. Da questo segue che i punti di $M_h(\mathbb{C}^n)$ sono in corrispondenza biunivoca con le orbite dell'azione a destra di $\mathbf{U}(h)$ su $\mathcal{V}_{2h}(\mathbb{R}^n)$. \square

OSSERVAZIONE 3.9.2. Le varietà $M_h(\mathbb{C}^n)$ sono varietà bandiera complesse di dimensione $h(2n-3h-1)/2$. (vedi ad esempio [8, 31]).

Osserviamo che, in particolare

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{C}^{2n}) &= \mathbf{O}(2n)/\mathbf{U}(n), & \text{che ha dimensione reale } n(n-1), \\ M_n(\mathbb{C}^{2n+1}) &= \mathbf{SO}(2n+1)/\mathbf{U}(n), & \text{che ha dimensione reale } n(n+1). \end{aligned}$$

CAPITOLO IV

Fibrati vettoriali

4.1. Fibrati vettoriali

Con le definizioni del Cap. II, uno spazio vettoriale V , di dimensione finita su un corpo \mathbb{K} , è un $\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ -spazio. Supporremo nel seguito che \mathbb{K} sia uno dei campi $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, in modo che l'azione del gruppo lineare sia continua e valgano quindi le considerazioni generali del Cap. II.

DEFINIZIONE 4.1.1. Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} . Chiamiamo *fibrato vettoriale con fibra tipica V* un V -fibrato di Steenrod.

Possiamo considerare gli elementi v dello spazio totale $E(\xi)$ come *vettori applicati nel punto $b = \pi_{\xi}(v)$* della base. Poiché i vettori applicati si possono moltiplicare per uno scalare e sommare tra loro solo se hanno lo stesso punto d'applicazione, abbiamo delle mappe naturali

$$(4.1) \quad \begin{cases} E(\xi \oplus_{B(\xi)} \xi) \ni (v_1, v_2) \longrightarrow v_1 + v_2 \in E(\xi), \\ \mathbb{K} \times E(\xi) \ni (\lambda, v) \longrightarrow \lambda \cdot v \in E(\xi). \end{cases}$$

PROPOSIZIONE 4.1.2. *Su un fibrato vettoriale ξ , le operazioni (4.1) sono continue.*

DIMOSTRAZIONE. Nel caso del fibrato banale, la tesi si riduce alla continuità delle operazioni di somma e di prodotto per scalare in uno spazio vettoriale. Quindi, poiché i fibrati di Steenrod sono localmente banali, le operazioni (4.1) sono localmente continue e perciò continue. \square

PROPOSIZIONE 4.1.3. *Le (4.1) definiscono sullo spazio $\Gamma_{\xi}(B(\xi), E(\xi))$ delle sezioni una somma ed un prodotto per scalare che lo rendono uno spazio vettoriale su \mathbb{K} . Somma e prodotto per scalare sono continue per la topologia compatta-aperta.* \square

DEFINIZIONE 4.1.4. Il fibrato $\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ -principale $\xi^{\#}$ associato ad un fibrato vettoriale ξ si dice il fibrato dei suoi *sistemi di riferimento* e si indica con $\mathbb{L}(\xi)$.

Per ogni punto b della base $B(\xi)$ la fibra $E_b(\xi)$ è un \mathbb{K} -spazio vettoriale isomorfo a V e gli elementi della fibra $\mathbb{L}_b(\xi)$ di $\mathbb{L}(\xi)$ su b sono gli isomorfismi \mathbb{K} -lineari $\sigma : V \rightarrow E_b(\xi)$.

Abbiamo osservato nel §2.5.5 che ξ e $\mathbb{L}(\xi)$ hanno gli stessi atlanti di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_j, \sigma_j)\}$ in cui $\mathcal{U} = \{U_j\}$ è un ricoprimento aperto di $B(\xi)$ e le σ_j sono sezioni su $U_{i,j}$ del fibrato dei sistemi di riferimento. Le trivializzazioni locali sono definite dalle

$$U_j \times V \ni (b, v) \longrightarrow \sigma_j(b)(v) \in E(\xi)|_{U_j}$$

e le funzioni di transizione $g_{i,j} \in \mathcal{C}(U_{i,j}, \mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V))$ da

$$g_{i,j}(b) = [\sigma_j(b)]^{-1} \circ \sigma_i(b) \text{ sulle intersezioni } U_{i,j} = U_i \cap U_j.$$

Ad ogni sezione $v \in \Gamma_{\xi}(B(\xi), E(\xi))$ di un fibrato vettoriale con fibra tipica V corrisponde una *funzione* continua $\tilde{v} \in \mathcal{C}(L(\xi), V)$ definita sui sistemi di riferimento ed a valori in V , mediante

$$\tilde{v}(\sigma) = \sigma^{-1}(v(\pi_{\xi}(\sigma))), \quad \forall \sigma \in L(\xi).$$

DEFINIZIONE 4.1.5. Chiamiamo la \tilde{v} il *sollevamento* della sezione v .

PROPOSIZIONE 4.1.6. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f \in \mathcal{C}(L(\xi), V)$ sia il sollevamento di una sezione di $\Gamma_{\xi}(B(\xi), E(\xi))$ è che*

$$f(\sigma \cdot a) = a^{-1}(f(\sigma)), \quad \forall \sigma \in L(\xi), \quad \forall a \in \mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V). \quad \square$$

4.2. Gruppo strutturale

Fissiamo un sottogruppo \mathbf{G} del gruppo lineare $\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ e scriviamo $V_{\mathbf{G}}$ per indicare lo spazio vettoriale V , pensato come un \mathbf{G} -spazio. Sia ξ un fibrato vettoriale con fibra tipica V .

DEFINIZIONE 4.2.1. Chiamiamo \mathbf{G} -struttura su ξ una struttura di $V_{\mathbf{G}}$ -fibrato di Steenrod. Diremo in questo caso che ξ è un \mathbf{G} -fibrato¹ vettoriale, o un *fibrato vettoriale con gruppo strutturale \mathbf{G}* .

Per il Teorema 2.5.15, i fibrati vettoriali su B dotati di una \mathbf{G} -struttura sono in corrispondenza biunivoca con i \mathbf{G} -fibrati principali su B . Indicheremo con $\mathbb{L}_{\mathbf{G}}(\xi)$ il fibrato dei sistemi di riferimento di una \mathbf{G} -struttura di ξ assegnata.

DEFINIZIONE 4.2.2. Chiamiamo atlante di \mathbf{G} -trivializzazione di un fibrato vettoriale ξ un suo atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i)\}$ le cui funzioni di transizione $g_{i,j} = \sigma_j^{-1} \circ \sigma_i$ siano a valori in \mathbf{G} .

Due \mathbf{G} -atlanti di trivializzazione \mathcal{A} ed \mathcal{A}' , sono *equivalenti* se $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ è ancora un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione.

L'unione di tutti i \mathbf{G} -atlanti di trivializzazione equivalenti ad un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione assegnato è un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione massimale.

PROPOSIZIONE 4.2.3. *Le \mathbf{G} -strutture su un fibrato vettoriale ξ sono in corrispondenza biunivoca con i suoi \mathbf{G} -atlanti di trivializzazione massimali. In particolare, ogni \mathbf{G} -atlante di trivializzazione di ξ definisce su di esso una \mathbf{G} -struttura.* \square

Una carta locale di trivializzazione (U, σ_U) di ξ è *compatibile* con la \mathbf{G} -struttura se appartiene al suo \mathbf{G} -atlante di trivializzazione massimale.

Se \mathbf{H} è un sottogruppo di \mathbf{G} , ogni \mathbf{H} -atlante di trivializzazione di ξ è anche un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione ed abbiamo un morfismo d'inclusione dei corrispondenti sistemi di riferimento: $\mathbb{L}_{\mathbf{H}}(\xi) \hookrightarrow \mathbb{L}_{\mathbf{G}}(\xi)$.

¹In fisica il *gruppo strutturale* si dice anche *gruppo di gauge*.

DEFINIZIONE 4.2.4. Diciamo in questo caso che l' \mathbf{H} -struttura su ξ è stata ottenuta dalla \mathbf{G} -struttura per *riduzione del gruppo strutturale* e che la \mathbf{G} -struttura è ottenuta dalla \mathbf{H} -struttura per *allargamento del gruppo strutturale*.

In particolare: le \mathbf{G} -strutture su un fibrato vettoriale ξ sono in corrispondenza biunivoca con le \mathbf{G} -riduzioni del fibrato $\mathbb{L}(\xi) = \mathbb{L}_{\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V)}(\xi)$ di tutti i suoi sistemi di riferimento lineari.

Due \mathbf{G} -strutture su ξ sono equivalenti se i corrispondenti \mathbf{G} -fibrati principali dei loro sistemi di riferimento lo sono come fibrati \mathbf{G} -principali.

PROPOSIZIONE 4.2.5. *Siano assegnati un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di $\mathbf{B}(\xi)$ ed una famiglia $\{g_{i,j} \in \mathcal{C}(U_{i,j}, \mathbf{G})\}$ di funzioni continue tali che*

$$g_{i,i} = \text{id}_V \text{ su } U_i, \quad g_{i,j}(b)g_{j,h}(b) = g_{i,h}(b), \quad \forall b \in U_{i,j,h} = U_i \cap U_j \cap U_h, \quad \forall i, j, h \in I.$$

Risulta allora determinata, unica a meno di equivalenze, una \mathbf{G} -struttura su ξ per cui $\{g_{i,j}\}$ sia la famiglia delle funzioni di transizione di un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione. \square

Su uno spazio vettoriale V su \mathbb{K} possiamo fissare prodotti scalari hermitiani rispetto a \mathbb{K} . Indichiamo con $\mathbf{O}_q(V)$, $\mathbf{U}_q(V)$, $\mathbf{Sp}_q(V)$ i corrispondenti gruppi di isometrie \mathbb{K} -lineari di V nel caso reale, complesso e quaternionico, rispettivamente.

PROPOSIZIONE 4.2.6. *Sia ξ un fibrato vettoriale con fibra tipica V . Se la base $\mathbf{B}(\xi)$ è paracompatta, allora è possibile ridurre il gruppo strutturale di ξ ad $\mathbf{O}_q(V)$, $\mathbf{U}_q(V)$, $\mathbf{Sp}_q(V)$, a seconda che \mathbb{K} sia il corpo dei reali, dei complessi o dei quaternioni, rispettivamente.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una partizione dell'unità $\{\kappa_i\}$ su $\mathbf{B}(\xi)$, subordinata al ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}$ degli aperti di un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i)\}$ di ξ . Fissata la forma quadratica q su V , definiamo una forma quadratica sulle fibre di ξ ponendo

$$\mathfrak{g}(v) = \sum_{\pi_\xi(v) \in U_i} \kappa_i(\pi_\xi(b)) \cdot q(\sigma_i^{-1}(v)).$$

Il fibrato dei sistemi di riferimento consiste allora delle applicazioni \mathbb{K} -lineari di V sulle fibre $E_b(\xi)$ che sono isometrie di (V, q) su $(E_b(\xi), \mathfrak{g})$, al variare di b in $\mathbf{B}(\xi)$. \square

COROLLARIO 4.2.7. *Se η è un sottofibrato vettoriale del fibrato vettoriale ξ , allora possiamo trovare un sottofibrato vettoriale η' di ξ tale che $\xi \approx \eta \oplus_{\mathbf{B}(\xi)} \eta'$.*

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 4.2.6 possiamo ridurre il gruppo strutturale di ξ ad uno dei gruppi compatti $\mathbf{O}_q(V)$, $\mathbf{U}_q(V)$, $\mathbf{Sp}_q(V)$. Possiamo allora definire il fibrato perpendicolare η^\perp le cui fibre sono le $(E_b(\eta))^\perp$ in $(E_b(\xi), \mathfrak{g})$ e ξ è equivalente alla somma di Whitney $\eta \oplus_B \eta^\perp$. \square

4.3. Fibrati vettoriali associati a rappresentazioni lineari

L'Osservazione 2.5.16 si applica al caso di fibrati \mathbf{G} -principali e di rappresentazioni lineari del loro gruppo strutturale \mathbf{G} .

Sia $\xi = (P, \pi, B, \mathbf{G})$ è un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} . Ricordiamo che l'azione $P \times \mathbf{G} \ni (\sigma, \mathbf{a}) \rightarrow \sigma \cdot \mathbf{a} \in P$ è semplicemente transitiva su ciascuna delle fibre P_b di ξ .

Una *rappresentazione \mathbb{K} -lineare* V di \mathbf{G} è un'azione $\mathbf{G} \times V \ni (\mathbf{a}, v) \rightarrow \mathbf{a} \cdot v \in V$ a sinistra per cui la $v \rightarrow \mathbf{a} \cdot v$ sia \mathbb{K} -lineare. Essa equivale al dato di un omomorfismo $\rho_V : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V)$.

Consideriamo sul prodotto cartesiano $P \times V$ la relazione di equivalenza

$$(\sigma_1, v_1) \sim (\sigma_2, v_2) \iff v_2 = (\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1) v_1.$$

Indichiamo con $\sigma \cdot v$ la classe di equivalenza della coppia $(\sigma, v) \in P \times V$. Allora

$$E_V := (P \times V) / \sim = \{\sigma \cdot v \mid \sigma \in P, v \in V\}$$

è lo spazio totale di un fibrato vettoriale $\xi_V = (E_V, \pi_V, B, V)$, dotato di una $\rho_V(\mathbf{G})$ -struttura. Possiamo riassumere questa costruzione col diagramma commutativo

$$(4.2) \quad \begin{array}{ccc} & P \times V & \\ \text{pr}_P \swarrow & & \searrow (\sigma, v) \rightarrow \sigma \cdot v \\ P & & E_V \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi_V \\ & B & \end{array}$$

e nell'enunciato

PROPOSIZIONE 4.3.1. $\xi = (P, \pi, B, \mathbf{G})$ è un fibrato principale con base B . Ad ogni rappresentazione lineare V del suo gruppo strutturale \mathbf{G} risulta associato, unico a meno di equivalenza, un fibrato vettoriale ξ_V su B , con fibra tipica V , tale che (4.2) sia un diagramma commutativo di fibrati. \square

Nota che le frecce che scendono verso sinistra sono proiezioni di fibrati vettoriali, quelle che scendono verso destra di fibrati \mathbf{G} -principali (\mathbf{G} agisce su $P \times V$ mediante $(\sigma, v) \cdot \mathbf{a} = (\sigma \cdot \mathbf{a}, \mathbf{a}^{-1}(v))$.) Il fibrato $E_V \rightarrow B$ è di Stiefel rispetto a $\rho_V(\mathbf{G}) \subseteq \mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V)$, isomorfo al quoziente \mathbf{G}/\mathbf{H} di \mathbf{G} rispetto al nucleo d'infedeltà \mathbf{H} della rappresentazione di \mathbf{G} su V .

4.4. Equivalenza di fibrati vettoriali

Fissiamo un sottogruppo \mathbf{G} del gruppo lineare $\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V)$. Due \mathbf{G} -fibrati vettoriali ξ, η sulla stessa base B sono *\mathbf{G} -equivalenti* se è possibile definire un omeomorfismo $f \in \mathcal{C}(E(\xi), E(\eta))$ che sia \mathbb{K} -lineare sulle fibre, \mathbf{G} -equivariante, e renda commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{f} & E(\eta) \\ \pi_\xi \searrow & & \swarrow \pi_\eta \\ & B & \end{array}$$

Sia $\mathcal{V}_{\mathbf{G}}(B)$ l'insieme delle classi di equivalenza di \mathbf{G} -fibrati vettoriali con base B . Per la Proposizione 4.2.5, le funzioni di transizione $\{g_{i,j}\}$ di un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i)\}$ di ξ determinano completamente la sua classe $[\xi]$

in $\mathcal{V}_{\mathbf{G}}(\mathbf{B})$. Possiamo utilizzare questa osservazione per dare una caratterizzazione *coomologica* di $\mathcal{V}_{\mathbf{G}}(\mathbf{B})$.

Fissato un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di \mathbf{B} , ed un intero $q \geq 0$, indichiamo con $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G}))$ l'insieme delle q -catene di Čech di \mathcal{U} , a coefficienti nel fascio $\mathcal{L}(\mathbf{G})$ dei germi di applicazioni continue su \mathbf{B} a valori in $\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(n)$. Un elemento di $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G}))$ è una famiglia $(g_{i_0, i_1, \dots, i_q})$, indicizzata con le $(q+1)$ -uple di indici i per cui $U_{i_0, i_1, \dots, i_q} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_q} \neq \emptyset$, ciascun elemento della quale è un'applicazione continua

$$g_{i_0, i_1, \dots, i_q} : U_{i_0, i_1, \dots, i_q} \longrightarrow \mathbf{G}, \quad \text{con } g_{i_{a_0}, i_{a_1}, \dots, i_{a_q}} = [g_{i_0, i_1, \dots, i_q}]^{\varepsilon(a)}, \quad \forall a \in \mathbf{S}_{q+1}.$$

Qui $\varepsilon(a) = \pm 1$ è la segnatura della permutazione a .

Nel Cap. ?? discuteremo la *coomologia di Čech* con coefficienti in fasci di gruppi abeliani. Poiché qui non supponiamo che \mathbf{G} sia abeliano, possiamo definire soltanto il primo spazio di coomologia. Siano

$$\delta_0 : \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) \ni (g_i) \longrightarrow (g_{i,j}(b) = g_i(b)[g_j(b)]^{-1}) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})),$$

$$\delta_1 : \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) \ni (g_{i,j}) \longrightarrow (g_{i,j,h} = g_{i,j} \cdot g_{j,h} \cdot g_{h,i}) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})).$$

gli operatori di cobordo. Otteniamo una successione di applicazioni

$$(*) \quad \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})).$$

In ciascuno degli spazi $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G}))$ fissiamo il punto speciale 1_q , definito dalla (g_{i_0, \dots, i_q}^0) , con $g_{i_0, \dots, i_q}^0(b) = I_n$ per ogni $b \in U_{i_0, \dots, i_q}$. Allora (*) è un *complesso di spazi puntati*: ciò significa che $\delta_0(1_0) = 1_1$, $\delta_1(1_1) = 1_2$ e che, per ogni $(g_i) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G}))$, è $\delta_1 \circ \delta_0(g_i) = 1_2$. Il *primo spazio di coomologia di \mathcal{U} a coefficienti in $\mathcal{L}(\mathbf{G})$* si definisce come il quoziente

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) = \delta_1^{-1}(1_2) / \text{Immagine}(\delta_0).$$

Ad un *raffinamento* $\mathcal{U}' = \{U'_j\}$ di \mathcal{U} , con $U'_j \subset U_{i_j}$, associamo applicazioni di restrizione $r_q : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) \rightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{U}', \mathcal{L}(\mathbf{G}))$ definite da

$$r_q(g_{i_0, \dots, i_q}) = (g_{i_{j_0}, \dots, i_{j_q}}|_{U'_{j_0, \dots, j_q}}).$$

Abbiamo allora un diagramma commutativo di complessi:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) & \xrightarrow{\delta_0} & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) & \xrightarrow{\delta_1} & \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) \\ r_0 \downarrow & & r_1 \downarrow & & r_2 \downarrow \\ \mathcal{C}^0(\mathcal{U}', \mathcal{L}(\mathbf{G})) & \xrightarrow{\delta_0} & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}', \mathcal{L}(\mathbf{G})) & \xrightarrow{\delta_1} & \mathcal{C}^2(\mathcal{U}', \mathcal{L}(\mathbf{G})), \end{array}$$

che ci permette, per passaggio al quoziente, di definire un'applicazione

$$r_* : H^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}', \mathcal{L}(\mathbf{G}))$$

tra i gruppi di coomologia. La *coomologia di Čech di \mathbf{B} a coefficienti in $\mathcal{L}(\mathbf{G})$* si definisce come il limite induttivo, o diretto, dei gruppi $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G}))$ rispetto all'ordinamento parziale per cui $\mathcal{U} < \mathcal{U}'$ se \mathcal{U}' è un raffinamento di \mathcal{U} e alle applicazioni r_* che abbiamo descritto sopra. Indichiamo questo limite con $H^1(\mathbf{B}, \mathcal{L}(\mathbf{G}))$.

TEOREMA 4.4.1. *La corrispondenza che associa ad ogni fibrato vettoriale di rango n su B la classe di $H^1(B, \mathcal{C}(\mathbf{G}))$ di un suo qualsiasi atlante di trivializzazione definisce, per passaggio al quoziente, una corrispondenza biunivoca di $H^1(B, \mathcal{C}(\mathbf{G}))$ con $\mathcal{V}_{\mathbf{G}}(B)$. \square*

4.5. Fibrati vettoriali sulle sfere

Decomponiamo la sfera $S^m = \{(x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{h=0}^m x_h^2 = 1\}$ nell'unione $S^m = D_+^m \cup D_-^m$ delle celle chiuse $D_+^m = \{x \in S^m \mid x_m \geq 0\}$, $D_-^m = \{x \in S^m \mid x_m \leq 0\}$, con $D_+^m \cap D_-^m = S^{m-1} = \{x \in S^m \mid x_m = 0\}$.

Fissiamo un sottogruppo \mathbf{G} del gruppo lineare $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$. Ad un'applicazione continua $f : S^{m-1} \rightarrow \mathbf{G}$, possiamo associare il \mathbf{G} -fibrato vettoriale $\xi_f = (E_f \rightarrow S^m)$ che si ottiene incollando i fibrati banali $D_+^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow D_+^m$ e $D_-^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow D_-^m$ mediante la *funzione di clutching*² che associa ad $(x, v) \in S^{m-1} \times \mathbb{R}^n \subset D_+^m \times \mathbb{R}^n$ la $(x, f(x)(v)) \in S^{m-1} \times \mathbb{R}^n \subset D_-^m \times \mathbb{R}^n$. Si dimostra facilmente che

LEMMA 4.5.1. *Se le due funzioni di clutching $f_0, f_1 \in \mathcal{C}(S^{m-1}, \mathbf{G})$ sono omotopie, allora i fibrati vettoriali ξ_{f_0} e ξ_{f_1} sono equivalenti. Risulta quindi definita un'applicazione naturale*

$$(4.3) \quad \pi(S^{m-1}, \mathbf{G}) \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{G}}(S^m). \quad \square$$

Poiché D_+^m e D_-^m sono contrattili, i fibrati vettoriali con basi D_+^m e D_-^m sono banali. Osserviamo ancora che, se $\mathbf{a} \in \mathbf{G}$ ed f una funzione di clutching, la $\mathbf{a} \cdot f$ è la funzione di clutching rispetto ad una diversa trivializzazione. Ogni fibrato può quindi essere rappresentato da una funzione di clutching f con $f(e_0) = I_n$. Questo ci permette di sostituire, nella (4.3), all'omotopia libera $\pi(S^{m-1}, \mathbf{G})$ l'omotopia $\pi(S^{m-1}, e_0; \mathbf{G}, I_n) = \pi_{m-1}(\mathbf{G})$. Da queste osservazioni segue il

LEMMA 4.5.2. *Abbiamo un'applicazione surgettiva*

$$(4.4) \quad \pi_{m-1}(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{G}}(S^m). \quad \square$$

Lo studio dell'applicazione (4.4) è complicato dal fatto che il gruppo \mathbf{G} possa non essere connesso per archi. Possiamo tenerne conto osservando che \mathbf{G} agisce in modo naturale sulle funzioni di clutching mediante

$$\mathbf{G} \times \mathcal{C}(S^{m-1}, \mathbf{G}) \ni (\mathbf{a}, f) \longrightarrow \mathbf{a} \cdot f(\cdot) \cdot \mathbf{a}^{-1} \in \mathcal{C}(S^{m-1}, \mathbf{G}).$$

Per passaggio ai quozienti, questa definisce un'azione di $\pi_0(\mathbf{G})$ su $\pi_{m-1}(\mathbf{G})$.

TEOREMA 4.5.3. *Abbiamo una bigezione*

$$(4.5) \quad \pi_{m-1}(\mathbf{G})/\pi_0(\mathbf{G}) \longleftrightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{R}}^m(S^m).$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 4.5.1, l'applicazione

$$\pi_{m-1}(\mathbf{G})/\pi_0(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{R}}^m(S^m)$$

è surgettiva. Resta da verificare l'iniettività. Siano $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(S^{m-1}, e_0; \mathbf{G}, I_n)$ tali che $\xi_{f_1} \approx \xi_{f_2}$.

²“clutch” è in inglese la frizione.

L'equivalenza dei fibrati è definita da due funzioni $g_{\pm} \in \mathcal{C}(D_{\pm}^m, \mathbf{G})$ tali che (indicando ancora con g_{\pm} le restrizioni ad S^{m-1}) il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S^{m-1} \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\text{id} \times g_+} & S^{m-1} \times \mathbb{R}^n \\ \text{id} \times f_1 \downarrow & & \downarrow \text{id} \times f_2 \\ S^{m-1} \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\text{id} \times g_-} & S^{m-1} \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

sia commutativo. È quindi $f_2(x) = [g_-(x)]^{-1} \circ f_1(x) \circ g_+(x)$, per ogni $x \in S^{m-1}$. Le g_{\pm} sono definite sui dischi D_{\pm}^m che sono contrattili e, da $f_1(e_0) = f_2(e_0) = I_n$ ricaviamo che $[g_-(e_0)]^{-1} \circ g_+(e_0) = I_n$, perciò le due funzioni g_{\pm} , ristrette ad S^{m-1} , definiscono la stessa classe di omotopia. Questo dimostra l'iniettività e completa la dimostrazione del teorema. \square

Questa caratterizzazione omotopica dell'equivalenza di \mathbf{G} -fibrati vettoriali si può trovare, ad esempio, in [60]. Discutiamo brevemente le conseguenze del Teorema 4.5.3 nel caso di fibrati vettoriali su $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, il cui gruppo strutturale sia l'intero gruppo lineare.

Il gruppo lineare reale ha due componenti. La componente connessa dell'identità $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ consiste delle matrici $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con determinante positivo. I fibrati vettoriali che ammettono un'azione di $\mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R})$ sono detti *orientabili*. Poiché $\mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R})$ è connesso, abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\pi_{m-1}(\mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R})) \longleftrightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R})}(S^m).$$

Se $m > 1$, allora $\pi_{m-1}(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})) = \pi_{m-1}(\mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R}))$ e questo ci dice che *tutti i fibrati vettoriali sulle sfere di dimensione ≥ 2 sono orientabili*. Abbiamo

PROPOSIZIONE 4.5.4. *Se $m \geq 2$, ogni fibrato vettoriale reale su S^m è orientabile, ed ha esattamente due orientazioni, che dipendono dalla scelta dell'orientazione su una singola fibra. Le fibre di (4.3) contengono al più due elementi. Hanno un solo elemento quelle che corrispondono a fibrati vettoriali che ammettano un automorfismo che inverte l'orientazione delle fibre, due elementi altrimenti.* \square

Poiché $\mathbf{SO}(n)$ è un retratto di deformazione di $\mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R})$, abbiamo

$$\pi(S^{m-1}, \mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R})) \simeq \pi(S^{m-1}, \mathbf{SO}(n)) \simeq \pi_{m-1}(\mathbf{SO}(n)).$$

Si ragiona in modo analogo per fibrati vettoriali complessi o quaternionici. In questi casi i gruppi lineari sono connessi e, poiché $\mathbf{U}(n)$ ed $\mathbf{Sp}(n)$ sono retratti di deformazione di $\mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(n)$ e di $\mathbf{GL}_{\mathbb{H}}(n)$, rispettivamente, otteniamo:

PROPOSIZIONE 4.5.5. *Per ogni intero $m \geq 1$ abbiamo*

$$\mathcal{V}_{\mathbb{C}}^m(S^m) \simeq \pi_{m-1}(\mathbf{U}(n)), \quad \mathcal{V}_{\mathbb{H}}^m(S^m) \simeq \pi_{m-1}(\mathbf{Sp}(n)). \quad \square$$

4.6. La proprietà (S)

Sia \mathbf{B} uno spazio topologico. Fissiamo il corpo \mathbb{K} ed indichiamo con θ^n il fibrato banale $(\mathbf{B} \times \mathbb{K}^n, \text{pr}_{\mathbf{B}}, \mathbf{B}, \mathbb{K}^n)$.

DEFINIZIONE 4.6.1. Diciamo che \mathbf{B} gode della proprietà (S) se

$$(S) \quad \forall \xi \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\mathbf{B}) \exists \eta \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\mathbf{B}) \text{ tale che } \xi \oplus_B \eta \approx \theta^n, \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}.$$

PROPOSIZIONE 4.6.2. Ogni compatto di Hausdorff gode della proprietà (S).

DIMOSTRAZIONE. Sia ξ un fibrato vettoriale con fibra tipica \mathbb{K}^n sulla base \mathbf{B} . Se \mathbf{B} è compatta, ξ ammette atlante di trivializzazione finito $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i) \mid 1 \leq i \leq \ell\}$. Uno spazio compatto di Hausdorff è normale e possiamo perciò trovare una partizione dell'unità $\{\kappa_i \mid 1 \leq i \leq \ell\}$ su \mathbf{B} subordinata al ricoprimento $\{U_i\}$.

Definiamo $\hat{\sigma}_i : \mathbf{B} \times \mathbb{K}^n \rightarrow E(\xi)$ ponendo

$$\hat{\sigma}_i(b)(v) = \begin{cases} \kappa_i(b) \cdot \sigma_i(b)(v), & \text{se } b \in U_i, \\ 0, & \text{se } b \notin \text{supp}(\kappa_i). \end{cases}$$

Consideriamo il fibrato banale $\Theta \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\mathbf{B})$ con spazio totale $\mathbf{B} \times [\mathbb{K}^n]^\ell$. L'applicazione

$$\psi : \mathbf{B} \times [\mathbb{K}^n]^\ell \ni (b; v_1, \dots, v_\ell) \longrightarrow \sum_{i=1}^{\ell} \hat{\sigma}_i(b)(v_i) \in E(\xi)$$

definisce un epimorfismo di fibrati vettoriali su \mathbf{B} . Il suo nucleo è un sottofibrato vettoriale $\eta \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\mathbf{B})$ di Θ . Per il Corollario 4.2.7, η ha un complemento η' in Θ , che è equivalente a ξ : infatti la restrizione di ψ ad $E(\eta')$ definisce l'isomorfismo di fibrati vettoriali $\eta' \leftrightarrow \xi$. Otteniamo quindi $\xi \oplus_B \eta \approx \Theta$. La dimostrazione è completa. \square

OSSERVAZIONE 4.6.3. Dalla Proposizione 4.6.2 e dall'invarianza omotopica, ricaviamo che ogni spazio cellulare omotopicamente equivalente ad uno spazio cellulare finito gode della proprietà (S).

Possiamo dare un criterio per la validità della proprietà (S) su spazi paracompatti utilizzando la nozione di *dimensione* di Lebesgue e Čech (vedi [26, p.107]).

DEFINIZIONE 4.6.4. La *molteplicità* di una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di \mathbf{B} è il cardinale, finito o infinito,

$$\sup_{b \in \mathbf{B}} \#\{i \in I \mid b \in U_i\}.$$

Dato un intero non negativo m , diciamo che lo spazio topologico \mathbf{B} ha *dimensione finita minore o uguale ad m* , e scriviamo $\dim(\mathbf{B}) \leq m$, se ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento di molteplicità minore o uguale ad $(m+1)$.

Poniamo allora $\dim(\mathbf{B}) = \inf\{m \in \mathbb{Z}_+ \mid \dim(\mathbf{B}) \leq m\}$. Se \mathbf{B} non ha dimensione finita, poniamo $\dim(\mathbf{B}) = \infty$.

Per varietà differenziabili e complessi cellulari, questa nozione, puramente topologica, coincide con le usuali definizioni della dimensione.

PROPOSIZIONE 4.6.5. Ogni spazio topologico paracompatto di dimensione finita gode della proprietà (S).

DIMOSTRAZIONE. Siano \mathbf{B} uno spazio paracompatto di dimensione finita m e ξ un fibrato vettoriale su \mathbf{B} , con fibra tipica \mathbb{K}^n . Per ipotesi, possiamo trovare un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i) \mid i \in I\}$ tale che il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$

sia localmente finito ed abbia molteplicità minore o uguale ad $(m+1)$. Fissiamo un ordinamento totale “ $<$ ” sull’insieme I degli indici. Per la paracompattezza di B possiamo trovare una successione di raffinamenti aperti $\mathcal{U}^{(h)} = \{U_{h,i} \mid i \in I\}$ tali che

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(m+1)} < \mathcal{U}^{(m)} < \dots < \mathcal{U}^{(1)} < \mathcal{U}^{(0)}, \quad \text{con } \bar{U}_{h,i} \subset U_{h+1,i}, \forall i \in I, 0 \leq h \leq m.$$

Ciascuna delle famiglie $\mathcal{U}^{(h)}$ è localmente finita ed ha molteplicità minore o uguale ad $(m+1)$. Definiamo per ricorrenza i chiusi C_h e gli aperti B_h ponendo

$$C_{m+1} = \emptyset, \quad C_h = C_{h+1} \cup \bigcup_{i_0 < \dots < i_h} \bar{U}_{h,i_0, \dots, i_h}, \quad B_h = B \setminus C_h, \quad 0 \leq h \leq m.$$

Siano poi $\mathcal{W}^{(h)} = \{W_{h,i} = U_{h,i} \setminus C_h \mid i \in I\}$. Osserviamo allora che ciascun $\mathcal{W}^{(h)}$ è un ricoprimento aperto di B_h con molteplicità minore o uguale ad h . È $\mathcal{W}^{(m+1)} = \mathcal{U}$. In questo modo le

$$\mathcal{W}^{(h,h)} = \{W_{h,i_1, \dots, i_h} = W_{h,i_1} \cap \dots \cap W_{h,i_h} \mid i_1 < \dots < i_h\}, \quad 1 \leq h \leq m+1,$$

sono famiglie di aperti disgiunti e, per costruzione, se poniamo $W_h = \bigcup \mathcal{W}^{(h,h)}$, è $B = W_1 \cup \dots \cup W_{m+1}$. Infatti il complemento di B_h contiene tutti i punti di B che appartengono a più di h elementi di $\mathcal{U}^{(h)}$.

Ogni W_h , essendo unione disgiunta di aperti di trivializzazione per ξ , è esso stesso un aperto di trivializzazione per ξ . Quindi B ammette un ricoprimento finito mediante aperti di trivializzazione. Possiamo dunque concludere la dimostrazione ripetendo gli argomenti usati nella dimostrazione della Proposizione 4.6.2 per il caso in cui B fosse compatto. \square

4.7. Classificazione omotopica I: base CW

Per classificare i fibrati vettoriali a meno di equivalenza possiamo utilizzare i risultati del §3.6. Infatti, il fibrato principale associato ad un fibrato vettoriale di rango n ammette sempre una riduzione ad un fibrato principale sul gruppo $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$, a secondo che il corpo \mathbb{K} sia quello dei reali, dei complessi o dei quaternioni. Indichiamo con $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}^n(B)$ le classi di equivalenza di fibrati vettoriali di rango n su B .

DEFINIZIONE 4.7.1. Chiamiamo *fibrato tautologico* sulla grassmanniana $\mathcal{G}r_m(\mathbb{K}^v)$ il fibrato vettoriale $\gamma_m(\mathbb{K}^v)$, di rango m su \mathbb{K} con

$$\begin{cases} E(\gamma_m(\mathbb{K}^v)) = \{(\ell, v) \in \mathcal{G}r_m(\mathbb{K}^v) \times \mathbb{R}^v \mid v \in \ell\}, \\ B(\gamma_m(\mathbb{K}^v)) = \mathcal{G}r_m(\mathbb{K}^v), \\ \pi_{\gamma_m(\mathbb{K}^v)} : E(\gamma_m(\mathbb{K}^v)) \ni (\ell, v) \longrightarrow \ell \in B(\gamma_m(\mathbb{K}^v)). \end{cases}$$

PROPOSIZIONE 4.7.2. *Se B è uno spazio cellulare di dimensione minore o uguale ad m ed n, v interi con $0 \leq n \leq v$. La corrispondenza*

$$\mathcal{C}(B, \mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^v)) \ni f \longrightarrow f^*(\gamma_m(\mathbb{K}^v)) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}^m(B)$$

definisce per passaggio al quoziente un’applicazione

$$(4.6) \quad \pi(B, \mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^v)) \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{K}}^m(B)$$

che è un isomorfismo nei casi seguenti:

$$\begin{aligned} \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad e \quad v > n + m, \\ \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad e \quad 2v > 2n + m, \\ \mathbb{K} = \mathbb{H} \quad e \quad 4v > 4n + m. \end{aligned} \quad \square$$

OSSERVAZIONE 4.7.3. Nel caso in cui la base B sia la sfera S^m , riotteniamo i risultati del §4.5. Infatti (vedi il Cap. III)

$$\begin{aligned} \pi(S^m, \mathcal{G}r_n(\mathbb{R}^v)) &\simeq \pi_m(\mathcal{G}r_n(\mathbb{R}^v)) \simeq \pi_{m-1}(\mathbf{SO}(n)), & \text{se } v > n + m, \\ \pi(S^m, \mathcal{G}r_n(\mathbb{C}^v)) &\simeq \pi_m(\mathcal{G}r_n(\mathbb{C}^v)) \simeq \pi_{m-1}(\mathbf{U}(n)), & \text{se } v > 2n + m, \\ \pi(S^m, \mathcal{G}r_n(\mathbb{H}^v)) &\simeq \pi_m(\mathcal{G}r_n(\mathbb{H}^v)) \simeq \pi_{m-1}(\mathbf{Sp}(n)), & \text{se } v > 4n + m. \end{aligned}$$

4.8. Classificazione omotopica II: base compatta

Consideriamo in questo paragrafo il problema della classificazione di fibrati vettoriali che abbiano basi compatte e di Hausdorff.

PROPOSIZIONE 4.8.1. *Sia B uno spazio di Hausdorff compatto ed A un suo sottospazio chiuso. Se ξ è un fibrato vettoriale su B , allora ogni sezione di ξ su A è restrizione di una sezione su B .*

DIMOSTRAZIONE. Gli spazi di Hausdorff compatti godono della proprietà (S). Possiamo perciò supporre che ξ^n sia un sottofibrato di un fibrato vettoriale banale

$$\theta^v = (B \times \mathbb{K}^v, \text{pr}_B, B, \mathbb{K}^v).$$

Consideriamo un ricoprimento aperto finito $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di B mediante aperti di trivializzazione di ξ e siano $\phi_i: U_i \times \mathbb{K}^n \rightarrow E(\xi)|_{U_i}$ le funzioni di trivializzazione. Una sezione $v \in \Gamma_\xi(A, E(\xi))$ definisce funzioni $v_i \in \mathcal{C}(A \cap U_i, \mathbb{K}^n)$ tali che $v(b) = \phi_i(b, v_i(b))$ per $b \in A \cap U_i$. Poiché i sottospazi di un compatto di Hausdorff sono spazi normali, possiamo applicare il lemma di estensione di Urysohn per trovare $\tilde{v}_i \in \mathcal{C}(U_i, \mathbb{K}^n)$ tali che $\tilde{v}_i(b) = v_i(b)$ se $b \in A \cap U_i$. Poiché i compatti di Hausdorff sono paracompatti, possiamo trovare una partizione continua $\{\kappa_i\}$ dell'unità su B con $\text{supp}(\kappa_i) \subset U_i$. Definiamo ora

$$\hat{v}_i = \begin{cases} \kappa_i(b) \cdot \phi_i(b, \tilde{v}_i(b)), & \text{se } b \in U_i, \\ 0, & \text{se } b \notin \text{supp}(\kappa_i). \end{cases}$$

Allora $\hat{v}_i \in \Gamma_\xi(B, E(\xi))$ e $\hat{v} = \sum_i \hat{v}_i(b)$ è una sezione continua di ξ su B che estende v . \square

LEMMA 4.8.2. *Siano ξ, η due fibrati \mathbb{K} -vettoriali sullo spazio compatto di Hausdorff B ed A un sottospazio chiuso di B .*

Ogni applicazione continua $f \in \mathcal{C}(E(\xi)|_A, E(\eta)|_A)$ che renda commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E(\xi)|_A & \xrightarrow{f} & E(\eta)|_A \\ & \searrow \pi_\xi & \swarrow \pi_\eta \\ & A & \end{array}$$

si può estendere ad un'applicazione continua $\tilde{f} \in \mathcal{C}(E(\xi), E(\eta))$ che renda commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{\tilde{f}} & E(\eta) \\ & \searrow \pi_\xi & \swarrow \pi_\eta \\ & B & \end{array}$$

Se $f(b)$ è surgettiva (risp. iniettiva, un isomorfismo) in tutti i punti b di A , allora possiamo trovare un intorno aperto U di A in B tale che $\tilde{f}(b)$ sia surgettiva (risp. iniettiva, un isomorfismo) per tutti i $b \in U$.

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare la Proposizione 4.8.1 al fibrato $\mathcal{H}om_{\mathbb{K}}(\xi, \eta)$ delle applicazioni \mathbb{K} -lineari tra le fibre di ξ e di η ed osservare poi che i punti b di B in cui $f(b)$ è surgettiva, (risp. iniettiva o un isomorfismo) formano un aperto di B . \square

Possiamo utilizzare il Lemma 4.8.2 per dimostrare un teorema d'invarianza omotopica. Premettiamo un lemma.

LEMMA 4.8.3. *Sia B un compatto di Hausdorff e ξ un fibrato \mathbb{K} -vettoriale su $B \times I$. Per ogni $t \in I$ sia $j_t : B \ni b \rightarrow (b, t) \in B \times I$. Allora i fibrati $j_t^*(\xi)$ su B sono tutti equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $B \times I$ è compatto Hausdorff, vale la proprietà (S) e quindi il fibrato ξ è un sottofibrato di un fibrato banale

$$\theta^v = (\text{pr}_{B \times I} : (B \times I) \times \mathbb{K}^v \rightarrow B \times I.$$

Scegliendo un prodotto scalare (riemanniano, hermitiano o iperhermitiano, a seconda che sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$), la proiezione ortogonale sulle fibre di ξ ci dà un morfismo surgettivo di fibrati vettoriali

$$\begin{array}{ccc} E(\theta^v) & \xrightarrow{\varpi} & E(\xi) \\ & \searrow \text{pr}_{B \times I} & \swarrow \pi_\xi \\ & B \times I & \end{array}$$

Fissato $t_0 \in I$, possiamo definire un omomorfismo tra la restrizione $\eta_{t_0} = \xi|_{B \times \{t_0\}}$ di ξ a $B \times t_0$ e la restrizione $\eta_t = \xi|_{B \times \{t\}}$ di ξ a $B \times \{t\}$ nel modo seguente: il pullback $\tilde{\xi}_{t_0}$ di η_{t_0} mediante la retrazione $\rho_{t_0}(b, t) = (b, t_0)$ di $B \times I$ su $B \times \{t_0\}$ è un sottofibrato \mathbb{K} -vettoriale di θ^v . Componendo con la proiezione ϖ , otteniamo un morfismo di fibrati \mathbb{K} -vettoriali

$$\begin{array}{ccc} E(\eta_{t_0}) & \xrightarrow{f_{t_0,t}} & E(\eta_t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B \times \{t_0\} & \xrightarrow{(b,t_0) \rightarrow (b,t)} & B \times \{t\} \end{array}$$

che, per il Lemma 4.8.2, è un isomorfismo di fibrati vettoriali se $|t - t_0| < \epsilon(t_0)$ per un $\epsilon(t_0) > 0$ sufficientemente piccolo. Per concludere la dimostrazione, basta considerare una partizione $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = 1$ tale che, per $0 \leq h \leq N - 2$, gli η_t di ogni intervallo (τ_h, τ_{h+2}) siano tra loro isomorfi. \square

PROPOSIZIONE 4.8.4. *Siano ξ un fibrato \mathbb{K} -vettoriale, B un compatto di Hausdorff ed f_0, f_1 due applicazioni continue di B in $B(\xi)$. Se f_0 ed f_1 sono omotope, allora i fibrati $f_0^*(\xi)$ ed $f_1^*(\xi)$ sono equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in \mathcal{C}(B \times I, B(\xi))$ un'omotopia tra f_0 ed f_1 . Allora $f_0^*(\xi)$ ed $f_1^*(\xi)$ sono isomorfi alle restrizioni a $B \times \{0\}$ ed a $B \times \{1\}$ di $f^*(\xi)$ e dunque isomorfi per il Lemma 4.8.3. Questo isomorfismo definisce l'equivalenza tra $f_0^*(\xi)$ ed $f_1^*(\xi)$. \square

LEMMA 4.8.5. *Siano B un qualsiasi spazio topologico e ξ_0, ξ_1 , due fibrati \mathbb{K} -vettoriali su B . Se ξ_0 e ξ_1 sono equivalenti, allora possiamo trovare un automorfismo di $\xi_0 \oplus_M \xi_1$, isotopico all'identità, che trasformi ξ_0 in ξ_1 e ξ_1 in ξ_0 .*

DIMOSTRAZIONE. Un automorfismo di un fibrato ζ è isotopico all'identità se è l' f_1 di un'omotopia $f = (f_t) \in \mathcal{C}(E(\zeta) \times I, E(\zeta))$ che definisca, per ogni $t \in I$, un'equivalenza di ζ in sé.

Ad un'equivalenza $h : E(\xi_0) \rightarrow E(\xi_1)$ facciamo corrispondere l'equivalenza di $\xi_0 \oplus_B \xi_1$ rappresentata dalla matrice

$$\tilde{h} = \begin{pmatrix} 0 & -h^{-1} \\ h & 0 \end{pmatrix},$$

che scambia tra loro ξ_0 e ξ_1 . La

$$t \rightarrow \tilde{h}_t = \begin{pmatrix} I & -t \cdot h^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ t \cdot h & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -t \cdot h^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

definisce un'isotopia tra $\tilde{h}_0 = \text{id}$ ed $\tilde{h}_1 = \tilde{h}$. \square

La costruzione nella dimostrazione del Lemma 4.8.5 ci dà:

LEMMA 4.8.6. *Siano B un qualsiasi spazio topologico e ξ_0, ξ_1 , due fibrati \mathbb{K} -vettoriali su B . Se ξ_0 e ξ_1 sono equivalenti, allora possiamo trovare un fibrato \mathbb{K} -vettoriale ξ con base $B \times I$ tale che $\xi_i \approx \xi|_{B \times \{i\}}$, per $i = 0, 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Usando le notazioni della dimostrazione del Lemma 4.8.5, definiamo ξ ponendo

$$\begin{cases} E(\xi) = \{(b, t; w) \in (B \times I) \times E(\xi_0 \oplus_M \xi_1) \mid w \in \tilde{h}_t(E_b(\xi_0))\}, \\ \pi_\xi(b, t; w) = (b, t), \quad \forall (b, t; w) \in E(\xi). \end{cases}$$

Si verifica facilmente che questo fibrato sulla base $B \times I$ ha le proprietà richieste. \square

Indichiamo con \mathbb{K}^∞ lo spazio \mathbb{K} -vettoriale formato dalle successioni $(x_h)_{h \geq 1}$ di elementi di \mathbb{K} che hanno al più un numero finito di termini non nulli. Per ogni intero positivo v , possiamo identificare \mathbb{K}^v al sottospazio di \mathbb{K}^∞ formato dalle successioni (x_h) con $x_h = 0$ per $h > v$.

DEFINIZIONE 4.8.7. Indichiamo con $\mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^\infty)$ la *grassmanniana infinita* dei sottospazi di dimensione n di \mathbb{K}^∞ .

Le inclusioni $\mathbb{K}^v \hookrightarrow \mathbb{K}^\infty$ definiscono inclusioni $\mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^v) \hookrightarrow \mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^\infty)$. I sottospazi $\mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^v)$, al variare di $v \geq n$, formano un ricoprimento di $\mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^\infty)$. Consideriamo su $\mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^\infty)$ la *topologia debole del ricoprimento*, in cui sono chiusi i sottoinsiemi che intersecano ciascuno dei $\mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^v)$ in un chiuso, ovvero la più fine per cui tutte le inclusioni $\mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^v) \hookrightarrow \mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^\infty)$ siano continue. In particolare, se B è un compatto ed $f \in \mathcal{C}(B, \mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^\infty))$, allora $f(B) \subset \mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^v)$ per qualche intero positivo v .

DEFINIZIONE 4.8.8. Chiamiamo *fibrato tautologico* sulla Grassmanniana infinita $\mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^\infty)$ il fibrato vettoriale $\gamma_n(\mathbb{K}^\infty)$, di rango n su \mathbb{K} , con

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\gamma_n(\mathbb{K}^\infty)) = \{\ell_n, v\} \in \mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^\infty) \times \mathbb{K}^\infty \mid v \in \ell_n\}, \\ \mathbf{B}(\gamma_n(\mathbb{K}^\infty)) = \mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^\infty), \\ \pi_{\gamma_n(\mathbb{K}^\infty)} : \mathbf{E}(\gamma_n(\mathbb{K}^\infty)) \ni (\ell_n, v) \longrightarrow \ell_n \in \mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^\infty). \end{cases}$$

Abbiamo una corrispondenza

$$(4.7) \quad \mathcal{C}(B, \mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^\infty)) \ni f \longrightarrow f^*(\gamma_n(\mathbb{K}^\infty)) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}^n(B)$$

che ad ogni applicazione continua di uno spazio topologico B nella grassmanniana dei sottospazi vettoriali di dimensione n di \mathbb{K}^∞ fa corrispondere la classe di equivalenza di un fibrato \mathbb{K} -vettoriale di rango n su B .

Utilizzando il Lemma 4.8.6 e la Proposizione 4.8.4, otteniamo il

TEOREMA 4.8.9. *Sia B un compatto di Hausdorff. Allora la corrispondenza (4.7) definisce, per passaggio ai quozienti, una bigezione*

$$(4.8) \quad \pi(B, \mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^\infty)) \longleftrightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{K}}^n(B)$$

tra le classi di omotopia delle applicazioni continue di B nella grassmanniana infinita dei sottospazi di dimensione n e le classi di equivalenza di fibrati \mathbb{K} -vettoriali di rango n su B .

DIMOSTRAZIONE. L'iniettività è conseguenza del Lemma 4.8.6, mentre la surgettività segue dalla Proposizione 4.8.4. \square

OSSERVAZIONE 4.8.10. Per le Grassmanniane infinite possiamo ripetere la discussione svolta per quelle finite. In particolare, utilizzando il fatto che che gli spazi di Stiefel infiniti $\mathcal{V}_n(\mathbb{K}^\infty)$, essendo limiti induttivi degli spazi di Stiefel $\mathcal{V}_n(\mathbb{K}^v)$, sono ∞ -connessi, dalla fibrazione $\mathbf{SO}(n)$ -principale

$$\mathcal{V}_n(\mathbb{K}^\infty) \ni (v_1, \dots, v_n) \longrightarrow \langle v_1, \dots, v_n \rangle \in \mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^\infty)$$

ricaviamo che

$$\pi_h(\mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^\infty)) \simeq \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(n)), \quad \forall n \geq 1.$$

CAPITOLO V

Elementi di K -teoria

5.1. Addendi banali

Sia B uno spazio cellulare di dimensione finita m . Indichiamo con \mathbb{K} uno dei corpi $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Considereremo in questo paragrafo fibrati \mathbb{K} -vettoriali su B e scriveremo ξ^n per indicare che le fibre di ξ hanno dimensione n . Indicheremo ancora con θ^n il fibrato vettoriale banale con fibra \mathbb{K}^n su B . Ricordiamo che ("~" indica qui equivalenza omotopica)

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\sim S^{n-1} \quad \text{\textit{\textless}} \quad (n-2)\text{-connesso,} \\ \mathbb{C}^n \setminus \{0\} &\sim S^{2n-1} \quad \text{\textit{\textless}} \quad (2n-2)\text{-connesso,} \\ \mathbb{H}^n \setminus \{0\} &\sim S^{4n-1} \quad \text{\textit{\textless}} \quad (4n-2)\text{-connesso.}\end{aligned}$$

Indichiamo con k la dimensione (uguale ad 1, o 2, o 4) di \mathbb{K} come spazio vettoriale reale e poniamo¹ $\nu = \text{parte intera di } (m-k+1)/k$.

LEMMA 5.1.1. *Ogni fibrato \mathbb{K} -vettoriale ξ^n su B , con $n > \nu$ \textit{\textless}} equivalente ad una somma di Whitney $\xi^{n-1} \oplus_B \theta^1$ di fibrati \mathbb{K} -vettoriali.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il fibrato ξ_0^n ottenuto privando ξ^n della sezione nulla. Le fibre di ξ^n si retraggono sulla sfera S^{kn-1} e sono quindi $(kn-2)$ -connesse. Se $(kn-2) \geq (m-1)$, cio\`e $n > \nu$, per il Teorema 1.6.1 il fibrato ξ_0^n ammette una sezione globale s . La $E(\theta^1) = B \times \mathbb{K} \ni (b, \lambda) \rightarrow \lambda \cdot s(b) \in E(\xi)$ definisce un monomorfismo in ξ^n del fibrato banale θ^1 . L'immagine \textit{\textless}} un sottofibrato banale η^1 di ξ^n . Per il Corollario 4.2.7, possiamo allora trovare un sottofibrato vettoriale ξ^{n-1} su B tale che $\xi^n = \eta^1 \oplus_B \xi^{n-1} \approx \theta^1 \oplus_B \xi^{n-1}$. \square

TEOREMA 5.1.2. *Ogni fibrato \mathbb{K} -vettoriale ξ^n con $n > \nu$ \textit{\textless}} equivalente ad una somma di Whitney $\xi^\nu \oplus_B \theta^{n-\nu}$ di fibrati \mathbb{K} -vettoriali.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 5.1.1, la tesi \textit{\textless}} verificata quando $n = \nu + 1$. Se $n > \nu + 1$, utilizzando il Lemma 5.1.1, otteniamo per ricorrenza

$$\xi^n \approx \xi^{n-1} \oplus_B \theta^1 \approx \xi^{n-2} \oplus_B \theta^2 \approx \dots \approx \xi^\nu \oplus_B \theta^{n-\nu}. \quad \square$$

LEMMA 5.1.3. *Due qualsiasi monomorfismi $f_1, f_2 : \theta^1 \rightarrow \xi^n$ sono equivalenti. Se $n > (\nu + 1)$, allora anche due qualsiasi complementi di $f_1(\theta^1)$ e di $f_2(\theta^1)$ in ξ^n sono equivalenti.*

¹ $\nu = m$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\nu = [(m-1)/2]$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\nu = [(m-3)/4]$ se $\mathbb{K} = \mathbb{H}$

DIMOSTRAZIONE. I monomorfismi f_i corrispondono a sezioni $s_i(b) = f_i(b, 1)$ di ξ_0^n e la corrispondenza $\lambda \cdot s_1(b) \leftrightarrow \lambda \cdot s_2(b)$ per ogni $(b, \lambda) \in B \times \mathbb{K}$ definisce un'equivalenza tra $f_1(\theta^1)$ ed $f_2(\theta^1)$.

Supponiamo ora che sia $n > (v + 1)$. Siano $I = [0, 1]$ e $\text{pr}_B : B \times I \rightarrow B$ la proiezione sul primo fattore. Consideriamo il pullback $\text{pr}_B^*(\xi_0^n)$ di ξ_0^n (ξ^n privato della sezione nulla) su $B \times I$. Per il Teorema 1.6.1 la sezione $s^*(p, i) = s_i(p)$, definita su $B \times \{0, 1\}$, si estende ad una sezione \tilde{s}^* di $\text{pr}_B^*(\xi_0^n)$ su $B \times I$, perché abbiamo supposto che l'ordine di connessione $(kn - 2)$ delle fibre fosse maggiore di m , cioè la dimensione della base $B \times I$ meno uno. La \tilde{s}^* ci permette di definire un sottofibrato vettoriale banale $\tilde{\theta}^1$ di $\text{pr}_B^*(\xi)$ su $B \times I$. Fissati dei complementi ξ_i^{n-1} di $f_i(\theta^1)$ in ξ , possiamo definire un prodotto scalare \mathbb{K} -hermitiano sulle fibre di $\text{pr}_B^*(\xi^n)$ in modo che $(\text{pr}_B^*(\xi_i^{n-1}))|_{t=i}$ sia l'ortogonale di $(\text{pr}_B^*(f_i(\theta^1)))|_{t=i}$ per $i = 0, 1$. Per il Corollario 4.2.7, possiamo trovare un fibrato vettoriale $\tilde{\xi}^{n-1}$ complementare di $\tilde{\theta}^1$ in $\text{pr}_B^*(\xi)$ le cui restrizioni a $B \times \{i\}$ siano le $(\text{pr}_B^*(\xi_i^{n-1}))|_{t=i}$. Poiché le sue restrizioni a $B \times \{i\}$ sono isomorfe ai fibrati ξ_i^{n-1} su B , ne ricaviamo che ξ_1^{n-1} e ξ_2^{n-1} sono equivalenti per il Teorema 2.7.2. \square

Ragionando per ricorrenza, dal Lemma 5.1.3 otteniamo il

TEOREMA 5.1.4. *Se ξ_i^n sono due \mathbb{K} -fibrati vettoriali sullo spazio cellulare B , di dimensione minore o uguale ad m . Se $n \leq (v + 1)$ e possiamo trovare un intero non negativo ℓ per cui $\xi_1^n \oplus_B \theta^\ell$ e $\xi_2^n \oplus_B \theta^\ell$ siano equivalenti, allora anche ξ_1^n e ξ_2^n sono equivalenti.* \square

OSSERVAZIONE 5.1.5. In particolare, nel caso di fibrati vettoriali reali, ogni ξ^n su B , con $n \geq m = \dim(B)$, è equivalente ad una somma di Whitney $\xi^m \oplus_B \theta^{n-m}$ e l'equivalenza $\xi^{m+1} \oplus_B \theta^h \equiv \eta^{m+1} \oplus_B \theta^h$, per qualche $h \geq 0$, implica che $\eta^{m+1} \approx \xi^{m+1}$. Quest'ultima implicazione può non valere per fibrati vettoriali dimensione m : infatti, se τ^m è il fibrato tangente della sfera S^m , abbiamo $\tau^m \oplus_{S^m} \theta^1 \approx \theta^{m+1} \approx \theta^m \oplus_B \theta^1$, ma il fibrato tangente di S^m non è banale se $m \neq 1, 3, 7$.

5.2. Gruppo di K -teoria ed equivalenza stabile

Fissato uno spazio topologico B , indichiamo con $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ l'insieme delle classi di equivalenza di \mathbb{K} -fibrati vettoriali su B . Per semplificare la notazione, useremo nel seguito lo stesso simbolo per indicare sia uno specifico fibrato vettoriale su B che la sua classe in $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$.

La somma di Whitney definisce su $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ una struttura di *semigrupp*o abeliano. Indichiamo con $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(B)$ il gruppo abeliano generato da $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$.

Un semigruppo abeliano S genera un gruppo abeliano S^* , unico a meno di isomorfismi. Per definire S^* dobbiamo preoccuparci che per ogni coppia di elementi s_1, s_2 di S ci sia in S^* la loro differenza $(s_2 - s_1)$. Come nella costruzione degli interi a partire dai naturali, possiamo definire S^* come il quoziente di $S \times S$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica due coppie (s_1, s_2) , (s'_1, s'_2) di elementi di S se è possibile trovare un s in S per cui risulti $s_1 + s'_2 + s = s'_1 + s_2 + s$.

Il gruppo S^* è caratterizzato, a meno di isomorfismi, dalla PROPRIETÀ UNIVERSALE:

Per ogni gruppo abeliano \mathbf{G} ed ogni omomorfismo di semigrupp $\phi : S \rightarrow \mathbf{G}$ vi è un unico omomorfismo di gruppi $\phi^* : S^* \rightarrow \mathbf{G}$ che estende ϕ .

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\quad} & S^* \\ & \searrow \phi & \swarrow \phi^* \\ & \mathbf{G} & \end{array}$$

DEFINIZIONE 5.2.1. Chiamiamo² $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(B)$ il gruppo di *K-teoria* di B .

Identifichiamo \mathbb{Z} al sottogruppo di $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(B)$ generato dal fibrato in rette banali θ^1 .

L'applicazione che associa ad ogni elemento di $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ il suo rango è un omomorfismo di semigrupp e si estende quindi ad un omomorfismo di gruppi abeliani

$$\text{rk} : \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(B) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

DEFINIZIONE 5.2.2. Il nucleo $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathbb{K}}(B) = \ker(\text{rk} : \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(B) \rightarrow \mathbb{Z})$ di questo omomorfismo si dice *gruppo di K-teoria ridotto* di B .

La *K-teoria* è legata alla nozione di equivalenza stabile.

DEFINIZIONE 5.2.3. Diciamo che due fibrati ξ_1, ξ_2 in $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ sono *stabilmente equivalenti*, o *s-equivalenti*, se $\xi_1 \oplus_B \theta^{h_1} \approx \xi_2 \oplus_B \theta^{h_2}$ per opportuni interi $h_1, h_2 \geq 0$.

Indichiamo con $\xi_1 \sim \xi_2$ il fatto che due fibrati ξ_1 e ξ_2 siano s-equivalenti.

OSSERVAZIONE 5.2.4. Sia B uno spazio cellulare di dimensione m e $v = \lfloor \frac{m-k+1}{k} \rfloor$ l'intero definito nel §5.1. I Teoremi 5.1.2 e 5.1.4 ci dicono che ogni $\xi^n \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ è s-equivalente ad un $\xi^v \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ e che due fibrati $\xi_1^n, \xi_2^n \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$, con $n > v + 1$ sono equivalenti se e soltanto se sono s-equivalenti.

TEOREMA 5.2.5. Se B gode della proprietà³ (S), allora l'applicazione⁴

$$\alpha : \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B) \ni \xi \longrightarrow \xi - \text{rk}(\xi) \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathbb{K}}(B)$$

è surgettiva e, per $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$,

$$\xi_1 \sim \xi_2 \iff \alpha(\xi_1) = \alpha(\xi_2).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ sono s-equivalenti, allora $\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2) = 0$ in $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(B)$. Infatti, se $\xi_1 \oplus_B \theta^{n_1} \approx \xi_2 \oplus_B \theta^{n_2}$, allora

$$0 = \alpha(\xi_1 \oplus_B \theta^{n_1}) - \alpha(\xi_2 \oplus_B \theta^{n_2}) = \alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2).$$

Dunque la α definisce, per passaggio al quoziente, una $\hat{\alpha} : (\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B) / \sim) \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}_{\mathbb{K}}(B)$. La tesi del teorema è che $\hat{\alpha}$ sia bigettiva.

SURGETTIVITÀ. Siano $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$, con $\text{rk}(\xi_1) = \text{rk}(\xi_2)$. Per (S), possiamo trovare un fibrato $\xi'_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ tale che $\xi_2 \oplus \xi'_2 \approx \theta^{n_2}$, per qualche intero positivo n_2 . Quindi (le uguaglianze si intendono in $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(B)$)

$$\xi_1 - \xi_2 = (\xi_1 \oplus_B \xi'_2) - (\xi_2 \oplus_B \xi'_2) = (\xi_1 \oplus_B \xi'_2) - \theta^{n_2} = (\xi_1 \oplus_B \xi'_2) - n_2 = \alpha(\xi_1 \oplus_B \xi'_2),$$

²In generale, il gruppo di *K-teoria*, o di Grothendieck, può essere definito per ogni categoria abeliana (vedi [43]).

³La proprietà (S) è stata definita nel §4.6.

⁴Identifichiamo \mathbb{Z} al sottogruppo di $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathbb{K}}(B)$ generato dalla classe di equivalenza del fibrato banale $\theta^1 \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$.

perché $\text{rk}(\xi_1 \oplus_B \xi'_2) = n_2$. Questo dimostra la surgettività.

INIETTIVITÀ. Siano $\xi_1^{n_1}, \xi_2^{n_2} \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ tali che $\xi_1 - n_1 = \xi_2 - n_2$ in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(M)$. Questo significa che possiamo trovare un $\eta \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ tale che $\xi_1 \oplus_B \theta^{n_2} \oplus_B \eta \approx \xi_2 \oplus_B \theta^{n_1} \oplus_B \eta$. Per la proprietà (S), possiamo trovare $\eta' \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ tale che $\eta \oplus_B \eta' \approx \theta^n$ per qualche intero positivo n . Allora

$$\xi_1 \oplus_B \theta^{n_2} \oplus_B \eta \oplus_B \eta' \approx \xi_2 \oplus_B \theta^{n_1} \oplus_B \eta \oplus_B \eta' \iff \xi_1 \oplus_B \theta^{n+n_2} \approx \xi_2 \oplus_B \theta^{n+n_1}$$

ci dice che $\xi_1 \sim \xi_2$ e questo completa la dimostrazione. \square

NOTAZIONE 5.2.6. Indichiamo con $\tilde{\mathcal{V}}_{\mathbb{K}}(B)$ l'insieme delle classi di equivalenza stabile di fibrati vettoriali su B .

La somma di Whitney definisce per passaggio al quoziente un'addizione su $\tilde{\mathcal{V}}_{\mathbb{K}}(B)$. La proprietà (S) si può riformulare dicendo che ogni elemento di $\tilde{\mathcal{V}}_{\mathbb{K}}(B)$ ha un opposto. In particolare

TEOREMA 5.2.7. *Se B gode della proprietà (S), allora $\tilde{\mathcal{V}}_{\mathbb{K}}(B)$ è un gruppo abeliano e la corrispondenza $\xi \rightarrow (\xi - \text{rk}(\xi))$ definisce, per passaggio al quoziente, un isomorfismo di gruppi abeliani tra $\tilde{\mathcal{V}}_{\mathbb{K}}(B)$ e $\tilde{\mathcal{X}}_{\mathbb{K}}(B)$.* \square

5.3. Caratterizzazione omotopica dell'equivalenza stabile

5.3.1. Base cellulare. Possiamo riformulare il Teorema 5.1.2 usando la nozione di equivalenza stabile.

PROPOSIZIONE 5.3.1. *Ogni fibrato \mathbb{K} -vettoriale su un CW -complesso di dimensione m è stabilmente equivalente ad un fibrato \mathbb{K} -vettoriale di rango minore o uguale a $v = \lfloor \frac{m-k+1}{k} \rfloor$, ove $k = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$.* \square

Otteniamo quindi, per i CW -complessi, il

TEOREMA 5.3.2. *Ogni fibrato \mathbb{K} -vettoriale su un CW -complesso di dimensione minore o uguale ad m è stabilmente equivalente ad un sottofibrato del fibrato banale di rango $2v$, con $v = \lfloor \frac{m-k+1}{k} \rfloor$, per $k = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia B un CW -complesso di dimensione minore o uguale ad m e ξ un fibrato \mathbb{K} -vettoriale su B . Per la Proposizione 5.3.1 possiamo supporre, a meno di equivalenza stabile, che il rango n_{ξ} di ξ sia minore o uguale a v . Per la Proposizione 4.6.5, B ha proprietà (S) e quindi ξ è un sottofibrato vettoriale di un fibrato banale θ^{μ} su B , per qualche intero positivo μ . Se $\mu \leq 2v$, abbiamo finito. Altrimenti, osserviamo che $\xi \oplus \eta \approx \theta^{\mu}$ per un fibrato \mathbb{K} -vettoriale η di rango $\mu - n_{\xi}$. Per il Teorema 5.1.2 possiamo decomporre η nella somma diretta $\eta = \eta' \oplus_B \theta^{\mu'}$, con η' di rango $n_{\eta'}$ minore o uguale a v . Otteniamo allora

$$(\xi \oplus_B \eta' \oplus_B \theta^{2v-n_{\xi}-n_{\eta'}}) \oplus \theta^{\mu-2v} \simeq \theta^{2v} \oplus \theta^{\mu-2v}.$$

Poiché $2v > v$, per il Teorema 5.1.4 abbiamo

$$\xi \oplus_B \eta' \oplus_B \theta^{2v-n_{\xi}-n_{\eta'}} \simeq \theta^{2v}.$$

La dimostrazione è completa. \square

Se ξ^n è un sottofibrato vettoriale del fibrato banale $\theta^{2v} = (\text{pr}_B : B \times \mathbb{K}^{2v} \rightarrow B)$, allora ξ^n è il pullback $f^*(\gamma_n(\mathbb{K}^{2v}))$ del fibrato tautologico $\gamma_n(\mathbb{K}^{2v})$ sulla grassmanniana $\mathcal{G}r_n(\mathbb{K}^{2v})$, per l'applicazione f che fa corrispondere al punto b di B la fibra $E_b(\xi^n)$, che è un n -piano di \mathbb{K}^{2v} . Il Teorema 5.2.7 ci permette allora di caratterizzare omotopicamente l'equivalenza stabile ed il gruppo di K -teoria ristretto su un CW -complesso di dimensione finita.

TEOREMA 5.3.3. *Fissiamo il corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Sia B un CW -complesso di dimensione minore o uguale ad m e $v = \lfloor \frac{m-k+1}{k} \rfloor$, per $k = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$. La corrispondenza*

$$(5.1) \quad \mathcal{C}(B, \mathcal{G}r_v(\mathbb{K}^{2v})) \ni f \longrightarrow f^*(\gamma_v(\mathbb{K}^{2v})) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}^v(B)$$

definisce per passaggio al quoziente una bigezione

$$(5.2) \quad \pi(B, \mathcal{G}r_v(\mathbb{K}^{2v})) \longleftrightarrow \tilde{\mathcal{X}}_{\mathbb{K}}(B) \simeq \tilde{\mathcal{V}}_{\mathbb{K}}(B).$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che ogni fibrato ξ^n , di rango minore o uguale di v è stabilmente equivalente al fibrato $\xi^n \oplus_B \theta^{v-n}$, che ha rango v . \square

5.3.2. Base compatta Hausdorff. Nel caso in cui la base B sia compatta e di Hausdorff, la validità della proprietà (S) ci permette di classificare ancora le classi di equivalenza stabile di fibrati \mathbb{K} -vettoriali su B mediante l'omotopia delle applicazioni continue a valori nella grassmanniana. L'impossibilità di valutare a priori un limite superiore alle dimensioni degli spazi vettoriali da utilizzare ci costringe però ad utilizzare in questo caso la grassmanniana infinita.

DEFINIZIONE 5.3.4. Indichiamo con $B_{(\mathbb{K})}$ il limite induttivo $\lim_{v \rightarrow \infty} \mathcal{G}r_v(\mathbb{K}^{2v})$, rispetto alle inclusioni

$$\mathcal{G}r_v(\mathbb{K}^{2v}) \ni \ell_v \longrightarrow (\ell_v \oplus \langle e_{2v+2} \rangle) \in \mathcal{G}r_{v+1}(\mathbb{K}^{2v+2}).$$

TEOREMA 5.3.5. *Se B è un compatto di Hausdorff, allora le corrispondenze (5.1) definiscono, per passaggio ai limiti induttivi ed al quoziente, una corrispondenza biunivoca*

$$(5.3) \quad \pi(B, B_{(\mathbb{K})}) \longleftrightarrow \tilde{\mathcal{V}}_{\mathbb{K}}(B) \simeq \tilde{\mathcal{X}}_{\mathbb{K}}(B).$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo dimostrato nella Proposizione 4.6.2 che ogni compatto di Hausdorff B gode della proprietà (S) . Quindi ogni fibrato \mathbb{K} -vettoriale ξ su B è stabilmente equivalente, per qualche v che può dipendere da ξ , al pullback del fibrato tautologico per un'applicazione continua $f \in \mathcal{C}(B, \mathcal{G}r_v(\mathbb{K}^{2v})) \subset \mathcal{C}(B, B_{(\mathbb{K})})$. Questo dimostra che l'applicazione $\pi(B, B_{(\mathbb{K})}) \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}_{\mathbb{K}}(B)$ è surgettiva. Verifichiamo l'iniettività.

Se $\xi_0, \xi_1 \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ sono stabilmente equivalenti, possiamo trovare interi non negativi n_0, n_1 tali che $\xi_0 \oplus_B \theta^{n_0} \approx \xi_1 \oplus_B \theta^{n_1}$. Per il Lemma 4.8.6, possiamo definire un fibrato \mathbb{K} -vettoriale ξ sulla base $B \times I$ tale che

$$\xi_0 \oplus_B \theta^{n_0} \approx \xi|_{B \times \{0\}} \text{ e } \xi_1 \oplus_B \theta^{n_1} \approx \xi|_{B \times \{1\}}.$$

Poiché anche $B \times I$ gode della proprietà (S) , possiamo considerare ξ come un sottofibrato di un fibrato banale $\tilde{\theta}^v = (\text{pr}_{B \times I} : (B \times I) \times \mathbb{K}^v \rightarrow B \times I)$. Se ξ ha rango r , allora $\xi' = \xi \oplus_{B \times I} \tilde{\theta}^{v-r}$ è un sottofibrato di rango v di $\tilde{\theta}^{2v}$ ed abbiamo perciò $\xi' = f^*(\gamma_v(\mathbb{K}^{2v}))$ per una $f = (f_t) \in \mathcal{C}(B \times I, \mathcal{G}r_v(\mathbb{K}^{2v})) \subset \mathcal{C}(B \times I, B_{(\mathbb{K})})$. Poiché

$f_0^*(\gamma_v(\mathbb{K}^{2v}))$ ed $f_1^*(\gamma_v(\mathbb{K}^{2v}))$ sono s -equivalenti a ξ_0 ed a ξ_1 , rispettivamente, questo dimostra che l'applicazione $\pi(B, B_{\mathbb{K}}) \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}_{\mathbb{K}}(B)$ è anche iniettiva. \square

5.4. Gruppi si K -teoria relativi

Sia (B, A) una coppia topologica⁵.

Indichiamo con $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B, A)$ l'insieme delle triple (ξ, η, ϕ) in cui i primi due elementi sono fibrati \mathbb{K} -vettoriali su B e $\phi : E(\xi|_A) \rightarrow E(\eta|_A)$ un'applicazione continua che definisce un'equivalenza delle loro restrizioni ad A . Diciamo che due elementi (ξ, η, ϕ) e (ξ', η', ϕ') di $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B, A)$ sono *isomorfi*, e scriviamo $(\xi, \eta, \phi) \approx (\xi', \eta', \phi')$ se esistono equivalenze di fibrati \mathbb{K} -vettoriali, definite da applicazioni continue $f : E(\xi) \rightarrow E(\xi')$ e $g : E(\eta) \rightarrow E(\eta')$, che rendano commutativo il diagramma (dove indichiamo per semplicità con f, g le loro restrizioni alle fibre su A)

$$\begin{array}{ccc} E(\xi|_A) & \xrightarrow{f} & E(\xi'|_A) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi' \\ E(\eta|_A) & \xrightarrow{g} & E(\eta'|_A). \end{array}$$

Si dicono *elementari* le triple (ξ, ξ, ϕ) in cui ϕ sia omotopa all'identità nel gruppo degli automorfismi del fibrato $\xi|_A$.

Possiamo introdurre una *somma* tra gli elementi di $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B, A)$ ponendo

$$(5.4) \quad (\xi, \eta, \phi) + (\xi', \eta', \phi') = (\xi \oplus_B \xi', \eta \oplus_B \eta', \phi \oplus \phi').$$

Introduciamo in $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ la relazione di equivalenza

$$(5.5) \quad \begin{aligned} & (\xi, \eta, \phi) \sim (\xi', \eta', \phi') \\ \iff & \exists (\tau, \tau, \psi), (\tau', \tau', \psi') \text{ elementari, tali che} \\ & (\xi, \eta, \phi) + (\tau, \tau, \psi) \approx (\xi', \eta', \phi') + (\tau', \tau', \psi'). \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 5.4.1. Chiamiamo *gruppo di K -teoria relativo della coppia (B, A)* , ed indichiamo con $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B, A)$, il quoziente di $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B, A)$ rispetto alla relazione d'equivalenza (5.5).

PROPOSIZIONE 5.4.2. *Con la somma definita per passaggio al quoziente da (5.4), $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B, A)$ è un gruppo abeliano, che coincide con $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B)$ quando $A = \emptyset$. È*

$$(5.6) \quad (\xi, \eta, \phi) + (\eta, \xi, \phi^{-1}) \sim 0 \text{ in } \mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B, A) \text{ per ogni } (\xi, \eta, \phi) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B, A).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $A \neq \emptyset$. Si verifica facilmente che $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B, A)$ è un monoi-
de abeliano. Per verificare che è un gruppo basta dimostrare che vale la (5.6).
Abbiamo

$$(\xi, \eta, \phi) + (\eta, \xi, \phi^{-1}) = (\xi \oplus_B \eta, \eta \oplus_B \xi, \phi \oplus \phi^{-1}) \sim (\xi \oplus_B \eta, \xi \oplus_B \eta, \psi)$$

con ψ descritta dalla matrice

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & -\phi^{-1} \\ \phi & 0 \end{pmatrix} = \psi_1 \text{ per } \psi_t = \begin{pmatrix} I & -t \cdot \phi^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ t \cdot \phi & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -t \cdot \phi^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

⁵Ciò significa che B è uno spazio topologico ed A un suo sottospazio.

La tripletta $(\xi \oplus_B \eta, \xi \oplus_B \eta, \psi)$ è dunque elementare e questo dimostra la (5.6).

Osserviamo che ξ ed η hanno lo stesso rango, perché sono equivalenti su $A \neq \emptyset$. L'isomorfismo $\eta \oplus_B \xi \simeq \xi \oplus_B \eta$ si descrive con la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

che è omotopa all'identità. Questo spiega il segno meno davanti a ϕ^{-1} nella rappresentazione di ψ mediante una matrice.

Gli elementi di $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B, \emptyset)$ sono semplicemente coppie $(\xi, \eta) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B) \times \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ e possiamo definire un'applicazione di $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B, \emptyset)$ in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B)$ facendo corrispondere alla coppia (ξ, η) l'elemento $[\xi] - [\eta]$, ove abbiamo utilizzato le parentesi quadre per indicare la classe di equivalenza del fibrato in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B)$. Poiché la relazione di equivalenza che definisce $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B, \emptyset)$ identifica (ξ, η) a $(\xi \oplus_B \tau, \eta \oplus_B \tau)$ per ogni fibrato \mathbb{K} -vettoriale τ su B , la $(\xi, \eta) \rightarrow ([\xi] - [\eta])$ passa al quoziente e definisce l'isomorfismo $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B, \emptyset) \simeq \mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B)$. \square

OSSERVAZIONE 5.4.3. Intuitivamente, possiamo raffigurarci $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B, A)$ come il sottogruppo degli elementi del gruppo di K -teoria di B che si annullano su A .

LEMMA 5.4.4. *Siano (ξ, η, ϕ) e (ξ, η, ϕ') due elementi di $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B, A)$ che differiscono solo per le equivalenze ϕ, ϕ' delle restrizioni ad A dei fibrati. Se ϕ e ϕ' sono omotope, allora $(\xi, \eta, \phi) \sim (\xi, \eta, \phi')$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta verificare che

$$\begin{aligned} (\xi, \eta, \phi') - (\xi, \eta, \phi) &\sim (\xi, \eta, \phi') + (\eta, \xi, \phi^{-1}) = (\xi \oplus_B \eta, \eta \oplus_B \xi, \phi' \oplus \phi^{-1}) \\ &\sim (\xi \oplus_B \eta, \xi \oplus_B \eta, \psi) \sim 0 \end{aligned}$$

per

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & -\phi^{-1} \\ \phi' & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo è verificato se ψ è omotopa all'identità. Per l'ipotesi che ϕ' sia omotopa a ϕ , la ψ è omotopa a

$$\psi' = \begin{pmatrix} 0 & -\phi^{-1} \\ \phi & 0 \end{pmatrix},$$

che è omotopa all'identità (vedi la dimostrazione della Proposizione 5.4.2). \square

PROPOSIZIONE 5.4.5. *Siano (ξ, η, ϕ) ed (η, ζ, ψ) elementi di $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B, A)$. Allora*

$$(5.7) \quad (\xi, \eta, \phi) + (\eta, \zeta, \psi) \sim (\xi, \zeta, \psi \circ \phi) \text{ in } \mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B, A).$$

DIMOSTRAZIONE. Il primo membro della (5.7) è

$$(\xi \oplus_B \eta, \eta \oplus_B \zeta, \phi \oplus_B \psi) \sim (\xi \oplus_B \eta, \zeta \oplus_B \eta, \alpha), \quad \text{con } \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\psi \\ \phi & 0 \end{pmatrix}.$$

Per il secondo membro, abbiamo

$$(\xi, \zeta, \psi \circ \phi) \sim (\xi \oplus_B \eta, \zeta \oplus_B \eta, \psi \circ \phi \oplus I), \quad \text{con } \psi \circ \phi \oplus I = \begin{pmatrix} \psi \circ \phi & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\begin{pmatrix} 0 & -\psi \\ \psi^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \circ \phi & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\psi \\ \phi & 0 \end{pmatrix}$$

e $\begin{pmatrix} 0 & -\psi \\ \psi^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ è omotopa all'identità (vedi la dimostrazione della Proposizione 5.4.2), l'equivalenza segue dal Lemma 5.4.4. \square

Vogliamo dimostrare che per una coppia topologica (B, A) formata da un compatto di Hausdorff B ed un suo sottospazio chiuso A i gruppi di K -teoria di B e di A e quello della coppia (B, A) sono legati da una successione esatta. Questo risultato è un caso particolare di un teorema generale che riguarda morfismi di categorie. La dimostrazione utilizza le nozioni di quasi surgettività e di pienezza, che illustriamo, nei due lemmi seguenti, per il caso che ci interessa: quello delle categorie di fibrati \mathbb{K} -vettoriali e dei loro morfismi \mathbb{K} -lineari.

LEMMA 5.4.6 (quasi surgettività). *Sia B un compatto di Hausdorff ed A un suo sottospazio chiuso. Allora ogni $\xi \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(A)$ è un sottofibrato della restrizione ad A di un fibrato \mathbb{K} -vettoriale su B .*

DIMOSTRAZIONE. Questo segue dal fatto che ogni $\xi \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(A)$ è un sottofibrato di un fibrato banale su A , ed un fibrato banale su A è la restrizione del corrispondente fibrato banale su B . \square

LEMMA 5.4.7 (pienezza). *Sia B un compatto di Hausdorff ed A un suo sottospazio chiuso. Allora, per ogni coppia di fibrati \mathbb{K} -vettoriali ξ, η su B ed ogni morfismo di fibrati \mathbb{K} -vettoriali $f \in \mathcal{C}(E(\xi|_A), E(\eta|_A))$, che renda commutativo il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} E(\xi|_A) & \xrightarrow{f} & E(\eta|_A) \\ & \searrow \pi_\xi & \swarrow \pi_\eta \\ & A & \end{array}$$

esiste una $\tilde{f} \in \mathcal{C}(E(\xi), E(\eta))$, che estende f e rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{\tilde{f}} & E(\eta) \\ & \searrow \pi_\xi & \swarrow \pi_\eta \\ & B & \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti le sezioni di $\mathcal{H}om_{\mathbb{K}}(\xi, \eta)$ su A si possono estendere a sezioni globali su B , per l'ipotesi che A fosse un sottospazio chiuso del compatto di Hausdorff B . \square

TEOREMA 5.4.8. *Le applicazioni*⁶

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B, A) \ni (\xi, \eta, \phi) &\longrightarrow [\xi] - [\eta] \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(B), \\ \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B) \ni \xi &\longrightarrow \xi|_A \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(A) \end{aligned}$$

definiscono, per passaggio al quoziente, un complesso di gruppi abeliani e di omomorfismi di gruppi.

$$(5.8) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(B, A) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(B) \xrightarrow{\beta} \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(A) \longrightarrow 0.$$

⁶Le parentesi quadre indicano qui la classe di equivalenza in $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(B)$ del fibrato.

- (1) $\ker \alpha$ è formato dalle classi di equivalenza degli elementi della forma (ξ, ξ, ϕ) di $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B, A)$;
- (2) se A gode della proprietà (S), allora (5.8) è esatta in $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(B)$;
- (3) Se A è un retratto di B , allora β è surgettiva.

Se B è un compatto di Hausdorff ed A un suo retratto, allora la (5.8) è esatta e split.

DIMOSTRAZIONE. La (5.8) è un complesso perché, se $(\xi, \eta, \phi) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B, A)$, allora $[\xi|_A] = [\eta|_A]$.

(1) Sia $(\xi, \eta, \phi) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B, A)$ il rappresentante di una classe di $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(B, A)$ che appartenga al nucleo di α . Esiste allora un fibrato $\zeta \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ tale che $\xi \oplus_B \zeta \approx \eta \oplus_B \zeta$. Indichiamo con $f : E(\eta \oplus_B \zeta) \rightarrow E(\xi \oplus_B \zeta)$ l'omeomorfismo che definisce l'equivalenza. Allora

$$(\xi, \eta, \phi) \sim (\xi \oplus_B \zeta, \eta \oplus_B \zeta, \phi \oplus \text{id}) \approx (\xi \oplus_B \zeta, \xi \oplus_B \zeta, f \circ (\phi \oplus \text{id})).$$

(2) Un elemento di $\mathcal{K}(B) \simeq \mathcal{K}(B, \emptyset)$ è la classe di equivalenza di una coppia (ξ, η) di fibrati in $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$. Se la sua immagine mediante β è nulla, allora, poiché abbiamo supposto che A godesse della proprietà (S), per il Teorema 5.2.5, le restrizioni di ξ e di η ad A sono stabilmente equivalenti e possiamo trovare un intero non negativo v tale che $\xi|_A \oplus_A \theta_A^v \approx \eta|_A \oplus_A \theta_A^v$. Se ϕ è un omeomorfismo di $E(\xi|_A \oplus_A \theta_A^v)$ su $E(\eta|_A \oplus_A \theta_A^v)$ che definisce l'equivalenza, allora la classe di (ξ, η) è l'immagine mediante α della classe di $(\xi \oplus_B \theta_B^v, \eta \oplus_B \theta_B^v, \phi)$ in $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(B, A)$.

(3) Se ρ è una retrazione di B su A , cioè un'applicazione continua di B su A con $\rho(a) = a$ per ogni a di A , allora, la classe di $\mathcal{K}(A) \simeq \mathcal{K}(A, \emptyset)$ definita da una coppia (ξ, η) di fibrati \mathbb{K} -vettoriali su A è l'immagine mediante β della classe di $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(B) \simeq \mathcal{K}(B, \emptyset)$ definita dalla coppia $(\rho^*(\xi), \rho^*(\eta))$.

Supponiamo ora che B sia un compatto di Hausdorff ed A un suo retratto. Per i punti (2) e (3), ci resta soltanto da verificare l'esattezza in $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(B, A)$ e, per il punto (1), ciò si riduce a verificare che gli elementi (ξ, ξ, ϕ) sono equivalenti alla classe 0. Utilizzando il fatto che B gode della proprietà (S), sommando una tripletta elementare possiamo ricondurci a dimostrare che una tripletta $(\theta_B^v, \theta_B^v, \phi)$ di $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B, A)$ è nella classe di 0. A questo scopo osserviamo che $\theta_B^v = \rho^*(\theta_A^v)$ e che quindi la ϕ si rileva ad un automorfismo del fibrato banale:

$$\tilde{\phi}(b, v) = (b, \phi(\rho(b))(v)), \quad \forall b \in B, \forall v \in \mathbb{K}^v.$$

Utilizzando $\tilde{\phi}$, otteniamo $(\theta_B^v, \theta_B^v, \phi) \sim (\theta_B^v, \theta_B^v, \text{id}) \sim 0$.

Concludiamo osservando che l'applicazione $\mathcal{K}(A) \rightarrow \mathcal{K}(B)$, ottenuta dalla $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(A) \ni \xi \rightarrow \rho^*(\xi) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ per passaggio al quoziente rispetto alla relazione di s -equivalenza, inverte la β e definisce quindi uno split della (5.8). \square

5.5. I gruppi $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}^{-1}(B)$

Fissato uno spazio topologico B , consideriamo lo spazio $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}^{(-1)}(B)$ che consiste delle coppie (ξ, f) formate da un fibrato \mathbb{K} -vettoriale ξ e da un omeomorfismo

⁷Indichiamo qui con $\theta_A^v = (\text{pr}_A : A \times \mathbb{K}^v \rightarrow A)$ e $\theta_B^v = (\text{pr}_B : B \times \mathbb{K}^v \rightarrow B)$ i fibrati \mathbb{K} -vettoriali banali di rango v su A e B , rispettivamente.

$f : E(\xi) \rightarrow E(\xi)$ che definisca un'equivalenza di ξ in sé. Due coppie (ξ_1, f_1) e (ξ_2, f_2) si dicono *isomorfe*, relazione che indicheremo con $(\xi_1, f_1) \approx (\xi_2, f_2)$, se possiamo trovare un'equivalenza di fibrati vettoriali, definita da una $\phi : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ che renda commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E(\xi_1) & \xrightarrow{\phi} & E(\xi_2) \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ E(\xi_1) & \xrightarrow{\phi} & E(\xi_2). \end{array}$$

Introduciamo per coppie $(\xi_1, f_1), (\xi_2, f_2)$ di $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}^{(-1)}(B)$ una *somma* ponendo

$$(5.9) \quad (\xi_1, f_1) + (\xi_2, f_2) = (\xi_1 \oplus_B \xi_2, f_1 \oplus f_2).$$

Chiamiamo *elementari* le coppie (ξ, f) in cui f sia omotopa all'identità nello spazio delle equivalenze di fibrati vettoriali.

DEFINIZIONE 5.5.1. Diciamo che $(\xi_1, f_1), (\xi_2, f_2) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}^{(-1)}(B)$ sono *equivalenti*, e scriviamo $(\xi_1, f_1) \sim (\xi_2, f_2)$, se possiamo trovare due coppie elementari (η_1, g_1) ed (η_2, g_2) in $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}^{(-1)}(B)$ tali che

$$(\xi_1, f_1) + (\eta_1, g_1) \approx (\xi_2, f_2) + (\eta_2, g_2).$$

Indichiamo con $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(B)$ l'insieme delle classi di equivalenza di $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}^{(-1)}(B)$ rispetto alla relazione " \sim " definita sopra.

Con dimostrazioni analoghe a quelle della Proposizione 5.4.2, del Lemma 5.4.4 e della Proposizione 5.4.5, otteniamo:

PROPOSIZIONE 5.5.2. *Per passaggio al quoziente, la somma (5.9) definisce su $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(B)$ una struttura di gruppo abeliano.*

Se $(\xi, f) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}^{(-1)}(B)$, allora

$$(\xi, f) + (\xi, f^{-1}) \sim 0 \text{ in } \mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(B).$$

Se $\xi \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ ed f, f' sono omotope come equivalenze di ξ , allora $(\xi, f) \sim (\xi, f')$ in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(B)$.

Vale la formula d'addizione

$$(5.10) \quad (\xi, f) + (\xi, f') \sim (\xi, f \circ f') \text{ in } \mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(B). \quad \square$$

LEMMA 5.5.3. *Un elemento (ξ, f) di $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}^{(-1)}(B)$ definisce la classe 0 in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(B)$ se e soltanto se possiamo trovare un fibrato \mathbb{K} -vettoriale η su B tale che $f \oplus \text{id}_{E(\eta)}$ sia omotopa all'identità come equivalenza sul fibrato $\xi \oplus_B \eta$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $(\xi, f) \sim 0$ in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(B)$, possiamo trovare due coppie elementari (η, g) ed (η', g') tali che

$$(\xi, f) + (\eta, g) \approx (\eta', g').$$

L'equivalenza significa che vi è un'equivalenza di fibrati \mathbb{K} -vettoriali h che rende commutativo il diagramma

$$(5.11) \quad \begin{array}{ccc} E(\xi \oplus_B \eta) & \xrightarrow{f \oplus g} & E(\xi \oplus_B \eta) \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ E(\eta') & \xrightarrow{g'} & E(\eta'). \end{array}$$

Questo significa che $f \oplus g = h \circ g' \circ h^{-1}$ ed è quindi omotopa all'identità perché tale è g' . Il viceversa segue dalla definizione di $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(B)$. \square

Da questo lemma ricaviamo

PROPOSIZIONE 5.5.4. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due coppie $(\xi_1, f_1), (\xi_2, f_2) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}^{(-1)}(B)$ definiscano lo stesso oggetto in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(B)$ è che si possa trovare un fibrato \mathbb{K} -vettoriale η tale che $f_1 \oplus \text{id}_{E(\xi_2)} \oplus \text{id}_{E(\eta)}$ ed $\text{id}_{E(\xi_1)} \oplus f_2 \oplus \text{id}_{E(\eta)}$ siano omotope come equivalenze del fibrato $\xi_1 \oplus_B \xi_2 \oplus_B \eta$.*

DIMOSTRAZIONE. La differenza delle classi di (ξ_1, f_1) e (ξ_2, f_2) è, per la Proposizione 5.5.2, la classe del fibrato

$$(\xi_1, f_1) + (\xi_2, f_2^{-1}) = (\xi_1 \oplus \xi_2, f_1 \oplus f_2^{-1}).$$

Per il Lemma 5.5.3 ciò equivale al fatto che vi sia un fibrato vettoriale η tale che $f_1 \oplus f_2^{-1} \oplus \text{id}_{E(\eta)}$ sia omotopa all'identità nella classe delle equivalenze del fibrato \mathbb{K} -vettoriale $\xi_1 \oplus_B \xi_2 \oplus_B \eta$. Componendo l'omotopia con $\text{id}_{E(\xi_1)} \oplus f_2 \oplus \text{id}_{E(\eta)}$ otteniamo la dimostrazione della necessità della condizione. La sufficienza segue subito dalla Proposizione 5.5.2. \square

PROPOSIZIONE 5.5.5. *Se B gode della proprietà (S), allora ogni elemento di $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(B)$ ha come rappresentante una coppia (θ^n, g) in cui θ^n è il fibrato \mathbb{K} -vettoriale banale ($\text{pr}_B : B \times \mathbb{K}^n \rightarrow B$) di rango n su B e g una sua equivalenza.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $(\xi, f) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}^{(-1)}(B)$. Per la (S) possiamo trovare $\eta \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B)$ tale che $\xi \oplus \eta \approx \theta^n$. Allora $(\xi, f) \sim (\xi \oplus \eta, f \oplus \text{id}_{E(\eta)}) \sim (\theta^n, g)$ per un'equivalenza g di θ^n . \square

Se $n < v$, abbiamo le inclusioni naturali di gruppi

$$(5.12) \quad \mathbf{O}(n) \hookrightarrow \mathbf{O}(v), \quad \mathbf{U}(n) \hookrightarrow \mathbf{U}(v), \quad \mathbf{Sp}(n) \hookrightarrow \mathbf{Sp}(v)$$

che si ottengono identificando il gruppo che agisce su \mathbb{K}^n con il sottogruppo del gruppo che agisce su \mathbb{K}^v lasciando fissi i vettori e_{n+1}, \dots, e_v .

DEFINIZIONE 5.5.6. Poniamo

$$(5.13) \quad \mathbf{O} = \text{inj lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{O}(n), \quad \mathbf{U} = \text{inj lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{U}(n), \quad \mathbf{Sp} = \text{inj lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Sp}(n),$$

dove i limiti diretti sono fatti rispetto alla catena di inclusioni (5.12).

Osserviamo che \mathbf{O} , \mathbf{U} , \mathbf{Sp} sono gruppi topologici. Si possono interpretare come gruppi di trasformazioni lineari di \mathbb{K}^∞ che lasciano fissi i vettori del complementare di un sottospazio di dimensione finita.

Se \mathbf{G} è un gruppo topologico e B uno spazio topologico, le operazioni su \mathbf{G} definiscono una struttura di gruppo topologico su $\mathcal{C}(B, \mathbf{G})$, che per passaggio al quoziente definisce una struttura di gruppo su $\pi(B, \mathbf{G})$.

Dalla Proposizione 5.5.5 otteniamo

TEOREMA 5.5.7. *Se B gode della proprietà (S), abbiamo isomorfismi di gruppi*

$$(5.14) \quad \begin{cases} \pi(B, \mathbf{O}) \leftrightarrow \mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(B), \\ \pi(B, \mathbf{U}) \leftrightarrow \mathcal{X}_{\mathbb{C}}^{-1}(B), \\ \pi(B, \mathbf{Sp}) \leftrightarrow \mathcal{X}_{\mathbb{H}}^{-1}(B). \end{cases} \quad \square$$

Indichiamo con $\mathcal{V}_{\mathbb{K}, \text{triv}}^{(-1)}(A)$ l'insieme degli elementi di $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}^{(-1)}(A)$ della forma (θ_A^n, ϕ) , in cui cioè il primo elemento della coppia sia un fibrato banale. Consideriamo l'applicazione

$$(5.15) \quad \mathcal{V}_{\mathbb{K}, \text{triv}}^{(-1)}(A) \ni (\theta_A^n, \phi) \longrightarrow (\theta_B^n, \theta_B^n, \phi) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B, A).$$

LEMMA 5.5.8. *Supponiamo che A goda della proprietà (S). Allora, se $(\theta_A^n, \phi) \sim (\theta_A^v, \psi)$ in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{(-1)}(A)$, anche $(\theta_B^n, \theta_B^n, \phi) \sim (\theta_B^v, \theta_B^v, \psi)$ in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B, A)$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché abbiamo supposto che A goda della proprietà (S), tenuto conto della Proposizione 5.5.2, l'equivalenza $(\theta_A^n, \phi) \sim (\theta_A^v, \psi)$ in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{(-1)}(A)$ si può riformulare richiedendo che si possano trovare interi non negativi m_1, m_2 tali che $(\theta_A^n \oplus_A \theta_A^{m_1}, \phi \oplus \text{id}) \approx (\theta_A^v \oplus_A \theta_A^{m_2}, \psi \oplus \text{id})$ in $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}^{(-1)}(A)$. Poiché

$$\begin{aligned} & (\theta_B^n \oplus_B \theta_B^{m_1}, \theta_B^n \oplus_B \theta_B^{m_1}, \phi \oplus \text{id}) \sim (\theta_B^n, \theta_B^n, \phi) \\ \text{e} & (\theta_B^v \oplus_B \theta_B^{m_1}, \theta_B^v \oplus_B \theta_B^{m_1}, \psi \oplus \text{id}) \sim (\theta_B^v, \theta_B^v, \psi), \end{aligned}$$

$(\theta_B^n, \theta_B^n, \phi)$ e $(\theta_B^v, \theta_B^v, \psi)$ definiscono la stessa classe in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B, A)$. \square

Il Lemma 5.5.8 ci permette di definire, nel caso in cui A goda della proprietà (S), un'applicazione $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(A) \rightarrow \mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B, A)$.

TEOREMA 5.5.9. *Sia (B, A) una coppia topologica e supponiamo che A e B godano della proprietà (S). Abbiamo allora una successione esatta*

$$(5.16) \quad \mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(B) \xrightarrow{\beta_{-1}} \mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(A) \xrightarrow{\delta_{-1}} \mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B, A) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B) \xrightarrow{\beta} \mathcal{X}_{\mathbb{K}}(A).$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già stabilito l'esattezza in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B)$ nel Teorema 5.4.8.

Rimane da verificare che (5.16) è un complesso ed è esatta in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(A)$ e $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B, A)$.

Una classe di $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(A)$ ha un rappresentante (θ_A^n, ϕ) che appartiene a $\mathcal{V}_{\mathbb{K}, \text{triv}}^{(-1)}(A)$. La sua immagine è la classe di $(\theta_B^n, \theta_B^n, \phi)$, la cui immagine ($[\xi] - [\xi]$) è nulla.

Consideriamo ora un rappresentante $(\theta_B^n, \phi) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}, \text{triv}}^{(-1)}(B)$ di una classe di $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(B)$. Allora $(\theta_A^n, \phi|_{E(\theta_A^n)})$ rappresenta l'immagine della classe in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(A)$, e questa si mappa nella classe di $(\theta_B^n, \theta_B^n, \phi|_{E(\theta_A^n)})$. Questa tripletta è equivalente alla tripletta $(\theta_B^n, \theta_B^n, \text{id})$, perché ϕ è globale.

ESATTEZZA IN $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B, A)$. Nel Teorema 5.4.8 abbiamo dimostrato che una classe di equivalenza di $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B, A)$ con immagine nulla ha un rappresentante della forma (ξ, ξ, ϕ) in $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(B, A)$. Poiché B gode della (S), abbiamo

$$(\xi, \xi, \phi) \sim (\xi \oplus_B \eta, \xi \oplus_B \eta, \phi \oplus \text{id}) \approx (\theta_B^n, \theta_B^n, \psi)$$

per qualche $\eta \in \mathcal{V}'_{\mathbb{K}}(B)$. Allora la classe di (ξ, ξ, ϕ) in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B, A)$ è l'immagine della classe di $(\theta_A^n, \psi|_A)$ in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(A)$.

ESATTEZZA IN $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(A)$. Una classe di equivalenza in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(A)$ che ha immagine nulla in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}(B, A)$ ha un rappresentante (θ_A^n, ϕ) per cui, per qualche intero non negativo v , la tripletta $(\theta_B^{n+v}, \theta_B^{n+v}, \phi \oplus \text{id})$ sia elementare. Per il Lemma 5.4.4 ciò implica che possiamo trovare equivalenze f, g del fibrato banale θ_B^{n+v} che rendano commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} A \times \mathbb{K}^{n+v} & \xrightarrow{f|_{A \times \mathbb{K}^{n+v}}} & A \times \mathbb{K}^{n+v} \\ \phi \oplus \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ A \times \mathbb{K}^{n+v} & \xrightarrow{g|_{A \times \mathbb{K}^{n+v}}} & A \times \mathbb{K}^{n+v}. \end{array}$$

La classe di (θ^n, ϕ) in $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(A)$ è l'immagine della classe $(\theta_B^{n+v}, g \circ (\phi \oplus \text{id}) \circ f^{-1})$ di $\mathcal{X}_{\mathbb{K}}^{-1}(B)$.

□

Parte 2

Conessioni principali

Fibrati principali differenziabili

La nozione di fibrato principale generalizza il metodo del riferimento mobile introdotto per lo studio delle curve gobbe ed è fondamentale nell'impostazione di Cartan del problema dell'equivalenza di strutture geometrico-differenziali.

6.1. Prime definizioni

DEFINIZIONE 6.1.1. Siano $\xi = (P, \pi, M)$ un fibrato differenziabile e \mathbf{G} un gruppo di Lie. Un'azione differenziabile a destra di \mathbf{G} su ξ è una sua azione differenziabile a destra su P che operi sulle fibre di ξ . Richiediamo cioè che

$$(6.1) \quad P_p \cdot a = P_p, \quad \forall p \in M, \quad \forall a \in \mathbf{G}, \quad \text{ovvero che } \pi \circ R_a = \pi, \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

In particolare, per ogni $a \in \mathbf{G}$, la traslazione a destra R_a su P definisce un'equivalenza di ξ in sé.

DEFINIZIONE 6.1.2. Un fibrato principale $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ è il dato di un fibrato differenziabile (P, π, M) , di un gruppo di Lie \mathbf{G} , che si dirà il suo *gruppo strutturale*, e di un'azione differenziabile a destra di \mathbf{G} su ξ che sia *libera e transitiva* sulle fibre di ξ . Richiediamo cioè che oltre a (6.1) valga

$$(6.2) \quad \forall p \in M, \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in P_p, \quad \exists! a \in \mathbf{G} \text{ tale che } \sigma_2 = \sigma_1 \cdot a.$$

Indicheremo con $\sigma_1^{-1}\sigma_2$ l'unico elemento $a \in \mathbf{G}$ per cui $\sigma_2 = \sigma_1 \cdot a$.

Sia $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale.

Per il teorema delle funzioni implicite, una sommersione differenziabile ammette in ogni punto un'inversa destra locale. Poiché un'inversa destra locale di π è una sezione locale di ξ , abbiamo:

LEMMA 6.1.3. Per ogni $\sigma_0 \in P$ esiste un intorno aperto U di $\rho_0 = \pi(\sigma_0)$ in M ed una sezione $\sigma \in \Gamma_\xi(U, P)$ tale che $\sigma(\rho_0) = \sigma_0$. \square

COROLLARIO 6.1.4. Ogni fibrato principale differenziabile è localmente banale.

DIMOSTRAZIONE. Se U è un aperto di M e $\sigma \in \Gamma_\xi(U, P)$ una sezione di ξ su U , l'applicazione $U \times \mathbf{G} \ni (p, a) \rightarrow \sigma(p) \cdot a \in \pi^{-1}(U)$ è una trivializzazione di ξ su U . La tesi segue quindi dal Lemma 6.1.3 \square

COROLLARIO 6.1.5. Un fibrato principale $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ è banale se e soltanto se ammette una sezione globale $\sigma \in \Gamma_\xi(M, P)$. \square

DEFINIZIONE 6.1.6. Un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i) \mid i \in I\}$ di un fibrato principale $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ è il dato di un ricoprimento aperto $\{U_i \mid i \in I\}$ di M e, per ogni indice $i \in I$, di una sezione $\sigma_i \in \Gamma_{\xi}(U_i, P)$.

Alla coppia (U_i, σ_i) corrisponde la *trivializzazione locale*

$$\tilde{\sigma}_i : U_i \times \mathbf{G} \ni (\mathbf{p}, \mathbf{a}) \longrightarrow \sigma_i(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{a} \in P|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i).$$

Per ogni coppia di indici $i, j \in I$, con $U_{i,j} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, la

$$(6.3) \quad \mathbf{a}_{i,j} : U_{i,j} \ni \mathbf{p} \longrightarrow [\sigma_i(\mathbf{p})]^{-1} \sigma_j(\mathbf{p}) \in \mathbf{G}.$$

è una funzione di $\mathcal{C}^\infty(U_{i,j}, \mathbf{G})$. Le $\{\mathbf{a}_{i,j} \mid U_{i,j} \neq \emptyset\}$ si dicono le *funzioni di transizione* dell'atlante \mathcal{A} .

PROPOSIZIONE 6.1.7. Le funzioni di transizione $\{\mathbf{a}_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(U_{i,j}, \mathbf{G}) \mid U_{i,j} \neq \emptyset\}$ di un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i)\}_{i \in I}$ di un fibrato principale ξ verificano le condizioni

$$(6.4) \quad \begin{cases} \mathbf{a}_{i,i}(\mathbf{p}) = e, & \forall \mathbf{p} \in U_{i,i} = U_i, \\ \mathbf{a}_{i,j} \mathbf{a}_{j,k} = \mathbf{a}_{i,k} & \text{su } U_{i,j,k} = U_i \cap U_j \cap U_k. \end{cases} \quad \square$$

TEOREMA 6.1.8. Siano M una varietà differenziabile, \mathbf{G} un gruppo di Lie, $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di M e $\Psi = \{\mathbf{a}_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(U_{i,j}, \mathbf{G}) \mid U_{i,j} \neq \emptyset\}$ una famiglia di funzioni che soddisfino le (6.4). Allora esiste un fibrato principale $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ su M , per cui le $\mathbf{a}_{i,j}$ siano le funzioni di transizione di un atlante di trivializzazione corrispondente al ricoprimento $\{U_i\}$. Tale fibrato è unico, a meno di equivalenze che commutino con l'azione di \mathbf{G} . \square

6.2. La distribuzione verticale

All'azione di \mathbf{G} su P associamo le applicazioni

$$(6.5) \quad \ell_\sigma : \mathbf{G} \ni \mathbf{a} \longrightarrow \sigma \cdot \mathbf{a} \in P, \quad \text{per ogni } \sigma \in P,$$

$$(6.6) \quad \mathbf{R}_\mathbf{a} : P \ni \sigma \longrightarrow \sigma \cdot \mathbf{a} \in P, \quad \text{per ogni } \mathbf{a} \in \mathbf{G}.$$

Indicando con $L_\mathbf{a}$ la traslazione a sinistra in \mathbf{G} , abbiamo

$$\begin{aligned} \ell_\sigma \circ L_\mathbf{a} &= \ell_{\sigma \cdot \mathbf{a}}, \\ \mathbf{R}_\mathbf{a} \circ \ell_\sigma &= \ell_{\sigma \cdot \mathbf{a}} \circ \text{ad}_{\mathbf{a}^{-1}}. \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 6.2.1. Denotiamo con

$$(6.7) \quad \mathcal{V}(P) = \{X \in \mathfrak{X}(P) \mid d\pi_\sigma(X_\sigma) = 0, \forall \sigma \in P\}$$

la *distribuzione verticale* su P e con

$$(6.8) \quad \mathcal{V}P = \bigcup_{\sigma \in P} \{X_\sigma \mid X \in \mathcal{V}(P)\} = \ker(d\pi) \subset TP$$

il corrispondente *fibrato verticale*.

La $\mathcal{V}(P)$ è totalmente integrabile, perché la proiezione sulla base $\pi : P \rightarrow M$ ne definisce una foliazione globale. In particolare, è soddisfatta la condizione di integrabilità formale

$$(6.9) \quad [\mathcal{V}(P), \mathcal{V}(P)] \subseteq \mathcal{V}(P).$$

Ogni $X \in \mathfrak{g}$ definisce (vedi §29.9) un gruppo a un parametro

$$(6.10) \quad \mathbf{P} \times \mathbb{R} \ni (\sigma, t) \rightarrow \sigma \cdot \exp(t \cdot X) \in \mathbf{P}$$

di diffeomorfismi di \mathbf{P} .

DEFINIZIONE 6.2.2. Chiamiamo *campo fondamentale* associato ad X il generatore infinitesimale X^* del flusso (6.10).

OSSERVAZIONE 6.2.3. Se ξ è il fibrato banale $\mathbf{G} \rightarrow \{p_0\}$, allora il campo fondamentale X^* coincide con il campo invariante a sinistra X^* su \mathbf{G} .

PROPOSIZIONE 6.2.4. Per ogni $X \in \mathfrak{g}$, il campo fondamentale X^* è verticale e

$$(6.11) \quad X_\sigma^* = \sigma \cdot X := [d\ell_\sigma]_e(X), \quad \forall \sigma \in \mathbf{P}.$$

Abbiamo:

- (1) $\forall \sigma \in \mathbf{P}$, $[d\ell_\sigma]_e : \mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_\sigma^* \in V_\sigma \mathbf{P}$ è un isomorfismo lineare.
- (2) La distribuzione $\mathcal{V}(\mathbf{P})$ è il sotto- $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{P})$ -modulo generato dai campi di vettori X^* , al variare di X in \mathfrak{g} .
- (3) La $\mathbf{P} \times \mathfrak{g} \ni (\sigma, X) \rightarrow X_\sigma^* \in \mathcal{V}\mathbf{P}$ è un'equivalenza di fibrati vettoriali, che definisce una trivializzazione del fibrato verticale $\mathcal{V}\mathbf{P}$.
- (4) La $\Lambda : \mathfrak{g} \ni X \rightarrow X^* \in \mathcal{V}(\mathbf{P})$ è un monomorfismo di algebre di Lie.
- (5) Vale la formula

$$(6.12) \quad dR_a(X^*) = [\text{Ad}_{a^{-1}}(X)]^*, \quad \forall a \in \mathbf{G}, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

DIMOSTRAZIONE. (1). La $t \rightarrow \sigma \cdot \exp(t \cdot X)$ è la curva integrale di X^* con punto iniziale σ . Poiché l'azione di \mathbf{G} sulla fibra è libera, se $X \neq 0$, allora $X_\sigma^* \neq 0$ perché la curva non è costante. La $d\ell_\sigma$ definisce quindi un'applicazione lineare iniettiva di \mathfrak{g} in $V_\sigma \mathbf{P}$, che è un isomorfismo lineare perché i due spazi hanno la stessa dimensione finita. Le (2) e (3) sono conseguenza immediata della (1).

(4). Per (1), Λ è iniettiva. I campi X^* su \mathbf{G} ed X^* su \mathbf{P} sono ℓ_σ -correlati per ogni $\sigma \in \mathbf{P}$. Questo implica che Λ è anche un omomorfismo di algebre di Lie, completando la dimostrazione del punto (4).

La formula (6.12) si ottiene dalla

$$R_a(\sigma \cdot \exp(t \cdot X)) = \sigma \cdot (\exp(t \cdot X)a) = \sigma \cdot a \cdot (a^{-1} \exp(t \cdot X)a) = (\sigma \cdot a) \cdot \exp(t \cdot \text{Ad}(a^{-1})X),$$

che dimostra come la traslazione R_a su \mathbf{P} trasformi il flusso generato da X^* nel flusso generato da $[\text{Ad}(a^{-1})X]^*$. \square

Per la (1) della Prop.6.2.4, per ogni $\sigma \in \mathbf{P}$ risulta definito un isomorfismo lineare $V_\sigma \mathbf{P} \rightarrow \mathfrak{g}$, che fa corrispondere ad ogni vettore verticale v in $V_\sigma \mathbf{P}$ l'unico elemento X di \mathfrak{g} con $X_\sigma^* = v$. La

$$(6.13) \quad \omega_\sigma : \mathcal{V}\mathbf{P} \rightarrow \mathfrak{g}$$

così ottenuta è di classe \mathcal{C}^∞ e $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{P})$ -lineare sulle fibre di $\mathcal{V}\mathbf{P}$: la ω_σ è cioè una forma differenziale sulla distribuzione verticale $\mathcal{V}\mathbf{P}$, a valori nell'algebra di Lie \mathfrak{g} .

Per la (6.12), la ω_σ soddisfa

$$(6.14) \quad (R_a)^* \omega_\sigma = \text{Ad}_{a^{-1}} \circ \omega_\sigma, \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

Per semplificare le notazioni, sarà a volte conveniente scrivere

$$X_\sigma \cdot \mathbf{a} \quad \text{invece che} \quad dR_a(X_\sigma), \quad \text{per } X_\sigma \in \text{TP}, \mathbf{a} \in \mathbf{G}.$$

6.3. Morfismi di fibrati principali

Siano $\xi_i = (P_i, \pi_i, M_i, \mathbf{G}_i)$, $i = 1, 2$, due fibrati principali.

DEFINIZIONE 6.3.1. Un *morfismo di fibrati principali* $\Phi : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è una tripletta (F, f, ϕ) in cui $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ sia un omomorfismo di gruppi di Lie e la coppia (F, f) un morfismo $(P_1, \pi_1, M_1) \rightarrow (P_2, \pi_2, M_2)$ di fibrati differenziabili tali che

$$(6.15) \quad F(\sigma \cdot \mathbf{a}) = F(\sigma) \cdot \phi(\mathbf{a}), \quad \forall \sigma \in P_1, \forall \mathbf{a}_1 \in \mathbf{G}_1.$$

Diciamo che Φ è un'immersione se F è un'immersione. In questo caso ϕ è un monomorfismo di gruppi.

Se $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}$ e ϕ è l'identità, diciamo che Φ è un morfismo di \mathbf{G} -fibrati principali.

Se F è un'inclusione, diciamo che Φ è un'inclusione di fibrati principali. Se inoltre $M_1 = M_2$ ed $f = \text{id}_M$, chiamiamo ξ_1 un *sottofibrato principale* di ξ_2 , o che è stato ottenuto da ξ_2 mediante una *riduzione del gruppo strutturale*, ovvero che ξ_2 è stato ottenuto da ξ_1 mediante un'estensione del gruppo strutturale.

PROPOSIZIONE 6.3.2. Siano $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale ed $\mathbf{H} < \mathbf{G}$ un sottogruppo di Lie del suo gruppo strutturale. Condizione necessaria e sufficiente affinché ξ ammetta una riduzione ad \mathbf{H} del suo gruppo strutturale è che ammetta un atlante di trivializzazione con funzioni di transizione a valori in \mathbf{H} . \square

LEMMA 6.3.3. Il pullback di un fibrato \mathbf{G} -principale ha un'unica struttura di fibrato \mathbf{G} -principale che renda l'applicazione naturale associata un morfismo di fibrati \mathbf{G} -principali. \square

I morfismi di fibrati \mathbf{G} -principali che inducano l'identità sul gruppo strutturale sono completamente determinati, modulo \mathbf{G} -equivalenza, dalle applicazioni indotte tra le basi:

PROPOSIZIONE 6.3.4. Siano $\xi_i = (P_i, \pi_i, M_i, \mathbf{G})$ ($i = 1, 2$) due fibrati \mathbf{G} -principali. Condizione necessaria e sufficiente affinché esista un morfismo di \mathbf{G} -fibrati principali della forma $(F, f, \text{id}_\mathbf{G})$ è che ξ_1 sia equivalente ad $f^*(\xi_2)$. \square

PROPOSIZIONE 6.3.5. Siano M, N due varietà differenziabili, e $\xi = (P, \pi, N, \mathbf{G})$ un fibrato principale su N . Abbiamo:

- (1) Se $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ sono omotope, allora $f_0^*(\xi)$ ed $f_1^*(\xi)$ sono equivalenti.
- (2) Se M è contrattile, ogni \mathbf{G} -fibrato principale di base M è banale.

DIMOSTRAZIONE. (1) Sia $\tilde{f} = \{f_t\} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ un'omotopia tra f_0 ed f_1 e consideriamo il fibrato \mathbf{G} -principale $\tilde{f}^*(\xi)$. L'equivalenza si ottiene utilizzando l'esistenza di una \mathbf{G} -connessione principale sul fibrato $\tilde{f}^*(\xi)$ ed il corrispondente trasporto parallelo¹ lungo le curve $t \rightarrow (p, t)$ in $M \times \mathbb{R}$ (vedi §7.5).

¹Per un argomento topologico, che non faccia uso della struttura differenziabile e dell'esistenza di connessioni principali, si veda il Teorema 2.7.2.

(2) Sia $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale. Supponiamo che M sia contrattile e sia $\tilde{f} = \{f_i\} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, M)$ un'omotopia con $f_1 = \text{id}_M$ ed f_0 costante. Per il punto (1), $\xi = f_1^*(\xi)$ ed $f_0^*(\xi)$, che è un fibrato banale, sono equivalenti. \square

6.4. Classificazione dei fibrati principali

La Proposizione 6.3.5 è fondamentale per la classificazione dei fibrati principali con base M . John Milnor ([54, 55]) ha introdotto la nozione di fibrato universale.

DEFINIZIONE 6.4.1. Un fibrato \mathbf{G} -principale $\zeta = (Q, \varpi, B, \mathbf{G})$ si dice *m-universale* se per ogni fibrato principale $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ con gruppo strutturale \mathbf{G} e base M di dimensione minore o uguale ad m esiste un'applicazione $f \in \mathcal{C}^\infty(M, B)$, unica a meno di omotopia, tale che $f^*(\zeta)$ sia equivalente a ξ .

Utilizzando i risultati di §2.8 e quelli relativi all'approssimazione \mathcal{C}^∞ dell'omotopia, ricaviamo dal Teorema 2.8.6 l'enunciato

TEOREMA 6.4.2. *Ogni fibrato $\zeta = (Q, \varpi, B, \mathbf{G})$ il cui spazio totale Q sia m -connesso² è m -universale.*

6.4.1. Alcuni esempi. Costruiamo in questo paragrafo alcuni fibrati principali m -universali rispetto ad alcuni gruppi classici.

Sottogruppi del gruppo ortogonale. Fissiamo due interi positivi m ed n e consideriamo $\mathbf{SO}(m)$ ed $\mathbf{SO}(n)$ come sottogruppi disgiunti di $\mathbf{SO}(m+n)$, ciascuno contenuto nel centralizzatore³ dell'altro. Il quoziente $Q = \mathbf{SO}(m+n)/\mathbf{SO}(n)$ si può identificare alla varietà di Stiefel $\mathcal{V}_{n+m,m}(\mathbb{R})$ delle m -uple ortonormali di \mathbb{R}^{m+n} . Fissiamo un sottogruppo chiuso \mathbf{G} di $\mathbf{SO}(m)$ e poniamo $N = \mathbf{SO}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SO}(n))$. L'inclusione $\{e\} \times \mathbf{SO}(n) < \mathbf{G} \times \mathbf{SO}(n)$ definisce un'applicazione $\mathbf{SO}(m+n)$ -equivariante $\varpi : Q \rightarrow N$ che definisce un \mathbf{G} -fibrato principale $\zeta = (Q, \varpi, N, \mathbf{G})$. Ricordiamo che la varietà di Stiefel $\mathcal{V}_{m+n,m}(\mathbb{R})$ delle m -uple ortonormali di \mathbb{R}^{m+n} è $(n-1)$ -connessa e che

$$\pi_n(\mathcal{V}_{m+n,m}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

DEFINIZIONE 6.4.3. Il fibrato principale $\zeta = (\mathcal{V}_{m+n,m}(\mathbb{R}), \varpi, N, \mathbf{G})$ con

$$(6.16) \quad \mathcal{V}_{m+n,m}(\mathbb{R}) = \mathbf{SO}(m+n)/\mathbf{SO}(n) \xrightarrow{\varpi} N := \mathbf{SO}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SO}(n))$$

si dice l'*n-fibrato principale ortogonale standard con gruppo strutturale \mathbf{G} contenuto in $\mathbf{SO}(m)$* . È un fibrato \mathbf{G} principale $(n-1)$ -universale.

²Ricordiamo che uno spazio topologico E è m -connesso se è connesso per archi ed i suoi gruppi di omotopia $\pi_i(E)$ sono banali per $1 \leq i \leq m$.

³Ricordiamo che il *centralizzatore* di un sottoinsieme S di un gruppo \mathbf{G} è il sottogruppo formato dagli elementi di \mathbf{G} che commutano con tutti gli elementi di S .

Sottogruppi del gruppo speciale unitario. Siano m, n due interi positivi e consideriamo $\mathbf{SU}(m)$ ed $\mathbf{SU}(n)$ come sottogruppi disgiunti di $\mathbf{SU}(m+n)$ contenuti ciascuno nel centralizzatore dell'altro. Il quoziente $\mathbf{Q} = \mathbf{SU}(m+n)/\mathbf{SU}(n)$ è la varietà di Stiefel $\mathcal{V}_{m+n,n}(\mathbb{C})$, per cui sappiamo che

$$\pi_q(\mathcal{V}_{m+n,n}(\mathbb{C})) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq q < 2n, \\ \mathbb{Z} & \text{se } q = 2n. \end{cases}$$

Se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{SU}(m)$, la proiezione naturale

$$\varpi : \mathbf{Q} \rightarrow N := \mathbf{SU}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SU}(n))$$

definita dall'inclusione $\{e\} \times \mathbf{SU}(n) < \mathbf{G} \times \mathbf{SU}(n)$ definisce un \mathbf{G} -fibrato principale.

DEFINIZIONE 6.4.4. Il fibrato principale $\zeta = (\mathcal{V}_{m+n,m}(\mathbb{C}), \varpi, N, \mathbf{G})$ con

$$(6.17) \quad \mathcal{V}_{m+n,m}(\mathbb{C}) = \mathbf{SU}(m+n)/\mathbf{SU}(n) \xrightarrow{\varpi} N := \mathbf{SU}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SU}(n))$$

si dice l' n -fibrato principale unitario standard con gruppo strutturale \mathbf{G} contenuto in $\mathbf{SU}(m)$. È un fibrato \mathbf{G} -principale $(2n-1)$ -universale.

Sottogruppi del gruppo unitario simplettico. Ricordiamo che il gruppo unitario simplettico $\mathbf{Sp}(n)$ è il sottogruppo delle trasformazioni di $\mathbf{U}(2n)$ che lasciano invariante la forma alternata $\omega = dz^1 \wedge dz^{n+1} + \dots + dz^{2n-1} \wedge dz^{2n}$. Siano m, n interi positivi e consideriamo $\mathbf{Sp}(m)$ ed $\mathbf{Sp}(n)$ come sottogruppi di $\mathbf{Sp}(m+n)$, ciascuno contenuto nel centralizzatore dell'altro. Il quoziente $\mathbf{Q} = \mathbf{Sp}(m+n)/\mathbf{Sp}(n)$ è la varietà di Stiefel quaternionica $\mathcal{V}_{m+n,m}(\mathbb{H})$ delle m -uple ortonormali rispetto al prodotto scalare quaternionico standard di \mathbb{H}^n . Abbiamo

$$\pi_q(\mathcal{V}_{m+n,m}(\mathbb{H})) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq q < 4n, \\ \mathbb{Z} & \text{se } q = 4n. \end{cases}$$

Se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{Sp}(m)$, la proiezione naturale

$$\varpi : \mathbf{Q} \rightarrow N := \mathbf{Sp}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n))$$

definita dall'inclusione $\{e\} \times \mathbf{Sp}(n) < \mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n)$ definisce un \mathbf{G} -fibrato principale.

DEFINIZIONE 6.4.5. Il fibrato principale $\zeta = (\mathcal{V}_{m+n,m}(\mathbb{H}), \varpi, N, \mathbf{G})$ con

$$(6.18) \quad \mathcal{V}_{m+n,m}(\mathbb{H}) = \mathbf{Sp}(m+n)/\mathbf{Sp}(n) \xrightarrow{\varpi} N := \mathbf{Sp}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n))$$

si dice l' n -fibrato principale quaternionico standard con gruppo strutturale \mathbf{G} contenuto in $\mathbf{Sp}(m)$. È un fibrato \mathbf{G} -principale $(4n-1)$ -universale.

Sottogruppi del gruppo lineare. Siano m ed n interi positivi. Consideriamo $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ ed $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ come due sottogruppi disgiunti di $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})$ contenuti ciascuno nel centralizzatore dell'altro. Le loro rappresentazioni in $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})$ sono date rispettivamente da

$$\mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \ni \mathbf{a} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{a} & & \\ & (\det(\mathbf{a}))^{-1} & \\ & & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R}) \quad \text{e}$$

$$\mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \ni \mathbf{b} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ & \mathbf{b} \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R}).$$

Per la decomposizione di Cartan, $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ è omotopicamente equivalente al quoziente $\mathbf{SO}(m+n)/\mathbf{SO}(n)$ ed è quindi $(n-1)$ -connesso. Ne segue che, se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$, allora la proiezione naturale

$$(6.19) \quad \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/(\mathbf{G} \times \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}))$$

definisce un fibrato \mathbf{G} -principale $(n-1)$ -universale.

Costruzioni analoghe ci permettono di ottenere fibrati \mathbf{G} -principali k -universali per sottogruppi chiusi di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{C})$ e $\mathbf{GL}_m(\mathbb{H})$.

6.5. Il fibrato dei sistemi di riferimento

Siano $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ e \mathbf{V} uno spazio vettoriale (a destra) di dimensione finita n su \mathbb{K} . Se $\eta_{\mathbf{V}} = (E_{\mathbf{V}}, \pi_{\mathbf{V}}, M, \mathbf{V})$ è un fibrato vettoriale con fibra tipica \mathbf{V} , le funzioni di transizione di un suo atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{U_i, \sigma_i\}$ sono a valori nel gruppo $\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$ e determinano quindi (Teor.6.1.8), a meno di equivalenza, un unico fibrato principale $\mathbb{L}(\eta_{\mathbf{V}}) = (\mathbb{L}(\eta_{\mathbf{V}}), \pi, M, \mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}))$. Il suo spazio totale si può rappresentare come l'unione disgiunta delle fibre

$$\mathbb{L}_{\rho}(\eta_{\mathbf{V}}) = \{\text{isomorfismi } \mathbb{K}\text{-lineari } \sigma : \mathbf{V} \rightarrow (E_{\mathbf{V}})_{\rho}\}.$$

Il gruppo lineare $\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$ agisce su $\mathbb{L}(\eta_{\mathbf{V}})$ per composizione a destra in modo libero e transitivo.

DEFINIZIONE 6.5.1. Il fibrato principale $\mathbb{L}(\eta_{\mathbf{V}}) = (\mathbb{L}(\eta_{\mathbf{V}}), \pi, M, \mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}))$, con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$, si dice *dei sistemi di riferimento* di $\eta_{\mathbf{V}}$.

Il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}(\eta_{\mathbf{V}}) \times \mathbf{V} & \xrightarrow{(\sigma, v) \rightarrow \sigma \cdot v} & E_{\mathbf{V}} \\ \text{pr}_{\mathbb{L}(\eta_{\mathbf{V}})} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbf{V}} \\ \mathbb{L}(\eta_{\mathbf{V}}) & \xrightarrow{\pi} & M, \end{array}$$

ci mostra che il pullback di $\eta_{\mathbf{V}}$ allo spazio totale $\mathbb{L}(\eta_{\mathbf{V}})$ del fibrato dei suoi sistemi di riferimento è un fibrato vettoriale banale.

Viceversa, vale la

TEOREMA 6.5.2. *Ad ogni fibrato $\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$ -principale $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}))$, possiamo associare un fibrato vettoriale $\eta_{\mathbf{V}} = (E_{\mathbf{V}}, \pi_{\mathbf{V}}, M, \mathbf{V})$ con fibra tipica \mathbf{V} , unico a meno di equivalenza, di cui ξ sia il fibrato dei sistemi di riferimento.*

La $\eta \longleftrightarrow \mathbb{L}(\eta)$ è una corrispondenza biunivoca tra la categoria dei fibrati vettoriali su M , con fibra tipica \mathbf{V} , modulo equivalenza, e quella dei fibrati principali su M con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$, modulo equivalenza. \square

Ricordiamo che il fibrato tangente di una varietà differenziabile M di dimensione m è un fibrato vettoriale con fibra tipica \mathbb{R}^m .

DEFINIZIONE 6.5.3. Chiamiamo *fibrato dei sistemi di riferimento su M* il fibrato $\mathbb{L}(M) = (\mathbb{L}(M), \pi, M, \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}))$ dei sistemi di riferimento del suo fibrato tangente.

OSSERVAZIONE 6.5.4. Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M_1, M_2)$ è un diffeomorfismo di varietà differenziabili, allora la

$$\mathbb{L}(M_1) \ni \sigma \longrightarrow df_{\pi(\sigma)} \circ \sigma \in \mathbb{L}(M_2)$$

definisce un isomorfismo tra i fibrati $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ -principali $\mathbb{L}(M_1)$ ed $\mathbb{L}(M_2)$.

6.6. Fibrati vettoriali associati a rappresentazioni lineari

Possiamo generalizzare la costruzione del Teorema 6.5.2 al caso di una qualsiasi rappresentazione lineare del gruppo strutturale di un fibrato principale.

Siano $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale su M e V una rappresentazione lineare di dimensione finita di \mathbf{G} .

PROPOSIZIONE 6.6.1. *Il quoziente E_V di $P \times V$ rispetto alla relazione d'equivalenza*

$$(*) \quad (\sigma, v) \sim (\sigma \cdot a, a^{-1} \cdot v), \quad \forall \sigma \in P, \forall v \in V, \forall a \in \mathbf{G}$$

è lo spazio totale di un fibrato vettoriale $\xi_V = (E_V, \pi_V, M, V)$. La proiezione nel quoziente $\varpi : P \times V \rightarrow E_V$ definisce un morfismo di fibrati vettoriali con fibra tipica V che rende commutativo il diagramma

$$(6.20) \quad \begin{array}{ccc} P \times V & \xrightarrow{\varpi} & E_V \\ \text{pr}_P \downarrow & & \downarrow \pi_V \\ P & \xrightarrow{\pi} & M. \end{array} \quad \square$$

Nel seguito scriveremo per semplicità $\sigma \cdot v$ per indicare la classe di (σ, v) in E_V . Se $v = \sigma \cdot v$, il vettore v di V è univocamente determinato da v e σ . Lo indicheremo con $v = \sigma^{-1} \cdot v$.

DEFINIZIONE 6.6.2. Chiamiamo $\xi_V = (E_V, \pi_V, M, V)$ il *fibrato vettoriale associato* alla rappresentazione lineare V del gruppo strutturale di ξ .

DEFINIZIONE 6.6.3. Chiamiamo le sezioni differenziabili del fibrato vettoriale ξ_V *quantità di tipo V* .

Indicheremo per semplicità con $\Gamma_\xi(M, E_V)$, invece che $\Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$, lo spazio vettoriale delle sezioni \mathcal{C}^∞ di E_V . Una sezione \mathbf{s} di ξ_V si rialza alla funzione a valori vettoriali $\tilde{\mathbf{s}} \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$, definita da

$$(6.21) \quad \tilde{\mathbf{s}}(\sigma) = \sigma^{-1} \cdot \mathbf{s}(\pi(\sigma)).$$

DEFINIZIONE 6.6.4. Chiamiamo la $\tilde{\mathbf{s}}$ il *sollevamento* su P della sezione \mathbf{s} .

PROPOSIZIONE 6.6.5. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione a valori vettoriali $f \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$ sia il sollevamento di una sezione di ξ_V è che*

$$(6.22) \quad f(\sigma \cdot a) = a^{-1} \cdot f(\sigma), \quad \forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G}. \quad \square$$

NOTAZIONE 6.6.6. Indichiamo con $\mathcal{E}_\rho(P, V)$ lo spazio delle $f \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$ che soddisfano la (6.22).

PROPOSIZIONE 6.6.7. Le (6.21), (6.22) definiscono un isomorfismo lineare $\mathfrak{s} \leftrightarrow \tilde{\mathfrak{s}}$ tra $\Gamma_{\xi}(M, E_V)$ ed $\mathcal{E}_p(P, V)$. \square

ESEMPIO 6.6.8. Siano $\mathbb{L}(M) = (\mathbb{L}(M), \pi, M, \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}))$ il fibrato dei sistemi di riferimento di una varietà differenziabile M di dimensione m .

Il fibrato tangente TM è associato alla rappresentazione canonica di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$; il fibrato cotangente T^*M alla sua rappresentazione duale

$$\rho : \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \ni \mathbf{a} \rightarrow [\mathbf{a}^\top]^{-1} \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}).$$

In generale, i fibrati tensoriali $T^{p,q}M$ sono associati alle rappresentazioni tensoriali, descritte sui tensori di rango uno da

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \zeta^1 \otimes \cdots \otimes \zeta^q) \\ = \mathbf{a}(v_1) \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}(v_p) \otimes [\mathbf{a}^\top]^{-1}(\zeta^1) \otimes \cdots \otimes [\mathbf{a}^\top]^{-1}(\zeta^q). \end{aligned}$$

6.6.1. Jacobiano di un'applicazione differenziabile. Siano M, N due varietà differenziabili, di dimensioni m, n , rispettivamente ed

$$\mathbb{L}(M) = \{\mathbb{L}(M), \pi_M, M, \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})\}, \mathbb{L}(N) = \{\mathbb{L}(N), \pi_N, N, \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})\},$$

i fibrati dei loro sistemi di riferimento.

Ad una $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ è associato il fibrato principale (jacobiano)

$$\mathbb{L}(\mathbb{L}_f(M), \pi_f, M, \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})) \quad \text{con}$$

$$\mathbb{L}_f(M) = \{(\sigma, \tau) \in \mathbb{L}(M) \times \mathbb{L}(N) \mid f(\pi_M(\sigma)) = \pi_N(\tau)\},$$

$$\pi_f(\sigma, \tau) = \pi_M(\sigma), \quad \forall (\sigma, \tau) \in \mathbb{L}_f(M),$$

$$(\sigma, \tau) \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\sigma \cdot \mathbf{a}, \tau \cdot \mathbf{b}), \quad \forall (\sigma, \tau) \in \mathbb{L}_f(M), \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}), \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{n \times m} \simeq \mathcal{H}om_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ è una rappresentazione lineare di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. La sezione globale

$$\mathbb{J}(f)(\sigma, \tau) = \tau^{-1} \circ df \circ \sigma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

di $\mathbb{L}_{\mathbb{R}^{n \times m}}(M)$ si dice lo *jacobiano di f nei sistemi di riferimento σ, τ* .

6.7. Riduzione del gruppo strutturale e G-strutture

Siano M una varietà differenziabile di dimensione m , V uno spazio vettoriale (a destra) di dimensione finita n su \mathbb{K} (con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$), $\xi_V = (E_V, \pi_V, M, V)$ un fibrato vettoriale con fibra tipica V e \mathbf{G} un sottogruppo di Lie di $\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V)$.

DEFINIZIONE 6.7.1. Diciamo che $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i)\}_{i \in I}$ è un **G-atlante di trivializzazione** di ξ_V se le funzioni di transizione $\psi_{i,j} = \sigma_i^{-1} \sigma_j$ sono a valori in \mathbf{G} .

Due **G-atlanti di trivializzazione** \mathcal{A} ed \mathcal{A}' , si considerano *equivalenti* se la loro unione $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ è ancora un **G-atlante di trivializzazione**.

L'unione di tutti i **G-atlanti di trivializzazione equivalenti** ad un **G-atlante di trivializzazione assegnato** è un **G-atlante di trivializzazione massimale**.

Diciamo *compatibile con la G-struttura* una carta di trivializzazione locale (U, σ_U) di ξ_V che appartenga al suo **G-atlante di trivializzazione massimale**.

Una **G-struttura** su ξ_V è il dato di una classe di equivalenza di **G-atlanti di trivializzazione** di ξ_V , ovvero di un **G-atlante di trivializzazione massimale**.

Per il Teor.6.1.8, una \mathbf{G} -struttura su ξ_V definisce un fibrato principale

$$\mathbb{L}_{\mathbf{G}}(\xi_V) = (\mathbb{L}_{\mathbf{G}}(\xi_V), \pi_{\mathbf{G}}, M, \mathbf{G})$$

il cui spazio totale consiste dei σ in $L(\eta_V)$ che sono dei $\tau(p)$ per carte di trivializzazione (U, τ) di ξ_V compatibili con la \mathbf{G} -struttura e $p \in U$. Il fibrato $\mathbb{L}_{\mathbf{G}}(\xi_V)$ è ottenuto da $\mathbb{L}(\xi_V)$ per riduzione del gruppo strutturale. Possiamo riassumere questa discussione nel seguente enunciato.

TEOREMA 6.7.2. *Sia $\xi_V = (E_V, \pi_V, M, V)$ un fibrato vettoriale. Modulo equivalenza, le \mathbf{G} -strutture su ξ_V sono in corrispondenza biunivoca con le \mathbf{G} -riduzioni del fibrato $\mathbb{L}(\xi_V)$ dei suoi sistemi di riferimento.*

ESEMPIO 6.7.3. Ogni fibrato vettoriale reale (risp. complesso, quaternionico) di rango n ammette una $\mathbf{O}(n)$ -struttura (risp. $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$ -struttura). Sia infatti $\xi_V = (E_V, \pi_V, M, V)$ un fibrato vettoriale di rango n su $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Fissiamo un suo atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i) \mid i \in I\}$, con $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ricoprimento aperto localmente finito di M ed un prodotto scalare $(\cdot | \cdot)_V$ reale (risp. unitario, iperunitario) su V . Sia $\{\chi_i\}$ una partizione differenziabile dell'unità subordinata ad \mathcal{U} . Possiamo allora definire un prodotto scalare sulle fibre di E_V ponendo

$$g(v_1, v_2) = \sum_{U_i \ni p} \chi_i(p) \cdot (\sigma_i^{-1}(v_1) | \sigma_i^{-1}(v_2))_V, \quad \forall p \in M, \quad \forall v_1, v_2 \in E_{Vp}.$$

La $\mathbf{O}(n)$ -struttura (risp. $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$ -struttura) su ξ_V associata alla metrica g si può ottenere dall'atlante \mathcal{A} applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alle basi $\sigma_i(p)(e_1), \dots, \sigma_i(p)(e_n)$ di E_p rispetto al prodotto scalare $g_p = g|_{E_{Vp}}$.

6.8. \mathbf{G} -strutture su una varietà differenziabile

Il concetto di \mathbf{G} -struttura fu introdotto da Chern nel 1953 (vedi [18, 45]).

Siano M una varietà differenziabile di dimensione m e \mathbf{G} è un sottogruppo di Lie del gruppo lineare $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$.

DEFINIZIONE 6.8.1. Una \mathbf{G} -struttura su M è una \mathbf{G} -struttura sul suo fibrato tangente.

OSSERVAZIONE 6.8.2. Il concetto di \mathbf{G} -struttura ci permette di considerare in modo concettualmente unitario diverse geometrie su M . Ad esempio:

<i>orientazione</i>	\longleftrightarrow	$\mathbf{GL}_m^+(\mathbb{R})$ -struttura;
<i>misura di Radon di classe \mathcal{C}^∞</i>	\longleftrightarrow	$\mathbf{SL}_m(\mathbb{R})$ -struttura;
<i>metrica Riemanniana</i>	\longleftrightarrow	$\mathbf{O}(m)$ -struttura;
<i>struttura quasi-complessa</i>	\longleftrightarrow	$\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ -struttura $(m = 2n \text{ pari})$;
<i>struttura quasi-hermitiana</i>	\longleftrightarrow	$\mathbf{U}(n)$ -struttura $(m = 2n \text{ pari})$;
<i>struttura quasi-simplettrica</i>	\longleftrightarrow	$\mathbf{Sp}_n(\mathbb{R})$ -struttura $(m = 2n \text{ pari})$;
<i>struttura iperunitaria</i>	\longleftrightarrow	$\mathbf{Sp}(n)$ -struttura, $(m = 4n)$;
<i>parallelismo completo</i>	\longleftrightarrow	$\{\mathbf{I}_m\}$ -struttura .

Il prefisso “quasi” si riferisce al fatto che la definizione di strutture complesse e simplettiche richiede che siano soddisfatte addizionali condizioni di integrabilità e che, nel caso di una struttura hermitiana, sia definita a priori una struttura complessa sulle fibre.

ESEMPIO 6.8.3. La fibrazione canonica $\mathbf{SO}(n+1) \rightarrow S^n$ è una $\mathbf{SO}(n)$ -riduzione del fibrato dei sistemi di riferimento di S^n e quindi una $\mathbf{SO}(n)$ -struttura su S^n .

La fibrazione canonica $\mathbf{SO}(n+1) \rightarrow \mathbb{R}P^n$ è una $\mathbf{O}(n)$ -riduzione del fibrato dei sistemi di riferimento di $\mathbb{R}P^n$ e quindi una struttura Riemanniana su $\mathbb{R}P^n$.

La fibrazione canonica $\mathbf{SU}(n+1) \rightarrow \mathbb{C}P^n$ è una $\mathbf{U}(n)$ -riduzione del fibrato dei sistemi di riferimento su $\mathbb{C}P^n$ e quindi una struttura quasi-Hermitiana su $\mathbb{C}P^n$.

ESEMPIO 6.8.4. Possiamo descrivere esplicitamente il fibrato $L(S^m)$ dei sistemi di riferimento sulla sfera S^m ponendo

$$\begin{aligned} L(S^m) &= \left\{ (v, \mathbf{b}) \in \mathbf{GL}_{m+1}(\mathbb{R}) \mid v \in S^m, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times m}, v^\top \cdot \mathbf{b} = 0 \right\} \\ \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) &\simeq \mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{a} \end{pmatrix} \mid \mathbf{a} \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \right\} \\ \pi(v, \mathbf{b}) &= v, \quad \forall (v, \mathbf{b}) \in L(S^m) \end{aligned}$$

ed osservando che $\sigma_1^{-1} \cdot \sigma_2 \in \mathbf{G}$ se σ_1, σ_2 appartengono a $L(S^m)$ e $\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2)$.

6.9. Forme tensoriali e pseudotensoriali

Sia $\xi_V = (E_V, \pi_E, M, V)$ un fibrato vettoriale con fibra tipica V .

DEFINIZIONE 6.9.1. Per ogni intero non negativo q , lo spazio $\Omega_{\xi}^q(M, E_V)$ delle q -forme differenziali a valori in E_V consiste delle applicazioni $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineari alternate

$$\phi : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{q \text{ volte}} \longrightarrow \Gamma_{\xi}(M, E_V).$$

In particolare, $\Omega_{\xi}^0(M, E_V) = \Gamma_{\xi}(M, E_V)$.

Se $\xi_V = (M \times V, \text{pr}_M, M)$ è il fibrato banale, allora $\Omega_{\xi}^q(M, M \times V)$ coincide con lo spazio $\Omega^q(M, V)$ delle q -forme differenziali su M a valori in V .

Se $f : N \rightarrow M$ è un'applicazione differenziabile, allora il pullback $f^*\phi$ di una forma $\phi \in \Omega_{\xi}^q(M, E_V)$, è una q -forma a valori in f^*E_V .

Siano ora $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale, V una rappresentazione lineare di dimensione finita del suo gruppo strutturale \mathbf{G} e ξ_V il fibrato vettoriale associato.

Lo spazio totale del pullback $\pi^*(\xi_V)$ di ξ_V su P è

$$E_{\pi^*(\xi_V)} = \{(\sigma, v) \in P \times E_V \mid \pi(\sigma) = \pi_V(v)\}$$

e l'equivalenza

$$[\sigma \cdot] : P \times E_V \ni (\sigma, v) \longrightarrow (\sigma, \sigma \cdot v) \in E_{\pi^*(\xi_V)}$$

ci permette di identificarlo con il fibrato vettoriale banale $(P \times V, \text{pr}_P, P, V)$.

PROPOSIZIONE 6.9.2. *Il pullback definisce un'applicazione iniettiva*

$$(6.23) \quad \sigma^{-1} \cdot \pi^* : \Omega_{\xi}^q(M, E_V) \longrightarrow \Omega^q(P, V).$$

Una forma $\psi \in \Omega^q(P, V)$ è nell'immagine di π^* se e soltanto se gode delle due proprietà

$$(6.24) \quad \mathbf{R}_a^*(\psi) = \rho_V(a^{-1}) \cdot \psi, \quad \forall a \in \mathbf{G},$$

$$(6.25) \quad X \lrcorner \psi = 0, \quad \forall X \in \mathcal{V}(P).$$

DIMOSTRAZIONE. Si verifica che $\psi \in \Omega^q(P, V)$ verifica (6.24), (6.24) se e soltanto se vi è una $\phi \in \Omega_{\xi}^q(M, E_V)$ tale che

$$\sigma \cdot \psi(X_1, \dots, X_q) = \phi(\pi_*(X_1), \dots, \pi_*(X_q)), \quad \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(P). \quad \square$$

DEFINIZIONE 6.9.3. Una q -forma alternata $\psi \in \Omega^q(P, V)$ si dice *pseudotensoriale di tipo V* se soddisfa

$$(6.26) \quad \mathbf{R}_a^* \psi = \rho_V(a^{-1}) \cdot \psi, \quad \forall a \in \mathbf{G}$$

e *tensoriale* se è anche *orizzontale*, cioè se, oltre alla (6.26), verifica la

$$(6.27) \quad \psi(X_1, \dots, X_q) = 0 \quad \text{quando almeno uno degli } X_i \text{ sia verticale.}$$

Indichiamo con $\Omega_{\rho}^q(P, V)$ lo spazio delle q -forme pseudotensoriali di tipo V e con $\Omega_{\rho,0}^q(P, V)$ il sottospazio di quelle che sono anche orizzontali.

Per la Prop.6.9.2 abbiamo

PROPOSIZIONE 6.9.4. *Il pullback definisce un isomorfismo*

$$(6.28) \quad \Lambda := \sigma^{-1} \cdot \pi^* : \Omega_{\xi}^q(M, E_V) \rightarrow \Omega_{\rho,0}^q(P, V). \quad \square$$

ESEMPIO 6.9.5. Consideriamo il fibrato $\mathbb{L}(M) = (\mathbb{L}(M), \pi, M, \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}))$ dei sistemi di riferimento su M . La *forma canonica*⁴

$$(6.29) \quad \theta = \sigma^{-1} d\pi \in \Omega_{\rho,0}^1(\mathbb{L}(M), \mathbb{R}^m).$$

è un esempio di 1-forma tensoriale.

Se ξ è un sottofibrato di $\mathbb{L}(M)$, con gruppo strutturale $\mathbf{G} < \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$, la restrizione di θ a P è ancora tensoriale per la rappresentazione di \mathbf{G} su \mathbb{R}^m .

DEFINIZIONE 6.9.6. Data una forma ϕ in $\Omega_{\xi}^q(M, E_V)$, chiamiamo la $\sigma^{-1} \cdot \pi^*(\phi)$ in $\Omega_{\rho,0}^q(P, V)$, che indicheremo con $\tilde{\phi}$, il suo *sollevamento* su P .

Se σ_U è una sezione di ξ su un aperto U di M , la forma

$$\phi_U = \sigma_U^* \tilde{\phi} = \sigma_U^{-1} \cdot \phi|_U \in \Omega^q(U, V)$$

si dice l'*espressione* di ϕ nella carta di trivializzazione (U, σ_U) .

Se $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i)\}$ è un atlante di trivializzazione di ξ , la famiglia

$$\{\phi_i = \sigma_i^{-1} \phi|_{U_i} \in \Omega^q(U_i, V)\}.$$

si dice *delle espressioni locali* di ϕ nell'atlante \mathcal{A} .

⁴La θ si dice anche forma *tautologica* o di *saldatura* (in inglese: solder form).

PROPOSIZIONE 6.9.7. Sia $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i)\}$ un atlante di trivializzazione di ξ , con funzioni di transizione $\{a_{i,j} = \sigma_i \circ \sigma_j^{-1} \in \mathcal{C}(U_i \cap U_j, \mathbf{G})\}$ e $\{\phi_i \in \Omega^q(U_i, V)\}$ una famiglia di forme differenziali a coefficienti in V . Condizione necessaria e sufficiente affinché le ϕ_i siano le espressioni locali in \mathcal{A} di una forma ϕ in $\Omega_\xi^q(M, V)$ è che

$$\phi_i = \rho_V(a_{i,j}) \cdot \phi_j \text{ su } U_i \cap U_j, \forall i, j. \quad \square$$

Una rappresentazione lineare V di \mathbf{G} induce una rappresentazione lineare della sua algebra di Lie \mathfrak{g} , che possiamo utilizzare per definire il prodotto esterno di forme pseudotensoriali, la prima di tipo \mathfrak{g} , la seconda di tipo V . Se $\phi \in \Omega_\rho^p(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$, $\psi \in \Omega_\rho^q(\mathbf{P}, V)$, allora la $\phi \wedge_\rho \psi \in \Omega^{p+q}(\mathbf{P}, V)$ è caratterizzata da

$$\begin{aligned} \phi \wedge_\rho \psi(X_1, \dots, X_{p+q}) &= \sum' \varepsilon(k) [\rho_V]_* (\phi(X_{k_1}, \dots, X_{k_p})) (\psi(X_{p+1}, \dots, X_{p+q})), \\ &\quad \forall X_1, \dots, X_{p+q} \in \mathfrak{X}(\mathbf{P}). \end{aligned}$$

L'accento sul simbolo di sommatoria indica che la somma va estesa a tutte le permutazioni k in \mathbf{S}_{p+q} con $1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq p+q$ ed $1 \leq k_{p+1} < \dots < k_{p+q} \leq p+q$.

NOTAZIONE 6.9.8. Se ϕ, ψ appartengono entrambi a $\Omega_\rho^*(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$, scriviamo $[\phi \wedge \psi]$ invece di $\phi \wedge_\rho \psi$.

Se $\mathbf{G} < \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ e $\phi \in \Omega_\rho^p(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$, $\psi \in \Omega_\rho^q(\mathbf{P}, \mathbb{R}^m)$, scriviamo $\phi \wedge \psi$ invece di $\phi \wedge_\rho \psi$.

PROPOSIZIONE 6.9.9. Se $\phi \in \Omega_{\rho,0}^p(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$, $\psi \in \Omega_{\rho,0}^q(\mathbf{P}, V)$, allora $\phi \wedge_\rho \psi \in \Omega_{\rho,0}^{p+q}(\mathbf{P}, V)$. \square

Connessioni principali

7.1. Il concetto di connessione principale

Sia $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} . Per la distribuzione verticale utilizziamo le nozioni e notazioni introdotte in §6.2.

DEFINIZIONE 7.1.1. Una *connessione principale* su ξ è il dato di una forma differenziale $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ (la sua *forma di Cartan*) che soddisfi le:

- (1) $\omega(X^*) = X$, per ogni $X \in \mathfrak{g}$,
- (2) $R_a^* \omega = \text{Ad}_{a^{-1}} \circ \omega$, $\forall a \in \mathbf{G}$, cioè
- (2') $(R_a^* \omega)(w) = \omega(w \cdot a) = \text{Ad}_{a^{-1}}(\omega(w))$, $\forall w \in TP$.

Indicheremo spesso una connessione principale, che è la coppia (ξ, ω) di un fibrato principale e di una *forma di Cartan* sul suo spazio totale, con l'unico simbolo Γ .

La condizione (2) ci dice che ω è una *forma pseudotensoriale*. Non è tensoriale se \mathfrak{g} ha dimensione positiva.

DEFINIZIONE 7.1.2. Chiamiamo

$$(7.1) \quad \text{HP} := \ker(\omega) = \{w \in TP \mid \omega(w) = 0\}$$

la *distribuzione orizzontale* di Γ ed indichiamo con

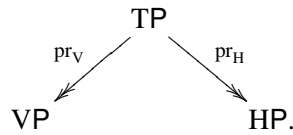
$$(7.2) \quad \mathcal{H}(P) := \ker(\omega) = \{w \in \mathfrak{X}(P) \mid X_\sigma \in \text{HP}, \forall \sigma \in P\}$$

lo spazio dei *campi orizzontali*, cioè delle sezioni \mathcal{C}^∞ di HP.

La distribuzione orizzontale è caratterizzata dalle proprietà:

- (1') $T_\sigma P = V_\sigma P \oplus H_\sigma P$, $\forall \sigma \in P$
- (2') $(R_a)_*(H_\sigma P) = H_{\sigma \cdot a} P$, $\forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G}$.

Sia HP un sottofibrato vettoriale differenziabile di TP che verifichi le (1'), (2'), e pr_H e pr_V le proiezioni *orizzontale* e *verticale* corrispondenti alla decomposizione (1'):



Si verifica immediatamente che la forma $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, definita da

$$(7.3) \quad \omega(w) = \omega_V(\text{pr}_V(w)), \quad \forall w \in TP$$

è la forma di Cartan di una connessione principale Γ su ξ ed abbiamo quindi la¹:

PROPOSIZIONE 7.1.3. *La $\omega \longleftarrow \text{HP} = \ker(\omega)$ definisce una corrispondenza biunivoca tra le connessioni principali Γ su ξ ed i sottofibrati HP di TP che soddisfano le condizioni (1') e (2').* \square

La caratterizzazione di una connessione principale mediante la sua distribuzione orizzontale ci dà facilmente:

TEOREMA 7.1.4 (di estensione). *Sia $\xi' = (P', \pi', M, \mathbf{G}')$ un sottofibrato principale differenziabile di $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$, con la stessa base M e gruppo strutturale $\mathbf{G}' < \mathbf{G}$. Indichiamo con $\iota : P' \hookrightarrow P$ l'inclusione. Per ogni connessione principale Γ' su ξ' , con forma di Cartan ω' , vi è un'unica connessione principale Γ su ξ , la cui forma di Cartan ω soddisfi*

$$(7.4) \quad \omega' = \iota^* \omega.$$

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $H'P'$ il fibrato orizzontale della connessione Γ' . Poiché $H'P'$ è invariante per le traslazioni a destra mediante elementi di \mathbf{G}' , abbiamo $R_{a_1} H'_{\sigma_1} P' = R_{a_2} H'_{\sigma_2} P'$ se $\sigma_1, \sigma_2 \in P'$, $a_1, a_2 \in \mathbf{G}$ e $\sigma_1 \cdot a_1 = \sigma_2 \cdot a_2$. L'applicazione

$$P' \times \mathbf{G} \ni (\sigma, a) \rightarrow \sigma \cdot a \in P$$

è surgettiva. Per l'osservazione precedente, possiamo allora definire il fibrato orizzontale HP della connessione Γ ponendo

$$H_{\sigma \cdot a} P = (R_a)_*(H'_\sigma P'), \quad \forall \sigma \in P', \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

Chiaramente HP è univocamente determinato da $H'P'$, verifica le condizioni (1') e (2'), e definisce quindi un'unica connessione principale Γ su ξ , la cui forma di Cartan ω estende quella di Γ' . \square

OSSERVAZIONE 7.1.5. Viceversa, è possibile restringere la connessione principale Γ su ξ ad una connessione principale Γ' sul sottofibrato ξ' se, e soltanto se, la restrizione a TP' della sua forma di Cartan ω è a valori nell'algebra di Lie \mathfrak{g}' di \mathbf{G}' .

ESEMPIO 7.1.6. Sul fibrato banale $(M \times \mathbf{G}, \text{pr}_M, M, \mathbf{G})$ possiamo definire la *connessione piatta* canonica: è quella che ha come forma di Cartan il pullback $\text{pr}_\mathbf{G}^* \omega_\mathbf{G}$ della forma di Maurer-Cartan di \mathbf{G} .

La distribuzione orizzontale è in questo caso completamente integrabile ed ha come varietà integrali le $M \times \{a\}$, al variare di a in \mathbf{G} .

TEOREMA 7.1.7 (esistenza). *Ogni fibrato principale differenziabile ammette una connessione principale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale differenziabile e sia $\omega_\mathbf{G} \in \mathcal{Q}^1(\mathbf{G}, \mathfrak{g})$ la forma di Maurer-Cartan del suo gruppo strutturale \mathbf{G} . Fissiamo un atlante di trivializzazione $\{(U_i, \sigma_i)\}$ di ξ . Per ogni i , la \mathbf{G} -equivalenza tra $P|_{U_i}$ ed il fibrato banale $U_i \times \mathbf{G} \rightarrow U_i$ ci permette di definire una forma di Cartan

¹Vedi [24]. La definizione della connessione a partire dalla distribuzione orizzontale è dovuta a CHARLES EHRESMANN: *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie, Bruxelles, (1950), pp. 29-55.

$\omega'_i \in \Omega^1(\mathbb{P}|_{U_i}, \mathfrak{g})$ su $\mathbb{P}|_{U_i}$. Fissata una partizione \mathcal{C}^∞ dell'unità $\{\kappa_i\}$, subordinata ad $\{U_i\}$, la $\omega = \sum_i \kappa_i \omega'_i \in \Omega^1(\mathbb{P}, \mathfrak{g})$ è la forma di Cartan di una connessione principale su ξ . \square

7.2. Pullback di una connessione principale

Siano $\xi_i = (\mathbb{P}_i, \pi_i, M_i, \mathbf{G})$, $i=1, 2$, due fibrati principali differenziabili con lo stesso gruppo strutturale \mathbf{G} ed (F, f) un morfismo \mathbf{G} -equivariante di ξ_1 in ξ_2 (vedi §6.3). Si verifica facilmente la

PROPOSIZIONE 7.2.1. *Il pullback $F^*(\omega)$ della forma di Cartan di una connessione principale su ξ_2 è la forma di Cartan di una connessione principale su ξ_1 .* \square

DEFINIZIONE 7.2.2. La Γ_1 si dice il *pullback* su ξ_1 della connessione Γ_2 su ξ_2 .

Dati un fibrato principale $\xi = (\mathbb{P}, \pi_M, M, \mathbf{G})$, una varietà differenziabile N ed una $f \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$, abbiamo indicato con $f^*\xi$ il fibrato principale $(\mathbb{P}_f, \pi_N, N, \mathbf{G})$ con spazio totale

$$\mathbb{P}_f = \{(q, \sigma) \in N \times \mathbb{P} \mid f(q) = \pi_M(\sigma)\}$$

e π_N uguale alla restrizione a \mathbb{P}_f della proiezione pr_N di $N \times \mathbb{P}$ sul primo fattore. La proiezione $\text{pr}_\mathbb{P}$ sul secondo fattore definisce un rialzamento \tilde{f} di f ad un morfismo di fibrati principali

$$\tilde{f} : \mathbb{P}_f \ni (q, \sigma) \longrightarrow \tilde{f}(q, \sigma) = \sigma \in \mathbb{P}.$$

PROPOSIZIONE 7.2.3. *Se ω è la forma di Cartan di una connessione principale Γ su ξ , allora la $\tilde{f}^*\omega \in \Omega^1(\mathbb{P}_f, \mathfrak{g})$ è la forma di Cartan di una connessione principale $f^*\Gamma$ su $f^*\xi$.* \square

7.2.1. Automorfismi di una connessione principale. Sia $\xi = (\mathbb{P}, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale differenziabile, su cui sia assegnata una connessione principale Γ , con forma di Cartan ω .

DEFINIZIONE 7.2.4. Un *automorfismo* di Γ è un automorfismo $(F, f, \text{id}_\mathbf{G})$ di ξ che preservi la connessione, tale cioè che $F^*(\omega) = \omega$.

Gli automorfismi di Γ formano un gruppo, che denotiamo con $\mathcal{A}ut(\Gamma)$.

7.3. Forme di Christoffel ed equazioni di gauge

Sia $\xi = (\mathbb{P}, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale differenziabile, su cui sia assegnata una connessione principale Γ , con forma di Cartan ω .

DEFINIZIONE 7.3.1. Data una trivializzazione locale (U, σ_U) di ξ , chiamiamo² *forma di Christoffel di Γ* nel riferimento (U, σ) il pullback

$$(7.5) \quad \omega_U = \sigma_U^*(\omega) \in \mathcal{Q}^1(U, \mathfrak{g})$$

della forma di Cartan di Γ mediante la sezione di trivializzazione σ_U .

LEMMA 7.3.2. Sia $\Psi_U : U \times \mathbf{G} \ni (\mathbf{p}, \mathbf{a}) \rightarrow \sigma_U(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{a} \in \pi^{-1}(U)$ la trivializzazione locale definita dalla sezione σ_U . Allora

$$(7.6) \quad \Psi_U^*(\omega) = \text{Ad}_{\mathbf{a}^{-1}} \circ \omega_U + \mathbf{a}^{-1} d\mathbf{a}.$$

DIMOSTRAZIONE. Notiamo che $T(U \times \mathbf{G}) = TU \oplus T\mathbf{G}$ e che gli addendi a secondo membro della (7.6) sono due forme differenziali, la prima delle quali opera sui vettori di TU , la seconda su quelli di $T\mathbf{G}$; dobbiamo cioè verificare che

$$(\Psi_U^*(\omega))(v, X_{\mathbf{a}}^*) = \text{Ad}_{\mathbf{a}^{-1}} \circ \omega_U(v) + X, \quad \forall v \in TU, \forall X \in \mathfrak{g}, \forall \mathbf{a} \in \mathbf{G}.$$

La $\Psi_U^*(\omega)$ è la forma di Cartan di una connessione \mathbf{G} -principale sul fibrato banale $(U \times \mathbf{G}, \text{pr}_U, U, \mathbf{G})$ e quindi si restringe alla forma di Maurer-Cartan $\omega_{\mathbf{G}} = \mathbf{a}^{-1} d\mathbf{a}$ sui vettori verticali. Basta quindi verificare la (7.6) sui vettori di TU . Con le notazioni di §6.2, abbiamo, per $\mathbf{p} \in U$, $v \in T_{\mathbf{p}}M$, $\mathbf{a} \in \mathbf{G}$,

$$\begin{aligned} (\Psi_U^*(\omega))(v) &= \omega([\mathbf{d}\Psi_U]_{(\mathbf{p}, \mathbf{a})}(v)) = \omega([\mathbf{d}\sigma_U(v)] \cdot \mathbf{a}) \\ &= \text{Ad}_{\mathbf{a}^{-1}} \circ \omega(\mathbf{d}\sigma_U(v)) = \text{Ad}_{\mathbf{a}^{-1}} \circ \omega_U(v). \quad \square \end{aligned}$$

Le forme di Christoffel ci permettono di definire una connessione principale mediante una famiglia di forme differenziali a valori vettoriali sugli aperti di un atlante di trivializzazione di ξ .

TEOREMA 7.3.3. Siano $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i)\}_{i \in I}$ un atlante di trivializzazione di ξ , con funzioni di transizione $\{\psi_{i,j} = \sigma_i^{-1} \sigma_j \in \mathcal{C}^\infty(U_{i,j}, \mathbf{G})\}$, e $\{\omega_i \in \mathcal{Q}^1(U_i, \mathfrak{g})\}_{i \in I}$ una famiglia di forme differenziali, definite sugli aperti U_i dell'atlante \mathcal{A} , ed a valori in \mathfrak{g} . Allora:

- (1) Vi è al più una connessione \mathbf{G} -principale su ξ di cui le $\{\omega_i\}$ siano le forme di Christoffel rispetto alle trivializzazioni locali dell'atlante \mathcal{A} .
- (2) Condizione necessaria e sufficiente affinché le $\{\omega_i\}$ siano le forme di Christoffel di una connessione \mathbf{G} -principale su ξ è che verifichino le

$$(7.7) \quad \omega_j = \text{Ad}(\psi_{i,j}^{-1}) \circ \omega_i + \psi_{i,j}^{-1} d\psi_{i,j} \text{ su } U_{i,j}, \quad (\text{EQUAZIONI DI GAUGE}).$$

DIMOSTRAZIONE. L'unicità è conseguenza della (7.6).

Abbiamo $\sigma_j = \sigma_i \cdot \psi_{i,j}$ su $U_{i,j} = U_i \cap U_j$. Differenziando, otteniamo

$$d\sigma_j = (d\sigma_i) \cdot \psi_{i,j} + \sigma_i \cdot d\psi_{i,j}.$$

²Elwin Bruno Christoffel (10/11/1829, Montjoie, ora Monschau (villaggio tedesco vicino ad Aquisgrana e alla frontiera belga) - 15/3/1900 Strasburgo) matematico e fisico tedesco. Ha lavorato su applicazioni conformi, teoria del potenziale, teoria degli invarianti, analisi tensoriale, fisica matematica, geodesia e onde d'urto. Oltre ai simboli di Christoffel, sono note le applicazioni di Schwarz-Christoffel, mappe conformi dei poligoni semplici sul semipiano superiore. I suoi contributi alla geometria differenziale furono fondamentali per lo sviluppo della relatività generale.

Poiché³ $\omega_i = \sigma_i^{-1} \text{pr}_V d\sigma_i$, da questa ricaviamo l'equazione di gauge (7.7):

$$\begin{aligned}\omega_j &= \sigma_j^{-1} \text{pr}_V d\sigma_j = (\sigma_i \cdot \psi_{i,j})^{-1} \text{pr}_V \{ (d\sigma_i) \cdot \psi_{i,j} + \sigma_i \cdot d\psi_{i,j} \} \\ &= \psi_{i,j}^{-1} \sigma_i^{-1} \text{pr}_V d\sigma_i \cdot \psi_{i,j} + \psi_{i,j}^{-1} d\psi_{i,j}.\end{aligned}$$

Per verificare che se valgono le (7.7) allora le ω_i sono le forme di Christoffel di una connessione principale, consideriamo le mappe di trivializzazione

$$\Psi_i : U_i \times \mathbf{G} \ni (\mathbf{p}, \mathbf{a}) \rightarrow \sigma_i(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{a} \in \pi^{-1}(U_i).$$

Per le (7.6)

$$(*) \quad \tilde{\omega}_i = \Psi_i^*(\omega) = \text{Ad}_{\mathbf{a}^{-1}} \circ \omega_i + \mathbf{a}^{-1} d\mathbf{a}.$$

Basta verificare che le equazioni di gauge esprimono una condizione necessaria e sufficiente affinché, per le forme $\tilde{\omega}_i$ definite dall'ultimo membro di (*), risulti

$$(**) \quad [\Psi_i^{-1}]^*(\tilde{\omega}_i) = [\Psi_j^{-1}]^*(\tilde{\omega}_j) \quad \text{su } \pi^{-1}(U_{i,j}),$$

dimodochè le $\{[\Psi_i^{-1}]^*(\tilde{\omega}_i)\}$ si rincollino e definiscano una forma di connessione ω su \mathbf{P} . Su $U_{i,j} \times \mathbf{G}$ è $\Psi_j(\mathbf{p}, \mathbf{a}) = \Psi_i(\mathbf{p}, \psi_{i,j}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{a})$ e quindi $\Psi_i^{-1} \circ \Psi_j(\mathbf{p}, \mathbf{a}) = (\mathbf{p}, \psi_{i,j}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{a})$ e

$$\begin{aligned}[\Psi_i^{-1} \circ \Psi_j]^*(\tilde{\omega}_i) &= \text{Ad}_{[\psi_{i,j} \cdot \mathbf{a}]^{-1}} \circ \omega_i + (\psi_{i,j} \cdot \mathbf{a})^{-1} d(\psi_{i,j} \cdot \mathbf{a}) \\ &= \text{Ad}_{\mathbf{a}^{-1}} \circ (\text{Ad}_{\psi_{i,j}^{-1}} \circ \omega_i + \psi_{i,j}^{-1} (d\psi_{i,j})) + \mathbf{a}^{-1} d\mathbf{a} \\ &= \text{Ad}_{\mathbf{a}^{-1}} \circ \omega_j + \mathbf{a}^{-1} d\mathbf{a} = \tilde{\omega}_j.\end{aligned}$$

Ciò mostra che le (7.7) equivalgono alle (**), e completa la dimostrazione. \square

OSSERVAZIONE 7.3.4. Identifichiamo $T(U_i \times \mathbf{G})$ al prodotto cartesiano $TU_i \times T\mathbf{G}$. Il pullback su $U_i \times \mathbf{G}$ della distribuzione orizzontale su \mathbf{P} è allora

$$(7.8) \quad \Psi_i^*(H_{\sigma_i(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{a}} \mathbf{P}) = \{v - [\omega_\alpha(v)]_\alpha^* \mid v \in T_{\mathbf{p}} M\}, \quad \forall \mathbf{p} \in U_i, \forall \mathbf{a} \in \mathbf{G}.$$

La forma di Christoffel misura quindi di quanto la distribuzione orizzontale definita dalla connessione differisca da quella banale della trivializzazione locale.

Il termine inglese *gauge* significa *strumento di misura, calibro* e difatti le forme di Christoffel ω_i misurano lo spostamento dalla connessione banale.

7.4. Sollevamento orizzontale di campi di vettori

Fissiamo su $\xi = (\mathbf{P}, \pi, M, \mathbf{G})$ una connessione principale Γ , con forma di Cartan ω . Il differenziale della proiezione π definisce, per ogni $\sigma \in \mathbf{P}$, un isomorfismo lineare

$$(7.9) \quad H_\sigma \mathbf{P} \ni X_\sigma \longrightarrow d\pi_\sigma(X_\sigma) \in T_{\pi(\sigma)} M.$$

Il suo inverso

$$(7.10) \quad \text{hor}_\sigma : T_{\pi(\sigma)} M \longrightarrow H_\sigma \mathbf{P}$$

³Se $\sigma \in \mathbf{P}$ ed $X \in \mathfrak{g}$, indichiamo con $\sigma \cdot X$ il valore del campo fondamentale X^* in σ . La $X \rightarrow \sigma \cdot X$ è un isomorfismo lineare di \mathfrak{g} su $V_\sigma \mathbf{P}$ ed indichiamo con $\sigma^{-1} : V_\sigma \mathbf{P} \rightarrow \mathfrak{g}$ la sua inversa. Nota che $\sigma^{-1} \circ \text{pr}_V \circ \sigma$ è l'identità su \mathfrak{g} .

ci permette di definire un'applicazione

$$(7.11) \quad \text{hor} : \mathfrak{X}(M) \ni X \longrightarrow \tilde{X} \in \mathcal{H}(\mathbf{P}), \quad \text{con} \quad \tilde{X}_\sigma = \text{hor}_\sigma(X_{\pi(\sigma)}), \quad \forall \sigma \in \mathbf{P}.$$

DEFINIZIONE 7.4.1. Chiamiamo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbf{P})$ *sollevamento orizzontale* di $X \in \mathfrak{X}(M)$.

PROPOSIZIONE 7.4.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un campo di vettori $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbf{P})$ sia il sollevamento orizzontale di un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ è che siano soddisfatte le due condizioni:*

$$(7.12) \quad \text{(I)} \quad \omega(\tilde{X}) = 0, \quad \text{(II)} \quad R_{a*}(\tilde{X}) = \tilde{X}, \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

Il sollevamento orizzontale (7.11) è un'applicazione \mathbb{R} -lineare che soddisfa:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \text{hor}(fX) = \pi^*(f) \cdot \tilde{X}, & \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \\ \text{(b)} \quad & d\pi([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = [X, Y], & \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \\ \text{(c)} \quad & [A^*, \tilde{X}] = 0, & \forall A \in \mathfrak{g}, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \quad \square \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 7.4.3. Il commutatore del sollevamento orizzontale di due campi di vettori è invariante rispetto alle traslazioni a destra, soddisfa cioè la proprietà (I) ma può non essere orizzontale, non soddisfare cioè la (i) di (7.12). Il sollevamento orizzontale del commutatore è *la componente orizzontale* del commutatore dei sollevamenti orizzontali.

OSSERVAZIONE 7.4.4. Se \mathbf{G} è connesso, allora il dato di un *sollevamento orizzontale*, cioè di un'applicazione \mathbb{R} -lineare $\text{hor} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbf{P})$ che soddisfi le (a), (b), (c) è equivalente al dato di una connessione principale su ξ . Infatti in questo caso, se definiamo in ogni $\sigma \in \mathbf{P}$ il sottospazio $H_\sigma \mathbf{P}$ come lo spazio vettoriale degli \tilde{X}_σ al variare di X in $\mathfrak{X}(M)$, la (c) garantisce che $H_{\sigma \cdot a} \mathbf{P} = H_\sigma \mathbf{P}$ per ogni a in \mathbf{G} .

7.5. Sollevamento orizzontale di cammini e trasporto parallelo

Indichiamo con $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1(I, M)$ (rispettivamente $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1(I, \mathbf{P})$) l'insieme delle curve di classe \mathcal{C}^1 a tratti in M (rispettivamente in \mathbf{P}) definiti su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Utilizzeremo spesso la notazione $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{s}(t)$, $\mathbf{a}(t)$, per distinguerle, esplicitandone la dipendenza dal parametro t , da singoli punti della base, o elementi dello spazio totale, o del gruppo strutturale.

DEFINIZIONE 7.5.1. Una curva $\mathbf{s}(t)$ in \mathbf{P} , di classe \mathcal{C}^1 a tratti, si dice *orizzontale* se $\dot{\mathbf{s}}_\pm(t) \in H\mathbf{P}$ per ogni t . Indicheremo con $\mathcal{C}_{\text{tr,hor}}^1(I, \mathbf{P})$ l'insieme dei cammini orizzontali in \mathbf{P} , definiti sull'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

PROPOSIZIONE 7.5.2 (Sollevamento orizzontale di cammini).

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $\mathbf{p}(t) \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1(I, M)$ un cammino di classe \mathcal{C}^1 a tratti in M , $\mathbf{t}_0 \in I$ e σ_0 un elemento della fibra $P_{\mathbf{p}(\mathbf{t}_0)}$ di \mathbf{P} in $\mathbf{p}(\mathbf{t}_0)$. Vi è allora in \mathbf{P} un unico cammino orizzontale $\tilde{\mathbf{p}}_{\sigma_0}(t)$ di classe \mathcal{C}^1 a tratti tale che

$$(7.13) \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}_{\sigma_0}(\mathbf{t}_0) = \sigma_0, \\ \pi \circ \tilde{\mathbf{p}}_{\sigma_0}(t) = \mathbf{p}(t), \quad \forall t \in I. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo limitarci a considerare il caso in cui $\mathbf{p}(t) \in \mathcal{C}^1(I, M)$. Poiché ξ è localmente banale, esiste senz'altro una curva $\mathbf{s}(t) \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{P})$ con

$$\begin{cases} \mathbf{s}(0) = \sigma_0, \\ \pi \circ \mathbf{s}(t) = \mathbf{p}(t), \quad \forall t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Cerchiamo allora la $\tilde{\mathbf{p}}_{\sigma_0}$ nella forma

$$\tilde{\mathbf{p}}_{\sigma_0}(t) = \mathbf{s}(t) \cdot \mathbf{a}(t), \quad \text{con } \mathbf{a}(t) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{G}), \quad \mathbf{a}(t_0) = \mathbf{e}_{\mathbf{G}}.$$

Poiché

$$\frac{d\tilde{\mathbf{p}}_{\sigma_0}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{s}}(t) \cdot \mathbf{a}(t) + \mathbf{s}(t) \cdot \dot{\mathbf{a}}(t),$$

la condizione che $\tilde{\mathbf{p}}_{\sigma_0}$ sia orizzontale si può riscrivere mediante

$$\begin{aligned} 0 &= \omega \left(\frac{d\tilde{\mathbf{p}}_{\sigma_0}(t)}{dt} \right) = \omega(\dot{\mathbf{s}}(t) \mathbf{a}(t)) + \omega(\mathbf{s}(t) \dot{\mathbf{a}}(t)) = \omega(d\mathbf{R}_{\mathbf{a}(t)}(\dot{\mathbf{s}}(t))) + \omega_{\mathbf{G}}(\dot{\mathbf{a}}(t)) \\ &= \text{Ad}_{[\mathbf{a}(t)]^{-1}} \circ \omega(\dot{\mathbf{s}}(t)) + \mathbf{a}(t)^{-1} \dot{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{a}(t)^{-1} (\omega(\dot{\mathbf{s}}(t)) \cdot \mathbf{a}(t) + \dot{\mathbf{a}}(t)). \end{aligned}$$

La $\mathbf{a}(t)$ deve essere quindi soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{a}}(t) \mathbf{a}^{-1}(t) = -\omega(\dot{\mathbf{s}}(t)), \\ \mathbf{a}(t_0) = \mathbf{e}_{\mathbf{G}}. \end{cases}$$

Per la Prop.29.4.10, questo problema ammette una ed una sola soluzione, e quindi anche la (7.13) ha una ed una sola soluzione. \square

DEFINIZIONE 7.5.3. L'unica soluzione $\tilde{\mathbf{p}}_{\sigma_0}(t) \in \mathcal{C}_{\text{tr,hor}}^1(I, \mathbf{P})$ di (7.13) si dice il *sollevamento orizzontale* di $\mathbf{p}(t)$ a partire dal tempo t_0 e dal punto σ_0 .

DEFINIZIONE 7.5.4. Sia $\mathbf{p}(t) \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], M)$ una curva di classe \mathcal{C}^1 a tratti in M . Chiamiamo *trasporto parallelo* lungo $\mathbf{p}(t)$ l'applicazione

$$(7.14) \quad \tau_{\mathbf{p}} : P_{\mathbf{p}(0)} \ni \sigma \longrightarrow \tilde{\mathbf{p}}_{\sigma}(1) \in P_{\mathbf{p}(1)}.$$

PROPOSIZIONE 7.5.5. Il trasporto parallelo gode delle seguenti proprietà:

(1) Per ogni $\mathbf{p}(t) \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], M)$ la $\tau_{\mathbf{p}} : P_{\mathbf{p}(0)} \rightarrow P_{\mathbf{p}(1)}$ è invertibile e⁴

$$(7.15) \quad \tau_{\mathbf{p}}^{-1} = \tau_{\mathbf{p}^{-1}},$$

$$(7.16) \quad \tau_{\mathbf{p}}(\sigma \cdot \mathbf{a}) = (\tau_{\mathbf{p}}(\sigma)) \cdot \mathbf{a}, \quad \forall \sigma \in P_{\mathbf{p}(0)}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{G}.$$

(2) Se $\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], M)$ e $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$, allora⁵

$$(7.17) \quad \tau_{\mathbf{p}} = \tau_{\mathbf{p}_2} \circ \tau_{\mathbf{p}_1}. \quad \square$$

⁴Indichiamo con \mathbf{p}^{-1} la curva $\mathbf{p}^{-1}(t) = \mathbf{p}(1-t)$.

⁵Ricordiamo che $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2(t) = \begin{cases} \mathbf{p}_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \mathbf{p}_2(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$

7.6. Il gruppo di ologonia

NOTAZIONE 7.6.1. Per ogni punto $p \in M$ indichiamo con $\mathcal{L}(p)$ lo spazio dei laccetti in p , di classe \mathcal{C}^1 a tratti⁶. Ogni elemento γ di $\mathcal{L}(p)$ definisce un elemento $[\gamma]$ di $\pi_1(M, p)$ (il gruppo fondamentale di M con punto base p). Denotiamo con $\mathcal{L}_0(p)$ l'insieme dei γ di $\mathcal{L}(p)$ omotopi al laccetto costante, cioè con $[\gamma]=0$.

Fissiamo una connessione principale Γ su un fibrato principale $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$. Il trasporto parallelo rispetto a Γ associa ad ogni laccetto $\gamma \in \mathcal{L}(p)$ un'applicazione

$$(7.18) \quad \tau_\gamma : P_p \ni \sigma \longrightarrow \tilde{\gamma}_\sigma(1) \in P_p.$$

di P_p in sé.

LEMMA 7.6.2. Per ogni punto p di M ,

$$(7.19) \quad \Phi(p) = \{\tau_\gamma \mid \gamma \in \mathcal{L}(p)\}$$

è un gruppo di permutazioni di P_p , di cui

$$(7.20) \quad \Phi_0(p) = \{\tau_\gamma \mid \gamma \in \mathcal{L}_0(p)\}$$

è un sottogruppo normale. \square

DEFINIZIONE 7.6.3. Chiamiamo $\Phi(p)$ gruppo di ologonia ed il suo sottogruppo normale $\Phi_0(p)$ gruppo di ologonia ristretto della connessione Γ nel punto p di M .

Per ogni $\sigma \in P_p$ fissato, l'applicazione

$$(7.21) \quad \rho_\sigma : \Phi(p) \ni \tau_\gamma \longrightarrow \sigma^{-1} \circ \tau_\gamma(\sigma) \in \mathbf{G}$$

è un omomorfismo iniettivo di gruppi.

DEFINIZIONE 7.6.4. I sottogruppi $\Phi(\sigma) = \rho_\sigma(\Phi(p))$ di \mathbf{G} e $\Phi_0(\sigma) = \rho_\sigma(\Phi_0(p))$ si dicono rispettivamente gruppo di ologonia e di ologonia ristretto di Γ in $\sigma \in P$.

PROPOSIZIONE 7.6.5. Il gruppo di ologonia ristretto $\Phi_0(\sigma)$ è un sottogruppo normale del gruppo di ologonia $\Phi(\sigma)$. \square

OSSERVAZIONE 7.6.6. La relazione “ \sim ” in P_p che identifica due elementi se sono estremi di un cammino orizzontale di classe \mathcal{C}^1 tratti è una relazione di equivalenza e

$$(7.22) \quad \Phi(\sigma) = \{a \in \mathbf{G} \mid \sigma \cdot a \sim \sigma\}.$$

PROPOSIZIONE 7.6.7. (1) Se $\sigma \in P_p$, $a \in \mathbf{G}$, allora

$$(7.23) \quad \Phi(\sigma \cdot a) = \text{ad}_{a^{-1}}(\Phi(\sigma)), \quad \Phi_0(\sigma \cdot a) = \text{ad}_{a^{-1}}(\Phi_0(\sigma)).$$

(2) Se $\sigma_0, \sigma_1 \in P$ sono gli estremi di una curva orizzontale di classe \mathcal{C}^1 a tratti, allora

$$(7.24) \quad \Phi(\sigma_1) = \Phi(\sigma_0), \quad \Phi_0(\sigma_1) = \Phi_0(\sigma_0).$$

⁶Possiamo definire i gruppi di ologonia utilizzando laccetti di classe \mathcal{C}^k a tratti, per $k \geq 1$. Un teorema di Nomizu e Ozeki (vedi [57]) ci dice che diversi gradi di regolarità ($1 \leq k \leq \infty$) danno gli stessi gruppi di ologonia.

(3) *In particolare, se P è connesso, allora tutti i gruppi di ologonia $\Phi(\sigma)$, al variare di σ in P , sono coniugati tra loro in \mathbf{G} .*

DIMOSTRAZIONE. (1) Se σ appartiene alla fibra nel punto p di M e $\gamma \in \mathcal{L}(p)$, allora per ogni $\mathbf{a} \in \mathbf{G}$ è $\tilde{\gamma}_{\sigma \cdot \mathbf{a}} = \tilde{\gamma}_\sigma \cdot \mathbf{a}$ e quindi otteniamo (7.23) perché

$$(\sigma \cdot \mathbf{a})^{-1} \tilde{\gamma}_{\sigma \cdot \mathbf{a}}(1) = \mathbf{a}^{-1} \sigma^{-1} \tilde{\gamma}(1) \cdot \mathbf{a} = \text{ad}_{\mathbf{a}^{-1}}(\sigma^{-1} \tilde{\gamma}_\sigma(1)).$$

(2) Sia $s(t)$ una curva orizzontale di classe \mathcal{C}^1 a tratti che congiunga σ_0 a σ_1 e $p(t) = \pi \circ s(t)$ la sua proiezione su M . Per ogni $\mathbf{a} \in \Phi(\sigma_0)$, possiamo trovare un laccetto $\gamma \in \mathcal{L}(\pi(\sigma_0))$ tale che $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(1) = \sigma_0 \cdot \mathbf{a}$. La curva $s(t) \cdot \mathbf{a}$ è orizzontale di estremi $\sigma_0 \cdot \mathbf{a}$, $\sigma_1 \cdot \mathbf{a}$. Quindi la curva $(s \cdot \mathbf{a}) \cdot \tilde{\gamma}_{\sigma_0} \cdot s^{-1}$ è orizzontale, rialza il laccetto $p \cdot \gamma \cdot p^{-1} \in \mathcal{L}(\pi(\sigma_1))$ e congiunge tra loro σ_1 e $\sigma_1 \cdot \mathbf{a}$. Questo dimostra che $\mathbf{a} \in \Phi(\sigma_1)$. Quindi $\Phi(\sigma_0) \subseteq \Phi(\sigma_1)$. Con analogo ragionamento abbiamo anche l'inclusione opposta. Per completare la dimostrazione di (2), basta osservare che $p \cdot \gamma \cdot p^{-1} \in \mathcal{L}_0(\pi(\sigma_1))$ se $\gamma \in \mathcal{L}_0(\pi(\sigma_0))$.

La (3) è conseguenza immediata delle (1) e (2). \square

Vale⁷ il:

TEOREMA 7.6.8. *Siano $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale differenziabile con base connessa, su cui abbiamo fissato una connessione principale Γ e σ_0 un punto di P . Allora:*

- (a) $\Phi_0(\sigma_0)$ è un sottogruppo di Lie connesso di \mathbf{G} .
- (b) $\Phi_0(\sigma_0)$ è un sottogruppo normale di $\Phi(\sigma_0)$ ed il quoziente $\Phi(\sigma_0)/\Phi_0(\sigma_0)$ è al più numerabile.
- (c) *In particolare, $\Phi(\sigma_0)$ è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} e $\Phi_0(\sigma_0)$ la sua componente connessa dell'identità.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\gamma \in \mathcal{L}_0(p)$ ed $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ un'omotopia di laccetti di classe \mathcal{C}^1 a tratti di γ con il laccetto costante.

Allora $[0, 1] \ni t \rightarrow \sigma_0^{-1} \tau_{F_t}(\sigma_0)$ è un cammino continuo in $\Phi_0(\sigma_0)$ che congiunge $\sigma_0^{-1} \tau_\gamma(\sigma_0)$ con l'identità. Per il teorema di Freudenthal citato nella nota, ne segue che $\Phi_0(\sigma_0)$ è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} .

La seconda affermazione segue dal fatto che $\Phi_0(\sigma_0)$ è un sottogruppo normale ed abbiamo, con $p_0 = \pi(\sigma_0)$, un omomorfismo surgettivo

$$\pi_1(M, p_0) \longrightarrow \Phi(\sigma_0)/\Phi_0(\sigma_0).$$

⁷ Per la dimostrazione di questo risultato, è utile utilizzare il seguente teorema di Freudenthal ([27]): *Un sottogruppo \mathbf{H} connesso per archi di un gruppo di Lie \mathbf{G} , in cui ogni coppia di punti si possa congiungere con un arco di classe \mathcal{C}^1 a tratti, è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} .*

Freudenthal dimostrò il teorema nel caso di curve analitiche. Il risultato generale fu ottenuto da Yamabe in [65].

Hans Freudenthal (1905-1990) fu un matematico tedesco, naturalizzato olandese, cui si devono importanti contributi alla topologia algebrica. Si occupò anche di letteratura, filosofia, storia e didattica della matematica.

Hidehiko Yamabe (1923-1960) fu un matematico giapponese. A lui si deve la scoperta che ogni classe conforme di metriche riemanniane su varietà compatte ne contiene una di curvatura costante. A lui è anche dovuta la soluzione definitiva del quinto problema di Hilbert: un gruppo topologico localmente euclideo è un gruppo di Lie.

Poiché M è connesso e paracompatto, il suo gruppo fondamentale è al più numerabile e da questa osservazione ricaviamo la tesi. \square

Dal Teorema 7.6.8 segue subito il

TEOREMA 7.6.9 (di riduzione). *Sia $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale differenziabile e supponiamo che la base M sia connessa e paracompatta. Sia Γ una connessione principale su ξ . Fissiamo $\sigma_0 \in P$ e sia $P(\sigma_0)$ l'insieme dei punti di P che possono essere congiunti a σ_0 da un cammino orizzontale. Allora:*

- (I) $\xi_{\sigma_0} = (P(\sigma_0), \pi, M, \Phi(\sigma_0))$ è un sottofibrato principale differenziabile di ξ , con gruppo strutturale $\Phi(\sigma_0)$.
- (II) La connessione Γ su ξ si riduce ad una connessione Γ' su ξ_{σ_0} . \square

DEFINIZIONE 7.6.10. Chiamiamo ξ_{σ_0} il fibrato d'olonomia per σ_0 e $P(\sigma_0)$ il suo spazio di olonomia per σ_0 .

Differenziazione covariante e curvatura

Sia $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale differenziabile su cui sia fissata una connessione principale Γ , con forma di Cartan ω .

Ricordiamo (§7.1) che Γ è caratterizzata dalla decomposizione $TP = HP \oplus VP$ dei vettori tangenti di P nelle loro componenti orizzontale e verticale. Per semplicità di notazione scriveremo nel seguito Z^H e Z^V per $\text{pr}_H(Z)$ e $\text{pr}_V(Z)$.

Tutte le rappresentazioni lineari che considereremo in questo capitolo s'intendono essere di dimensione finita.

8.1. Differenziazione covariante

8.1.1. Differenziale covariante di forme tensoriali e pseudotensoriali. Data una rappresentazione lineare V di \mathbf{G} , abbiamo costruito in §6.9 il fibrato vettoriale $\xi_V = (E_V, \pi_V, M, V)$ e considerato le forme differenziali su M con coefficienti in E_V e le corrispondenti forme tensoriali e pseudotensoriali su P .

La forma di Cartan ω di Γ è pseudotensoriale di tipo \mathfrak{g} per la rappresentazione aggiunta di \mathbf{G} su \mathfrak{g} e non è tensoriale se $\mathfrak{g} \neq 0$.

DEFINIZIONE 8.1.1. Sia q un intero non negativo. Il *differenziale esterno covariante* di una forma pseudotensoriale $\phi \in \Omega_\rho^q(P, V)$ è la $(q+1)$ -forma tensoriale

$$(8.1) \quad (D\phi)(Z_0, Z_1, \dots, Z_q) = (d\phi)(Z_0^H, Z_1^H, \dots, Z_q^H) \quad \forall Z_0, Z_1, \dots, Z_q \in \mathfrak{X}(P).$$

TEOREMA 8.1.2. Se $\phi \in \Omega_\rho^q(P, V)$, allora

$$\phi \circ \text{pr}_H \in \Omega_{\rho,0}^q(P, V), \quad d\phi \in \Omega_\rho^{q+1}(P, V), \quad D\phi \in \Omega_{\rho,0}^{q+1}(P, V). \quad \square$$

Ad ogni rappresentazione lineare ρ_V di \mathbf{G} corrisponde una rappresentazione su V della sua algebra di Lie \mathfrak{g} , che denotiamo con ρ_{V*} , definita da

$$(8.2) \quad \rho_{V*}(X)v = [d\rho_V]_e(X)(v) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} \rho_V(\exp(tX)(v)), \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall v \in V.$$

Il fatto che V sia una *rappresentazione lineare* di \mathfrak{g} significa che l'applicazione \mathbb{R} -lineare $\rho_{V*} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ è un omomorfismo di algebre di Lie: soddisfa cioè

$$\rho_{V*}([X, Y]) = [\rho_{V*}(X), \rho_{V*}(Y)] = \rho_{V*}(X) \circ \rho_{V*}(Y) - \rho_{V*}(Y) \circ \rho_{V*}(X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Ricordiamo la notazione introdotta nel §6.9 per il prodotto esterno: se $\phi \in \Omega_\rho^q(P, V)$ è pseudotensoriale il prodotto $\omega \wedge_\rho \phi$ è la $(q+1)$ -forma pseudotensoriale alternata a valori in V

$$(8.3) \quad (\omega \wedge_\rho \phi)(X_0, \dots, X_q) = \sum_{h=0}^q (-1)^h [\rho_{V*}(\omega(X_h))] (\phi(X_0, \dots, \widehat{X}_h, \dots, X_q)).$$

NOTAZIONE 8.1.3. Introduciamo la notazione

$$(8.4) \quad \omega_V = \rho_{V,*}(\omega), \quad \omega \wedge_\rho \phi = \omega_V \wedge \phi \quad \text{se } \phi \in \Omega_\rho^q(\mathbf{P}, \mathbf{V}).$$

LEMMA 8.1.4. Se $\phi \in \Omega_{\rho,0}^q(\mathbf{P}, \mathbf{V})$ è una q -forma tensoriale, allora

$$(8.5) \quad D\phi = d\phi + \omega_V \wedge \phi.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta verificare che

$$(*) \quad (D\phi)(Z_0, \dots, Z_q) = (d\phi)(Z_0, \dots, Z_q) + (\omega_V \wedge \phi)(Z_0, \dots, Z_q)$$

quando ciascuno degli Z_i sia o un campo verticale fondamentale o il sollevamento di un campo di vettori su M . La formula è banalmente vera quando tutti gli Z_i siano orizzontali oppure almeno due di essi siano verticali.

Basterà dunque dimostrare la (*) nel caso in cui $Z_0 = X^*$ con $X \in \mathfrak{g}$ e gli Z_i con $i > 0$ siano sollevamenti orizzontali, sia cioè $Z_i = \tilde{x}_i$ con $x_i \in \mathfrak{X}(M)$, per $1 \leq i \leq q$.

Poiché abbiamo supposto che ϕ fosse tensoriale, otteniamo

$$\begin{aligned} d\phi(X^*, Z_1, \dots, Z_q) &= X^* \phi(Z_1, \dots, Z_q) + \sum_{i=1}^q (-1)^i \underbrace{Z_i \cdot \phi(X^*, \dots, \widehat{Z}_i, \dots)}_{=0} \\ &\quad + \sum_{i=1}^q (-1)^i \underbrace{\phi([X^*, Z_i], \dots, \widehat{Z}_i, \dots)}_{=0} \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \underbrace{\phi([Z_i, Z_j], X^*, \dots, \widehat{Z}_i, \dots, \widehat{Z}_j, \dots)}_{=0} \\ &= X^* \phi(Z_1, \dots, Z_q) = (L_{X^*} \phi)(Z_1, \dots, Z_q), \end{aligned}$$

perché la derivata di Lie rispetto ad un campo fondamentale $[X^*, Z_i] = [X^*, \tilde{x}_i]$ del sollevamento orizzontale di un campo x_i di $\mathfrak{X}(M)$ è nulla.

Poiché X^* è il generatore infinitesimale di $\{\mathbf{R}_{\exp(tX)}\}_{t \in \mathbb{R}}$, è

$$L_{[X^*]} \phi = \frac{d}{dt} \left[\mathbf{R}_{\exp(tX)}^* \phi \right]_{t=0} = \frac{d}{dt} [\rho(\exp(-tX)) \phi]_{t=0} = -\rho_{V,*}(X) \phi.$$

Poiché ϕ è tensoriale, otteniamo

$$(\omega \wedge_\rho \phi)(X^*, Z_1, \dots, Z_q) = \rho_{V,*}(X)(\phi(Z_1, \dots, Z_q)),$$

che, insieme alle precedenti, dà la (*). \square

8.1.2. Differenziazione covariante di sezioni di fibrati vettoriali.

Siano V una rappresentazione lineare di \mathbf{G} e $\xi_V = (E_V, \pi_V, M, V)$ il corrispondente fibrato vettoriale. Per definire la differenziazione covariante di forme su M a coefficienti in E_V utilizziamo l'isomorfismo $\Lambda_V: \phi \leftrightarrow \tilde{\phi}$ di $\Omega_\xi^q(M, E_V)$ con lo spazio $\Omega_{\rho,0}^q(\mathbf{P}, \mathbf{V})$ delle forme tensoriali su \mathbf{P} a valori in \mathbf{V} (Prop.6.9.4), dato da

$$(8.6) \quad \tilde{\phi}(Z_1, \dots, Z_q) = \sigma^{-1} \phi(\pi_*(Z_1), \dots, \pi_*(Z_q)), \quad \forall \sigma \in \mathbf{P}, \quad \forall Z_1, \dots, Z_q \in \mathbf{T}_\sigma \mathbf{P}.$$

DEFINIZIONE 8.1.5. La *differenziazione covariante* d^∇ (o *connessione lineare*) su ξ_V , associata alla connessione principale Γ su ξ , è l'applicazione lineare

$$(8.7) \quad d^\nabla: \Omega_\xi^q(M, E_V) \xrightarrow{\Lambda_V^{-1} \circ D \circ \Lambda_V} \Omega_\xi^{q+1}(M, E_V), \quad q \geq 0.$$

Il differenziale esterno covariante è definito dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{\xi}^q(M, E_V) & \xrightarrow{d^{\nabla}} & \Omega_{\xi}^{q+1}(M, E_V) \\ \Lambda_V \downarrow & & \downarrow \Lambda_V \\ \Omega_{\rho,0}^q(P, V) & \xrightarrow{D} & \Omega_{\rho,0}^{q+1}(P, V). \end{array}$$

Identifichiamo $\Omega_{\xi}^q(M, E_V)$ con il prodotto tensoriale $\Gamma_{\xi}(M, E_V) \otimes \Omega^q(M)$.

PROPOSIZIONE 8.1.6. *Valgono le formule:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} d^{\nabla}(fs) = s \otimes df + f d^{\nabla}s, & \forall f \in \mathcal{C}^{\infty}(M), \forall s \in \Gamma_{\xi}(M, E_V), \\ d^{\nabla}(s \otimes \psi) = s \otimes d\psi + d^{\nabla}s \otimes \psi, & \forall s \in \Gamma_{\xi}(M, E_V), \forall \psi \in \Omega^q(M), \\ d^{\nabla}(\phi \wedge \psi) = (d^{\nabla}\phi) \wedge \psi + (-1)^p \phi \wedge d\psi, & \forall \phi \in \Omega_{\xi}^p(M, E_V), \forall \psi \in \Omega^q(M). \quad \square \end{array} \right.$$

DEFINIZIONE 8.1.7 (derivata covariante). Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed $s \in \Gamma_{\xi}(M, E_V)$, la sezione $d^{\nabla}s(X) \in \Gamma_{\xi}(M, E_V)$ si indica con $\nabla_X s$ e si dice *derivata covariante di s rispetto ad X* .

Il sollevamento \tilde{s} di una sezione s di ξ_V (ricordiamo che $\tilde{s}(\sigma) = \sigma^{-1}s(\pi(\sigma))$) è una funzione a valori in V , che quindi possiamo differenziare. Dalla definizione della differenziazione covariante, abbiamo

LEMMA 8.1.8. *Vale la formula*

$$(8.8) \quad \widetilde{\nabla_X s} = \tilde{X} \tilde{s}, \quad \forall s \in \Gamma_{\xi}(M, E_V), \forall X \in \mathfrak{X}(M). \quad \square$$

OSSERVAZIONE 8.1.9. Gli elementi di $\Omega_{\xi}^q(M, E_V)$ sono sezioni di un fibrato vettoriale differenziabile su M che non è, in generale, associato ad una rappresentazione lineare di \mathbf{G} . Di una forma di grado positivo possiamo quindi definire il *differenziale*, ma non la *derivata covariante* rispetto ad un campo di vettori. Come vedremo nel seguito, per definire la derivata covariante su $\Omega_{\xi}^q(M, E_V)$ occorrerà introdurre una *connessione affine* su M , cioè una connessione principale sul fibrato dei sistemi di riferimento.

LEMMA 8.1.10. *Sia p un punto di M . Abbiamo:*

$$\begin{aligned} \text{supp}(d^{\nabla}\phi) &\subseteq \text{supp}(\phi), \quad \forall \phi \in \Omega_{\xi}^*(M, E_V), \\ d^{\nabla}\phi_1(p) &= d^{\nabla}\phi_2(p) \quad \text{se } \phi_1 = \phi_2 \text{ in un intorno di } p, \\ \text{supp}(\nabla_X s) &\subseteq \text{supp}(X) \cap \text{supp}(s), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall s \in \Gamma_{\xi}(M, E_V), \\ \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} s = f_1 \nabla_{X_1} s + f_2 \nabla_{X_2} s, \\ \forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^{\infty}(M), \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M), \forall s \in \Gamma_{\xi}(M, E_V), \end{array} \right. \\ \nabla_X(f \cdot s) &= (Xf) \cdot s + f \cdot \nabla_X s, \quad \forall f \in \mathcal{C}^{\infty}(M), \forall s \in \Gamma_{\xi}(M, E_V), \\ \nabla_X(s_1 + s_2) &= \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall s_1, s_2 \in \Gamma_{\xi}(M, E_V), \\ \nabla_X s(p) &= \nabla_Y s(p) \quad \text{se } X, Y \in \mathfrak{X}(M) \text{ ed } X_p = Y_p, \quad \forall s \in \Gamma_{\xi}(M, E_V). \quad \square \end{aligned}$$

In particolare, se U è un aperto di M , $\phi \in \Omega_{\xi}^q(U, E_V)$, $X \in \mathfrak{X}(U)$, $s \in \Gamma_{\xi}(U, E_V)$, $p \in U$, $v \in T_p M$, possiamo definire senza ambiguità

$$d^{\nabla} \phi \in \Omega_{\xi}^{q+1}(U, E_V), \quad \nabla_X s \in \Gamma_{\xi}(U, E_V), \quad \nabla_v s \in E_{V_p}.$$

8.2. Espressione locale del differenziale covariante

Sia $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i) \mid \alpha \in I\}$ un atlante di trivializzazione di ξ . Una sezione s di $\Gamma_{\xi}(M, E_V)$ si rappresenta in \mathcal{A} come una collezione (s_i) di funzioni \mathcal{C}^{∞} definite sugli aperti U_i ed a valori in V .

Le forme di Christoffel di §7.3 ci permettono di esprimere le trivializzazioni di $\nabla_X s$ per mezzo delle (s_i) . Abbiamo infatti

$$(d^{\nabla} s)_i = \sigma_i^*(D\tilde{s}) = \sigma_i^*(d\tilde{s} + \rho_{V,*}(\omega) \cdot \tilde{s}) = ds_i + \rho_{V,*}(\omega_i) \cdot s_i \quad \text{su } U_i,$$

Vale cioè la

$$(8.9) \quad \sigma_i^{-1}(\nabla_X s) = Xs_i + \rho_{V,*}(\omega_i(X)) \cdot s_i.$$

DEFINIZIONE 8.2.1. Le forme

$$(8.10) \quad \gamma_i = \rho_{V,*} \circ \omega_i \in \Omega^1(U_i, \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V))$$

si dicono le *forme di Christoffel* della differenziazione covariante ∇ di ξ_V , nell'atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i) \mid \alpha \in I\}$.

Abbiamo dimostrato la seguente:

PROPOSIZIONE 8.2.2. *La differenziazione covariante si esprime, per mezzo delle forme di Christoffel (8.10), mediante*

$$(8.11) \quad d^{\nabla}(\sigma_i f) = \sigma_i \cdot (df + \gamma_i(f)), \quad \forall f \in \mathcal{C}^{\infty}(U_i, V).$$

Più in generale, ogni $\phi \in \Omega^q(M, E)$ può essere descritta da una famiglia di forme differenziali $\{\phi_i \in \Omega^q(U_i, V)\}$, caratterizzate da

$$\phi = \sigma_i \phi_i \quad \text{su } U_i.$$

Definiamo $\gamma_i \wedge \phi_i \in \Omega^{q+1}(U_i, V)$ ponendo, per ogni $X_0, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(U_i)$,

$$(8.12) \quad (\gamma_i \wedge \phi_i)(X_0, \dots, X_q) = \sum_{j=0}^q (-1)^j \gamma_i(X_j)(\phi_i(X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q)).$$

Possiamo associare ad una $\psi \in \Omega^q(U_i, V)$ la $\sigma_i \psi \in \Omega^q(U_i, E_V)$ definita da

$$(8.13) \quad (\sigma_i \psi)(X_1, \dots, X_q) = \sigma_i(p) \cdot \psi(X_1, \dots, X_q) \in E_{V_p}, \quad \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(U_i).$$

Per la Proposizione 8.1.6, otteniamo la formula:

$$(8.14) \quad d^{\nabla} \phi = \sigma_i \cdot (d\phi_i + \gamma_i \wedge \phi_i) \quad \text{su } U_i.$$

8.3. Forma di curvatura ed equazioni di struttura

Sia $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale differenziabile, su cui sia stata fissata una connessione principale Γ con forma di Cartan ω . Ricordiamo che ω è una forma pseudotensoriale di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$, con $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathbf{G})$.

DEFINIZIONE 8.3.1. Chiamiamo *forma di curvatura* di Γ il differenziale esterno covariante della sua forma di Cartan, cioè la 2-forma tensoriale di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$:

$$(8.15) \quad \Omega = D\omega \in \Omega_{\text{Ad},0}^2(P, \mathfrak{g}).$$

Il fatto che Ω sia una 2-forma tensoriale di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$ significa che valgono:

- (a) $R_a^* \Omega = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \Omega, \quad \forall a \in \mathbf{G}$
 (b) $\Omega(Z_1, Z_2) = 0,$ se uno dei campi Z_1, Z_2 è verticale.

TEOREMA 8.3.2. *La forma di curvatura soddisfa l'equazione di struttura¹*

$$(8.16) \quad \Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega].$$

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che

$$(*) \quad \Omega(Z_1, Z_2) = \left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] \right) (Z_1, Z_2)$$

quando i campi $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(P)$ siano o verticali fondamentali, o sollevamenti orizzontali di campi su M .

Distinguiamo i diversi casi.

Se $Z_1 = A^*, Z_2 = B^*$, con $A, B \in \mathfrak{g}$, sono entrambi fondamentali, allora $\Omega(Z_1, Z_2) = 0$ e la (*) si riduce a

$$d\omega(A^*, B^*) = A^*(B) - B^*(A) - \omega([A^*, B^*]) = -[A, B] = -\frac{1}{2}[\omega \wedge \omega](A^*, B^*).$$

Siano ora $Z_1 = A^*$, con $A \in \mathfrak{g}$, e $Z_2 = \tilde{X}$, con $X \in \mathfrak{X}(M)$. Ancora, $\Omega(Z_1, Z_2) = \Omega(A^*, \tilde{X}) = 0$. Poiché anche

$$[\omega \wedge \omega](A^*, \tilde{X}) = 0,$$

in quanto $\omega(\tilde{X}) = 0$, la (*) si riduce a

$$d\omega(A^*, \tilde{X}) = A^*(0) - \tilde{X}(A) - \omega([A^*, \tilde{X}]) = -\omega([A^*, \tilde{X}]) = 0.$$

Infatti, $[A^*, \tilde{X}] = L_{A^*}(\tilde{X}) = 0$, perché \tilde{X} è invariante rispetto all'azione di \mathbf{G} su P .

Infine, nel caso in cui $Z_1 = \tilde{X}_1, Z_2 = \tilde{X}_2$, con $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, la (*) si riduce ad $[\omega \wedge \omega](\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = 0$ e $D\omega(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = d\omega(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$. \square

OSSERVAZIONE 8.3.3. Poiché

$$(8.17) \quad \Omega(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = -\omega([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]), \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M).$$

la forma di curvatura misura la *non integrabilità formale* della distribuzione orizzontale.

¹Non possiamo utilizzare la (8.5) per il calcolo del differenziale esterno covariante di ω , perché ω è pseudotensoriale, ma non tensoriale.

TEOREMA 8.3.4 (identità di Bianchi). *La forma di curvatura Ω soddisfa l'identità differenziale di Bianchi*

$$(8.18) \quad D\Omega = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\Omega \in \Omega_{\text{Ad},0}^2(\mathbb{P}, \mathfrak{g})$ è una 2-forma tensoriale di tipo $(\mathfrak{g}, \text{Ad})$, abbiamo per il Lemma 8.1.4 e per l'equazione di struttura :

$$\begin{aligned} D\Omega &= d\Omega + [\omega \wedge \Omega] \\ &= d(d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]) + [\omega \wedge \Omega] \\ &= \frac{1}{2}([d\omega \wedge \omega] - [\omega \wedge d\omega]) + [\omega \wedge d\omega] + \frac{1}{2}[\omega \wedge [\omega \wedge \omega]] \\ &= \frac{1}{2}[\omega \wedge [\omega \wedge \omega]] = 0, \end{aligned}$$

perché una 3-forma tensoriale che si annulli sui vettori orizzontali è nulla. \square

8.4. Connessioni piatte

In questo paragrafo consideriamo il caso di connessioni principali con forma di curvatura nulla.

DEFINIZIONE 8.4.1. Sia $\xi = (M \times \mathbf{G}, \text{pr}_M, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale banale ed indichiamo con $\text{pr}_{\mathbf{G}} : M \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ la proiezione sulla seconda coordinata. Il pullback $\omega = \text{pr}_{\mathbf{G}}^* \omega_{\mathbf{G}}$ della forma di Maurer-Cartan su \mathbf{G} è la forma di Cartan di una connessione principale su ξ , che si dice *canonica*.

DEFINIZIONE 8.4.2. Chiamiamo *piatta* una connessione principale localmente isomorfa alla connessione canonica.

TEOREMA 8.4.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una connessione principale sia piatta è che la sua forma di curvatura sia identicamente nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, la forma di curvatura è nulla se e soltanto se la distribuzione orizzontale è formalmente e quindi completamente integrabile. \square

TEOREMA 8.4.4. *Sia $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale con base M semplicemente connessa. Condizione necessaria e sufficiente affinché ξ ammetta una connessione principale piatta è che sia isomorfo al fibrato banale ed una connessione principale piatta su un fibrato a base semplicemente connessa è isomorfa alla connessione canonica.* \square

OSSERVAZIONE 8.4.5. In generale, se ξ ammette una connessione principale piatta, le foglie complete della sua distribuzione orizzontale sono tra loro diffeomorfe e sono rivestimenti della base M .

ESEMPIO 8.4.6. Sia $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ed identifichiamo la circonferenza S^1 con il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi di modulo 1. Indichiamo con θ la *lunghezza d'arco* su S^1 e con x, y le parti reale ed immaginaria della variabile complessa z . Consideriamo il fibrato principale $\xi = (M \times S^1, \text{pr}_M, M, S^1)$. Ogni forma

$$\omega = d\theta + \phi(x, y)dx + \psi(x, y)dy, \quad \text{con } \phi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

definisce una connessione principale su ξ con curvatura nulla, che è equivalente alla connessione canonica se e soltanto se la forma $\phi(x, y)dx + \psi(x, y)dy$ è esatta. Ad esempio, $\omega = d\theta + |z|^{-2}(ydx - xdy)$ è piatta ma non equivalente alla connessione canonica. Per altri esempi di connessioni piatte, si può leggere l'articolo [40].

8.5. La famiglia delle connessioni principali

Se ω ed ω' sono le forme di Cartan di due connessioni principali su ξ , la loro differenza $\eta = \omega' - \omega$ è una uno-forma tensoriale di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$ e quindi definisce una forma $\varphi \in \Omega^1(M, E_{\mathfrak{g}})$. Abbiamo quindi

PROPOSIZIONE 8.5.1. *Lo spazio delle connessioni principali su ξ è uno spazio affine con spazio vettoriale associato $\Omega^1_{\text{Ad},0}(P, \mathfrak{g}) \simeq \Omega^1(M, E_{\mathfrak{g}})$. \square*

OSSERVAZIONE 8.5.2. La forma di Christoffel $\omega_i = \sigma_i^* \omega$ si può interpretare come l'elemento di $\Omega^1(M, E_{\mathfrak{g}})$ che corrisponde alla differenza tra $\Psi_i^* \omega$ e la connessione piatta canonica su $U_i \times \mathbf{G}$.

8.6. Fibrato degli endomorfismi e rappresentazione aggiunta

Fibrato degli endomorfismi di un fibrato vettoriale. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su \mathbb{K} (con \mathbb{K} uguale o ad \mathbb{R} , o a \mathbb{C} o ad \mathbb{H}). Ad un fibrato vettoriale $\eta = (E, \pi_{\eta}, M, V)$ possiamo associare il *fibrato degli endomorfismi di η* , che indicheremo con $\mathcal{E}nd_{\mathbb{K}}(\eta)$. La sua fibra sopra il punto \mathfrak{p} di M è lo spazio vettoriale di tutti le applicazioni \mathbb{K} -lineari di $E_{\mathfrak{p}}$ in sé.

Il fibrato vettoriale $\mathcal{E}nd(\eta) = (\mathcal{E}nd(E), \pi_{\mathcal{E}nd(\eta)}, M, \mathcal{E}nd_{\mathbb{K}}(V))$ è il prodotto di Whitney $\eta \otimes_M \eta^*$ su M del fibrato η e del suo fibrato duale η^* .

Sia $\mathbb{L}(\eta)$ il fibrato $\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ -principale dei suoi sistemi di riferimento. Allora $\mathcal{E}nd(\eta)$ è il fibrato vettoriale associato ad $\mathbb{L}(\eta)$ mediante la rappresentazione aggiunta di $\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ su $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$.

Fibrato associato alla rappresentazione aggiunta. Fissato un fibrato principale $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$, sia $\xi_{\mathfrak{g}} = (E_{\mathfrak{g}}, \pi_{\mathfrak{g}}, M, \mathfrak{g})$ il fibrato vettoriale corrispondente alla rappresentazione aggiunta di \mathbf{G} sulla sua algebra di Lie \mathfrak{g} .

PROPOSIZIONE 8.6.1. *Sia (ρ, V) una rappresentazione lineare di \mathbf{G} . Risulta allora definita un unico morfismo di fibrati vettoriali $(\text{id}_M, \tilde{\rho}_*) : \xi_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{E}nd(\xi_V)$, che renda commutativo il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} P \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{id}_P \times \rho_{V*}} & P \times \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\tilde{\rho}_*} & \mathcal{E}nd(E_V) \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono le proiezioni canoniche nel quoziente.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che $\rho_{V*}(\text{Ad}_{\mathfrak{a}}(A)) = \text{Ad}(\rho(\mathfrak{a}))\rho_{V*}(A)$ e quindi l'applicazione $\text{id}_P \times \rho_{V*}$ passa al quoziente, definendo un omomorfismo di fibrati vettoriali. \square

Alcune osservazioni sulle forme a valori vettoriali. Sia $\eta = (E, \pi, M, V)$ un fibrato vettoriale differenziabile. Se $\phi \in \Omega^p(M, \mathcal{E}nd(E))$ e $\psi \in \Omega^q(M, E)$, è naturale definire il prodotto esterno $\phi \wedge \psi \in \Omega^{p+q}(M, E)$ ponendo

$$(\phi \wedge \psi)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum_{\substack{k \in \mathbf{S}_{p+q} \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq p+q \\ 1 \leq k_{p+1} < \dots < k_{p+q} \leq p+q}} \epsilon(k) \phi(X_{k_1}, \dots, X_{k_p}) (\psi(X_{k_{p+1}}, \dots, X_{k_{p+q}})),$$

$$\forall X_1, \dots, X_{p+q} \in \mathfrak{X}(M).$$

Siano $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale differenziabile, $\xi_{\mathfrak{g}}$ il fibrato vettoriale associato alla rappresentazione aggiunta del suo gruppo strutturale, ξ_V il fibrato vettoriale associato ad una sua rappresentazione lineare (ρ, V) .

Se $\phi \in \Omega^p(M, E_{\mathfrak{g}})$, allora $\tilde{\rho}_* \phi \in \Omega^p(M, E_{\mathcal{E}nd(E_V)})$ e, data $\psi \in \Omega^q(M, E_V)$, definiamo

$$\phi \wedge_{\rho} \psi = (\tilde{\rho}_* \phi) \wedge \psi \in \Omega^{p+q}(M, E_V).$$

Utilizzando l'isomorfismo $\Lambda_{\mathfrak{g}} : \Omega^*(M, E_{\mathfrak{g}}) \rightarrow \Omega^*_{\text{Ad},0}(P, \mathfrak{g})$ della Prop.6.9.4 e la Prop.6.9.9 abbiamo il seguente

LEMMA 8.6.2. *Se $\phi \in \Omega^r(M, E_{\mathfrak{g}})$ e $\psi \in \Omega^s(M, E_V)$, la forma $\phi \wedge_{\rho} \psi \in \Omega^{r+s}(M, E_V)$ verifica*

$$(8.19) \quad \Lambda_V(\phi \wedge_{\rho} \psi) = \Lambda_{\mathfrak{g}}(\phi) \wedge_{\rho} \Lambda_V(\psi). \quad \square$$

Nel caso in cui $\phi, \psi \in \Omega^*(M, E_{\mathfrak{g}})$, scriveremo

$$[\phi \wedge \psi] \quad \text{per indicare} \quad \phi \wedge_{\text{Ad}} \psi.$$

NOTAZIONE 8.6.3. Se $\psi \in \Omega^p(M, E_V)$ e $\phi \in \Omega^q(M)$, indichiamo con $\psi \wedge \phi$ l'elemento di $\Omega^{p+q}(M, E_V)$ definito da

$$(8.20) \quad (\psi \wedge \phi)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum' (-1)^p \epsilon(k) \phi(X_{k_{p+1}}, \dots, X_{k_{p+q}}) \psi(X_{k_1}, \dots, X_{k_p}),$$

per ogni $X_1, \dots, X_{p+q} \in \mathfrak{X}(M)$, ove la somma è estesa a tutte le permutazioni k di $\{1, \dots, p+q\}$ con $k_1 < \dots < k_p$ e $k_{p+1} < \dots < k_{p+q}$.

OSSERVAZIONE 8.6.4. Se $\phi \in \Omega^p(M, E_{\mathfrak{g}})$, $\psi \in \Omega^{q_1}(M, E_V)$ e $\chi \in \Omega^{q_2}(M)$, allora

$$(8.21) \quad \phi \wedge_{\rho} (\psi \wedge \chi) = (\phi \wedge_{\rho} \psi) \wedge \chi.$$

LEMMA 8.6.5. *Ogni elemento di $\Omega^p(M, E_V)$ si può scrivere come una somma localmente finita di forme $s \cdot \phi$ con $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$, $\phi \in \Omega^p(M)$.* \square

Le formule (8.20), (8.21) ed il Lemma 8.6.5 ci saranno utili per semplificare, più avanti, il calcolo di alcune espressioni.

8.7. Tensore di curvatura

La forma di curvatura Ω di una connessione principale Γ su $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ è di tipo tensoriale per la rappresentazione aggiunta di \mathbf{G} e determina quindi un elemento $R \in \Omega^2_{\xi}(M, E_{\mathfrak{g}})$ tale che $\sigma \cdot \Omega = \pi^* R$, sia cioè

$$(8.22) \quad R(X_{\rho}, Y_{\rho}) = \sigma \cdot \Omega(\tilde{X}_{\sigma}, \tilde{Y}_{\sigma}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall \rho \in M, \forall \sigma \in P_{\rho}.$$

DEFINIZIONE 8.7.1. Chiamiamo la $R \in \Omega_{\xi}^2(M, E_{\mathfrak{g}})$ definita dalla (8.22) il *tensore di curvatura* di Γ .

TEOREMA 8.7.2. Siano $\{\omega_i\}$ le forme di Christoffel di Γ in un atlante di trivialisazione $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i) \mid \alpha \in I\}$ di ξ . Allora le espressioni locali² $R_i = \sigma_i^* \Omega$ del tensore di curvatura verificano

$$(8.23) \quad R_i = d\omega_i + \frac{1}{2}[\omega_i \wedge \omega_i], \quad \forall i \in I.$$

DIMOSTRAZIONE. La (8.23) è diretta conseguenza delle equazioni di struttura (Teor.8.3.2). \square

TEOREMA 8.7.3. Sia (ρ, V) una rappresentazione lineare di \mathbf{G} . Allora, per ogni $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$ abbiamo

$$(8.24) \quad (d^\nabla)^2 \phi = d^\nabla d^\nabla \phi = R \wedge_\rho \phi.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$ ed $\alpha \in \Omega^q(M)$, abbiamo:

$$\begin{aligned} d^\nabla d^\nabla (s \cdot \alpha) &= d^\nabla ((d^\nabla s) \wedge \alpha) + s d\alpha = (d^\nabla d^\nabla s) \wedge \alpha - d^\nabla s \wedge d\alpha + d^\nabla s \wedge d\alpha \\ &= (d^\nabla d^\nabla s) \wedge \alpha. \end{aligned}$$

Utilizzando il Lemma 8.6.5 possiamo limitarci quindi a dimostrare la formula nel caso in cui $\phi = s \in \Omega^0(M, E_V) = \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} D^2 \tilde{s} &= D(d\tilde{s} + \omega \wedge_\rho \tilde{s}) = d\omega \wedge_\rho \tilde{s} - \omega \wedge_\rho d\tilde{s} + \omega \wedge_\rho (d\tilde{s} + \omega \wedge_\rho \tilde{s}) \\ &= d\omega \wedge_\rho \tilde{s} + \omega \wedge_\rho (\omega \wedge_\rho \tilde{s}). \end{aligned}$$

Per completare la dimostrazione della (8.24) è sufficiente osservare che $D^2 \tilde{s}$ è una due-forma tensoriale di tipo (ρ, V) e che l'uguaglianza $D^2 \tilde{s} = \Omega \wedge_\rho \tilde{s}$ è verificata su ogni coppia di campi di vettori orizzontali. \square

COROLLARIO 8.7.4. Se $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$, abbiamo

$$(8.25) \quad R(X, Y) \wedge_\rho s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s, \\ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$. Posto $\phi = d^\nabla s$, abbiamo $\tilde{\phi}(\tilde{Z}) = \tilde{Z}\tilde{s} = \widetilde{\nabla_Z s}$ per ogni $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e quindi:

$$\begin{aligned} d\tilde{\phi}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \tilde{X}\tilde{\phi}(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\tilde{\phi}(\tilde{X}) - \tilde{\phi}([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = (\tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X} - [\tilde{X}, \tilde{Y}])\tilde{s}, \\ &= \sigma^{-1}(\nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s) \circ \pi. \end{aligned}$$

Per il Teorema 8.7.3 otteniamo la (8.25). \square

²Abbiamo $R|_{U_i} = \sigma_i \cdot R_i$ per ogni $i \in I$.

8.8. Trasporto parallelo di vettori

Fissiamo una connessione su un fibrato principale ξ . Utilizzando il sollevamento orizzontale di cammini del §7.5 possiamo descrivere il trasporto parallelo, lungo cammini di classe $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1$ in M , dei vettori di fibrati vettoriali associati alle rappresentazioni lineari del suo gruppo strutturale \mathbf{G} di ξ .

Siano $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], M)$ e $\tilde{\gamma}_{\sigma_0} \in \mathcal{C}_{\text{tr,hor}}^1([0, 1], \mathbf{P})$ il suo sollevamento orizzontale a partire da un elemento $\sigma_0 \in \mathbf{P}_{\gamma(0)}$. Se (ρ, V) è una rappresentazione lineare di \mathbf{G} e $v_0 \in E_{V, \gamma(0)}$, allora $v_0 = \sigma_0^{-1} v_0 \in V$ e $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)v_0$ è un sollevamento differenziabile di γ ad un cammino in $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], E_V)$, con punto iniziale v_0 .

Se σ'_0 è un altro punto di $\mathbf{P}_{\gamma(0)}$, è $\sigma'_0 = \sigma_0 a$ per un elemento $a \in \mathbf{G}$ ed il sollevamento orizzontale di γ con punto iniziale σ'_0 è $\tilde{\gamma}_{\sigma'_0}(t) = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \cdot a$. Poiché

$$\begin{aligned} v'_0 &= \sigma'^{-1}_0 v_0 = (\sigma_0 a)^{-1} v_0 = \rho(a^{-1}) \sigma_0^{-1} v_0 = \rho(a^{-1}) v_0, \\ \text{otteniamo } \tilde{\gamma}_{\sigma'_0}(t) v'_0 &= \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \cdot a v'_0 = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) v_0. \end{aligned}$$

La curva $\tilde{\gamma}_{v_0}(t) = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)v_0$ in E_V è quindi indipendente dalla scelta del punto iniziale σ_0 in $\mathbf{P}_{\gamma(0)}$.

DEFINIZIONE 8.8.1. La curva $\tilde{\gamma}_{v_0} = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)\sigma_0^{-1}v_0 \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], E_V)$ si dice il *trasporto parallelo di v_0 lungo la curva γ* .

Una curva $v \in \mathcal{C}^1([0, 1], E_V)$ può essere considerata come un *campo di vettori lungo il cammino* $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$ definito dalla sua proiezione $\gamma(t) = \pi_V(v(t))$. Se $\tilde{\gamma}_{\sigma_0} \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{P})$ è il sollevamento orizzontale di γ di punto iniziale $\sigma_0 \in \mathbf{P}_{\gamma(0)}$, la composizione $v_{\sigma_0}(t) = (\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t))^{-1}v(t)$ è un cammino $v_{\sigma_0} \in \mathcal{C}^1([0, 1], V)$ e possiamo quindi calcolarne la derivata $\dot{v}_{\sigma_0} = \frac{d}{dt}v_{\sigma_0}$. Se $a \in \mathbf{G}$ e $\sigma'_0 = \sigma_0 a$, allora $\tilde{\gamma}_{\sigma'_0}(t) = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \cdot a$ è il sollevamento di γ con punto iniziale σ'_0 . Quindi $v_{\sigma'_0}$ è $a^{-1} \cdot v_{\sigma_0}$ ed abbiamo perciò

$$\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)\dot{v}_{\sigma_0} = \tilde{\gamma}_{\sigma'_0}(t)\dot{v}_{\sigma'_0}.$$

Quindi $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}\dot{v}_{\sigma_0}$ è un campo di vettori lungo γ , indipendente dalla scelta del punto iniziale σ_0 del sollevamento. Possiamo introdurre quindi la

DEFINIZIONE 8.8.2. Siano $v \in \mathcal{C}^1([0, 1], E_V)$ un campo di vettori lungo una curva $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$ e $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}$ il sollevamento orizzontale di γ , a partire da un punto $\sigma_0 \in \mathbf{P}_{\gamma(0)}$. La

$$(8.26) \quad \frac{Dv}{dt} = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \left(\frac{d[(\tilde{\gamma}_{\sigma_0})^{-1}v(t)]}{dt} \right)$$

si dice *derivata covariante di v lungo la curva γ* . Se

$$(8.27) \quad \frac{Dv}{dt} = 0$$

diciamo che il campo di vettori v è *parallelo* lungo la curva γ .

OSSERVAZIONE 8.8.3. Il campo di vettori v è parallelo lungo la curva γ se e soltanto se v è il trasporto parallelo lungo γ del vettore $v(0)$.

PROPOSIZIONE 8.8.4. Siano $f \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$ e $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$. Allora

$$(8.28) \quad \frac{D(f \circ \gamma)}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} f. \quad \square$$

8.9. Differenziazione covariante secondo Koszul

Introduciamo in questo paragrafo la definizione astratta di *differenziazione covariante secondo Koszul* (vedi [47]) sulle sezioni di un fibrato vettoriale differenziabile e mostriamo che essa equivale al dato di una connessione principale sul fibrato dei suoi sistemi di riferimento.

Sia $\eta = (E, \pi_\eta, M, V)$ un fibrato vettoriale reale differenziabile, di rango n , con fibra tipica V , su una varietà differenziabile M di dimensione m . Indichiamo con $\mathcal{E}(M, E)$ lo spazio $\Gamma_\eta(M, E)$ delle sue sezioni differenziabili.

DEFINIZIONE 8.9.1 (Koszul). Una *derivazione covariante* su η è un'applicazione

$$(8.29) \quad \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{E}(M, E) \ni (X, \mathbf{s}) \longrightarrow \nabla_X \mathbf{s} \in \mathcal{E}(M, E)$$

che gode delle proprietà

$$(8.30) \quad \begin{cases} \nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} \mathbf{s} = f_1 \nabla_{X_1} \mathbf{s} + f_2 \nabla_{X_2} \mathbf{s}, \\ \nabla_X (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) = \nabla_X \mathbf{s}_1 + \nabla_X \mathbf{s}_2, \\ \nabla_X (f \mathbf{s}) = f \nabla_X \mathbf{s} + X(f) \cdot \mathbf{s}, \end{cases}$$

ove $f, f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $\mathbf{s}, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in \mathcal{E}(M, E)$.

Poiché l'applicazione $X \rightarrow \nabla_X \mathbf{s} \in \mathcal{E}^\infty(M)$ -lineare su $\mathfrak{X}(M)$, possiamo considerare, per ogni $\mathbf{s} \in \mathcal{E}(M, E)$, la

$$(8.31) \quad \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow d^\nabla \mathbf{s}(X) = \nabla_X \mathbf{s} \in \mathcal{E}(M, E)$$

come una 1-forma a valori in E . Definiamo così un'applicazione

$$(8.32) \quad d^\nabla : \mathcal{E}(M, E) = \Omega^0(M, E) \longrightarrow \Omega^1(M, E).$$

DEFINIZIONE 8.9.2. L'applicazione (8.32) si dice *differenziazione covariante*.

Abbiamo mostrato nel §8.1.2 come una connessione sul fibrato $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ -principale $\mathbb{L}(\eta)$ dei sistemi di riferimento di η permetta di definire una differenziazione covariante su η . Viceversa, vale il

TEOREMA 8.9.3. Ogni differenziazione covariante su η è associata ad una ed una sola connessione principale sul fibrato $\mathbb{L}(\eta)$ dei suoi sistemi di riferimento.

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathbf{s} \in \mathcal{E}(M, E)$, denotiamo con $\tilde{\mathbf{s}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{L}(\eta), V)$ il suo sollevamento, definito da $\tilde{\mathbf{s}}(\sigma) = \sigma^{-1} \mathbf{s}(\pi(\sigma))$. Abbiamo

$$(8.33) \quad X_\sigma \tilde{\mathbf{s}} = -\omega_V(X_\sigma) \tilde{\mathbf{s}}, \quad \forall X \in \mathcal{V}(\mathbb{L}(\eta)), \quad \forall \mathbf{s} \in \mathcal{E}(M, E).$$

Infatti, se $A = \omega_V(X_\sigma) \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$, da $\tilde{\mathbf{s}}(\sigma \exp(tA)) = \exp(-tA) \tilde{\mathbf{s}}(\sigma)$ ricaviamo

$$X_\sigma \tilde{\mathbf{s}} = \left. \frac{d \exp(-tA) \sigma^{-1} \mathbf{s}(\pi(\sigma))}{dt} \right|_{t=0} = -A \cdot \tilde{\mathbf{s}}(\sigma).$$

Perciò, assegnata una connessione principale su $\mathbb{L}(\eta)$, la sua forma di Cartan ω è legata alla derivazione covariante dall'identità

$$(8.34) \quad X_\sigma \tilde{s} = \sigma^{-1}(\nabla_{\pi_* X_\sigma} \mathbf{s}) - \omega(X_\sigma) \tilde{s}(\sigma), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}(\eta)), \quad \forall \sigma \in P, \quad \forall \mathbf{s} \in \mathcal{E}(M, E).$$

Per concludere la dimostrazione è quindi sufficiente verificare che, assegnata una derivazione covariante ∇ su η , la $\omega \in \mathcal{Q}^1(\mathbb{L}(\eta), \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V))$ definita dalla (8.34) è la forma di Cartan di una connessione principale su $\mathbb{L}(\eta)$. Per la (8.33) è $\omega(A^*) = A$ per ogni $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$. Se $\mathbf{a} \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$, $\sigma \in \mathbb{L}(\eta)$ ed $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}(\eta))$, abbiamo

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_{\mathbf{a}}^* \omega(X_\sigma)] \tilde{s}(\sigma \cdot \mathbf{a}) &= [\mathbf{R}_{\mathbf{a}}^* \omega(X_\sigma)] \mathbf{a}^{-1} \tilde{s}(\sigma) \\ &= \omega(\mathbf{R}_{\mathbf{a}^* X_\sigma}) \tilde{s}(\sigma \cdot \mathbf{a}) = (\sigma \cdot \mathbf{a})^{-1} (\nabla_{\pi_* (\mathbf{R}_{\mathbf{a}^* X_\sigma})} \mathbf{s}) - \mathbf{R}_{\mathbf{a}^* X_\sigma} \tilde{s} \\ &= \mathbf{a}^{-1} \sigma^{-1} (\nabla_{\pi_* X} \mathbf{s}) - X_\sigma \mathbf{R}_{\mathbf{a}}^* \tilde{s} = \mathbf{a}^{-1} (\sigma^{-1} (\nabla_{\pi_* X} \mathbf{s}) - X_\sigma \tilde{s}) \\ &= \mathbf{a}^{-1} \omega(X_\sigma) \tilde{s}(\sigma) = [\mathbf{a}^{-1} \omega(X_\sigma) \mathbf{a}] \tilde{s}(\sigma \cdot \mathbf{a}) = [\text{Ad}(\mathbf{a}^{-1}) \omega(X_\sigma)] \tilde{s}(\sigma \cdot \mathbf{a}), \end{aligned}$$

da cui ricaviamo che $\mathbf{R}_{\mathbf{a}}^* \omega = \text{Ad}(\mathbf{a}^{-1}) \omega$. Ciò completa la dimostrazione. \square

8.10. Il Teorema di Ambrose-Singer

Dopo aver introdotto il concetto di curvatura, ritorniamo sull'olonomia, definita in §7.6. Il legame tra curvatura ed olonomia è descritto dal seguente Teorema di Ambrose e Singer (vedi [2, 4]).

TEOREMA 8.10.1 (dell'olonomia). *Siano $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale differenziabile, con base M connessa e Γ una connessione principale su ξ , con forma di Cartan ω e di curvatura Ω . Fissato un punto $\sigma_0 \in P$, l'algebra di Lie del gruppo d'olonomia ristretta $\Phi_0(\sigma_0)$ è il sottospazio vettoriale di \mathfrak{g} generato dagli elementi della forma $\Omega_\sigma(Z_1, Z_2)$, al variare di σ in³ $P(\sigma_0)$ e di Z_1, Z_2 tra i vettori orizzontali in $H_\sigma(P)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p_0 = \pi(\sigma_0)$. Per il Teorema 7.6.9 possiamo supporre che $P = P(\sigma_0)$ e che il gruppo strutturale \mathbf{G} di ξ coincida col gruppo di olonomia $\Phi(\sigma_0)$. Sia \mathfrak{a} il sottospazio di \mathfrak{g} generato da tutti gli elementi $\Omega_\sigma(\tilde{X}, \tilde{Y})$, al variare di X, Y in $\mathfrak{X}(M)$ e di σ in P . Poiché Ω è tensoriale di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$, abbiamo, per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ed $A \in \mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{a} \ni \Omega(\mathbf{R}_{\exp(tA)_*} \tilde{X}, \mathbf{R}_{\exp(tA)_*} \tilde{Y}) = \mathbf{R}_{\exp(tA)}^* \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \text{Ad}_{\exp(-tA)} \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}).$$

Quindi la derivata in 0 rispetto a t dell'espressione a secondo membro, che è uguale ad $\text{ad}_A(\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y})) = [A, \Omega(X, Y)]$ appartiene ad \mathfrak{a} . Ciò dimostra che \mathfrak{a} è un ideale di \mathfrak{g} .

Consideriamo la distribuzione vettoriale $\mathcal{A}(P)$ generata dai campi di vettori A^* , al variare di A in \mathfrak{a} , e la $\mathcal{B}(P) = \mathcal{A}(P) + \mathcal{H}(P)$, generata dalla distribuzione orizzontale $\mathcal{H}(P)$ e da $\mathcal{A}(P)$. Per costruzione la $\mathcal{B}(P)$ è una distribuzione di rango $m + \dim(\mathfrak{a})$. Dico che è involutiva.

³Ricordiamo che $P(\sigma_0)$ è l'insieme dei punti σ di P che possono essere congiunti a σ_0 da un cammino orizzontale.

Infatti $\mathcal{A}(\mathbf{P})$ è completamente integrabile, $[A^*, \mathcal{H}(\mathbf{P})] \subset \mathcal{H}(\mathbf{P})$ per ogni $A \in \mathfrak{a}$, perché la distribuzione orizzontale è invariante per le traslazioni a destra rispetto agli elementi di \mathbf{G} ed, infine, se $Z_1, Z_2 \in \mathcal{H}(\mathbf{P})$, la

$$\text{pr}_V([Z_1, Z_2]_\sigma) = [\omega([Z_1, Z_2])]_\sigma^* = -[\Omega(Z_1, Z_2)]_\sigma^*$$

prova che $[Z_1, Z_2] \in \mathcal{B}(\mathbf{P})$. Poiché abbiamo supposto che \mathbf{G} coincida con il gruppo di ologonia $\Phi(\sigma_0)$, tutte le coppie di elementi di \mathbf{P} sono estremi di cammini orizzontali. Ne segue che \mathbf{P} è la varietà integrale di $\mathcal{B}(\mathbf{P})$ passante per σ_0 ed ha quindi rango uguale alla dimensione di \mathbf{P} . Questo implica che \mathfrak{a} , avendo la stessa dimensione di \mathfrak{g} , coincida con \mathfrak{g} . \square

OSSERVAZIONE 8.10.2. Se ξ è un fibrato principale differenziabile, con spazio totale \mathbf{P} connesso, su una base M di dimensione maggiore o uguale a due, allora esiste una connessione principale su ξ per cui sia $\mathbf{P}(\sigma_0) = \mathbf{P}$. Questo è stato dimostrato da Hano e Ozeki in [41] nel caso dei gruppi lineari ed in completa generalità da Nomizu in [44]. In particolare, se $\dim(M) \geq 2$, ogni gruppo di Lie connesso \mathbf{G} è il gruppo di ologonia di una connessione principale sul fibrato banale $M \times \mathbf{G}$.

8.11. L'ologonia infinitesima

Se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie reale e \mathbf{P} una varietà differenziabile, lo spazio $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ delle funzioni differenziabili su \mathbf{P} a valori in \mathfrak{g} è un'algebra di Lie col prodotto

$$[f_1, f_2](\sigma) = [f_1(\sigma), f_2(\sigma)], \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{P}, \mathfrak{g}), \quad \forall \sigma \in \mathbf{P}.$$

Supponiamo che \mathbf{P} sia lo spazio totale di un fibrato principale differenziabile $\xi = (\mathbf{P}, \pi, M, \mathbf{G})$ e \mathfrak{g} l'algebra di Lie del suo gruppo strutturale. Consideriamo la sottoalgebra

$$(8.35) \quad \mathcal{G} = \mathcal{Q}_{\text{Ad},0}^0(\mathbf{P}, \mathfrak{g}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{P}, \mathfrak{g}) \mid R_a^* f = \text{Ad}(a^{-1})f, \quad \forall a \in \mathbf{G}\}.$$

dei sollevamenti delle sezioni su M di $\mathbf{E}_{\mathfrak{g}}$.

LEMMA 8.11.1. *Valgono le*

$$(8.36) \quad Zf = -[\omega(Z), f], \quad \forall Z \in \mathcal{V}(\mathbf{P}), \quad \forall f \in \mathcal{G},$$

$$(8.37) \quad \tilde{X}f \in \mathcal{G}, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall f \in \mathcal{G}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \mathcal{Q}_{\text{Ad},0}^0(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$, è $Df = df + [\omega \wedge f] = df + [\omega, f]$. Poiché Df è tensoriale, otteniamo la (8.36). La (8.37) segue dal fatto che, se $f \in \mathcal{G}$ ed $X \in \mathfrak{X}(M)$, allora $f = \tilde{s}$ per una $s \in \Gamma_{\xi_{\mathfrak{g}}}(M, \mathbf{E}_{\mathfrak{g}})$ ed $\tilde{X}f = \widetilde{\nabla_X s}$. \square

Definiamo per ricorrenza

$$(8.38) \quad \begin{cases} \mathcal{K}_0 = \langle \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) \mid X, Y \in \mathfrak{X}(M) \rangle, \\ \mathcal{K}_{p+1} = \mathcal{K}_p + \langle \tilde{X}\mathcal{K}_p \mid X \in \mathfrak{X}(M) \rangle \quad \text{per } p \geq 0, \\ \mathcal{K} = \bigcup_{p \geq 0} \mathcal{K}_p. \end{cases}$$

PROPOSIZIONE 8.11.2. \mathcal{K} è una sottoalgebra di Lie di \mathcal{G} .

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $R \in \Omega^2(M, E_g)$ il tensore di curvatura. Per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, la $f = \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y})$ è il rialzamento di $R(X, Y) \in \Gamma_{\xi_0}(M, E_g)$ e quindi un elemento di \mathcal{G} . Per definizione $\tilde{X}\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}$ per la (8.37).

Dimostriamo per ricorrenza su p che $[\mathcal{K}_p, \mathcal{K}] \subseteq \mathcal{K}$.

Siano $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$. Posto $Y = [X_1, X_2]$, poiché $\Omega(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = -\omega([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2])$, e $\text{pr}_H([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]) = \tilde{Y}$, otteniamo, per la (8.36),

$$\begin{aligned} [\Omega(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2), f] &= -[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]^V f = ([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]^H - [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2])f \\ &= \tilde{Y}f - \tilde{X}_1\tilde{X}_2f + \tilde{X}_2\tilde{X}_1f \in \mathcal{K}, \end{aligned}$$

da cui segue che $[\mathcal{K}_0, \mathcal{K}] \subseteq \mathcal{K}$.

Supponiamo ora che per un $p > 0$ sia $[\mathcal{K}_{p-1}, \mathcal{K}] \subseteq \mathcal{K}$. Per dimostrare che $[\mathcal{K}_p, \mathcal{K}] \subseteq \mathcal{K}$, basta verificare che, se $f_0 \in \mathcal{K}_{p-1}$, $f \in \mathcal{K}$ ed $X \in \mathfrak{X}(M)$, allora $[\tilde{X}f_0, f]$ appartiene a \mathcal{K} . Questo segue perché per l'ipotesi induttiva $[f_0, f] \in \mathcal{K}$ e quindi

$$[\tilde{X}f_0, f] = \tilde{X}[f_0, f] - [f_0, \tilde{X}f] \in \tilde{X}\mathcal{K} + [f_0, \mathcal{K}] \subset \mathcal{K}.$$

La dimostrazione è completa. \square

Fissato $\sigma_0 \in \mathbf{P}$, poniamo

$$(8.39) \quad \begin{cases} \mathfrak{m}_p(\sigma_0) = \{f(\sigma_0) \mid f \in \mathcal{K}_p\}, \\ \mathfrak{m}(\sigma_0) = \{f(\sigma_0) \mid f \in \mathcal{K}\} = \bigcup_{p \geq 0} \mathfrak{m}_p(\sigma_0). \end{cases}$$

PROPOSIZIONE 8.11.3. $\mathfrak{m}(\sigma_0)$ è una sottoalgebra dell'algebra di Lie $\phi(\sigma_0)$ del gruppo di ologonomia $\Phi(\sigma_0)$.

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 8.11.2 $\mathfrak{m}(\sigma_0)$ è un'algebra di Lie e l'inclusione $\mathfrak{m}(\sigma_0) \subseteq \phi(\sigma_0)$ è conseguenza del Teorema 8.10.1. \square

DEFINIZIONE 8.11.4. L'algebra di Lie (8.39) si dice l'ologonomia infinitesima della connessione Γ in σ_0 ed il sottogruppo analitico di \mathbf{G} generato da $\mathfrak{m}(\sigma_0)$ il suo gruppo di ologonomia infinitesima in σ_0 .

Abbiamo

PROPOSIZIONE 8.11.5. Se sia ξ che la connessione principale Γ su ξ sono analitici reali, allora i suoi gruppi di ologonomia speciale ed infinitesima coincidono. \square

Connessioni principali invarianti

In questo capitolo studiamo connessioni principali invarianti rispetto all'azione di un gruppo di Lie, ed in particolare le connessioni principali invarianti che si possono definire su spazi omogenei.

9.1. Automorfismi di un fibrato principale

Sia $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale differenziabile. Gli *automorfismi* di ξ sono i diffeomorfismi \mathbf{G} -equivarianti di P in sé, cioè le $F \in \text{Diff}^\infty(P, P)$ con

$$F(\sigma \cdot \mathbf{a}) = F(\sigma) \cdot \mathbf{a}, \quad \forall \sigma \in P, \forall \mathbf{a} \in \mathbf{G}.$$

Sia \mathbf{K} un gruppo di Lie con algebra di Lie κ .

DEFINIZIONE 9.1.1. Un'azione (a sinistra) di \mathbf{K} su ξ è un'azione differenziabile

$$\mathbf{K} \times P \ni (k, \sigma) \longrightarrow k \cdot \sigma \in P$$

\mathbf{G} -equivariante. Poiché trasforma fibre in fibre, definisce un'azione

$$\mathbf{K} \times M \ni (k, p) \longrightarrow k \cdot p \in M$$

sulla base e valgono le

$$\pi(k \cdot \sigma) = k \cdot \pi(\sigma), \quad (k \cdot \sigma) \cdot \mathbf{a} = k \cdot (\sigma \cdot \mathbf{a}) =: k \cdot \sigma \cdot \mathbf{a}, \quad \forall \sigma \in P, \forall k \in \mathbf{K}, \forall \mathbf{a} \in \mathbf{G}.$$

Abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times P \times \mathbf{G} & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathbf{K} \times P & & P \times \mathbf{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{K} \times M & \longrightarrow & M. \end{array}$$

Un gruppo a un parametro $\{F_t\}$ di automorfismi di ξ definisce un gruppo a un parametro $\{f_t\}$ di diffeomorfismi di M . Il suo generatore infinitesimale $Z \in \mathfrak{X}(P)$ è \mathbf{G} -invariante e π -correlato al generatore infinitesimale X di $\{f_t\}$.

Se \mathbf{K} agisce su ξ , per ogni $X \in \kappa$ la moltiplicazione a sinistra per $\exp(\mathfrak{t} \cdot X)$ definisce gruppi a un parametro di diffeomorfismi di P e di M , i cui generatori infinitesimali $X^P \in \mathfrak{X}(P)$ ed $X^M \in \mathfrak{X}(M)$ sono tra loro π -correlati.

DEFINIZIONE 9.1.2. Chiamiamo X^P ed X^M i *campi associati* all'elemento X di κ .

Per ogni $\sigma \in P$ e $p \in M$ le $\{\mathbf{K} \ni k \rightarrow k \cdot \sigma \in P\}$ e $\{\mathbf{K} \ni k \rightarrow k \cdot p \in M\}$ sono applicazioni differenziabili rispetto alle quali, per $X \in \kappa$, il corrispondente campo X_* invariante a destra su \mathbf{K} è correlato ai campi associati X^P ed X^M . Poiché la $\kappa \ni X \rightarrow X_* \in \mathfrak{X}(\mathbf{K})$ è un anti-omomorfismo di algebre di Lie, vale allora il

LEMMA 9.1.3. *Le corrispondenze $X \rightarrow X^P$ ed $X \rightarrow X^M$ tra κ ed $\mathfrak{X}(P)$, $\mathfrak{X}(M)$ sono antiomorfismi di algebre di Lie.* \square

Fissato in M un punto p_0 e sia

$$\mathbf{H} = \{k \in \mathbf{K} \mid k \cdot p_0 = p_0\}.$$

il suo stabilizzatore in \mathbf{K} . I suoi elementi operano sulla fibra P_{p_0} e vale il

LEMMA 9.1.4. *Per ogni elemento σ della fibra P_{p_0} , l'applicazione*

$$(9.1) \quad \lambda_\sigma : \mathbf{H} \ni k \longrightarrow \sigma^{-1} \cdot k \cdot \sigma \in \mathbf{G}$$

è un omomorfismo di gruppi di Lie. \square

9.2. Automorfismi di una connessione principale

Fissiamo sul fibrato principale $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ una connessione principale Γ con forma di Cartan ω . Utilizziamo la notazione introdotta nel §9.1.

DEFINIZIONE 9.2.1. Chiamiamo *automorfismo di Γ* un automorfismo F di ξ che lasci invariante Γ , che soddisfi cioè

$$(9.2) \quad F^* \omega = \omega.$$

Gli automorfismi di Γ formano un gruppo, che indichiamo con $\mathcal{A}ut(\Gamma)$.

OSSERVAZIONE 9.2.2. In generale, $\mathcal{A}ut(\Gamma)$ può non essere un gruppo di Lie. Se ad esempio consideriamo il fibrato banale $\xi = (M \times \mathbf{G}, \pi, M, \mathbf{G})$ con la connessione canonica Γ la cui forma di Cartan $\mathbf{a}^{-1} d\mathbf{a}$ è il pullback della forma di Maurer Cartan su \mathbf{G} mediante la proiezione $\text{pr}_{\mathbf{G}}$, ogni trasformazione $F(p, x) = (f(p), \mathbf{a} \cdot x)$ con $f \in \text{Diff}^\infty(M, M)$ ed $\mathbf{a} \in \mathbf{G}$ definisce un automorfismo di Γ .

LEMMA 9.2.3. *Siano $\{F_t\}$ un gruppo a un parametro di automorfismi di Γ con generatore infinitesimale $X^P \in \mathfrak{X}(P)$ ed $\{f_t\}$ il corrispondente gruppo a un parametro di diffeomorfismi della base M , con generatore infinitesimale $X^M \in \mathfrak{X}(M)$. Allora*

$$(9.3) \quad F_t(\sigma) = \tilde{f}_t(\sigma) \cdot \exp(t \cdot \omega(X_\sigma^P)), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \sigma \in P,$$

ove $\tilde{f}_t(\sigma)$ è il sollevamento orizzontale di $t \rightarrow f_t(\pi(\sigma))$ di punto iniziale σ . In particolare,

$$X_\sigma^P = \tilde{X}_\sigma^M + [\omega(X^P)]_\sigma^*, \quad \forall \sigma \in P.$$

DIMOSTRAZIONE. È $F_t(\sigma) = \tilde{f}_t(\sigma) \cdot \mathbf{a}(t)$ per una $\mathbf{a}(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbf{G})$, con $\mathbf{a}(0) = \mathbf{e}_{\mathbf{G}}$. Derivando questa uguaglianza, troviamo che

$$X_{F_t(\sigma)}^P = \left(\frac{\tilde{f}_t(\sigma)}{dt} \right) \cdot \mathbf{a}(t) + F_t(\sigma) \cdot ([\mathbf{a}(t)]^{-1} \cdot \dot{\mathbf{a}}(t)).$$

Poiché $d\tilde{f}_t(\sigma)/dt$ è orizzontale, applicando la forma di Cartan ad ambo i membri di quest'uguaglianza, otteniamo

$$\omega(X_{F_t(\sigma)}^P) = [a(t)]^{-1} \dot{a}(t).$$

Poiché $F_{t*}X^P = X^P$, ed $F_t^*\omega = \omega$, otteniamo

$$\omega(X_{F_t(\sigma)}^P) = \omega(F_{t*}X_\sigma^P) = (F_t^*\omega)(X_\sigma^P) = \omega(X_\sigma^P),$$

e quindi $a(t) = \exp(t \cdot \omega(X_\sigma))$, da cui segue la (9.3). \square

Siano \mathbf{K} un gruppo di Lie che supponiamo agire su ξ mediante automorfismi e $\Gamma = (\xi, \omega)$ una connessione principale.

DEFINIZIONE 9.2.4. Diciamo che Γ è \mathbf{K} -invariante se gli elementi di \mathbf{K} definiscono automorfismi di Γ .

NOTAZIONE 9.2.5. Consideriamo l'applicazione

$$(9.4) \quad \Lambda : \mathcal{P} \times \kappa \rightarrow \mathfrak{g}, \text{ definita da } \Lambda_\sigma(X) = \omega(X_\sigma^P), \quad \forall \sigma \in \mathcal{P}, \quad \forall X \in \kappa.$$

Utilizziamo la notazione introdotta nel §9.1. In particolare, fissiamo un punto p_0 di M ed indichiamo con \mathbf{H} il suo stabilizzatore in \mathbf{K} e, per ogni σ in \mathcal{P}_{p_0} , siano λ_σ l'omorfismo di \mathbf{H} in \mathbf{G} definito da $\lambda_\sigma(h) = \sigma^{-1} \cdot h \cdot \sigma$ e $\lambda_{\sigma*} : \mathfrak{h} := \text{Lie}(\mathbf{H}) \rightarrow \mathfrak{g}$ il corrispondente omomorfismo di algebre di Lie.

PROPOSIZIONE 9.2.6. Se Γ è \mathbf{K} -invariante, allora, per ogni σ in \mathcal{P}_{p_0} , l'applicazione $\Lambda_\sigma : \kappa \rightarrow \mathfrak{g}$ definita dalla (9.4) soddisfa:

- (1) $\Lambda_\sigma(X) = \lambda_{\sigma*}(X), \quad \forall X \in \mathfrak{h},$
- (2) $\Lambda_\sigma(\text{Ad}_h(X)) = \text{Ad}_{[\lambda_\sigma(h)]}(\Lambda_\sigma(X)), \quad \forall h \in \mathbf{H}, \quad \forall X \in \kappa.$

DIMOSTRAZIONE. Se $X \in \mathfrak{h}$, allora

$$X_\sigma^P = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} [\exp(t \cdot X) \cdot \sigma] = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \sigma \cdot \lambda_\sigma(\exp(t \cdot X)) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \sigma \cdot \exp(t \cdot \lambda_{\sigma*}(X)).$$

Quindi $X_\sigma^P = [\lambda_{\sigma*}(X)]_\sigma^*$, e da questa segue la (1).

Fissati $X \in \kappa$, $h \in \mathbf{H}$ e posto $Y = \text{Ad}_h(X)$, abbiamo

$$\exp(t \cdot Y) \cdot \sigma = h \cdot \exp(t \cdot X) \cdot h^{-1} \cdot \sigma = h \cdot \exp(t \cdot X) \cdot \sigma \cdot \lambda_\sigma(h^{-1}) = h \cdot R_{\lambda_\sigma(h^{-1})}(\exp(t \cdot X) \sigma),$$

da cui otteniamo che $Y_\sigma^P = h_* dR_{\lambda_\sigma(h^{-1})}(X_\sigma^P)$. Per ipotesi ω è \mathbf{K} -invariante. Perciò, applicando ω ai due membri di questa uguaglianza, abbiamo

$$\begin{aligned} \Lambda_\sigma(Y) = \omega(Y_\sigma^P) &= \omega(h_* dR_{\lambda_\sigma(h^{-1})}(X_\sigma^P)) = \omega(dR_{\lambda_\sigma(h^{-1})}(X_\sigma^P)) = \text{Ad}_{[\lambda_\sigma(h)]}(\omega(X_\sigma^P)) \\ &= \text{Ad}_{[\lambda_\sigma(h)]}(\Lambda_\sigma(X)), \end{aligned}$$

cioè la (2). La dimostrazione è completa. \square

OSSERVAZIONE 9.2.7. Per il Lemma 9.2.3, vale la decomposizione

$$X^P = \tilde{X}^M + [\Lambda(X)]^*, \quad \forall X \in \kappa.$$

OSSERVAZIONE 9.2.8. La Λ_σ estende l'omomorfismo $\lambda_{\sigma*}$ di \mathfrak{h} in \mathfrak{g} ad un'applicazione \mathbb{R} -lineare di κ in \mathfrak{g} , che non è, in generale, un omomorfismo di algebre di Lie, come ci mostreranno la Proposizione 9.2.9 ed il successivo Corollario 9.3.2.

PROPOSIZIONE 9.2.9. *La forma di curvatura Ω di una connessione \mathbf{K} -invariante su ξ soddisfa*

$$(9.5) \quad \Omega_\sigma(X^P, Y^P) = [\Lambda_\sigma(X), \Lambda_\sigma(Y)] - \Lambda_\sigma([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \kappa,$$

e quindi, se $\pi(\sigma) = \rho$, abbiamo

$$(9.6) \quad R_\rho(X^M, Y^M) = \sigma \cdot ([\Lambda_\sigma(X), \Lambda_\sigma(Y)] - \Lambda_\sigma([X, Y])) \quad \forall X, Y \in \kappa.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $X, Y \in \kappa$. Le equazioni di struttura ci danno

$$\Omega_\sigma(X^P, Y^P) = X_\sigma^P \omega(Y^P) - Y_\sigma^P \omega(X^P) - \omega_\sigma([X^P, Y^P]) + [\omega(X^P), \omega(Y^P)]_\sigma.$$

Le derivata di Lie di ω rispetto ad X^P, Y^P sono nulle, perché ω è \mathbf{K} -invariante. Quindi

$$X_\sigma^P \omega(Y^P) = \omega_\sigma([X^P, Y^P]), \quad Y_\sigma^P \omega(X^P) = \omega_\sigma([Y^P, X^P]).$$

Inoltre, poiché $[X^P, Y^P] = -[Y^P, X^P]$,

$$\omega_\sigma([X^P, Y^P]) = -\omega_\sigma([Y^P, X^P]) = -\Lambda_\sigma([X, Y]).$$

Da queste osservazioni otteniamo la tesi. \square

9.3. Connessioni invarianti su uno spazio omogeneo

Se \mathbf{K} opera transitivamente sulla base M , allora i vettori X_ρ^M , al variare di X in κ , generano $T_\rho M$ in ogni punto ρ di M . Quindi $H_\sigma = \{\tilde{X}_\sigma^M \mid X \in \kappa\}$ e perciò

$$(9.7) \quad T_\sigma P = V_\sigma P + \{\tilde{X}_\sigma^M \mid X \in \kappa\} = V_\sigma P + \{X_\sigma^P \mid X \in \kappa\} \quad \text{per ogni } \sigma \in P.$$

Fissato un elemento $\sigma \in P$ ed un'applicazione $\Lambda_\sigma : \kappa \rightarrow \mathfrak{g}$, vi è allora al più una connessione principale \mathbf{K} -invariante Γ su ξ per cui sia $\Lambda_\sigma(X) = \omega(X_\sigma^P)$ per ogni X in κ . Le connessioni invarianti sugli spazi omogenei sono caratterizzate dal seguente teorema di Wang ([63]).

TEOREMA 9.3.1 (Wang). *Siano M uno spazio omogeneo del gruppo di Lie \mathbf{K} , $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G}_0)$ un fibrato principale su M , \mathbf{H} lo stabilizzatore in \mathbf{K} di un punto ρ_0 di M e σ_0 un elemento della fibra P_{ρ_0} . Allora la*

$$(9.8) \quad \Lambda_{\sigma_0}(X) = \omega(X_{\sigma_0}^P), \quad \forall X \in \kappa,$$

con ω forma di Cartan di Γ , stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le connessioni principali \mathbf{K} -invarianti Γ su ξ e le applicazioni lineari $\Lambda_{\sigma_0} : \kappa \rightarrow \mathfrak{g}$ tali che

$$(9.9) \quad \begin{cases} \Lambda_{\sigma_0}(X) = \lambda_{\sigma_0^*}(X), & \forall X \in \mathfrak{h} := \text{Lie}(\mathbf{H}), \\ \Lambda_{\sigma_0}(\text{Ad}_h(X)) = \text{Ad}_{\lambda_{\sigma_0}(h)}(\Lambda_{\sigma_0}(X)), & \forall h \in \mathbf{H}, \forall X \in \kappa. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Per la Prop.9.2.6, data Γ , una Λ_{σ_0} definita da (9.4) soddisfa le (9.9). Basterà quindi dimostrare che ad una Λ_{σ_0} che soddisfi le (9.9) possiamo far corrispondere una connessione principale \mathbf{K} -invariante Γ la cui forma di Cartan soddisfi (9.8). Poiché l'azione $\mathbf{K} \times P \times \mathbf{G} \ni (k, \sigma, a) \rightarrow k \cdot \sigma \cdot a \in P$ è transitiva, una Γ invariante per \mathbf{K} è univocamente determinata dal dato di H_σ in un qualsiasi σ di P . Poniamo

$$H_{\sigma_0} P = \{X_{\sigma_0}^P - \Lambda_{\sigma_0}(X)_{\sigma_0}^* \mid X \in \kappa\}.$$

Per provare l'esistenza di Γ basta verificare che

$$k_1 \cdot (H_{\sigma_0} P) \cdot a_1 = k_2 \cdot (H_{\sigma_0} P) \cdot a_2 \quad \text{se} \quad k_1 \cdot \sigma_0 \cdot a_1 = k_2 \cdot \sigma_0 \cdot a_2.$$

Posto $a = a_1 \cdot a_2^{-1}$ ed $h = k_2^{-1} k_1$, ciò è equivalente a dimostrare che

$$h \cdot (H_{\sigma_0} P) \cdot a = H_{\sigma_0} P \quad \text{se} \quad k \cdot \sigma_0 \cdot a = \sigma_0.$$

Da $\pi(h \cdot \sigma_0 \cdot a) = h \cdot \pi(\sigma_0) = h \cdot p_0 = p_0$ segue che $h \in \mathbf{H}$ e $\lambda_{\sigma_0}(h) = a^{-1}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} h \cdot X_{\sigma_0}^P \cdot a &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} h \cdot \exp(t \cdot X) \cdot a = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \exp(t \cdot \text{Ad}_h(X)) \cdot (h \cdot \sigma_0 \cdot a) \\ &= [\text{Ad}_h(X)]_{\sigma_0}^P. \end{aligned}$$

Per ogni $A \in \mathfrak{g}$ il campo fondamentale A^* verifica la

$$\begin{aligned} h \cdot A_{\sigma_0}^* \cdot a &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} [h \cdot \sigma_0 \cdot \exp(t \cdot A)] \cdot a = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} [\sigma_0 \cdot a^{-1} \cdot \exp(t \cdot A)] \cdot a \\ &= [\text{Ad}_{a^{-1}}(A)]_{\sigma_0}^*. \end{aligned}$$

Per la seconda delle (9.9), se $A = \Lambda_{\sigma_0}(X)$, è

$$\text{Ad}_{a^{-1}}(A) = \text{Ad}_{\lambda_{\sigma_0}(h)}(\Lambda_{\sigma_0}(X)) = \Lambda_{\sigma_0}(\text{Ad}_h(X)).$$

Otteniamo perciò

$$h \cdot (X_{\sigma_0}^P - [\Lambda_{\sigma_0}(X)]_{\sigma_0}^*) \cdot a = [\text{Ad}_h(X)]_{\sigma_0}^P - [\Lambda_{\sigma_0}(\text{Ad}_h(X))]_{\sigma_0}^* \in H_{\sigma_0} P.$$

Quindi $h \cdot (H_{\sigma_0} P) \cdot a \subseteq H_{\sigma_0} P$ e, poiché questi due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione, si ha l'uguaglianza. La dimostrazione è completa. \square

Per la Prop.9.2.9, abbiamo:

COROLLARIO 9.3.2. *La connessione \mathbf{K} -invariante definita da Λ_{σ_0} è piatta se e soltanto se $\Lambda_{\sigma_0} : \kappa \rightarrow \mathfrak{g}$ è un omomorfismo di algebre di Lie.* \square

9.4. Connessioni invarianti su uno spazio riduttivo

Ricordiamo che uno spazio \mathbf{K} -omogeneo M è *riduttivo* se l'algebra di Lie \mathfrak{h} dello stabilizzatore \mathbf{H} di un punto p_0 di M ammette un complemento $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante \mathfrak{m} in κ .

TEOREMA 9.4.1. *Sia $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G}_0)$ un fibrato principale, la cui base M sia uno spazio omogeneo riduttivo del gruppo di Lie \mathbf{K} . Siano \mathbf{H} lo stabilizzatore di un punto p_0 di M ed \mathfrak{m} un complemento lineare $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante di $\mathfrak{h} = \text{Lie}(\mathbf{H})$ in κ . Fissato un elemento σ_0 della fibra P_{p_0} , vi è allora una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle connessioni \mathbf{K} -invarianti su ξ e quello delle applicazioni lineari*

$$\lambda_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

tali che

$$\lambda_{\mathfrak{m}}(\text{Ad}_h(X)) = \text{Ad}_{\lambda_{\sigma_0}(h)}(\lambda_{\mathfrak{m}}(X)), \quad \forall X \in \mathfrak{m}, \quad \forall h \in \mathbf{H}.$$

DIMOSTRAZIONE. Ci riduciamo al Teor.9.3.1 perché, nel caso riduttivo, un'applicazione \mathbb{R} -linare $\Lambda : \kappa \rightarrow \mathfrak{g}$ che soddisfi (9.9) è completamente determinata dalla sua restrizione ad \mathfrak{m} . \square

OSSERVAZIONE 9.4.2. La forma di curvatura della connessione associata a $\lambda_{\mathfrak{m}}$ è

$$(9.10) \quad \Omega_{\sigma_0}(X^P, Y^P) = [\lambda_{\mathfrak{m}}(X), \lambda_{\mathfrak{m}}(Y)] - \lambda_{\mathfrak{m}}([X, Y]_{\mathfrak{m}}) - \lambda_{\sigma_0^*}([X, Y]_{\mathfrak{h}}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

DEFINIZIONE 9.4.3. La connessione su ξ corrispondente alla scelta $\lambda_m = 0$ si dice la *connessione canonica* su ξ associata allo spazio omogeneo riduttivo $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ ed alla decomposizione $\kappa = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. La sua forma di curvatura è

$$(9.11) \quad \Omega(X^P, Y^P) = -\lambda_{\sigma_0*}([X, Y]_{\mathfrak{h}}), \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{m}.$$

9.5. Olonomia di una connessione invariante

Fissiamo una connessione \mathbf{K} -invariante su ξ , con forma di Cartan ω e sia Λ l'applicazione lineare definita dalla (9.4). Definiamo per ricorrenza

$$(9.12) \quad \begin{cases} \mathfrak{n}_0 = \langle \{[\Lambda(X), \Lambda(Y)] - \Lambda([X, Y]) \mid X, Y \in \kappa\} \rangle, \\ \mathfrak{n}_{p+1} = \mathfrak{n}_p + [\Lambda(\kappa), \mathfrak{n}_p], \quad \text{per } p \geq 0, \\ \mathfrak{n} = \bigcup_{p \geq 0} \mathfrak{n}_p. \end{cases}$$

TEOREMA 9.5.1. *Se l'azione di \mathbf{K} su M è transitiva, allora \mathfrak{n} è l'algebra di Lie dell'olonomia $\Phi(\sigma_0)$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \mathcal{G} = \Gamma_{\xi}(P, \mathfrak{g})$ ed $X \in \kappa$, abbiamo (vedi il Lemma 9.2.3)

$$(9.13) \quad X^P f = \tilde{X}^M f - [\omega(X^P), f].$$

Vale poi

$$(9.14) \quad [X^P, \tilde{Y}] = \tilde{Z}, \quad \text{con } Z = [X^M, Y], \quad \forall X \in \kappa, \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Infatti $[X^P, \tilde{Y}]$ è un campo di vettori orizzontale, perché $\mathcal{H}(P)$ è \mathbf{K} -invariante, ed i campi X^P ed \tilde{Y} sono π -correlati ad X^M, Y , rispettivamente. Quindi $[X^P, \tilde{Y}]$ è il campo di vettori orizzontale π -correlato a $Z = [X^M, Y]$.

Consideriamo gli spazi \mathcal{K}_p definiti dalle (8.38). Dico che

$$(9.15) \quad X^P \mathcal{K}_p \subseteq \mathcal{K}_p, \quad \forall X \in \kappa, \forall p \geq 0.$$

Ragioniamo per ricorrenza su p . Poiché Ω è \mathbf{K} -invariante, la sua derivata di Lie rispetto ad X^P , per $X \in \kappa$, è nulla e quindi, se $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$, la (9.14) ci dà

$$X^P \Omega(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) = \Omega(\tilde{Z}_1, \tilde{Y}_2) + \Omega(\tilde{Y}_1, \tilde{Z}_2), \quad \text{con } Z_1 = [X^M, Y_1], Z_2 = [X^M, Y_2].$$

Quindi $X^P \mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}_0$. Supponiamo ora che, per un $p \geq 0$, sia $X^P \mathcal{K}_p \subseteq \mathcal{K}_p$. Allora, per ogni $f \in \mathcal{K}_p$ ed $Y \in \mathfrak{X}(M)$, posto $Z = [X^M, Y]$, abbiamo

$$X^P \tilde{Y} f = \tilde{Z} f + \tilde{Y} X^P f \in \mathcal{K}_{p+1}.$$

Ciò dimostra che $X^P \mathcal{K}_{p+1} \subseteq \mathcal{K}_{p+1}$ e perciò la (9.15) vale per ogni intero $p \geq 0$. Poiché per ipotesi \mathbf{K} opera transitivamente su M , i campi \tilde{X}^M , al variare di X in κ , generano $\mathfrak{X}(M)$ come $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo. Utilizzando la (9.13), otteniamo allora

$$(9.16) \quad \tilde{X}^M \mathcal{K}_p \subseteq \mathcal{K}_p + [\omega(X^P), \mathcal{K}_p], \quad \mathcal{K}_{p+1} \subseteq \mathcal{K}_p + \langle [\omega(X^P), \mathcal{K}_p] \mid X \in \kappa \rangle.$$

Con le $\mathfrak{m}_p(\sigma_0)$ definite da (8.39), poiché $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{m}_0(\sigma_0)$, da queste inclusioni ricaviamo

$$(9.17) \quad \mathfrak{m}_p(\sigma_0) = \mathfrak{n}_p, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

La tesi è allora conseguenza della Proposizione 8.11.5. \square

Varietà affini e riemanniane

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Nel §6.5 abbiamo definito il fibrato $\mathbb{L}(M) = (\mathbb{L}(M), \pi, M, \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}))$ dei suoi sistemi di riferimento e nei §6.7,6.8 le \mathbf{G} -strutture $\mathbb{L}_{\mathbf{G}} = (\mathbb{L}_{\mathbf{G}}(M), \pi, M, \mathbf{G})$ che si possono ottenere da $\mathbb{L}(M)$ per riduzione del gruppo strutturale. Una connessione principale su $\mathbb{L}(M)$ ci consente di definire su M una nozione di *trasporto parallelo*¹ di tensori e di sviluppare quindi su M l'analogo *curvo* della *geometria affine*, o delle geometrie \mathbf{G} -affini, degli spazi vettoriali reali.

10.1. Connessioni lineari e varietà affini

DEFINIZIONE 10.1.1. Si dice *affine*, o *lineare su M* una connessione principale sul fibrato $\mathbb{L}(M)$ dei suoi sistemi di riferimento ed *affine* una varietà differenziabile su cui sia stata fissata una connessione lineare.

Se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ chiamiamo *\mathbf{G} -lineare* su M una connessione principale su una sua \mathbf{G} -struttura $\mathbb{L}_{\mathbf{G}}(M)$ e *\mathbf{G} -affine* una varietà differenziabile M su cui sia stata fissata una connessione \mathbf{G} -lineare.

ESEMPIO 10.1.2. Il fibrato $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ dei sistemi di riferimento su \mathbb{R} ha spazio totale $\mathbb{L}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. La forma di Cartan di una connessione lineare su \mathbb{R} ha l'espressione $\omega(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \mathbf{s}^{-1}d\mathbf{s} + \phi(\mathbf{t})d\mathbf{t}$, con $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, e la distribuzione orizzontale è generata dal campo di vettori $X = \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} - \mathbf{s} \cdot \phi(\mathbf{t}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}}$. Se $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ è una primitiva di ϕ , allora l'applicazione $f : \mathbb{L}(\mathbb{R}) \ni (\mathbf{t}, \mathbf{s}) \rightarrow (\mathbf{t}, \mathbf{s} \exp(\Phi(\mathbf{t}))) \in \mathbb{L}(\mathbb{R})$ è un'equivalenza di fibrati principali con $\omega = f^*(\mathbf{s}^{-1}d\mathbf{s})$. Quindi, a meno di *equivalenza*, l'unica connessione lineare su \mathbb{R} è la connessione banale.

Ogni connessione \mathbf{G} -lineare definisce una connessione lineare e viceversa una connessione lineare si restringe ad una \mathbf{G} -struttura se e soltanto se $\mathbb{L}_{\mathbf{G}}(M)$ contiene gli spazi dell'olonomia lineare passanti per i punti σ di $\mathbb{L}_{\mathbf{G}}(M)$ (vedi §7.6).

Siano $\xi = (\mathbf{P}, \pi, M, \mathbf{G})$ una \mathbf{G} -struttura su M e \mathfrak{g} l'algebra di Lie di \mathbf{G} . La *forma canonica* $\theta \in \Omega_{\rho,0}^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}^m)$ è definita da

$$\theta(X_\sigma) = \sigma^{-1}(d\pi(X_\sigma)), \quad \forall \sigma \in \mathbf{P}, \quad \forall X_\sigma \in T_\sigma \mathbf{P}.$$

Fissiamo una connessione \mathbf{G} -lineare Γ su ξ , con forma di Cartan ω .

¹Le connessioni lineari furono introdotte da T. Levi-Civita, in [50] nel contesto della geometria riemanniana e generalizzate da H.Weyl in [64].

PROPOSIZIONE 10.1.3 (campi orizzontali standard). *Per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ vi è un unico campo di vettori $v^* \in \mathfrak{X}(P)$ tale che*

$$(10.1) \quad \theta(v^*) \equiv v, \quad \omega(v^*) \equiv 0, \quad \text{su } P.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\sigma \in P$, la $d\pi_\sigma$ si restringe ad un isomorfismo lineare hor_σ tra lo spazio $H_\sigma P$ dei vettori orizzontali in σ e lo spazio tangente $T_{\pi(\sigma)}M$ ad M in $\pi(\sigma)$. Ricordiamo che ogni σ in P è un *sistema di riferimento*, cioè un isomorfismo lineare $\sigma: \mathbb{R}^m \rightarrow T_{\pi(\sigma)}M$. I valori del campo v^* nei punti di P sono allora determinati da

$$v_\sigma^* = \text{hor}_\sigma^{-1}(\sigma(v)), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \sigma \in P. \quad \square$$

DEFINIZIONE 10.1.4. Il campo v^* che verifica le (10.1) si dice *orizzontale standard*, associato al vettore v di \mathbb{R}^m .

Mentre i sollevamenti orizzontali di campi di vettori su M sono invarianti rispetto all'azione del gruppo strutturale, per un campo orizzontale standard abbiamo

$$\theta(v^* \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{R}_\mathbf{a}^* \theta)(v^*) = \mathbf{a}^{-1} \circ \theta(v^*) = \mathbf{a}^{-1}(v).$$

Riassumiamo le proprietà fondamentali dei campi orizzontali standard nella seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 10.1.5. *I vettori orizzontali standard formano un sottospazio vettoriale reale $\{v^* \mid v \in \mathbb{R}^m\}$ di $\mathfrak{H}(P)$ per cui valgono le:*

- (a) $H_\sigma P = \{v_\sigma^* \mid v \in \mathbb{R}^m\}, \quad \forall \sigma \in P,$
- (b) $v^* \cdot \mathbf{a} = d\mathbf{R}_\mathbf{a}(v^*) = (\mathbf{a}^{-1}(v))^*, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{G},$
- (c) $[X^\star, v^*] = (Xv)^* \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo solo verificare la (c). Il commutatore $[X^\star, v^*]$ è la derivata di Lie di v^* rispetto al generatore infinitesimale del gruppo a un parametro delle traslazioni a destra per $\exp(t \cdot X)$. Poiché \mathbf{G} trasforma campi orizzontali in campi orizzontali, $[X^\star, v^*]$ è orizzontale ed abbiamo

$$\theta([X^\star, v^*]) = X^\star \theta(v^*) - (L_{X^\star} \theta)(v^*) = -(L_{X^\star} \theta)(v^*) = X \cdot \theta(v^*) = Xv.$$

Infatti $L_{X^\star} \theta$ è la derivata, per $\mathbf{t} = 0$, di $\mathbf{R}_{\exp(\mathbf{t} \cdot X)}^* \theta = \exp(-\mathbf{t} \cdot X) \circ \theta$. Questo ci dice che $[X^\star, v^*]$ è il campo orizzontale standard corrispondente al vettore Xv . \square

10.1.1. Automorfismi affini. Un diffeomorfismo $\phi: M \rightarrow M$ definisce il diffeomorfismo $\hat{\phi}: L(M) \rightarrow L(M)$ che associa a $\sigma: \mathbb{R}^m \rightarrow TM$ il riferimento $\hat{\phi}(\sigma) = d\phi \circ \sigma$.

Supponiamo che M sia affine, con forma di Cartan $\omega \in \Omega_\rho^1(L(M), \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$.

DEFINIZIONE 10.1.6. Chiamiamo *automorfismo affine* di M un diffeomorfismo $\phi: M \rightarrow M$ per cui $\hat{\phi}^*(\omega) = \omega$.

ESEMPIO 10.1.7. Identifichiamo $\overline{\text{TR}^m}$ al prodotto cartesiano $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Allora $L(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m \times \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ e la connessione lineare canonica su \mathbb{R}^m è la forma di Maurer-Cartan $\omega = \mathbf{a}^{-1}d\mathbf{a}$ sul secondo fattore. Se ϕ è un diffeomorfismo di \mathbb{R}^m , allora $\hat{\phi}(x, \mathbf{a}) = (\phi(x), d\phi \circ \mathbf{a})$. Scriviamo $\mathbf{a} = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq m}$ e $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^m)$. Allora $d_x \phi \circ \mathbf{a} = (\frac{\partial \phi^i}{\partial x^r} a_j^h)$ (indici uguali in alto e in basso si intendono sommati). Poiché $d_{x, \mathbf{a}}(d_x \phi \circ \mathbf{a}) = (\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x^k \partial x^h} a_j^h dx^k + \frac{\partial \phi^i}{\partial x^h} da_j^h)$, otteniamo

$$\hat{\phi}^* \omega = (d\phi \circ \mathbf{a})^{-1} \left(\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x^k \partial x^h} a_j^h dx^k \right) + \mathbf{a}^{-1} d\mathbf{a}$$

e quindi *condizione necessaria e sufficiente affinché ϕ sia un automorfismo affine è che $(\partial^2 \phi^i / \partial x^k \partial x^h) = 0$ per ogni $1 \leq i, h, k \leq m$, cioè che ϕ sia lineare affine, cioè della forma $\phi(x) = \mathbf{a}(x) + x_0$, con $\mathbf{a} \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ ed $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Quindi, per lo spazio affine \mathbb{R}^m , le classiche trasformazioni affini sono le trasformazioni affini, nel senso della teoria delle connessioni, per la struttura affine banale.*

10.2. Forme di torsione e di curvatura

Torsione e curvatura misurano quanto la struttura affine definita da una connessione lineare differisca dal modello *piatto* dello spazio affine \mathbb{R}^m dell'Es.10.1.7.

Fissiamo su una \mathbf{G} -struttura $\xi = (\mathbf{P}, \pi, M, \mathbf{G})$ di M una connessione \mathbf{G} -lineare Γ , con forma di Cartan ω . Ricordiamo che \mathbf{G} è un sottogruppo di Lie di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ e la sua algebra di Lie \mathfrak{g} è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$.

DEFINIZIONE 10.2.1. Chiamiamo

forma di torsione il differenziale esterno covariante della forma canonica

$$(10.2) \quad \Theta = D\theta = d\theta \circ \text{pr}_H \in \Omega_{\rho, 0}^2(\mathbf{P}, \mathbb{R}^m),$$

forma di curvatura il differenziale esterno covariante della forma di Cartan

$$(10.3) \quad \Omega = D\omega = d\omega \circ \text{pr}_H \in \Omega_{\rho, 0}^2(\mathbf{P}, \mathfrak{g}).$$

TEOREMA 10.2.2 (equazioni di struttura). *Le forme di curvatura e di torsione soddisfano le EQUAZIONI DI STRUTTURA*

$$(10.4) \quad \Theta = D\theta = d\theta + \omega \wedge \theta,$$

$$(10.5) \quad \Omega = D\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega].$$

DIMOSTRAZIONE. La (10.4) è conseguenza del Lemma 8.1.4, perché θ è tensoriale di tipo (t, \mathbb{R}^m) . La (10.5) è un caso particolare del Teor. 8.3.2. \square

TEOREMA 10.2.3 (Identità differenziali di Bianchi). *Le forme di torsione e di curvatura soddisfano le identità :*

$$(I) \quad D\Theta = \Omega \wedge \theta$$

$$(II) \quad D\Omega = 0$$

DIMOSTRAZIONE. La (II) è un caso particolare della (8.18) del Teor.8.3.4. Poiché Θ è tensoriale di tipo (t, \mathbb{R}^m) , la (I) è un caso particolare della seguente Prop.10.2.4. \square

PROPOSIZIONE 10.2.4. *Se $\phi \in \Omega_{\rho,0}^q(P, \mathbb{R}^m)$, allora*

$$(10.6) \quad D^2\phi = \Omega \wedge \phi.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} D^2\phi &= d^\nabla(d\phi + \omega \wedge \phi) = d(d\phi + \omega \wedge \phi) + \omega \wedge (d\phi + \omega \wedge \phi) \\ &= (d\omega) \wedge \phi - \omega \wedge d\phi + \omega \wedge d\phi + \omega \wedge \omega \wedge \phi = (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge \phi = \Omega \wedge \phi \end{aligned}$$

per le equazioni di struttura, in quanto $\omega \wedge \omega = \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]$. \square

La (10.6) reinterpreta la curvatura come l'ostruzione al fatto che il differenziale esterno covariante sulle forme vettoriali tensoriali definisca un complesso.

Le forme di torsione e di curvatura hanno espressioni particolarmente semplici rispetto ai campi orizzontali standard.

LEMMA 10.2.5. *Per ogni $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ abbiamo*

$$(10.7) \quad \Theta(v_1^*, v_2^*) = -\theta([v_1^*, v_2^*]),$$

$$(10.8) \quad \Omega(v_1^*, v_2^*) = -\omega([v_1^*, v_2^*]).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$, otteniamo:

$$\Theta(v_1^*, v_2^*) = d\theta(v_1^*, v_2^*) = v_1^* v_2 - v_2^* v_1 - \theta([v_1^*, v_2^*]) = -\theta([v_1^*, v_2^*]),$$

$$\Omega(v_1^*, v_2^*) = d\omega(v_1^*, v_2^*) = v_1^* \omega(v_2^*) - v_2^* \omega(v_1^*) - \omega([v_1^*, v_2^*]) = -\omega([v_1^*, v_2^*]). \quad \square$$

10.3. Derivazione covariante, tensori di torsione e di curvatura

I tensori dei diversi gradi di covarianza e controvarianza descrivono rappresentazioni lineari di dimensione finita del gruppo lineare. In particolare su una varietà affine si possono calcolare le derivate covarianti dei campi tensoriali. Per le proprietà generali della differenziazione covariante ed il Teor.8.9.3 abbiamo² (vedi [47]):

TEOREMA 10.3.1 (KOSZUL). *Ad una connessione lineare su M è associata una derivazione covariante*

$$(10.9) \quad \nabla : \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow \nabla_X \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M)),$$

che gode delle proprietà:

- (i) $\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y, \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$
- (ii) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$

Viceversa, data un'applicazione ∇ che verifichi (i) e (ii), vi è una ed una sola connessione lineare su M di cui questa sia la derivazione covariante. \square

²Jean-Louis Koszul (1921-2018) è stato un matematico francese, membro del gruppo Bourbaki.

Utilizzando la (8.8) possiamo calcolare la derivata covariante di campi di vettori utilizzando i sollevamenti orizzontali. È infatti

$$(10.10) \quad \theta(\widetilde{\nabla_X Y}) = \tilde{X}(\theta(\tilde{Y})), \quad \text{cioè } \nabla_{X_p} Y = \sigma(\tilde{X}_\sigma \theta(\tilde{Y})), \quad \text{se } \pi(\sigma) = p, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Essendo tensoriali, Θ ed Ω sono sollevamenti di forme a valori in fibrati vettoriali definite su M .

DEFINIZIONE 10.3.2. Sullo spazio affine M definiamo:

il tensore di torsione $T \in \Omega_{\xi}^2(M, TM)$, caratterizzato da $\tilde{T} = \Theta$;

il tensore di curvatura $R \in \Omega_{\xi}^2(M, T^{1,1}M)$, caratterizzato da $\tilde{R} = \Omega$.

Abbiamo cioè³

$$T(X_{\pi(\sigma)}, Y_{\pi(\sigma)}) = \sigma \circ \Theta(\tilde{X}_\sigma, \tilde{Y}_\sigma), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall \sigma \in P,$$

$$R(X_{\pi(\sigma)}, Y_{\pi(\sigma)}) = \sigma \circ \Omega(\tilde{X}_\sigma, \tilde{Y}_\sigma) \circ \sigma^{-1}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall \sigma \in P.$$

TEOREMA 10.3.3. *Torsione e curvatura di una connessione lineare Γ su M si esprimono, per mezzo della derivazione covariante, nella forma:*

$$(10.11) \quad T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

$$(10.12) \quad R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. La (10.12) segue dal Cor.8.7.4. Dimostriamo la (10.11). Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, otteniamo, per le equazioni di struttura,

$$\Theta(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (d\theta + \omega \wedge \theta)(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d\theta(\tilde{X}, \tilde{Y}),$$

perché $\omega \wedge \theta$ si annulla su una coppia di campi di vettori orizzontali,

$$= \tilde{X}\theta(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\theta(\tilde{X}) - \theta([\tilde{X}, \tilde{Y}])$$

$$= \tilde{X}\theta(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\theta(\tilde{X}) - \theta([\tilde{X}, \tilde{Y}])$$

perché $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ ed $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ differiscono per un campo di vettori verticale,

$$= \theta(\widetilde{\nabla_X Y} - \widetilde{\nabla_Y X} - [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]),$$

e la tesi segue dalla (10.10). □

Descriviamo ora la derivazione covariante sull'algebra $\underline{T}^*(M) = \bigoplus_{p,q=0}^{\infty} \underline{T}^{p,q}(M)$ dei campi tensoriali su M .

DEFINIZIONE 10.3.4 (contrazione). Siano i, j due interi positivi. La *contrazione* C_i^j è l'applicazione $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare $C_i^j : \underline{T}^{p,q} \rightarrow \underline{T}^{p-1,q-1}$ che è nulla se $i > p$ oppure $j > q$, e, altrimenti, è data, sui tensori di rango uno, da

$$C_i^j(X_1 \otimes \cdots \otimes X_p \otimes \zeta^1 \otimes \cdots \otimes \zeta^q) = \zeta^j(X_i) X_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{X_i} \otimes \cdots \otimes X_p \otimes \zeta^1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\zeta^j} \otimes \cdots \otimes \zeta^q.$$

³Poiché σ è un isomorfismo lineare di \mathbb{R}^m su $T_{\pi(\sigma)}M$ e $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$, per una forma $\phi \in \Omega_{\mathfrak{g}}^q(P, \mathfrak{g})$ è $\sigma \cdot \phi = \sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}$.

TEOREMA 10.3.5. *La derivazione covariante è una derivazione dell'algebra dei campi tensoriali che preserva i gradi di covarianza e controvarianza e commuta con le contrazioni.* \square

Recapitoliamo le proprietà della derivazione covariante dei campi tensoriali. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $t \in \underline{T}^*(M)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M) = \underline{T}^{0,0}(M)$, $i, j, p, q \in \mathbb{N}$:

$$(10.13) \quad \nabla_X : \underline{T}^{p,q}(M) \longrightarrow \underline{T}^{p,q}(M) \text{ è } \mathbb{R}\text{-lineare,}$$

$$(10.14) \quad C_j^i(\nabla_X t) = \nabla_X C_j^i t,$$

$$(10.15) \quad \nabla_X f = Xf,$$

$$(10.16) \quad \nabla_{X+Y} t = \nabla_X t + \nabla_Y t,$$

$$(10.17) \quad \nabla_{fX} t = f \nabla_X t.$$

Ad esempio, se $\zeta \in \mathfrak{X}^*(M) = \underline{T}^{0,1}(M)$, la derivata covariante $\nabla_X \zeta$ è caratterizzata da

$$(\nabla_X \zeta)(Y) = X(\zeta(Y)) - \zeta(\nabla_X Y), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

DEFINIZIONE 10.3.6. Definiamo *differenziale covariante* di un tensore $t \in \underline{T}^{p,q}(M)$, ed indichiamo con ∇t , il tensore di $\underline{T}^{p,q+1}$ caratterizzato da

$$(10.18) \quad X \lrcorner \nabla t = \nabla_X t, \quad \text{per ogni } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Chiamiamo *parallelo* un tensore $t \in \underline{T}^{p,q}(M)$ per cui $\nabla t = 0$ su M .

Possiamo applicare la derivazione covariante alle forme differenziali associate ad una rappresentazione tensoriale di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$. Se $\phi \in \Omega^r(M, T^{p,q}M)$, indichiamo con $\tilde{\phi}$ la corrispondente forma $\sigma^{-1}\pi^*\phi \in \Omega_{\rho,0}^r(P, T^{p,q}\mathbb{R}^m)$. Se $X, X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma \in P$, allora

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(\nabla_X \phi)(X_1, \dots, X_r) &= \sigma^{-1}(\nabla_X[\phi(X_1, \dots, X_r)] - \sum \phi(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_r)) \\ &= \tilde{X}[\tilde{\phi}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_r)] - \sum \tilde{\phi}(\tilde{X}_1, \dots, \widetilde{\nabla_X X_i}, \dots, \tilde{X}_r) \\ &= \tilde{X}[\tilde{\phi}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_r)] - \sum \tilde{\phi}(\tilde{X}_1, \dots, \bar{\theta}^{-1}(\tilde{X}\theta(\tilde{X}_i)), \dots, \tilde{X}_r), \end{aligned}$$

perché $\widetilde{\nabla_X X_i} = \bar{\theta}^{-1}(\tilde{X}\theta(\tilde{X}_i))$, ove abbiamo indicato con $\bar{\theta}$ l'isomorfismo tra $H_\sigma L(M)$ ed \mathbb{R}^m .

Possiamo riscrivere questa uguaglianza in modo equivalente, utilizzando i sollevamenti dei campi tensoriali. È

$$(*) \quad \widetilde{\nabla_X \phi}(Z_1, \dots, Z_r) = \tilde{X}\tilde{\phi}(Z_1, \dots, Z_r) - \sum \tilde{\phi}(Z_1, \dots, \bar{\theta}^{-1}(\tilde{X}\theta(Z_i)), \dots, Z_r), \\ \forall Z_1, \dots, Z_r \in \mathfrak{X}(P).$$

La $\widetilde{\nabla_X \phi}$ è una forma tensoriale. Possiamo quindi calcolarla in ogni punto utilizzando come Z_i i campi orizzontali standard. Su di essi θ è costante: quindi la sommatoria a secondo membro di (*) è nulla ed otteniamo un'espressione più semplice della derivata covariante.

LEMMA 10.3.7. *Siano $\phi \in \Omega^r(M, T^{p,q}M)$, $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m$, $\sigma \in L(M)$, $\rho = \pi(\sigma)$, $X_{1\rho} = \sigma v_1, \dots, X_{r\rho} = \sigma v_r$. Allora*

$$(10.19) \quad (\nabla_X \phi)(X_1, \dots, X_r)(p) = \sigma(\tilde{X}_\sigma \tilde{\phi}(v_1^*, \dots, v_r^*)). \quad \square$$

10.4. Le identità algebriche di Bianchi

Ad un tensore p -covariante e q -controvariante $t \in \underline{T}^{p,q}(M, V)$, a valori in uno spazio vettoriale V , possiamo associare un tensore alternato $\mathfrak{S}(t) \in \Omega^q(M, \underline{T}^{p,0}(V))$, ponendo⁴

$$(10.20) \quad \mathfrak{S}(t)(X_1, \dots, X_q) = \frac{1}{q!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_q} \varepsilon(s) t(X_{s_1}, \dots, X_{s_q}), \quad \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M).$$

Con questa notazione, possiamo enunciare il :

TEOREMA 10.4.1 (Identità algebriche di Bianchi). *Siano T ed R i tensori di torsione e di curvatura di una connessione lineare Γ su M . Valgono allora, per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, le:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(R(X, Y)Z) &= \mathfrak{S}[(T(T(X, Y), Z)) + (\nabla_X T)(Y, Z)] && \text{(I identità di Bianchi),} \\ \mathfrak{S}[(\nabla_X R)(Y, Z) + R(T(X, Y), Z)] &= 0 && \text{(II identità di Bianchi).} \end{aligned}$$

La curvatura di una connessione simmetrica verifica, per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(R(X, Y)Z) &= 0 && \text{(I identità di Bianchi con } T = 0) \\ \mathfrak{S}((\nabla_X R)(Y, Z)) &= 0 && \text{(II identità di Bianchi con } T = 0) \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Utilizziamo il Teor.10.2.3 e il Lemma 10.3.7. Siano $p \in M$, $\sigma \in L_p(M)$ ed $X_p = \sigma \cdot v_1$, $Y_p = \sigma \cdot v_2$, $Z_p = \sigma \cdot v_3$. Abbiamo

$$(\nabla_X T)(Y, Z)(p) = \sigma \cdot v_1^* \Theta(v_2^*, v_3^*) = -\sigma \cdot v_1^* \theta([v_2^*, v_3^*]).$$

La (I) del Teor.10.2.3 ci dà

$$\begin{aligned} (\Omega \wedge \theta)(v_1^*, v_2^*, v_3^*) &= \mathfrak{S}(\Omega(v_1^*, v_2^*)v_3) = d\Theta(v_1^*, v_2^*, v_3^*) \\ &= \mathfrak{S}(v_1^* \Theta(v_2^*, v_3^*)) - \mathfrak{S}(\Theta([v_1^*, v_2^*], v_3^*)). \end{aligned}$$

Per il Lemma 10.2.5 è

$$\begin{aligned} [v_1^*, v_2^*]_\sigma &= -[\Theta(v_1^*, v_2^*)]_\sigma^* - [\Omega(v_1^*, v_2^*)]_\sigma^* \\ \Theta(v_1^*, v_2^*) &= d\theta(v_1^*, v_2^*) = -\theta([v_1^*, v_2^*]). \end{aligned}$$

Poiché Θ è nulla sui vettori verticali, otteniamo

$$\mathfrak{S}(\Omega(v_1^*, v_2^*)v_3) = \mathfrak{S}(v_1^* \Theta(v_2^*, v_3^*)) + \mathfrak{S}(\Theta([\Theta(v_1^*, v_2^*)]_\sigma^*, v_3^*)).$$

Applicando σ ad ambo i membri otteniamo allora la prima identità tensoriale di Bianchi.

Per la (II) del Teor.10.2.3, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 = D\Omega(v_1^*, v_2^*, v_3^*) &= d\Omega(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = \mathfrak{S}(v_1^* \Omega(v_2^*, v_3^*)) - \mathfrak{S}(\Omega([v_1^*, v_2^*], v_3^*)) \\ &= \mathfrak{S}(v_1^* \Omega(v_2^*, v_3^*)) + \mathfrak{S}(\Omega([\Theta(v_1^*, v_2^*)]_\sigma^*, v_3^*)). \end{aligned}$$

Poiché, per il Lemma 10.3.7,

$$(\nabla_X R)(Y, Z)(p) = \sigma(v_1^* \Omega(v_2^*, v_3^*)) \sigma^{-1},$$

⁴Lo spazio $\Omega^q(M, \underline{T}^{p,0}(V))$ dei tensori alternati è un sottospazio vettoriale di $\underline{T}^{p,q}(M, V)$. La \mathfrak{S} è una proiezione di $\underline{T}^{p,q}(M)$ su $\Omega^q(M, \underline{T}^{p,0}(V))$.

otteniamo la seconda identità tensoriale di Bianchi applicando l'aggiunzione rispetto a σ all'ultima riga della formula ottenuta sopra. \square

10.5. Interpretazione geometrica della torsione e della curvatura

Il Lemma 10.2.5 ci dice che, a meno del segno, torsione e curvatura misurano le componenti orizzontale e verticale del commutatore di due campi orizzontali standard: abbiamo cioè

$$\begin{cases} \Theta(v_1^*, v_2^*) = -\theta([v_1^*, v_2^*]), \\ \Omega(v_1^*, v_2^*) = -\omega([v_1^*, v_2^*]), \end{cases} \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m.$$

Poiché Θ ed Ω sono i sollevamenti dei tensori di torsione e di curvatura, abbiamo

PROPOSIZIONE 10.5.1. *Sia Γ una connessione lineare su M . Allora:*

$$\begin{aligned} T = 0 &\iff [v_1^*, v_2^*] \text{ è verticale} \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m, \\ R = 0 &\iff [v_1^*, v_2^*] \text{ è orizzontale} \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti $T=0$ se e soltanto se $\Theta=0$ ed $R=0$ se e soltanto se $\Omega=0$. \square

Analogamente, il fatto che la torsione (risp. la curvatura) sia parallela equivale al fatto che la componente orizzontale (risp. verticale) del commutatore di due campi orizzontali standard sia ancora un campo orizzontale standard (risp. un campo verticale fondamentale) sui fibrati d'olonomia.

PROPOSIZIONE 10.5.2. *Sia Γ una connessione lineare su M . Per ogni $\sigma \in L(M)$ indichiamo con $P(\sigma) \subseteq L(M)$ il fibrato d'olonomia per σ , con gruppo strutturale \mathbf{G}_σ . Siano \mathfrak{g}_σ l'algebra di Lie di \mathbf{G}_σ e $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$. Allora:*

- (1) $\nabla T = 0$ se e solo se $\theta([v_1^*, v_2^*]) = v_\sigma \in \mathbb{R}^m$ è costante su $P(\sigma)$ per qualche e quindi per ogni $\sigma \in L(M)$.
- (2) $\nabla R = 0$ se e solo se $\omega([v_1^*, v_2^*]) = A_\sigma \in \mathfrak{g}_\sigma$ è costante su $P(\sigma)$ per qualche e quindi per ogni $\sigma \in L(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 10.3.7, la condizione che $\nabla T = 0$ è equivalente a $\tilde{X}[\Theta(v_1^*, v_2^*)] = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed ogni coppia di vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$. Ciò equivale al fatto che $\Theta(v_1^*, v_2^*) = -\theta([v_1^*, v_2^*])$ sia costante su ciascun fibrato d'olonomia $P(\sigma)$.

Analogamente, sempre per il Lemma 10.3.7, la condizione che $\nabla R = 0$ è equivalente a $\tilde{X}[\Omega(v_1^*, v_2^*)] = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed ogni coppia di vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$, e quindi al fatto che $\Omega(v_1^*, v_2^*) = -\omega([v_1^*, v_2^*])$ sia costante su ciascun fibrato d'olonomia $P(\sigma)$. \square

COROLLARIO 10.5.3. *Supponiamo che su M sia definita una connessione lineare con torsione e curvatura parallele. Fissiamo $\sigma_0 \in L(M)$ e sia $P(\sigma_0)$ il corrispondente spazio di olonomia. Allora lo spazio vettoriale reale κ dei campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(P(\sigma_0))$ per cui $\theta(X)$ e $\omega(X)$ siano costanti su $P(\sigma_0)$ è una sottoalgebra di Lie reale di dimensione finita di $\mathfrak{X}(P(\sigma_0))$. \square*

Questo corollario ci dice che una connessione lineare con torsione e curvatura parallele è localmente equivalente ad una connessione invariante su uno spazio omogeneo.

COROLLARIO 10.5.4. *Supponiamo che su M sia definita una connessione lineare Γ simmetrica con curvatura parallela. Fissato σ in $L(M)$, siano \mathbf{G} il gruppo di ologonia di Γ in σ e \mathfrak{g} la sua algebra di Lie. Allora $\kappa = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}^m$, con prodotto definito da*

$$\begin{cases} [A_1, A_2] = B, & [A, v] = Av, & [v_1, v_2] = -C \\ \text{se } A_1, A_2, A, B, C \in \mathfrak{g}, v, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m \text{ verificano} \\ [A_1^*, A_2^*] = B^*, & [A^*, v^*] = (Av)^*, & [v_1^*, v_2^*] = -C^*. \end{cases}$$

è un'algebra di Lie e l'applicazione

$$\vartheta : \kappa \ni (A, v) \longrightarrow (A, -v) \in \kappa$$

una sua involuzione. □

DEFINIZIONE 10.5.5. La coppia (κ, ϑ) formata da un'algebra di Lie reale κ e da una sua involuzione ϑ si dice un'algebra di Lie simmetrica.

Una varietà M su cui sia assegnata una connessione lineare simmetrica con curvatura parallela si dice uno spazio affine localmente simmetrico.

10.6. Derivata covariante lungo una curva e parallelismo

Su una varietà affine M possiamo definire il trasporto parallelo di vettori e tensori (vedi §7.5 e §8.8) e interpretare quindi le loro derivate covarianti come derivazioni lungo una curva.

TEOREMA 10.6.1. *Siano p un punto di M , $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\gamma \in \mathcal{C}^1((-\epsilon, \epsilon), M)$ una sua curva integrale con $\gamma(0) = p$. Se $\tau_\gamma(t) : T_p M \rightarrow T_{\gamma(t)} M$ è il trasporto parallelo lungo la curva γ , allora*

$$(10.21) \quad \nabla_{X_p} Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[\tau_\gamma(t)]^{-1} Y_{\gamma(t)} - Y_p}{t}, \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $\sigma \in L(M)$ con $\pi(\sigma) = p$ e $\tilde{\gamma}_\sigma$ il rialzamento orizzontale di γ di punto iniziale σ . Il trasporto parallelo lungo γ è definito da

$$\tau_\gamma(t)(\sigma(v)) = \tilde{\gamma}_\sigma(t)(v), \quad \text{per ogni } v \in \mathbb{R}^m.$$

Allora $f(t) = \tau_\gamma(t)^{-1} Y_{\gamma(t)} = \sigma(\theta(\tilde{Y}_{\tilde{\gamma}_\sigma(t)})) \in \mathcal{C}^\infty((-\epsilon, \epsilon), T_p M)$ ed il secondo membro di (10.21) è la derivata di f in 0. Da $f'(0) = \sigma(\tilde{X}_\sigma \theta(\tilde{Y})) = \nabla_{X_p} Y$ otteniamo la tesi. □

Nella (10.21) intervengono soltanto i valori che il campo Y assume sul supporto della curva integrale di X . Questa osservazione ci suggerisce la seguente definizione: Sia I un intervallo di \mathbb{R} e $\gamma \in \mathcal{C}^k(I, M)$ una curva di classe \mathcal{C}^k in M .

DEFINIZIONE 10.6.2. Chiamiamo campo di vettori di classe \mathcal{C}^k lungo γ un'applicazione $Y \in \mathcal{C}^k(I, TM)$ tale che $Y(t) \in T_{\gamma(t)}$ per ogni $t \in I$.

Se $k \geq 1$, chiamiamo derivata covariante di Y lungo γ il campo di vettori

$$(10.22) \quad \frac{DY}{dt} = \frac{d}{dt} [\tau_\gamma(t)^{-1} Y(t)] \in \mathcal{C}^{k-1}(I, TM).$$

Siano $t_0 \in I$ e $\sigma_0 \in L_{\gamma(t_0)}(M)$. Indichiamo con $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}$ il sollevamento orizzontale di γ per σ_0 . Un campo di vettori $Y(t)$ lungo γ definisce una curva $v(t)$ in \mathbb{R}^m per cui

$$Y(t) = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \cdot v(t), \quad \forall t \in I.$$

Se $\gamma(t)$ e $Y(t)$ sono di classe \mathcal{C}^k , anche $v(t)$ è di classe \mathcal{C}^k . Se $k \geq 1$, poiché i vettori $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \cdot v(s)$ sono paralleli lungo γ , allora

$$\frac{DY(t)}{dt} = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \dot{v}(t), \quad \forall t \in I.$$

Otteniamo così la caratterizzazione:

PROPOSIZIONE 10.6.3. *Un campo di vettori $Y \in \mathcal{C}^1(I, TM)$ è parallelo lungo la curva $\gamma := \text{pr}_M \circ Y \in \mathcal{C}^1(I, M)$ se e soltanto se*

$$(10.23) \quad \frac{DY(t)}{dt} = 0, \quad \forall t \in I. \quad \square$$

Possiamo estendere la definizione di derivazione covariante e il criterio di parallelismo a campi tensoriali lungo una curva. Sia I un intervallo reale contenente 0 e $\gamma \in \mathcal{C}^1(I, M)$ una curva di classe \mathcal{C}^1 in M , $p = \gamma(0)$ e $\tau_\gamma(t) : T_p(M) \rightarrow T_{\gamma(t)}M$ il trasporto parallelo lungo la curva γ . Poiché $\tau_\gamma(t)$ è un isomorfismo lineare, la sua aggiunta $\tau_\gamma(t)^*$ ci permette di definire un isomorfismo lineare $(\tau_\gamma(t)^*)^{-1} : T_{\gamma(t)}^*M \rightarrow T_p^*M$.

Per ogni coppia p, q di interi non negativi risulta definito un unico isomorfismo lineare:

$$\begin{aligned} \tau_\gamma^{(p,q)}(t) : T_p^{p,q}M &\rightarrow T_{\gamma(t)}^{p,q}M \quad \text{tale che} \\ \tau_\gamma^{(p,q)}(t)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \zeta^1 \otimes \cdots \otimes \zeta^q) \\ &= \tau_\gamma(t)(v_1) \otimes \cdots \otimes \tau_\gamma(t)(v_p) \otimes (\tau_\gamma(t)^*)^{-1}(\zeta^1) \otimes \cdots \otimes (\tau_\gamma(t)^*)^{-1}(\zeta^q) \\ &\forall v_1, \dots, v_p \in T_pM, \quad \forall \zeta^1, \dots, \zeta^q \in T_p^*M. \end{aligned}$$

Un *campo tensoriale* di classe \mathcal{C}^k lungo una curva $\gamma \in \mathcal{C}^k(I, M)$ è un'applicazione $t \in \mathcal{C}^k(I, T^{p,q}M)$ tale che $t(t) \in T_{\gamma(t)}^{p,q}M$ per ogni $t \in I$. Se $k \geq 1$, la *derivata covariante* di t lungo γ è il campo tensoriale di classe \mathcal{C}^{k-1} lungo γ definito da

$$\frac{Dt}{dt} = \frac{d}{dt} [[\tau_\gamma^{(p,q)}(t)]^{-1} t(t)].$$

Se $\sigma \in L(M)$, $\pi(\sigma) = \gamma(0)$, e $\tilde{\gamma}_\sigma$ è il rialzamento orizzontale di γ per σ , allora $t(t) = \tilde{\gamma}_\sigma(t) \phi(t)$ per una $\phi \in \mathcal{C}^k(I, T^{p,q}\mathbb{R}^m)$ e

$$\frac{Dt(t)}{dt} = \tilde{\gamma}_\sigma(t) \dot{\phi}(t).$$

Ricordiamo che i campi tensoriali paralleli lungo γ sono tutti e soli quelli della forma $\tilde{\gamma}_\sigma \phi_0$, con $\phi_0 \in T^{p,q}\mathbb{R}^m$ costante. Abbiamo perciò

PROPOSIZIONE 10.6.4. *Il campo tensoriale t è parallelo lungo γ se e soltanto se $(Dt/dt) = 0$ lungo γ .* \square

10.7. Geodetiche

Se γ è una curva in M di classe \mathcal{C}^k con $k \geq 1$, allora la velocità $\dot{\gamma}$ è un campo di vettori lungo γ di cui, se $k \geq 2$, possiamo calcolare la derivata covariante ($D\dot{\gamma}/dt$). Essa rappresenta l'*accelerazione* ed il suo annullarsi caratterizza il moto di un punto materiale che si muova su M senza essere soggetto a forze esterne.

DEFINIZIONE 10.7.1. Una curva $\gamma \in \mathcal{C}^2(I, M)$ si dice *geodetica* se la sua velocità $\dot{\gamma}$ è parallela lungo γ , se cioè

$$(10.24) \quad \ddot{\gamma} = \frac{D^2\gamma}{dt^2} := \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0, \quad \text{su } I.$$

Siano $t_0 \in I$ e $\sigma \in L(M)$ un sistema di riferimento in $\gamma(t_0)$. Consideriamo il sollevamento orizzontale $\tilde{\gamma}_\sigma \in \mathcal{C}^2(I, L(M))$ di γ con $\tilde{\gamma}_\sigma(t_0) = \sigma$. Allora $\dot{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}_\sigma(v(t))$ per una $v \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^m)$ e

$$(10.25) \quad \frac{D^2\gamma}{dt^2} = \tilde{\gamma}_\sigma \left(\frac{d}{dt} ([\tilde{\gamma}_\sigma]^{-1} \dot{\gamma}) \right) = \frac{D}{dt} (\tilde{\gamma}_\sigma v) = \tilde{\gamma}_\sigma \cdot \ddot{v}.$$

La $v(t)$ è una curva di classe \mathcal{C}^1 in \mathbb{R}^m che rappresenta la velocità in un sistema di riferimento parallelo lungo la curva e γ è una geodetica se e soltanto se $v(t)$ è costante, cioè se la velocità $d\tilde{\gamma}/dt$ lungo $\tilde{\gamma}_\sigma$ è la restrizione a $\tilde{\gamma}_\sigma$ di un campo di vettori orizzontale standard. Abbiamo perciò ottenuto:

PROPOSIZIONE 10.7.2. *La proiezione su M di una curva integrale di un campo di vettori orizzontale standard è una geodetica e viceversa ogni rialzamento orizzontale di una geodetica in M è la curva integrale di un campo di vettori standard.* \square

OSSERVAZIONE 10.7.3. Sia $\gamma \in \mathcal{C}^2(I, M)$ una geodetica non costante. Una sua riparametrizzazione $\gamma \circ \psi$, con $\psi \in \mathcal{C}^2(I', I)$, $\psi' \neq 0$, è ancora una geodetica se, e soltanto se, la ψ è affine, cioè della forma $\psi(t) = a \cdot t + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. È infatti

$$\frac{d}{dt} (\gamma \circ \psi) = \psi' \cdot (\gamma \circ \psi) \implies \frac{D}{dt} \frac{d}{dt} (\gamma \circ \psi) = \psi'' \cdot \dot{\gamma} + \psi'^2 \frac{D\dot{\gamma}}{dt}.$$

Quindi, se γ è una geodetica, $(D^2(\gamma \circ \psi)/dt^2) = \psi'' \cdot \dot{\gamma}$. Poiché $\dot{\gamma} \neq 0$, questa ci dà $\psi'' = 0$, e perciò ψ è affine.

TEOREMA 10.7.4. *Assegnati $p_0 \in M$ e $v_0 \in T_{p_0}M$ esiste un'unica geodetica γ , definita su un intervallo I contenente 0 come punto interno, tale che*

$$(10.26) \quad \begin{cases} \gamma(0) = p_0, \\ \dot{\gamma}(0) = v_0. \end{cases}$$

Le curve geodetiche sono di classe \mathcal{C}^∞ .

L'unicità va intesa nel modo seguente: se I, I' sono due intervalli di \mathbb{R} che contengono 0 e $\gamma \in \mathcal{C}^2(I, M)$, $\gamma' \in \mathcal{C}^2(I', M)$ sono due geodetiche con $\gamma(0) = p_0 = \gamma'(0)$, $\dot{\gamma}(0) = v_0 = \dot{\gamma}'(0)$, allora $\gamma(t) = \gamma'(t)$ per ogni $t \in I \cap I'$. In particolare, esiste un'unica geodetica massimale che soddisfa le condizioni iniziali (10.26).

Se $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ è una geodetica non costante, allora $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$. \square

NOTAZIONE 10.7.5. Dati un vettore v tangente ad M indicheremo con γ_v la geodetica *massimale* che ha come *punto iniziale* $\gamma(0)$ il punto $\text{pr}_M(v)$ di applicazione di v , come *velocità iniziale* $\dot{\gamma}(0)$ il vettore v e con $I_v \subseteq \mathbb{R}$ il suo *massimo dominio di definizione*.

DEFINIZIONE 10.7.6. Una connessione lineare Γ su M si dice *completa* (e diciamo che M è uno spazio affine *completo*) se $I_v = \mathbb{R}$ per ogni $v \in TM$.

Per il Teor.10.7.4, abbiamo

PROPOSIZIONE 10.7.7. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la connessione Γ su M sia completa è che tutti i campi orizzontali standard siano completi su $L(M)$.* \square

Osserviamo che, se $v \in T_p M$ e $t, s \in \mathbb{R}$ sono tali che $s \cdot t \in I_v$, $t \in I_{s \cdot v}$, allora $\gamma_{s \cdot v}(t) = \gamma_v(s \cdot t)$. Inoltre, se $s, t, s+t \in I_v$, allora $\gamma_v(t+s) = \gamma_{\dot{\gamma}(s)}(t)$.

ESEMPIO 10.7.8. La connessione lineare simmetrica piatta canonica su \mathbb{R}^m è completa. Le geodetiche sono le rette affini $t \rightarrow x_0 + t \cdot v$ di \mathbb{R}^m .

Dalla Prop.10.7.7 ricaviamo

PROPOSIZIONE 10.7.9. *Sia M una varietà differenziabile, su cui è assegnata una connessione \mathbf{G} -lineare con forma di Cartan ω sulla sua \mathbf{G} -struttura $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$. Sono equivalenti*

- (1) *La connessione è completa.*
- (2) *Per ogni $v(t) \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$ e $\sigma \in P$ esiste un cammino orizzontale $s(t) \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], P)$ tale che $\theta(\dot{s}) = v$.*
- (3) *Per ogni $v(t) \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$, $X(t) \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathfrak{g})$ e $\sigma \in P$ esiste un cammino $s(t) \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], P)$ tale che $\theta(\dot{s}) = v$, $\omega(\dot{s}) = X$.*

DIMOSTRAZIONE. Per la Prop.10.7.7, è (2) \Rightarrow (1). Banalmente vale (3) \Rightarrow (2).

Dimostriamo che (2) \Rightarrow (3). Date $v(t) \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$, $X(t) \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathfrak{g})$, sappiamo che vi è una ed una sola soluzione $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{G})$ di $\omega_{\mathbf{G}}(\dot{\gamma}(t)) = X(t)$ in I con $\gamma(0) = e_{\mathbf{G}}$. Sia $(\gamma \cdot v)(t) = \gamma(t) \cdot (v(t))$. Allora $\gamma \cdot v \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$ e, se vale la (2), vi è un unico cammino orizzontale $s_{\text{hor}} \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], P)$ con $s_{\text{hor}}(0) = \sigma_0$ e $\theta(\dot{s}_{\text{hor}}) = \gamma \cdot v$. Il cammino $s = s_{\text{hor}} \cdot \gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], P)$ verifica

$$s(0) = \sigma_0, \theta(\dot{s}) = \gamma^{-1} \theta(\dot{s}_{\text{hor}}) = v, \omega(\dot{s}) = X.$$

Concludiamo la dimostrazione verificando che (1) \Rightarrow (2).

Data una curva $v(t) \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$, per (1) possiamo, per ogni partizione $T = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$ dell'intervallo $[0, 1]$ costruire un'unica curva orizzontale s_T , di classe \mathcal{C}^∞ a tratti con $s_T(0) = \sigma_0$ e $\theta(\dot{s}_T) = v(t_i)$ sull'intervallo $t_i < t < t_{i+1}$ per $0 \leq i < n$. Facendo tendere $\sup |t_i - t_{i-1}|$ a zero, le s_T convergono alla curva s cercata. \square

DEFINIZIONE 10.7.10. Uno *spazio simmetrico* è uno spazio localmente simmetrico⁵ la cui connessione sia completa.

⁵Cioè una varietà differenziabile su cui è fissata una connessione simmetrica con curvatura parallela.

10.8. Esistenza di connessioni simmetriche

DEFINIZIONE 10.8.1. Chiamiamo *simmetriche* le connessioni lineari prive di torsione.

Le connessioni lineari su una varietà differenziabile fissata M formano uno spazio affine $\Gamma(M)$, con spazio vettoriale associato $\mathcal{O}_{\xi}^1(M, T^{1,1}M)$. Infatti la differenza $\omega - \omega'$ delle forme di Cartan ω, ω' di due connessioni lineari su M è una forma tensoriale per la rappresentazione aggiunta di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ su $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ e viceversa, se aggiungiamo alla forma di Cartan ω di una connessione lineare Γ su M il sollevamento $\tilde{\phi}$ di una forma ϕ di $\mathcal{O}_{\xi}^1(M, T^{1,1}M)$, la $\omega' = \omega + \tilde{\phi}$ è la forma di Cartan di una connessione lineare Γ' su M . Quindi, fissata la forma di Cartan ω di una qualsiasi connessione lineare, è

$$\Gamma(M) \simeq \{\omega + \tilde{\phi} \mid \phi \in \mathcal{O}_{\xi}^1(M, T^{1,1}M)\}.$$

Indichiamo con ∇ la differenziazione covariante rispetto ad una connessione lineare Γ assegnata, con forma di Cartan ω e con ∇^{ϕ} quella rispetto alla connessione Γ_{ϕ} con forma di Cartan $\omega + \tilde{\phi}$. Allora

$$(10.27) \quad \nabla_X^{\phi} Y = \nabla_X Y + \phi_X(Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Infatti, il fibrato orizzontale della Γ_{ϕ} è

$$H_{\sigma}^{\phi} L(M) = \{Z_{\sigma} \in T_{\sigma} L(M) \mid \omega(Z_{\sigma}) + \tilde{\phi}(Z_{\sigma}) = 0\},$$

quindi il sollevamento orizzontale \tilde{X}^{ϕ} di $X \in \mathfrak{X}(M)$ rispetto a Γ_{ϕ} si esprime, in funzione del sollevamento \tilde{X} rispetto a Γ , mediante

$$\tilde{X}^{\phi} = \tilde{X} - [\tilde{\phi}(\tilde{X})]^*.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \theta(\widetilde{\nabla_X^{\phi} Y}) &= \tilde{X}^{\phi}(\theta(\tilde{Y}^{\phi})) = (\tilde{X} - [\tilde{\phi}(\tilde{X})]^*)(\theta(\tilde{Y} - [\tilde{\phi}(\tilde{Y})]^*)) \\ &= (\tilde{X} - [\tilde{\phi}(\tilde{X})]^*)(\theta(\tilde{Y})) = \tilde{X}(\theta(\tilde{Y})) + \tilde{\phi}(\tilde{X})(\theta(\tilde{Y})) \\ &= \theta(\widetilde{\nabla_X Y}) + \theta(\widetilde{\phi_X(Y)}), \end{aligned}$$

perché, se $A \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ ed A^* il corrispondente campo fondamentale su $L(M)$, allora

$$A^*(\theta(\tilde{Y})) = L_{A^*}(\theta(\tilde{Y})) = [L_{A^*}(\theta)](\tilde{Y}) + \theta([A^*, \tilde{Y}]) = -A(\theta(\tilde{Y})).$$

Questo vale perché $L_{A^*}(\theta) = -A \circ \theta$ in quanto θ è tensoriale di tipo (ι, \mathbb{R}^m) e $[A^*, \tilde{Y}] = 0$ perché il sollevamento orizzontale è invariante per l'azione destra di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ su $L(M)$.

La torsione della connessione Γ_{ϕ} è

$$(10.28) \quad T^{\phi}(X, Y) = \nabla_X^{\phi} Y - \nabla_Y^{\phi} X - [X, Y] = T(X, Y) + \phi_X(Y) - \phi_Y(X).$$

In particolare, se, fissata una connessione lineare Γ con torsione T poniamo

$$(10.29) \quad \phi_X(Y) = \frac{1}{2}T(Y, X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

allora abbiamo

PROPOSIZIONE 10.8.2. *Data una connessione Γ , la connessione Γ_{ϕ} , con ϕ definita dalla (10.29), è priva di torsione ed ha le stesse linee geodetiche di Γ .*

DIMOSTRAZIONE. Dalla (10.28) ricaviamo che la Γ_ϕ è priva di torsione. Inoltre, se γ è un qualsiasi cammino di classe \mathcal{C}^2 in M , abbiamo

$$\nabla_{\dot{\gamma}}^{\phi'}(\dot{\gamma}) = \nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma}) + T(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma})$$

perché T è una forma alternata. Quindi le connessioni Γ e Γ' definiscono la stessa accelerazione lungo le curve di classe \mathcal{C}^2 ed in particolare hanno le stesse geodetiche. \square

OSSERVAZIONE 10.8.3. Non c'è una relazione semplice tra i tensori di curvatura di Γ e di Γ_ϕ e di conseguenza il gruppo di ologonia della nuova connessione potrebbe essere diverso da quello della connessione assegnata. In particolare, se la connessione Γ è \mathbf{G} -lineare per un sottogruppo \mathbf{G} di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$, la connessione simmetrica Γ_ϕ potrebbe non esserlo più. Due esempi importanti sono i seguenti.

Per una connessione $\mathbf{O}(p, q)$ -lineare Γ , è sempre possibile trovare una $\mathbf{O}(p, q)$ -lineare Γ' simmetrica e con le stesse linee geodetiche.

Invece, l'esistenza di connessioni $\mathbf{U}(n)$ -lineari simmetriche individua la classe delle *varietà di Kähler*⁶ Ci sono esempi di $\mathbf{U}(n)$ -strutture per cui non esistono $\mathbf{U}(n)$ -connessioni simmetriche.

10.9. Metriche (pseudo-)riemanniane e connessione di Levi-Civita

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m .

DEFINIZIONE 10.9.1. Una *metrica riemanniana* su M è un tensore $g \in \underline{T}^{0,2}(M)$ simmetrico e definito positivo. Richiediamo cioè che sia

(SIMMETRIA) $g(X, Y) = g(Y, X), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$

(POSITIVITÀ) $g(v, v) > 0, \text{ se } v \in TM \text{ e } v \neq 0.$

Una *metrica pseudo-riemanniana* di segnatura (p, q) su M , con $p+q=m$, è un tensore simmetrico $g \in \underline{T}^{0,2}(M)$ che definisce, in ogni punto p di M , una forma simmetrica non degenera g_p di segnatura (p, q) . Richiediamo cioè che sia

(SIMMETRIA) $g(X, Y) = g(Y, X), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$

(SEGNATURA) $T_p M \times T_p M \ni (v, w) \rightarrow g(v, w) \in \mathbb{R}$ ha segnatura $(p, q), \forall p \in M.$

DEFINIZIONE 10.9.2. Una *varietà riemanniana* (resp. *pseudo-riemanniana*) è una varietà differenziabile su cui sia stata fissata una metrica riemanniana (resp. pseudo-riemanniana). Indicheremo a volte una varietà riemanniana, o pseudo-riemanniana, come una coppia (M, g) .

OSSERVAZIONE 10.9.3. Utilizzando la partizione dell'unità, si può dimostrare che ogni varietà differenziabile ammette una metrica riemanniana. L'esistenza di metriche pseudo-riemanniane di segnatura indefinita impone invece restrizioni topologiche (vedi e.g. [48]).

⁶Erich Kähler (1906-2000) fu un matematico tedesco attivo in geometria e fisica matematica. Le sue ricerche sono state fondamentali per i moderni sviluppi della geometria algebrica e complessa e, in fisica teorica, per la teoria delle stringhe. Introdusse le varietà che portano il suo nome nel lavoro [42] del 1933.

DEFINIZIONE 10.9.4. Siano (M, g) ed (N, h) due varietà pseudo-riemanniane. Un'applicazione differenziabile $f: N \rightarrow M$ si dice un'immersione isometrica se

$$(10.30) \quad g_{f(q)}(f_*X_q, f_*Y_q) = h_q(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(N), \forall q \in N.$$

Se f è anche un diffeomorfismo locale, diciamo che è un'isometria locale. Se f è anche un diffeomorfismo, diciamo che è un'isometria.

Sia (M, g) una varietà pseudo-riemanniana di segnatura (p, q) . Fissiamo su \mathbb{R}^m una forma bilineare simmetrica b su \mathbb{R}^m , della stessa segnatura (p, q) . Sia $\mathbf{O}_b(\mathbb{R}^m)$ il gruppo degli automorfismi lineari di \mathbb{R}^m che preservano la forma b e con $\mathfrak{o}_b(\mathbb{R}^m)$ la sua algebra di Lie:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_b(\mathbb{R}^m) &= \{a \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \mid b(a(v), a(w)) = b(v, w), \forall v, w \in \mathbb{R}^m\}, \\ \mathfrak{o}_b(\mathbb{R}^m) &= \{X \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}) \mid b(X(v), w) + b(v, X(w)) = 0, \forall v, w \in \mathbb{R}^m\}. \end{aligned}$$

I gruppi $\mathbf{O}_b(\mathbb{R}^m)$ corrispondenti a forme bilineari simmetriche con la stessa segnatura sono coniugati in $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$, e si possono identificare quindi ai gruppi $\mathbf{O}(p, q)$ (vedi Cap.XXXIV). L'insieme

$$(10.31) \quad [\mathbf{O}_b(M)]_p = \{\sigma \in L(M) \mid g_p(\sigma(v), \sigma(w)) = b(v, w), \forall v, w \in \mathbb{R}^m\}$$

è lo spazio totale di una $\mathbf{O}_b(\mathbb{R}^m)$ riduzione $\Phi_b(M) = (\mathbf{O}_b(M), \pi, M, \mathbf{O}_b(\mathbb{R}^m))$ di $L(M)$.

PROPOSIZIONE 10.9.5. Per una connessione lineare Γ su una varietà pseudo-riemanniana (M, g) sono equivalenti:

- (1) g è parallela, cioè $\nabla g = 0$.
- (2) Γ ammette una \mathbf{O}_b -riduzione ad $\Phi_b(M)$.

DIMOSTRAZIONE. La g si solleva ad una sezione \tilde{g} su $L(M)$, a valori nello spazio $\text{Simm}^2(\mathbb{R}^m)$ delle forme bilineari simmetriche su \mathbb{R}^m , definita da

$$\tilde{g}_\sigma(v_1, v_2) = g(\sigma(v_1), \sigma(v_2)), \quad \forall \sigma \in L(M), \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m.$$

La restrizione di \tilde{g} ad $\mathbf{O}_b(M)$ è costante ed uguale a b . Quindi $Z \cdot \tilde{g} = 0$ per ogni $Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{O}_b(M))$. In particolare, se Γ ammette una riduzione ad $\Phi_b(M)$, allora $\nabla g = 0$. Abbiamo così dimostrato l'implicazione (2) \Rightarrow (1).

Viceversa, se vale (1), allora \tilde{g} è costante sui fibrati di olonomia $L(M)(\sigma)$ per ogni $\sigma \in L(M)$. In particolare $L(M)(\sigma) \subseteq \mathbf{O}_b(M)$ se $\sigma \in \mathbf{O}_b(M)$ e quindi Γ ammette una riduzione ad $\Phi_b(M)$. \square

DEFINIZIONE 10.9.6. Una connessione lineare Γ ed una metrica pseudo-riemanniana g su M si dicono compatibili se sono soddisfatte le condizioni equivalenti della Prop.10.9.5. Diremo anche che la Γ è una connessione metrica.

TEOREMA 10.9.7 (Levi-Civita). Su una varietà pseudo-riemanniana (M, g) vi è una ed una sola connessione lineare simmetrica compatibile con g .

DIMOSTRAZIONE. Ricaviamo l'espressione esplicita della derivazione covariante ∇ della connessione metrica simmetrica, utilizzando le relazioni

$$(10.32) \quad \begin{cases} T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}, \\ \nabla g = 0. \end{cases}$$

Per la seconda delle (10.32) abbiamo per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Se supponiamo inoltre che valga la prima delle (10.32), allora otteniamo

$$\begin{aligned} Yg(Z, X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) - g(Z, [X, Y]) \\ Zg(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) = g(\nabla_X Z, Y) + g(X, \nabla_Y Z) + g(Y, [Z, X]) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) - g(Z, [X, Y]) \\ - g(\nabla_X Z, Y) - g(X, \nabla_Z Y) - g(Y, [Z, X]) + g(X, [Y, Z]). \end{aligned}$$

Da questa ricaviamo la formula

$$(10.33) \quad \begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]). \end{aligned}$$

Poiché g è non degenera, la $\nabla_X Y$ è completamente determinata dalla (10.33) e si verifica facilmente che la ∇ così definita verifica le (i) ed (ii) del Teorema 10.3.1 ed è quindi la derivazione covariante di una connessione Γ simmetrica $\mathbf{O}_b(\mathbb{R}^m)$ -lineare. Per costruzione, Γ è unica. \square

DEFINIZIONE 10.9.8. L'unica connessione metrica priva di torsione su (M, g) si dice la sua *connessione di Levi-Civita*⁷.

10.10. Esempi

ESEMPIO 10.10.1. La metrica Euclidea di \mathbb{R}^m è definita, nelle coordinate canoniche x^1, \dots, x^m , da

$$(10.34) \quad g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_{i,j}, \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq m.$$

ESEMPIO 10.10.2. Siano (M, g) una varietà riemanniana, N una varietà differenziabile ed $f : N \rightarrow M$ un'immersione differenziabile. Allora

$$(10.35) \quad h(X_q, Y_q) = g(f_*(X_q), f_*(Y_q)), \quad \forall q \in N, \forall X_q, Y_q \in T_q N$$

definisce una metrica riemanniana su N .

Più in generale, se (M, g) è pseudo-riemanniana ed N connessa, la (10.35) definisce una metrica pseudo-riemanniana su N se, per ogni $q \in N$, il sottospazio $f_*(T_q N)$ è anisotropo in $(T_{f(q)} M, g_{f(q)})$.

⁷ Tullio Levi-Civita (Padova, 29 Marzo 1873 - Roma, 29 Dicembre 1941) matematico italiano, allievo di Gregorio Ricci-Curbastro, è l'inventore del *calcolo differenziale assoluto* (calcolo tensoriale). Ha dato notevoli contributi alla geometria differenziale, alla teoria della relatività, alla meccanica celeste, all'idrodinamica. Nel 1938 fu cacciato dall'Università in seguito alle leggi razziali.

ESEMPIO 10.10.3. Consideriamo su S^m la metrica riemanniana g indotta dall'immersione canonica $S^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$. Sia $U = \{x \in S^m \mid x^0 + 1 > 0\}$ e consideriamo in U le coordinate locali y^1, \dots, y^m definite da

$$x^0 = \frac{1 - |y|^2}{1 + |y|^2}, \quad x^i = \frac{2y^i}{1 + |y|^2}, \quad y^i = \frac{x^i}{1 + x^0}, \quad \text{per } i = 1, \dots, m.$$

Abbiamo

$$dx^0 = -4 \frac{\sum_j y^j dy^j}{(1 + |y|^2)^2}, \quad dx^i = 2 \frac{dy^i}{(1 + |y|^2)} - 4y^i \frac{\sum_j y^j dy^j}{(1 + |y|^2)^2} \quad \text{su } S^m.$$

Quindi⁸

$$g = \sum_i dx^i \otimes dx^i|_{S^m} = 4 \frac{\sum_{i=1}^m dy^i \otimes dy^i}{(1 + |y|^2)^2}.$$

Calcoliamo ora il tensore della metrica in coordinate sferiche. Per semplicità ci limitiamo a trattare il caso della sfera di dimensione due dello spazio ordinario. Abbiamo allora su S^2

$$\begin{cases} x^0 = \cos \theta, \\ x^1 = \sin \theta \cos \phi, \\ x^2 = \sin \theta \sin \phi, \end{cases} \quad \begin{cases} dx^0 = -\sin \theta d\theta, \\ dx^1 = \cos \theta \cos \phi d\theta - \sin \theta \sin \phi d\phi, \\ dx^2 = \cos \theta \sin \phi d\theta + \sin \theta \cos \phi d\phi \end{cases}$$

e quindi, ponendo $d\theta^2 = d\theta \otimes d\theta$ e $d\phi^2 = d\phi \otimes d\phi$,

$$g = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

ESEMPIO 10.10.4. Poiché la mappa antipodale $a_0 : S^m \ni x \rightarrow -x \in S^m$ è un'isometria, la metrica g definisce, per passaggio al quoziente, una metrica \bar{g} sullo spazio proiettivo, che rende la proiezione $\pi : S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$ un'isometria locale.

ESEMPIO 10.10.5. La metrica dell'esempio 10.10.3 coincide su $S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$ con la *metrica di Fubini-Study*⁹ degli spazi proiettivi complessi.

Questa è una metrica Hermitiana invariante per l'azione di $SU(n+1)$, che si esprime, nelle coordinate locali $w^j = z^j/z^0$ di $U_0 = \{z^0 \neq 0\}$, mediante

$$(10.36) \quad h = \frac{(1 + |w|^2) \sum_{j=1}^m dw^j \otimes d\bar{w}^j - \sum_{j,h=1}^m \bar{w}^j w^h dw^j \otimes d\bar{w}^h}{(1 + |w|^2)^2}.$$

Si ottiene una metrica riemanniana ponendo $g = \text{Re } h$.

⁸La forma della metrica è particolarmente semplice perché le coordinate y^i sono conformi.

⁹Guido Fubini (1879-1943), matematico italiano allievo di Ulisse Dini e di Luigi Bianchi. Attivo in molti campi della matematica, dalla geometria differenziale all'analisi funzionale. Concluse la sua carriera a Princeton, dove si era rifugiato in seguito alle leggi razziali.

Christian Hugo Eduard Study (1862-1930) fu un matematico tedesco, noto per i suoi lavori in teoria degli invarianti, nonché per i suoi interessi in entomologia.

ESEMPIO 10.10.6. Possiamo considerare lo spazio proiettivo reale $\mathbb{R}P^m$ come una sottovarietà differenziabile dello spazio proiettivo complesso $\mathbb{C}P^m$. La restrizione ad $\mathbb{R}P^m$ della metrica di Fubini-Study definisce una metrica $\mathbf{SO}(n+1)$ -invariante su $\mathbb{R}P^m$. La sua espressione, nelle coordinate locali $y^i = x^i/x^0$ di $U_0 = \{x^0 \neq 0\}$, è

$$(10.37) \quad g = \frac{(1 + |y|^2)^2 \sum_{i=1}^m dy^i \otimes dy^i - \sum_{i,j=1}^m y^i y^j dy^i \otimes dy^j}{(1 + |y|^2)^2}.$$

ESEMPIO 10.10.7. Se \mathbf{G} è un gruppo di Lie ed \mathbf{H} un suo sottogruppo compatto, possiamo definire su $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ una metrica riemanniana \mathbf{G} -invariante nel modo seguente.

Sia $p_0 = [\mathbf{H}]$ il punto base di M . Per il teorema di Haar sull'esistenza di misure bi-invarianti sui gruppi compatti, possiamo definire su $T_{p_0}M$ un prodotto scalare g_{p_0} per cui i $dL_h, dR_h : T_{p_0}M \rightarrow T_{p_0}M$, per $h \in \mathbf{H}$, siano isometrie. Se $p = a \cdot p_0$ per un $a \in \mathbf{G}$, poniamo

$$g(a_*X_{p_0}, a_*Y_{p_0}) = g_{p_0}(X_{p_0}, Y_{p_0})$$

Questa è una buona definizione, perché, se $b = a \cdot h$ con $h \in \mathbf{H}$, allora

$$g((a \cdot h)_*X_{p_0}, (a \cdot h)_*Y_{p_0}) = g_{p_0}(h_*X_{p_0}, h_*Y_{p_0}) = g_{p_0}(X_{p_0}, Y_{p_0}).$$

DEFINIZIONE 10.10.8. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie, $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ un suo spazio omogeneo e g una metrica riemanniana su M . Se g è \mathbf{G} -invariante, diciamo che (M, g) è uno spazio riemanniano \mathbf{G} -omogeneo.

ESEMPIO 10.10.9. Ogni gruppo di Lie compatto \mathbf{G} ammette una metrica riemanniana bi-invariante, invariante cioè sia rispetto alle traslazioni a destra che rispetto alle traslazioni a sinistra. Possiamo infatti considerare \mathbf{G} come uno spazio omogeneo rispetto all'azione transitiva

$$(10.38) \quad (\mathbf{G} \times \mathbf{G}) \times \mathbf{G} \ni ((a, b), x) \longrightarrow a \cdot x \cdot b^{-1} \in \mathbf{G},$$

con isotropia $\Delta_{\mathbf{G}} = \{(a, a) \mid a \in \mathbf{G}\}$ in e . Per l'Esempio 10.10.7, \mathbf{G} ammette una metrica g invariante per l'azione di $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$, cioè invariante sia a destra che a sinistra.

Se \mathbf{G} è semisemplice compatto con algebra di Lie \mathfrak{g} , allora la *forma di Killing*

$$(10.39) \quad \kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{trac}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y)$$

è definita negativa su \mathfrak{g} . Allora la

$$(10.40) \quad g(X_a^*, Y_a^*) = -\kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

definisce una metrica riemanniana \mathbf{G} -invariante. Ricordiamo che X^*, Y^* sono i campi di vettori invarianti a sinistra associati ad $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Analogamente, se \mathbf{G} è un sottogruppo compatto di $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$, la

$$(10.41) \quad g_e(X, Y) = -\text{trac}(X \cdot Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})$$

è definita positiva ed otteniamo una metrica riemanniana invariante su \mathbf{G} definendo

$$(10.42) \quad g(X_a^*, Y_a^*) = -\text{trac}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

ESEMPIO 10.10.10. Se $1 \leq p < m$, la forma

$$(10.43) \quad g = \sum_{i=1}^p dx^i \otimes dx^i - \sum_{i=p+1}^m dx^i \otimes dx^i.$$

definisce una metrica pseudo-riemanniana su \mathbb{R}^m .

ESEMPIO 10.10.11. Consideriamo su \mathbb{R}^{n+1} la metrica pseudo-riemanniana

$$h = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i.$$

Il pullback di h su $M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x^0 = (1 + \sum_{i=1}^n |x^i|^2)^{1/2}\}$ definisce una metrica riemanniana g , che è la metrica standard dello spazio iperbolico di Lobačevskij di dimensione n . Consideriamo la matrice

$$I_{1,n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

e sia $\mathbf{O}(1, n) = \{\mathbf{a} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \mathbf{a}^\top I_{1,n} \mathbf{a} = I_{1,n}\}$ il gruppo delle trasformazioni lineari di \mathbb{R}^{m+1} che lasciano invariata la $I_{1,n}$. Posto $e_0 = (1, 0, \dots, 0)^\top \in M$,

$$\mathbf{O}^+(1, n) = \{\mathbf{a} \in \mathbf{O}(1, n) \mid e_0^\top I_{1,n} \mathbf{a} \cdot e_0 > 0\}$$

è un sottogruppo normale di indice due di $\mathbf{O}(1, n)$, che opera transitivamente su M e lascia invariata la metrica riemanniana g . Lo stabilizzatore di e_0 in $\mathbf{O}^+(1, n)$ è un sottogruppo compatto, isomorfo ad $\mathbf{O}(n)$. Questa costruzione è dunque un caso particolare di quella dell'Esempio.,10.10.7.

ESEMPIO 10.10.12. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie semisemplice con algebra di Lie \mathfrak{g} . Per un criterio di Cartan, la semisemplicità è equivalente al fatto che la forma di Killing

$$(10.44) \quad \kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{trac}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

sia non degenera su \mathfrak{g} . Se \mathbf{G} non è compatto, la forma di Killing è indefinita e la

$$(10.45) \quad g(X_{\mathbf{a}}^*, Y_{\mathbf{a}}^*) = -\kappa(X, Y), \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{g}$$

definisce allora una metrica pseudo-riemanniana su \mathbf{G} .

10.11. Estensione della metrica ai fibrati tensoriali

Sia b una forma bilineare simmetrica, definita su uno spazio vettoriale reale V , di dimensione finita m . Risulta allora univocamente definita una forma bilineare simmetrica, che denoteremo ancora con b , sulla potenza tensoriale k -esima $V^{\otimes k}$ e che, sulle coppie di tensori di rango uno, dà

$$b(v_1 \otimes \dots \otimes v_k, w_1 \otimes \dots \otimes w_k) = b(v_1, w_1) \dots b(v_k, w_k).$$

Fissata una base e_1, \dots, e_m di V , poniamo $b_{i,j} = b(e_i, e_j)$ e siano $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in V^{\otimes k}$ con $\mathbf{s} = \sum_{i_1, \dots, i_k} s^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$, $\mathbf{t} = \sum_{j_1, \dots, j_k} t^{j_1, \dots, j_k} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_k}$. Allora

$$b(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k, \\ j_1, \dots, j_k}} b_{i_1, j_1} \dots b_{i_k, j_k} s^{i_1, \dots, i_k} t^{j_1, \dots, j_k}.$$

Se b è non degenera, l'applicazione lineare $B_b : V \rightarrow V^*$ ad essa associata è un isomorfismo. Utilizzando la B_b , possiamo definire una forma bilineare simmetrica su V^* ponendo

$$b(\xi, \eta) = b(B_b^{-1}(\xi), B_b^{-1}(\eta)), \quad \forall \xi, \eta \in V^*.$$

Se indichiamo con $(b^{i,j})$ l'inversa della matrice $(b_{i,j})$, otteniamo che

$$b(\xi, \eta) = \sum_{i,j} b^{i,j} \xi_i \eta_j,$$

ove $\xi = \sum_i \xi_i e^i$, $\eta = \sum_i \eta_i e^i$ per la base duale e^1, \dots, e^m in V^* di e_1, \dots, e_m .

Possiamo quindi definire il prodotto di tensori h -covarianti e k -controvarianti

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_h \\ j_1, \dots, j_k}} s_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_h} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_k}, \\ \mathbf{t} &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_h \\ j_1, \dots, j_k}} t_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_h} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_k}, \end{aligned}$$

mediante

$$b(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum g_{i_1, i'_1} \dots b_{i_h, i'_h} b^{j_1, j'_1} \dots b^{j_k, j'_k} s_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} t_{j'_1, \dots, j'_k}^{i'_1, \dots, i'_h}.$$

Osserviamo ancora che le applicazioni

$$\begin{aligned} T^{h,k}V \ni \mathbf{s} &\longrightarrow b_{i_1, j_1+k} \dots b_{i_h, j_h+k} s_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_h+k} \in T^{0, h+k}V, \\ T^{h,k}V \ni \mathbf{s} &\longrightarrow b^{j_1, i_1+k} \dots b^{j_k, i_k+k} s_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_h+k} \in T^{h+k, 0}V \end{aligned}$$

sono, per le estensioni della b , isometrie lineari.

Tutte queste considerazioni si estendono in modo ovvio ai tensori definiti su una varietà pseudo-riemanniana (M, g) .

10.12. Tensore di curvatura di una varietà pseudo-riemanniana

Sia (M, g) una varietà pseudo-riemanniana di dimensione m . Se b è una forma bilineare simmetrica non degenera in \mathbb{R}^m con la segnatura di g , allora la connessione di Levi-Civita ammette una $\mathbf{O}_b(\mathbb{R}^m)$ -riduzione ad $\mathbf{O}_b(M)$. In particolare, la forma di Cartan ω e la forma di curvatura Ω , ristrette ad $\mathbf{O}_b(M)$, sono a valori in $\mathfrak{o}_b(\mathbb{R}^m)$. Perciò il tensore di curvatura R , corrispondente alla forma $\Omega \in \Omega_{\text{Ad}, 0}^2(\mathbf{O}_b(M), \mathfrak{o}_b(\mathbb{R}^m))$, è una forma $R \in \Omega^2(M, \mathfrak{o}_g(M))$, cioè a valori nel sottofibrato $\mathfrak{o}_g(M)$ del fibrato $\mathcal{E}nd(TM)$ degli endomorfismi di TM , che consiste degli endomorfismi $A \in \mathcal{E}nd(T_p M)$ tali che

$$g(Av, w) + g(v, Aw) = 0, \quad \forall v, w \in T_p M.$$

DEFINIZIONE 10.12.1. Il *tensore di curvatura controvariante* di una varietà pseudo-riemanniana (M, g) è il tensore

$$(10.46) \quad \mathbf{R}(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(\mathbf{R}(X_1, X_2)X_3, X_4), \quad \forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M).$$

Il tensore di curvatura controvariante ci permette di esplicitare alcune proprietà di simmetria del tensore di curvatura. Abbiamo

PROPOSIZIONE 10.12.2. *Il tensore di curvatura controvariante verifica le identità algebriche*

$$(10.47) \quad R(X_2, X_1, X_3, X_4) = -R(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

$$(10.48) \quad R(X_1, X_2, X_4, X_3) = -R(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

$$(10.49) \quad R(X_3, X_4, X_1, X_2) = R(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

$$(10.50) \quad R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_2, X_3, X_1, X_4) + R(X_3, X_1, X_2, X_4) = 0, \\ \forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Le (10.47), (10.48) sono conseguenza la prima del fatto che R è una forma alternata e la seconda del fatto che R è g -antisimmetrica. La (10.50) è conseguenza dell'identità algebrica di Bianchi. Mostriamo che dalle (10.47), (10.48) ed (10.50) segue la (10.49). Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} R(X_3, X_4, X_1, X_2) &= -R(X_4, X_1, X_3, X_2) - R(X_1, X_3, X_4, X_2) \\ &= R(X_4, X_1, X_2, X_3) + R(X_1, X_3, X_2, X_4) \\ &= -R(X_1, X_2, X_4, X_3) - R(X_2, X_1, X_3, X_4) \\ &\quad - R(X_2, X_4, X_1, X_3) - R(X_3, X_2, X_1, X_4) \\ &= 2R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_2, X_4, X_3, X_1) + R(X_3, X_2, X_4, X_1) \\ &= 2R(X_1, X_2, X_3, X_4) - R(X_3, X_4, X_1, X_2). \end{aligned}$$

La dimostrazione è completa. \square

10.13. Connessioni principali su varietà dotate di una connessione lineare

Premettiamo alcune osservazioni sul prodotto di fibrati principali.

10.13.1. Prodotto di connessioni principali. Siano $\xi_i = (P_i, \pi_i, M, \mathbf{G}_i)$, per $i = 1, 2$, due fibrati principali. Il loro prodotto è un fibrato principale

$$\xi = \xi_1 \times_M \xi_2 = (P, \pi, M, \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2)$$

su M , con spazio totale

$$P = \{(\sigma_1, \sigma_2) \mid \pi_1(\sigma_1) = \pi_2(\sigma_2)\}$$

e gruppo strutturale $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$, che agisce su P mediante

$$(\sigma_1, \sigma_2) \cdot (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = (\sigma_1 \cdot \mathbf{a}_1, \sigma_2 \cdot \mathbf{a}_2), \quad \forall (\sigma_1, \sigma_2) \in P, \quad \forall \mathbf{a}_1 \in \mathbf{G}_1, \quad \forall \mathbf{a}_2 \in \mathbf{G}_2.$$

L'algebra di Lie di \mathbf{G} è la somma diretta $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ delle algebre di Lie \mathfrak{g}_i dei gruppi \mathbf{G}_i , per $i = 1, 2$. Indichiamo con $\text{pr}_i : P \rightarrow P_i$ le proiezioni $\text{pr}_i(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_i$.

PROPOSIZIONE 10.13.1. *Se $\omega_i \in \Omega^1(P_i, \mathfrak{g}_i)$ sono le forme di Cartan di connessioni principali su ξ_i , per $i = 1, 2$, allora $\omega = \text{pr}_1^* \omega_1 \oplus \text{pr}_2^* \omega_2 \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ è la forma di Cartan di una connessione principale su ξ .* \square

Siano (ρ_i, V_i) due rappresentazioni lineari dei gruppi \mathbf{G}_i . Allora (ρ, V) , con $V = V_1 \otimes V_2$ e $\rho(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(v_1 \otimes v_2) = ([\rho_1]_{\mathbf{a}_1}(v_1)) \otimes ([\rho_2]_{\mathbf{a}_2}(v_2))$ è una rappresentazione

lineare di $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$. La derivazione covariante ∇ su ξ_V si esprime per mezzo delle derivazioni covarianti ∇^i sui ξ_{iV_i} mediante

$$\nabla_X(s_1 \otimes s_2) = (\nabla_X^1 s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes (\nabla_X^2 s_2), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall s_i \in \Gamma(M, E_{V_i}), \quad i = 1, 2.$$

10.13.2. Connessioni principali su spazi affini. Sia $\xi = (P, \pi, M, \mathbf{G})$ un fibrato principale su una varietà differenziabile M di dimensione m . Siano fissati una connessione \mathbf{G} -principale con forma di Cartan $\omega^P \in \Omega_{\text{Ad}}^1(P, \mathfrak{g})$ su ξ ed una connessione lineare su M , con forma di Cartan $\omega^M \in \Omega_{\text{Ad}}^1(L(M), \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$.

Siano (ρ, V) una rappresentazione lineare di \mathbf{G} ed $\eta = (E_V, \pi_V, M, V)$ il corrispondente fibrato vettoriale. Indichiamo con ∇ la differenziazione covariante su η e con D quella definita su $\underline{T}^*(M)$ dalla connessione lineare.

Utilizzando la costruzione generale di §10.13.1, possiamo definire una derivazione covariante sugli spazi $\underline{T}^{p,q}(M, E_V)$ dei tensori con coefficienti in E_V , che denoteremo ancora con ∇ . Per essa vale la

$$(10.51) \quad \nabla_X(s \otimes \phi) = (\nabla_X s) \otimes \phi + s \otimes D_X \phi, \quad \forall s \in \Gamma(M, E_V), \quad \forall \phi \in \underline{T}^{(p,q)}(M).$$

PROPOSIZIONE 10.13.2. *La derivazione covariante definisce un'applicazione lineare*

$$(10.52) \quad \nabla : \underline{T}^{p,q}(M, E_V) \longrightarrow \underline{T}^{p,q+1}(M, E_V). \quad \square$$

Usando la derivazione covariante per i tensori a coefficienti in E_V , possiamo definire prima le derivate covarianti seconde, e poi, per ricorrenza, quelle di ordine superiore, di una sezione $s \in \Gamma(M, E_V)$. Ad esempio, abbiamo la

DEFINIZIONE 10.13.3. La derivata seconda covariante di una sezione $s \in \Gamma(M, E_V)$ rispetto ai campi $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ è definita da

$$(10.53) \quad \nabla_{X,Y}^2 s = \nabla_X(\nabla_Y s) - \nabla_{D_X Y} s.$$

OSSERVAZIONE 10.13.4. La derivata covariante $\nabla^k s$ di una sezione $s \in \Gamma(M, E_V)$ è un tensore in $\underline{T}^{0,k}(M, E_V)$, cioè un'applicazione $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ volte}} \ni (X_1, \dots, X_k) \longrightarrow \nabla_{X_1, \dots, X_k}^k s \in \Gamma(M, E_V).$$

Verifichiamo ad esempio la $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilinearità della derivata seconda. La $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linearità di $\nabla_{X,Y}^2 s$ rispetto ad X è ovvia. Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla_{X,fY}^2 s &= \nabla_X(\nabla_{fY} s) - \nabla_{D_X(fY)} s = \nabla_X(f \nabla_Y s) - \nabla_{f D_X Y + (Xf)Y} s \\ &= (f \nabla_X(\nabla_Y s) + (Xf) \nabla_Y s) - (f \nabla_{D_X Y} s + (Xf) \nabla_Y s) \\ &= f(\nabla_X(\nabla_Y s) + \nabla_{D_X Y} s) = f \nabla_{X,Y}^2 s. \end{aligned}$$

ESEMPIO 10.13.5. Se η è il fibrato banale con spazio totale $E_V = M \times V$ e ∇ la connessione banale, allora la derivata seconda di una sezione $s \in \mathcal{C}^\infty(M, V)$ è

$$\nabla_{X,Y}^2 s = XYs - (D_X Y)s.$$

Se M fosse un aperto di \mathbb{R}^m , con la connessione lineare banale, ed $X = \sum_{i=1}^m a^i \partial/\partial x^i$, $Y = \sum_{i=1}^m b^i \partial/\partial x^i$ allora

$$\nabla_{X,Y}^2 s = \sum_{i,j=1}^m a^i b^j \frac{\partial^2 s}{\partial x^i \partial x^j}.$$

OSSERVAZIONE 10.13.6. Osserviamo che, nell'Esempio 10.13.5, con connessioni banali sia sul fibrato banale che sull'aperto di \mathbb{R}^m che ne è la base, il tensore della derivata seconda coincide con la matrice Hessiana dell'applicazione s ed è quindi, in particolare, simmetrico.

In generale, otteniamo

$$\begin{aligned} \nabla_{X,Y}^2 s - \nabla_{Y,X}^2 s &= (\nabla_X \nabla_Y s - \nabla_{D_X Y} s) - (\nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{D_Y X} s) \\ &= (\nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s) - \nabla_{D_X Y - D_Y X - [X,Y]} s \\ &= R^\nabla(X, Y) s - \nabla_{T^D(X,Y)} s, \end{aligned}$$

ove abbiamo indicato con R^∇ la curvatura della connessione lineare ∇ e con T^D la torsione della connessione lineare D .

Quindi la curvatura di ∇ in modo algebrico e la torsione di D in modo differenziale ci permettono di calcolare l'ostruzione al fatto che il tensore della derivata seconda sia simmetrico.

Abbiamo quindi ottenuto la *formula di Ricci*:

$$(10.54) \quad \nabla_{X,Y}^2 s - \nabla_{Y,X}^2 s = R^\nabla(X, Y) s - \nabla_{T^D(X,Y)} s, \quad \forall s \in \mathcal{E}(M), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Si possono ottenere altre formule di Ricci, che esprimono in termini di curvatura e torsione come cambino i tensori delle derivate covarianti di ordine superiore rispetto a permutazioni degli argomenti (vedi ad esempio [5]).

Applicazione esponenziale e campi di Jacobi

11.1. L'applicazione esponenziale

Sia M una varietà differenziabile affine. Fissiamo un punto $\mathfrak{p}_0 \in M$. Le geodetiche di punto iniziale \mathfrak{p}_0 sono parametrizzate dalla loro velocità iniziale $v \in T_{\mathfrak{p}_0}M$. La geodetica γ_v , di velocità iniziale v , è la soluzione del problema di Cauchy

$$(11.1) \quad \begin{cases} \frac{D^2\gamma_v}{dt^2} = 0, \\ \gamma_v(0) = \mathfrak{p}_0, \\ \dot{\gamma}_v(0) = v. \end{cases}$$

Indichiamo con I_v il suo intervallo massimale di definizione. È $I_{k \cdot v} = k^{-1}I_v$ per ogni numero reale $k \neq 0$ e

$$(11.2) \quad \gamma_{k \cdot v}(t) = \gamma_v(kt), \quad \forall t \in k^{-1}I_v.$$

Per la dipendenza \mathcal{C}^∞ delle soluzioni del problema di Cauchy dai dati iniziali, (11.1), l'insieme

$$(11.3) \quad W_{\mathfrak{p}_0} = \{v \in T_{\mathfrak{p}_0} \mid 1 \in I_v\}$$

è un intorno aperto di 0 in $T_{\mathfrak{p}_0}M$, che, per la (11.2) è stellato rispetto all'origine. La

$$(11.4) \quad \text{Exp}_{\mathfrak{p}_0} : W_{\mathfrak{p}_0} \ni v \longrightarrow \gamma_v(1) \in M$$

è un'applicazione di classe \mathcal{C}^∞ .

DEFINIZIONE 11.1.1. La (11.4) si dice *l'applicazione esponenziale in \mathfrak{p}_0* associata alla connessione lineare Γ di M .

OSSERVAZIONE 11.1.2. Se la connessione Γ è completa, allora, per ogni punto \mathfrak{p}_0 , l'applicazione esponenziale è definita su $T_{\mathfrak{p}_0}M$.

ESEMPIO 11.1.3. Se \mathbf{G} è un gruppo di Lie reale su cui sia fissata una connessione di Cartan-Shauten, è $\text{Exp}_e(X) = \exp(X)$ per ogni $X \in \mathfrak{g} = T_e\mathbf{G}$. Usando l'identificazione $T\mathbf{G} \ni v \rightarrow (\pi(v), \omega_{\mathbf{G}}(v)) \in \mathbf{G} \times \mathfrak{g}$, abbiamo $\text{exp}_{\mathfrak{a}}(X) = \mathfrak{a} \cdot \exp(X)$ per ogni $\mathfrak{a} \in \mathbf{G}$ ed $X \in \mathfrak{g}$. In particolare, \mathbf{G} con una qualsiasi delle connessioni di Cartan-Shauten, è completo.

PROPOSIZIONE 11.1.4. *L'applicazione esponenziale in $\mathfrak{p}_0 \in M$ definisce un diffeomorfismo di un intorno aperto di 0 in $T_{\mathfrak{p}_0}M$ su un intorno aperto di \mathfrak{p}_0 in M .*

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato è conseguenza del teorema dell'applicazione inversa, perché il differenziale di $\text{Exp}_{\mathfrak{p}_0}$ in 0 è l'identità su $T_{\mathfrak{p}_0}M$. \square

In particolare, l'esponenziale in \mathfrak{p}_0 definisce una carta locale con centro in \mathfrak{p}_0 .

11.2. Intorni normali ed intorni convessi

DEFINIZIONE 11.2.1. Un intorno stellato $N_0(\mathfrak{p})$ dell'origine in $T_{\mathfrak{p}}M$, contenuto in $W_{\mathfrak{p}}$, e su cui $\text{Exp}_{\mathfrak{p}}$ definisca un diffeomorfismo su un aperto $N_{\mathfrak{p}}$ di M , si dice *normale*, ed $N_{\mathfrak{p}} = \text{Exp}_{\mathfrak{p}}(N_0(\mathfrak{p}))$ si dice *un intorno normale di \mathfrak{p} in M* .

DEFINIZIONE 11.2.2. Se v_1, \dots, v_m è una base di $T_{\mathfrak{p}}M$, si dicono *coordinate normali del punto $\mathfrak{q} \in N_{\mathfrak{p}}$* i numeri reali x^1, \dots, x^m tali che

$$\text{Exp}_{\mathfrak{p}}(x^1 v_1 + \dots + x^m v_m) = \mathfrak{q}.$$

Le coordinate normali definiscono una carta coordinata in $N_{\mathfrak{p}}$.

TEOREMA 11.2.3. *Ogni punto $\mathfrak{p}_0 \in M$ ha un sistema fondamentale di intorni normali $N_{\mathfrak{p}_0}$ che sono anche intorni normali di ciascuno dei suoi punti.*

In particolare, per ogni coppia di punti $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ di $N_{\mathfrak{p}_0}$ vi è una e una sola geodetica di estremi¹ $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ contenuta in $N_{\mathfrak{p}_0}$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo in M coordinate locali x^1, \dots, x^m con centro in \mathfrak{p}_0 . Se $\mathfrak{q}_0 \in U$ ed $r > 0$, e definiamo

$$V(\mathfrak{q}_0, r) = \left\{ \mathfrak{p} \in U \mid \sum_{j=1}^m |x^j(\mathfrak{p}) - x^j(\mathfrak{q}_0)|^2 < r^2 \right\}.$$

Utilizzando i teoremi di esistenza, unicità, dipendenza \mathcal{C}^∞ dai dati iniziali per le equazioni differenziali ordinarie ed il teorema delle funzioni implicite, possiamo trovare un $r_0 > 0$ tale che, per ogni $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{p}_0, 2r_0)$, l'aperto $V(\mathfrak{p}, 2r_0)$ sia contenuto in un intorno normale di \mathfrak{p} . In particolare, tutti gli aperti $V(\mathfrak{p}, r)$, con $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{p}_0, r_0)$ ed $r \leq r_0$ sono *semplici*, ovvero contengono al più un segmento di geodetica che congiunga due punti assegnati.

Sia $F(\mathfrak{p}) = \sum_{j=1}^m |x^j(\mathfrak{p})|^2 \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Ad una geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([a, b], V(\mathfrak{p}_0, r_0))$ associamo la funzione $G(t) = F(\gamma(t)) \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$. Abbiamo²

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &= 2 \sum_{j=1}^m x^j(t) \dot{x}^j(t), \\ \ddot{G}(t) &= 2 \sum_{j=1}^m \left(|\dot{x}^j(t)|^2 + x^j(t) \ddot{x}^j(t) \right) \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^m \left(\delta_{i,j} - \sum_{h=1}^m x^h(t) \cdot \Gamma_{i,j}^h(\gamma(t)) \right) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t). \end{aligned}$$

Possiamo quindi determinare un numero reale r^* , con $0 < r^* \leq r_0$, tale che, per ogni geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow V(\mathfrak{p}_0, r^*)$, la funzione $F(\gamma(t))$ sia strettamente convessa.

¹Se $\gamma \in \mathcal{C}^0([0, 1], M)$ chiamiamo i punti $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ *estremi* di γ .

²I simboli di Christoffel $\Gamma_{i,j}^h$ sono definiti da $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{h=1}^m \Gamma_{i,j}^h \frac{\partial}{\partial x^h}$. Le geodetiche soddisfano le equazioni locali $\ddot{x}^h + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{i,j}^h \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$, per $1 \leq h \leq m$.

Fissiamo un $r > 0$ tale che ogni $p \in V(p_0, r)$ abbia un intorno normale N_p con $V(p_0, r) \subseteq N_p \subseteq V(p_0, r^*)$. Dati due punti $q_0, q_1 \in V(p_0, r)$ vi è un'unica geodetica $\gamma : [0, 1] \rightarrow V(p_0, r^*)$, che congiunge q_0 a q_1 . Poiché $F(\gamma(0)) < r^2$, $F(\gamma(1)) < r^2$, segue dalla convessità di $F(\gamma(t))$ che $\gamma(t) \in V(p_0, r)$ per ogni $t \in [0, 1]$. \square

DEFINIZIONE 11.2.4. Un sottoinsieme A di M si dice

- *convesso* se, per ogni coppia di suoi punti contiene una geodetica che li congiunge;
- *semplice* se, per ogni coppia di suoi punti vi è al più una geodetica che li congiunge.

Per il Teorema 11.2.3, abbiamo:

TEOREMA 11.2.5. *Ogni punto di M ammette un sistema fondamentale di intorni aperti semplici e convessi.* \square

Sia N_p un intorno normale di un punto p di M . Per ogni q in N_p v'è un'unica geodetica $\gamma_{[p,q]} : [0, 1] \rightarrow N_p$ che congiunge p a q . Il trasporto parallelo lungo la geodetica $\gamma_{[p,q]}$ ci permette di definire un'applicazione lineare $\tau_{p,q} : T_p M \rightarrow T_q M$. Indichiamo con $v^* \in \mathfrak{X}(N_p)$ il campo di vettori

$$(11.5) \quad v^*(q) = \tau_{p,q}(v) \in \mathfrak{X}(N_p).$$

DEFINIZIONE 11.2.6. Il campo di vettori (11.5) si dice *adattato* al vettore tangente $v \in T_p M$.

Possiamo utilizzare i campi di vettori adattati per esprimere con una formula il differenziale dell'esponenziale di una connessione analitica.

DEFINIZIONE 11.2.7. Se M è una varietà analitica reale, la connessione ∇ si dice *analitica* se $\nabla_X Y$ è analitico in $U^{\text{aperto}} \subset M$ per ogni coppia di campi di vettori X, Y che siano analitici in U .

Questa condizione equivale al fatto che i simboli di Christoffel, calcolati in un sistema di riferimento analitico, siano analitici.

Indichiamo con L_X la derivata di Lie rispetto al campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$.

TEOREMA 11.2.8. *Sia M una varietà analitica su cui sia assegnata una connessione affine analitica Γ . Siano $p \in M$ e $v \in T_p M$. Allora esiste un $\epsilon > 0$ tale che Exp_p sia definita ed analitica in un intorno di $\{t \cdot v \mid -\epsilon \leq t \leq \epsilon\}$ e si ha:*

$$(11.6) \quad (d\text{Exp}_p)(t \cdot v)(w) = \left\{ \frac{1 - e^{L_{-tv^*}}}{L_{tv^*}}(w^*) \right\}_{\text{Exp}_p(t \cdot v)} \quad \forall |t| \leq \epsilon.$$

OSSERVAZIONE 11.2.9. Se (M, g) è una varietà Riemanniana, in coordinate normali (N_{p_0}, x) abbiamo:

$$(11.7) \quad \begin{cases} g_{i,j}(x) = \delta_{i,j} + O(|x|^2) \\ \Gamma_{j,k}^i(0) = 0. \end{cases}$$

11.3. Definizione dei campi di Jacobi

11.3.1. Superfici parametriche. Sia M una varietà differenziabile.

DEFINIZIONE 11.3.1. Una *superficie parametrica in M* è il dato di un aperto connesso U di \mathbb{R}^2 e di un'applicazione differenziabile $f : U \rightarrow M$.

Siano (t, s) le coordinate cartesiane di \mathbb{R}^2 . Poniamo

$$\partial f(t, s)/\partial t = f_*(\partial/\partial t)_{(t,s)}, \quad \text{e} \quad \partial f(t, s)/\partial s = f_*(\partial/\partial s)_{(t,s)}.$$

Chiamiamo *campo di vettori su f* un'applicazione differenziabile $V : U \rightarrow TM$ che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & & TM \\ & \nearrow V & \downarrow \pi \\ U & & M \\ & \searrow f & \end{array}$$

Assegnata una connessione lineare Γ su M , possiamo calcolare le derivate covarianti di V lungo le curve $t \rightarrow f(t, s)$ (per s fissato) ed $s \rightarrow f(t, s)$ (per t fissato). Le denoteremo con

$$\frac{DV}{\partial t}(t, s) \quad \text{e} \quad \frac{DV}{\partial s}(t, s).$$

LEMMA 11.3.2. *Siano $f : U \rightarrow M$ una superficie parametrica in M e V un campo di vettori su f . Valgono allora le:*

$$(11.8) \quad \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} = T \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right),$$

$$(11.9) \quad \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V = R \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V.$$

DIMOSTRAZIONE. La verifica delle formule è immediata quando la f si scriva, in un sistema di coordinate locali x^1, \dots, x^m , mediante:

$$(t, s) \rightarrow (t, s, 0, \dots, 0).$$

Ciò è possibile vicino a ciascun punto (t, s) in cui la f sia un'immersione, cioè in cui $\frac{\partial f}{\partial t}$ e $\frac{\partial f}{\partial s}$ siano linearmente indipendenti. Perturbando la f , ed osservando che le formule che vogliamo dimostrare dipendono con continuità dalla f e dalle sue derivate, ci riconduciamo al caso in cui f sia un'immersione. \square

11.3.2. L'equazione di Jacobi. Fissiamo un punto $p \in M$ e consideriamo, sull'intorno W_p di 0 in $T_p M$, l'applicazione esponenziale Exp_p . Per calcolarne il differenziale in un punto $v \in W_p$, consideriamo una curva $v(s) \in \mathcal{C}^\infty([-\epsilon, \epsilon], T_p M)$ con $v(0) = v$ e $\dot{v}(0) = w$ e la superficie parametrica

$$(11.10) \quad f(t, s) = \text{Exp}_p(t v(s)),$$

definita su un intorno aperto U di $[0, 1] \times (-\epsilon, \epsilon)$ in \mathbb{R}^2 . È

$$(11.11) \quad (\text{Exp}_p)_*(v)(w) = \frac{\partial f(1, 0)}{\partial s}.$$

Il campo di vettori $J(t) = \frac{\partial f(t, 0)}{\partial s}$ soddisfa un'equazione differenziale lineare del second'ordine lungo la geodetica $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$. Infatti, poiché per ogni s la $t \rightarrow f(t, s) = \exp_p(tv(s))$ è una geodetica, per il Lemma 11.3.2 abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} + R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{D}{\partial t} \left(T\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \right) + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto l'equazione di Jacobi per il campo di vettori $J(t)$ lungo la geodetica $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$:

$$(11.12) \quad \frac{D^2 J}{dt^2} + \frac{D T(J, \dot{\gamma})}{dt} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

L'equazione di Jacobi per una connessione simmetrica si semplifica nella

$$(11.13) \quad \ddot{J} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ una geodetica.

DEFINIZIONE 11.3.3. Chiamiamo *campi di Jacobi* lungo γ le soluzioni della (11.12).

Indichiamo con $\mathcal{J}(\gamma)$ l'insieme dei campi di Jacobi lungo γ .

PROPOSIZIONE 11.3.4. Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ una geodetica e sia $t_0 \in I$. Per ogni coppia v_0, w_0 di vettori tangenti in $T_{\gamma(t_0)}M$ esiste uno ed un solo campo di Jacobi J lungo γ che soddisfi le condizioni iniziali $J(t_0) = v_0, \dot{J}(t_0) = w_0$.

$\mathcal{J}(\gamma)$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione $2m$.

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato segue dal fatto che la (11.12) è un'equazione differenziale ordinaria del second'ordine lineare per il campo $J(t)$. \square

LEMMA 11.3.5. Siano $p \in M, v, w \in T_p M$. Allora

$$(11.14) \quad J(t) = \text{Exp}_{p_*}(tv)(tw)$$

è il campo di Jacobi lungo la geodetica $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$ che soddisfa le condizioni iniziali:

$$(11.15) \quad J(0) = 0, \quad \dot{J}(0) = w.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, $J(t) = \partial f(t, 0)/\partial s$ per la superficie parametrica

$$(t, s) \rightarrow f(t, s) = \text{Exp}_p(t(v + sw)).$$

Poiché $f(0, s) = p$ per ogni s , è $J(0) = 0$. Abbiamo poi

$$\begin{aligned} \frac{DJ(0)}{dt} &= \left(\frac{D}{dt}\right)_{t=0} \left[(\text{Exp}_p)_*(tv)(tw) \right] = \left(\frac{D}{dt}\right)_{t=0} \left[t (\text{Exp}_p)_*(tv)(w) \right] \\ &= \left[(\text{Exp}_p)_*(tv)(w) + t \frac{D}{dt} ((\text{Exp}_p)_*(tv)(w)) \right]_{t=0} = w. \end{aligned}$$

\square

OSSERVAZIONE 11.3.6. Per ogni geodetica γ , la sua velocità $\dot{\gamma}$ ed il campo $t\dot{\gamma}$ sono di Jacobi lungo γ .

Dal Lemma 11.3.5 abbiamo:

PROPOSIZIONE 11.3.7. Sia N_0 un intorno normale di 0 in T_pM , $v \in N_0$ e $w_0 \in T_pM$. Allora $d\text{Exp}_p(v)(w)$ è il valore in 1 del campo di Jacobi J_w lungo la geodetica $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$, che soddisfa le condizioni iniziali $J_w(0) = 0$, $\dot{J}_w(0) = w$. \square

COROLLARIO 11.3.8. I punti singolari di Exp_p sono i vettori $v \in N_0$ per cui esiste un campo di Jacobi non nullo lungo $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$ che si annulli in 0 ed 1. \square

ESEMPIO 11.3.9. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} . Per calcolare il differenziale dell'applicazione esponenziale, consideriamo su \mathbf{G} la connessione lineare di Cartan-Shauren di tipo (+). Essa ha curvatura nulla e torsione $T(X^*, Y^*) = [X^*, Y^*]$ sui campi di vettori invarianti a sinistra. Fissiamo $X \in \mathfrak{g}$. L'equazione dei campi di Jacobi lungo la geodetica $\gamma(t) = \exp(tX)$ si può scrivere, utilizzando l'isomorfismo di \mathbf{TG} con $\mathbf{G} \times \mathfrak{g}$ dato dalla forma di Maurer-Cartan, e posto quindi $J(t) = \exp(tX)_* Y(t)$, mediante

$$Y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{g}), \quad \ddot{Y} + [X, \dot{Y}] = 0.$$

Abbiamo cioè

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Y(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & -\text{ad}(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & -\text{ad}(X) \end{pmatrix}^h = \begin{pmatrix} 0 & (-\text{ad}(X))^{h-1} \\ 0 & (-\text{ad}(X))^h \end{pmatrix} \quad \forall h > 0,$$

otteniamo

$$\exp \left(t \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & -\text{ad}(X) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} I & \frac{I - \exp(-t \text{ad}(X))}{\text{ad}(X)} \\ 0 & \exp(-t \text{ad}(X)) \end{pmatrix},$$

ove abbiamo posto, se A è un endomorfismo di \mathfrak{g} ,

$$\frac{\exp(A) - I}{A} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{A^h}{(h+1)!}.$$

I campi di Jacobi lungo γ sono quindi della forma

$$Y(t) = Y_0 + \frac{I - \exp(-t \text{ad}(X))}{\text{ad}(X)} Y_1, \quad Y_0, Y_1 \in \mathfrak{g}.$$

In particolare, poiché il differenziale dell'esponenziale in X valuta in 1 il campo di Jacobi con valore iniziale 0 e velocità iniziale $Z \in \mathfrak{g}$, otteniamo

$$d\text{exp}(X)(Z) = \frac{I - \exp(-t \text{ad}(X))}{\text{ad}(X)} \exp(X)Z.$$

11.4. Campi di Jacobi su una varietà Riemanniana

Supponiamo che (M, g) sia una varietà Riemanniana, e consideriamo su M la connessione di Levi-Civita.

DEFINIZIONE 11.4.1. Un *riferimento mobile* lungo una curva $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ è una curva $\sigma = (e_1, \dots, e_m) \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{O}(M))$ tale che:

- (1) per ogni $t \in I$, $e_1(t), \dots, e_m(t)$ è una base ortonormale di $T_{\gamma(t)}M$;
- (2) per ogni $i = 1, \dots, m$, $e_i \in \mathcal{C}^\infty(I, TM)$ è parallelo lungo γ .

Un riferimento mobile è cioè un sollevamento orizzontale $\tilde{\gamma}$ di γ in $\mathfrak{o}(M)$.

Se $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ è una geodetica, allora

$$\frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 2g\left(\frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt}, \dot{\gamma}(t)\right) = 0.$$

Quindi

LEMMA 11.4.2. *Le geodetiche non costanti di una varietà Riemanniana (M, g) sono parametrizzate mediante un multiplo della lunghezza d'arco.* \square

Potremo dunque scegliere, su una geodetica non costante $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$, un riferimento mobile $(e_1, \dots, e_m) \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{O}(M))$ con $e_1 = \dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|$. Poniamo

$$(11.16) \quad a_{i,j}(t) = R(e_i(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), e_j(t)) = g(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)), \dot{\gamma}(t), e_j(t)).$$

Per la prima identità di Bianchi, i coefficienti $a_{i,j}$ sono simmetrici. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} a_{i,j}(t) &= g(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)) = -g(R((e_i(t), \dot{\gamma}(t)) e_j(t), \dot{\gamma}(t))) \\ &= g(R(\dot{\gamma}(t), e_j(t)) e_i(t), \dot{\gamma}(t)) + g(R(e_j(t), e_i(t)) \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) \\ &= g(R(e_j(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_i(t)) = a_{j,i}(t), \end{aligned}$$

perché $R(v, w)$ è un endomorfismo g_p -antisimmetrico di T_pM per ogni $v, w \in T_pM$. È poi, per la scelta di e_1 , $a_{1,i} = a_{i,1} = 0$ per ogni $i = 1, \dots, m$.

Le componenti f^i di un campo di Jacobi $J(t) = \sum_{i=1}^m f^i(t)e_i(t)$ rispetto al riferimento mobile scelto sulla geodetica γ , soddisfano il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$(11.17) \quad \ddot{f}^i + \sum_{j=1}^m a_{i,j} f^j = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

In particolare,

$$(11.18) \quad \ddot{f}^1 = 0.$$

I campi di Jacobi $\dot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}\| e_1(t)$ e $t\dot{\gamma}(t) = t\|\dot{\gamma}\| e_1(t)$ sono le soluzioni della (11.17), corrispondenti, rispettivamente, alle condizioni iniziali

$$\begin{cases} f(t_0) = (\|\dot{\gamma}\|, 0, \dots, 0), \\ \dot{f}(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad \begin{cases} f(t_0) = 0, \\ \dot{f}(t_0) = (\|\dot{\gamma}\|, 0, \dots, 0). \end{cases}$$

Dalla (11.18) segue il

LEMMA 11.4.3. Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, a], M)$ una geodetica e fissiamo $t_0 \in I$. Ogni campo di Jacobi J tale che

$$(11.19) \quad g(J(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) = 0 \quad e \quad g(\dot{J}(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) = 0$$

soddisfa

$$(11.20) \quad g(J(t), \dot{\gamma}(t)) = 0 \quad e \quad g(\dot{J}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0, \quad \forall t \in I. \quad \square$$

COROLLARIO 11.4.4. Sia $p_0 \in M$, $v \in W_{p_0} \subset T_{p_0}M$ e $w \in T_{p_0}M$ con $w \perp v$. Allora $\text{Exp}_{p_0}(v)_* w \perp \text{Exp}_{p_0}(v)_* v$. \square

Il tensore di curvatura R della connessione di Levi-Civita è una due-forma a coefficienti nel fibrato $\mathfrak{so}(M) \subset T^{1,1}M$ degli endomorfismi g -antisimmetrici di TM . La

$$(11.21) \quad R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4), \quad \forall X_1, X_2, X_3, X_4$$

definisce una forma bilineare simmetrica su $\Lambda^2 TM$, con $R(X_1 \wedge X_2, X_3 \wedge X_4) = R(X_1, X_2, X_3, X_4)$. In particolare, se α è il piano di $T_p M$ generato dai vettori X_1, X_2 , il quoziente $R(X_1, X_2, X_1, X_2)/(\|X_1 \wedge X_2\|^2)$, ove $\|X_1 \wedge X_2\|^2 = g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - |g(X_1, X_2)|^2$, non dipende dalla scelta della base X_1, X_2 di α .

DEFINIZIONE 11.4.5. Chiamiamo *curvatura sezionale* di (M, g) rispetto al piano α di TM il numero reale $K(\alpha)$ per cui

$$(11.22) \quad R(X_1, X_2, X_1, X_2) = -K(\alpha)(g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - |g(X_1, X_2)|^2)$$

per ogni base $X_1, X_2 \in T_p M$ di α .

ESEMPIO 11.4.6. Supponiamo che $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ sia un gruppo semplice lineare, la cui algebra di Lie \mathfrak{k} ammetta una decomposizione di Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{m}$, con $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}_n$ e $\mathfrak{m} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}_n$. Possiamo definire su \mathbf{G}/\mathbf{K} una struttura di spazio Riemanniano simmetrico definendo su \mathfrak{m} il prodotto scalare

$$g_{p_0}(X, Y) = \text{tr}_{\mathbb{R}}(XY) = \mathcal{R}e \text{trac}(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

Poiché $R_{p_0}(X, Y)Z = -[[X, Y], Z]$, abbiamo

$$\begin{aligned} -R(X, Y, X, Y) &= \text{tr}_{\mathbb{R}}([X, Y], [X, Y]) = \text{tr}_{\mathbb{R}}([X, Y]XY) - \text{tr}_{\mathbb{R}}(X[X, Y]Y) \\ &= \text{tr}_{\mathbb{R}}(XY[X, Y]) - \text{tr}_{\mathbb{R}}(YX[X, Y]) = \text{tr}_{\mathbb{R}}([X, Y][X, Y]) \end{aligned}$$

La curvatura sezionale è allora data da

$$K(\langle X, Y \rangle) = \text{tr}_{\mathbb{R}}([X, Y], [X, Y]) / (\text{tr}_{\mathbb{R}}(X^2)\text{tr}_{\mathbb{R}}(Y^2) - |\text{tr}_{\mathbb{R}}(XY)|^2) < 0$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{m}$. perché $[X, Y] \in \mathfrak{u}_n$ ed ha quindi autovalori puramente immaginari.

La somma diretta $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus i\mathfrak{m}$ è ancora un'algebra di Lie reale. Il sottogruppo analitico \mathbf{K} di $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ da essa generato è compatto. Il quoziente $M' = \mathbf{K}/\mathbf{K}_0$ è uno spazio Riemanniano simmetrico, con la metrica definita su $T_{p_0}M$ da

$$g_{p_0}(X, Y) = -\text{tr}_{\mathbb{R}}(XY), \quad \forall X, Y \in i\mathfrak{m}.$$

Sostituendo iX ed iY ad X ed Y nei calcoli precedenti otteniamo per la curvatura sezionale

$$K(\langle iX, iY \rangle) = -\text{tr}_{\mathbb{R}}([X, Y], [X, Y]) / (\text{tr}_{\mathbb{R}}(X^2)\text{tr}_{\mathbb{R}}(Y^2) - |\text{tr}_{\mathbb{R}}(XY)|^2) > 0$$

per ogni $iX, iY \in \text{im}$.

Gli spazi Riemanniani simmetrici M ed M' dell'esempio si dicono *in dualità*: possiamo dire che le curvatures sezionali dell'uno sono l'opposto delle curvatures sezionali dell'altro.

Se $\mathbf{G} = \mathbf{SO}^+(1, n)$, questa costruzione ci dà M uguale allo spazio di Lobachevskij n -dimensionale, con curvatura sezionale costante -1 , ed M' alla sfera S^n , con curvatura sezionale costante 1 .

ESEMPIO 11.4.7 (Campi di Jacobi su una varietà a curvatura sezionale costante). Supponiamo che M abbia curvatura sezionale costante K e sia γ una geodetica su M . Supponiamo che γ sia parametrizzata per lunghezza d'arco.

Fissiamo un campo di vettori $w(t)$ parallelo su γ , con $\|w(t)\| = 1$ e $g(w(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$. Allora $R(w(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = Kw(t)$. Poiché $Dw/dt = 0$ lungo γ , ne segue che le

$$(11.23) \quad J(t) = \begin{cases} K^{-1}(A \cos(t\sqrt{K}) + B \sin(t\sqrt{K})) \cdot w(t) & \text{se } K > 0, \\ (A + Bt) \cdot w(t) & \text{se } K = 0, \\ K^{-1}(A \cosh(t\sqrt{-K}) + B \sinh(t\sqrt{-K})) \cdot w(t) & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

sono campi di Jacobi ortogonali lungo γ . Tutti i campi di Jacobi ortogonali si ottengono al variare di $w(t)$ tra i campi di vettori ortogonali paralleli lungo γ .

ESEMPIO 11.4.8. Più in generale, possiamo considerare il caso in cui sia $\nabla R = 0$, che si verifica ad esempio per una metrica invariante su uno spazio omogeneo riduttivo. Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ una geodetica. Supporremo per semplicità che $0 \in I$ e $\|\dot{\gamma}\| = 1$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{a_{i,j}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} g(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)) \\ &= \frac{Dg}{dt}(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)) + g\left(\frac{DR}{dt}(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)\right) \\ &\quad + g(R(\dot{e}_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)) + g(R(e_i(t), \ddot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)) \\ &\quad + g(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)) + g(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), \dot{e}_j(t)) = 0 \end{aligned}$$

e quindi i coefficienti $a_{i,j}$ sono costanti lungo γ . Possiamo fissare il riferimento mobile $\sigma = (e_1, \dots, e_m)$ lungo γ in modo che i vettori e_i diagonalizzino $(a_{i,j})$, che cioè

$$\sum_{j=1}^m a_{i,j} e_j(t) = k_i e_i(t), \quad \text{per } i = 1, \dots, m$$

ove $k_1 = 0$ e k_2, \dots, k_m sono gli autovalori della matrice $(a_{i,j})$. Allora

$$J'_i = \begin{cases} k_i^{-1} \cos(t\sqrt{k}) e_i(t) & \text{se } k_i > 0, \\ e_i(t) & \text{se } k_i = 0, \\ k_i^{-1} \cosh(t\sqrt{-k_i}) & \text{se } k_i < 0, \end{cases} \quad J''_i = \begin{cases} k_i^{-1} \sin(t\sqrt{k}) e_i(t) & \text{se } k_i > 0, \\ t e_i(t) & \text{se } k_i = 0, \\ k_i^{-1} \sinh(t\sqrt{-k_i}) e_i(t) & \text{se } k_i < 0, \end{cases}$$

per $i = 1, \dots, m$ formano una base dello spazio vettoriale di $\mathcal{J}(\gamma)$.

11.5. Punti coniugati

Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([a, b], M)$ una geodetica.

DEFINIZIONE 11.5.1. Diciamo che t_0, t_1 , con $a \leq t_0 < t_1 \leq b$, sono *coniugati* lungo γ se esiste un campo di Jacobi $J(t)$ non identicamente nullo su γ che si annulli in t_0 e t_1 . La *molteplicità* di (t_0, t_1) è la dimensione dello spazio vettoriale:

$$(11.24) \quad \{J \in \mathcal{J}(\gamma) \mid J(t_0) = 0, J(t_1) = 0\}.$$

Diremo anche che due punti $p_0, p_1 \in M$ sono *coniugati* se $p_0 = \gamma(t_0)$ e $p_1 = \gamma(t_1)$ per una geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([a, b], M)$ per cui t_0, t_1 siano coniugati e chiameremo la dimensione di (11.24) *molteplicità* di (p_0, p_1) lungo γ .

Se pensiamo t_0 fissato, chiameremo la dimensione dello spazio vettoriale (11.24) *molteplicità di t_1* .

OSSERVAZIONE 11.5.2. Fissato $t_0 \in [a, b]$, lo spazio vettoriale dei campi di Jacobi che si annullano in t_0 ha dimensione m . Tra di essi c'è il campo di vettori $(t-t_0)\dot{\gamma}(t)$, che si annulla soltanto nel punto t_0 . Quindi la *molteplicità* di un punto coniugato è un intero $\leq (n-1)$.

ESEMPIO 11.5.3. Nel caso della sfera $\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$, le geodetiche sono i cerchi massimi (intersezioni di \mathbf{S}^n con i piani per l'origine). Su ciascuna di esse il punto antipodale (e il punto stesso) è coniugato con molteplicità $(n-1)$.

DEFINIZIONE 11.5.4. Sia $p \in M$. Il *luogo coniugato* di p è l'insieme $C(p)$ dei punti q di M tali che

- (1) $q = \text{Exp}_p(t_q v_q)$ per qualche $0 \neq v_q \in T_p M$ e $t_q > 0$;
- (2) esiste un campo di Jacobi $J \in \mathcal{J}(\text{Exp}_p(t v_q))$ con $J(0) = 0, J(t_q) = 0$.

ESEMPIO 11.5.5. Nel caso della sfera $\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$, è $C(x) = \{-x\}$ per ogni $x \in \mathbf{S}^n$.

PROPOSIZIONE 11.5.6. Sia $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ una geodetica, con $\gamma(0) = p \in M, \dot{\gamma}(0) = v \in T_p M \setminus \{0\}$. Allora $\gamma(\tau)$, con $0 < \tau \leq a$ è coniugato di 0 lungo γ se e soltanto se τv è un punto singolare dell'applicazione Exp_p , e la molteplicità del punto coniugato $\gamma(\tau)$ è la dimensione del nucleo di $(\text{Exp}_p)_*(\tau v)$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti i campi di Jacobi lungo γ che si annullano in 0 sono tutti e soli quelli della forma $J(t) = \left[(\partial E_p(t(v+sw))) / \partial s \right]_{s=0}$ e il loro valore in τ è $(\text{Exp}_p)_*(\tau v)(\tau w)$. \square

PROPOSIZIONE 11.5.7. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una geodetica. Se a e b non sono coniugati, allora il problema al contorno:

$$(11.25) \quad \begin{cases} \frac{D^2 J}{dt^2} + R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = 0 \\ J(a) = v_a, J(b) = v_b \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione per ogni coppia di vettori $v_a \in T_{\gamma(a)}M$ e $v_b \in T_{\gamma(b)}M$.

DIMOSTRAZIONE. Se a e b non sono coniugati, l'applicazione lineare

$$\mathcal{J}(\gamma) \ni J \rightarrow (J(a), J(b)) \in T_{\gamma(a)}M \oplus T_{\gamma(b)}M$$

è iniettiva e quindi anche surgettiva perché i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione finita $2m$. \square

Tensore di curvatura

12.1. Proprietà del tensore di curvatura

Siano (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana di dimensione reale m e ∇ la differenziazione covariante su M associata alla sua connessione di Levi-Civita. Indichiamo con R la sua curvatura. Ricordiamo che

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \quad R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

La curvatura R è un tensore di tipo $(3, 1)$ che, per ogni $X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M)$, soddisfa le condizioni di simmetria

$$(12.1) \quad \begin{cases} R(X, Y) = -R(Y, X), & \text{(antisimmetrico in } X, Y), \\ R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 & \text{(I identità di Bianchi),} \\ g(R(X, Y)Z, U) + g(Z, R(X, Y)U) = 0, & \text{(} g\text{-antisimmetrico in } Z), \\ g(R(X, Y)Z, U) = g(R(Z, U)X, Y) & \text{(} g\text{-simmetria).} \end{cases}$$

La g -simmetria è conseguenza delle proprietà di antisimmetria e della prima identità di Bianchi. Abbiamo infatti, utilizzando le prime tre delle (12.1),

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, U) &= -g(R(Y, Z)X, U) - g(R(Z, X)Y, U) \\ &= g(R(Y, Z)U, X) + g(R(Z, X)U, Y) \\ &= -g(R(Z, U)Y, X) - g(R(U, Y)Z, X) \\ &\quad - g(R(X, U)Z, Y) - g(R(U, Z)X, Y) \\ &= 2g(R(Z, U)X, Y) + g(R(U, Y)X, Z) + g(R(X, U)Y, Z) \\ &= 2g(R(Z, U)X, Y) - g(R(X, Y)Z, U), \end{aligned}$$

da cui segue la quarta.

Il tensore di curvatura soddisfa inoltre l'identità differenziale

$$(12.2) \quad (\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0, \quad (\text{II identità di Bianchi}).$$

Utilizzando il tensore della metrica g possiamo considerare la curvatura anche come un tensore di tipo $(4, 0)$, ponendo

$$R(X, Y, Z, U) = g(R(X, Y)U, Z).$$

Le simmetrie fondamentali del tensore di curvatura di tipo $(4, 0)$ sono allora

$$(12.3) \quad \begin{cases} R(X, Y, Z, U) = -R(Y, X, Z, U), \\ R(X, Y, Z, U) = -R(X, Y, U, Z), \\ R(X, Y, Z, U) + R(Y, Z, X, U) + R(Z, X, Y, U) = 0, \\ R(X, Y, Z, U) = R(Z, U, X, Y), \\ \forall X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M). \end{cases}$$

12.2. Curvatura sezionale

Per le (12.1), o, in modo equivalente, per le (12.3), il tensore di curvatura definisce un'applicazione

$$\mathcal{R} : \Omega^2(M) \longrightarrow \Omega^2(M),$$

che sui tensori alternati di rango due si può descrivere mediante

$$g(\mathcal{R}(X \wedge Y), Z \wedge U) = R(X, Y, Z, U) = g(R(X, Y)U, Z).$$

DEFINIZIONE 12.2.1. Se σ è un due-piano anisotropo di $T_p M$, la *curvatura sezionale* in σ è lo scalare

$$K(\sigma) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - [g(X, Y)]^2}, \quad \text{se } X, Y \in \sigma, X \wedge Y \neq 0.$$

OSSERVAZIONE 12.2.2. Poiché la forma quadratica associata ad una forma bilineare simmetrica la determina completamente, la curvatura sezionale determina completamente la curvatura Riemanniana.

In particolare, se in un punto $p \in M$ la curvatura sezionale è costante, non dipende cioè dal due piano σ che si considera, dalla

$$R(X, Y, X, Y) = k \cdot \{g(X, X)g(Y, Y) - g^2(X, Y)\} \quad \text{in } p$$

ricaviamo che

$$R(X, Y, Z, U) = k \cdot \{g(X, Z)g(Y, U) - g(X, U)g(Y, Z)\}, \quad \text{in } p$$

cioè

$$g(R(X, Y)U, Z) = k \cdot \{g(X, Z)g(Y, U) - g(X, U)g(Y, Z)\} \quad \text{in } p$$

e quindi

$$R(X, Y)U = k \cdot \{g(Y, U)X - g(X, U)Y\} \quad \text{in } p.$$

TEOREMA 12.2.3 (F.Schur). *Supponiamo che M sia connessa. Se $m \geq 3$ e, per ogni $p \in M$ la curvatura sezionale dei due-piani di $T_p M$ è costante, allora (M, g) ha curvatura costante, esiste cioè una costante reale k tale che*

$$(12.4) \quad R(X, Y)Z = k(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi, la (12.4) vale per una funzione $k \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Calcoliamo la derivata covariante rispetto a un campo $U \in \mathfrak{X}(M)$ del tensore $\alpha(X, Y, Z) = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$. È

$$\begin{aligned} (\nabla_U \alpha)(X, Y, Z) &= \nabla_U(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) - g(\nabla_U Y, Z)X - g(Y, \nabla_U Z)X \\ &\quad - g(Y, Z)\nabla_U X + g(\nabla_U X, Z)Y + g(X, \nabla_U Z)Y + g(X, Z)\nabla_U Y = 0, \end{aligned}$$

perché $\nabla_U g = 0$. Utilizzando poi la seconda identità di Bianchi otteniamo che, per ogni scelta di $X_0, X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M)$, è (l'apice sul simbolo di sommatoria significa che essa è estesa alle terne (i, j, k) che formano una permutazione di $\{0, 1, 2\}$ con segnatura positiva):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum'_{i,j,k=0,1,2} \nabla_{X_i} R(X_j, X_k) X_3 \\ &= \sum'_{i,j,k=0,1,2} (X_i k) \{g(X_j, X_3) X_k - g(X_k, X_3) X_j\} \\ &= \{(X_1 k) g(X_2, X_3) - (X_2 k) g(X_1, X_3)\} X_0 \\ &\quad + \{(X_2 k) g(X_0, X_3) - (X_1 k) g(X_2, X_3)\} X_1 \\ &\quad + \{(X_0 k) g(X_1, X_3) - (X_1 k) g(X_0, X_3)\} X_2. \end{aligned}$$

Poiché la dimensione m di M è maggiore o uguale a tre, fissato un qualsiasi punto \mathfrak{p} di M , possiamo scegliere i campi X_0, X_1, X_2 in modo che siano ortonormali in un intorno di \mathfrak{p} . Poiché i vettori X_0, X_1, X_2 sono linearmente indipendenti in un intorno di \mathfrak{p} , i loro coefficienti nell'espressione all'ultimo membro dell'uguaglianza devono essere nulli per ogni scelta di X_3 . In particolare, scegliendo $X_3 = X_2$, esaminando il coefficiente di X_0 troviamo che $X_1 k = 0$ in \mathfrak{p} . Poiché sia il punto \mathfrak{p} che il valore di X_1 in \mathfrak{p} possono essere scelti arbitrariamente, con l'unico vincolo che $g(X_1, X_1) = 1$ in \mathfrak{p} , ne ricaviamo che $dk = 0$ e quindi k è costante su M . \square

ESEMPPIO 12.2.4. Sia g_p una forma quadratica in \mathbb{R}^{m+1} con segnatura $(p, m+1-p)$ e definiamo le sottovarietà

$$\begin{aligned} S_p^m &= \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid g(x, x) = 1\}, \\ H_p^m &= \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid g(x, x) = -1\}. \end{aligned}$$

Se $1 \leq p \leq m+1$, la restrizione ad S_p^m di g_p definisce una metrica pseudo-Riemanniana di segnatura $(p, m-p)$ e curvatura sezionale costante 1. Se $0 \leq p \leq m$, la restrizione di g_{p+1} definisce su H_p^m una metrica pseudo-Riemanniana di segnatura $(p, m-p)$ e curvatura sezionale costante -1 .

Per ogni $0 \leq p \leq m+1$, la g_p definisce su \mathbb{R}^{m+1} una metrica pseudo-Riemanniana di segnatura $(p, m+1-p)$ e curvatura sezionale costante nulla.

12.3. Il tensore di Ricci

Si possono ottenere nuovi tensori a partire dal tensore di curvatura utilizzando le contrazioni. Per le simmetrie del tensore di curvatura, vi è essenzialmente un solo tensore interessante che si possa ottenere in questo modo.

DEFINIZIONE 12.3.1. La *curvatura di Ricci* di (M, g) è il tensore di tipo $(2, 0)$

$$r(X, Y) = \text{trac}(Z \rightarrow R(X, Z)Y).$$

Se Z_1, \dots, Z_m è una base ortonormale per g in un punto $\mathfrak{p} \in M$, se cioè

$$g(Z_i, Z_j) = \epsilon_i \delta_{i,j}, \quad \text{con } \epsilon_i^2 = 1,$$

allora

$$r(X, Y)(\mathfrak{p}) = \sum_{i=1}^m \epsilon_i \cdot R(X, Z_i, Y, Z_i).$$

Il tensore di Ricci può essere anche considerato come un tensore di tipo $(1, 1)$, $\mathcal{R}ic : TM \rightarrow TM$, mediante:

$$r(X, Y) = g(\mathcal{R}ic(X), Y).$$

OSSERVAZIONE 12.3.2. Il tensore di Ricci è simmetrico: abbiamo cioè $r(X, Y) = r(Y, X)$, ovvero $g(\mathcal{R}ic(X), Y) = g(X, \mathcal{R}ic(Y))$. Ciò è conseguenza del fatto che la connessione di Levi-Civita è simmetrica (cioè priva di torsione). In particolare, quando g sia una metrica Riemanniana, $\mathcal{R}ic$ ha in ogni punto autovalori reali ed è diagonalizzabile.

OSSERVAZIONE 12.3.3. Se la dimensione m di M è due, il tensore di Ricci determina completamente il tensore della metrica. Infatti, se X_1, X_2 è un sistema di riferimento ortonormale nell'intorno di un punto di M , otteniamo

$$\begin{aligned} r(X_1, X_1) &= R(X_1, X_1, X_1, X_1) + R(X_1, X_2, X_1, X_2) = R(X_1, X_2, X_1, X_2), \\ r(X_1, X_2) &= R(X_1, X_1, X_2, X_1) + R(X_1, X_2, X_2, X_2) = 0, \\ r(X_2, X_2) &= R(X_2, X_1, X_2, X_1) + R(X_2, X_2, X_2, X_2) = R(X_1, X_2, X_1, X_2). \end{aligned}$$

Notiamo che, per $m = 2$, il fibrato $\Omega^2(M)$ ha rango 1 e quindi il tensore di curvatura R è completamente determinato dal valore $R(X_1, X_2, X_1, X_2)$ che assume su un qualsiasi sistema di riferimento ortonormale.

Supponiamo sia $m = 3$. Fissiamo un riferimento ortonormale X_1, X_2, X_3 su un aperto di M e consideriamo le componenti del tensore di Ricci:

$$\begin{aligned} r(X_1, X_1) &= R(X_1, X_2, X_1, X_2) + R(X_1, X_3, X_1, X_3), \\ r(X_1, X_2) &= R(X_1, X_3, X_2, X_3), \\ r(X_1, X_3) &= -R(X_1, X_2, X_2, X_3), \\ r(X_2, X_2) &= R(X_1, X_2, X_1, X_2) + R(X_2, X_3, X_2, X_3), \\ r(X_2, X_3) &= R(X_1, X_2, X_1, X_3), \\ r(X_3, X_3) &= R(X_1, X_3, X_1, X_3) + R(X_2, X_3, X_2, X_3). \end{aligned}$$

Possiamo quindi ricavare dai coefficienti del tensore di Ricci quelli del tensore di Riemann. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} R(X_1, X_2, X_1, X_2) &= \frac{1}{2}(r(X_1, X_1) + R(X_2, X_2) - R(X_3, X_3)), \\ R(X_1, X_2, X_1, X_3) &= r(X_2, X_3), \\ R(X_1, X_2, X_2, X_3) &= -r(X_1, X_3), \\ R(X_1, X_3, X_1, X_3) &= \frac{1}{2}(r(X_1, X_1) + r(X_3, X_3) - r(X_2, X_2)), \\ R(X_1, X_3, X_2, X_3) &= r(X_1, X_2), \\ R(X_2, X_3, X_2, X_3) &= \frac{1}{2}(r(X_2, X_2) + R(X_3, X_3) - R(X_1, X_1)). \end{aligned}$$

Quindi in dimensione tre il tensore di Ricci determina completamente il tensore di Riemann.

Possiamo riscrivere le formule che legano il tensore di Riemann ed il tensore di Ricci in dimensione due e tre mediante

$$(12.5) \quad \begin{cases} 2R(X_1, X_2, X_3, X_4) = r(X_1, X_3)g(X_2, X_4) + r(X_2, X_4)g(X_1, X_3) \\ \quad - r(X_1, X_4)g(X_2, X_3) - r(X_2, X_3)g(X_1, X_4), \\ \forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M), \text{ se } m = \dim M = 2, 3. \end{cases}$$

Infatti, i due membri dell'uguaglianza definiscono tensori di tipo $(0, 4)$ e basta dunque verificare l'uguaglianza quando X_1, X_2, X_3, X_4 siano campi di un sistema di riferimento locale.

12.4. Un Teorema di Myers

Supponiamo che la metrica g sia Riemanniana. Fissiamo un punto $p \in M$ e un sistema di riferimento ortonormale $\sigma_p = (v_1, \dots, v_m)$ in T_pM . Ad esso associamo coordinate normali $x = (x^1, \dots, x^m)$ definite in un intorno U di p da

$$q = q(x) = \exp_p(x^1 v_1 + \dots + x^m v_m).$$

Il tensore della metrica ha in queste coordinate componenti

$$g_{i,j} = g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j), \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

LEMMA 12.4.1. *La funzione*

$$(12.6) \quad F_p(q) = \sqrt{|\det(g_{i,j}(x))|}$$

non dipende dalla scelta della base ortonormale σ_p .

DIMOSTRAZIONE. Se $\sigma'_p = (w_1, \dots, w_m)$ è un'altra base ortonormale di T_pM , ed $y = (y^1, \dots, y^m)$ le corrispondenti coordinate normali, abbiamo che $x = a \cdot y$, con $a = \sigma_p^{-1} \sigma'_p \in \mathbf{O}(m)$. Le componenti $g'_{i,j}$ della metrica nelle coordinate y sono allora

$$g'_{i,j} = \sum_{h,k=1}^m a_i^h a_j^k g_{h,k}.$$

Quindi,

$$\sqrt{|\det(g'_{i,j})|} = \sqrt{|\det a|^2 |\det(g_{i,j})|} = F_p,$$

perché $|\det a| = 1$. □

Sia N_p un intorno normale di 0 in T_pM . Ricordiamo che N_p è stellato rispetto all'origine ed $\text{Exp}_p : N_p \rightarrow U_p = \text{Exp}_p(N_p)$ un diffeomorfismo di N_p su un intorno aperto U_p di p in M .

Fissato un vettore non nullo $w \in N_p$, indichiamo con $\gamma_w \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ la geodetica uscente da p con velocità w . Fissiamo un riferimento ortonormale $\sigma_p = (v_1, \dots, v_m)$ in T_pM con $v_m = w/|w|$ ed indichiamo con J_1^w, \dots, J_m^w i campi di Jacobi che soddisfano il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{D^2 J_h^w}{dt^2} + R(J_h^w(t), \dot{\gamma}_w(t)) \dot{\gamma}_w(t) = 0, \\ J_h^w(0) = 0, \quad \frac{D J_h^w(0)}{dt} = v_h, \end{cases} \quad 1 \leq h \leq m.$$

Nota che $J_m^w(\mathbf{t}) = t|w|^{-1}\dot{\gamma}_w(\mathbf{t})$ per $0 \leq t \leq 1$.

Ricordiamo che i valori $J_h^w(1) \in T_{\text{exp}(w)}M$ sono le immagini dei vettori v_h mediante il differenziale dell'applicazione esponenziale nel punto w . Con queste notazioni, abbiamo

LEMMA 12.4.2. *Con le notazioni introdotte sopra, abbiamo*

$$(12.7) \quad F_p(\text{Exp}_p(w)) = \sqrt{|\det(J_1, \dots, J_{m-1})(1)|}.$$

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione segue dal fatto che i campi J_h^w sono ortogonali alla velocità $\dot{\gamma}_w$ lungo la geodetica e $g_{i,j}(\text{Exp}_p(w)) = g_{i,j}(J_i^w(1), J_j^w(1))$ per $1 \leq i, j \leq m$. \square

La funzione introdotta nel Lemma 12.4.1 soddisfa una disuguaglianza relativa alla curvatura di Ricci. Vale infatti la

PROPOSIZIONE 12.4.3. *Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, t_0], M)$ una geodetica uscente dal punto $p \in M$, con supporto contenuto in un suo intorno normale, ed F_p la funzione definita nel Lemma 12.4.1. Posto*

$$\phi(q) = \frac{1}{t} \int_0^t \sqrt{\dot{\gamma}(\mathbf{t})},$$

vale la disuguaglianza

$$(12.8) \quad \frac{D^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{m-1} \mathbf{r}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\phi \leq 0.$$

COROLLARIO 12.4.4. *Supponiamo che (M, g) sia completa e che esista una costante $a > 0$ tale che*

$$(12.9) \quad \mathbf{r}(X, X) \geq (m-1)a^2 g(X, X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Allora ogni geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$, con $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$ ha un punto coniugato $\gamma(t_0)$ di $\gamma(0)$ con $0 < t_0 \leq \pi/a$.

Da questa ricaviamo il seguente teorema di Myers (vedi [56]):

TEOREMA 12.4.5 (Myers). *Sia (M, g) una varietà Riemanniana completa, la cui curvatura di Ricci soddisfi, per una costante $c > 0$, la disuguaglianza*

$$(12.10) \quad \mathbf{r}(X, X) \geq c \cdot g(X, X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Allora M è compatta, con diametro $\leq \pi/c$, ed il suo gruppo fondamentale è finito. \square

12.5. Curvatura scalare

DEFINIZIONE 12.5.1. La *curvatura scalare* di una varietà Riemanniana (M, g) è la traccia del suo tensore di Ricci, cioè la funzione

$$(12.11) \quad s(p) = \text{trac}(\mathcal{R}ic_p) = \sum_{i=1}^m \mathbf{r}(X_i, X_i), \quad \text{con } (X_1, \dots, X_p) \in \mathbf{O}_p(M).$$

OSSERVAZIONE 12.5.2. Su ogni varietà M è possibile definire una metrica con curvatura scalare costante.

PROPOSIZIONE 12.5.3. *Il tensore di Ricci e la curvatura scalare sono legati dalla relazione¹*

$$(12.12) \quad \delta r = -\frac{1}{2} ds.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un riferimento ortonormale $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$, definito in un intorno aperto U di un punto $p_0 \in M$. La curvatura scalare si può allora scrivere nella forma

$$s = \sum_{i,j=1}^m R(X_i, X_j, X_i, X_j).$$

Il suo differenziale è

$$\begin{aligned} ds(X) &= \sum (\nabla_X R)(X_i, X_j, X_i, X_j) \\ &\quad - 2 \sum R(\nabla_X X_i, X_j, X_i, X_j) - 2 \sum R(X_i, \nabla_X X_j, X_i, X_j) \\ &= - \sum (\nabla_{X_i} R)(X_j, X, X_i, X_j) - \sum (\nabla_{X_j} R)(X, X_i, X_i, X_j) \\ &\quad - 2 \sum R(\nabla_X X_i, X_j, X_i, X_j) - 2 \sum R(X_i, \nabla_X X_j, X_i, X_j) \\ &= 2 \sum (\nabla_{X_i} R)(X, X_j, X_i, X_j) - 2R(\nabla_X X_i, X_j, X_i, X_j) \end{aligned}$$

□

12.6. Metriche di Einstein

DEFINIZIONE 12.6.1. Una metrica pseudo-Riemanniana g su M si dice *di Einstein* se il suo tensore di Ricci è un multiplo costante della metrica, se cioè esiste una costante λ tale che

$$(12.13) \quad r = \lambda g.$$

OSSERVAZIONE 12.6.2. La nozione di metrica di Einstein è interessante quando la dimensione m di M è maggiore o uguale a quattro. Infatti la curvatura è sempre nulla se $m = 1$ e, nei casi $m = 2, 3$ la nozione di metrica di Einstein coincide con quella di curvatura sezionale costante. Abbiamo infatti, per le (12.5) ed (12.13),

$$R(X_1, X_2, X_1, X_2) = \lambda(g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - |g(X_1, X_2)|^2).$$

OSSERVAZIONE 12.6.3. Se c è una costante positiva, il tensore di Ricci della metrica $c \cdot g$ è lo stesso di quello della metrica g . La costante λ si cambia quindi in λ/c . A meno di un cambiamento conforme della metrica, potremo quindi supporre sempre, se vogliamo, che la costante λ in (12.13) sia uguale ad 1, o -1 , o 0.

¹La δ indica la *divergenza*, definita in §18.4.2.

Connessioni lineari invarianti

In questo capitolo ci occuperemo di connessioni lineari invarianti rispetto all'azione transitiva di un gruppo di Lie sulla base.

13.1. Rappresentazione lineare d'isotropia

Siano \mathbf{K} un gruppo di Lie con identità e ed M un suo spazio omogeneo. Fissato un punto base p_0 in M , il suo stabilizzatore \mathbf{H} è un sottogruppo chiuso di \mathbf{K} e il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{K} & \\ \pi \swarrow & & \searrow k \rightarrow k \cdot p_0 \\ \mathbf{K}/\mathbf{H} & \longleftrightarrow & M \end{array}$$

identifica M allo spazio delle classi laterali sinistre di \mathbf{H} . Indichiamo con L_k la traslazione $M \ni p \rightarrow k \cdot p \in M$. La corrispondenza $k \rightarrow L_k$ definisce un omomorfismo L di \mathbf{K} nel gruppo $\mathcal{D}iff^\omega(M)$ dei diffeomorfismi analitici di M in sé.

DEFINIZIONE 13.1.1. Il *nucleo* \mathbf{N} dell'omomorfismo $L : \mathbf{K} \rightarrow \mathcal{D}iff^\omega(M)$ si dice *d'ineffettività* dell'azione di \mathbf{K} su M e l'azione *effettiva* se $\mathbf{N} = \{e\}$, *quasi effettiva* se \mathbf{N} è discreto.

LEMMA 13.1.2. Il nucleo d'ineffettività \mathbf{N} e la sua algebra di Lie \mathfrak{n} sono descritti da

$$\mathbf{N} = \bigcap_{k \in \mathbf{K}} \text{ad}_k(\mathbf{H}), \quad \mathfrak{n} = \bigcap_{k \in \mathbf{K}} \text{Ad}_k(\mathfrak{h}).$$

Il sottogruppo \mathbf{N} è chiuso e normale in \mathbf{K} ed \mathfrak{n} un ideale di \mathfrak{k} . □

OSSERVAZIONE 13.1.3. Poiché un gruppo di Lie è discreto se e soltanto se la sua algebra di Lie è $\{0\}$, l'azione di \mathbf{K} è quasi effettiva se e soltanto se $\mathfrak{n} = \{0\}$.

Poiché lasciano fisso il punto p_0 , gli elementi dell'isotropia definiscono automorfismi di $T_{p_0}M$ e quindi una rappresentazione lineare

$$(13.1) \quad \mathbf{H} \ni h \longrightarrow h_* = dL_h(p_0) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(T_{p_0}M).$$

DEFINIZIONE 13.1.4. Chiamiamo la (13.1) *rappresentazione lineare d'isotropia*.

Per passaggio al quoziente iniettivo, il differenziale in e di $\pi : \mathbf{K} \rightarrow M$ definisce un isomorfismo di $T_{p_0}M$ con il quoziente $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$, che ci permette di leggere la rappresentazione lineare d'isotropia come quoziente della rappresentazione aggiunta

di \mathbf{H} su κ : per ogni h in \mathbf{H} abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & \kappa & \xrightarrow{\text{Ad}_h} & \kappa & & \\ & \swarrow & & & & \searrow & \\ \kappa/\mathfrak{h} & & & & & & \kappa/\mathfrak{h} \\ & \nwarrow & & & & \nearrow & \\ & & T_{p_0}M & \xrightarrow{h_*} & T_{p_0}M & & \end{array}$$

PROPOSIZIONE 13.1.5. *Il nucleo d'infedeltà \mathbf{N}_0 della rappresentazione lineare d'isotropia e la sua algebra di Lie \mathfrak{n}_0 sono descritti da*

$$\begin{cases} \mathbf{N}_0 = \{h \in \mathbf{H} \mid \text{Ad}_h(X) - X \in \mathfrak{h}, \forall X \in \kappa\}, \\ \mathfrak{n}_0 = \{X \in \mathfrak{h} \mid [X, Y] \in \mathfrak{h}, \forall Y \in \kappa\}. \end{cases} \quad \square$$

Poiché valgono le inclusioni $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}_0$ ed $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{n}_0$, abbiamo il criterio:

PROPOSIZIONE 13.1.6. *Se la rappresentazione d'isotropia è fedele, allora l'azione di \mathbf{K} su M è effettiva. Se il suo nucleo d'infedeltà è discreto, cioè se $\mathfrak{n}_0 = \{0\}$, allora l'azione di \mathbf{K} su M è quasi effettiva.* \square

Possiamo sempre ridurci ad un'azione effettiva sostituendo al gruppo \mathbf{K} il suo quoziente (\mathbf{K}/\mathbf{N}) rispetto al nucleo d'ineffettività.

ESEMPIO 13.1.7. Consideriamo lo spazio proiettivo $\mathbb{R}P^m$ come spazio omogeneo del gruppo $\mathbf{SL}_{m+1}(\mathbb{R})$. L'azione di $\mathbf{SL}_{m+1}(\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}P^m$ è effettiva se m è pari e quasi effettiva se è dispari.

Sia e_0, e_1, \dots, e_m la base canonica di \mathbb{R}^{m+1} e scegliamo come punto base p_0 la proiezione del punto e_0 . Lo stabilizzatore di p_0 in $\mathbf{SL}_{m+1}(\mathbb{R})$ è il sottogruppo parabolico

$$\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} c & w^\top \\ 0 & \mathbf{a} \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_{m+1}(\mathbb{R}) \mid c \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}), w \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c & w^\top \\ 0 & \mathbf{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & u^\top \\ v & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & w^\top \\ 0 & \mathbf{a} \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} c & w^\top \\ 0 & \mathbf{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & u^\top \\ v & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^{-1} & -c^{-1}w^\top \mathbf{a}^{-1} \\ 0 & \mathbf{a}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b + c^{-1}w^\top v & -(b + c^{-1}w^\top v)w^\top \mathbf{a}^{-1} \\ c^{-1}\mathbf{a}v & \mathbf{a}(X - c^{-1}vw^\top)\mathbf{a} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Poiché

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} c & w^\top \\ 0 & X \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_{m+1}(\mathbb{R}) \mid c \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}), w \in \mathbb{R}^m \right\},$$

otteniamo che

$$\mathbf{N}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \pm c^m & w^\top \\ 0 & \pm c^{-1}\mathbf{I}_m \end{pmatrix} \mid 0 \neq c \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}^m \right\}, \quad \mathfrak{n}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} mc & w^\top \\ 0 & -c\mathbf{I}_m \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Il nucleo d'infedeltà della rappresentazione lineare d'isotropia è quindi un gruppo di Lie di dimensione $m+1$.

13.1.1. Spazi riduttivi. In tutto questo sottoparagrafo supporremo che lo spazio omogeneo $M=\mathbf{K}/\mathbf{H}$ sia *riduttivo*, ovvero che \mathfrak{h} abbia in \mathfrak{k} un complemento lineare \mathbf{H} -invariante, . Supporremo cioè che vi sia un sottospazio vettoriale \mathfrak{m} di \mathfrak{k} tale che

$$(13.2) \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}.$$

OSSERVAZIONE 13.1.8. Poiché tutte le rappresentazioni lineari di un gruppo di Lie compatto, o di un gruppo di Lie semisemplice¹, sono completamente riducibili, tutti gli spazi omogenei $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ con \mathbf{H} compatto, o semisemplice, sono riduttivi.

La prima delle (13.2) ci dice che la restrizione del differenziale $d\pi_e$ in e della proiezione $\{k \rightarrow k \cdot p_0\}$ è un isomorfismo lineare di \mathfrak{m} sul tangente $T_{p_0}M$ di M nel punto base p_0 ed, insieme alla seconda, che la restrizione ad \mathfrak{m} della rappresentazione aggiunta di \mathbf{H} su \mathfrak{k} è equivalente alla rappresentazione lineare d'isotropia.

Un elemento h del nucleo d'infedeltà \mathbf{N}_0 della rappresentazione d'isotropia lascia fissi gli elementi di \mathfrak{m} . Abbiamo perciò, per ogni $X \in \mathfrak{m}$,

$$(*) \quad \text{Ad}_h(X) = X \iff h \cdot \exp(X) \cdot h^{-1} = \exp(X) \iff h \cdot \exp(X) = \exp(X) \cdot h.$$

Se M è connesso, gli elementi di \mathbf{H} e gli esponenziali dei vettori di \mathfrak{m} generano \mathbf{K} . Poiché \mathbf{N}_0 è un sottogruppo normale di \mathbf{H} , da questa osservazione segue allora

LEMMA 13.1.9. *Se M è connesso, allora il nucleo d'infedeltà \mathbf{N}_0 della rappresentazione lineare d'isotropia coincide con il nucleo d'infedeltà \mathbf{N} dell'azione di \mathbf{K} .*

DIMOSTRAZIONE. Se $X \in \mathfrak{m}$ ed $h \in \mathbf{H}$, allora $h \cdot \exp(X) = \exp(X') \cdot h$, per un elemento $X' = \text{Ad}_h(X) \in \mathfrak{m}$. Quindi, dato un qualsiasi punto p di M , possiamo trovare $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{m}$ tali che $p = \exp(X_1) \cdots \exp(X_n) \cdot p_0$. Per (*), gli elementi di \mathbf{N}_0 commutano con gli esponenziali degli elementi di \mathfrak{m} e da questo segue immediatamente che $k \cdot p = p$ per ogni k in \mathbf{N}_0 ed ogni p in M . Ciò dimostra che $\mathbf{N}_0 \subseteq \mathbf{N}$ e, dal momento che vale sempre l'inclusione opposta, l'uguaglianza. \square

ESEMPIO 13.1.10. Lo spazio proiettivo $\mathbb{R}P^m$ è riduttivo come spazio omogeneo di $\mathbf{SO}(m+1)$, ma non può esserlo come spazio omogeneo di $\mathbf{SL}_{m+1}(\mathbb{R})$ perché la rappresentazione lineare d'isotropia ha in questo caso un nucleo non discreto (vedi l'Es.13.1.7).

L'identificazione di $T_{p_0}M$ con \mathfrak{m} ci consente di considerare TM come un fibrato vettoriale con fibra tipica \mathfrak{m} e di identificare quindi la fibra tipica di $\mathbb{L}(M)$ con il gruppo $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m})$. Possiamo formulare allora il seguente teorema.

TEOREMA 13.1.11. *Supponiamo che M sia uno spazio omogeneo riduttivo del gruppo di Lie \mathbf{K} e che l'azione di \mathbf{K} su M sia effettiva. Fissato p_0 in M e detto \mathbf{H} lo stabilizzatore di p_0 in \mathbf{K} , la proiezione canonica $\pi : \mathbf{K} \ni k \rightarrow k \cdot p_0 \in M$ definisce una \mathbf{H} -struttura $(\mathbf{K}, \pi, M, \mathbf{H})$ su M . \square*

¹Un gruppo di Lie si dice *semisemplice* se la sua algebra di Lie è semisemplice, somma cioè di ideali semplici non abeliani (vedi §28.7).

13.2. Connessioni canoniche sugli spazi riduttivi

Supponiamo che il gruppo \mathbf{K} agisca su M in modo transitivo ed effettivo e che M , come spazio omogeneo di \mathbf{K} , sia riduttivo e valga (13.2). Decomponiamo la forma di Maurer-Cartan $\omega_{\mathbf{K}}$ di \mathbf{K} nelle sue componenti in \mathfrak{h} ed \mathfrak{m} : siano cioè

$$(13.3) \quad \begin{cases} \omega_{\mathfrak{h}} \in \mathcal{Q}^1(\mathbf{K}, \mathfrak{h}) \text{ la componente di } \omega_{\mathbf{K}} \text{ in } \mathfrak{h}, \\ \theta_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{Q}^1(\mathbf{K}, \mathfrak{m}) \text{ la componente di } \omega_{\mathbf{K}} \text{ in } \mathfrak{m}. \end{cases}$$

Mostreremo che la $\omega_{\mathfrak{h}}$ è la forma di Cartan di una connessione lineare su M .

DEFINIZIONE 13.2.1. Chiamiamo la $\theta_{\mathfrak{m}}$ *forma canonica* e la $\omega_{\mathfrak{h}}$ *forma di connessione canonica* dello spazio riduttivo $M=\mathbf{K}/\mathbf{H}$, relativa alla decomposizione (13.2).

Se $X \in \mathfrak{k}$, indicheremo con $X_{\mathfrak{h}}$ ed $X_{\mathfrak{m}}$ le sue componenti in \mathfrak{h} ed \mathfrak{m} , rispettivamente. Se $X, Y \in \mathfrak{k}$, allora

$$[X, Y] = [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{h}}] + [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{m}}] + [X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{h}}] + [X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{m}}]$$

e quindi, poiché \mathfrak{m} è $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -invariante, otteniamo

$$\begin{aligned} [X, Y]_{\mathfrak{h}} &= [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{h}}] + [X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{h}}, \\ [X, Y]_{\mathfrak{m}} &= [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{m}}] + [X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{h}}] + [X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}}. \end{aligned}$$

Dato $X \in \mathfrak{k}$, indichiamo con X^* il campo invariante a sinistra su \mathbf{K} con $X_{\mathfrak{e}}^*=X$.

TEOREMA 13.2.2. Siano \mathbf{K} un gruppo di Lie connesso, \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso, $M=\mathbf{K}/\mathbf{H}$. Supponiamo che la rappresentazione d'isotropia sia fedele e consideriamo $\xi=(\mathbf{K}, \pi, M, \mathbf{H})$ come un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{H} .

- (1) Se M è riduttivo e valgono le (13.2), allora la $\omega_{\mathfrak{h}}$ è la forma di Cartan di una connessione principale \mathbf{K} -invariante su ξ e definisce quindi su M una connessione lineare per cui gli elementi di \mathbf{K} agiscono su M come trasformazioni affini. Lo spazio vettoriale

$$(13.4) \quad \{X^* \mid X \in \mathfrak{m}\} \subset \mathfrak{X}(\mathbf{K})$$

genera la distribuzione orizzontale.

- (2) Ogni connessione principale \mathbf{K} -invariante su ξ determina univocamente una decomposizione (13.2), rispetto alla quale la forma di Cartan sia la \mathfrak{h} -componente della forma di Maurer-Cartan di \mathbf{K} .
- (3) Le forme di torsione e di curvatura della connessione lineare con forma di Cartan $\omega_{\mathfrak{h}}$ definita dalla (13.3) sono:

$$(13.5) \quad \begin{cases} \Theta(X^*, Y^*) = -[X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}}, & \forall X, Y \in \mathfrak{k}, \\ \Omega(X^*, Y^*) = -[X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{h}}, & \forall X, Y \in \mathfrak{k}. \end{cases}$$

Utilizzando l'isomorfismo lineare $d\pi_{\mathfrak{e}: \mathfrak{m}} \rightarrow T_{p_0}M$, possiamo rappresentare torsione e curvatura in $p_0=\pi(\mathfrak{e}_{\mathbf{K}})$ con le formule:

$$(13.6) \quad \begin{cases} T_{p_0}(X, Y) = -[X, Y]_{\mathfrak{m}}, & \forall X, Y \in \mathfrak{m}, \\ R_{p_0}(X, Y)Z = -[[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z]_{\mathfrak{m}}, & \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}. \end{cases}$$

- (4) Gli X^* , al variare di X in \mathfrak{m} , sono i campi orizzontali standard su \mathbf{K} . Quindi M è uno spazio affine completo, le cui geodetiche sono le curve

$$\gamma(t) = \pi(k \cdot \exp(tX)) = k \cdot \pi(\exp(tX)), \quad \text{con } k \in \mathbf{K}, \quad X \in \mathfrak{m}.$$

DIMOSTRAZIONE. (1) Possiamo definire la distribuzione orizzontale di una connessione \mathbf{H} -principale su M ponendo $H_k \mathbf{K} = k \cdot \mathfrak{m}$ per ogni k in \mathbf{K} . È infatti

$$H_k \mathbf{K} \cdot h = (k \cdot \mathfrak{m}) \cdot h = (k \cdot h) \cdot (h^{-1} \cdot \mathfrak{m} \cdot h) = (k \cdot h) \cdot \mathfrak{m} = H_{k \cdot h} \mathbf{K}, \quad \forall k \in \mathbf{K}, \quad \forall h \in \mathbf{H}.$$

Si verifica facilmente che la $\omega_{\mathfrak{h}}$ è la forma di Cartan di questa connessione. Inoltre, è $k^* \omega_{\mathfrak{h}}(X^*) = \omega_{\mathfrak{h}}(k_* X^*) = \omega_{\mathfrak{h}}(X^*) = X_{\mathfrak{h}}$ per ogni $X \in \kappa$, cioè $k^* \omega_{\mathfrak{h}} = \omega_{\mathfrak{h}}$, e quindi \mathbf{K} opera su M in modo affine.

(2) Se ω è la forma di Cartan di una connessione \mathbf{H} -principale invariante per l'azione a sinistra di \mathbf{K} su ξ , allora $\mathfrak{m} = \ker(\omega_{\mathfrak{e}})$ è un sottospazio di \mathfrak{g} per cui valgono le (13.2), e quindi $\omega(X^*) = X_{\mathfrak{h}}$ per ogni $X \in \kappa$.

(3) Per ogni $X, Y \in \kappa$ abbiamo, utilizzando le equazioni di struttura,

$$\Theta(X^*, Y^*) = \Theta(X_m^*, Y_m^*) = X_m^* Y_m^* - Y_m^* X_m^* - \theta([X_m^*, Y_m^*]) = -\theta([X_m, Y_m]^*) = -[X_m, Y_m]_m,$$

$$\begin{aligned} \Omega(X^*, Y^*) &= (d\omega_{\mathfrak{h}})(X^*, Y^*) + \frac{1}{2}[\omega_{\mathfrak{h}} \wedge \omega_{\mathfrak{h}}](X^*, Y^*) = X^* X_{\mathfrak{h}} - Y^* Y_{\mathfrak{h}} - [X, Y]_{\mathfrak{h}} + [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{h}}] \\ &= -[X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{h}}] - [X_m, Y_m]_{\mathfrak{h}} + [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{h}}] = -[X_m, Y_m]_{\mathfrak{h}}. \end{aligned}$$

Le (13.6) sono conseguenza diretta delle (10.4), (10.5).

La (4) segue dal fatto che i campi X^* , con $X \in \mathfrak{m}$, sono i campi orizzontali standard in \mathbf{K} . \square

OSSERVAZIONE 13.2.3. Se \mathbf{K} è un gruppo di Lie semisemplice connesso e l'algebra di Lie \mathfrak{h} di \mathbf{H} è compatta massimale², possiamo scegliere come complemento di \mathfrak{h} il suo ortogonale \mathfrak{p} rispetto alla forma di Killing. La $\kappa = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ è allora la decomposizione di Cartan di \mathfrak{g} e l'automorfismo $\vartheta: \kappa \rightarrow \kappa$ di κ , che lascia fissi i punti di \mathfrak{h} e riflette quelli di \mathfrak{p} , è la corrispondente involuzione di Cartan. Poiché $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{h}$, la connessione canonica su $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ è in questo caso simmetrica (cioè con torsione nulla) ed M uno spazio simmetrico (vedi §13.5).

ESEMPIO 13.2.4. Il gruppo $\mathbf{SO}(m+1)$ opera transitivamente sulla sfera S^m . La proiezione $\mathbf{SO}(m+1) \ni \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a} \cdot e_0 \in S^m$ ci permette di rappresentare la sfera S^m come lo spazio omogeneo $\mathbf{SO}(m+1)/\mathbf{SO}(m)$. La decomposizione

$$\mathfrak{o}(m+1) = \mathfrak{o}(m) \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{con}$$

$$\mathfrak{o}(m) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}), A^T = -A \right\}, \quad \mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -v^T \\ v & 0 \end{pmatrix} \middle| v \in \mathbb{R}^m \right\}$$

descrive su M una struttura di spazio omogeneo riduttivo. Poiché $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{o}(m)$, la connessione canonica invariante su S^m è priva di torsione. Le geodetiche con origine nel punto base e_0 sono le proiezioni su S^m dei gruppi a un parametro di

²Cioè una sottoalgebra massimale su cui la forma di Killing $\kappa(X, Y) = \text{trac}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y)$ è definita negativa.

$\mathbf{SO}(m+1)$ generati dagli elementi di \mathfrak{m} . Ogni matrice di \mathfrak{m} è coniugata, modulo $\mathbf{SO}(m)$, ad una della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \exp(t \cdot A) = \begin{pmatrix} \cos(ct) & -\sin(ct) & 0 \\ \sin(ct) & \cos(ct) & 0 \\ 0 & & \mathbf{I}_{m-1} \end{pmatrix}.$$

La sua proiezione $\exp(t \cdot A)e_0$ è un arco di cerchio massimo di S^m passante per e_0 . Tutte le geodetiche su S^m si ottengono trasladando le geodetiche per e_0 per mezzo degli elementi di $\mathbf{SO}(m+1)$ e i loro supporti sono dunque tutte e sole le intersezioni di S^m con i piani passanti per l'origine di \mathbb{R}^{m+1} , cioè i cerchi massimi su S^m .

Utilizzando l'ovvio isomorfismo di \mathbb{R}^m con \mathfrak{m} , otteniamo per la curvatura le formule

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(u, v)w &= (u \cdot v^\top - v \cdot u^\top) \cdot w = u \cdot (v|w) - v \cdot (u|w), \\ \mathbf{R}(v_1, v_2, v_3, v_4) &= (v_1|v_3)(v_2|v_4) - (v_1|v_4)(v_2|v_3), \\ \mathbf{K}(u \wedge v) &= \mathbf{R}(u, v, u, v) / [\|u\|^2\|v\|^2 - (u|v)^2] = 1. \end{aligned}$$

In particolare, la curvatura sezionale è costante ed uguale ad 1.

Possiamo trattare in modo analogo $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$, di cui la sfera S^m è rivestimento a due fogli, come spazio omogeneo di $\mathbf{SO}(m+1)$, se m è pari e di $\mathbf{SO}(m+1)/\{\pm \mathbf{I}_{m+1}\}$ se m è dispari. Lo spazio proiettivo $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ è anche uno spazio omogeneo di $\mathbf{SL}_{m+1}(\mathbb{R})$, ma non riduttivo.

ESEMPIO 13.2.5 (Spazio di Lobačevskij m -dimensionale). Sia $\mathbf{I}_{1,m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_m \end{pmatrix}$. Il gruppo

$$\mathbf{SO}^+(1, m) = \{a \in \mathbf{SL}_m(\mathbb{R}) \mid a^\top \cdot \mathbf{I}_{1,m} \cdot a = \mathbf{I}_{1,m}, e_0^\top \cdot a \cdot e_0 > 0\}$$

è connesso ed opera transitivamente su

$$M = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_0^2 = 1 + \sum_{i=1}^m x_i^2, x_0 > 0\},$$

che possiamo quindi identificare allo spazio simmetrico $\mathbf{SO}^+(1, m)/\mathbf{SO}(m)$ mediante la proiezione $\mathbf{SO}^+(1, m) \ni a \rightarrow a \cdot e_0 \in M$.

L'algebra di Lie $\mathfrak{o}(1, m)$ di $\mathbf{SO}(1, m)$ si decompone in

$$\mathfrak{o}(1, m) = \mathfrak{o}(m) \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{con}$$

$$\mathfrak{o}(m) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}), A^\top = -A \right\} \quad \text{ed} \quad \mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v^\top \\ v & 0 \end{pmatrix} \mid v \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Poiché $\text{Ad}(\mathbf{SO}(m))(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$, M è riduttivo e la $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{o}(m)$ ci dice che la connessione $\mathbf{SO}(m)$ -lineare canonica su M è simmetrica. Le geodetiche uscenti da e_0 sono le proiezioni dei sottogruppi a un parametro di $\mathbf{SO}^+(1, m)$ generati dagli elementi di \mathfrak{m} . Modulo $\mathbf{SO}(m)$, ogni matrice di \mathfrak{m} è coniugata ad una della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \implies \exp(t \cdot A) = \begin{pmatrix} \cosh(ct) & \sinh(ct) & 0 \\ \sinh(ct) & \cosh(ct) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{m-1} \end{pmatrix}.$$

La connessione è completa. Le geodetiche per e_0 sono le intersezioni di M con i piani passanti per 0 ed e_0 . Tutte le geodetiche sono immagini di queste mediante le traslazioni rispetto al gruppo $\mathbf{SO}^+(1, m)$.

Per la curvatura, con l'identificazione standard di \mathfrak{m} con \mathbb{R}^m , otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(u, v)w &= -(u \cdot v^\top + v \cdot u^\top) \cdot w = -u \cdot (v|w) + v \cdot (u|w), \\ \mathbf{R}(v_1, v_2, v_3, v_4) &= -(v_1|v_3)(v_2|v_4) + (v_1|v_4)(v_2|v_3), \\ \mathbf{K}(u \wedge v) &= \mathbf{R}(u, v, u, v) / [\|u\|^2\|v\|^2 - (u|v)^2] = -1. \end{aligned}$$

In questo caso la curvatura sezionale è costante ed uguale a (-1) .

ESEMPIO 13.2.6. La sfera S^m è diffeomorfa alla quadrica ellittica \mathbf{Q} di $\mathbb{R}\mathbf{P}^{m+1}$, che possiamo descrivere come l'insieme delle rette isotrope rispetto alla forma bilineare simmetrica b su \mathbb{R}^{m+2} di matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{I}_m & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il gruppo $\mathbf{K} = \mathbf{O}_b(\mathbb{R}^{m+2}) = \{\mathbf{a} \in \mathbf{GL}_{m+2}(\mathbb{R}) \mid \mathbf{a}^\top \cdot B \cdot \mathbf{a} = B\}$ ha algebra di Lie

$$\mathfrak{o}_b = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{t} & -w^\top & 0 \\ v & X & w \\ 0 & -v^\top & -\mathbf{t} \end{pmatrix} \mid \mathbf{t} \in \mathbb{R}, v, w \in \mathbb{R}^m, X \in \mathfrak{o}(m) \right\}.$$

Detta $e_0, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}$ la base canonica di \mathbb{R}^{m+2} , fissiamo come punto base di \mathbf{Q} la retta \mathfrak{p}_0 generata da e_0 . L'unica trasformazione di $\mathbf{O}_b(\mathbb{R}^{m+2})$ che lasci fisso un iperpiano isotropo è l'identità. Quindi, per il teorema d'estensione di Witt, ogni trasformazione lineare di $e_0^\perp = \langle e_0, e_1, \dots, e_m \rangle$ in sé che abbia autovettore e_0 ed induca un'isometria euclidea su $e_0^\perp / \langle e_0 \rangle$ si estende in modo unico ad una trasformazione di $\mathbf{O}_b(\mathbb{R}^{m+2})$. Allora lo stabilizzatore di \mathfrak{p}_0

$$\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & v^\top & -\frac{1}{2}\lambda\|v\|^2 \\ 0 & \mathbf{b} & -\lambda \cdot \mathbf{b} \cdot v \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}^*, v \in \mathbb{R}^m, \mathbf{b} \in \mathbf{O}(m) \right\}$$

consiste di tutte le matrici triangolari superiori a blocchi di $\mathbf{O}_b(\mathbb{R}^{m+2})$ ed ha algebra di Lie

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{t} & -w^\top & 0 \\ 0 & X & w \\ 0 & 0 & -\mathbf{t} \end{pmatrix} \mid \mathbf{t} \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}^m, X \in \mathfrak{o}(m) \right\}.$$

Si verifica che \mathfrak{h} non ammette un complemento invariante per l'azione aggiunta di \mathbf{H} e quindi \mathbf{Q} non è uno spazio omogeneo riduttivo di $\mathbf{O}_b(\mathbb{R}^{m+2})$.

Poiché \mathbf{Q} è compatta, è omogenea per l'azione di ogni sottogruppo compatto massimale di $\mathbf{O}_b(\mathbb{R}^{m+2})$. Possiamo in particolare fissare il sottogruppo compatto massimale $\mathbf{K} = \mathbf{O}_b(\mathbb{R}^{m+2}) \cap \mathbf{O}(m+2)$, che ha algebra di Lie

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -v^\top & 0 \\ v & X & v \\ 0 & -v^\top & 0 \end{pmatrix} \mid v \in \mathbb{R}^m, X \in \mathfrak{o}(m) \right\} \simeq \mathfrak{o}(m+1).$$

Ponendo

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| X \in \mathfrak{o}(m) \right\}, \quad \mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -v^\top & 0 \\ v & 0 & v \\ 0 & -v^\top & 0 \end{pmatrix} \middle| v \in \mathbb{R}^m \right\}$$

otteniamo per la sfera una descrizione equivalente a quella dell'Es.13.2.4.

ESEMPIO 13.2.7. La congruenza

$$\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \ni (\mathbf{a}, X) \longrightarrow \mathbf{a} \cdot X \cdot \mathbf{a}^\top \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$$

definisce un'azione transitiva del gruppo lineare speciale $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ sulla varietà M delle matrici reali $n \times n$ definite positive con determinante uno, che ha nucleo d'ineffettività $\mathbf{N} = \{\pm I_n\}$. Il punto base I_n di M ha come stabilizzatore il gruppo ortogonale speciale $\mathbf{SO}(n)$, che è compatto massimale in $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$. La decomposizione corrispondente $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{o}(n) \oplus \mathfrak{p}_{n,0}(\mathbb{R})$, ove $\mathfrak{p}_{n,0}(\mathbb{R})$ è lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$ simmetriche con traccia nulla, è una decomposizione di Cartan di $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$. La varietà M ha dimensione $(n^2-1) - n(n-1)/2 = (n-1)(n+2)/2$ ed una connessione $\mathbf{SO}(n)$ -lineare canonica $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ -invariante, con torsione nulla e curvatura $R_{\mathfrak{p}_0}(X, Y)Z = -[[X, Y], Z]$ per $X, Y, Z \in \mathfrak{p}_{n,0}(\mathbb{R})$.

Notiamo che la connessione invariante su M è la Levi-Civita relativa alla metrica Riemanniana invariante che nel punto base (corrispondente ad I_n) è

$$g(X, Y) = \text{trac}(X \cdot Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{p}_{n,0}(\mathbb{R}).$$

Poiché

$$\text{trac}([X, Y] \cdot Z) = \text{trac}(X \cdot Y \cdot Z - Y \cdot X \cdot Z) = \text{trac}(Y \cdot Z \cdot X - Y \cdot X \cdot Z) = \text{trac}([Z, X] \cdot Y),$$

la curvatura sezionale è data da

$$(\text{trac}(X^2)\text{trac}(Y^2) - (\text{trac}(X, Y))^2) \cdot \mathbf{K}(X \wedge Y) = \text{trac}([X, Y], Y \cdot X) = -\text{trac}([X, Y]^2).$$

È quindi non positiva e nulla sulle coppie di matrici linearmente indipendenti che commutino tra loro.

13.3. Connessioni di Cartan-Schouten

E. Cartan ed A. Schouten³ hanno studiato connessioni invarianti su gruppi di Lie. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie. Lo consideriamo come una varietà differenziabile su cui il prodotto diretto $\mathbf{K} = \mathbf{G} \times \mathbf{G}$ opera in modo transitivo mediante

$$(13.7) \quad \mathbf{K} \times \mathbf{G} \ni ((\mathbf{a}, \mathbf{b}), \mathbf{x}) \longrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}^{-1} \in \mathbf{G}.$$

Lo stabilizzatore dell'identità è il sottogruppo

$$(13.8) \quad \mathbf{H} = \{(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in \mathbf{G}\} \simeq \mathbf{G}.$$

Se \mathfrak{g} è l'algebra di Lie di \mathbf{G} , allora $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ è quella di \mathbf{K} ed $\mathfrak{h} = \{(X, X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$ quella di \mathbf{H} .

³Jan Arnoldus Schouten (1883-1971), matematico olandese, professore a Delft. Ha contribuito allo sviluppo del calcolo tensoriale e di Ricci. I lavori a cui facciamo riferimento sono [22, 23].

Ci sono diversi modi di presentare il quoziente $\mathbf{G} = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ come uno spazio riduttivo. In particolare, utilizzando un parametro reale λ , possiamo porre

$$\mathfrak{m}_\lambda = \{\lambda(X, X) - (X, -X) \mid X \in \mathfrak{g}\},$$

cui corrisponde la decomposizione $(X, Y) = (X, Y)_\mathfrak{h} + (X, Y)_{\mathfrak{m}_\lambda}$, con

$$(13.9) \quad \begin{cases} (X, Y)_\mathfrak{h} = \frac{1}{2}(X+Y) + \lambda(X-Y), & (X+Y) + \lambda(X-Y), \\ (X, Y)_{\mathfrak{m}_\lambda} = \frac{1}{2}((\lambda-1)(Y-X), (\lambda+1)(Y-X)). \end{cases}$$

Calcoliamo il commutatore di due elementi di \mathfrak{m}_λ . Se $X, Y \in \mathfrak{g}$, otteniamo

$$\begin{aligned} [((\lambda-1)X, (\lambda+1)X), ((\lambda-1)Y, (\lambda+1)Y)] &= ((\lambda-1)^2[X, Y], (\lambda+1)^2[X, Y]) \\ &= (1-\lambda^2)([X, Y], [X, Y]) + 2\lambda((\lambda-1)[X, Y], (1+\lambda)[X, Y]). \end{aligned}$$

Utilizziamo questa formula per calcolare torsione e curvatura della connessione canonica associate alla decomposizione $\kappa = \mathfrak{m}_\lambda \oplus \mathfrak{h}$. Poiché

$$\begin{aligned} &[(X_1, Y_1)_{\mathfrak{m}_\lambda}, (X_2, Y_2)_{\mathfrak{m}_\lambda}] \\ &= \frac{1}{4}[(\lambda-1)(Y_1-X_1), (\lambda+1)(Y_1-X_1), (\lambda-1)(Y_2-X_2), (\lambda+1)(Y_2-X_2)], \text{ è} \\ \Theta((X_1, Y_1)^*, (X_2, Y_2)^*) &= -\frac{\lambda}{2}((\lambda-1)[Y_1-X_1, Y_2-X_2], ((\lambda+1)[Y_1-X_1, Y_2-X_2]), \\ \Omega((X_1, Y_1)^*, (X_2, Y_2)^*) &= \frac{\lambda^2-1}{4}([Y_1-X_1, Y_2-X_2], [Y_1-X_1, Y_2-X_2]). \end{aligned}$$

Lo spazio tangente a \mathbf{G} in $\mathbf{e}_\mathbf{G}$ è la sua algebra di Lie \mathfrak{g} . La proiezione di \mathbf{K} su \mathbf{G} è data da $\pi: \mathbf{K} \ni (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^{-1}$ e quindi $d\pi_{\mathbf{e}_\mathbf{K}}(X, Y) = X - Y$, per ogni X, Y in \mathfrak{g} . Quindi $-\frac{1}{2}((\lambda-1)X, (\lambda-1)X)$ è il rialzamento orizzontale in $\mathbf{e}_\mathbf{K}$ di un X in $\mathfrak{g} = T_{\mathbf{e}_\mathbf{G}}\mathbf{G}$. Per la (13.6) otteniamo che torsione e curvatura in $\mathbf{e}_\mathbf{G}$ della connessione canonica associata al parametro λ sono

$$(13.10) \quad T(X, Y) = \lambda \cdot [X, Y], \quad R(X, Y)Z = (\lambda^2 - 1) \cdot [[X, Y], Z], \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

DEFINIZIONE 13.3.1 (Cartan-Shauten). Le connessioni canoniche corrispondenti ai parametri $1, -1, 0$ si dicono la connessione- $(+)$, $(-)$ (0) , rispettivamente.

Per le (13.10) esse corrispondono alle due connessioni con curvatura nulla e a quella simmetrica. Le relative decomposizioni sono

$$\begin{aligned} (+) \quad & \kappa = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_+, \quad \text{con } \mathfrak{m}_+ = \{(0, X) \mid X \in \mathfrak{g}\}, \\ (-) \quad & \kappa = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_-, \quad \text{con } \mathfrak{m}_- = \{(X, 0) \mid X \in \mathfrak{g}\}, \\ (0) \quad & \kappa = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_0, \quad \text{con } \mathfrak{m}_0 = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

TEOREMA 13.3.2. *Torsione e curvatura delle connessioni di Cartan-Shauten sul gruppo di Lie \mathbf{G} si esprimono con le formule:*

(+)	$T_{\mathbf{e}}(X, Y) = [X, Y]$	$R = 0$
(-)	$T_{\mathbf{e}}(X, Y) = -[X, Y]$	$R = 0$
(0)	$T = 0$	$R_{\mathbf{e}}(X, Y)Z = -[[X, Y], Z]$

per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

□

Discutiamo brevemente la geometria delle connessioni (+), (-), (0). Per evitare confusione, indicheremo con M il gruppo \mathbf{G} considerato come spazio omogeneo \mathbf{K}/\mathbf{H} . Se $(X, Y) \in \mathfrak{k}$, allora $(X, Y)^{\mathbf{K}} = (X_*, Y_*)$ ed $(X, Y)^M = X_* - Y_*$, ove abbiamo indicato con X_*, Y_* (risp. X^*, Y^*) i campi di vettori invarianti a destra (risp. a sinistra) su \mathbf{G} che valgono X, Y in $\mathfrak{e}_{\mathbf{G}}$.

(+). Consideriamo la connessione lineare \mathbf{K} -invariante corrispondente alla scelta del complemento \mathfrak{m}_+ di \mathfrak{h} . Identificando \mathbb{R}^m con \mathfrak{m}_+ , otteniamo

$$\theta(X_*, Y_*) = (0, \omega_{\mathbf{G}}(Y_* - X_*)), \quad \omega(X_*, Y_*) = (\omega_{\mathbf{G}}(X_*), \omega_{\mathbf{G}}(X_*)).$$

Se $X \in \mathfrak{g}$, il sollevamento orizzontale di X^* è il campo $\tilde{X}^* = (0, -X_*)$. Abbiamo quindi

$$(13.11) \quad \tilde{X}^* \theta(\tilde{Y}^*) = (0, -X_*)(0, \omega_{\mathbf{G}}(-Y_*)) = (0, [X_*, Y_*]) = (0, -[X, Y]_*).$$

Questo ci dice che $\nabla_{X^*} Y^* = [X^*, Y^*]$. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(X^*, Y^*) &= \nabla_{X^*} Y^* - \nabla_{Y^*} X^* - [X^*, Y^*] = [X^*, Y^*], \\ \mathbf{R}(X^*, Y^*) Z^* &= (\nabla_{X^*} \nabla_{Y^*} - \nabla_{Y^*} \nabla_{X^*} - \nabla_{[X^*, Y^*]}) Z^* \\ &= [X^*, [Y^*, Z^*]] - [Y^*, [X^*, Z^*]] - [X^*, Y^*], Z^* = 0. \end{aligned}$$

(-). Consideriamo ora la connessione lineare corrispondente alla scelta del complemento \mathfrak{m}_- . Identificando \mathbb{R}^m ad \mathfrak{m}_- , abbiamo in questo caso

$$\theta(X_*, Y_*) = (\omega_{\mathbf{G}}(X_* - Y_*), 0), \quad \omega(X_*, Y_*) = (\omega_{\mathbf{G}}(Y_*), \omega_{\mathbf{G}}(Y_*)).$$

Se $X \in \mathfrak{g}$, il sollevamento orizzontale del campo di vettori invariante a destra X_* è il campo $(X_*, 0)$. Abbiamo quindi, se $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\tilde{X}_* \theta(\tilde{Y}_*) = (X_*, 0)(\omega_{\mathbf{G}}(Y_*), 0) = (\omega([X_*, Y_*]), 0) = (-\omega_{\mathbf{G}}([X, Y]_*), 0).$$

È perciò $\nabla_{X_*} Y_* = [X_*, Y_*] = -[X, Y]_*$. Otteniamo quindi

$$\mathbf{T}(X_*, Y_*) = \nabla_{X_*} Y_* - \nabla_{Y_*} X_* - [X_*, Y_*] = [X_*, Y_*] = -[X, Y]_*.$$

(0). Il caso della connessione (0) è conseguenza del Teor.13.2.2, perché risulta $[\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0] \subset \mathfrak{h}$. Nota che, con la connessione (0), $M = \mathbf{G}$ è uno spazio affine simmetrico.

Calcoliamo esplicitamente la derivata covariante e la curvatura rispetto ai campi di vettori X^M , al variare di X in \mathfrak{g} , per la connessione simmetrica. In questo caso ad $X \in \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{m}_0$ associamo il campo $X^M = X^* + X_*$. È

$$\nabla_{X^M} Y^M = \frac{1}{2}([X^*, Y^*] + [X_*, Y_*]) = \frac{1}{2}([X, Y]^* - [X, Y]_*), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Si verifica immediatamente che la torsione è nulla, mentre la curvatura è

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(X^M, Y^M) Z^M &= -\frac{1}{2}([X^*, Y^*], Z^*] + [X_*, Y_*], Z_*]) \\ &= -\frac{1}{2}([X, Y], Z]^* + [[X, Y], Z]_*), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

13.4. Caratterizzazione della connessione canonica

Dimostriamo in questo paragrafo un teorema che possiamo considerare come un inverso del Teor.13.2.2.

TEOREMA 13.4.1. *Supponiamo che M sia connessa e semplicemente connessa e che su di essa sia definita una connessione affine completa Γ . Se i due tensori di curvatura e torsione sono paralleli, allora M ammette un gruppo transitivo \mathbf{K} di affinità, dimodochè M sia uno spazio omogeneo riduttivo di \mathbf{K} e la connessione su M coincida con quella canonica.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un elemento σ_0 di $L(M)$ ed indichiamo con \mathfrak{h} l'algebra di Lie del gruppo di ologonia in σ_0 e con \mathbf{P} lo spazio totale del fibrato di ologonia per σ_0 . Nel Corollario10.5.3 abbiamo costruito un'algebra di Lie $\kappa = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ come estensione dell'algebra di Lie \mathfrak{h} del gruppo di ologonia in σ_0 , con $\mathfrak{m} = \mathbb{R}^m$. Le operazioni in κ sono caratterizzate da

$$\begin{cases} [X, Y] = Z, & [X, v] = X \cdot v, & [u, v] = w + X, \\ \text{se } X, Y, Z \in \mathfrak{h}, \text{ ed } u, v, w \in \mathbb{R}^m \text{ verificano} \\ [X^*, Y^*] = Z^*, & [X^*, v^*] = (X \cdot v)^*, & [u^*, v^*] = w^* + X^*. \end{cases}$$

Abbiamo qui indicato con X^* il campo verticale fondamentale corrispondente ad un $X \in \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ e con v^* il campo orizzontale standard corrispondente ad un vettore v di \mathbb{R}^m . La

$$\mathbf{P} \times \kappa = \mathbf{P} \times (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}) \ni (\sigma; X, v) \longrightarrow X_\sigma^* + v_\sigma^* \in \mathbf{TP}$$

definisce su \mathbf{P} un parallelismo completo, cui corrisponde la forma $\tilde{\omega} \in \Omega^1(\mathbf{P}, \kappa)$ con

$$\tilde{\omega}(A^* + v^*) = A + v, \quad \forall A \in \mathfrak{h}, \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

Sia \mathbf{K} un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie κ e forma di Maurer-Cartan $\omega_{\mathbf{K}}$. Identifichiamo lo spazio tangente del prodotto $\mathbf{K} \times \mathbf{P}$ con il prodotto $\mathbf{TK} \times \mathbf{TP}$ degli spazi tangenti e consideriamo la forma $\omega_{\mathbf{K}} - \tilde{\omega} \in \Omega^1(\mathbf{K} \times \mathbf{P}, \kappa)$. La $\mathfrak{Y} = \{Z = (X, Y) \in \mathbf{T}(\mathbf{K} \times \mathbf{P}) \mid \omega_{\mathbf{K}}(X) = \tilde{\omega}(Y)\}$ è una distribuzione vettoriale il cui rango è uguale alla dimensione di \mathbf{P} e di \mathbf{K} . Dico che \mathfrak{Y} è totalmente integrabile. Infatti, indicando con $X^{\mathbf{K}}$ il campo invariante a destra in \mathbf{K} corrispondente ad $X \in \kappa$, essa è generata dagli elementi

$$(A^{\mathbf{K}} + X^{\mathbf{K}}, A^* + X^*), \quad \text{con } A \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{m}.$$

Per come abbiamo definito il prodotto di Lie su \mathbf{K} , abbiamo allora $[\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}] \subseteq \mathfrak{Y}$.

Dico che l'integrale massimale N di \mathfrak{Y} per il punto $(e_{\mathbf{K}}, \sigma_0)$ è il grafico di un rivestimento di \mathbf{K} su \mathbf{P} . Infatti, ogni cammino $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{K})$ (rispettivamente $\hat{\gamma} \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{P})$) determina un cammino $v = \omega_{\mathbf{K}}(\dot{\gamma}) \in \mathcal{C}([0, 1], \kappa)$ (rispettivamente $v = \tilde{\omega}(\dot{\hat{\gamma}}) \in \mathcal{C}([0, 1], \kappa)$). Poiché \mathbf{K} è connesso e semplicemente connesso, la proiezione sul primo fattore definisce un rivestimento a un solo foglio, e quindi un diffeomorfismo f , di N su \mathbf{K} . Componendo l'inversa di f con la proiezione di N su \mathbf{P} , otteniamo un rivestimento differenziabile $\varpi : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{P}$.

Definiamo l'azione di \mathbf{K} su \mathbf{P} nel modo seguente. Se $k \in \mathbf{K}$ e $\sigma \in \mathbf{P}$, fissiamo una curva continua $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{K})$ con $\gamma(0)=e_{\mathbf{K}}$ e $\gamma(1)=k$. Sia $\gamma_\sigma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{P})$ la curva definita da $\tilde{\omega}(\dot{\gamma}_\sigma)=\omega_{\mathbf{K}}(\dot{\gamma})$ con punto iniziale σ e poniamo $k \cdot \sigma = \gamma_\sigma(1)$. Poiché i laccetti in \mathbf{K} di punto iniziale $e_{\mathbf{K}}$ si trasformano in questo modo in laccetti di punto iniziale σ , l'azione è ben definita. Gli elementi $k \in \mathbf{K}$ che trasformano in sé la fibra \mathbf{P}_{p_0} formano un sottogruppo chiuso di \mathbf{K} . Sia \mathbf{H} la sua componente connessa dell'identità. La composizione $\pi \circ \varpi$ definisce per passaggio al quoziente un rivestimento $\tau : \mathbf{K}/\mathbf{H} \rightarrow M$, che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \xrightarrow{\eta} & \mathbf{P} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbf{K}/\mathbf{H} & \xrightarrow{\tau} & M. \end{array}$$

Poiché M è connessa e semplicemente connessa, τ è un diffeomorfismo e la connessione lineare su M coincide con quella canonica sullo spazio riduttivo \mathbf{K}/\mathbf{H} . \square

13.5. Spazi affini simmetrici

In §10.5 abbiamo introdotto la nozione di *spazio affine localmente simmetrico*. Definiamo qui gli spazi affini *simmetrici* come spazi affini localmente simmetrici completi.

DEFINIZIONE 13.5.1. Gli *spazi affini simmetrici* sono varietà differenziabili affini complete dotate di una connessione lineare simmetrica con curvatura parallela.

Per il Teor.13.4.1 uno spazio affine simmetrico è della forma $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$, per un gruppo di Lie \mathbf{K} , la cui algebra di Lie κ si decompone nella somma diretta $\kappa = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ dell'algebra di Lie \mathfrak{h} di \mathbf{H} e di un sottospazio vettoriale $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante \mathfrak{m} con $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$. L'applicazione lineare $\vartheta : \kappa \rightarrow \kappa$ definita da

$$\vartheta(X) = \begin{cases} X & \text{se } X \in \mathfrak{h}, \\ -X & \text{se } X \in \mathfrak{m}, \end{cases}$$

è un'involuzione dell'algebra di Lie κ : soddisfa cioè

$$(13.12) \quad \vartheta^2 = \text{id}_\kappa, \quad [\vartheta(X), \vartheta(Y)] = \vartheta([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \kappa.$$

Viceversa, il luogo

$$\mathfrak{h} = \{X \in \kappa \mid \vartheta(X) = X\}$$

dei punti fissi di un automorfismo involutivo ϑ di κ , è una sua sottoalgebra e l'autospazio

$$\mathfrak{m} = \{X \in \kappa \mid \vartheta(X) = -X\}$$

dell'autovalore (-1) un suo complemento lineare $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -invariante in κ .

PROPOSIZIONE 13.5.2. Sia \mathbf{K} un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso, con algebra di Lie κ . Gli spazi affini simmetrici connessi e localmente connessi di \mathbf{K} sono, modulo isomorfismi affini, in corrispondenza biunivoca con le classi di equivalenza degli automorfismi involutivi della sua algebra di Lie κ .

DIMOSTRAZIONE. Per l'ipotesi che \mathbf{K} sia connesso e semplicemente connesso, ogni automorfismo involutivo ϑ di κ è il differenziale nell'identità di un automorfismo involutivo $\hat{\vartheta} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ del gruppo \mathbf{K} . L'insieme $\hat{\mathbf{H}}$ dei punti fissi dell'involuzione $\hat{\vartheta}$ è allora un sottogruppo chiuso di \mathbf{G} . La componente dell'identità \mathbf{H} di $\hat{\mathbf{H}}$ è un sottogruppo chiuso di \mathbf{K} e lo spazio omogeneo \mathbf{K}/\mathbf{H} è uno spazio affine simmetrico connesso e semplicemente connesso associato all'automorfismo involutivo ϑ . Il viceversa è conseguenza del Teor.13.4.1. \square

OSSERVAZIONE 13.5.3. Se M è uno spazio affine simmetrico del gruppo di Lie \mathbf{K} , il suo rivestimento universale \tilde{M} è uno spazio affine simmetrico del rivestimento universale $\tilde{\mathbf{K}}$ di \mathbf{K} .

13.5.1. Spazi affini simmetrici piatti. Il *prolungamento affine* di un sottogruppo \mathbf{G} di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ è il prodotto diretto $\mathbb{R}^m \times \mathbf{G}$, su cui le operazioni di gruppo sono definite da

$$(v, \mathbf{a})(w, \mathbf{b}) = (v + \mathbf{a} \cdot w, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^m, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{G}.$$

Lo indicheremo con \mathbf{G}_1 e lo rappresenteremo come il sottogruppo di $\mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ formato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & \mathbf{a} \end{pmatrix} \quad \text{con } v \in \mathbb{R}^m, \mathbf{a} \in \mathbf{G}.$$

Allora

$$\mathbf{G} \simeq \mathbf{H} := \{(0, \mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in \mathbf{G}\} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{a} \end{pmatrix} \mid \mathbf{a} \in \mathbf{G} \right\}.$$

La proiezione $\text{pr}_{\mathbf{G}} : \mathbf{G}_1 \ni (v, \mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{a} \in \mathbf{G}$ è un omomorfismo il cui nucleo è il sottogruppo abeliano $\mathbb{R}^m \simeq \{(v, \mathbf{I}_m) \mid v \in \mathbb{R}^m\}$ di \mathbf{G}_1 . La sua algebra di Lie

$$\mathfrak{m} = \{(v, 0) \mid v \in \mathbb{R}^m\} \simeq \mathbb{R}^m$$

è abeliana ed è un complemento lineare nell'algebra di Lie

$$\mathfrak{g}_1 = \{(v, X) \mid v \in \mathbb{R}^m, X \in \mathfrak{g}\}$$

di \mathbf{G}_1 dell'algebra di Lie

$$\mathfrak{h} = \{(0, X) \mid X \in \mathfrak{g}\} \simeq \mathfrak{g}$$

di \mathbf{H} . Lo spazio omogeneo $\mathbb{R}^m \simeq \mathbf{G}_1/\mathbf{G}$ è lo spazio affine simmetrico con curvatura nulla che corrisponde all'involuzione $(v, X) \rightarrow (-v, X)$ di \mathfrak{g}_1 .

Tutti gli spazi affini simmetrici piatti sono di questa forma.

13.5.2. Automorfismi di un'algebra di Lie reale. Sia κ un'algebra di Lie reale. Per ogni $X \in \kappa$ la

$$(13.13) \quad \text{ad}_X : \kappa \ni Y \longrightarrow \text{ad}_X Y = [X, Y] \in \kappa.$$

definisce una derivazione di κ . Infatti, per l'identità di Jacobi vale

$$\text{ad}_X[Y, Z] = [\text{ad}_X Y, Z] + [Y, \text{ad}_X Z], \quad \forall X, Y, Z \in \kappa.$$

DEFINIZIONE 13.5.4. Chiamiamo *derivazione* dell'algebra di Lie κ un'applicazione lineare $D \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\kappa)$ che soddisfi l'identità di Leibnitz

$$(13.14) \quad D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY], \quad \forall X, Y \in \kappa.$$

Indichiamo con $\mathfrak{Der}(\kappa)$ l'insieme di tutte le derivazioni di κ . Le derivazioni ad_X , al variare di X in κ , si dicono *interne*. Indichiamo con $\mathfrak{Int}(\kappa) = \{\text{ad}_X \mid X \in \kappa\}$ l'insieme delle derivazioni interne di κ .

LEMMA 13.5.5. *Le derivazioni di κ formano una sottoalgebra di Lie $\mathfrak{Der}(\kappa)$ dell'algebra di Lie $\mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\kappa)$ e quelle interne un ideale $\mathfrak{Int}(\kappa)$ di $\mathfrak{Der}(\kappa)$.*

DIMOSTRAZIONE. L'insieme $\mathfrak{Der}(\kappa)$ delle derivazioni è uno spazio vettoriale reale, perché (13.14) è, per ogni $X, Y \in \kappa$, una relazione lineare in D . Se D_1, D_2 sono due derivazioni di κ , allora abbiamo

$$\begin{aligned} [D_1, D_2][X, Y] &= D_1 D_2[X, Y] - D_2 D_1[X, Y] \\ &= D_1([D_2 X, Y] + [X, D_2 Y]) - D_2([D_1 X, Y] + [X, D_1 Y]) \\ &= [D_1 D_2 X, Y] + [D_2 X, D_1 Y] + [D_1 X, D_2 Y] + [X, D_1 D_2 Y] \\ &\quad - [D_2 D_1 X, Y] - [D_1 X, D_2 Y] - [D_2 X, D_1 Y] - [X, D_2 D_1 Y] \\ &= [(D_1 D_2 - D_2 D_1)X, Y] + [X, (D_1 D_2 - D_2 D_1)Y] \\ &= [[D_1, D_2]X, Y] + [X, [D_1, D_2]Y] \end{aligned}$$

e quindi anche $[D_1, D_2]$ è una derivazione di κ . Questo dimostra che $\mathfrak{Der}(\kappa)$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\kappa)$.

Osserviamo che $\mathfrak{Int}(\kappa)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{Der}(\kappa)$, perché $\text{ad}: \kappa \rightarrow \mathfrak{Der}(\kappa)$ è un'applicazione lineare. Abbiamo poi

$$[\text{ad}_X, \text{ad}_Y] = \text{ad}_{[X, Y]} \quad \text{e} \quad [D, \text{ad}_X] = \text{ad}(DX), \quad \forall X, Y \in \kappa, \quad \forall D \in \mathfrak{Der}(\kappa),$$

e dunque $\mathfrak{Int}(\kappa)$ è un ideale in $\mathfrak{Der}(\kappa)$. \square

DEFINIZIONE 13.5.6. Un *automorfismo* di κ è un elemento $\phi \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\kappa)$ tale che

$$(13.15) \quad [\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \kappa.$$

Gli automorfismi di κ formano un gruppo, che indichiamo con $\mathcal{Aut}(\kappa)$.

PROPOSIZIONE 13.5.7. *$\mathcal{Aut}(\kappa)$ è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\kappa)$, con algebra di Lie $\mathfrak{Der}(\kappa)$. Il sottogruppo analitico $\text{Int}(\kappa)$ di $\mathcal{Aut}(\kappa)$ generato da $\mathfrak{Int}(\kappa)$ è un sottogruppo normale di $\mathcal{Aut}(\kappa)$.*

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo il prodotto di Lie in κ come una forma bilineare antisimmetrica $B: \kappa \times \kappa \rightarrow \kappa$. Scegliendo una base otteniamo un'identificazione $\kappa \simeq \mathbb{R}^n$, che ci consente di rappresentare il prodotto nella forma $[X, Y] = X^\top B Y$, per una matrice antisimmetrica B . Allora

$$\mathcal{Aut}(\kappa) = \{\mathbf{a} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \mathbf{a}^\top B \mathbf{a} = B\}$$

e di conseguenza $\mathcal{Aut}(\kappa)$ è un sottogruppo chiuso algebrico di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, con algebra di Lie

$$\{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top B + B A = 0\} = \mathfrak{Der}(\kappa).$$

Se $\phi \in \mathcal{A}ut(\kappa)$ ed $X \in \kappa$, allora

$$\text{Ad}_\phi(\text{ad}_X(Y)) = \phi \circ \text{ad}_X \circ \phi^{-1}(Y) = \phi([X, \phi^{-1}(Y)]) = [\phi(X), Y] = \text{ad}_{\phi(X)}(Y).$$

Questo dimostra che $\text{Ad}_{\mathcal{D}er(\kappa)}(\mathfrak{I}nt(\kappa)) = \mathfrak{I}nt(\kappa)$ e quindi $\text{ad}(\mathcal{A}ut(\kappa))$ trasforma in sé il sottogruppo $\text{Int}(\kappa)$, che quindi è un sottogruppo normale. \square

OSSERVAZIONE 13.5.8. Osserviamo che il sottogruppo $\text{Int}(\kappa)$ può non essere chiuso in $\mathcal{A}ut(\kappa)$. Si consideri ad esempio l'algebra κ delle matrici complesse triangolari superiori generata dalle quattro matrici

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\pi+2}{3} & & \\ & \frac{\pi-1}{3} & \\ & & -\frac{2\pi+1}{3} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} [A, B_1] &= B_1, & [A, B_2] &= \pi B_2, & [A, C] &= (\pi + 1)C, \\ [B_1, B_2] &= C, & [B_1, C] &= 0, & [B_2, C] &= 0. \end{aligned}$$

Nella base A, B_1, B_2, C Le matrici diagonali di $\text{Int}(\kappa)$ sono della forma

$$\text{diag}(1, e^z, e^{\pi z}, e^{(1+\pi)z})$$

al variare di z in \mathbb{C} . La sua chiusura contiene tutte le matrici della forma

$$\text{diag}(1, \rho \exp(it), \rho^\pi \exp(is), \rho^{1+\pi} \exp(i(t+s))),$$

con $s, t, \rho \in \mathbb{R}$ e $\rho > 0$. Quindi $\text{Int}(\kappa)$ non è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\kappa)$.

13.5.3. Involuzioni \mathbb{C} -lineari del gruppo lineare complesso. Gli automorfismi interni dell'algebra di Lie lineare complessa $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ sono della forma

$$\text{Ad}(\mathfrak{a})(X) = \mathfrak{a} \cdot X \cdot \mathfrak{a}^{-1}, \quad \forall X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), \quad \text{con } \mathfrak{a} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Infatti $\exp(\text{Ad}(X))(Y) = \exp(X)Y \exp(-X)$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ e l'esponenziale di matrici $\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ è surgettivo. Il nucleo di Ad è costituito dai multipli dell'identità. Quindi

PROPOSIZIONE 13.5.9. *Il gruppo degli automorfismi interni di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ e di $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ è il gruppo $\mathbf{PL}_n(\mathbb{C}) = \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})/(\mathbb{C}^* \mathbf{I}_n)$ delle proiettività di \mathbb{CP}^{n-1} .* \square

PROPOSIZIONE 13.5.10. *Gli automorfismo involutivi interni di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ e di $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ sono coniugati, modulo automorfismi, a*

$$(I) \quad \theta(X) = \mathbf{I}_{p,q} \cdot X \cdot \mathbf{I}_{p,q}, \quad \text{con } \mathbf{I}_{p,q} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & \\ & \mathbf{I}_q \end{pmatrix}, \quad \text{con } p + q = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Un automorfismo interno $X \rightarrow \mathfrak{a} \cdot X \cdot \mathfrak{a}^{-1}$ è involutivo se e soltanto se $\mathfrak{a}^2 \cdot X \cdot \mathfrak{a}^{-2} = X$ per ogni $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Questo equivale al fatto che \mathfrak{a}^2 commuti con ogni matrice X e sia quindi un multiplo dell'identità. Il polinomio minimo di \mathfrak{a}^2 divide quindi un polinomio della forma $x^2 - k$, con $k \in \mathbb{C}$. Perciò \mathfrak{a} è semisemplice ed abbiamo, in una base opportuna di \mathbb{C}^n ,

$$\mathfrak{a} = \text{diag}(\underbrace{\lambda, \dots, \lambda}_{p \text{ volte}}, \underbrace{-\lambda, \dots, -\lambda}_{q \text{ volte}}).$$

Moltiplicando questa matrice per una costante opportuna, possiamo fare in modo che $\mathbf{a} \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$. Da questo segue la tesi. \square

Indichiamo con $\mathcal{A}ut_{\mathbb{C}}(\kappa)$ il gruppo degli automorfismi \mathbb{C} -lineari di un'algebra di Lie complessa κ . Chiaramente $Int(\kappa)$ è un sottogruppo normale di $\mathcal{A}ut_{\mathbb{C}}(\kappa)$.

TEOREMA 13.5.11 (Cartan). *Il quoziente $\mathcal{A}ut_{\mathbb{C}}(\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(n))/Int(\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(n))$ è un gruppo isomorfo a \mathbb{Z}_2 , generato dall'immagine dell'automorfismo $X \rightarrow -X^{\top}$.* \square

PROPOSIZIONE 13.5.12. *Gli automorfismo involutivi esterni \mathbb{C} -lineari di $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ sono coniugati, modulo automorfismi, a*

$$(II) \quad \theta(X) = -X^{\top},$$

$$(III) \quad \vartheta(X) = \Omega_q \cdot X^{\top} \cdot \Omega_q \text{ ove } n = 2q \text{ è pari e } \Omega_q = \begin{pmatrix} & -\mathbf{I}_q \\ \mathbf{I}_q & \end{pmatrix}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teor.13.5.11 un automorfismo esterno ϑ di $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ è della forma $\vartheta(X) = -\mathbf{a} \cdot X^{\top} \cdot \mathbf{a}^{-1}$, con $\mathbf{a} \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$. È

$$X = \vartheta^2(X) = \mathbf{a}(\mathbf{a}^{-1})^{\top} X \mathbf{a}^{\top} \mathbf{a}^{-1} \implies X \mathbf{a}^{\top} \mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a}^{\top} \mathbf{a}^{-1} X, \quad \forall X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}).$$

Da questa relazione segue che $\mathbf{a}^{\top} \mathbf{a}^{-1} = k \cdot \mathbf{I}_n$, cioè $\mathbf{a}^{\top} = k \cdot \mathbf{a}$, da cui allora è $\mathbf{a} = (\mathbf{a}^{\top})^{\top} = k^2 \cdot \mathbf{a}$ e quindi $k = \pm 1$. Poiché $k^n = 1$ in quanto $\mathbf{a}, \mathbf{a}^{\top} \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$, ne segue che, se n è dispari, allora $k=1$ ed \mathbf{a} è simmetrica, mentre, se n è pari, può essere $k=\pm 1$ ed \mathbf{a} simmetrica o antisimmetrica. Ogni matrice simmetrica $\mathbf{a} \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ è un prodotto $\mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^{\top}$, per un'opportuna $\mathbf{b} \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$. Quindi $\vartheta(X) = -\mathbf{b}([\mathbf{b}^{-1} X \mathbf{b}]^{\top}) \mathbf{b}^{-1}$, cioè $\text{ad}(\mathbf{b}^{-1}) \circ \vartheta(X) = -[\text{ad}(\mathbf{b}^{-1}(X))]^{\top}$ e quindi ϑ è coniugata ad un automorfismo involutivo della forma (II). In modo analogo, nel caso n sia pari ed \mathbf{a} antisimmetrica, si verifica che ϑ è coniugata a un endomorfismo di tipo (III). \square

Abbiamo quindi tre tipi di spazi affini simmetrici complessi connessi e semplicemente connessi del gruppo $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$:

- (I) $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{S}(\mathbf{GL}_p(\mathbb{C}) \times \mathbf{GL}_q(\mathbb{C})), \quad p+q = n,$
- (II) $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{SO}_n(\mathbb{C}),$
- (III) $\mathbf{SL}_{2q}(\mathbb{C})/\mathbf{Sp}_q(\mathbb{C}),$

ove ricordiamo le notazioni per i gruppi di Lie complessi e le loro algebre di Lie:

$$\begin{aligned} \mathbf{SO}_n(\mathbb{C}) &= \{\mathbf{a} \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}) \mid \mathbf{a}^{\top} \mathbf{a} = \mathbf{I}_n\}, & \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) &= \{X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid X + X^{\top} = 0\}, \\ \mathbf{Sp}_q(\mathbb{C}) &= \{\mathbf{a} \in \mathbf{SL}_{2q}(\mathbb{C}) \mid \mathbf{a}^{\top} \Omega_q \mathbf{a} = \Omega_q\}, & \mathfrak{sp}_q(\mathbb{C}) &= \{X \in \mathfrak{sl}_{2q}(\mathbb{C}) \mid X^{\top} \Omega_q + \Omega_q X = 0\}. \end{aligned}$$

13.5.4. Forme reali. Ogni algebra di Lie reale κ_0 si può *complessificare* estendendo il prodotto alla complessificazione κ dello spazio vettoriale κ_0 per \mathbb{C} -bilinearità. Viceversa, se un'algebra di Lie complessa κ contiene una sottoalgebra reale κ_0 di cui è la complessificazione, il coniugio

$$X + iY \longrightarrow X - iY, \quad \forall X, Y \in \kappa_0$$

rispetto alla forma reale κ_0 è un automorfismo involutivo anti- \mathbb{C} -lineare di κ con κ_0 come luogo di punti fissi.

PROPOSIZIONE 13.5.13. *Sia κ un'algebra di Lie complessa. Il luogo di punti fissi di un qualsiasi suo automorfismo involutivo anti- \mathbb{C} -lineare è una forma reale κ_0 di κ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia ϑ un automorfismo involutivo anti- \mathbb{C} -lineare di κ . Indichiamo con κ_0 e κ_1 gli autospazi reali in κ di ϑ , relativi agli autovalori 1 e -1 , rispettivamente. Da $i\kappa_0 \subseteq \kappa_1$ e $i\kappa_1 \subseteq \kappa_0$, deduciamo che $\kappa_1 = i\kappa_0$ e quindi $\kappa = \kappa_0 \oplus \kappa_1 = \kappa_0 \oplus i\kappa_0$ e κ è la complessificazione dell'algebra di Lie reale κ_0 . \square

Sia \mathbf{K} un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie κ e sia \mathbf{K}_0 il sottogruppo analitico di \mathbf{K} generato dalla sua forma reale κ_0 . Per la Proposizione 13.5.2 il sottogruppo \mathbf{K}_0 è chiuso e \mathbf{K}/\mathbf{K}_0 ammette una connessione lineare, associata alla decomposizione $\kappa = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ con $\mathfrak{h} = \kappa_0$ ed $\mathfrak{m} = i\kappa_0$, che lo rende uno spazio affine simmetrico.

Élie Cartan ([14, 15]) ha classificato (a meno di automorfismi) le forme reali delle algebre di Lie complesse semisemplici, riconducendolo a quello degli automorfismi \mathbb{C} -lineari involutivi che commutano con una involuzione anti- \mathbb{C} -lineare fissata.

13.5.5. Sottoalgebre di Cartan. Nella sua tesi di dottorato, nel 1894, (vedi [16]) É. Cartan introdusse una classe di sottoalgebre, cui è stato dato in seguito il suo nome, fondamentale per la classificazione delle algebre di Lie semisemplici e riduttive⁴ complesse e reali e quindi degli spazi simmetrici affini e Riemanniani.

Sia κ un'algebra di Lie.

DEFINIZIONE 13.5.14. Una *sottoalgebra di Cartan* di κ è una sua sottoalgebra di Lie nilpotente \mathfrak{d} , massimale tra quelle che sono autonormalizzanti, per cui cioè

$$\mathfrak{d} = \{X \in \kappa \mid [X, \mathfrak{d}] \subseteq \mathfrak{d}\}.$$

Le sottoalgebre di Cartan di un'algebra riduttiva κ coincidono con le loro sottoalgebre abeliane massimali, e queste a loro volta sono i centralizzatori

$$\mathfrak{d} = \{X \in \kappa \mid [X, A] = 0\}$$

degli elementi regolare A di κ , quelli cioè per cui $\text{ad}_A \in \mathfrak{gl}(\kappa)$ ha rango massimo.

Supponiamo che $\kappa \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ per qualche n e sia \mathfrak{d} una sua sottoalgebra di Cartan. Il sottogruppo analitico \mathbf{D} di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ generato da \mathfrak{d} è abeliano, isomorfo a un prodotto diretto $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \mathbf{S}^1 \times \cdots \times \mathbf{S}^1$ di ℓ_v copie del gruppo additivo \mathbb{R} ed ℓ_k copie del gruppo moltiplicativo $\mathbf{S}^1 = \{|z| = 1\} \subset \mathbb{C}$. Diciamo che \mathfrak{d} è *vettoriale* se $\ell_k = 0$, *compatta* se $\ell_v = 0$, e chiamiamo in generale ℓ_v la sua *dimensione vettoriale* ed ℓ_k la sua *dimensione compatta*. Queste sono nozioni relative alla rappresentazione di κ come algebra lineare. Esse diventano indipendenti dalla particolare realizzazione se ci restringiamo alle algebre di Lie semisemplici.

DEFINIZIONE 13.5.15. Un'algebra di Lie semisemplice reale si dice *split* se contiene una sottoalgebra di Cartan vettoriale.

⁴Un'algebra di Lie κ si dice *riduttiva* se, per ogni suo ideale \mathfrak{h} , esiste un altro ideale \mathfrak{a} tale che $\kappa = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$. In modo equivalente, κ è *riduttiva* se la sua rappresentazione aggiunta è completamente decomponibile, cioè semisemplice.

Un'algebra di Lie semisemplice si dice *compatta* se è l'algebra di Lie di un gruppo compatto.

Vale il

TEOREMA 13.5.16. *Ogni algebra di Lie semisemplice complessa ammette una forma reale split e una forma reale compatta, uniche a meno di isomorfismi.* \square

13.5.6. Forme reali dei gruppi classici semplici. Le forme reali delle algebre di Lie semisemplici, modulo il coniugio, sono state classificate da E.Cartan in [16]. Diamo la lista delle forme reali per le algebre semplici complesse $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_{2\nu+1}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_{2\nu}(\mathbb{C})$.

Poniamo

$$\Omega_q = \begin{pmatrix} 0 & -I_q \\ I_q & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}, \quad I_{p,q,r} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{pmatrix}.$$

Forme reali di $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Gli spazi omogenei $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{K}_0$, ove \mathbf{K}_0 è una forma reale di $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ sono spazi affini simmetrici di dimensione n^2-1 .

- (1) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ è la forma split, corrispondente all'involuzione $\vartheta(X) = \bar{X}$. Lo spazio affine simmetrico $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ è la grassmanniana degli n -piani totalmente reali di \mathbb{C}^n .
- (2) $\mathfrak{su}_n = \{X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid X^* + X = 0\}$ è la forma compatta, corrispondente all'involuzione $\vartheta(X) = -X^*$ e $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{SU}_n$ lo spazio affine simmetrico, che è Riemanniano simmetrico con curvatura sezionale negativa.
- (3) Siano p, q interi positivi con $p+q=n$ e $\vartheta(X) = -I_{p,q}X^*I_{p,q}$. Lo spazio affine simmetrico $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{SU}(p, q)$ è l'aperto dello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}(\mathfrak{p}_n)$ associato allo spazio vettoriale \mathfrak{p}_n delle forme Hermitiane simmetriche, che corrisponde alle forme non degeneri di indice di Witt $\min(p, q)$.
- (4) $\mathfrak{sl}_q(\mathbb{H}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2q}(\mathbb{C}) \mid X\Omega_q = \Omega_q\bar{X}\}$, con $n = 2q$ pari e $\vartheta(X) = -\Omega_q\bar{X}\Omega_q$. Il sottogruppo $\mathbf{SL}_q(\mathbb{H})$ consiste delle matrici a di $\mathbf{SL}_{2q}(\mathbb{C})$ che soddisfano $a\cdot\Omega_q = \Omega_q\bar{a}$.

Forme reali di $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$. Gli spazi omogenei $\mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})/\mathbf{K}_0$, ove abbiamo indicato con \mathbf{K}_0 una forma reale di $\mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$, sono spazi affini simmetrici di dimensione $n(2n+1)$. Essi sono le grassmanniane dei $(2n+1)$ -piani totalmente reali di \mathbb{C}^{2n+1} su cui la restrizione della parte reale di una forma bilineare simmetrica assegnata è non degenera ed ha segnatura assegnata.

Su $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n+1}(\mathbb{C}) \mid X^\top = -X\}$ è $\bar{X} = -X^*$.

- (1) $\mathfrak{so}_{n,n+1} = \{X \in \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) \mid X^*I_{n,n+1} + I_{n,n+1}X = 0\}$ è la forma split, con $\vartheta(X) = -I_{n,n+1}X^*I_{n,n+1}$.
- (2) \mathfrak{so}_{2n+1} è la forma compatta, con $\vartheta(X) = -X^* = \bar{X}$. Lo spazio omogeneo corrispondente $\mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})/\mathbf{SO}_{2n+1}$ è Riemanniano simmetrico con curvatura sezionale negativa.
- (3) $\mathfrak{so}_{p,2n-p+1} = \{X \in \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) \mid X^*I_{p,2n-p+1} + I_{p,2n-p+1}X = 0\}$, con $0 < p < n$ e $\vartheta(X) = -I_{p,2n-p+1}X^*I_{p,2n-p+1}$.

Forme reali di $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$. È $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C}) \mid \Omega_n X + X^\top \Omega_n = 0\}$. Poiché $\Omega_n^2 = -I_{2n}$, otteniamo $-X^* = \Omega_n \bar{X} \Omega_n$. Osserviamo che, se $0 \leq p \leq n$, allora $\Omega_n I_{p,2(n-p),p} = I_{p,2(n-p),p} \Omega_n$. Gli spazi affini simmetrici $\mathbf{Sp}_n(\mathbb{C})/\mathbf{K}_0$, ove \mathbf{K}_0 è una forma reale di $\mathbf{Sp}_n(\mathbb{C})$, hanno dimensione $n(2n+1)$.

- (1) $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{R}) \mid \Omega_n X + X^\top \Omega_n = 0\}$ è la forma split, con $\vartheta(X) = \bar{X}$. Il quoziente $\mathbf{Sp}_n(\mathbb{C})/\mathbf{Sp}_n(\mathbb{R})$ è uno spazio affine simmetrico che si può identificare con l'aperto nella grassmanniana dei sottospazi reali di dimensione $2n$ di \mathbb{C}^{2n} su cui la restrizione della parte reale di una forma bilineare alternata assegnata su \mathbb{C}^{2n} è non degenera.
- (2) $\mathfrak{sp}_n = \{X \in \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\} = \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{su}_n$ è la forma compatta, con $\vartheta(X) = -X^*$. Il quoziente $\mathbf{Sp}_n(\mathbb{C})/\mathbf{Sp}_n$ è uno spazio Riemanniano simmetrico con curvatura sezionale negativa.
- (3) $\mathfrak{sp}_{p,n-p} = \{X \in \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) \mid X^* I_{p,2n-2p,p} + I_{p,2n-2p,p} X = 0\}$, con $0 < p < n$ e $\vartheta(X) = -I_{p,2n-2p,p} X^* I_{p,2n-2p,p}$.

Forme reali di $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$. È $X^* = -\bar{X}$. Gli spazi affini simmetrici $\mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})/\mathbf{K}_0$, con \mathbf{K}_0 forma reale di $\mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$, hanno dimensione $n(2n-1)$.

- (1) La forma split è $\mathfrak{o}_{n,n} = \{X \in \mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{C}) \mid X^* I_{n,n} + I_{n,n} X = 0\}$, con $\vartheta(X) = -I_{n,n} X^* I_{n,n}$.
- (2) La forma compatta è $\mathfrak{o}_{2n} = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{R}) \mid X^\top + X = 0\}$, con $\vartheta(X) = \bar{X} = -X^*$. Il quoziente $\mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})/\mathbf{SO}_{2n}$ è Riemanniano simmetrico con curvatura sezionale negativa.
- (3) $\mathfrak{o}_{p,2n-p} = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{R}) \mid X^\top I_{p,2n-p} + I_{p,2n-p} X = 0\}$, con $0 < p < n$.
- (4) $\mathfrak{su}_n^*(\mathbb{H}) = \{X \in \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) \mid X \Omega_n = \Omega_n \bar{X}\} = \left\{ \begin{pmatrix} X & iY \\ i\bar{Y} & \bar{X} \end{pmatrix} \mid X \in \mathfrak{o}_p(\mathbb{C}), Y \in \mathfrak{u}_n \right\}$,
con $\vartheta(X) = -\Omega_n \bar{X} \Omega_n$.

Proprietà metriche delle varietà Riemanniane

14.1. Geodetiche e distanza Riemanniana

Sia (M, g) è una varietà Riemanniana. Poniamo

$$(14.1) \quad (v|w) = g(v, w), \quad \|v\| = \sqrt{g(v, v)} \geq 0, \quad \text{se } p \in M \text{ e } v, w \in T_p M.$$

Considereremo su M la struttura affine definita dalla connessione di Levi-Civita.

Sia $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], M)$ una curva differenziabile.

DEFINIZIONE 14.1.1. La *lunghezza* $L(\gamma)$ e l'*energia*, o *azione* $E(\gamma)$ di γ sono definite dagli integrali:

$$(14.2) \quad L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

$$(14.3) \quad E(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt.$$

Se $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ per ogni $t \in [a, b]$ diciamo che γ è *parametrizzata per lunghezza d'arco*. In questo caso $t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ per ogni $a \leq t_1 < t_2 \leq b$.

Queste definizioni si estendono in modo ovvio al caso in cui γ sia di classe \mathcal{C}^1 a tratti.

Indichiamo con $\mathcal{C}_r^1([a, b], M)$ la famiglia delle curve di classe \mathcal{C}^1 a tratti definite sull'intervallo $[a, b]$ e con $\mathcal{C}_r^1([a, b], a, b; M, p, q)$ il sottoinsieme di $\mathcal{C}_r^1([a, b], M)$ delle curve γ di punto iniziale $\gamma(a) = p$ e punto finale $\gamma(b) = q$.

Dalle formule di cambiamento di variabile negli integrali ricaviamo il

LEMMA 14.1.2. *La lunghezza di una curva non dipende dalla sua parametrizzazione.* \square

Supponiamo che M sia connessa.

DEFINIZIONE 14.1.3. La *distanza Riemanniana* tra due punti $p, q \in M$ è

$$(14.4) \quad \text{dist}(p, q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}_r^1([0, 1], 0, 1; M, p, q)\}.$$

NOTAZIONE 14.1.4. Per semplicità indicheremo a volte, nel seguito, con \overline{pq} la distanza Riemanniana $\text{dist}(p, q)$ di due punti p, q di M .

PROPOSIZIONE 14.1.5. *Sia $N_{p_0}(r) = \{v \in T_{p_0}M \mid \|v\| < r\}$, con $r > 0$, un intorno normale dell'origine in $T_{p_0}M$ e $B_{p_0}(r) = \text{Exp}_{p_0}(N_{p_0}(r))$ il corrispondente intorno normale di p_0 in M . Allora*

$$(14.5) \quad \text{dist}(p_0, \text{Exp}_{p_0}(v)) = \|v\|, \quad \forall v \in N_{p_0}(r)$$

e $B_{p_0}(r) = \{p \in M \mid \text{dist}(p, p_0) < r\}$ è la palla aperta di centro p_0 e raggio r della distanza Riemanniana.

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi, Exp_{p_0} è un diffeomorfismo di $N_{p_0}(r)$ su $B_{p_0}(r)$. Quindi, ogni cammino $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], B_{p_0}(r))$ da p_0 ad $\text{Exp}_{p_0}(v)$ si può scrivere in modo unico nella forma $\gamma(t) = \text{exp}_{p_0}(\alpha(t))$ con $\alpha \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], N_{p_0}(r))$ ed $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = v$. Possiamo limitarci a considerare il caso in cui α sia semplice e parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco. Per $t > 0$ decomponiamo $\dot{\alpha}(t)$ nella sua componente radiale $\dot{\alpha}_r(t) = (\dot{\alpha}(t)|\alpha(t))\alpha(t)/\|\alpha(t)\|^2$ ed in quella normale $\dot{\alpha}_n(t) = \dot{\alpha}(t) - \dot{\alpha}_r(t)$ alla direzione radiale. Allora $\|\dot{\alpha}_r\|$ è definita e continua per $t > 0$ e limitata sull'intervallo $(0, 1]$. Abbiamo

$$\dot{\gamma}(t) = \text{Exp}_{p_0*}(\dot{\alpha}(t)) = \text{Exp}_{p_0*}(\dot{\alpha}_r(t)) + \text{Exp}_{p_0*}(\dot{\alpha}_n(t)) = \dot{\gamma}_r(t) + \dot{\gamma}_n(t).$$

Per la Proposizione 11.3.7 ed il Lemma 11.4.3 i vettori $\dot{\gamma}_r$ e $\dot{\gamma}_n$ sono ortogonali. Inoltre $\|\dot{\gamma}_r\| = \|\dot{\alpha}_r\|$ e $\|\dot{\gamma}_n\| = 0$ se e soltanto se $\|\dot{\alpha}_n\| = 0$. Osserviamo che

$$2 \frac{d\|\alpha\|}{dt} \|\alpha\| = \frac{d\|\alpha\|^2}{dt} = 2(\dot{\alpha}|\alpha) = \pm 2\|\dot{\alpha}_r\| \cdot \|\alpha\|.$$

Quindi

$$\int_0^1 \|\dot{\alpha}_r(t)\| dt = \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} \|\alpha(t)\| \right| dt \geq \int_0^1 \frac{d}{dt} \|\alpha(t)\| dt = \|v\|.$$

Otteniamo perciò

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\| \geq \int \|\dot{\gamma}_r\| dt \geq \|v\|$$

e vale l'uguaglianza solo quando $\dot{\alpha}_n(t)$ sia identicamente nulla, cioè quando γ sia la geodetica $\text{Exp}_{p_0}(tv)$. Per concludere la dimostrazione basta osservare che ogni cammino di classe $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1$ che congiunga p_0 ad un punto non contenuto in $B_{p_0}(r)$ ha, per la prima parte della dimostrazione, lunghezza maggiore o uguale ad r . \square

Per la Proposizione 14.1.5 le geodetiche minimizzano localmente la lunghezza d'arco. Abbiamo cioè

COROLLARIO 14.1.6. Se $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ è una geodetica, allora per ogni $t_0 \in I$ possiamo trovare $\epsilon_0 > 0$ tale che $\text{dist}(\gamma(t), \gamma(t_0)) = \|\dot{\gamma}(t_0)\| \cdot |t - t_0|$ per $|t - t_0| < \epsilon_0$. \square

DEFINIZIONE 14.1.7. Chiamiamo *segmento* il supporto di una geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ tale che

$$\text{dist}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = \|\dot{\gamma}\| |t_1 - t_2|, \quad \forall 0 \leq t_1, t_2 \leq 1.$$

Chiamiamo *retta* il supporto di una geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$ non costante e completa, cioè definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Per la Proposizione 14.1.5 abbiamo

TEOREMA 14.1.8. $M \times M \ni (p, q) \rightarrow \text{dist}(p, q)$ è una distanza su M . La topologia indotta dalla distanza Riemanniana coincide con la topologia di varietà di M . \square

14.2. Il funzionale dell'energia

Mostriamo in questo paragrafo che le geodetiche di una varietà Riemanniana sono i punti stazionari del funzionale dell'energia.

LEMMA 14.2.1. *Per ogni curva $\gamma \in \mathcal{C}_{tr}^1([a, b], M)$ vale la disuguaglianza:*

$$(14.6) \quad L(\gamma)^2 \leq (b-a)E(\gamma).$$

In (14.6) vale l'uguaglianza se e soltanto se $\|\dot{\gamma}(t)\| = \text{costante}$.

DIMOSTRAZIONE. La disuguaglianza di Hölder dà

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq \left(\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b dt \right)^{1/2} = (b-a)^{1/2} E(\gamma)^{1/2}$$

e vale l'uguaglianza se e soltanto se $\|\dot{\gamma}(t)\|$ è costante. \square

COROLLARIO 14.2.2. *Se $\gamma \in \mathcal{C}_{tr}^1([a, b], M)$ è parametrizzata per lunghezza d'arco, allora $E(\gamma)$ è minimo di $\{E(\gamma \circ \phi)\}$, al variare di ϕ tra i diffeomorfismi di $[a, b]$.* \square

PROPOSIZIONE 14.2.3. *L'equazione delle geodetiche*

$$(14.7) \quad \frac{D^2\gamma}{dt^2} = 0$$

è l'equazione di Eulero-Lagrange per il funzionale dell'energia con estremi fissi.

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in \mathcal{C}^1([a, b] \times I, M)$, ove I è un intervallo reale contenente 0, con $f(a, s) = p_a$ e $f(b, s) = p_b$ sono costanti per $s \in I$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \int_a^b \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 dt &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 dt = 2 \int_a^b \left(\frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} \middle| \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt \\ &= 2 \int_a^b \left(\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} \middle| \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt = -2 \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial s} \middle| \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che il tensore della metrica è parallelo, che la connessione di Levi-Civita è priva di torsione, e che $\frac{\partial f}{\partial s}$ è un campo di vettori che si annulla negli estremi d'integrazione. Se $\gamma(t) = f(t, 0)$ è un estremo del funzionale dell'energia con estremi fissi, la derivata di $E(f_s)$ si annulla per $s = 0$. Otteniamo quindi

$$\int_a^b \left(\frac{D^2\gamma}{dt^2} \middle| V \right) dt = 0$$

per ogni campo di vettori V di classe \mathcal{C}^1 lungo γ che si annulli agli estremi. Questa relazione è equivalente alla (14.7). \square

14.3. Varietà di Riemann compatte

TEOREMA 14.3.1. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta. Ogni curva continua $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], M)$ è omotopa, in un'omotopia che lascia fissi i suoi estremi $p_0 = \gamma(0)$ e $p_1 = \gamma(1)$, ad una geodetica. Essa può essere scelta come una curva di lunghezza minima nella classe $[\gamma]$ di γ in $\pi([0, 1], 0, 1; M, p_0, p_1)$.*

DIMOSTRAZIONE. Gli intorno normali sono contrattili e quindi due archi qualsiasi, che abbiano gli stessi estremi e siano contenuti in un intorno normale, sono omotopi in un'omotopia con gli estremi fissi. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{1 \leq i \leq k}$ un ricoprimento finito di M mediante aperti semplici e convessi.

Possiamo fissare un numero reale positivo r tale che, per ogni $p \in M$ la palla $B(p, r) = \{q \in M \mid \text{dist}(p, q) < r\}$ sia contenuta in un aperto del ricoprimento¹ \mathcal{U} .

Siano $p_0, p_1 \in M$ ed α una classe di omotopia in $\pi([0, 1], 0, 1; M, p_0, p_1)$. Sia² $\mu = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \alpha\}$ e $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ una successione in α con $\{L(\gamma_n)\}$ decrescente a μ . Possiamo supporre che le γ_n siano delle geodetiche a tratti, e quindi di classe \mathcal{C}_r^1 , parametrizzate per lunghezza d'arco. È allora $\|\dot{\gamma}_n\| = L(\gamma_n)$ e $\text{dist}(\gamma_n(t), \gamma_n(s)) \leq L(\gamma_n)|t - s|$ per ogni $0 \leq s, t \leq 1$. Poiché le $L(\gamma_n)$ sono uniformemente limitate, pur di scegliere un intero N sufficientemente grande, avremo, con $t_i = i/N$, $\text{dist}(\gamma_n(t_i), \gamma_n(t_{i-1})) = L(\gamma_n)/N < r$ se $1 \leq i \leq n$. È $\gamma_n(t_0) = p_0$ e $\gamma_n(t_N) = p_1$ per ogni n . In generale, le $\{\gamma_n(t_i)\}$ sono, per ogni $i = 0, \dots, N$, delle successioni a valori nel compatto M . Quindi, a meno di passare ad una sottosuccessione, possiamo supporre che tutte le $N+1$ successioni $\{\gamma_n(t_i)\}_{n \in \mathbb{N}}$ coprano a punti $\gamma(t_i)$ di M . Per costruzione, $\text{dist}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) = \mu/N < r$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Quindi le coppie di punti $\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})$ appartengono ad uno stesso aperto semplice e convesso del ricoprimento \mathcal{U} e possono quindi essere congiunte da un unico arco di geodetica di lunghezza μ/N . Otteniamo in questo modo una spezzata $\gamma \in \mathcal{C}_r^1([0, 1], M)$ di lunghezza μ , che possiamo parametrizzare per un multiplo della lunghezza d'arco, e che realizza il minimo delle lunghezze tra i cammini continui che congiungono p_0 a p_1 ed è quindi la geodetica cercata. \square

COROLLARIO 14.3.2. *Due punti qualsiasi di una varietà Riemanniana compatta sono estremi di un segmento che li congiunge.*

14.4. Il teorema di Hopf-Rinow

DEFINIZIONE 14.4.1. Una varietà affine M si dice *geodeticamente completa* se è completa rispetto alla connessione di Levi-Civita.

TEOREMA 14.4.2 (Hopf-Rinow³). *Sia (M, g) una varietà Riemanniana. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

¹Infatti, se ciò non fosse vero, per ogni intero positivo ν potremmo trovare un punto p_ν in M tale che $B(p_\nu, 2^{-\nu})$ non sia contenuto in nessun aperto del ricoprimento \mathcal{U} . Poiché M è compatto, a meno di passare ad una estratta, possiamo supporre che la successione $\{p_\nu\}$ converga ad un punto $p_\infty \in M$. È $p_\infty \in U_{i_0}$ per qualche i_0 e $B(p_\infty, r) \subset U_{i_0}$ per qualche $r > 0$. Ma, se $2^{1-\nu} < r, \mu > \nu$ e $\text{dist}(p_\nu, p_\infty) < 2^{-\nu-1}$, la palla $B(p_\nu, 2^{-\nu})$ sarebbe contenuta in $B(p_\infty, r)$ e quindi in U_{i_0} , contraddicendo la scelta della successione $\{p_\nu\}$.

²La lunghezza di una curva continua $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], M)$ in uno spazio metrico (M, d) è l'estremo inferiore delle somme $\sum_{i=1}^N \text{dist}(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i))$ al variare di $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$ tra tutte le partizioni finite dell'intervallo $[0, 1]$.

³Hopf, H., Rinow, W., Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche, Commentarii Mathematici Helvetici 3 (1931), 209-225. Heinz Hopf (1894-1971) matematico tedesco, ha dato importanti contributi alla topologia e alla geometria differenziale. Willi Ludwig August Rinow (1907-1979), geometra differenziale, fu suo studente a Berlino.

- (1) Con la distanza Riemanniana, M è uno spazio metrico completo;
- (2) i sottoinsiemi chiusi e limitati di M sono compatti;
- (3) esiste un punto $p_0 \in M$ tale che Exp_{p_0} sia definita su tutto $T_{p_0}M$;
- (4) M è geodeticamente completa.

Ognuna delle (1), (2), (3), (4) implica:

- (5) due punti qualsiasi $p, q \in M$ possono essere congiunti da una geodetica di lunghezza $\text{dist}(p, q)$, sono cioè estremi di un segmento che li congiunge.

DIMOSTRAZIONE. In primo luogo mostriamo che, se Exp_{p_0} è definita su tutto $T_{p_0}M$, allora ogni $p \in M$ può essere congiunto a p_0 da una geodetica di lunghezza $\text{dist}(p, p_0)$. In particolare, questo dimostra che (4) \implies (5).

Sia $\rho > 0$ tale che $\overline{B_{p_0}(\rho)}$ sia contenuto in un intorno normale di p_0 . In particolare, è $B_{p_0}(\rho) = \{p \in M \mid \text{dist}(p, p_0) \leq \rho\}$. Sia p un qualsiasi punto di M . Se $r = \text{dist}(p, p_0) \leq \rho$, è $p \in \overline{B_{p_0}(\rho)}$ e quindi $p = \text{Exp}_{p_0}(v)$ per qualche $v \in T_{p_0}$ e, per la Proposizione 14.1.5 la $t \rightarrow \text{Exp}_{p_0}(tv)$ è l'unica geodetica che congiunge p_0 a p ed ha lunghezza r . Supponiamo sia $r > \rho$ e sia $\{\gamma_n\}$ una successione di curve di classe \mathcal{C}_r^1 , parametrizzate per lunghezza d'arco, di estremi p_0, p , con $L(\gamma_n) \searrow r$. Ciascuna di esse contiene un punto q_n in $\partial B_{p_0}(\rho)$. Poiché, per la Proposizione 14.1.5, $\text{dist}(p_0, q_n) = \rho$, abbiamo

$$L(\gamma_n) \geq \text{dist}(p_0, q_n) + \text{dist}(q_n, p) = \rho + \text{dist}(q_n, p) \geq r.$$

Se quindi p_ρ è un punto limite della successione $\{q_n\}$, abbiamo $\text{dist}(p_\rho, p) = r - \rho$. Sia $v \in T_{p_0}M$ con $\|v\| = 1$ e $p_\rho = \text{Exp}_{p_0}(\rho v)$. Dico che $p = \text{Exp}_{p_0}(rv)$. Sia infatti

$$I = \{\tau \in [0, r] \mid \text{dist}(\text{Exp}_{p_0}(t v), p) = r - t, \forall 0 \leq t \leq \tau\}.$$

Dobbiamo dimostrare che $r \in I$. Osserviamo che l'intervallo I è chiuso e contiene $[0, \rho]$. Mostriamo che I è anche aperto in $[0, r]$. Sia $t_0 \in I$. Se $t_0 = r$, allora $I = [0, r]$ e non c'è nulla da dimostrare. Consideriamo allora un $t_0 \in I$ con $\rho \leq t_0 < r$. Sia $p_{t_0} = \gamma(t_0)$. Fissiamo $0 < \epsilon < \min(\rho, r - t_0)$, in modo che la chiusura di $B_{p_{t_0}}(\epsilon)$ sia contenuta in un intorno semplice convesso U di p_{t_0} . Ripetendo il ragionamento svolto sopra, su $\partial B_{p_{t_0}}(\epsilon)$ possiamo trovare un punto $p_{t_0+\epsilon}$ a distanza $r - t_0 - \epsilon$ da p . Questo punto appartiene a una geodetica $\text{Exp}_{p_{t_0}}([t - t_0]w)$, per un $w \in T_{p_{t_0}}M$, con $\|w\| = 1$, tale che $\text{dist}(\text{Exp}_{p_{t_0}}([t - t_0]w), p) = r - t$ per $t_0 \leq t \leq t_0 + \epsilon$. Se questa non coincidesse con la geodetica $\text{Exp}_{p_0}(tv)$ sull'intervallo $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, potremmo trovare una curva di lunghezza minore di r che congiunge p_0 a p , prendendo $\text{Exp}_{p_0}(tv)$ per $0 \leq t \leq t_0 - \epsilon$, la geodetica in U che congiunge $\text{Exp}_{p_0}([t_0 - \epsilon]v)$ a $p_{t_0+\epsilon}$ in U , ed una curva da $p_{t_0+\epsilon}$ a p la cui lunghezza approssimi $\text{dist}(p, q) = r - t_0 - \epsilon$. Questo dimostra che $t_0 + \epsilon \in I$. Quindi $I = [0, r]$ e la nostra affermazione è dimostrata.

Completiamo ora la dimostrazione delle altre implicazioni del teorema.

(4) \implies (3) è banale.

(3) \implies (2) Se A è un sottoinsieme limitato di M , è $A \subset \overline{B(p, R)}$ per qualche $R > 0$ e quindi è un sottoinsieme del compatto $\text{Exp}_p(\{v \in T_p M \mid \|v\| \leq R\})$. La (2) segue quindi dal fatto che un sottoinsieme chiuso di un compatto è compatto.

(2) \Rightarrow (1) Ogni successione di Cauchy $\{p_n\} \subset M$ è limitata e quindi la chiusura della sua immagine è compatta. Esiste perciò una sottosuccessione convergente e dunque la successione $\{p_n\}$ stessa è convergente.

(1) \Rightarrow (4) Sia $p \in M$ e consideriamo la geodetica $t \rightarrow \gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$. Sia I il suo intervallo massimale di definizione. Se fosse $\sup I = T_0 < +\infty$, potremmo scegliere una successione $\{t_n\}$ tale che $t_n \nearrow T_0$. Poiché $\text{dist}(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq \|v\| |t_n - t_m|$, la $\{\gamma(t_n)\}$ è una successione di Cauchy. Per ipotesi ammette un limite $p_0 \in M$. Se $B(p_0, r)$ è un intorno normale di p_0 e $\gamma(t_n) \in B(p_0, r)$, vi è un unico $v_0 \in T_{p_0}M$ tale che $\gamma(t_n) = \text{Exp}_{p_0}((t_n - T_0)v_0)$ e le geodetiche $\gamma(t)$ ed $\text{Exp}_{p_0}((t - T_0)v_0)$ coincidono sull'intervallo $[t_n, T_0)$. Questo mostra che $\text{Exp}_p(tv)$ è definita in un intorno destro di T_0 . Ciò contraddice la scelta di T_0 e mostra quindi che $T_0 = +\infty$. Analogamente si dimostra che la γ è definita per ogni $t < 0$.

Ciò completa la dimostrazione. \square

PROPOSIZIONE 14.4.3. *Se (M, g) è completa, per due punti p_0, p_1 di M passa almeno una retta.*

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione è conseguenza immediata della (5) del Teorema 14.4.2 e del fatto che completezza metrica e geodetica sono equivalenti. \square

PROPOSIZIONE 14.4.4. *Se (M, g) è completa, dati una retta e un punto vi è almeno una retta incidente e perpendicolare alla retta data e passante per il punto assegnato.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $r_t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$ la retta assegnata e $p_0 \in M$. L'affermazione è banale se $p_0 \in r = r(\mathbb{R})$. Supponiamo quindi che $\delta = \text{dist}(p_0, r) > 0$. La palla chiusa $\overline{B}_{p_0}(2\delta)$ è compatta e $\overline{B}_{p_0}(2\delta) \cap r$ è compatto e non vuoto. Poiché la distanza da un punto è una funzione reale continua ci sarà un punto di $\overline{B}_{p_0}(2\delta) \cap r$, che possiamo supporre corrisponda al valore 0 del parametro, per cui $\overline{p_0}, r_0 = \text{dist}(p_0, r) = \delta$. La retta p_t per p_0 ed $r_0 = p_1$ è perpendicolare ad r in r_0 . Definiamo infatti $f \in \mathcal{C}^\infty([0, 1] \times [-\epsilon, \epsilon], M)$ in modo che, per ogni $-\epsilon < s < \epsilon$, $t \rightarrow f(t, s)$ sia la geodetica da p_0 ad r_s . Poiché $E(s) = \int_0^1 \|\partial f(t, s)/\partial t\|^2 dt$ ha un minimo per $s = 0$, il campo di Jacobi $J(t) = (\partial f/\partial s)_{s=0}$ soddisfa le condizioni

$$J(0) = 0, \quad \int_0^1 (J(t)|\dot{\gamma}(t)) = 0.$$

Decomponiamo J nella somma di un campo di Jacobi J_n ortogonale a p_t e di un campo tangenziale J_t . Poiché $J(0) = 0$, esso è della forma della forma $ct\dot{\gamma}(t)$. Quindi

$$0 = \int_0^1 (J(t)|\dot{\gamma}(t)) = \int_0^1 ct \overline{p_0} r_0^2 dt = \frac{c}{2} \overline{p_0} r_0^2$$

e $c = 0$. Dunque $J(t)$ è perpendicolare a γ ed in particolare lo è $J(0)$, che è un vettore tangente ad r in r_0 . \square

PROPOSIZIONE 14.4.5. *Se (M, g) è completa, allora ogni classe di omotopia di curve continue tra due punti p_0, p_1 di M contiene una geodetica di lunghezza minima.*

DIMOSTRAZIONE. Sia α una classe di omotopia in $\pi([0, 1], 0, 1; M, p_0, p_1)$, $\mu = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \alpha\}$ e sia $\{\gamma_n\} \subset \alpha$ una successione di curve di classe \mathcal{C}_r^1 , parametrizzate per multipli della lunghezza d'arco, con $L(\gamma_n) \searrow \mu$. I supporti delle γ_n sono tutti contenuti in un compatto $\overline{B_{p_0}(R)}$, per $R > 0$ e possiamo quindi utilizzare l'argomento della dimostrazione del Teorema 14.3.1 per ottenere una geodetica in α . \square

Il punto (5) del Teorema 14.4.2 si può riformulare nella

PROPOSIZIONE 14.4.6. *Se (M, g) è completa, allora per ogni coppia di punti distinti c è un segmento che li ha come estremi.*

OSSERVAZIONE 14.4.7. Il segmento che unisce due punti può non essere univocamente determinato, come ad esempio nel caso di punti antipodali di una sfera S^m con la metrica standard. Il segmento è invece unico se consideriamo lo spazio proiettivo $\mathbb{R}P^m$. Se chiamiamo *rette* le sue geodetiche, per $\mathbb{R}P^m$ con la metrica che rende la proiezione canonica $S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$ un'isometria locale, in esso valgono le affermazioni che per due punti passi una ed una sola retta e che due punti sono gli estremi di uno ed un solo segmento.

TEOREMA 14.4.8. *Se (M, g) è connessa e completa e contiene un punto p_0 privo di punti coniugati, allora $\text{Exp}_{p_0} : T_{p_0}M \rightarrow M$ è un rivestimento. In particolare, se M è semplicemente connesso, l'inversa di Exp_{p_0} definisce un diffeomorfismo di M con uno spazio Euclideo.*

DIMOSTRAZIONE. Se (M, g) è connessa e completa e contiene un punto p_0 privo di punti coniugati, allora Exp_{p_0} , che è definita su tutto $T_{p_0}M$ perché abbiamo supposto (M, g) completa, non ha punti critici⁴. Possiamo quindi considerare su $T_{p_0}M$ la metrica Riemanniana $g^* = \text{Exp}_{p_0}^*g$. Anche $(T_{p_0}M, g^*)$ è una varietà Riemanniana completa per il teorema di Hopf-Rinow, perché tutte le geodetiche di g^* passanti per l'origine, che hanno come supporto le rette per l'origine in $T_{p_0}M$, sono geodetiche complete. L'applicazione Exp_{p_0} definisce un'isometria di $(T_{p_0}M, g^*)$ su (M, g) . La sua immagine è aperta per il teorema dell'inversa locale perché Exp_{p_0} non ha punti critici, ed è chiusa perché è un'isometria di uno spazio metrico completo. Poiché abbiamo supposto M connessa, Exp_{p_0} è allora anche surgettiva e definisce perciò un rivestimento, perché ogni aperto semplice convesso di (M, g) è di trivializzazione. \square

14.5. Varietà Riemanniane con curvatura sezionale negativa

DEFINIZIONE 14.5.1. Diciamo che una varietà Riemanniana (M, g) ha curvatura sezionale *non positiva* (rispettivamente *negativa*) se $K(\alpha) \leq 0$ (rispettivamente $K(\alpha) < 0$) per ogni 2-piano $\alpha \subset T_pM$, per ogni $p \in M$.

Ricordiamo che i campi di Jacobi sono le soluzioni, lungo le curve geodetiche $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$, dell'equazione differenziale

$$(14.8) \quad \frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

⁴Ricordiamo che una coppia (p_0, p_1) di punti di M è coniugata se p_1 è un valore critico di Exp_{p_0}

LEMMA 14.5.2. *Sia J un campo di Jacobi lungo una geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ di (M, g) . Se la curvatura sezionale è non positiva, allora $\|J(t)\|$ è una funzione convessa. Il campo $J(t)$ si annulla al più per un valore di t . Se non è identicamente nullo ed è ortogonale a γ , e la curvatura sezionale è negativa, allora $\|J(t)\|$ è strettamente convessa.*

DIMOSTRAZIONE. Calcoliamo le derivate prime e seconde del quadrato della norma di un campo di Jacobi $J(t)$ lungo una geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$. Abbiamo

$$\frac{d}{dt}\|J(t)\|^2 = 2(\dot{J}(t), J(t)), \quad \frac{d^2}{dt^2}\|J(t)\|^2 = 2(\ddot{J}(t)|J(t)) + 2\|\dot{J}(t)\|^2,$$

ove J e \dot{J} sono le derivate covarianti prima e seconda di J lungo γ . Utilizzando l'equazione (14.8), che caratterizza i campi di Jacobi, otteniamo

$$\frac{d^2}{dt^2}\|J(t)\|^2 = -2R(J, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, J) + 2\|\dot{J}\|^2.$$

Quindi, se la curvatura sezionale è non negativa, $\frac{d^2}{dt^2}\|J(t)\|^2 \geq 2\|\dot{J}\|^2$ e, nei punti in cui $\|J(t)\| > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\|J(t)\| &= \frac{1}{4}\|J(t)\|^{-3} \left(2\|J(t)\|^2 \frac{d^2}{dt^2}\|J(t)\|^2 - \left| \frac{d}{dt}\|J(t)\|^2 \right|^2 \right) \\ &\geq \|J(t)\|^{-3} (\|J(t)\|^2 \|\dot{J}(t)\|^2 - |(\dot{J}(t)|J(t))|^2) \geq 0 \end{aligned}$$

per la disuguaglianza di Cauchy. Una funzione non negativa che è convessa nei punti in cui è positiva è convessa e quindi $\|J(t)\|$ è convessa. Osserviamo che, se $J \neq 0$, allora gli zeri di J sono isolati. In particolare, un campo di Jacobi si annulla al più in un punto di γ . Se la curvatura sezionale è negativa, per i campi di Jacobi ortogonali a γ abbiamo $\frac{d^2}{dt^2}\|J(t)\| > 0$ nei punti in cui $J \neq 0$, e quindi la $J(t)$ è strettamente convessa. \square

TEOREMA 14.5.3 (von Mangoldt-Cartan⁵). *Una varietà Riemanniana (M, g) con curvatura sezionale non positiva non contiene coppie di punti coniugati.*

Se (M, g) è connessa e completa, allora per ogni $p_0 \in M$, l'applicazione $\text{Exp}_{p_0} : T_{p_0} \rightarrow M$ è un rivestimento.

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 14.5.2 i campi di Jacobi hanno soltanto zeri isolati e quindi non ci possono essere punti coniugati lungo le geodetiche. L'affermazione successiva è quindi conseguenza del Teorema 14.4.8. \square

COROLLARIO 14.5.4. *Una varietà Riemanniana (M, g) , connessa e semplicemente connessa, e con curvatura sezionale non positiva, è diffeomorfa ad uno spazio Euclideo.* \square

⁵Hans Carl Friedrich von Mangoldt (1854-1925) ha dimostrato questo risultato nel 1881 nel caso delle superfici (*Ueber diejenigen Punkte auf positiv gekrumraten Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geoditischen Linien nie aufhoren, kirzeste Linien zu sein.* Journ. für Math., vol. 91, 23-53, 1881). La formulazione generale è dovuta a Élie Cartan (1869-1951) (*La géométrie des espaces de Riemann, Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 9* (1925), p. 1-61).

TEOREMA 14.5.5. *Supponiamo che (M, g) abbia curvatura sezionale non positiva. Siano p un punto di M ed N_0 un intorno aperto di 0 in T_pM , stellato rispetto all'origine, su cui Exp_p sia definito. Allora*

$$(14.9) \quad \|d\text{Exp}_p(v)(w)\| \geq \|w\|, \quad \forall v \in N_0, \forall w \in T_pM.$$

In particolare, se $\gamma_0 \in \mathcal{C}^1([a, b], N_0)$, è

$$(14.10) \quad L(\gamma_0) = \int_a^b \|\dot{\gamma}_0(t)\|_p dt \leq L(\text{Exp}_p \circ \gamma_0).$$

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione è conseguenza del Lemma 14.5.2, perché $d\text{Exp}_p(v)(w)$ è il valore per $t = 1$ del campo di Jacobi $J(t) = d\text{Exp}_p(tv)(tw)$, con $J(0) = 0$ e $\dot{J}(0) = w$. Poiché $\|J(t)\|$ è convessa, abbiamo

$$\|J(1)\| - \|J(\epsilon)\| \geq \left. \frac{d\|J(t)\|}{dt} \right|_{t=\epsilon} (1 - \epsilon) = \frac{(\dot{J}(\epsilon)|J(\epsilon))}{\|J(\epsilon)\|} (1 - \epsilon).$$

Passando al limite per $\epsilon \searrow 0$, otteniamo la (14.9). La (14.10) è conseguenza del fatto che $\frac{d}{dt}\text{Exp}_p(\gamma_0(t)) = d\text{Exp}_p(\dot{\gamma}_0(t))$. \square

PROPOSIZIONE 14.5.6. *Supponiamo che (M, g) sia completa e a curvatura sezionale non positiva. Allora ogni classe del gruppo fondamentale $\pi_1(M, p_0)$ contiene un'unica geodetica di lunghezza minima.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un punto $p_0 \in M$. Per il Teorema 14.4.2, l'applicazione $\text{Exp}_{p_0} : T_{p_0}M \rightarrow M$ è un rivestimento. Quindi a laccetti geodetici in p_0 omotopi corrispondono segmenti uscenti dall'origine e con lo stesso secondo estremo in $T_{p_0}M \rightarrow M$, cioè due laccetti geodetici in p_0 sono omotopi se e soltanto se sono coincidenti. \square

DEFINIZIONE 14.5.7. Un *triangolo geodetico* in M è il dato di tre segmenti, gli estremi di ciascuno dei quali siano anche estremi degli altri due.

I tre segmenti si dicono *lati*, i loro estremi *vertici* e gli angoli che essi formano due a due nei punti d'intersezione *angoli* del triangolo geodetico.

Ricordiamo che l'*angolo* α tra due curve regolari $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$ uscenti dallo stesso punto p_0 è il valore $\alpha \in [0, \pi]$ per cui

$$(\dot{\gamma}_1(0)|\dot{\gamma}_2(0)) = \|\dot{\gamma}_1(0)\| \|\dot{\gamma}_2(0)\| \cos \alpha.$$

NOTAZIONE 14.5.8. Per semplicità indicheremo nel seguito con \overline{pq} la distanza Riemanniana $\text{dist}(p, q)$ di due punti p, q di M .

PROPOSIZIONE 14.5.9. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana a curvatura sezionale non positiva e B una palla convessa e semplice di M . Siano p_0, p_1, p_2 i vertici di un triangolo geodetico e poniamo $a = \overline{p_1p_2}$, $b = \overline{p_0p_2}$, $c = \overline{p_0p_1}$, $\alpha = \widehat{p_1p_0p_2}$, $\beta = \widehat{p_0p_1p_2}$, $\gamma = \widehat{p_0p_2p_1}$, con $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$. Valgono allora le disequazioni:*

$$(14.11) \quad a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \leq c^2$$

$$(14.12) \quad \alpha + \beta + \gamma \leq \pi.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo $p_0 = \text{Exp}_{p_2}(v_0)$, $p_1 = \text{Exp}_{p_2}(v_1)$, per due vettori $v_0, v_1 \in T_{p_2}M$ con $\|v_0\| = b$, $\|v_1\| = a$. Il lato $[p_0, p_1]$ del triangolo è il supporto di una geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$, di lunghezza c , che possiamo scrivere nella forma $\gamma = \text{Exp}_{p_2} \circ \gamma_0$, con $\gamma_0 \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], T_{p_2}M)$ e $\gamma_0(0) = v_0$, $\gamma_0(1) = v_1$. Per il Teorema 14.5.5,

$$c^2 = |L(\gamma)|^2 \geq |L(\gamma_0)|^2 \geq \|v_1 - v_0\|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Le ampiezze α', β', γ' degli angoli interni del triangolo Euclideo i cui lati hanno lunghezze a, b, c soddisfano

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma' = c^2, \quad a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta' = b^2, \quad b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha' = a^2.$$

Poiché gli angoli $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ sono tutti compresi tra 0 e π , per la prima parte della dimostrazione abbiamo $\alpha \leq \alpha', \beta \leq \beta', \gamma \leq \gamma'$. Essendo $\alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$, otteniamo anche la seconda disuguaglianza. \square

OSSERVAZIONE 14.5.10. La Proposizione 14.5.9 si applica in particolare a tutti i triangoli geodetici di una varietà Riemanniana completa con curvatura sezionale non positiva.

PROPOSIZIONE 14.5.11. *Se (M, g) è connessa e completa, con curvatura sezionale non positiva, allora per ogni coppia di punti distinti di M passa una e una sola retta.*

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato è un'immediata conseguenza del Teorema di von Mangoldt-Cartan. \square

PROPOSIZIONE 14.5.12. *Sia (M, g) connessa, semplicemente connessa e completa, con curvatura scalare non positiva. Allora per ogni retta ed ogni punto fuori di essa esiste un'unica retta incidente e perpendicolare alla retta data e che passi per il punto assegnato.*

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 14.4.4, per ogni punto p_0 ed ogni retta r che non lo contiene, c'è una retta r' per p_0 , incidente e perpendicolare ad r in un punto p_1 . Se ce ne fosse un'altra, incidente ad r in un punto $p_2 \neq p_1$, la somma degli angoli interni del triangolo geodetico $p_0p_1p_2$ sarebbe maggiore di π . \square

Ricordiamo la

DEFINIZIONE 14.5.13. Una funzione reale $f \in \mathcal{C}^0(M, \mathbb{R})$, definita su una varietà differenziabile affine M , si dice *convessa* se, per ogni intervallo $I \subset \mathbb{R}$ ed ogni geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$, la funzione composta $f \circ \gamma \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ è convessa.

PROPOSIZIONE 14.5.14. *Se (M, g) è una varietà Riemanniana semplicemente connessa, completa e con curvatura sezionale non positiva, allora la distanza da un punto è una funzione convessa.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo tre punti q, p_0, p_1 di M . Sia $p_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ il segmento che congiunge p_0 a p_1 . Abbiamo $\overline{p_0p_t} = t \overline{p_0p_1}$, $\overline{p_t p_1} = (1-t) \overline{p_0p_1}$. Sia

$\alpha_t = \widehat{p_0 p_t q}$. Poiché $\widehat{p_1 p_t q} = \pi - \alpha_t$, otteniamo dalla (14.11), applicata ai triangoli geodetici $p_0 p_t q$ e $p_1 p_t q$:

$$\begin{aligned} \overline{p_t q}^2 + t^2 \overline{p_0 p_1}^2 - 2t \overline{p_0 p_1} \cdot \overline{p_t q} \cos \alpha_t &\leq \overline{p_0 q}^2, \\ \overline{p_t q}^2 + (1-t)^2 \overline{p_0 p_1}^2 + 2(1-t) \overline{p_0 p_1} \cdot \overline{p_t q} \cos \alpha_t &\leq \overline{p_1 q}^2. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo per $(1-t)$ la prima e per t la seconda diseuguaglianza e sommiamole. Otteniamo:

$$\overline{p_t q}^2 + t(1-t) \overline{p_0 p_1}^2 \leq (1-t) \overline{p_0 q}^2 + t \overline{p_1 q}^2.$$

Poiché per la diseuguaglianza triangolare $\overline{p_0 p_1} \geq |\overline{p_0 q} - \overline{p_1 q}|$, otteniamo che

$$\begin{aligned} \overline{p_t q}^2 &\leq (1-t) \overline{p_0 q}^2 + t \overline{p_1 q}^2 - t(1-t) |\overline{p_0 q} - \overline{p_1 q}|^2 \\ &\leq (1-t)^2 \overline{p_0 q}^2 + t^2 \overline{p_1 q}^2 + 2t(1-t) \overline{p_0 q} \cdot \overline{p_1 q} \\ &\leq ((1-t) \overline{p_0 q} + t \overline{p_1 q})^2, \end{aligned}$$

da cui ricaviamo che la $t \rightarrow \overline{p_t q}$ è convessa. \square

Nella dimostrazione abbiamo ottenuto

LEMMA 14.5.15. *Siano p_0, p_1, q tre punti di un aperto semplice convesso di una varietà Riemanniana (M, g) a curvatura sezionale non positiva. Consideriamo il segmento $p_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ di estremi p_0, p_1 . Allora*

$$(14.13) \quad \overline{p_t q}^2 \leq (1-t) \overline{p_0 q}^2 + t \overline{p_1 q}^2 - t(1-t) \overline{p_0 p_1}^2, \quad \forall 0 \leq t \leq 1. \quad \square$$

LEMMA 14.5.16. *Supponiamo che (M, g) abbia curvatura sezionale non positiva. Siano $p_0 \in M$ ed N_{p_0} un intorno normale di p_0 in M . Allora la funzione $p \rightarrow \overline{p p_0}$ è differenziabile su $N_{p_0} \setminus \{p_0\}$ e*

$$(14.14) \quad d_p \overline{p p_0}(w) = -\|w\| \cos \alpha, \quad \forall p \in N_{p_0}, \forall w \in T_p M,$$

ove α è l'angolo che il segmento $[p_0, p]$ forma con la direzione w .

DIMOSTRAZIONE. Sia $f(p) = \overline{p p_0}$. È $f(\text{Exp}_{p_0}(v)) = \|v\|$. Quindi

$$df(p)(d\text{Exp}_{p_0}(v)(w)) = \frac{(v|w)}{\|v\|} = \|w\| \cos \widehat{vw}, \quad \text{se } p = \text{Exp}_{p_0}(v), v, w \in T_{p_0} M.$$

Poiché il trasporto parallelo preserva l'ortogonalità lungo la geodetica, otteniamo la tesi, perché l'angolo \widehat{vw} è il supplementare di quello che il segmento $[0, v]$ forma con la semiretta $\{v + tw \mid t \geq 0\}$. \square

OSSERVAZIONE 14.5.17. Si potrebbe utilizzare il Lemma 14.5.16 e la (14.14) per dimostrare la convessità della funzione distanza, verificando che la derivata della distanza di un punto di una geodetica dal punto fissato p_0 è una funzione non decrescente.

Più in generale, se (M, g) è completa, connessa e semplicemente connessa ed ha curvatura sezionale non positiva, allora la funzione $M \times M \ni (p_1, p_2) \rightarrow \text{dist}(p_1, p_2) \in \mathbb{R}$ è convessa e \mathcal{C}^∞ fuori dalla diagonale.

LEMMA 14.5.18. *Supponiamo che (M, g) abbia curvatura sezionale non positiva. Siano $p_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ e $q_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ due geodetiche uscenti dallo stesso punto p_0 i cui supporti siano contenuti in un aperto semplice convesso di M . Allora*

$$(14.15) \quad \text{dist}(p_t, q_t) \leq t \text{dist}(p_1, q_1), \quad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo, per la (14.13):

$$\begin{aligned} \overline{p_1 q_t}^2 &\leq t \overline{p_1 q_1}^2 + (1-t) \overline{p_0 p_1}^2 - t(1-t) \overline{p_0 q_1}^2, \\ \overline{p_t q_t}^2 &\leq t \overline{p_1 q_t}^2 + (1-t) \overline{p_0 q_t}^2 - t(1-t) \overline{p_0 p_1}^2. \end{aligned}$$

Tenuto conto che $\overline{p_0 q_t} = t \overline{p_0 q_1}$, sostituendo la prima disequaglianza nella seconda otteniamo

$$\begin{aligned} \overline{p_t q_t}^2 &\leq t \left(t \overline{p_1 q_1}^2 + (1-t) \overline{p_0 p_1}^2 - t(1-t) \overline{p_0 q_1}^2 \right) + t^2(1-t) \overline{p_0 q_1}^2 - t(1-t) \overline{p_0 p_1}^2 \\ &\leq t^2 \overline{p_1 q_1}^2, \end{aligned}$$

che è la disequaglianza cercata. \square

PROPOSIZIONE 14.5.19. *Supponiamo che (M, g) abbia curvatura sezionale non negativa. Allora la funzione $\text{dist} : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa.*

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo verificare che, se $p_t, q_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ sono due geodetiche, allora la funzione $f(t) = \overline{p_t q_t} \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ è convessa. Il segmento $r_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ che unisce p_0 a q_1 ha lo stesso punto iniziale di p_t ed i segmenti $\{t \rightarrow r_{1-t}\}$ e $\{t \rightarrow q_{1-t}\}$ hanno lo stesso punto iniziale q_0 . Per il Lemma 14.5.18 valgono quindi

$$\overline{p_t r_t} \leq t \overline{p_1 q_1}, \quad \overline{r_t q_t} \leq (1-t) \overline{p_0 q_0}, \quad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

Otteniamo perciò

$$\overline{p_t q_t} \leq \overline{p_t r_t} + \overline{r_t q_t} \leq (1-t) \overline{p_0 q_0} + t \overline{p_1 q_1}, \quad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

La dimostrazione è completa. \square

Mostriamo ora che ogni gruppo compatto di isometrie di una varietà Riemanniana a curvatura non positiva è un gruppo di rotazioni. Il significato di questa affermazione è spiegato dall'enunciato seguente.

TEOREMA 14.5.20. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana connessa e completa, con curvatura sezionale non positiva. Sia \mathbf{K} un gruppo topologico compatto e localmente compatto, che agisce su M come un gruppo di isometrie. Allora \mathbf{K} ha almeno un punto fisso in M .*

DIMOSTRAZIONE. Siano λ la misura di Haar su \mathbf{K} , normalizzata in modo che sia $\int_{\mathbf{K}} d\lambda = 1$, e dist la distanza su M a definita dalla metrica g . Fissiamo un punto $p_0 \in M$ e definiamo su M una funzione continua, ponendo

$$\Psi(p) = \int_{\mathbf{K}} |\text{dist}(p, k p_0)|^2 d\lambda(k).$$

Osserviamo che $\Psi(kp) = \Psi(p)$ per ogni $k \in \mathbf{K}$. Dico che $\Psi(p)$ ha minimo in M . Infatti, l'orbita $\mathbf{K}p_0$ è compatta e quindi ha diametro $\delta = \max_{p_1, p_2 \in \mathbf{K}p_0} \text{dist}(p_1, p_2)$ finito. Se $\text{dist}(p, p_0) > 2\delta$,

$$\begin{aligned} \Psi(p) &= \int_{\mathbf{K}} |\text{dist}(p, kp_0)|^2 d\lambda(k) \geq \int_{\mathbf{K}} |\text{dist}(p, p_0) - \text{dist}(p_0, kp_0)|^2 d\lambda(k) \\ &> \delta^2 \geq \Psi(p_0). \end{aligned}$$

Per l'ipotesi che (M, g) sia completa, la palla chiusa $\overline{B_{p_0}(2\delta)}$ è compatta. Il minimo di Ψ su $\overline{B(p_0, 2\delta)}$ è anche minimo di Ψ su M . Sia $q_0 \in \overline{B_{p_0}(2\delta)}$ un punto di minimo di Ψ . Poiché Ψ è \mathbf{K} -invariante, per dimostrare che q_0 è punto fisso di \mathbf{K} è sufficiente verificare che $\Psi(p) > \Psi(q_0)$ per ogni $p \neq q_0$.

Sia $p \in M$ un punto distinto da q_0 , $k \in \mathbf{K}$ ed α_k l'angolo delle geodetiche uscenti da q_0 e passanti per p e kp_0 , rispettivamente. Per il teorema del coseno è

$$(*) \quad |\text{dist}(p, kp_0)|^2 \geq |\text{dist}(q_0, kp_0)|^2 + |\text{dist}(p, q_0)|^2 - 2\text{dist}(q_0, kp_0)\text{dist}(p, q_0) \cos \alpha_k.$$

Poiché q_0 è punto di minimo per Ψ , indicando con $t \rightarrow q_t$ la geodetica di estremi q_0 e $p = q_1$, abbiamo

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{G}} |\text{dist}(q_t, kp_0)|^2 d\lambda(k) \right|_{t=0} = 0.$$

Fissato $k \in \mathbf{K}$, è $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} |\text{dist}(q_t, kp_0)|^2 = -2\text{dist}(p, q_0) \text{dist}(kp_0, q_0) \cos \alpha_k$.

Quindi, differenziando sotto il segno d'integrale, otteniamo

$$\int_{\mathbf{G}} \text{dist}(q_0, p) \cdot \text{dist}(q_0, kp_0) \cos \alpha_k d\lambda(k) = 0.$$

Integrando (*) membro a membro abbiamo perciò

$$\Psi(p) \geq \Psi(q_0) + |\text{dist}(p, q_0)|^2.$$

La dimostrazione è completa. \square

Questo teorema di punto fisso si può considerare un caso particolare del teorema di Cartan sull'esistenza del baricentro:

TEOREMA 14.5.21 (Cartan (1929)). *Supponiamo che (M, g) sia completa, connessa e semplicemente connessa, ed abbia curvatura sezionale non positiva. Sia K un compatto non vuoto di M e λ una misura di probabilità⁶ su K . Allora la funzione*

$$f(p) = \int_K |\text{dist}(p, q)|^2 d\lambda(q)$$

è strettamente convessa ed ammette un unico punto di minimo in M . Il suo gradiente⁷ è definito da

$$\nabla f(p) = \int_K \text{Exp}_p^{-1}(q) d\lambda(q).$$

⁶È cioè positiva e di massa totale 1.

⁷Il gradiente di f è il campo di vettori ∇f tale che $df(p)(v) = (\nabla f|_v)$ per ogni $v \in T_p M$, per ogni $p \in M$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è simile a quella del teorema precedente. \square

Interpretando una misura di probabilità come una distribuzione di massa tra i punti di K , l'unico minimo del funzionale f ne è il *centro di massa*. In particolare, quando K consiste di un numero finito di punti p_0, p_1, \dots, p_k , possiamo considerare il *poliedro* dei punti $p = t_0 p_0 + t_1 p_1 + \dots + t_k p_k$, con $t_i \geq 0$ e $t_0 + t_1 + \dots + t_k = 1$, ove p è il punto di minimo della funzione $f(p) = \sum_{i=0}^k t_i |\text{dist}(p, p_i)|^2$. I punti interni del poliedro di $(k+1)$ punti sufficientemente vicini tra loro formano una varietà di dimensione minore o uguale di k .

14.6. Un teorema di Bochner

Sia \mathbf{G} un gruppo topologico.

DEFINIZIONE 14.6.1. Un'azione locale di \mathbf{G} su una varietà differenziabile M è il dato di un aperto U di M e di una applicazione continua $\phi : \mathbf{G} \times U \rightarrow M$ tale che

- (1) $\phi_a = \{p \rightarrow \phi(a, p)\} \in \mathcal{C}^\infty(U, M)$, $\forall a \in \mathbf{G}$,
- (2) $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \phi_a \in \mathcal{C}^\infty(U, M)$ sia continua,
- (3) $\phi_e(p) = \phi(e, p) = p$, $\forall p \in U$,
- (4) $\phi_a \circ \phi_b(p) = \phi(ab)(p)$ se $a, b \in \mathbf{G}$, e $p, \phi_b(p) \in U$.

TEOREMA 14.6.2. Sia \mathbf{G} un gruppo compatto. Supponiamo definita un'azione locale di \mathbf{G} su M con un punto fisso p_0 . Allora possiamo trovare una carta locale (U, x) con centro in p_0 in cui \mathbf{G} operi come un gruppo di trasformazioni lineari.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che $M = \mathbb{R}^n$, che ogni $a \in \mathbf{G}$ definisca una $\phi_a \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r), B_0(R))$ per due numeri reali $0 < r < R$, e che 0 sia punto fisso di tutte le ϕ_a . Indichiamo con $y = (y^1, \dots, y^m)$ le coordinate di \mathbb{R}^m . L'applicazione

$$\mathbf{G} \ni a \longrightarrow L_a = \frac{\partial \phi_a(0)}{\partial y} \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$$

che associa ad $a \in \mathbf{G}$ lo Jacobiano di ϕ_a in 0 è un omomorfismo di gruppi tale che

$$\phi_a(y) = L_a y + o(|y|), \quad \forall a \in \mathbf{G}, \forall y \in B_0(r).$$

Sia λ la misura di Haar biinvariante su \mathbf{G} di volume 1 e definiamo la trasformazione

$$R(y) = \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\lambda(a).$$

Per il teorema di derivazione sotto il segno d'integrale, l'applicazione R è differenziabile su W e

$$\frac{\partial R(y)}{\partial y} v = \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \frac{\partial \phi_a(y)}{\partial y} v d\lambda(a), \quad \forall y \in B_0(r), \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

In particolare, $\partial R(0)/\partial y = I_m$ e quindi, per il teorema delle funzioni implicite, la R definisce un diffeomorfismo di un intorno U di 0 in $B_0(r) \subset \mathbb{R}^m$ su un intorno U' di 0 in \mathbb{R}^m .

Abbiamo poi, se $b \in \mathbf{G}$ ed $y, \phi_b(y) \in B_0(r)$:

$$\begin{aligned} L_b \circ R(y) &= L_b \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\lambda(a) = \int_{\mathbf{G}} L_b L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\lambda(a) \\ &= \int_{\mathbf{G}} L_{ba^{-1}} \circ \phi_{ab^{-1}} \circ \phi_b(y) d\lambda(ab^{-1}) = R \circ \phi_b(y). \end{aligned}$$

Quindi, in un intorno sufficientemente piccolo di 0 in $B_0(r)$, abbiamo

$$R \circ \phi_b \circ R^{-1} = L(b).$$

La dimostrazione è completa. \square

TEOREMA 14.6.3. *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico localmente compatto, con un'azione locale su una varietà differenziabile M . Allora esiste un intorno dell'identità N_e in \mathbf{G} tale che gli elementi di ogni sottogruppo di \mathbf{G} che sia contenuto in N_e lascino fissi tutti i punti di un aperto non vuoto di M .*

DIMOSTRAZIONE. Sia U_0 un aperto non vuoto di M tale che ogni $a \in \mathbf{G}$ definisca un diffeomorfismo di U_0 su un aperto di M . Fissiamo un qualsiasi aperto non vuoto V_0 relativamente compatto in U_0 e sia N'_e un intorno aperto relativamente compatto dell'identità in \mathbf{G} tale che ogni elemento di N'_e definisca un'applicazione che trasformi \bar{V}_0 in un aperto contenuto in U_0 . Ciò è possibile perché per ipotesi l'applicazione ϕ è continua per la topologia di gruppo topologico assegnata su \mathbf{G} e la compatta-aperta su $\mathcal{C}^\infty(U_0, M)$.

Possiamo supporre che U_0 sia l'aperto di una carta locale x , con $x(U_0) = B_0(R) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| < R\}$, che $x(V_0) = B_0(r)$ con $0 < r < R$. Gli elementi a di N'_e definiscono allora delle applicazioni $\psi_a \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r), B_0(R))$ e possiamo, fissato un numero reale $\epsilon < 1$ con $0 < \epsilon < R - r$, considerare un intorno N_e di e relativamente compatto in N'_e e tale che, per ogni a in \bar{N}_e sia

$$|x - \psi_a(x)| + \|I_m - \partial\psi_a/\partial x\| < \epsilon, \quad \text{se } |x| \leq r.$$

Sia \mathbf{G}_0 un sottogruppo contenuto in N_e . La sua chiusura è un sottogruppo compatto $\mathbf{H} = \bar{\mathbf{G}}_0$ contenuto in $\bar{N}_e \Subset N'_e$. Sia λ la misura di Haar biinvariante su \mathbf{H} e definiamo, per $x \in B_0(r)$,

$$R(x) = \int_{\mathbf{H}} \psi_a(x) d\lambda(a)$$

Differenziando sotto il segno d'integrale otteniamo

$$\left| \frac{\partial R(x)}{\partial x} v \right| = \left| \int_{\mathbf{H}} \frac{\partial \psi_a(x)}{\partial x} v d\lambda(a) \right| \geq (1 - \epsilon) |v|, \quad \forall x \in B_0(r), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

In particolare, R è invertibile nell'intorno di ogni punto x di $B_0(r)$.

Per ogni $b \in \mathbf{H}$, per l'invarianza della misura di Haar abbiamo

$$R \circ \phi_b = \int_{\mathbf{H}} \psi_a \circ \psi_b d\lambda(a) = \int_{\mathbf{H}} \phi_{ab} d\lambda(a) = \int_{\mathbf{H}} \phi_{ab} d\lambda(ab) = R$$

ne segue che ψ_b è l'identità su $B_0(r)$. \square

Da questo ricaviamo il teorema⁸ sulla non esistenza di sottogruppi piccoli.

TEOREMA 14.6.4. *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico localmente compatto di diffeomorfismi \mathcal{C}^∞ di una varietà differenziabile M . Allora esiste un intorno N dell'identità in \mathbf{G} che non contiene sottogruppi di \mathbf{G} diversi da $\{e\}$. \square*

COROLLARIO 14.6.5. *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico di trasformazioni differenziabili di una varietà M . Allora esiste un intorno dell'identità N_e in \mathbf{G} tale che, per ogni $a \in N_e \setminus \{e\}$ esiste un intero k tale che $a^k \notin N_e$.*

TEOREMA 14.6.6. *Sia \mathbf{G} un gruppo localmente compatto di diffeomorfismi di una varietà M . Se l'identità e di \mathbf{G} non è un punto isolato di \mathbf{G} , allora⁹ di \mathbf{G} , allora \mathbf{G} contiene sottogruppi a un parametro.*

⁸S.Bochner e D.Montgomery, *Locally compact groups of differentiable transformations*, Annals of Mathematics, **47**, (1946) pp.639-653.

⁹Ciò significa che ogni intorno di e in \mathbf{G} elementi distinti da e .

Gruppi di trasformazioni

15.1. Isometrie di uno spazio metrico

Sia (M, dist_M) uno spazio metrico. Indichiamo con

$B_p(r) = \{q \in M \mid \text{dist}_M(q, p) < r\}$ e $\bar{B}_p(r) = \{q \in M \mid \text{dist}_M(q, p) \leq r\}$ le palle, rispettivamente aperta e chiusa, di centro p e raggio R .

DEFINIZIONE 15.1.1. Se (M, dist_M) ed (N, dist_N) sono due spazi metrici, un'applicazione $f : M \rightarrow N$ è un'isometria se preserva le distanze, se cioè

$$\text{dist}_N(f(p_1), f(p_2)) = \text{dist}_M(p_1, p_2), \quad \forall p_1, p_2 \in M.$$

OSSERVAZIONE 15.1.2. Ogni isometria è un'applicazione continua e iniettiva.

Un'isometria di uno spazio metrico in sé può non essere surgettiva. Si consideri ad esempio il caso in cui M sia la semiretta $\{t \geq 0\} \subset \mathbb{R}$, con la metrica standard. La $M \ni t \rightarrow f(t) = t + 1 \in M$ è un'isometria non surgettiva.

DEFINIZIONE 15.1.3. Si chiama *isometria globale* o *congruenza* un'isometria invertibile. Le isometrie invertibili di (M, dist_M) in sé formano un gruppo, che chiamiamo *gruppo delle isometrie di M* , ed indicheremo con $\mathbf{O}(M)$.

PROPOSIZIONE 15.1.4. Se (M, dist_M) è compatta e connessa, allora ogni isometria di M in sé è globale.

DIMOSTRAZIONE. Sia f un'isometria di M in sé. L'immagine $f(M)$ è compatta e quindi chiusa. Supponiamo per assurdo che f non sia surgettiva e sia $p_0 \in M$ con $\delta = \text{dist}_M(p_0, f(M)) = \max_{p \in M} \text{dist}_M(p, f(M)) > 0$. Definiamo per ricorrenza $p_{n+1} = f(p_n) = f^{n+1}(p_0)$ per ogni intero $n \geq 0$. Se $0 \leq n_1 < n_2$ abbiamo

$$\text{dist}_M(p_{n_1}, p_{n_2}) = \text{dist}_M(f^{n_1}(p_0), f^{n_2}(p_0)) = \text{dist}_M(p_0, f^{n_2-n_1}(p_0)) \geq \delta > 0.$$

La $\{p_n\}$ non ha quindi punti di accumulazione in M , e ciò contraddice la compattezza di M . La dimostrazione è completa. \square

LEMMA 15.1.5. Sia (N, dist_N) uno spazio metrico localmente compatto. Siano (M, dist_M) un altro spazio metrico ed $\{f_v\} \subset \mathcal{C}(M, N)$ una successione di isometrie di M in N . Sia p_0 un punto di M e supponiamo che la successione $\{f_v(p_0)\}$ converga in N ad un punto q_0 . Se $r > 0$ e $\bar{B}_{q_0}(r)$ è compatta in N , allora possiamo estrarre da $\{f_v\}$ una sottosuccessione $\{f_{k_v}\}$ che converge, uniformemente su $\bar{B}_{p_0}(r)$, ad una isometria $f : \bar{B}_{p_0}(r) \rightarrow \bar{B}_{q_0}(r)$.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo fissare un numero reale $R > r$ tale che $\bar{B}_{q_0}(R)$ sia ancora compatta in N . A meno di passare ad una sottosuccessione, possiamo supporre

che $\text{dist}_N(f_v(\mathbf{p}_0), \mathbf{q}_0) < (R-r)/2$ per ogni indice v . Allora

$$\begin{aligned} \text{dist}_N(f_v(\mathbf{p}), \mathbf{q}_0) &\leq \text{dist}_N(f_v(\mathbf{p}), f_v(\mathbf{p}_0)) + \text{dist}_N(f_v(\mathbf{p}_0), \mathbf{q}_0) \\ &\leq (R+r)/2 + (R-r)/2 = R, \quad \text{se } \text{dist}_M(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) \leq (R+r)/2, \end{aligned}$$

cioè $f_v(\bar{B}_{\mathbf{p}_0}((R+r)/2)) \subset \bar{B}_{\mathbf{q}_0}(R)$ per ogni v .

Poiché i compatti di uno spazio metrico sono completamente limitati, per ogni intero positivo v possiamo fissare un sottoinsieme finito A_v di $\bar{B}_{\mathbf{p}_0}((R+r)/2)$ in modo che risulti

$$\left\{ \begin{array}{l} A_v \subset A_{v+1}, \\ \bar{B}_{\mathbf{p}_0}((R+r)/2) \subseteq \bigcup_{p \in A_v} B_p(r \cdot 2^{-v}), \end{array} \quad \forall v = 1, 2, \dots, \right.$$

Per ogni $\mathbf{p} \in \bar{B}_{\mathbf{p}_0}((R+r)/2)$, la successione $\{f_v(\mathbf{p})\}_{v \in \mathbb{N}}$ è a valori nel compatto $\bar{B}_{\mathbf{q}_0}(R)$ ed ammette perciò una sottosuccessione convergente. Possiamo quindi costruire per ricorrenza una sequenza di successioni estratte

$$\{f_v\} \supset \{f_v^{(1)}\} \supset \dots \supset \{f_v^{(\mu)}\} \supset \dots$$

tali che $\text{dist}_N(f_v^{(\mu)}(\mathbf{p}), f_{v'}^{(\mu)}(\mathbf{p})) < r \cdot 2^{-\mu}$ per ogni v, v' se $\mathbf{p} \in A_\mu$. Dico che la $\{f_v^{(\mu)}\}_{v \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente su $\bar{B}_{\mathbf{p}_0}((R+r)/2)$ ad un'isometria

$$f : \bar{B}_{\mathbf{p}_0}((R+r)/2) \rightarrow B_{\mathbf{q}_0}((R+r)/2) \subset M.$$

Infatti, se $v < \mu$ e $\mathbf{p} \in \bar{B}_{\mathbf{p}_0}((R+r)/2)$, scegliendo una $\bar{\mathbf{p}} \in A_v$ con $\text{dist}_M(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}) \leq r \cdot 2^{-v}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \text{dist}_N(f_v^{(\nu)}(\mathbf{p}), f_\mu^{(\mu)}(\mathbf{p})) &\leq \text{dist}_N(f_v^{(\nu)}(\mathbf{p}), f_v^{(\nu)}(\bar{\mathbf{p}})) + \text{dist}_N(f_v^{(\nu)}(\bar{\mathbf{p}}), f_\mu^{(\mu)}(\bar{\mathbf{p}})) \\ &\quad + \text{dist}_N(f_\mu^{(\mu)}(\bar{\mathbf{p}}), f_\mu^{(\mu)}(\mathbf{p})) \leq 3 \cdot r \cdot 2^{-v}, \end{aligned}$$

Ne segue che, per ogni $\mathbf{p} \in \bar{B}_{\mathbf{p}_0}((R+r)/2)$, la $\{f_v^{(\nu)}(\mathbf{p})\}$ è una successione di Cauchy a valori nel compatto $\bar{B}_{\mathbf{q}_0}(R)$. Le restrizioni a $\bar{B}_{\mathbf{p}_0}((R+r)/2)$ delle $f_v^{(\nu)}$ convergono quindi uniformemente ad una funzione $f : \bar{B}_{\mathbf{p}_0}((R+r)/2) \rightarrow \bar{B}_{\mathbf{q}_0}(R)$, che è un'isometria ed inoltre, poiché $f(\mathbf{p}_0) = \mathbf{q}_0$, trasforma $\bar{B}_\rho(\mathbf{p}_0)$ in $\bar{B}_{\mathbf{q}_0}(\rho)$ per ogni $\rho \leq (R+r)/2$. \square

Considereremo nel seguito di questo paragrafo isometrie di uno spazio metrico M in sé. Indicheremo per semplicità con dist , invece che dist_M , la distanza su M .

Vale il seguente

LEMMA 15.1.6. *Supponiamo che (M, dist) sia uno spazio metrico localmente compatto e connesso e sia $\{f_v\}$ una successione di isometrie globali di M in sé. Sia $\mathbf{p}_0 \in M$ e supponiamo che la successione $\{f_v(\mathbf{p}_0)\}$ converga ad un punto \mathbf{q}_0 di M . Allora, se $r > 0$ e $\bar{B}_{\mathbf{p}_0}(r)$ è compatta, possiamo estrarre da $\{f_v\}$ una sottosuccessione $\{f_{k_v}\}$ che converga, uniformemente su $\bar{B}_{\mathbf{p}_0}(r)$, ad un'isometria f di $\bar{B}_{\mathbf{p}_0}(r)$ su $\bar{B}_{\mathbf{q}_0}(r)$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $R > r$ in modo che $\bar{B}_{\mathbf{p}_0}(R)$ sia ancora compatta in M . Se v_0 è tale che $\text{dist}(f(\mathbf{p}_0), \mathbf{q}_0) < (R-r)/2$, allora, poiché abbiamo supposto che le f_v fossero invertibili, abbiamo

$$f_{v_0}(\bar{B}_{\mathbf{p}_0}(R)) = \bar{B}_{f_{v_0}(\mathbf{p}_0)}(R) \supseteq \bar{B}_{\mathbf{q}_0}((R+r)/2).$$

Quindi anche $\bar{B}_{q_0}(r)$ è compatta e possiamo applicare il Lemma 15.1.5 sia alla successione $\{f_v\}$ che alla successione delle inverse $\{f_v^{-1}\}$. Otteniamo così una sottosuccessione $\{f_{k_v}\}$ che converge uniformemente su $\bar{B}_{p_0}(r)$ ad una isometria f a valori in $\bar{B}_{q_0}(r)$, e tale che la successione delle inverse $\{f_{k_v}^{-1}\}$ converga uniformemente su $\bar{B}_{q_0}(r)$ all'inversa della f . \square

LEMMA 15.1.7. *Sia (M, dist) uno spazio metrico localmente compatto e connesso. Dati due punti q_0, q di M è possibile trovare una successione finita q_1, \dots, q_k e numeri reali positivi r_1, \dots, r_k tali che*

- (1) $q_k = q$;
- (2) per ogni $i = 1, \dots, k$ la palla chiusa $\bar{B}_{q_i}(r_i)$ è compatta in M ;
- (3) $\text{dist}(q_i, q_{i-1}) \leq r_i$ per $1 \leq i \leq k$.

DIMOSTRAZIONE. Fissato il punto q_0 , indichiamo con N il sottoinsieme di M formato dai punti q per cui è possibile trovare una successione finita q_0, \dots, q_k che soddisfi le condizioni (1), (2), (3). Se $q \in N$ e $q = q_k$ per una sequenza q_1, \dots, q_k di punti di M ed r_1, \dots, r_k di numeri reali positivi che soddisfano le (1), (2), (3), allora tutti i punti della palla $B_q(r_k)$ appartengono ancora ad N . Quindi N è aperto in M .

Supponiamo ora che q appartenga alla chiusura \bar{N} di N e sia $\bar{B}_q(R)$, con $R > 0$, una palla compatta di M con centro in q . Allora possiamo trovare una successione q_1, \dots, q_k di punti di M ed r_1, \dots, r_k di numeri reali positivi che soddisfano (1), (2), (3), e con $\text{dist}(q_k, q) < R/2$. Possiamo allora considerare le nuove successioni q_1, \dots, q_k, q_{k+1} di punti di M ed r'_1, \dots, r'_{k+1} di numeri reali positivi, con $r'_i = r_i$ per $i < k$, $r'_k = \max(r_k, R/2)$ ed $r'_{k+1} = R$. Esse soddisfano le (1), (2), (3) e quindi $q \in N$. Ciò dimostra che N è anche chiuso.

Poiché $q_0 \in N \neq \emptyset$, il sottoinsieme N di M è aperto e chiuso e non vuoto nel connesso M e dunque uguale ad M . \square

PROPOSIZIONE 15.1.8. *Supponiamo che (M, dist) sia connesso e localmente compatto. Sia $p_0 \in M$. Da ogni successione $\{f_v\}$ di isometrie globali di M per cui $\{f_v(p_0)\}$ sia convergente si può estrarre una sottosuccessione $\{f_{k_v}\}$ che converga uniformemente sui compatti di M , ad un'isometria globale di M .*

DIMOSTRAZIONE. Inseriamo il punto p_0 in una successione $\{p_\mu\}_{\mu \geq 0}$ densa in M . Per ogni μ sia $\rho_\mu > 0$ tale che $\bar{B}_{p_\mu}(\rho_\mu)$ sia compatto in M . Mostriamo per ricorrenza che è possibile trovare una sequenza

$$\{f_v\} \supset \{f_v^{(0)}\} \supset \dots \supset \{f_v^{(\mu)}\} \supset \dots$$

di successioni, ciascuna estratta dalla precedente, tali che $\{f_v^{(\mu)}\}$ converga uniformemente su $\bigcup_{0 \leq j \leq \mu} \bar{B}_{p_j}(\rho_j)$. La possibilità di trovare la $\{f_v^{(0)}\}$ è conseguenza del Lemma 15.1.6. Supponiamo sia $\mu > 0$ e di aver costruito le $\{f_v^{(j)}\}$ per $j < \mu$. Siano q_0, \dots, q_k con $q_0 = p_0$ e $q_k = p_k$ una sequenza finita di punti di M ed r_0, \dots, r_k di numeri reali positivi che soddisfino le condizioni (1), (2), (3) del Lemma 15.1.7. Possiamo prendere $r_k = \rho_\mu$. Per il Lemma 15.1.6 è possibile estrarre da $\{f_v^{(\mu-1)}\}$ una sottosuccessione $\{\phi_v^{(0)}\}$ che converga uniformemente in tutti i punti di $\bar{B}_{q_0}(r_0)$. In particolare, $\{\phi_v^{(0)}(q_1)\}$ è convergente e quindi, per il Lemma 15.1.6 se ne può estrarre

una $\{\phi_v^{(1)}\}$ che converga uniformemente su $\bar{B}_{q_1}(r_1)$. Per ricorrenza, otterremo dopo k passi una successione estratta $\{\phi_v^{(k)}\}$ di isometrie che converge uniformemente su $\bar{B}_{q_0}(r_0) \cup \dots \cup \bar{B}_{q_k}(r_k)$. In particolare, la $\{f_v^{(\mu)}\} = \{\phi_v^{(k)}\}$ converge uniformemente su $\bigcup_{0 \leq j \leq \mu} \bar{B}_{p_j}(\rho_j)$.

La successione estratta $\{f_v^{(\nu)}\}$ converge allora uniformemente su tutti i compatti di M ad un'isometria $f : M \rightarrow M$. Per dimostrare che f è globale, osserviamo che, posto $\phi_v = [f_v^{(\nu)}]^{-1}$ e $q_0 = f(p_0)$, la $\{\phi_v(q_0)\}$ converge a p_0 . Possiamo allora inserire q_0 in una successione densa $\{q_\mu\}_{\mu \geq 0}$ di punti di M e ripetere il ragionamento svolto in precedenza. Dalla $\{\phi_v\}$ possiamo allora estrarre una sottosuccessione $\{\phi_{k_\nu}\}$ che converge uniformemente su tutti i compatti di M ad una ϕ , che si verifica facilmente essere l'inversa della f trovata in precedenza. \square

Dalla Proposizione 15.1.8 si ricavano gli enunciati seguenti.

TEOREMA 15.1.9. *Il gruppo $\mathbf{O}(M)$ delle isometrie di uno spazio metrico connesso e localmente compatto è localmente compatto rispetto alla topologia compatta-aperta.* \square

PROPOSIZIONE 15.1.10. *Il gruppo delle isometrie globali di uno spazio metrico localmente compatto (M, dist) che lasciano fisso un punto p_0 di M è un gruppo compatto.*

Le isometrie di uno spazio metrico compatto (M, dist) formano un gruppo compatto. \square

15.2. Un teorema di Bochner-Montgomery

Dimostriamo in questo paragrafo il teorema di Bochner-Montgomery ([7]), che ci dice che ogni gruppo localmente compatto di trasformazioni differenziabili è di Lie.

Siano M una varietà differenziabile e \mathbf{G} un gruppo topologico di diffeomorfismi di M e supponiamo che l'inclusione di \mathbf{G} in $\mathcal{C}^\infty(M, M)$ sia continua.

TEOREMA 15.2.1. *Supponiamo che \mathbf{G} sia compatto e che vi sia un punto fisso p_0 per tutte le $a \in \mathbf{G}$. Allora l'applicazione*

$$(15.1) \quad \mathbf{G} \ni a \longrightarrow da \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(T_{p_0}M)$$

è un monomorfismo di gruppi. Possiamo inoltre trovare una carta locale (U, x) con centro in p_0 tale che, nelle coordinate x , gli elementi di \mathbf{a} si scrivano come trasformazioni lineari.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una carta locale (V, y) con centro in p_0 tale che

$$y(V) = B_0(R) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid |y| < R\}.$$

Fissiamo $0 < r < R$ in modo che $|y(a(p))| < R$ se $p \in V$ e $|y(p)| < r$. Indichiamo con $\phi_a \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r), B_0(R))$ l'applicazione $y \circ a \circ y^{-1}$ su $B_0(r)$ e con $L : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ l'applicazione che fa corrispondere ad $a \in \mathbf{G}$ lo Jacobiano L_a in 0 di ϕ_a . La L è un omomorfismo di gruppi e

$$\phi_a(y) = L_a y + o(|y|), \quad \forall a \in \mathbf{G}, \quad \forall y \in B_0(r).$$

Sia μ la misura di Haar bi-invariante su \mathbf{G} di volume 1 e definiamo la trasformazione

$$R(y) = \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\mu(a).$$

Per il teorema di derivazione sotto il segno d'integrale, l'applicazione R è differenziabile su $B(0, r)$ e

$$\frac{\partial R(y)}{\partial y} v = \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \frac{\partial \phi_a(y)}{\partial y} v d\mu(a), \quad \forall y \in B_0(r), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

In particolare, $\partial R(0)/\partial y = I_m$ e quindi, per il teorema delle funzioni implicite, la R definisce un diffeomorfismo di un intorno U di 0 in $B_0(r) \subset \mathbb{R}^m$ su un intorno U' di 0 in \mathbb{R}^m .

Abbiamo poi, se $b \in \mathbf{G}$ ed $y, \phi_b(y) \in B_0(r)$:

$$\begin{aligned} L_b \circ R(y) &= L_b \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\mu(a) = \int_{\mathbf{G}} L_b L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\mu(a) \\ &= \int_{\mathbf{G}} L_{ba^{-1}} \circ \phi_{ab^{-1}}(\phi_b(y)) d\mu(ab^{-1}) = R \circ \phi_b(y). \end{aligned}$$

Quindi, in un intorno sufficientemente piccolo di 0 in $B_0(r)$, abbiamo

$$R \circ \phi_b \circ R^{-1} = L_b.$$

La dimostrazione è completa. \square

COROLLARIO 15.2.2. *Supponiamo che \mathbf{G} sia compatto ed M connessa. Allora l'unica trasformazione di \mathbf{G} che lasci fissi i punti di un aperto non vuoto di M è l'identità.*

DIMOSTRAZIONE. Sia a una trasformazione di \mathbf{G} che lasci fissi i punti di un aperto non vuoto U di M . Il sottogruppo \mathbf{H} degli elementi di \mathbf{G} che lasciano fissi i punti di U è un sottogruppo chiuso e quindi compatto di \mathbf{G} . Sia N la parte interna dell'insieme dei punti fissi comuni a tutte le applicazioni di \mathbf{H} . Per ipotesi, $N \neq \emptyset$. Se p_0 appartiene alla chiusura di N , esso è un punto fisso di tutte le trasformazioni di \mathbf{H} . Per il Teorema 15.2.1, possiamo trovare una carta locale con centro in p_0 in cui tutti gli elementi di \mathbf{H} si scrivano come trasformazioni lineari. Ma una trasformazione lineare che sia l'identità su un aperto non vuoto è l'identità, e quindi gli elementi di \mathbf{H} lasciano fissi anche tutti i punti di un intorno di p_0 e quindi $p_0 \in N$. Essendo aperto e chiuso in M e non vuoto, l'insieme N dei punti fissi delle trasformazioni in \mathbf{H} coincide con M . Quindi $a \in \mathbf{H} = \{\text{id}_M\}$ e dunque a è l'identità su M . \square

Dimostriamo poi che un gruppo localmente compatto di trasformazioni differenziabili non contiene *sottogruppi piccoli*. Il significato di questa affermazione è spiegato nel teorema seguente.

TEOREMA 15.2.3. *Supponiamo che \mathbf{G} sia un gruppo localmente compatto di diffeomorfismi di una varietà connessa M . Esiste allora un intorno N_ϵ dell'identità di \mathbf{G} che non contiene sottogruppi non banali.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una carta locale (U, x) con $x(U) = B_0(R)$. Se $0 < r < R$, indichiamo con U_r l'aperto $\{p \in U \mid |x(p)| < r\}$. Se $\mathbf{a} \in \mathcal{C}^\infty(U_r, U)$ indicheremo con $\phi_{\mathbf{a}} \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r), B_0(R))$ l'applicazione $x \circ \mathbf{a} \circ x^{-1}$ su $B_0(r)$.

Sia N_e un intorno compatto dell'identità in \mathbf{G} tale che

$$\mathbf{a}(\bar{U}_r) \in U_{(r+R)/2}, \quad \text{e} \quad \left\| \frac{\partial \phi_{\mathbf{a}}(x)}{\partial x} - I_m \right\| < \frac{1}{2}, \quad \forall |x| \leq \frac{r+R}{2}, \quad \forall \mathbf{a} \in N_e.$$

Sia \mathbf{G}_0 un sottogruppo contenuto in N_e . La sua chiusura è un sottogruppo compatto $\mathbf{H} = \bar{\mathbf{G}}_0$ contenuto in \bar{N}_e . Sia μ la misura di Haar bi-invariante su \mathbf{H} e definiamo, per $x \in B_0((r+R)/2)$, la funzione \mathcal{C}^∞ a valori in $B_0(R)$,

$$R(x) = \int_{\mathbf{H}} \phi_{\mathbf{a}}(x) d\mu(\mathbf{a}).$$

Differenziando sotto il segno d'integrale otteniamo

$$\left| \frac{\partial R(x)}{\partial x} v \right| = \left| \int_{\mathbf{H}} \frac{\partial \phi_{\mathbf{a}}(x)}{\partial x} v d\mu(\mathbf{a}) \right| \geq \frac{1}{2} |v|, \quad \forall x \in B_0((r+R)/2), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

In particolare, R è invertibile nell'intorno di ogni punto x di $B_0(r)$.

Per ogni $\mathbf{b} \in \mathbf{H}$, per l'invarianza della misura di Haar abbiamo

$$R \circ \phi_{\mathbf{b}} = \int_{\mathbf{H}} \phi_{\mathbf{a}} \circ \phi_{\mathbf{b}} d\mu(\mathbf{a}) = \int_{\mathbf{H}} \phi_{\mathbf{ab}} d\mu(\mathbf{a}) = \int_{\mathbf{H}} \phi_{\mathbf{ab}} d\mu(\mathbf{ab}) = R$$

su $B_0(r)$. Ne segue, in particolare, che $\phi_{\mathbf{b}}$ è l'identità su un intorno di 0 in $B_0(r)$. La tesi è allora conseguenza del Corollario 15.2.2. \square

COROLLARIO 15.2.4. *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico di trasformazioni differenziabili di una varietà M . Allora esiste un intorno dell'identità N_e in \mathbf{G} tale che, per ogni $\mathbf{a} \in \mathbf{G}$, con $\mathbf{a} \neq \mathbf{e}$, esista un intero k tale che $\mathbf{a}^k \notin N_e$.*

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente considerare l'intorno $N_e = \{\mathbf{a} \in N'_e \mid \mathbf{a}^{-1} \in N'_e\}$ per un intorno N'_e dell'identità che non contenga sottogruppi non banali. \square

Fissiamo un intorno compatto N_e dell'identità in \mathbf{G} che soddisfi la condizione del Corollario 15.2.4. Se

$$(15.2) \quad k_{\mathbf{a}} + 1 = \inf\{h \in \mathbb{N} \mid \mathbf{a}^h \notin N_e\}, \quad \text{per } \mathbf{a} \in \mathbf{G},$$

abbiamo $k_{\mathbf{a}} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, con $k_{\mathbf{e}} = \infty$, $k_{\mathbf{a}} = 0$ se $\mathbf{a} \notin N_e$ e $1 \leq k_{\mathbf{a}} < \infty$ se $\mathbf{a} \in N_e \setminus \{\mathbf{e}\}$.

Fissiamo una carta coordinata (U, x) in M , con centro in un punto $\mathbf{p}_0 \in M$, $U \in M$, ed $x(U) = B_0(R)$ e poniamo, per $0 < r < R$, $U_r = \{p \in U \mid |x(p)| < r\}$. Se $\mathbf{a}(U_r) \subset U$, indicheremo con $\phi_{\mathbf{a}} \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r), B_0(R))$ la funzione $\phi_{\mathbf{a}} = x \circ \mathbf{a} \circ x^{-1}$.

Fissiamo $0 < r_1 < r_2 < r_3 < R$ ed $\epsilon > 0$. Possiamo supporre che, se $\mathbf{a} \in N_e$, sia

$$\mathbf{a}(\bar{U}_{r_1}) \in U_{r_2} \in \mathbf{a}(U_{r_3}) \in U, \quad \sup_{x \in \bar{U}_{r_3}} \left\| \frac{\partial \phi_{\mathbf{a}}(x)}{\partial x} - I_m \right\| < \epsilon.$$

Con le notazioni introdotte sopra, vale il

LEMMA 15.2.5. *Possiamo trovare una costante positiva C tale che, se $\mathbf{a} \in N_e$, sia*

$$|x - \phi_{\mathbf{a}}(x)| \leq C/k_{\mathbf{a}}, \quad \forall x \in B_0(r_1).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathbf{a} \in N_e$. Se $x_1, x_2 \in B_0(r_2)$, allora

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{a}}(x_2) - \phi_{\mathbf{a}}(x_1) &= \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \phi_{\mathbf{a}}(x_1 + t(x_2 - x_1)) \right] dt \\ &= \left[\int_0^1 \frac{\partial \phi_{\mathbf{a}}}{\partial x}(x_1 + t(x_2 - x_1)) dt \right] (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1) + v\end{aligned}$$

ove v è un vettore con $|v| \leq \epsilon |x_2 - x_1|$.

Osserviamo ora che, se $\mathbf{a} \in N_e$, poiché $\mathbf{a}, \dots, \mathbf{a}^{k_a} \in N_e$, abbiamo $\phi_{\mathbf{a}^h}(x) \in B_0(r_2)$ se $x \in B_0(r_1)$ e $0 \leq h \leq k_a$. Quindi

$$\phi_{\mathbf{a}^{k_a}}(x) - x = \sum_{h=0}^{k_a-1} (\phi_{\mathbf{a}^h}(\phi_{\mathbf{a}}(x)) - \phi_{\mathbf{a}^h}(x)) = k_a(\phi_{\mathbf{a}}(x) - x) + (v_1 + \dots + v_{k_a}),$$

con $|v_i| \leq \epsilon |\phi(x) - x|$ per ogni $i = 1, \dots, k_a$. Otteniamo perciò

$$r_2 \geq |\phi_{\mathbf{a}^{k_a}}(x) - x| \geq k_a(1 - \epsilon) |\phi(x) - x|, \quad \forall x \in B_0(r_1),$$

da cui segue la tesi. \square

COROLLARIO 15.2.6. *Con le notazioni del lemma precedente, abbiamo*

$$|x - \phi_{\mathbf{a}^h}(x)| \leq Ch/k_a, \quad \text{se } h \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq h \leq k_a. \quad \square$$

TEOREMA 15.2.7. *Sia \mathbf{G} un gruppo localmente compatto di diffeomorfismi di una varietà M . Se l'identità e di \mathbf{G} non è un punto isolato¹ di \mathbf{G} , allora \mathbf{G} contiene sottogruppi a un parametro.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un intorno compatto N_e dell'identità in \mathbf{G} che non contenga sottogruppi non banali e sia k_a definito dalla (15.2). Ricordiamo che $1 < k_a < \infty$ se $\mathbf{a} \in N_e \setminus \{e\}$. Per ogni numero razionale q con $0 \leq q \leq 1$ ed $\mathbf{a} \in N_e \setminus \{0\}$ sia $k_a(q)$ l'intero, con $0 \leq k_a(q) \leq k_a$, definito da

$$k_a(q) = \sup\{v \in \mathbb{N} \mid v \leq qk_a\}, \quad \text{tale cioè che } 0 \leq q - \frac{k_a(q)}{k_a} < \frac{1}{k_a}.$$

Sia ora $\{a_n\}$ una successione di elementi di N_e , tutti distinti da e , che converga ad e . Per ogni $q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, la successione $\{a_n^{k_a(q)}\}$ è a valori in nel compatto N_e e quindi se ne può estrarre una convergente. Poiché $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ è numerabile, possiamo estrarre una sottosuccessione, che indicheremo ancora con $\{a_n\}$, tale che le $\{a_n^{k_a(q)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ siano convergenti per ogni $q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Indichiamo con $\mathbf{a}(q)$ i limiti di tali successioni.

Mostriamo ora che la funzione $\mathbf{a}(q)$, così definita per $q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, si può estendere ad un sottogruppo a un parametro di \mathbf{G} .

Per ogni punto $\mathbf{p}_0 \in M$ possiamo trovare una carta coordinata (U, x) con centro in \mathbf{p}_0 con $x(U) = B_0(R)$ e per cui valga il Lemma 15.2.5. Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} k_{a_n} = \infty$, otteniamo che le ϕ_{a_n} convergono uniformemente su $B_0(r_1)$ a delle $\phi_{\mathbf{a}(q)}$ che soddisfano, per il Corollario 15.2.6, la disuguaglianza $|\phi_{\mathbf{a}(q_1)}(x) - \phi_{\mathbf{a}(q_2)}(x)| < C|q_1 - q_2|$, per ogni $q_1, q_2 \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ed x in $B_0(r_1)$, per una costante $C > 0$. Possiamo dunque estendere in modo unico le $\phi_{\mathbf{a}(q)}$ a delle applicazioni $\phi_{\mathbf{a}(t)} \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r_1), B_0(r_2))$

¹Ciò significa che ogni intorno di e in \mathbf{G} elementi distinti da e .

per $t \in [0, 1]$. Questo ci permette di definire le $\mathbf{a}(t)$ per $t \in [0, 1]$ e di verificare che $\mathbf{a}(t_1 + t_2) = \mathbf{a}(t_1)\mathbf{a}(t_2)$ se $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in [0, 1]$. Poiché anche la successione $\{a_n^{-1}\}$ approssima l'identità, lo stesso ragionamento ci permette di definire $\mathbf{a}(t)$, per $-1 \leq t \leq 0$, in modo che sia $\mathbf{a}(t_1 + t_2) = \mathbf{a}(t_1)\mathbf{a}(t_2)$ se $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in [-1, 1]$. Possiamo poi estendere $\mathbf{a}(t)$ a tutti i $t \in \mathbb{R}$ in modo che sia $\mathbf{a}(kt) = [\mathbf{a}(t)]^k$ se $k \in \mathbb{N}$. Poiché abbiamo supposto che \mathbf{G} sia un sottogruppo chiuso del gruppo dei diffeomorfismi di M per la topologia compatta-aperta delle applicazioni e delle loro inverse, $\mathbf{a}(t)$ è un sottogruppo a un parametro di \mathbf{G} . \square

Dalla dimostrazione del Teorema 15.2.7 ricaviamo una caratterizzazione dei generatori infinitesimali di sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} .

PROPOSIZIONE 15.2.8. *I generatori infinitesimali X di sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} sono tutti e soli gli elementi $X \in \mathfrak{X}(M)$ per cui esistono una successione $\{a_n\} \subset \mathbf{G}$ ed una successione k_n , con $k_n \rightarrow \infty$, tale che*

$$(15.3) \quad Xf = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n (a_n^* f - f), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

PROPOSIZIONE 15.2.9. *Sia \mathbf{G} un gruppo localmente compatto di diffeomorfismi di M . Allora i generatori infinitesimali di sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} formano una sottoalgebra di Lie reale di dimensione finita di $\mathfrak{X}(M)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathfrak{G} l'insieme dei generatori infinitesimali di sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} . Abbiamo $0 \in \mathfrak{G}$, come generatore infinitesimale del gruppo banale $\{\text{id}_M\}$.

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ è il generatore infinitesimale del sottogruppo a un parametro $\mathbf{a}(t)$, e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora λX è il generatore infinitesimale del sottogruppo a un parametro $t \rightarrow \mathbf{a}(\lambda t)$. Quindi \mathfrak{G} è chiuso rispetto al prodotto per scalare.

Siano $\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)$ due sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} , con generatori infinitesimali X, Y . Se $c_n = \mathbf{a}(\frac{1}{n}) \circ \mathbf{b}(\frac{1}{n})$, otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(f \circ c_n - f) = Xf + Yf, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

In modo analogo, con $d_n = \mathbf{a}(\frac{1}{n})\mathbf{b}(\frac{1}{n})\mathbf{a}(\frac{-1}{n})\mathbf{b}(\frac{-1}{n})$, è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(f \circ d_n - f) = [X, Y]f, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Per la Proposizione 15.2.8 questo dimostra che \mathfrak{G} è un'algebra di Lie. \square

PROPOSIZIONE 15.2.10. *Se \mathbf{G} è un gruppo localmente compatto di diffeomorfismi di M , allora l'algebra di Lie \mathfrak{G} dei generatori infinitesimali dei suoi sottogruppi a un parametro ha dimensione finita.*

DIMOSTRAZIONE. Si dimostra infatti che su \mathbf{G} si può definire una norma rispetto alla quale la palla unitaria è relativamente compatta. \square

15.3. Alcuni risultati sui gruppi di trasformazioni

Vale il:

TEOREMA 15.3.1. *Siano M una varietà differenziabile numerabile all'infinito e \mathbf{G} un gruppo di diffeomorfismi di M in sé. Denotiamo con \mathfrak{G} l'insieme dei campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ che generano sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} .*

Se la sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{X}(M)$ generata da \mathfrak{G} ha dimensione finita, allora \mathfrak{G} è un'algebra di Lie e possiamo definire su \mathbf{G} una struttura di gruppo di Lie di trasformazioni di M , con algebra di Lie (isomorfa a) \mathfrak{G} .

DIMOSTRAZIONE. Se $X \in \mathfrak{G}$, indichiamo con $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \text{Exp}(tX) \in \mathbf{G}$ il gruppo a un parametro di diffeomorfismi generato da X . Siano $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ la sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{X}(M)$ generata da \mathfrak{G} , $\tilde{\mathbf{G}}$ un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$, ed $\exp : \mathfrak{G} \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}$ la corrispondente applicazione esponenziale. Ogni $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ è generatore infinitesimale di un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di M , che denoteremo ancora con $\text{Exp}(tX)$:

$$V_X \ni (t, p) \longrightarrow \text{Exp}(tX)p \in M, \quad \{0\} \times M \subset V_X^{\text{aperto}} \subset \mathbb{R} \times M,$$

$$\text{Exp}(0X)p = p, \quad \frac{d}{dt} \text{Exp}(tX)p = X_{\text{Exp}(tX)p}, \quad \forall p \in M, \quad \forall (t, p) \in V_X.$$

I campi X di \mathfrak{G} sono completi e quindi porremo $V_X = (\mathbb{R} \times M)$, se $X \in \mathfrak{G}$.

Poiché abbiamo supposto che $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ sia di dimensione finita, per i teoremi di esistenza e unicità e dipendenza \mathcal{C}^∞ dai dati iniziali per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie, possiamo trovare un intorno aperto \mathcal{U} di $(\{e\} \times M)$ in $(\tilde{\mathbf{G}} \times M)$ tale che, se $(g, p) \in \mathcal{U}$, allora vi sono $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ e $t \in \mathbb{R}$ tali che $(t, p) \in V_X$ e $g = \exp(tX)$.

Per completare la dimostrazione, proviamo ora alcuni lemmi. □

LEMMA 15.3.2. *Siano $X, Y \in \mathfrak{G}$. Allora $Z = \text{Ad}(\exp(X))(Y) \in \mathfrak{G}$.*

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo verificare che Z genera un sottogruppo a un parametro di \mathbf{G} . Poiché

$$M \ni p \rightarrow \text{Exp}(tZ)p = \text{Exp}(X) \circ \text{Exp}(tY) \circ \text{Exp}(-X)p \in M$$

definisce per ogni $t \in \mathbb{R}$ una trasformazione di \mathbf{G} , il campo Z è completo ed appartiene a \mathfrak{G} . □

LEMMA 15.3.3. *\mathfrak{G} genera $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ come spazio vettoriale su \mathbb{R} .*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con W il sottospazio vettoriale di $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ generato da \mathfrak{G} . Per il lemma precedente, abbiamo $\text{Ad}(\exp(\mathfrak{G}))(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G}$ e quindi, per linearità, abbiamo anche $\text{Ad}(\exp(\mathfrak{G}))(W) \subset W$. Poiché \mathfrak{G} genera $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ come algebra di Lie, $\exp(\mathfrak{G})$ genera $\tilde{\mathbf{G}}$ come gruppo. L'insieme degli elementi $g \in \tilde{\mathbf{G}}$ per cui $\text{Ad}(g)(W) \subset W$ è un sottogruppo di $\tilde{\mathbf{G}}$. Ne segue che $\text{Ad}(\tilde{\mathbf{G}})(W) \subset W$. Otteniamo in particolare che $\text{Ad}(\exp(W))(W) \subset W$, che ci dà, differenziando, $[W, W] \subset W$. Quindi W è un'algebra di Lie e perciò coincide con $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$. □

LEMMA 15.3.4. *$\mathfrak{L}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{G}$ una base di $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ come spazio vettoriale. Allora l'applicazione

$$t_1 X_1 + \dots + t_n X_n \rightarrow \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_n X_n)$$

è un diffeomorfismo di un intorno N_0 di 0 in $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ su un intorno U_ϵ dell'identità e di $\tilde{\mathbf{G}}$. Quindi, se $Y \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$, possiamo trovare un $\epsilon > 0$ e funzioni $a_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\sum_{i=1}^n a_i(t)X_i \in N_0$ ed

$$\exp(tY) = \exp(a_1(t)X_1) \cdots \exp(a_n(t)X_n) \quad \text{in } \tilde{\mathbf{G}} \text{ se } |t| < \epsilon.$$

Questa uguaglianza ci dà la

$$\text{Exp}(tY) = \text{Exp}(a_1(t)X_1) \circ \cdots \circ \text{Exp}(a_n(t)X_n) \quad \text{su } M \text{ se } |t| < \epsilon.$$

Definendo $\text{Exp}(tY) = (\text{Exp}[(t/\nu)Y])^\nu$ se $|t| < \nu\epsilon$, otteniamo che $Y \in \mathfrak{G}$. Questo completa la dimostrazione del lemma. \square

Proseguiamo nella dimostrazione del Teorema 20.2.1.

Sia \mathbf{G}^* il gruppo di diffeomorfismi di M generato da $\exp(\mathfrak{G})$. Poiché \mathbf{G}^* è generato dai sottogruppi a un parametro contenuti in \mathbf{G} , abbiamo $\mathbf{G}^* \subset \mathbf{G}$. Poiché per ogni $g \in \mathbf{G}$ ed ogni sottogruppo a un parametro $\mathbb{R} \ni t \rightarrow a_t \in \mathbf{G}$ anche $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \text{ad}(g)(a_t) \in \mathbf{G}$ è ancora un sottogruppo a un parametro di \mathbf{G} , il sottogruppo \mathbf{G}^* è normale in \mathbf{G} . Inoltre, l'applicazione $\text{ad}(g) : \mathbf{G}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$ è continua² per la topologia di gruppo di Lie di \mathbf{G}^* , perché trasforma sottogruppi a un parametro in sottogruppi a un parametro.

Il Teorema 20.2.1 è conseguenza del lemma seguente.

LEMMA 15.3.5. *Sia \mathbf{G}^* un sottogruppo normale di un gruppo \mathbf{G} . Se \mathbf{G}^* è un gruppo topologico e le applicazioni $\text{ad}(g) : \mathbf{G}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$ sono continue per ogni $g \in \mathbf{G}$, allora vi è un'unica topologia di gruppo topologico su \mathbf{G} per cui \mathbf{G}^* sia aperto in \mathbf{G} .*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo su \mathbf{G} la topologia meno fine per cui sono aperti tutti gli insiemi $L_g(A)$ con A aperto di \mathbf{G}^* . Si verifica facilmente che questa topologia è l'unica con le proprietà richieste nell'enunciato del lemma. \square

OSSERVAZIONE 15.3.6. Osserviamo che la topologia su \mathbf{G} che si ottiene nel Teorema 20.2.1 può risultare più fine della topologia compatta-aperta. Inoltre, non è detto che le componenti connesse di \mathbf{G} , con la topologia che abbiamo definito, formino un insieme di cardinalità al più numerabile. Possiamo ad esempio considerare l'azione sul gruppo additivo \mathbb{R} , che identifichiamo alla varietà M , di un qualsiasi suo sottogruppo \mathbf{G} totalmente sconnesso: in questo caso $\mathfrak{G} = \{0\}$ ed otteniamo su \mathbf{G} la topologia discreta.

TEOREMA 15.3.7. *Siano M una varietà differenziabile connessa e numerabile all'infinito e \mathbf{G} un gruppo localmente compatto di trasformazioni differenziabili di M . Allora i generatori infinitesimali dei sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} è una sottoalgebra di Lie di dimensione finita di $\mathfrak{X}(M)$.*

DIMOSTRAZIONE. \square

² Un teorema di Chevalley ([Theory of Lie groups. Princeton Univ. Press, 1946], p.128) ci dice che, se \mathbf{G} e \mathbf{G}' sono due gruppi di Lie, un omomorfismo algebrico $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}'$ è un omomorfismo di gruppi di Lie se e soltanto se trasforma sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} in sottogruppi a un parametro di \mathbf{G}' .

15.4. Parallelismo assoluto

Ricordiamo che un *parallelismo assoluto* su una varietà differenziabile M è una sezione $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M, L(M))$ del fibrato dei suoi sistemi di riferimento. In modo equivalente, è il dato di m campi di vettori X_1, \dots, X_m che definiscano, in ogni punto $\mathbf{p} \in M$, una base $(X_1(\mathbf{p}), \dots, X_m(\mathbf{p}))$ di $T_{\mathbf{p}}M$. Un diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$ definisce un diffeomorfismo di fibrati principali $\hat{f} : L(M) \rightarrow L(M)$.

DEFINIZIONE 15.4.1. Se (M, σ) è la coppia formata da una varietà differenziabile M e da un parallelismo assoluto σ assegnato su M , chiameremo *automorfismi* di (M, σ) i diffeomorfismi $f : M \rightarrow M$ tali che $\hat{f} \circ \sigma = \sigma \circ f$, cioè $df \circ \sigma(\mathbf{p}) = \sigma(f(\mathbf{p}))$ per ogni $\mathbf{p} \in M$.

Gli automorfismi di (M, σ) formano un gruppo, che denoteremo $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$.

TEOREMA 15.4.2. Sia (M, σ) la coppia formata da una varietà differenziabile connessa M numerabile all'infinito e da un parallelismo assoluto σ su M . Allora $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ è un gruppo di Lie di trasformazioni con $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{Aut}(M, \sigma) \leq \dim_{\mathbb{R}} M$. Più precisamente, per ogni $\mathbf{p} \in M$, l'applicazione

$$(*) \quad \mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni g \rightarrow g(\mathbf{p}) \in M$$

è iniettiva e la sua immagine è una sottovarietà chiusa di M . Vi è un'unica struttura di gruppo di Lie su $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ per cui la $(*)$ sia un diffeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma(\mathbf{p}) = (X_1(\mathbf{p}), \dots, X_m(\mathbf{p}))$ e sia \mathfrak{B} il sottospazio vettoriale reale di $\mathfrak{X}(M)$ generato da X_1, \dots, X_m . Per definizione, le trasformazioni di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ lasciano \mathfrak{B} invariante. In particolare gli elementi di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ commutano con gli elementi dei sottogruppi a un parametro $\phi_v(t)$ di diffeomorfismi di M generati dagli elementi v di \mathfrak{B} . Poniamo $\tau_v = \phi_v(1)$. Osserviamo che, per ogni punto $\mathbf{p} \in M$, $\tau_v(q)$ è definita per v in un intorno di 0 in \mathfrak{B} e q in un intorno di \mathbf{p} in M .

LEMMA 15.4.3. Per ogni $\mathbf{p} \in M$ l'applicazione $\mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni g \rightarrow g(\mathbf{p}) \in M$ è iniettiva.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $g \in \mathbf{Aut}(M, \sigma)$ l'insieme $F_g = \{q \in M \mid g(q) = q\}$ dei punti fissi di g è un sottoinsieme chiuso di M . Fissato un punto $q \in M$, al variare di v in un intorno di 0 in \mathfrak{B} , gli elementi $\tau_v(q)$ sono definiti e formano un intorno di q in M . Poiché, come abbiamo osservato, $g \circ \tau_v = \tau_v \circ g$, otteniamo che F_g contiene un intorno di q . Dunque F_g risulta aperto e chiuso in M e quindi o è vuoto, o coincide con M per l'ipotesi che M sia connesso. \square

Sia $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ ($T > 0$) una curva differenziabile. Risultano allora determinate m funzioni scalari $a_\gamma^i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^m a_\gamma^i(t) X_i(\gamma(t))$ per ogni $t \in [0, T]$. Due curve differenziabili $\gamma_1, \gamma_2 : [0, T] \rightarrow M$ si diranno *parallele nel parallelismo completo* σ se $a_{\gamma_1}^i(t) = a_{\gamma_2}^i(t)$ per ogni $t \in [0, T]$. Osserviamo che, data una curva differenziabile $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ ed un punto \mathbf{q}_0 , vi è al più una curva differenziabile γ' parallela a γ ed uscente dal punto \mathbf{q}_0 ; esisterà poi comunque, per qualche $0 < \epsilon \leq T$ sufficientemente piccolo, una $\gamma' : [0, \epsilon] \rightarrow M$ uscente da \mathbf{p}_0 e parallela alla restrizione di γ a $[0, \epsilon]$.

LEMMA 15.4.4. Per ogni $p_0 \in M$, l'insieme $\mathbf{Aut}(M, \sigma)(p_0)$ è chiuso in M .

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{a_k\}$ una successione di elementi di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ tali che $\{a_k(p_0)\}$ converga a un elemento $q_0 \in M$.

Dimostriamo che ogni curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uscente dal punto p_0 ammette una parallela $\gamma' : [0, 1] \rightarrow M$ uscente da q_0 .

A questo scopo, indichiamo con T l'estremo superiore dei numeri reali $a > 0$ per cui la restrizione di γ a $[0, a]$ ammette una parallela γ'_a con punto iniziale q_0 . Vogliamo dimostrare che esiste la parallela γ'_T . A questo scopo, osserviamo che esistono le parallele $\gamma'_{T'}$, per ogni $0 < T' < T$ e che per ogni t con $0 \leq t < T$, abbiamo $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\gamma(t)) = \gamma'_{T'}(t)$ per $0 \leq t \leq T' < T$.

Fissiamo poi un intorno \mathfrak{B}_0 di 0 in \mathfrak{B} e un intorno U di $\gamma(T)$ in M tali che $\tau_v(p)$ sia definita per $v \in \mathfrak{B}_0$ e $p \in U$. Allora τ_v è anche definita, per $v \in \mathfrak{B}_0$, su tutti gli insiemi $a_k(U)$. Sia $t_0 < T$ tale che $a_k(\gamma(t_0)) \in U$ per ogni $k \gg 1$ e $\gamma(T) = \tau_{v_0}(\gamma(t_0))$ per qualche $v_0 \in \mathfrak{B}_0$.

Possiamo allora definire γ'_T ponendo $\gamma'_T(t) = \gamma'_{T'}(t)$ se $0 \leq t \leq T' < T$ e $\gamma'_T(T) = \tau_{v_0}(\gamma'_{T'}(t_0))$ se $t_0 \leq T' < T$.

Se fosse $T < 1$, potremmo prolungare γ'_T con una parallela a $\gamma(t - T)$ uscente dal punto $\gamma'_T(T)$, contraddicendo la definizione di T . Quindi $T = 1$ e questo dimostra l'esistenza della parallela. Poiché $\gamma'(1) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\gamma(1))$, l'estremo $\gamma'(1)$ non dipende dalla scelta del cammino γ , ma soltanto dal suo punto finale $\gamma(1)$.

Dimostriamo in questo modo che $\{a_k(q)\}$ converge per ogni $q \in M$ e otteniamo quindi un'applicazione $a : M \rightarrow M$ mediante $a(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(q)$ per ogni $q \in M$. Poiché $\tau_v(a(q)) = a(\tau_v(q))$ per ogni $q \in M$, la a è chiaramente differenziabile. Si può dimostrare che è invertibile, ripetendo i raginamenti appena svolti per la successione delle applicazioni inverse $\{a_k^{-1}\}$. \square

Abbiamo facilmente:

LEMMA 15.4.5. Sia \mathfrak{l} l'algebra di Lie dei campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ tali che $[X, \mathfrak{B}] = \{0\}$. Per ogni $p \in M$, l'applicazione $\mathfrak{l} \ni X \rightarrow X(p) \in T_p M$ è iniettiva.

DIMOSTRAZIONE. I generatori di sottogruppi a un parametro di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ sono gli elementi di \mathfrak{l} che generano sottogruppi a un parametro di diffeomorfismi di M . Quindi, per il Teorema 20.2.1, il gruppo $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ è un gruppo di Lie, e l'applicazione $\mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni a \rightarrow a(p) \in M$ definisce per ogni $p \in M$ un diffeomorfismo di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ con una sottovarietà differenziabile chiusa di M . \square

Completiamo ora la dimostrazione del Teorema 20.2.8. L'insieme \mathfrak{G} dei campi di vettori $X \in \mathfrak{l}$ che generano sottogruppi a un parametro di trasformazioni di M è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{l} , e quindi ha dimensione finita. Possiamo perciò applicare il Teorema 20.2.1 al gruppo $\mathbf{G} = \mathbf{Aut}(M, \sigma)$ e a \mathfrak{G} , e concludere che \mathbf{G} ha una struttura di gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{G} . Poiché l'azione $\mathbf{G} \times M \rightarrow M$ è differenziabile, fissato un qualsiasi punto $p_0 \in M$, l'immersione differenziabile $\mathbf{G} \ni g \rightarrow g(p_0) \in M$ è un diffeomorfismo di \mathbf{G} con una sottovarietà differenziabile chiusa di M . \square

Ricordiamo che vale il teorema³ :

TEOREMA 15.4.6 (Bochner-Montgomery). *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico localmente compatto e numerabile all'infinito di trasformazioni differenziabili di una varietà differenziabile paracompatta M . Allora \mathbf{G} è un gruppo di Lie.*

Ricordiamo ancora⁴ il :

TEOREMA 15.4.7 (Dantzig-van der Waerden). *Sia (E, d) uno spazio metrico localmente compatto. Sia $\mathbf{Isom}(E, d)$ il gruppo delle isometrie di (M, E) e, per $x \in E$, indichiamo con $\mathbf{Isom}_x(E, d)$ lo stabilizzatore di x in $\mathbf{Isom}(E, d)$. Consideriamo su $\mathbf{Isom}(E, d)$ la topologia compatta-aperta. Allora $\mathbf{Isom}(E, d)$ è localmente compatto e $\mathbf{Isom}_x(E, d)$ è compatto per ogni $x \in M$. Se M è compatto, anche $\mathbf{Isom}(E, d)$ è compatto.*

OSSERVAZIONE 15.4.8. Ricordiamo ancora che, se (M, g) è una varietà Riemanniana e d è la distanza nella metrica corrispondente, allora le isometrie $f : M \rightarrow M$ per la metrica d sono applicazioni differenziabili che preservano il tensore g della metrica. Indicheremo nel seguito con $\mathbf{O}(M, g)$ il gruppo delle isometrie della varietà Riemanniana (M, g) , cioè :

$$\mathbf{O}(M, g) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, M) \mid f^*g = g\}.$$

Se d è la distanza su M definita dalla metrica g , allora $\mathbf{Isom}(M, d) = \mathbf{O}(M, g)$.

³S.Bochner, D.Montgomery *Locally compact groups of differentiable transformations*, Ann. of Math. **47** (1946), pp.639-657.

⁴D.Dantzig, B.L.van der Waerden *Über metrisch homogene Räume*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6** (1928) pp.374-376. Una dimostrazione completa si può trovare anche in: Kobayashi-Nomizu *Foundations of Differential Geometry*, New York: John Wiley & Sons, vol.1, 1963, alle pagine 46-50.

Trasformazioni e decomposizione di de Rham

16.1. Applicazioni affini

Siano M, N due varietà differenziabili, di dimensioni m, n rispettivamente.

Un'applicazione $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ trasforma un campo di vettori $v \in \mathcal{C}^\infty(I, TM)$ lungo una curva $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ in un campo di vettori $df(v)$ lungo la curva corrispondente $f \circ \gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, N)$.

Supponiamo fissate su M ed N due strutture affini.

DEFINIZIONE 16.1.1. Un'applicazione affine di M in N è una $f : M \rightarrow N$ di classe \mathcal{C}^∞ che trasforma campi di vettori paralleli lungo curve di M in campi di vettori paralleli lungo le corrispondenti curve di N . Indichiamo con $\mathcal{A}ff(M, N)$ l'insieme delle trasformazioni affini di M in N .

Per ogni $\sigma \in L(M)$ e $\tau \in L(N)$ indichiamo con $\mathbb{L}_\sigma(M) = (L_\sigma(M), \pi_\sigma, M, \mathbf{G}_\sigma)$ e $\mathbb{L}_\tau(N) = (L_\tau(N), \pi_\tau, N, \mathbf{G}_\tau)$ i fibrati di olonomia per σ e τ , rispettivamente. Associamo ad f, σ, τ il fibrato principale su M

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{f,\sigma,\tau} &= (L_{f,\sigma,\tau}, \pi_{f,\sigma,\tau}, M, \mathbf{G}_\sigma \times \mathbf{G}_\tau) \quad \text{con} \\ L_{f,\sigma,\tau} &= \{(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \in L_\sigma(M) \times L_\tau(N) \mid f(\pi_M(\mathbf{s})) = \pi_N(\mathbf{t})\}, \\ \pi_{f,\sigma,\tau}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) &= \pi_M(\mathbf{s}), \quad \forall (\mathbf{s}, \mathbf{t}) \in L_{f,\sigma,\tau}, \\ (\mathbf{s}, \mathbf{t}) \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= (\mathbf{s} \times \mathbf{a}, \mathbf{t} \cdot \mathbf{b}), \quad \forall (\mathbf{s}, \mathbf{t}) \in L_{f,\sigma,\tau}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{G}_\sigma, \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbf{G}_\tau. \end{aligned}$$

PROPOSIZIONE 16.1.2. Supponiamo M connessa. Condizione necessaria e sufficiente affinché $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ sia una trasformazione affine è che lo jacobiano

$$J_f(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \tau^{-1} \circ df \circ \sigma, \quad f(\pi_M(\mathbf{s})) = \pi_N(\mathbf{t}),$$

di f sia costante sui fibrati di olonomia $\mathbb{L}_{f,\sigma,\tau}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ una curva, definita su un intervallo I di \mathbb{R} contenente l'origine. Siano $\mathbf{p}_0 = \gamma(0)$ e $\mathbf{q}_0 = f(\mathbf{p}_0)$. Fissiamo due sistemi di riferimento $\sigma_0 \in \mathbf{P}_{M,\mathbf{p}_0}$ e $\tau_0 \in \mathbf{P}_{N,\mathbf{q}_0}$ e siano $\tilde{\gamma}$ il sollevamento orizzontale di γ per σ_0 e $\check{\gamma}$ il sollevamento orizzontale di $f \circ \gamma$ per τ_0 . I campi di vettori orizzontali lungo γ sono della forma $\tilde{\gamma} \cdot v$, con $v \in \mathbb{R}^m$. La condizione affinché f sia affine è che¹ $df(\tilde{\gamma} \cdot v)$ sia parallela lungo $f \circ \gamma$, cioè che $df \circ \tilde{\gamma} \cdot v = \check{\gamma} \cdot w$ per un vettore costante w di \mathbb{R}^n ,

¹Ricordiamo che lo jacobiano di f nei sistemi di riferimento $\tilde{\gamma}, \check{\gamma}$ è

$$Jf(\tilde{\gamma}, \check{\gamma}) = \check{\gamma}^{-1} \circ df \circ \tilde{\gamma} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

cioè che lo jacobiano $\check{\gamma}^{-1} \circ df \circ \check{\gamma}$ sia costante lungo le curve orizzontali uscenti da σ . Questo dimostra la proposizione. \square

OSSERVAZIONE 16.1.3. In particolare, se consideriamo su \mathbb{R}^m ed \mathbb{R}^n le connessioni affini standard, con curvatura e torsione nulle, i concetti di applicazione affine da \mathbb{R}^m in \mathbb{R}^n nel senso della geometria elementare e di quella differenziale coincidono.

PROPOSIZIONE 16.1.4. Una $f \in \mathcal{A}ff(M, N)$ trasforma geodetiche in geodetiche. Se $p \in M$ ed $f(p) = q$, allora $f(\text{Exp}_p(v)) = \text{Exp}_q(df_p(v))$ per ogni v in un intorno aperto di 0 in T_pM . \square

COROLLARIO 16.1.5. Se M è connessa, fissati un punto p in M , un punto q in N ed una $A \in \mathcal{H}om_{\mathbb{R}}(T_pM, T_qN)$, vi è al più una $f \in \mathcal{A}ff(M, N)$ tale che $f(p)=q$ e $df_p=A$. \square

PROPOSIZIONE 16.1.6. Con la topologia compatta-aperta l'insieme delle applicazioni affini $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ è una varietà differenziabile di dimensione minore o uguale ad $n(m+1)$. \square

ESEMPIO 16.1.7. In una varietà affine completa M di dimensione m le geodetiche massimali formano una varietà differenziabile diffeomorfa a TM , e quindi di dimensione $2m$.

Fissiamo su S^m la connessione di Levi-Civita associata alla metrica standard. Allora le trasformazioni affini di S^m in sé sono isometrie e formano un gruppo di dimensione $m(m+1)/2$, isomorfo ad $\mathbf{SO}(m+1)$. Se invece di S^m consideriamo lo spazio di Lobačevskij $H_m = \mathbf{SO}^+(1, m)/\mathbf{SO}(m)$ di dimensione m , il gruppo delle affinità è generato dalle isometrie e dalle omotetie con centro in un punto, ed ha dimensione $m(m+1)/2 + 1$.

16.2. Sottovarietà affini

Sia M una varietà affine.

DEFINIZIONE 16.2.1. Una sua sottovarietà differenziabile N si dice *affine* se i trasporti paralleli di vettori tangenti ad N lungo curve con supporto in N sono ancora tangenti ad N .

PROPOSIZIONE 16.2.2. Se N è una sottovarietà differenziabile affine di M , allora vi è un'unica connessione lineare su N per cui l'inclusione $N \hookrightarrow M$ sia affine.

DIMOSTRAZIONE. L'unicità è conseguenza del fatto che il trasporto parallelo determina univocamente una connessione lineare. Quindi, se N è una sua sottovarietà affine, la restrizione ai cammini in N ed ai vettori tangenti ad N del trasporto parallelo su M determina su N una connessione per cui naturalmente l'inclusione è una trasformazione affine. \square

LEMMA 16.2.3. Siano p un punto di una varietà differenziabile affine M e W un sottospazio vettoriale di T_pM . Esiste al più un germe di sottovarietà affine N di M con $p \in N$ e $T_pN = W$. \square

PROPOSIZIONE 16.2.4. *Se N è una sottovarietà affine connessa di una varietà differenziabile affine completa M , allora N è una sottovarietà aperta di una sottovarietà affine di M completa.* \square

16.3. Varietà totalmente geodetiche

Sia M una varietà differenziabile, S una sua sottovarietà. Un'applicazione continua $\phi : N \rightarrow S$, per cui $N \ni p \rightarrow \phi(p) \in M$ sia differenziabile, è anche differenziabile come applicazione a valori in S .

Se (M, g) è una varietà Riemanniana, possiamo considerare su S la struttura Riemanniana definita dalla restrizione h della metrica g . Le geodetiche di M contenute in S sono anche geodetiche di S . In generale non è vero il viceversa.

DEFINIZIONE 16.3.1. Diciamo che una sottovarietà S di M è *geodetica* in p se contiene tutte le geodetiche di M tangenti ad S in p . Diciamo che S è *totalmente geodetica* se è geodetica in ogni suo punto.

Le sottovarietà geodetiche 1-dimensionali sono le geodetiche massimali di M .

PROPOSIZIONE 16.3.2. *Sia S una sottovarietà di M , geodetica in un punto $p \in M$. Se M è completa, allora anche S è completa.*

PROPOSIZIONE 16.3.3. *Se la sottovarietà S di M è totalmente geodetica, allora l'inclusione $S \hookrightarrow M$ è un'isometria locale.*

TEOREMA 16.3.4. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana ed S una sua sottovarietà, completa per la restrizione della metrica g . Se il trasporto parallelo in M lungo le curve di S trasforma vettori tangenti ad S in vettori tangenti ad S , allora S è totalmente geodetica. Viceversa, se S è totalmente geodetica, il trasporto parallelo in M lungo le curve di S trasforma vettori tangenti ad S in vettori tangenti ad S .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché abbiamo supposto S completa, la dimostrazione si riduce a considerare la situazione locale. Basterà allora verificare che, se si scelgono coordinate locali x^1, \dots, x^n tali che x^1, \dots, x^m siano coordinate locali su S , allora i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita su S si ottengono da quelli della connessione di Levi-Civita su M per restrizione del dominio di definizione degli indici. \square

TEOREMA 16.3.5. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana connessa, semplicemente connessa, completa, con curvatura sezionale negativa. Sia S una sua sottovarietà totalmente geodetica. Per ogni $p \in S$, le geodetiche uscenti da p e perpendicolari ad S formano una sottovarietà S_p^\perp ed M è unione disgiunta delle sottovarietà S_p^\perp al variare di p in S .*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo, per ogni $p \in S$,

$$S = \exp_p(T_p S), \quad S_p^\perp = \exp_p(T_p^\perp S).$$

Poiché $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ è un diffeomorfismo, S_p^\perp è una sottovarietà.

Se $q \in M$, poiché S è chiusa, vi è un punto $p \in S$ che realizza la minima distanza di q da S e $q \in S_p^\perp$. Tale punto p è unico, perché se ci fosse un altro punto p' che realizza la minima distanza, le geodetiche da q a p e a p' formerebbero angoli di $\pi/2$ con il segmento di geodetica di S che congiunge p a p' e ci sarebbe quindi un triangolo geodetico con somma degli angoli interni $> \pi$. \square

16.4. Trasformazioni affini

Sia M una varietà affine, con forma di Cartan ω sullo spazio $L(M)$ dei sistemi di riferimento.

DEFINIZIONE 16.4.1. Una *trasformazione affine di M* è un diffeomorfismo f di M in sé che sia anche una mappa affine.

Le trasformazioni affini di M formano un gruppo, che denotiamo con $\mathbf{Aff}(M)$.

Data $f \in \mathcal{D}iff^\infty(M, M)$ indichiamo con

$$\hat{f} : L(M) \ni \sigma \longrightarrow df \circ \sigma \in L(M)$$

il suo *sollevamento jacobiano*, cioè il diffeomorfismo indotto da f sullo spazio dei sistemi di riferimento. La corrispondenza $f \rightarrow \hat{f}$ è biunivoca tra $\mathcal{D}iff^\infty(M, M)$ ed il gruppo dei diffeomorfismi di $L(M)$ in sé che preservano la forma canonica.

Questa corrispondenza è biunivoca fra le trasformazioni affini e gli automorfismi della connessione lineare su M . Abbiamo

LEMMA 16.4.2. Una $f \in \mathcal{D}iff^\infty(M, M)$ è affine se e soltanto se $\hat{f}^*(\omega) = \omega$. \square

PROPOSIZIONE 16.4.3. Un diffeomorfismo f di M in sé è una trasformazione affine se e soltanto se \hat{f} lascia invarianti i campi orizzontali fondamentali.

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$ è una trasformazione affine, allora \hat{f} lascia invarianti θ ed ω , e quindi anche i campi v^* (con $v \in \mathbb{R}^m$), caratterizzati da $\theta(v^*) = v$ ed $\omega(v^*) = 0$. Viceversa, da $d\hat{f}(v^*) = v^*$ per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ segue che \hat{f} preserva la distribuzione orizzontale e quindi è una trasformazione affine. \square

PROPOSIZIONE 16.4.4. Se M è connessa, allora una trasformazione affine di M in sé è completamente determinata dal suo differenziale in un punto.

DIMOSTRAZIONE. Siano f_1, f_2 due trasformazioni affini di M . Il luogo N dei punti di M in cui f_1 ed f_2 coincidono con i loro differenziali è chiuso. Poiché $f_i(\text{Exp}_p(v)) = \text{Exp}_{f_i(p)}(df_{p_i}(v))$ per ogni $p \in M$ e v in un intorno di 0 in $T_p M$, l'insieme N è anche aperto. Se quindi $N \neq \emptyset$, è $N = M$ per l'ipotesi che M sia connessa. \square

TEOREMA 16.4.5. Il gruppo $\mathbf{Aff}(M)$ delle trasformazioni affini di M in sé è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale ad $m(m+1)$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo su \mathbb{R}^m e su $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ i prodotti scalari standard². Allora il sollevamento jacobiano di una trasformazione affine è un diffeomorfismo di $L(M)$ che preserva la metrica

$$\hat{g}(X, Y) = (\theta(X)|\theta(Y)) + (\omega(X)|\omega(Y)), \quad \forall \sigma \in L(M), \quad \forall X, Y \in T_\sigma L(M).$$

²È $(v|w) = w^\dagger v$ se $v, w \in \mathbb{R}^m$ ed $(X|Y) = \text{trac}(Y^\dagger X)$ se $X, Y \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$.

Quindi $\mathbf{A}(M)$ è un gruppo topologico localmente compatto per il Teorema di van Dantzig-van der Waerden³ e, per il teorema di Bochner-Montgomery⁴ ([6]) un gruppo di Lie. Per la Proposizione 16.4.4 la sua dimensione è minore o uguale alla dimensione $m(m+1)$ dello spazio totale $L(M)$ dei sistemi di riferimento di M . \square

16.5. Affinità infinitesime

Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ genera un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di M , che si solleva a un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di $L(M)$.

DEFINIZIONE 16.5.1. Il suo generatore infinitesimale \hat{X} si dice il *sollevamento Jacobiano di X* .

LEMMA 16.5.2. Un campo di vettori \hat{X} su $L(M)$ è il *rilevamento Jacobiano di un campo di vettori X su M* se e soltanto se verifica le due condizioni:

$$(16.1) \quad \begin{cases} \hat{X} \cdot \mathbf{a} = \hat{X}, & \forall \mathbf{a} \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}), \\ L_{\hat{X}}\theta = 0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo di vettori su M e $\{\phi_t\}$ il gruppo locale a un parametro da esso generato. Da $\hat{\phi}_t^*\theta = \theta$ otteniamo la seconda delle (16.1). È poi $\hat{\phi}_t(\sigma) = d\phi_t \circ \sigma$, e quindi

$$\hat{X}_\sigma \cdot \mathbf{a} = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \hat{\phi}_t(\sigma \cdot \mathbf{a}) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} d\phi_t \circ \sigma \circ \mathbf{a} = \hat{X}_{\sigma \cdot \mathbf{a}}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}).$$

Viceversa, se valgono le (16.1), il gruppo a un parametro generato da \hat{X} consiste di diffeomorfismi locali di $L(M)$ che preservano le fibre e lasciano θ invariante, e sono quindi il sollevamento jacobiano di un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di M in sé, il cui generatore infinitesimale X soddisfa $X_{\pi(\sigma)} = \pi_*(\hat{X}_\sigma)$ per ogni $\sigma \in L(M)$. \square

Supponiamo che M sia una varietà differenziabile affine e sia ω la forma di Cartan della sua connessione lineare.

DEFINIZIONE 16.5.3. Un campo di vettori X su M è un' *affinità infinitesima* se il gruppo locale a un parametro da esso generato consiste di affinità locali.

Ricordiamo che, dato un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, indichiamo con \tilde{X} , oppure $\text{hor}(X)$ il suo *sollevamento orizzontale*, caratterizzato da $d\pi(\tilde{X}) = X$, $\omega(\tilde{X}) = 0$.

PROPOSIZIONE 16.5.4. Siano X un campo di vettori su M ed \hat{X} il suo *sollevamento jacobiano*. Sono equivalenti:

³David van Dantzig (1900-1959) e Bartel Leendert van der Waerden 1903-1996) sono matematici olandesi. Il risultato citato è dimostrato in [62].

⁴Salomon Bochner (1899-1982), matematico polacco naturalizzato statunitense, ha dato importanti contributi in analisi, probabilità e geometria differenziale.

Deane Montgomery (1909-1992), matematico statunitense, ha dato contributi importanti alla topologia e alla risoluzione del quinto problema di Hilbert (un gruppo topologico localmente euclideo è di Lie).

- (1) X è un'affinità infinitesima;
- (2) $L_{\hat{X}}\omega = 0$;
- (3) $[\hat{X}, v^*] = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m$;
- (4) $[\hat{X}, \tilde{Y}] = \text{hor}([X, Y]), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$.
- (5) $[L_X, \nabla_Y] = \nabla_{[X, Y]}, \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$.

DIMOSTRAZIONE. (1) \Rightarrow (2) è conseguenza del fatto che il sollevamento jacobiano di una trasformazione affine preserva la distribuzione orizzontale.

(2) \Rightarrow (3). Per il Lemma 16.5.2 è anche $L_{\hat{X}}\theta = 0$. Otteniamo, per ogni $v \in \mathbb{R}^m$,

$$0 = \hat{X}v = \hat{X}(\theta(v^*)) = (L_{\hat{X}}\theta)(v^*) - \theta([\hat{X}, v^*]) = -\theta([\hat{X}, v^*]),$$

$$0 = \hat{X}\omega(v^*) = (L_{\hat{X}}\omega)(v^*) - \omega([\hat{X}, v^*]) = -\omega([\hat{X}, v^*])$$

e perciò la (3).

(3) \Rightarrow (1), (4). Ogni campo orizzontale $Z \in \mathcal{H}(L(M))$ è una combinazione lineare $Z = \sum_{i=1}^m f^i e_i^*$, a coefficienti $f^i \in \mathcal{C}^\infty(L(M))$, dei campi orizzontali standard e_1^*, \dots, e_m^* associati alla base canonica e_1, \dots, e_m di \mathbb{R}^m . Se \hat{X} soddisfa (3), allora

$$[\hat{X}, Z] = \sum_{i=1}^m (\hat{X}f^i) \cdot e_i^* + \sum_{i=1}^m f^i [\hat{X}, e_i^*] = \sum_{i=1}^m (\hat{X}f^i) e_i^* \in \mathcal{H}(L(M))$$

è ancora un campo orizzontale. Poiché la derivata di Lie rispetto ad \hat{X} preserva la distribuzione orizzontale, X è un'affinità infinitesima.

Poiché, per ogni $Y \in \mathfrak{X}(M)$, il campo \tilde{Y} è π -correlato ad Y , ne segue che $[\hat{X}, \tilde{Y}]$ è il campo orizzontale corrispondente ad $[X, Y]$ e vale quindi la (4).

(5) \Leftrightarrow (4). Poiché $L_{\hat{X}}\theta = 0$, otteniamo, per ogni $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} \theta(\text{hor}([L_X, \nabla_Y](Z))) &= \theta(\text{hor}([X, \nabla_Y Z] - \nabla_Y[X, Z])) = \theta([\hat{X}, \text{hor}(\nabla_Y Z)]) - \tilde{Y}(\theta([\hat{X}, \tilde{Z}])) \\ &= \hat{X}(\theta(\text{hor}(\nabla_Y Z)) - \tilde{Y}\hat{X}\theta(\tilde{Z})) = [\hat{X}, \tilde{Y}](\theta(\tilde{Z})). \end{aligned}$$

La (5) è dunque equivalente ad

$$[\hat{X}, \tilde{Y}]\theta(\tilde{Z}) = \text{hor}([X, Y])\theta(\tilde{Z}), \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

che, essendo $[\hat{X}, \tilde{Y}]$ è un campo $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ -invariante, è equivalente alla (4) e cioè al fatto che la derivata di Lie rispetto ad \hat{X} , preservando la distribuzione orizzontale, sia un'affinità infinitesima. \square

PROPOSIZIONE 16.5.5. *L'insieme $\alpha(M)$ delle affinità infinitesime di M è un'algebra di Lie di dimensione minore o uguale ad $m(m+1)$. Se M è connessa, per ogni $\sigma \in L(M)$ l'applicazione $\alpha(M) \ni X \rightarrow \hat{X}_\sigma \in T_\sigma L(M)$ è iniettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora $[\widehat{X}, \widehat{Y}] = [\hat{X}, \hat{Y}]$ ed $[L_{\hat{X}}, L_{\hat{Y}}] = L_{[\hat{X}, \hat{Y}]}$. Il fatto che $\alpha(M)$ sia un'algebra di Lie è allora conseguenza della caratterizzazione (2) della Proposizione 16.5.4. Infatti

$$L_{[\hat{X}, \hat{Y}]} \omega = [L_{\hat{X}}, L_{\hat{Y}}] \omega = 0 \quad \text{se } X, Y \in \alpha(M).$$

Per dimostrare che $\alpha(M)$ ha dimensione finita $\leq m(m+1)$, è sufficiente dimostrare che, se M è connessa, ogni affinità infinitesima X per cui \hat{X} abbia un punto critico è identicamente nulla. Sia $X \in \alpha(M)$. Il luogo dei punti critici di \hat{X} in $L(M)$ è un chiuso $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ -invariante. Poiché, per la (3) della Proposizione 16.5.4,

$[v^*, \hat{X}] = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^m$, il campo \hat{X} è invariante per il flusso dei v^* e quindi, se ha un punto critico σ_0 , sono punti critici tutti i punti σ dello spazio totale del fibrato d'olonomia per il punto σ_0 . Questo implica che X , che è π -correlato ad \hat{X} , è identicamente nullo. \square

PROPOSIZIONE 16.5.6. *La restrizione ad una geodetica di un'affinità infinitesima è un campo di Jacobi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $X \in \mathfrak{a}(M)$ un'affinità infinitesima. Se $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ è un arco geodetico, esiste un $\epsilon > 0$ per cui il flusso ϕ_s di X sia definito, per $|s| \leq \epsilon$, in un intorno del supporto $\gamma([0, 1])$ di γ . La $f(t, s) = \phi_s \circ \gamma(t)$ è una superficie parametrica di classe \mathcal{C}^∞ , definita per $(t, s) \in [0, 1] \times [-\epsilon, \epsilon]$, e per ogni $|s| \leq \epsilon$ la $t \rightarrow \phi_s \circ \gamma(t)$ è una geodetica. Quindi $X_{\gamma(t)} = \partial f(t, 0)/\partial s$ è un campo di Jacobi lungo γ . \square

Ricordiamo che un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ è *completo* se genera un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di M .

TEOREMA 16.5.7. *L'algebra di Lie del gruppo $\mathbf{A}(M)$ delle affinità di M è la sottoalgebra di $\mathfrak{a}(M)$ formata dai campi completi.*

PROPOSIZIONE 16.5.8. *Se l'algebra di Lie $\mathfrak{a}(M)$ delle affinità infinitesime ha dimensione $m(m+1)$, allora la connessione è piatta, ha cioè torsione e curvatura nulle.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathfrak{a}(M)$ ha dimensione $m(m+1)$, per ogni $\sigma_0 \in L(M)$ l'applicazione $\mathfrak{a}(M) \ni X \rightarrow \hat{X}_{\sigma_0} \in T_{\sigma_0}L(M)$ è un isomorfismo lineare. Quindi, per ogni $A \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ vi è uno ed un solo campo $X \in \mathfrak{a}(M)$ tale che $\hat{X}_{\sigma_0} = A_{\sigma_0}^*$, ove A^* è il campo verticale fondamentale associato ad A . Siano $v, w \in \mathbb{R}^m$. Allora

$$\hat{X}_{\sigma_0} \Theta(v^*, w^*) = A_{\sigma_0}^* \Theta(v^*, w^*).$$

Calcoliamo separatamente i due membri di quest'uguaglianza. Poiché

$$L_{\hat{X}} \Theta = L_{\hat{X}}(d\theta + \omega \wedge \theta) = d(L_{\hat{X}}\theta) + (L_{\hat{X}}\omega) \wedge \theta + \omega \wedge L_{\hat{X}}\theta = 0,$$

otteniamo

$$\hat{X} \Theta(v^*, w^*) = (L_{\hat{X}} \Theta)(v^*, w^*) + \Theta([\hat{X}, v^*], w^*) + \Theta(v^*, [\hat{X}, w^*]) = 0.$$

È poi

$$L_{A^*} \Theta = A^* \lrcorner d\Theta + d(A^* \lrcorner \Theta) = A^* \lrcorner (\Omega \wedge \theta - \omega \wedge \Theta) = -A\Theta$$

e quindi otteniamo che $A\Theta_{\sigma_0}(v^*, w^*) = 0$ per ogni $A \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$, per ogni $v, w \in \mathbb{R}^m$ ed ogni $\sigma_0 \in L(M)$. Questo dimostra che $\Theta = 0$. In modo analogo si dimostra che anche $\Omega = 0$. \square

PROPOSIZIONE 16.5.9. *Se la connessione è completa, allora anche tutte le affinità infinitesime sono complete, sono cioè generatori infinitesimali di gruppi a un parametro di trasformazioni affini di M .*

16.6. Isometrie di una varietà Riemanniana

Sia (M, g) una varietà Riemanniana connessa e dist la distanza associata alla metrica g .

Ricordiamo che un'isometria di M è un'applicazione $\phi : M \rightarrow M$ che preserva le distanze, tale cioè che sia

$$\text{dist}(\phi(p_1), \phi(p_2)) = \text{dist}(p_1, p_2), \quad \forall p_1, p_2 \in M.$$

Diciamo che è un'isometria globale, o una congruenza se è anche bigettiva.

DEFINIZIONE 16.6.1. Un'applicazione $\phi : M \rightarrow M$ è un isomorfismo Riemanniano locale se è \mathcal{C}^∞ e $\phi^*g = g$. Diremo che è un isomorfismo Riemanniano se è anche bigettiva.

Segue dalla definizione della distanza Riemanniana che un isomorfismo Riemanniano è anche una congruenza. Le due nozioni sono di fatto equivalenti, come conseguenza del seguente teorema.

TEOREMA 16.6.2. Un'isometria $\phi : M \rightarrow M$ rispetto alla distanza Riemanniana è differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ ed è un isomorfismo Riemanniano locale.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che gli archi di geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ si possono caratterizzare come gli archi differenziabili per cui esistono costanti $c \geq 0$ ed $\epsilon > 0$ per cui

$$\text{dist}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = c|t_2 - t_1|, \quad \forall 0 \leq t_1, t_2 \leq 1, \text{ con } |t_1 - t_2| < \epsilon.$$

Quindi un'isometria ϕ di M è un'applicazione continua che trasforma archi geodetici in archi geodetici e segmenti in segmenti. In particolare, se $\phi(p_0) = q_0$, possiamo associare a ϕ un'applicazione $\lambda : T_{p_0} \rightarrow T_{q_0}$ omogenea di grado uno che fa corrispondere ad un segmento $\{\text{Exp}_{p_0}(tv)\}_{0 \leq t \leq 1}$, per v in un intorno normale di 0 in $T_{p_0}M$, il segmento $\{\text{Exp}_{q_0}(t\lambda(v))\}_{0 \leq t \leq 1}$. L'applicazione λ preserva le lunghezze dei vettori. Osserviamo che l'angolo α tra due geodetiche $\text{Exp}_{p_0}(tv)$ ed $\text{Exp}_{p_0}(tw)$ uscenti dallo stesso punto p_0 si può calcolare, utilizzando il teorema del coseno, mediante

$$\cos \alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{dist}(\text{Exp}_{p_0}(tv), \text{Exp}_{p_0}(tw)) - t^2(\|v\|^2 + \|w\|^2)}{2t^2\|v\|\|w\|}.$$

Quindi l'applicazione λ preserva anche gli angoli ed è perciò un'isometria lineare di $T_{p_0}M$ su $T_{q_0}M$. In un intorno normale di p_0 abbiamo $\phi(\text{Exp}_{p_0}(v)) = \text{Exp}_{q_0}(\lambda(v))$ e questo dimostra che ϕ è di classe \mathcal{C}^∞ e $d\phi(p_0) = \lambda$. Dunque $\phi^*g = g$ e ϕ è un isomorfismo Riemanniano. \square

PROPOSIZIONE 16.6.3. Le congruenze di una varietà Riemanniana (M, g) formano un gruppo. \square

Indichiamo con $\mathbf{O}(M, g)$ il gruppo delle congruenze della varietà Riemanniana (M, g) . Osserviamo che, se $\phi \in \mathbf{O}(M, g)$ abbiamo:

$$(16.2) \quad \forall p \in M \exists r_p > 0 \text{ tale che } \phi(\text{Exp}_p(v)) = \text{Exp}_{\phi(p)}(d\phi(p)(v)) \\ \forall v \in T_pM \text{ con } \|v\| < r_p.$$

PROPOSIZIONE 16.6.4. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana connessa, p_0 un punto di M . Se $\phi, \psi \in \mathbf{O}(M, g)$ e $\phi(p_0) = \psi(p_0)$, $d\phi(p_0) = d\psi(p_0)$, allora $\phi = \psi$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $N = \{p \in M \mid \phi(p) = \psi(p), \quad d\phi(p) = d\psi(p)\}$. Poiché ϕ e ψ sono di classe \mathcal{C}^∞ , N è chiuso. Per la ((16.2)), l'insieme N è anche aperto e quindi coincide con M . \square

Ogni congruenza di (M, g) definisce un diffeomorfismo nello spazio totale $\mathbf{O}_g(M)$ del fibrato dei sistemi di riferimento ortonormali di M . Su questo la forma di Cartan $\omega \in \Omega^1(\mathbf{O}_g(M), \mathfrak{o}_m)$ della connessione di Levi-Civita e la forma canonica $\theta \in \Omega^1(\mathbf{O}_g(M), \mathbb{R}^m)$ definiscono un parallelismo completo

$$T\mathbf{O}_g(M) \ni X \rightarrow (\pi(X), \theta(X), \omega(X)) \in M \times \mathbb{R}^m \times \mathfrak{o}_m.$$

LEMMA 16.6.5. *Se $\phi \in \mathbf{O}(M, g)$, allora*

$$(16.3) \quad \tilde{\phi} : \mathbf{O}_g(M) \ni \sigma \longrightarrow d\phi \circ \sigma \in \mathbf{O}_g(M)$$

definisce un morfismo del fibrato principale $\Phi_g(M)$ con

$$(16.4) \quad \tilde{\phi}^* \theta = \theta, \quad \tilde{\phi}^* \omega = \omega.$$

Viceversa, ogni isomorfismo $(\phi, \tilde{\phi})$ del fibrato principale $\Phi_g(M)$ che soddisfi (16.4) è il sollevamento di una congruenza $\phi \in \mathbf{O}(M, g)$.

Come conseguenza abbiamo il seguente teorema di Myers-Steenrod⁵.

TEOREMA 16.6.6. *Il gruppo $\mathbf{O}(M, g)$ delle congruenze di una varietà Riemanniana connessa di dimensione m è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale ad $m(m+1)/2$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un punto p_0 in M ed un riferimento ortonormale $\sigma_0 \in \mathbf{O}_g(M)$ in p_0 . Se $\phi \in \mathbf{O}(M, g)$, allora $d\phi(p_0) = \sigma^{-1} \circ \tilde{\phi}(\sigma_0) \circ \sigma_0^{-1}$. Quindi, per la Proposizione 16.6.4, la ϕ è completamente determinata da $\tilde{\phi}(\sigma_0)$ e l'applicazione $\mathbf{O}(M, g) \ni \phi \rightarrow \tilde{\phi}(\sigma_0) \in \mathbf{O}_g(M)$ è iniettiva e continua. Sia N l'immagine di questa applicazione.

Dico che N è un chiuso di $\mathbf{O}_g(M)$. Sia infatti $\{\phi_\nu\}$ una successione in $\mathbf{O}(M, g)$ tale che $\{\tilde{\phi}_\nu(\sigma_0)\}$ converga in $\mathbf{O}_g(M)$ ad un riferimento ortonormale σ_1 in un punto p_1 di M . Fissiamo $r > 0$ in modo che $B_{p_0}(r)$ e $B_{p_1}(r)$ siano intorni normali di p_0 e p_1 rispettivamente. Definiamo $f : B_{p_0}(r) \rightarrow B_{p_1}(r)$ mediante $f(\text{Exp}_{p_0}(v)) = \text{Exp}_{p_1}(\sigma_1 \circ \sigma_0(v))$ se $v \in T_{p_0}M$ e $\|v\| < r$. Su tutti i sottoinsiemi compatti di $B_{p_0}(r)$ la f è limite uniforme delle ϕ_ν e quindi è un'isometria di $B_{p_0}(r)$ su $B_{p_1}(r)$. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} = \left\{ (U, \psi) \left| \begin{array}{l} B_{p_0}(r) \subset U \text{ aperto connesso, } \psi \in \mathcal{C}^\infty(U, M), \psi|_{B_{p_0}(r)} = f, \\ \text{dist}(\psi(p), \psi(q)) = \text{dist}(p, q), \forall p, q \in U \end{array} \right. \right\}.$$

ed introduciamo su di essa la relazione d'ordine

$$(U_1, \psi_1) < (U_2, \psi_2) \iff U_1 \subset U_2 \text{ e } \psi_2|_{U_1} = \psi_1.$$

⁵S. B. Myers and N. E. Steenrod *The Group of Isometries of a Riemannian Manifold* Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 40, No. 2 (Apr., 1939), pp. 400-416. Vedi anche Richard S. Palais, *On the differentiability of isometries* Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 805-807

Si verifica immediatamente che questa famiglia è induttiva ed ammette quindi un elemento massimale (W, ϕ) . Dico che $W = M$ e $\phi \in \mathbf{O}(M, g)$. Infatti, se $\{q_\nu\}$ è una successione di punti di W che converge ad un punto q di M , allora esiste un $\eta > 0$ tale che per ogni ν la palla $B_{q_\nu}(\eta)$ sia un intorno normale di q_ν in M . Le ϕ_ν convergono allora su $B_q(\eta)$, uniformemente sui compatti, ad una isometria locale ψ' di $B_q(\eta)$ in M che, per la Proposizione 16.6.4, coincide con ϕ su $B_q(\eta) \cap W$. Quindi per la massimalità $B_q(\eta) \subset W$ e, poiché M è connessa, questo dimostra che $W = M$, cioè che ϕ è un'isometria definita su M . Per verificare che è surgettiva, osserviamo che $\{\tilde{\phi}_\nu^{-1}(\sigma_1)\}$ converge a σ_0 . Ripetendo il ragionamento svolto sopra, ne ricaviamo che ϕ_ν^{-1} converge ad un'isometria $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$, che è l'inversa di ϕ .

Da questa osservazione segue che $\mathbf{O}(M, g)$ è localmente compatto, e quindi un gruppo di Lie diffeomorfo, come varietà differenziabile, ad una sottovarietà N di $\mathbf{O}_g(M)$, e quindi di dimensione minore o uguale ad $m(m+1)/2$. \square

16.7. Campi di Killing

Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana.

DEFINIZIONE 16.7.1. Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ è di Killing⁶ se è generatore infinitesimale di un gruppo locale a un parametro di isometrie locali di (M, g) .

Indicheremo con $\mathfrak{i}(M, g)$ l'insieme dei campi di Killing di (M, g) .

Poiché le isometrie pseudo-Riemanniane sono trasformazioni affini per la connessione di Levi-Civita, abbiamo

PROPOSIZIONE 16.7.2. I campi di Killing sono affinità infinitesime per la connessione di Levi-Civita. \square

Vale il seguente

TEOREMA 16.7.3. Sono equivalenti, per $X \in \mathfrak{X}(M)$:

- (1) X è di Killing;
- (2) la derivata di Lie $L_X g$ del tensore della metrica è nulla;
- (3) la derivata covariante ∇X è g -antisimmetrica, cioè

$$(16.5) \quad g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0, \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M);$$

Se X è un campo di Killing, allora

- (4) per ogni $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ risulta

$$(16.6) \quad [X, \nabla_Y Z] = \nabla_Y [X, Z] + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

- (5) la restrizione di X lungo ogni geodetica è un campo di Jacobi;

- (6) $\nabla_{YZ}^2 X + R(X, Y)Z = 0$ per ogni $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

⁶ Wilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923), matematico tedesco, professore a Münster dal 1892, fu un pioniere della teoria dei gruppi e delle algebre di Lie e, tra l'altro, scoprì nel 1887 l'algebra eccezionale G_2 .

DIMOSTRAZIONE. L'equivalenza (1) \Leftrightarrow (2) è conseguenza immediata della definizione. Verifichiamo la (2) \Leftrightarrow (3). Se $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ abbiamo

$$\begin{aligned}(L_X g)(Y, Z) &= X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) \\ &= g(\nabla_X Y - [X, Y], Z) + g(\nabla_X Z - [X, Z], Y) \\ &= g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X)\end{aligned}$$

perché la connessione di Levi-Civita è simmetrica. Quindi la (16.5) è condizione necessaria e sufficiente affinché $L_X g = 0$.

La (4) è la (5) della Proposizione 16.5.4. Abbiamo poi

$$\begin{aligned}\nabla_{YZ}^2 X &= \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_{\nabla_Y Z} X \\ &= \nabla_Y (\nabla_X Z - [X, Z]) - \nabla_X \nabla_Y Z + [X, \nabla_Y Z] \\ &= -R(X, Y)Z - \nabla_{[X, Y]} Z - \nabla_Y [X, Z] + [X, \nabla_Y Z]\end{aligned}$$

ed otteniamo quindi la (6) perché per la (5) la somma degli ultimi tre termini nell'ultima riga è nulla. \square

PROPOSIZIONE 16.7.4. *I campi di Killing su (M, g) formano un'algebra di Lie $\mathfrak{i}(M, g)$ di dimensione minore o uguale ad $m(m+1)/2$. Se $\mathfrak{i}(M, g)$ ha dimensione $m(m+1)/2$, allora (M, g) è uno spazio a curvatura costante. La dimostrazione dell'ultima affermazione si può ottenere ripetendo gli argomenti usati per dimostrare la Proposizione 16.5.8.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché, per il Teorema 16.7.3, $\mathfrak{i}(M, g) = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid L_X g = 0\}$, i campi di Killing formano una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(M)$. Inoltre, la restrizione ad $\mathbf{O}_g(M)$ del rilevamento Jacobiano \hat{X} di un campo di Killing X è un campo di vettori su $\mathbf{O}_g(M)$. Se quindi $\sigma_0 \in \mathbf{O}_g(M)$, otteniamo per la Proposizione 16.5.5 un'applicazione lineare iniettiva $\mathfrak{i}(M, g) \ni X \rightarrow \hat{X}_{\sigma_0} T\mathbf{O}_g(M)$. Questo dimostra che $\mathfrak{i}(M, g)$ ha dimensione minore o uguale ad $m(m+1)/2$. \square

16.8. Riducibilità

Rappresentazioni riducibili e decomponibili. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie e $(\rho, V) = \rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ una sua rappresentazione lineare reale. Un sottospazio lineare W di V si dice \mathbf{G} -invariante se $\rho(a)W = W$ per ogni $a \in \mathbf{G}$. I sottospazi $\{0\}$ e V sono sottospazi \mathbf{G} -invarianti *banali*.

DEFINIZIONE 16.8.1. Diciamo che ρ è

- *irriducibile* se V non contiene sottospazi \mathbf{G} -invarianti non banali;
- *riducibile* se non è irriducibile;
- *decomponibile* se V si può decomporre nella somma diretta di due sottospazi \mathbf{G} -invarianti non banali;
- *indecomponibile* se non è decomponibile;
- *completamente decomponibile* se ogni sottospazio \mathbf{G} -invariante ammette in V un complemento lineare \mathbf{G} -invariante.

Una definizione analoga si dà per una rappresentazione lineare $(\rho_*, V) = \rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ di un'algebra di Lie \mathfrak{g} . Un sottospazio lineare W di V si dice \mathfrak{g} -invariante se $\rho_*(A)(W) \subset W$ per ogni $A \in \mathfrak{g}$. I sottospazi $\{0\}$ e V sono sottospazi \mathfrak{g} -invarianti *banali*.

DEFINIZIONE 16.8.2. Diciamo che ρ_* è

- *irriducibile* se V non contiene sottospazi \mathfrak{g} -invarianti non banali;
- *riducibile* se non è irriducibile;
- *decomponibile* se V si può decomporre nella somma diretta di due sottospazi \mathfrak{g} -invarianti non banali;
- *indecomponibile* se non è decomponibile;
- *completamente decomponibile* se ogni sottospazio \mathfrak{g} -invariante ammette in V un complemento lineare \mathfrak{g} -invariante.

Se \mathfrak{g} è l'algebra di Lie di un gruppo di Lie \mathbf{G} , ad ogni rappresentazione lineare (ρ, V) di \mathbf{G} corrisponde la rappresentazione $(\rho_* = d\rho_e, V)$ di \mathfrak{g} . Vale anche il viceversa se \mathbf{G} è connesso e semplicemente connesso.

Abbiamo le implicazioni

$$(\rho_*, V) \text{ irriducibile} \implies (\rho, V) \text{ irriducibile}$$

$$(\rho_*, V) \text{ indecomponibile} \implies (\rho, V) \text{ indecomponibile}$$

$$(\rho, V) \text{ completamente decomponibile} \implies (\rho_*, V) \text{ completamente decomponibile}$$

e valgono le implicazioni opposte quando \mathbf{G} sia connesso.

Se (ρ, V) è completamente decomponibile, lo spazio V si decompone in modo unico in una somma diretta

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

in cui $V_0 = \{v \in V \mid a(v) = v, \forall a \in \mathbf{G}\}$ è il luogo dei punti fissi di \mathbf{G} e la restrizione di \mathbf{G} a ciascuno dei sottospazi vettoriali V_i , per $1 \leq i \leq k$, è irriducibile.

Riducibilità di varietà affini. Sia M una varietà differenziabile affine connessa, dotata di una connessione lineare priva di torsione. Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un suo fibrato d'olonomia, con gruppo d'olonomia $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$. Indichiamo con $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(m)$ l'algebra di Lie di \mathbf{G} .

DEFINIZIONE 16.8.3. Diciamo che M è *irriducibile* se l'azione naturale di \mathbf{G} su \mathbb{R}^m è irriducibile.

Supponiamo che M sia riducibile e sia V un sottospazio \mathbf{G} -invariante non banale di \mathbb{R}^m .

LEMMA 16.8.4. *La distribuzione vettoriale $\mathcal{D}_V(P)$ su P generata dallo spazio vettoriale $\{A^* \mid A \in \mathfrak{g}\} + \{v^* \mid v \in V\}$ è involutiva.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché abbiamo supposto che la connessione su M sia simmetrica, $[v_1^*, v_2^*]$ è un campo verticale per ogni $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$. Poiché V è \mathbf{G} -invariante, abbiamo poi $[A^*, v^*] = (Av)^*$ con $Av \in V$ per ogni $v \in V$. Da questo segue la tesi. \square

PROPOSIZIONE 16.8.5. *L'insieme $T_V M = \{\sigma v \mid \sigma \in P, v \in V\}$ è un sottofibrato vettoriale di TM . La distribuzione vettoriale $\mathcal{D}_V(M) = \Gamma(M, T_V M)$ su M è involutiva.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché per ipotesi V è \mathbf{G} -invariante, abbiamo $\sigma_1 V = \sigma_2 V$ se $\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2)$. In particolare, per ogni aperto U di M ed ogni $\sigma \in \Gamma(U, P)$ la $U \times V \ni (p, v) \rightarrow \sigma(p)v \in T_V M|_U$ è una trivializzazione locale di $T_V M$ su U , e quindi $T_V M$ è un sottofibrato vettoriale di TM .

La distribuzione $\mathcal{D}_V(P)$ è il pullback della $\mathcal{D}_V(M)$ mediante la proiezione di P sulla base. Quindi $\mathcal{D}_V(M)$ è involutiva perché $\mathcal{D}_V(P)$ lo è. \square

PROPOSIZIONE 16.8.6. *Sia Q un integrale totale di \mathcal{D}_V in P . Allora Q è lo spazio totale di un fibrato \mathbf{G} -principale la cui base N è una sottovarietà affine di M .*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di Frobenius, per ogni punto σ_0 di P passa una ed una sola varietà integrale massimale Q della distribuzione involutiva $\mathcal{D}_V(P)$. Poiché $\mathcal{D}_V(P)$ contiene tutti i campi verticali, Q è \mathbf{G} -invariante. La Q è lo spazio totale di un fibrato \mathbf{G} -principale la cui base è l'integrale massimale di $\mathcal{D}_V(M)$ per il punto $p_0 = \pi(\sigma_0)$. Per costruzione, N è una sottovarietà affine di M . Infatti il trasporto parallelo in M lungo le curve con supporto in N di vettori tangenti ad N sono le curve $\tilde{\gamma} v$ con $\tilde{\gamma}$ orizzontale e con supporto in Q e $v \in V$, e sono quindi a valori in TN . \square

La struttura affine di N è descritta dalla Proposizione 16.2.2. La sua ologonomia è un sottogruppo del gruppo delle restrizioni a V degli elementi di \mathbf{G} .

16.9. Decomponibilità e teorema di de Rham

Sia M una varietà differenziabile affine, connessa, e con una connessione simmetrica. Fissiamo un suo fibrato d'ologonomia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$, con gruppo strutturale $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$. Denotiamo con \mathfrak{g} l'algebra di Lie di \mathbf{G} .

DEFINIZIONE 16.9.1. Diciamo che M è *decomponibile* se l'azione naturale di \mathbf{G} su \mathbb{R}^m è decomponibile.

Sia $\mathbb{R}^m = V_1 \oplus V_2$ una decomposizione di \mathbb{R}^m nella somma diretta di due sottospazi \mathbf{G} -invarianti. Indicheremo con $\mathcal{D}_{V_i}(P)$ e $\mathcal{D}_{V_i}(M)$, per $i = 1, 2$, le distribuzioni involutive su P e su M associate al sottospazio \mathbf{G} -invariante V_i .

LEMMA 16.9.2. *Abbiamo*

$$\omega([v_1^*, w_1^*])v_2 = 0, \quad \omega([v_2^*, w_2^*])v_1 = 0, \quad \forall v_1, w_1 \in V_1, \forall v_2, w_2 \in V_2.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $v_1, w_1 \in V_1, v_2 \in V_2$. Poiché la forma di torsione Θ è nulla, dall'equazione di struttura $D\Theta = \Omega \wedge \theta$ ricaviamo che

$$(16.7) \quad \omega([v_1^*, v_2^*])w_1 + \omega([v_2^*, w_1^*])v_1 + \omega([w_1^*, v_1^*])v_2 = 0.$$

Poiché V_1 e V_2 sono \mathfrak{g} -invarianti, otteniamo $\omega([w_1^*, v_1^*])(V_2) \subset V_1 \cap V_2 = \{0\}$. \square

PROPOSIZIONE 16.9.3. *Sia M_1 una sottovarietà integrale di $\mathcal{D}_{V_1}(M)$, p_0 un punto di M_1 e σ_0 un riferimento in P_{p_0} . Sia \mathbf{G}_1^0 il gruppo di ologonomia ristretta in σ_0 del fibrato $P|_{M_1} \xrightarrow{\pi} M_1$. Risulta allora $a(v) = v$ per ogni $v \in V_2$ e per ogni $a \in \mathbf{G}_1^0$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di Ambrose-Singer l'algebra di Lie di \mathbf{G}_1^0 è generata dagli elementi della forma $\omega([v_1^*, w_1^*]_\sigma)$ al variare di v_1, w_1 in V_1 e di σ nel fibrato di olonomia di M_1 per σ_0 . La tesi è quindi conseguenza del Lemma 16.9.2. \square

PROPOSIZIONE 16.9.4. *Supponiamo inoltre che (M, g) sia una varietà Riemanniana con la connessione di Levi-Civita. Allora*

$$[v_1^*, v_2^*] = 0, \quad \forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $v_2 \in V_2, \sigma \in \mathbf{P}$, e definiamo, per ogni $v \in V_1, A(v) = \omega([v^*, v_2^*]_\sigma)$. Per il Lemma 16.9.2 e la (16.7) è $A(v)w = A(w)v$ per ogni $v, w \in V_1$. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} (A(v)w|z) &= (A(w)v|z) = -(v|A(w)z) = -(v|A(z)w) = (A(z)v|w) = (A(v)z|w) \\ &= -(A(v)w|z), \quad \forall v, w, z \in V_1. \end{aligned}$$

e quindi $A(v)w = 0$ per ogni $v, w \in V_1$. Questo ci dice che $\omega(v_1^*, v_2^*)w = 0$ per ogni $v_1, w \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Con ragionamento analogo dimostriamo che $\omega(v_1^*, v_2^*)w = 0$ per ogni $v_1 \in V_1$ e $v_2, w \in V_2$. Quindi $\omega(v_1^*, v_2^*) = 0$. Poiché la connessione di Levi-Civita è priva di torsione, otteniamo la tesi. \square

Poniamo

$$(16.8) \quad \begin{cases} \mathfrak{g}_1 = \{X \in \mathfrak{g} \mid Xv_2 = 0, \forall v_2 \in V_2\}, \\ \mathfrak{g}_2 = \{X \in \mathfrak{g} \mid Xv_1 = 0, \forall v_1 \in V_1\}. \end{cases}$$

PROPOSIZIONE 16.9.5. (1) *La sottoalgebra \mathfrak{g}_i è generata dagli elementi $[v_i^*, w_i^*]_\sigma$ al variare di v_i, w_i in V_i e di σ in \mathbf{P} .*

(2) *$\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ sono ideali di \mathfrak{g} ed abbiamo la decomposizione*

$$(16.9) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione è una conseguenza immediata del Lemma 16.9.2.

Se $v_1, w_1 \in V_1, v_2, w_2 \in V_2$, abbiamo

$$\begin{aligned} [[v_1^*, w_1^*], [v_2^*, w_2^*]] &= [[[v_1^*, w_1^*], v_2^*], w_2^*] + [v_2^*, [[v_1^*, w_1^*], w_2^*]] \\ &= [[[v_1^*, v_2^*], w_1^*], w_2^*] + [[v_1^*, [w_1^*, v_2^*]], w_2^*] \\ &\quad + [v_2^*, [[v_1^*, w_2^*], w_1^*]] + [v_2^*, [v_1^*, [w_1^*, w_2^*]]] = 0 \end{aligned}$$

e quindi $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = 0$ e $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ sono ideali di \mathfrak{g} .

Per il Teorema di Ambrose-Singer, \mathfrak{g} è generata dagli elementi $[v^*, w^*]_\sigma$ al variare di v, w in \mathbb{R}^m e di σ in \mathbf{P} . Per la Proposizione 16.9.4 è $[v^*, w^*]_\sigma = [v_1^*, w_1^*]_\sigma + [v_2^*, w_2^*]_\sigma$ se $v_1, w_1 \in V_1, v_2, w_2 \in V_2$ e $v = v_1 + v_2, w = w_1 + w_2$. Questo dimostra la (16.9). \square

PROPOSIZIONE 16.9.6. *Se M è connesso e semplicemente connesso, allora \mathbf{G} è il prodotto diretto dei suoi sottogruppi normali*

$$\mathbf{G}_1 = \{a \in \mathbf{G} \mid a(v) = v, \forall v \in V_2\}, \quad \mathbf{G}_2 = \{a \in \mathbf{G} \mid a(v) = v, \forall v \in V_1\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se M è connesso e semplicemente connesso, il gruppo di ologonomia \mathbf{G} coincide con il gruppo d'ologonomia ristretto. La conclusione è quindi conseguenza della proposizione precedente. \square

Dalle proposizioni 16.9.4 e 16.9.5 ricaviamo la

PROPOSIZIONE 16.9.7. *Abbiamo:*

- (1) Per $i = 1, 2$ la distribuzione vettoriale $\mathcal{D}'_{V_i}(P)$ su P generata da $\{X^* \mid X \in \mathfrak{g}_i\} + \{v^* \mid v \in V_i\}$ è involutiva.
- (2) Il gruppo di ologonomia ristretta di una sottovarietà integrale M_i di $\mathcal{D}_{V_i}(M)$ è contenuto in \mathbf{G}_i . \square

Fissiamo un punto p_0 in M e siano M_i ($i = 1, 2$) gli integrali completi delle distribuzioni vettoriali definite dalle sezioni dei fibrati $T_{V_i}M = \{\sigma v \mid \sigma \in P, v \in V_i\}$. Osserviamo che, se $\sigma_0 \in P_0$, allora $\sigma_{i,0} : V_i \ni v \rightarrow \sigma_0 v \in T_{V_i}M$ sono sistemi di riferimento di M_i in p_0 , per $i = 1, 2$. Siano $P_i \xrightarrow{\pi_i} M_i$ i corrispondenti fibrati di ologonomia passanti per il riferimento $\sigma_{i,0}$.

Indichiamo con $\theta_i \in \Omega^1(P_i, V_i)$ la forma canonica e con $\omega_i \in \Omega^1(P_i, \mathfrak{g}_i)$ la forma di Cartan della connessione di Levi-Civita di M_i . Sul prodotto $P_1 \times P_2 \times P$ consideriamo la forma $\eta = (\theta_1 \oplus \theta_2 - \theta, \omega_1 \oplus \omega_2 - \omega) \in \Omega^1(P_1 \times P_2 \times P, \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$.

LEMMA 16.9.8. *ker η è una distribuzione involutiva su $P_1 \times P_2 \times P$.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che $\ker \eta$ è la distribuzione generata dallo spazio vettoriale

$\{(v_1^*, v_2^*, v^*; X_1^*, X_2^*, X^*) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v = v_1 + v_2, X_1 \in \mathfrak{g}_1, X_2 \in \mathfrak{g}_2, X = X_1 + X_2\}$ e quindi è involutiva per le proposizioni 16.9.4 e 16.9.5. \square

Sia $\varpi : P_1 \times P_2 \times P \ni (\sigma_1, \sigma_2, \sigma) \rightarrow (\pi_1(\sigma_1), \pi_2(\sigma_2), \pi(\sigma)) \in M_1 \times M_2 \times M$ la proiezione naturale. Sia Q l'integrale totale di $\ker \eta$ per il punto $(\sigma_{1,0}, \sigma_{2,0}, \sigma_0)$.

LEMMA 16.9.9. *La proiezione $N = \varpi(Q)$ è una sottovarietà differenziabile di $M_1 \times M_2 \times M$. Le proiezioni $N \ni (p_1, p_2, p) \rightarrow (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ ed $N \ni (p_1, p_2, p) \rightarrow p \in M$ sono diffeomorfismi locali.* \square

COROLLARIO 16.9.10. *Possiamo allora trovare intorno aperti U_1, U_2, U di p_0 in M_1, M_2, M tale che vi sia un'isometria $f : U_1 \times U_2 \rightarrow M$ tale che $f(p, p_0) = p$ per ogni $p \in U_1$ ed $f(p_0, p) = p$ per ogni $p \in U_2$.* \square

TEOREMA 16.9.11. *Se M è connessa, semplicemente connessa e completa, allora vi è una ed una sola isometria $f : M_1 \times M_2 \rightarrow M$ tale che $f(p, p_0) = p$ per ogni $p \in M_1$ ed $f(p_0, p) = p$ per ogni $p \in M_2$. Le sottovarietà affini M_1 ed M_2 di M sono anch'esse connesse, semplicemente connesse e complete.*

DIMOSTRAZIONE. Si costruisca Q come sopra, sostituendo ad M_1 e ad M_2 i loro rivestimenti universali \tilde{M}_1, \tilde{M}_2 . La costruzione ci dà rivestimenti connessi $N \rightarrow \tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$ ed $N \rightarrow M$, che sono diffeomorfismi perché $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$ ed M sono semplicemente connessi. Otteniamo quindi un diffeomorfismo di $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$ su M con grafico N . Poiché M_1 ed M_2 sono le immagini di \tilde{M}_1, \tilde{M}_2 , ne segue che $\tilde{M}_1 = M_1, \tilde{M}_2 = M_2$. \square

Il gruppo di ologonia \mathbf{G} di (M, g) è compatto e quindi la sua rappresentazione su \mathbb{R}^m è completamente decomponibile. Otteniamo quindi, costruendo le sottovarietà affini M_0, M_1, \dots, M_k corrispondenti alle componenti V_0 su cui \mathbf{G} opera banalmente ed alle rappresentazioni irriducibili V_1, \dots, V_k , il

TEOREMA 16.9.12 (de Rham). *Ogni varietà Riemanniana (M, g) connessa, semplicemente connessa e completa è decomponibile in un prodotto $(M_0, g_0) \times (M_1, g_1) \times \dots \times (M_k, g_k)$ di una varietà Euclidea (M_0, g_0) e di k varietà Riemanniane irriducibili $(M_1, g_1), \dots, (M_k, g_k)$. \square*

Immersioni, isometrie, campi di Killing

17.1. Immersioni pseudo-Riemanniane

17.1.1. Sottofibrati con sottogruppo strutturale riduttivo e connessione indotta. Siano $\xi_G = (P_G \xrightarrow{\pi_G} M)$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} e $\xi_H = (P_H \xrightarrow{\pi_H} M)$ un suo sottofibrato principale, con gruppo strutturale $\mathbf{H} < \mathbf{G}$. Indichiamo con \mathfrak{h} e \mathfrak{g} le rispettive algebre di Lie.

DEFINIZIONE 17.1.1. Diciamo che \mathbf{H} è *riduttivo in* \mathfrak{g} se \mathfrak{h} ammette in \mathfrak{g} un complemento $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante, se cioè possiamo trovare un sottospazio vettoriale \mathfrak{m} di \mathfrak{g} tale che

$$(17.1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{Ad}(h)(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} \quad \forall h \in \mathbf{H}.$$

Indichiamo con $\text{pr}_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ la proiezione su \mathfrak{h} associata alla decomposizione (17.1). Poiché $\text{pr}_{\mathfrak{h}}$ commuta con $\text{Ad}(h)$ per ogni $h \in \mathbf{H}$, vale la

PROPOSIZIONE 17.1.2. Se $\omega_{\mathfrak{g}} \in \Omega^1(P_G, \mathfrak{g})$ è la forma di Cartan di una connessione principale su ξ_G , allora $\omega_{\mathfrak{h}} = \text{pr}_{\mathfrak{h}} \circ \iota^* \omega_{\mathfrak{g}} \in \Omega^1(P_H, \mathfrak{h})$ è la forma di Cartan di una connessione su ξ_H . \square

OSSERVAZIONE 17.1.3. I sottogruppi compatti e i sottogruppi semisemplici sono riduttivi. Se \mathbf{H} è compatto o semisemplice, possiamo definire su \mathfrak{g} una forma bilineare simmetrica β invariante, tale cioè che

$$\beta([X_1, X_2], X_3) + \beta(X_2, [X_1, X_3]) = 0, \quad \forall X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{g},$$

e la cui restrizione su \mathfrak{h} sia non degenera. Possiamo allora scegliere \mathfrak{m} come l'ortogonale di \mathfrak{h} rispetto alla forma β .

17.1.2. Una decomposizione canonica per i gruppi ortogonali. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e g una forma bilineare simmetrica non degenera su V . Fissiamo una decomposizione ortogonale

$$(17.2) \quad V = U \oplus W, \quad U \perp W,$$

con $\dim U = m > 0$, $\dim W = k > 0$, $m + k = n$. I due sottospazi U e W sono anisotropi. Consideriamo i gruppi

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_g(V) &= \{a \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V) \mid g(a(v), a(v)) = g(v, v), \quad \forall v \in V\}, \\ \mathbf{O}_g(U) &= \{a \in \mathbf{O}_g(V) \mid a(w) = w, \quad \forall w \in W\}, \\ \mathbf{O}_g(W) &= \{a \in \mathbf{O}_g(V) \mid a(u) = u, \quad \forall u \in U\}, \\ \mathbf{O}_g(U, W) &= \{a \in \mathbf{O}_g(V) \mid a(U) = U, \quad a(W) = W\} \simeq \mathbf{O}_g(U) \times \mathbf{O}_g(W). \end{aligned}$$

Ciascuno dei sottogruppi $\mathbf{O}_g(U)$, $\mathbf{O}_g(W)$ ed $\mathbf{O}_g(U, W)$ è riduttivo nell'algebra di Lie $\mathfrak{so}(V)$ di $\mathbf{O}_g(V)$. Indichiamo con $\mathfrak{so}(U)$, $\mathfrak{so}(W)$, $\mathfrak{so}(U, W)$ le loro algebre di Lie. La forma

$$(17.3) \quad \beta(X, Y) = \text{tr}(XY) \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{so}(V)$$

è non degenera ed invariante su $\mathfrak{so}(V)$ e le sottoalgebre $\mathfrak{so}(U)$, $\mathfrak{so}(W)$, $\mathfrak{so}(U, W)$ sono β -anisotrope. Abbiamo perciò decomposizioni β -ortogonali

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(V) &= \mathfrak{so}(U) \oplus \mathfrak{m}_U, & \text{con } \text{Ad}(\mathbf{O}_g(U))(\mathfrak{m}_U) &= \mathfrak{m}_U, \\ \mathfrak{so}(V) &= \mathfrak{so}(W) \oplus \mathfrak{m}_W, & \text{con } \text{Ad}(\mathbf{O}_g(W))(\mathfrak{m}_W) &= \mathfrak{m}_W, \\ \mathfrak{so}(V) &= \mathfrak{so}(U, W) \oplus \mathfrak{m}_{U,W}, & \text{con } \text{Ad}(\mathbf{O}_g(U, W))(\mathfrak{m}_{U,W}) &= \mathfrak{m}_{U,W}, \end{aligned}$$

con $\mathfrak{m}_{U,W} = \mathfrak{m}_U \cap \mathfrak{m}_W$, poiché $\mathfrak{so}(U, W) = \mathfrak{so}(U) \oplus \mathfrak{so}(W)$.

Possiamo dare una rappresentazione matriciale di questi oggetti scegliendo una base e_1, \dots, e_n di V per cui e_1, \dots, e_m sia una base di U ed e_{m+1}, \dots, e_n una base di W . In questa base

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} g_U & 0 \\ 0 & g_W \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{so}(V) &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{U,U} & X_{U,W} \\ X_{W,U} & X_{W,W} \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} {}^t X_{U,U} g_U + g_U X_{U,U} = 0, \\ {}^t X_{W,W} g_W + g_W X_{W,W} = 0, \\ {}^t X_{W,U} g_W + g_U X_{U,W} = 0 \end{array} \right. \right\}, \\ \mathfrak{so}(U) &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{U,U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left| {}^t X_{U,U} g_U + g_U X_{U,U} = 0 \right. \right\}, \\ \mathfrak{m}_U &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_{U,W} \\ X_{W,U} & X_{W,W} \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(V) \right\}, \\ \mathfrak{so}(W) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_{W,W} \end{pmatrix} \left| {}^t X_{W,W} g_W + g_W X_{W,W} = 0 \right. \right\}, \\ \mathfrak{m}_W &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{U,U} & X_{U,W} \\ X_{W,U} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(V) \right\}, \\ \mathfrak{so}(U, W) &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{U,U} & 0 \\ 0 & X_{W,W} \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(V) \right\}, \\ \mathfrak{m}_{U,W} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_{U,W} \\ X_{W,U} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(V) \right\}. \end{aligned}$$

17.1.3. La nozione di immersione pseudo-Riemanniana. Siano (M, g) ed (N, h) due varietà pseudo-Riemanniane.

DEFINIZIONE 17.1.4. Un'immersione pseudo-Riemanniana è un'applicazione differenziabile $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ per cui sia $g = f^*h$, cioè

$$(17.4) \quad g_p(X, Y) = h(f_*(X_p), f_*(Y_p)), \quad \forall p \in M, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Poiché g è non degenera, abbiamo

PROPOSIZIONE 17.1.5. Ogni immersione pseudo-Riemanniana è un'immersione differenziabile. \square

OSSERVAZIONE 17.1.6. Viceversa, se (N, h) è una varietà pseudo-Riemanniana, ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ un'immersione differenziabile, condizione necessaria e sufficiente affinché $g = f^*h$ definisca una struttura pseudo-Riemanniana su M è che f_*T_pM sia anisotropo in $(T_{f(p)}N, h_{f(p)})$ per ogni $p \in M$.

17.1.4. Fibrati e connessioni associati ad un'immersione sub-Riemanniana.

Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ un'immersione sub-Riemanniana. Indichiamo con f^*TN il pullback su M del fibrato tangente di N :

$$f^*TN = \{(p, w) \in M \times TN \mid f(p) = \pi_N(w)\}.$$

DEFINIZIONE 17.1.7. Il fibrato normale dell'immersione pseudo-Riemanniana f è il sottofibrato vettoriale di f^*TN

$$(17.5) \quad NM = \{(p, w) \in f^*TN \mid w \perp T_pM\}.$$

Supponiamo che g, h abbiano in ogni punto segnatura $(p_g, q_g), (p_h, q_h)$ con $p_g \leq p_h, q_g \leq q_h, p_g + q_g = m, p_h + q_h = n = m + k$ e fissiamo una matrice simmetrica

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & \\ & b_2 \end{pmatrix}$$

con segnatura (p_h, q_h) , con b_1 simmetrica con segnatura (p_g, q_g) , b_2 simmetrica con segnatura $(p_h - p_g, q_h - q_g)$. Introduciamo i fibrati principali con spazi totali

$$\mathbf{O}_b(N) = \bigcup_{q \in N} \{\sigma \in \mathcal{H}om_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, T_qN) \mid {}^t v b v = h(\sigma(v), \sigma(v)), \forall v \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\mathbf{O}_b(M) = \bigcup_{p \in M} \{\sigma \in \mathcal{H}om_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, T_{f(p)}N) \mid {}^t v b v = h(\sigma(v), \sigma(v)), \forall v \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\mathbf{O}_{b_1}(M) = \bigcup_{p \in M} \{\sigma \in \mathcal{H}om_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, T_pM) \mid {}^t v b_1 v = g(\sigma(v), \sigma(v)), \forall v \in \mathbb{R}^m\},$$

$$\mathbf{O}_{b_2}(M) = \bigcup_{p \in M} \{\sigma \in \mathcal{H}om_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^k, N_pM) \mid {}^t v b_2 v = h(\sigma(v), \sigma(v)), \forall v \in \mathbb{R}^k\},$$

$$\mathbf{O}_b(M, N) = \bigcup_{p \in M} \{\sigma \in \mathbf{O}_{b_p}(M) \mid \sigma(e_i) \in f_*T_pM, 1 \leq i \leq m\},$$

ove abbiamo indicato con e_1, \dots, e_n i vettori della base canonica di \mathbb{R}^n .

Utilizzeremo la decomposizione canonica e le notazioni introdotte in §17.1.2, indicheremo con V la fibra tipica di TN , con U quella di TM e con W quella di NM . La connessione di Levi-Civita di (N, h) induce connessioni principali sui fibrati principali sopra descritti. Indicheremo con ω la forma di Cartan su $\mathbf{O}_b(N)$ e con $\omega^t, \omega^v, \omega^{t,v}$ le connessioni affini sui fibrati $\mathbf{O}_{b_1}(M), \mathbf{O}_{b_2}(M), \mathbf{O}_b(M, N)$, rispettivamente. Su $\mathbf{O}_b(M)$ abbiamo il pullback della connessione di Levi-Civita su N .

17.1.5. La seconda forma fondamentale.

NOTAZIONE 17.1.8. Useremo le seguenti notazioni:

- pr_ν e pr_τ sono le proiezioni ortogonali di f^*TN su NM e TM , rispettivamente,
- ∇^τ indica la differenziazione covariante corrispondente alla connessione di Levi Civita su (M, g) ;
- D indica la differenziazione covariante corrispondente alla connessione di Levi-Civita su (N, h) ;
- ∇^f è la derivazione covariante su f^*TS associata al pullback della connessione di Levi-Civita su (N, h) ;
- ∇^ν è la derivazione covariante sul fibrato NM definita da $\nabla_X^\nu Y = \text{pr}_\nu \nabla_X^f Y$ per $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \Gamma(M, NM)$;
- R, R^f, R^ν sono i tensori di curvatura corrispondenti alla connessione di Levi-Civita di (M, g) , al pullback di quella di (S, h) , alla connessione lineare sul fibrato normale, rispettivamente.

LEMMA 17.1.9. Se $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \Gamma(M, NM)$, allora

$$(17.6) \quad \nabla_{X_1}^\tau X_2 = \text{pr}_\tau(\nabla_{X_1}^f X_2) \quad e \quad \nabla_X^\nu Y = \text{pr}_\nu(\nabla_X^f Y).$$

DIMOSTRAZIONE. Si verifica facilmente che la $\nabla_{X_1}' X_2 = \text{pr}_\tau(\nabla_{X_1}^f X_2)$, per $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, definisce la derivazione covariante di una connessione affine simmetrica su M . Per dimostrare che $\nabla' = \nabla^\tau$, che cioè ∇' coincide con la connessione di Levi-Civita di (M, g) , è sufficiente verificare che è pseudo-metrica. Per semplicità, possiamo supporre che $M \subset N$, identificando così TM ad un sottospazio di TN . Abbiamo allora $\nabla_X^f Y = D_X Y$ se $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed Y un campo di vettori lungo M . È quindi

$$\begin{aligned} (\nabla_X' g)(X_1, X_2) &= Xg(X_1, X_2) - g(\nabla_X' X_1, X_2) - g(X_1, \nabla_X' X_2) \\ &= Xh(X_1, X_2) - h(\nabla_X' X_1, X_2) - h(X_1, \nabla_X' X_2) \\ &= Xh(X_1, X_2) - h(D_X X_1, X_2) - h(X_1, D_X X_2) = 0 \end{aligned}$$

perché D è una connessione pseudo-metrica su (N, h) . \square

LEMMA 17.1.10. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora

$$(17.7) \quad \nabla_X^f Y = \nabla_Y^f X + [X, Y].$$

DIMOSTRAZIONE. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ sono f -correlati a campi $U, V \in \mathfrak{X}(S)$, Allora $\nabla_X Y, \nabla_Y X, [X, Y]$ sono f -correlati a $D_U V, D_V U, [U, V]$. La (17.7) è conseguenza del fatto che la connessione di Levi-Civita su S sia simmetrica. Utilizzando la partizione dell'unità e il fatto che (17.7) ha natura locale, possiamo ricondurre la dimostrazione al caso di coppie di campi di vettori che siano f -correlati a campi di vettori su S . \square

Definiamo

$$(17.8) \quad \mathbb{I}(X, Y) = \text{pr}_N(\nabla_X^f Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

PROPOSIZIONE 17.1.11. \mathbb{I} è un tensore simmetrico a valori nel fibrato normale NM .

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza del Lemma 17.1.10:

$$\mathbb{I}(X, Y) = \text{pr}_v(\nabla_X^f Y) = \text{pr}_v(\nabla_Y^f X + [X, Y]) = \text{pr}_v(\nabla_Y^f X) = \mathbb{I}(Y, X),$$

perché $\text{pr}_v([X, Y]) = 0$, per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. \square

DEFINIZIONE 17.1.12. Il tensore $\mathbb{I} \in \text{Simm}^2(M, NM)$ si dice *la seconda forma fondamentale* dell'immersione pseudo-Riemanniana f .

Poiché f è un'isometria pseudo-Riemanniana, abbiamo

$$(17.9) \quad \nabla_X Y = \text{pr}_\tau(\nabla_X^f Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

e vale quindi la

PROPOSIZIONE 17.1.13 (formula di Gauss). Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora

$$(17.10) \quad \nabla_X^f Y = \nabla_X Y + \mathbb{I}(X, Y). \quad \square$$

Utilizzando i tensori g ed h , possiamo ricavare da \mathbb{I} un nuovo tensore:

DEFINIZIONE 17.1.14. Sia $B \in \underline{T}^{1,1}(M, N^*M)$ il tensore definito da

$$(17.11) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, NM) \ni (X, V) \rightarrow B_X V \in \mathfrak{X}(M), \\ g(B_X V, Y) = -h(\mathbb{I}(X, Y), V), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall V \in \Gamma(M, NM). \end{cases}$$

Esso serve ad esprimere la componente tangenziale della derivata covariante di un campo di vettori normali.

PROPOSIZIONE 17.1.15 (equazione di Weingarten). Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $V \in \Gamma(M, NM)$, allora

$$(17.12) \quad \nabla_X^f V = B_X V + \text{pr}_v(\nabla_X^f V).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $V \in \Gamma(M, NM)$. Abbiamo

$$g(\nabla_X^f V, Y) = h(\nabla_X^f V, Y) = X(h(V, Y)) - h(V, \nabla_X^f Y) = -h(V, \mathbb{I}(X, Y)).$$

Quindi $B_X V$ è la componente in TM di $\nabla_X^f V$ ed otteniamo la (17.12). \square

Siano $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M)$. Abbiamo

$$\nabla_{X_1}^f \nabla_{X_2}^f X_3 = \nabla_{X_1}^f (\nabla_{X_2} X_3 + \mathbb{I}(X_2, X_3)) = \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3 + \mathbb{I}(X_1, \nabla_{X_2} X_3) + \nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3)).$$

Calcoliamo la componente in TM di $\nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3))$. Per ogni $X_4 \in \mathfrak{X}(M)$ otteniamo

$$\begin{aligned} h(\nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3)), X_4) &= X_1 h(\mathbb{I}(X_2, X_3), X_4) - h(\mathbb{I}(X_2, X_3), \nabla_{X_1}^f X_4) \\ &= -h(\mathbb{I}(X_2, X_3), \mathbb{I}(X_1, X_4)). \end{aligned}$$

Risulta perciò

$$(17.13) \quad \left\{ \begin{aligned} R^f(X_1, X_2)X_3 &= \nabla_{X_1}^f \nabla_{X_2}^f X_3 - \nabla_{X_2}^f \nabla_{X_1}^f X_3 - \nabla_{[X_1, X_2]}^f X_3 \\ &= \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3 - \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_3 - \nabla_{[X_1, X_2]} X_3 \\ &\quad + \mathbb{I}(X_1, \nabla_{X_2} X_3) - \mathbb{I}(X_2, \nabla_{X_1} X_3) - \mathbb{I}([X_1, X_2], X_3) \\ &\quad + \nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3)) - \nabla_{X_2}^f (\mathbb{I}(X_1, X_3)). \end{aligned} \right.$$

Se $X_4 \in \mathfrak{X}(M)$ abbiamo allora

$$h(R^f(X_1, X_2)X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4) - h(\mathbb{I}(X_2, X_3), \mathbb{I}(X_1, X_4)) \\ + h(\mathbb{I}(X_1, X_3), \mathbb{I}(X_2, X_4)).$$

Ricordiamo la notazione

$$R^f(X_1, X_2, X_3, X_4) = h(R^f(X_1, X_2)X_3, X_4), \quad R(X_3, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4).$$

Abbiamo ottenuto

PROPOSIZIONE 17.1.16 (Equazione di Gauss). *Se $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M)$, allora*

$$(17.14) \quad \left\{ \begin{aligned} R^f(X_1, X_2, X_3, X_4) &= R(X_1, X_2, X_3, X_4) \\ &\quad + h(\mathbb{I}(X_1, X_3), \mathbb{I}(X_2, X_4)) - h(\mathbb{I}(X_1, X_4), \mathbb{I}(X_2, X_3)). \end{aligned} \right.$$

Per le formule per la derivazione covariante sui fibrati vettoriali sugli spazi affini del §10.13 del Capitolo X, abbiamo:

$$\nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3)) = (\nabla_{X_1}^f \mathbb{I})(X_2, X_3) - \mathbb{I}(\nabla_{X_1} X_2, X_3) - \mathbb{I}(X_2, \nabla_{X_1} X_3).$$

Possiamo quindi riscrivere (17.13) nella forma

$$(17.15) \quad \left\{ \begin{aligned} R^f(X_1, X_2)X_3 &= R(X_1, X_2)X_3 + (\nabla_{X_1}^f \mathbb{I})(X_2, X_3) + \mathbb{I}(\nabla_{X_1} X_2, X_3) \\ &\quad - (\nabla_{X_2}^f \mathbb{I})(X_1, X_3) - \mathbb{I}(\nabla_{X_2} X_1, X_3) - \mathbb{I}([X_1, X_2], X_3) \\ &= R(X_1, X_2)X_3 + (\nabla_{X_1}^f \mathbb{I})(X_2, X_3) - (\nabla_{X_2}^f \mathbb{I})(X_1, X_3). \end{aligned} \right.$$

Da questa otteniamo

PROPOSIZIONE 17.1.17 (Equazione di Codazzi-Mainardi). *Se $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M)$ ed $Y \in \Gamma(M, NM)$, allora*

$$(17.16) \quad R^f(X_1, X_2, X_2, Y) = h((\nabla_{X_1}^f \mathbb{I})(X_2, X_3), Y) - h((\nabla_{X_2}^f \mathbb{I})(X_1, X_3), Y).$$

Siano ora $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ ed $Y_1, Y_2 \in \Gamma(M, NM)$. Abbiamo

$$h(\nabla_{X_1}^v \nabla_{X_2}^v Y_1, Y_2) = h(\nabla_{X_1}^f (\nabla_{X_2}^f Y_1 - B_{X_2} Y_1), Y_2) \\ = h(\nabla_{X_1}^f \nabla_{X_2}^f Y_1, Y_2) - h(\mathbb{I}(X_1, B_{X_2} Y_1), Y_2) \\ = h(\nabla_{X_1}^f \nabla_{X_2}^f Y_1, Y_2) + h(B_{X_1} Y_2, B_{X_2} Y_1).$$

Da questa uguaglianza ricaviamo

PROPOSIZIONE 17.1.18 (Equazione di Ricci). *Se* $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $Y_1, Y_2 \in \Gamma(M, NM)$, allora

$$(17.17) \quad \begin{cases} h(R^\nu(X_1, X_2)Y_1, Y_2) = h(R^f(X_1, X_2)Y_1, Y_2) \\ \quad \quad \quad - h(B_{X_1}Y_1, B_{X_2}Y_2) + h(B_{X_1}Y_2, B_{X_2}Y_1). \end{cases}$$

17.2. Proprietà algebriche del tensore di curvatura

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n .

DEFINIZIONE 17.2.1. Un *tensore algebrico di curvatura* è una forma bilineare simmetrica

$$(17.18) \quad R : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \rightarrow \mathbb{R}$$

per cui valga l'*identità algebrica di Bianchi*:

$$(17.19) \quad R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) + R(v_1, v_4, v_2, v_3) = 0 \\ \forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V.$$

Abbiamo posto qui

$$(17.20) \quad R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1 \wedge v_2, v_3 \wedge v_4) \quad \text{per } v_1, v_2, v_3, v_4 \in V.$$

In modo equivalente, possiamo dire che R è una forma quadri-lineare che soddisfa le proprietà :

$$(i) \quad R(v_2, v_1, v_3, v_4) = -R(v_1, v_2, v_3, v_4) \\ (ii) \quad R(v_1, v_2, v_4, v_3) = -R(v_1, v_2, v_3, v_4) \\ (iii) \quad R(v_3, v_4, v_1, v_2) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) \\ (iv) \quad R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) + R(v_1, v_4, v_2, v_3) = 0 \\ \forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V.$$

Notiamo che (i) e (iii) implicano (ii) e che (iii) è una conseguenza di (i), (ii), (iv).

DEFINIZIONE 17.2.2. L'insieme $\mathfrak{R}(V)$ dei tensori di curvatura su V è un sottospazio vettoriale dello spazio $T^{[0,4]}V$ dei tensori 0-covarianti e 4-contovarianti su V .

Vale il

LEMMA 17.2.3. *Siano* $R, R' \in \mathfrak{R}(V)$. Allora

$$(17.21) \quad R(v_1, v_2, v_1, v_2) = R'(v_1, v_2, v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \implies R = R'.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare il lemma nel caso sia $R' = 0$. Utilizziamo le formule di polarizzazione per forme bilineari simmetriche: fissato $v_0 \in V$, la forma bilineare simmetrica $V \times V \ni (u, v) \rightarrow R(u, v_0, v, v_0) \in \mathbb{R}$ è nulla in quanto è nulla la forma quadratica associata.

Quindi, per ogni coppia $v_1, v_3 \in V$ anche la forma bilineare simmetrica $V \times V \ni (u, v) \rightarrow R(v_1, u, v_3, v) + R(v_3, u, v_1, v) \in \mathbb{R}$ è nulla in quanto è nulla la forma quadratica ad essa associata.

Applicando le proprietà (iii) e (ii) otteniamo:

$$0 = R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_4, v_3, v_2) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) - R(v_1, v_4, v_2, v_3).$$

Quindi, per ogni $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ abbiamo:

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1, v_4, v_2, v_3) = R(v_1, v_3, v_4, v_2)$$

da cui:

$$3R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) + R(v_1, v_4, v_2, v_3) = 0.$$

La dimostrazione è completa. \square

Fissiamo su V un prodotto scalare $(\cdot | \cdot)$. Esso determina univocamente un prodotto scalare su $\Lambda^2 V$ tale che, per ogni base ortonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V , la $\{e_i \wedge e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ sia una base ortonormale in $\Lambda^2 V$. Per la norma associata risulta

$$(17.22) \quad |v_1 \wedge v_2|^2 = |v_1|^2 |v_2|^2 - (v_1 | v_2)^2, \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

OSSERVAZIONE 17.2.4. Il secondo membro della (17.22) è il quadrato dell'area del parallelogramma di lati v_1, v_2 . Infatti, l'altezza relativa alla base v_1 è $\left| v_2 - \frac{(v_1 | v_2)}{|v_1|^2} v_1 \right|$ e quindi il quadrato dell'area è

$$|v_1|^2 \cdot \left| v_2 - \frac{(v_1 | v_2)}{|v_1|^2} v_1 \right|^2 = |v_1|^2 |v_2|^2 - (v_1 | v_2)^2.$$

Per il prodotto scalare vale la formula

$$(17.23) \quad (v_1 \wedge v_2 | v_3 \wedge v_4) = (v_1 | v_3)(v_2 | v_4) - (v_1 | v_4)(v_2 | v_3), \quad \forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V.$$

LEMMA 17.2.5. *Il prodotto scalare (17.23) è un tensore algebrico di curvatura.*

DIMOSTRAZIONE. Occorre verificare che il prodotto scalare (17.23) su $\Lambda^2 V$ verifichi l'identità di Bianchi. Abbiamo

$$\begin{aligned} (v_1 \wedge v_2 | v_3 \wedge v_4) &= (v_1 | v_3)(v_2 | v_4) - (v_1 | v_4)(v_2 | v_3), \\ (v_1 \wedge v_3 | v_4 \wedge v_2) &= (v_1 | v_4)(v_3 | v_2) - (v_1 | v_2)(v_3 | v_4), \\ (v_1 \wedge v_4 | v_2 \wedge v_3) &= (v_1 | v_2)(v_4 | v_3) - (v_1 | v_3)(v_4 | v_2) \end{aligned}$$

e sommando membro a membro otteniamo la (17.19). \square

Fissato un prodotto scalare su V , possiamo associare ad ogni tensore algebrico di curvatura R una funzione reale definita sui 2-piani α di V , ponendo

$$(17.24) \quad K^R(\alpha) = \frac{R(v_1, v_2, v_2, v_1)}{(v_1 | v_1)(v_2 | v_2) - (v_1 | v_2)^2} \quad \text{se } \langle v_1, v_2 \rangle = \alpha.$$

La (17.24) si semplifica nella

$$(17.25) \quad K^R(\alpha) = R(v_1, v_2, v_2, v_1) \quad \text{se } v_1, v_2 \text{ è una base ortonormale di } \alpha.$$

DEFINIZIONE 17.2.6. La $K^R(\alpha)$, definita dalla (17.24), si dice la *curvatura sezionale*.

Per il Lemma 17.2.3 la curvatura sezionale determina completamente il relativo tensore di curvatura.

La curvatura sezionale è costante ed uguale a -1 per il prodotto scalare di $\Lambda^2 V$. Per il Lemma 17.2.3 abbiamo

PROPOSIZIONE 17.2.7. *Una forma algebrica di curvatura che abbia curvatura sezionale costante è un multiplo del prodotto scalare su $\Lambda^2 V$.* \square

DEFINIZIONE 17.2.8. La *contrazione di Ricci* è l'applicazione $\mathbf{O}(V)$ -equivariante

$$(17.26) \quad \mathcal{R}ic : \mathfrak{R}(V) \ni R \longrightarrow S_R \in S^2(V), \quad \text{con } S_R(v, w) = \text{tr } R(v, \cdot, w, \cdot),$$

ove la traccia si calcola, a partire da una qualsiasi base ortonormale e_1, \dots, e_n di V mediante

$$\text{tr } R(v, \cdot, w, \cdot) = \sum_{i=1}^n R(v, e_i, w, e_i).$$

La forma S_R si dice il *tensore di Ricci* associato al tensore di curvatura R .

OSSERVAZIONE 17.2.9. Fissato un vettore $v \in V$, con $(v|v) = 1$, possiamo determinare vettori v_2, \dots, v_n che formino con $v_1 = v$ una base ortonormale. Detto α_i , per $i = 2, \dots, n$ il piano generato da v e v_i , abbiamo allora:

$$(17.27) \quad S_R(v, v) = \sum_{i=2}^n K(\alpha_i).$$

DEFINIZIONE 17.2.10. Chiamiamo *curvatura scalare* di $R \in \mathfrak{R}(V)$ la traccia del suo tensore di Ricci

$$(17.28) \quad s_R = \text{tr}(\mathcal{R}ic(R)) = \sum_{i,j=1}^n R(e_i, e_j, e_i, e_j),$$

ove e_1, \dots, e_n è una qualsiasi base ortonormale di V .

OSSERVAZIONE 17.2.11. La curvatura scalare è il doppio della traccia di R considerato come una forma bilineare simmetrica su $\Lambda^2 V$.

DEFINIZIONE 17.2.12 (Prodotto di Kulkarni-Nomizu). Il *prodotto di Kulkarni-Nomizu* $s_1 \otimes s_2$ di due forme bilineari simmetriche s_1, s_2 su V è il tensore 4-contravariante definito da

$$(17.29) \quad \begin{aligned} s_1 \otimes s_2(v_1, v_2, w_1, w_2) &= \sum_{h,k \in S_2} \varepsilon(h)\varepsilon(k) s_1(v_{h_1}, w_{k_1}) s_2(v_{h_2}, w_{k_2}) \\ &= s_1(v_1, w_1) s_2(v_2, w_2) + s_1(v_2, w_2) s_1(v_1, w_1) \\ &\quad - s_1(v_1, w_2) s_2(v_2, w_1) - s_1(v_2, w_1) s_2(v_1, w_2). \end{aligned}$$

LEMMA 17.2.13. *Il prodotto $s_1 \otimes s_2$ di due forme $s_1, s_2 \in S^2(V)$ è un tensore algebrico di curvatura.*

DIMOSTRAZIONE. Si verifica con calcolo diretto che $s_1 \otimes s_2$ soddisfa le (i), (ii), (iii), (iv) della Definizione 17.2.1. \square

OSSERVAZIONE 17.2.14. Se indichiamo con g il prodotto scalare di V , e con G il suo corrispondente su $\Lambda^2 V$, abbiamo

$$G = \frac{1}{2} g \otimes g.$$

LEMMA 17.2.15. *Sia s una forma bilineare simmetrica su V . Allora*

$$(17.30) \quad \mathcal{R}ic(s \otimes g) = (n-2)s + \text{tr}(s) \cdot g.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia e_1, \dots, e_n una base ortonormale di V . Allora :

$$\begin{aligned} S_{s \otimes g}(v_1, v_2) &= \sum_{i=1}^n (s \otimes g)(v_1, e_i, v_2, e_i) = \sum_{i=1}^n (s(v_1, v_2)g(e_i, e_i) + s(e_i, e_i)g(v_1, v_2) \\ &\quad - s(v_1, e_i)g(v_2, e_i) - s(v_2, e_i)g(v_1, e_i)) \\ &= n s(v_1, v_2) + \text{tr}(s)g(v_1, v_2) - s(v_1, v_2) - s(v_2, v_1) \\ &= (n-2)s(v_1, v_2) + \text{tr}(s)g(v_1, v_2). \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 17.2.16. In particolare,

$$(17.31) \quad \mathcal{R}ic(g \otimes g) = 2(n-1)g.$$

Se $R \in \mathfrak{R}(V)$ ed S_R il suo tensore di Ricci, abbiamo

$$\mathcal{R}ic(R - aS_R \otimes g + b g \otimes g) = (1 - a(n-2))S_R + (2b(n-1) - aS_R)g.$$

Se $n \geq 3$, possiamo porre $a = (n-2)^{-1}$ e $b = S_R \frac{1}{2(n-1)(n-2)}$. Otteniamo così un tensore di curvatura

$$(17.32) \quad W_R = R - \frac{1}{n-2}S_R \otimes g + \frac{1}{2(n-1)(n-2)}S_R \cdot g \otimes g \in \ker \mathcal{R}ic.$$

DEFINIZIONE 17.2.17. Si chiamano *tensori di Weyl* i tensori di curvatura W che hanno contrazione di Ricci nulla. Il tensore W_R di (17.32) si dice la *parte di Weyl* di R .

La differenza $z_R = S_R - \frac{1}{n}S_R \cdot g$ si dice il *tensore di Ricci a traccia nulla* di R .

Abbiamo

$$(17.33) \quad R = \frac{-1}{2(n-1)(n-2)}S_R \cdot g \otimes g + \frac{1}{n-2}S_R \otimes g + W_R$$

$$(17.34) \quad R = \frac{1}{2n(n-1)}S_R \cdot g \otimes g + \frac{1}{n-2}z_R \otimes g + W_R$$

La (17.34) è la *decomposizione irriducibile del tensore algebrico di curvatura*.

TEOREMA 17.2.18 (decomposizione algebrica del tensore di curvatura). *Sia R un tensore algebrico di curvatura sullo spazio vettoriale reale V , di dimensione $n > 2$. Sono allora univocamente determinati: un numero reale s (curvatura scalare), una forma bilineare simmetrica S_R (curvatura di Ricci), una forma bilineare simmetrica con traccia nulla z_R , e una forma di curvatura W (la curvatura di Weyl) con $S_W = 0$ tali che valgono le decomposizioni (17.33), (17.34).*

Se $n = 2$, abbiamo $R = \frac{1}{2} \cdot s \cdot g \otimes g$. Se $n = 3$, allora $W = 0$.

17.3. La curvatura sezionale

Sia (M, g) una varietà Riemanniana di dimensione $n \geq 2$. Definiamo il *tensore di curvatura* su M mediante :

$$(17.35) \quad \begin{aligned} R(X_1, X_2, X_3, X_4) &= g(R(X_3, X_4)X_1, X_2), \\ &\forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

PROPOSIZIONE 17.3.1. *Il tensore di curvatura definisce in ogni punto di M un tensore algebrico di curvatura.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo facilmente

$$R(X_1, X_2, X_4, X_4) = -R(X_1, X_2, X_3, X_4).$$

Osserviamo poi che, essendo nulla la torsione della connessione di Levi-Civita :

$$\begin{aligned} & R(X_1, X_2)X_3 + R(X_2, X_3)X_1 + R(X_3, X_1)X_2 \\ &= \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3 - \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_3 - \nabla_{[X_1, X_2]} X_3 \\ &+ \nabla_{X_2} \nabla_{X_3} X_1 - \nabla_{X_3} \nabla_{X_2} X_1 - \nabla_{[X_2, X_3]} X_1 \\ &+ \nabla_{X_3} \nabla_{X_1} X_2 - \nabla_{X_1} \nabla_{X_3} X_2 - \nabla_{[X_3, X_1]} X_2 \\ &= \nabla_{X_1} [X_2, X_3] + \nabla_{X_2} [X_3, X_1] + \nabla_{X_3} [X_1, X_2] \\ &- \nabla_{[X_1, X_2]} X_3 - \nabla_{[X_2, X_3]} X_1 - \nabla_{[X_3, X_1]} X_2 \\ &= [X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0 \end{aligned}$$

Da questa ricaviamo l'identità di Bianchi :

$$\begin{aligned} & R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_1, X_4, X_2, X_3) + R(X_1, X_3, X_4, X_2) = 0 \\ & \forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che $R(X_2, X_1, X_3, X_4) = -R(X_1, X_2, X_3, X_4)$. A questo scopo è sufficiente verificare che $R(X_1, X_1, X_3, X_4) = 0$ per ogni $X_1, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M)$. Abbiamo :

$$\begin{aligned} R(X_1, X_1, X_3, X_4) &= g(R(X_3, X_4)X_1, X_1) \\ &= g((\nabla_{X_3} \nabla_{X_4} - \nabla_{X_4} \nabla_{X_3} - \nabla_{[X_3, X_4]}) X_1, X_1) \\ &= X_3 g(\nabla_{X_4} X_1, X_1) - g(\nabla_{X_4} X_1, \nabla_{X_3} X_1) \\ &- X_4 g(\nabla_{X_3} X_1, X_1) + g(\nabla_{X_3} X_1, \nabla_{X_4} X_1) \\ &- \frac{1}{2} [X_3, X_4] g(X_1, X_1) \\ &= \frac{1}{2} X_3 X_4 g(X_1, X_1) - \frac{1}{2} X_4 X_3 g(X_1, X_1) \\ &- \frac{1}{2} [X_3, X_4] g(X_1, X_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo verificato le proprietà (i), (ii) e (iv) di un tensore algebrico di curvatura e segue quindi che vale anche la proprietà (iii), cioè che

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = R(X_3, X_4, X_1, X_2) \quad \text{per ogni } X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M).$$

In particolare è anche $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4)$. \square

Sia $p \in M$. Per ogni piano $\alpha \subset T_p M$, definiamo la *curvatura sezionale* di M rispetto al piano α come la quantità $K(\alpha)$ relativa al tensore algebrico di curvatura

R_p :

$$(17.36) \quad K(\alpha) = \frac{-R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{\|v_1 \wedge v_2\|^2} = \frac{-R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{g(v_1, v_1)g(v_2, v_2) - |g(v_1, v_2)|^2} \quad \text{se } \alpha = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Fissato il punto p , l'esponenziale \exp_p definisce un diffeomorfismo di un intorno convesso $N_0(p)$ di 0 in p su un intorno normale U_p di p in M . Inoltre, per un $r_0 > 0$, l'esponenziale trasforma, per ogni $0 < r \leq r_0$, la palla $B_p(0, r)$ di centro 0 e raggio r di $T_p M$ rispetto alla metrica definita dal prodotto scalare g_p nella palla $B_p(r)$ della distanza definita dalla metrica Riemanniana su M . Consideriamo un 2-piano $\alpha \subset T_p M$. L'immagine $\exp_p(\alpha \cap N_0(p))$ è una sottovarietà V_α di U_p di dimensione reale 2, su cui la restrizione di g definisce una metrica Riemanniana. Utilizzando tale metrica possiamo calcolare l'area $A(r)$ di $V_\alpha \cap B_p(r)$ per $0 < r \leq r_0$. Avremo $A(r) = \pi r^2 + o(r^2)$ per $r \searrow 0$. La curvatura sezionale misura il modo in cui $A(r)$ approssima l'area del disco piano dello stesso raggio:

$$(17.37) \quad K(\alpha) = 12 \cdot \lim_{r \searrow 0} \frac{\pi r^2 - A(r)}{\pi r^4}.$$

Operatori differenziali sulle varietà Riemanniane

18.1. Elemento di volume ed operatore di Hodge

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Ad una forma $\omega \in \mathcal{Q}^m(M)$ possiamo associare una funzione

$$(18.1) \quad \mathbf{L}(M) \ni \sigma \longrightarrow \omega(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathbb{R},$$

ove $\sigma_i = \sigma(e_i) \in T_{\pi(\sigma)}M$, per la base canonica e_1, \dots, e_m di \mathbb{R}^m . La (18.1) definisce una sezione del fibrato in rette che corrisponde alla rappresentazione determinante $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \ni a \rightarrow \det a \in \mathbb{R}_*$, e stabilisce un isomorfismo di $\mathcal{Q}^m(M)$ con $\mathcal{Q}_{\det}^0(\mathbf{L}(M))$.

Una *densità positiva* su M è localmente il valore assoluto di una m -forma. Possiamo definirla in modo invariante come una funzione μ , definita sullo spazio $\mathbf{L}(M)$ dei sistemi di riferimento di M .

DEFINIZIONE 18.1.1. Una *densità* di classe \mathcal{C}^∞ su M è una funzione $\mu \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{L}(M))$ che soddisfa

$$(18.2) \quad \mu(a\sigma) = |\det a| \cdot \mu(\sigma), \quad \forall \sigma \in \mathbf{L}(M), \forall a \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}).$$

Ad una densità μ di classe \mathcal{C}^∞ su M possiamo associare una misura regolare. Se (U, x) è una carta locale in M ed f una funzione continua con supporto compatto in U definiamo

$$\int f d\mu = \int f(x) \mu(\partial/\partial x) d\lambda(x),$$

dove $\partial/\partial x$ è la sezione $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m})$ di $\mathbf{L}(M)$ su U e $d\lambda$ la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^m . La definizione si estende, mediante partizione dell'unità, a tutte le funzioni continue a supporto compatto su M .

Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana.

DEFINIZIONE 18.1.2. L'*elemento di volume* di (M, g) è la *densità* μ_g definita da

$$(18.3) \quad \mu_g(\sigma) = \sqrt{|\det g(\sigma_i, \sigma_j)|}, \quad \forall \sigma \in \mathbf{L}(M).$$

DEFINIZIONE 18.1.3. Se M è orientata, definiamo *forma di volume* di (M, g) l'unico elemento $\omega_g \in \mathcal{Q}^m(M)$ che definisce l'orientazione di M e soddisfa

$$(18.4) \quad \mu_g(\sigma) = |\omega_g(\sigma_1, \dots, \sigma_m)|, \quad \forall \sigma \in \mathbf{L}(M).$$

Ricordiamo che abbiamo esteso la pseudo-metrica ai fibrati tensoriali di M , in particolare alle forme differenziali esterne. Sulle forme di grado zero si tratta semplicemente del prodotto di numeri reali. Le m -forme alternate formano uno

spazio vettoriale di dimensione uno. Ogni varietà è localmente orientabile e quindi possiamo definire, almeno localmente, la forma di volume ω_g . Abbiamo

$$(18.5) \quad g(\omega_g, \omega_g) = (-1)^q$$

se q è il numero di valori propri negativi di g . Poiché la derivata covariante di una forma alternata è ancora una forma alternata, deduciamo da questa identità che

$$(18.6) \quad \nabla \omega_g = 0.$$

Supporremo nel seguito che (M, g) sia una varietà pseudo-Riemanniana orientata.

DEFINIZIONE 18.1.4. Per ogni $0 \leq k \leq m$ definiamo l'operatore di Hodge

$$(18.7) \quad * : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{m-k}(M)$$

come l'unico operatore lineare tale che

$$(18.8) \quad \alpha \wedge (*\beta) = g(\alpha, \beta) \omega_g, \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^k(M).$$

PROPOSIZIONE 18.1.5. L'operatore di Hodge è caratterizzato da

$$(18.9) \quad \int_M g(\alpha, \beta) \omega_g = \int_M (*\alpha) \wedge \beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^k(M) \text{ con } \text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta \text{ compatto.}$$

PROPOSIZIONE 18.1.6. L'operatore di Hodge gode delle seguenti proprietà¹

$$(1) \quad *1 = \omega_g, \quad *\omega_g = (-1)^q;$$

$$(2) \quad \text{se } \alpha \in \Omega^k(M), \beta \in \Omega^{m-k}(M), \text{ allora}$$

$$(18.10) \quad g(\alpha, *\beta) = (-1)^{k(m-k)} g(*\alpha, \beta);$$

$$(3) \quad \text{se } \alpha \in \Omega^k(M), \text{ allora}$$

$$(18.11) \quad **\alpha = (-1)^{k(n-k)+q} \alpha.$$

18.2. Codifferenziale, operatore di Laplace-Beltrami, divergenza

Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana.

18.2.1. Isomorfismi di dualità. Poiché la g è non degenere, vale il

LEMMA 18.2.1. Per ogni forma differenziale $\xi \in \Omega^1(M)$ esiste un unico campo di vettori ξ^\sharp tale che

$$(18.12) \quad g(\xi^\sharp, X) = \xi(X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \quad \square$$

L'applicazione

$$(18.13) \quad \sharp : \Omega^1(M) \ni \xi \rightarrow \xi^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$$

DEFINIZIONE 18.2.2. L'isomorfismo (18.13) è l'isomorfismo di dualità di (M, g) . Indichiamo con

$$(18.14) \quad \flat : \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow X^\flat \in \Omega(M)$$

l'isomorfismo inverso.

¹Ricordiamo che q è il numero di valori propri negativi di g .

Poiché la metrica sul fibrato cotangente è definita in modo tale che \sharp e \flat siano isometrie, vale la

$$(18.15) \quad g(\xi^\sharp, X) = g(\xi, X^\flat) = \xi(X), \quad \forall \xi \in \Omega^1(M), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

LEMMA 18.2.3. *La derivazione covariante commuta con gl'isomorfismi di dualità.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\xi \in \Omega^1(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} g(\nabla_X(\xi^\sharp), Y) &= Xg(\xi^\sharp, Y) - g(\xi^\sharp, \nabla_X Y) = X(\xi(Y)) - \xi(\nabla_X Y) = (\nabla_X \xi)(Y) \\ &= g((\nabla_X \xi)^\sharp, Y). \end{aligned}$$

Questo dimostra che $\nabla_X(\xi^\sharp) = (\nabla_X \xi)^\sharp = \nabla_X \xi^\sharp$. Si verifica in modo analogo che $\nabla_X(Y^\flat) = (\nabla_X Y)^\flat = \nabla_X Y^\flat$. \square

Gli elementi di $\underline{T}^{k,q}$ sono localmente somme finite di termini della forma

$$\tau = X_1 \otimes \cdots \otimes X_q \otimes \xi^1 \otimes \cdots \otimes \xi^k \quad \text{con } X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), \quad \xi^1, \dots, \xi^k \in \Omega^1(M).$$

Possiamo estendere la definizione degli isomorfismi di dualità descrivendo applicazioni $\sharp : \underline{T}^{k,q}(M) \rightarrow \underline{T}^{k-1,q+1}(M)$ per $k \geq 1$ e $\flat : \underline{T}^{k,q}(M) \rightarrow \underline{T}^{k+1,q-1}(M)$ per $q \geq 1$ con

$$\begin{aligned} \tau^\sharp &= X_1 \otimes \cdots \otimes X_{q-1} \otimes X_q \otimes \xi^1 \otimes \xi^2 \otimes \cdots \otimes \xi^k & (k \geq 1), \\ \tau^\flat &= X_1 \otimes \cdots \otimes X_{q-1} \otimes X_q^\flat \otimes \xi^1 \otimes \xi^2 \otimes \cdots \otimes \xi^k & (q \geq 1). \end{aligned}$$

Poiché la derivazione covariante è una derivazione dell'algebra tensoriale, anche gli isomorfismi \sharp e \flat definiti sui campi tensoriali commutano con la derivazione covariante.

18.2.2. Gradiente, Hessiano, Operatore di Laplace-Beltrami.

DEFINIZIONE 18.2.4. Il *gradiente* di una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ è il campo di vettori

$$(18.16) \quad \nabla f = df^\sharp.$$

La (18.16) è equivalente a

$$(18.17) \quad g(\nabla f, X) = Xf, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un sistema di riferimento su un aperto U di M , posto $g_{i,j} = g(X_i, X_j)$, ed indicando con $(g^{i,j})$ la matrice inversa della $(g_{i,j})$, abbiamo

$$(18.18) \quad \nabla f = \sum_{i,j} g^{i,j} (X_i f) X_j.$$

In particolare, se (M, g) è Riemanniana e $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ un riferimento ortonormale su un aperto U di M , è

$$(18.19) \quad \nabla f = \sum_{i=1}^m (X_i f) X_i \quad \text{su } U, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

DEFINIZIONE 18.2.5. L'*Hessiano* di $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ è la derivata covariante di df

$$(18.20) \quad \nabla^2 f = \nabla df, \quad \text{cioè} \quad \nabla^2 f(X, Y) = XYf - (\nabla_X Y)f, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Osserviamo che

$$\nabla^2 f(Y, X) = (YX - \nabla_Y X)f = (XY - [X, Y] - \nabla_Y X)f = (XY - \nabla_X Y)f,$$

perché la connessione di Levi-Civita è simmetrica. Quindi l'Hessiano è un tensore simmetrico.

DEFINIZIONE 18.2.6. L'operatore di Laplace-Beltrami sulle funzioni è l'opposto della traccia rispetto a g dell'Hessiano:

$$(18.21) \quad \Delta f = -\text{tr}_g(\nabla^2 f).$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un sistema di riferimento su un aperto U di M , posto $g_{i,j} = g(X_i, X_j)$, ed indicando con $(g^{i,j})$ la matrice inversa della $(g_{i,j})$, abbiamo

$$(18.22) \quad \nabla^2 f(X_i, X_j) = (X_i X_j - \Gamma_{i,j}^h X_h)f,$$

$$(18.23) \quad \Delta f = -\left(\sum_{i,j} g^{i,j}(X_i X_j - \sum_h \Gamma_{i,j}^h X_h)\right)f.$$

Osserviamo che Δ è ellittico se e soltanto se la g è una metrica Riemanniana, cioè se g è definita positiva. In questo caso, se scegliamo un riferimento ortonormale $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ su un aperto U di M , abbiamo in U

$$(18.24) \quad \Delta f = -\text{tr}_g(\nabla df) = -\left(\sum_{i=1}^m X_i^2 - \nabla_{X_i} X_i\right)f \quad \text{in } U.$$

18.2.3. Divergenza di un campo di vettori. Supporremo in tutto questo sottoparagrafo che (M, g) sia una varietà Riemanniana orientata, con forma di volume $\omega_g \in \Omega^m(M)$.

DEFINIZIONE 18.2.7. La divergenza² in $p \in M$ di un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ è la traccia dell'applicazione lineare $T_p M \ni Y_p \rightarrow \nabla_{Y_p} X \in T_p M$:

$$(18.25) \quad \text{div } X = \text{tr}(Y \rightarrow \nabla_Y X).$$

LEMMA 18.2.8. Supponiamo che (X, g) sia Riemanniana. Se $\sigma = (Y_1, \dots, Y_m)$ è un sistema di riferimento ortonormale su un aperto U di M , allora

$$(18.26) \quad \text{div } X = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{Y_i} X, Y_i) \quad \text{su } U, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(U).$$

Cioè, se $X = \sum_{i=1}^m f^i Y_i$, con $f^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$, allora

$$(18.27) \quad \text{div } X = \sum_{i=1}^m Y_i f^i + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{i,j}^i f^j \quad \text{in } U,$$

dove i simboli di Christoffel $\Gamma_{j,h}^i$ sono definiti da $\nabla_{Y_j} Y_h = \sum_{i=1}^m \Gamma_{j,h}^i Y_i$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\nabla_{Y_i} X = \sum_{h=1}^m (Y_i f^h + \sum_{j=1}^m \Gamma_{i,j}^h f^j) Y_h$$

e quindi otteniamo la (18.27), che è equivalente alla (18.26). \square

²Per definire la divergenza di un campo di vettori è sufficiente avere assegnato su M una connessione affine.

PROPOSIZIONE 18.2.9. *Supponiamo che (M, g) sia Riemanniana orientata, con forma di volume ω_g . Allora (indichiamo con L_X la derivata di Lie)*

$$(18.28) \quad L_X \omega_g = (\operatorname{div} X) \cdot \omega_g, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma = (Y_1, \dots, Y_m)$ un riferimento ortonormale locale, orientato positivamente. Allora

$$0 = X \cdot 1 = X \omega_g(Y_1, \dots, Y_m) = (L_X \omega_g)(Y_1, \dots, Y_m) + \sum_i \omega_g(\dots, [X, Y_i], \dots).$$

Posto $X = \sum_{i=1}^m f^i Y_i$, con f^i funzioni \mathcal{C}^∞ , abbiamo

$$\begin{aligned} [X, Y_i] &= \sum_{j=1}^m f^j [Y_j, Y_i] - \sum_{j=1}^m (Y_i f^j) Y_j \\ &= \sum_{j=1}^m f^j (\nabla_{Y_j} Y_i - \nabla_{Y_i} Y_j) - \sum_{j=1}^m (Y_i f^j) Y_j \\ &= \sum_{j,h=1}^m f^j (\Gamma_{j,i}^h - \Gamma_{i,j}^h) Y_h - \sum_{h=1}^m (Y_i f^h) Y_h. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} &\omega_g(Y_1, \dots, [X, Y_i], \dots, Y_m) \\ &= g\left(Y_1, \dots, \left(\sum_{j,h=1}^m f^j (\Gamma_{j,i}^h - \Gamma_{i,j}^h) Y_h - \sum_{h=1}^m (Y_i f^h) Y_h\right), \dots, Y_m\right) \\ &= g\left(Y_1, \dots, \left(\sum_{j=1}^m f^j (\Gamma_{j,i}^i - \Gamma_{i,j}^i) - (Y_i f^i)\right) Y_i, \dots, Y_m\right) \\ &= -g\left(Y_1, \dots, \left(Y_i f^i + \sum_{j=1}^m f^j \Gamma_{i,j}^i\right) Y_i, \dots, Y_m\right) \\ &= -\left(Y_i f^i + \sum_{j=1}^m f^j \Gamma_{i,j}^i\right) \end{aligned}$$

La (18.28) segue allora dalla (18.27). \square

Osserviamo che, per ogni intero non negativo k , vale la

$$(18.29) \quad L_X \alpha = X \lrcorner d\alpha + d(X \lrcorner \alpha), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall \alpha \in \Omega^k(M).$$

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, ed $\alpha = f \omega_g$ con $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} X$ compatto in M , otteniamo

$$\int_M L_X(f \omega_g) = \int_M d(f X \lrcorner \omega_g) = 0$$

e quindi

$$\int_M g(\nabla f, X) \omega_g = \int_M X f \omega_g = \int_M L_X(f \omega_g) - \int_M f L_X \omega_g = - \int_M f \operatorname{div} X \omega_g.$$

Abbiamo dimostrato cioè che l'opposto della divergenza sui campi di vettori è l'aggiunto formale del gradiente delle funzioni:

PROPOSIZIONE 18.2.10. *Se (M, g) è una varietà Riemanniana orientabile, allora*

$$(18.30) \quad \int_M g(\nabla f, X) \omega_g = - \int_M f \operatorname{div} X \omega_g, \\ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall X \in \mathfrak{X}(M), \text{ con } \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} X \Subset M. \quad \square$$

Da questa ricaviamo

PROPOSIZIONE 18.2.11 (Formula d'integrazione per parti). *Se $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\text{supp } f \cap \text{supp } g \cap \text{supp } X \Subset M$, allora*

$$(18.31) \quad \int_M f(Xg) \omega_g = - \int_M g(Xf + f \text{div } X) \omega_g.$$

DEFINIZIONE 18.2.12. L'operatore differenziale lineare del prim'ordine

$$(18.32) \quad X^* f = -Xf - f \text{div } X$$

si dice l'*aggiunto formale* del campo di vettori X .

18.3. Co-differenziazione covariante di forme differenziali

18.3.1. Forme differenziali. Indichiamo con $\mathcal{F}^k(M)$ lo spazio delle forme differenziali di grado k su M . I suoi elementi sono le applicazioni $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineari

$$(18.33) \quad \alpha : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ volte}} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M).$$

Le $\alpha \in \mathcal{F}^k(M)$ sono cioè le applicazioni (18.33) caratterizzate da:

$$\begin{cases} \alpha(X_1, \dots, X_i + Y_i, \dots, X_k) = \alpha(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k) + \alpha(X_1, \dots, Y_i, \dots, X_k), \\ \alpha(f_1 X_1, \dots, f_k X_k) = f_1 \cdots f_k \alpha(X_1, \dots, X_k), \\ \forall X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{X}(M), \forall i = 1, \dots, k, \forall f_1, \dots, f_k \in \mathcal{C}^\infty(M), \end{cases}$$

Porremo

$$\mathcal{F}(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{F}^k(M).$$

Osserviamo che $\mathcal{F}(M)$ è un'algebra associativa graduata per il prodotto tensoriale di forme, definito sugli elementi omogenei da

$$\begin{aligned} (\alpha \otimes \beta)(X_1, \dots, X_{h+k}) &= \alpha(X_1, \dots, X_h) \beta(X_{h+1}, \dots, X_{h+k}) \\ \forall \alpha \in \mathcal{F}^h(M), \forall \beta \in \mathcal{F}^k(M), \forall X_1, \dots, X_{h+k} \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

18.3.2. Differenziazione covariante. Ricordiamo che, se ∇ è la differenziazione covariante di una connessione affine su M , allora

$$\nabla \alpha(X_0, X_1, \dots, X_k) = (\nabla_{X_0} \alpha)(X_1, \dots, X_k), \quad \forall \alpha \in \mathcal{F}^k(M), \quad \forall X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M),$$

e quindi

$$\nabla : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), \quad \text{con } \nabla : \mathcal{F}^k(M) \rightarrow \mathcal{F}^{k+1}(M), \quad \forall k \geq 0.$$

PROPOSIZIONE 18.3.1. *La derivazione covariante definisce una derivazione di grado 1 dell'algebra associativa graduata $\mathcal{F}(M)$.*

18.3.3. Forme differenziali a valori in un fibrato vettoriale.

Se $\eta = (E \xrightarrow{\pi} M)$ è un fibrato vettoriale, denoteremo con $\mathcal{F}^k(M, E)$ lo spazio delle forme differenziali, omogenee di grado k , a coefficienti in E :

$$\mathcal{F}^k(M, E) = \left\{ \alpha : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ volte}} \longrightarrow \Gamma(M, E), \text{ } \mathcal{C}^\infty(M)\text{-multilineari} \right\}$$

Porremo, ancora,

$$\mathcal{F}(M, E) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{F}^k(M, E).$$

Osserviamo che $\mathcal{F}(M, E)$ è, in modo naturale, un $\mathcal{F}(M)$ -modulo per il prodotto tensoriale di forme.

18.3.4. Contrazione. Se $\alpha \in \mathcal{F}^k(M, TM)$, con $k \geq 1$, per ogni $X_2, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ fissati, la

$$\mathfrak{X}(M) \ni X \longrightarrow \alpha(X, X_2, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}(M)$$

definisce una sezione del fibrato $TM \otimes_M T^*M \rightarrow M$ degli endomorfismi lineari delle fibre di TM . Abbiamo quindi un isomorfismo naturale

$$\mathcal{F}^k(M, TM) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{k-1}(M, \text{End}(TM))$$

DEFINIZIONE 18.3.2. Sia $k \geq 1$. Indicheremo con

$$(18.34) \quad \text{tr}_1 : \mathcal{F}^k(M, TM) \longrightarrow \mathcal{F}^{k-1}(M)$$

l'operatore di contrazione, che associa ad $\alpha \in \mathcal{F}^k(M, TM)$ l'elemento

$$\text{tr}_1 \alpha(X_2, \dots, X_k) = \text{tr}(X \rightarrow \alpha(X, X_2, \dots, X_k)), \quad \forall X_2, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M).$$

18.3.5. Il co-differenziale covariante. Fissiamo su M una metrica pseudo-Riemanniana g .

DEFINIZIONE 18.3.3. Se $k \geq 1$ definiamo un'applicazione

$$(18.35) \quad \sharp : \mathcal{F}^k(M) \ni \alpha \longrightarrow \alpha^\sharp \in \mathcal{F}^{k-1}(M, TM)$$

mediante

$$(18.36) \quad g(X_1, \alpha^\sharp(X_2, \dots, X_k)) = \alpha(X_1, \dots, X_k), \quad \forall X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M).$$

Osserviamo che questa definizione coincide con la Definizione 18.2.2 su $\mathcal{Q}^1(M) = \mathcal{S}^1(M) = \mathcal{F}^1(M)$.

Se Y_1, \dots, Y_m è un riferimento ortonormale su un aperto U di M , ed $\alpha \in \mathcal{F}^k(M, TM)$, allora

$$\text{tr}_1 \alpha(X_2, \dots, X_k) = \sum_{i=1}^m g(Y_i, \alpha(Y_i, X_2, \dots, X_k)).$$

DEFINIZIONE 18.3.4. Sia $k \geq 1$. Chiamiamo *co-differenziale* della forma $\alpha \in \mathcal{F}^k(M)$ la forma $\nabla^* \alpha \in \mathcal{F}^{k-1}(M)$ definita da

$$(18.37) \quad \nabla^* \alpha = -\text{tr}_1(\nabla \alpha)^\sharp.$$

Poniamo $\nabla^* \mathcal{F}^0(M) = 0$. La divergenza definisce allora un operatore differenziale

$$(18.38) \quad \nabla^* : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M),$$

di ordine uno, omogeneo di grado -1 .

PROPOSIZIONE 18.3.5. *Se (M, g) è orientabile, la differenziazione covariante e la co-differenziazione covariante sulle forme differenziali sono l'una l'aggiunta formale dell'altra.*

Se Y_1, \dots, Y_m è un sistema di riferimento ortonormale sull'aperto U di M , abbiamo

$$\begin{aligned} (\nabla^* \alpha)(X_1, \dots, X_{k-1}) &= - \sum_{i=1}^m (\nabla_{Y_i} \alpha)(Y_i, X_1, \dots, X_{k-1}), \text{ su } U, \\ \forall \alpha \in \mathcal{F}^k(M), \forall X_1, \dots, X_{k-1} \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

18.4. Divergenza di tensori simmetrici

18.4.1. Forme differenziali simmetriche. Indichiamo con $\mathcal{S}^k(M)$ lo spazio delle forme simmetriche di grado k su M . Un elemento $\alpha \in \mathcal{S}^k(M)$ è una forma di $\mathcal{F}^k(M)$ che soddisfa

$$\alpha(X_1, X_2, \dots, X_k) = \alpha(X_{a_1}, X_{a_2}, \dots, X_{a_k}), \quad \forall a \in \mathbf{S}_k,$$

ove abbiamo indicato con \mathbf{S}_k il gruppo delle permutazioni di $\{1, \dots, k\}$.

Denotiamo con

$$(18.39) \quad \mathcal{S}(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{S}^k(M)$$

lo spazio di tutte le forme simmetriche. Ricordiamo che $\mathcal{S}(M)$ è un'algebra associativa graduata con il prodotto, definito sugli elementi omogenei mediante

$$\begin{aligned} \alpha \vee \beta(X_1, \dots, X_{h+k}) &= \sum_{\substack{a \in \mathbf{S}_{h+k} \\ 1 \leq a_1 < \dots < a_h \leq h+k \\ 1 \leq a_{h+1} < \dots < a_{h+k} \leq h+k}} \alpha(X_{a_1}, \dots, X_{a_h}) \beta(X_{a_{h+1}}, \dots, X_{a_{h+k}}), \\ \forall \alpha \in \mathcal{S}^h(M), \forall \beta \in \mathcal{S}^k(M), \quad \forall X_1, \dots, X_{h+k} \in \mathfrak{X}(M), \end{aligned}$$

se $\alpha \in \mathcal{S}^h(M)$, $\beta \in \mathcal{S}^k(M)$.

DEFINIZIONE 18.4.1. Indichiamo con *sim* la proiezione

$$(18.40) \quad \begin{aligned} \text{sim} : \mathcal{F}^k(M) \ni \alpha &\longrightarrow \text{sim}(\alpha) \in \mathcal{S}^k(M), \text{ definita da} \\ \text{sim}(\alpha)(X_1, \dots, X_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{a \in \mathbf{S}_k} \alpha(X_{a_1}, \dots, X_{a_k}). \end{aligned}$$

Si verifica facilmente:

LEMMA 18.4.2. *Estesa per linearità, l'applicazione $\text{sim} : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{S}(M)$ è un epimorfismo di algebre associative graduate. Il suo nucleo è l'ideale bilatero di $(\mathcal{F}(M), \otimes)$ generato dagli elementi della forma $\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$, al variare di α, β in $\mathcal{F}^1(M)$. \square*

OSSERVAZIONE 18.4.3. Questo lemma ci permette di identificare $\mathcal{S}(M)$ allo spazio delle forme simmetriche su M , definito usualmente come quoziente di $\mathcal{F}(M)$ rispetto all'ideale bilatero definito nell'enunciato del Lemma.

Se $\eta = (E \xrightarrow{\pi} M)$ è un fibrato vettoriale, denoteremo con $\mathcal{S}^k(M, E)$ lo spazio delle forme differenziali simmetriche, omogenee di grado k , a coefficienti in E :

$$\mathcal{S}^k(M, E) = \left\{ \alpha \in \mathcal{F}^k(M, E) \left| \begin{array}{l} \alpha(X_1, \dots, X_k) = \alpha(X_{a_1}, \dots, X_{a_k}), \\ \forall X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M), \forall a \in \mathbf{S}_k. \end{array} \right. \right\}$$

Porremo, ancora,

$$\mathcal{S}(M, E) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{S}^k(M, E).$$

Osserviamo che $\mathcal{S}(M, E)$ è un $\mathcal{S}(M)$ -modulo per l'azione definita, sugli elementi omogenei, da

$$\begin{aligned} \alpha \vee \beta(X_1, \dots, X_{h+k}) &= \sum_{\substack{a \in \mathbf{S}_{h+k} \\ 1 \leq a_1 < \dots < a_h \leq h+k \\ 1 \leq a_{h+1} < \dots < a_{h+k} \leq h+k}} \alpha(X_{a_1}, \dots, X_{a_h}) \beta(X_{a_{h+1}}, \dots, X_{a_{h+k}}), \\ \forall \alpha \in \mathcal{S}^h(M, E), \forall \beta \in \mathcal{S}^k(M), \quad \forall X_1, \dots, X_{h+k} \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

18.4.2. Forme simmetriche su una varietà pseudo-Riemanniana. Fissiamo su M una metrica pseudo-Riemanniana g .

Se $\alpha \in \mathcal{F}^k(M)$, con $k \geq 0$, allora $\nabla_X \alpha \in \mathcal{F}^{k+1}(M)$ è definito da

$$\nabla \alpha(X_0, X_1, \dots, X_k) = (\nabla_{X_0} \alpha)(X_1, \dots, X_k), \quad \forall X_0, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M).$$

DEFINIZIONE 18.4.4. Chiamiamo *divergenza* della forma simmetrica $\alpha \in \mathcal{S}^k(M)$ la forma simmetrica $\delta \alpha \in \mathcal{S}^{k-1}(M)$ definita da

$$(18.41) \quad \delta \alpha = \nabla^* \alpha = -\text{tr}_1(\nabla \alpha)^\sharp.$$

La divergenza definisce un operatore differenziale

$$(18.42) \quad \delta : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{S}(M),$$

di ordine uno, omogeneo di grado -1 .

Calcoliamo l'aggiunto formale della divergenza sulle forme simmetriche. Osserviamo che $\mathcal{S}^1(M) = \mathcal{Q}^1(M)$ e quindi possiamo considerare il differenziale covariante dei tensori simmetrici come un'applicazione

$$\nabla : \mathcal{S}^k(M) \longrightarrow \mathcal{S}^1(M) \otimes \mathcal{S}^k(M) \subset \mathcal{F}^{k+1}(M).$$

Componendo con la simmetrizzazione, otteniamo un operatore differenziale di ordine uno e grado uno

$$(18.43) \quad \delta^* : \mathcal{S}^k(M) \ni \alpha \longrightarrow \text{sim}(\nabla \alpha) \in \mathcal{S}^{k+1}(M).$$

LEMMA 18.4.5 (co-divergenza di un tensore simmetrico). *Supponiamo che (M, g) sia orientata. La divergenza sui vettori simmetrici e l'operatore differenziale definito dalla (18.43) sono l'uno l'aggiunto formale dell'altro.* \square

Sia $\alpha \in \Omega^1(M) = \mathcal{S}^1(M)$. Ricordiamo che α^\sharp è il campo di vettori definito da

$$\alpha(X) = g(\alpha^\sharp, X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

LEMMA 18.4.6. *Se $\alpha \in \Omega^1(M)$, allora*

$$(18.44) \quad \delta^* \alpha = \frac{1}{2} L_{\alpha^\sharp} g.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, abbiamo

$$d^\nabla \alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - \alpha(\nabla_X Y)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \delta^* \alpha(X, Y) &= \frac{1}{2} (X\alpha(Y) + Y\alpha(X) - \alpha(\nabla_X Y + \nabla_Y X)) \\ &= \frac{1}{2} (Xg(\alpha^\sharp, Y) + Yg(X, \alpha^\sharp) - g(\alpha^\sharp, \nabla_X Y) - g(\alpha^\sharp, \nabla_Y X)) \\ &= \frac{1}{2} (g(\nabla_X \alpha^\sharp, Y) + g(X, \nabla_Y \alpha^\sharp)). \end{aligned}$$

È poi

$$\begin{aligned} (L_{\alpha^\sharp} g)(X, Y) &= \alpha^\sharp g(X, Y) - g([\alpha^\sharp, X], Y) - g(X, [\alpha^\sharp, Y]) \\ &= \alpha^\sharp g(X, Y) - g(\nabla_{\alpha^\sharp} X, Y) - g(X, \nabla_{\alpha^\sharp} Y) + g(\nabla_X \alpha^\sharp, Y) + g(X, \nabla_Y \alpha^\sharp) \\ &= (\nabla_{\alpha^\sharp} g)(X, Y) + g(\nabla_X \alpha^\sharp, Y) + g(X, \nabla_Y \alpha^\sharp) \\ &= g(\nabla_X \alpha^\sharp, Y) + g(X, \nabla_Y \alpha^\sharp), \end{aligned}$$

da cui segue la tesi. \square

OSSERVAZIONE 18.4.7. I campi di vettori X per cui $L_X g = 0$ sono generatori infinitesimali di gruppi locali a un parametro di diffeomorfismi che preservano la metrica g su M e si dicono *campi di Killing*. È conseguenza del Lemma il fatto che la divergenza della 1-forma α si annulla se e soltanto se il corrispondente campo α^\sharp è di Killing.

Concludiamo il paragrafo con la verifica esplicita del fatto che la divergenza sia l'aggiunto formale della co-divergenza δ^* nel caso delle forme simmetriche di grado due.

LEMMA 18.4.8. *Se $\alpha \in \mathcal{S}^2(M)$, allora, per ogni $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ vale la formula*

$$(18.45) \quad (\nabla_X \alpha - L_X \alpha)(X_1, X_2) = \alpha(\nabla_{X_1} X, X_2) + \alpha(X_1, \nabla_{X_2} X).$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} (L_X \alpha)(X_1, X_2) &= X(\alpha(X_1, X_2)) - \alpha([X, X_1], X_2) - \alpha(X_1, [X, X_2]) \\ &= (\nabla_X \alpha)(X_1, X_2) - ([X, X_1] - \nabla_X X_1, X_2) - \alpha(X_1, [X, X_2] - \nabla_X X_2) \\ &= (\nabla_X \alpha)(X_1, X_2) - \alpha(\nabla_{X_1} X, X_2) - \alpha(X_1, \nabla_{X_2} X), \end{aligned}$$

perché la connessione di Levi-Civita è priva di torsione. \square

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ con supporto compatto in M abbiamo

$$\int_M g(\delta\alpha, X^\flat)\omega_g = \int_M g(\alpha, \delta^*X^\flat) = \frac{1}{2} \int_M g(\alpha, L_X g)\omega_g.$$

Osserviamo che

$$g(\alpha, L_X g) = Xg(\alpha, g) - g(L_X\alpha, g) = g(\nabla_X\alpha - L_X\alpha, g).$$

Per calcolare l'espressione locale di questo prodotto, possiamo utilizzare un sistema di riferimento ortonormale locale X_1, \dots, X_m . Otteniamo

$$g(\alpha, L_X g) = \sum_{i,j=1}^m (\nabla_X\alpha - L_X\alpha)(X_i, X_j)g(X_i, X_j) = 2 \sum_{i=1}^m \alpha(\nabla_{X_i}X, X_i).$$

Poiché

$$\alpha(\nabla_{X_i}X, X_i) = X_i\alpha(X, X_i) - (\nabla_{X_i}\alpha)(X, X_i) - \alpha(X, \nabla_{X_i}X_i),$$

otteniamo, prendendo X con supporto compatto nell'aperto in cui X_1, \dots, X_m definiscono un sistema ortonormale,

$$\begin{aligned} \int_M g(\delta\alpha, X^\flat)\omega_g &= \sum_{i=1}^m \int_M (X_i\alpha(X, X_i) - (\nabla_{X_i}\alpha)(X, X_i) - \alpha(X, \nabla_{X_i}X_i))\omega_g \\ &= - \sum_{i=1}^m \int_M ((\nabla_{X_i}\alpha)(X, X_i) - \alpha(X, \nabla_{X_i}X_i) - \alpha(X, X_i)\operatorname{div} X_i)\omega_g. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che

$$\operatorname{div} X_i = \sum_{j=1}^m g(\nabla_{X_j}X_i, X_j) = - \sum_{j=1}^m g(X_i, \nabla_{X_j}X_j)$$

e dunque

$$\sum_{i=1}^m \alpha(X, X_i)\operatorname{div} X_i = - \sum_{i,j=1}^m \alpha(X, X_i)g(X_i, \nabla_{X_j}X_j) = - \sum_{j=1}^m \alpha(X, \nabla_{X_j}X_j).$$

Sostituendo nelle formule precedenti otteniamo

$$\int_M g(\delta\alpha, X^\flat)\omega_g = - \int_M \sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i}\alpha)(X, X_i)\omega_g.$$

□

18.5. L'operatore di Laplace-Beltrami

PROPOSIZIONE 18.5.1. *Abbiamo*

$$(18.46) \quad \Delta f = -\operatorname{div}(\nabla f), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, otteniamo

$$g(\nabla_X(\nabla f), Y) = Xg(\nabla f, Y) - g(\nabla f, \nabla_X Y) = XYf - \nabla_X Yf.$$

Per calcolare l'espressione locale della divergenza di ∇f , possiamo utilizzando un riferimento ortonormale $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$, definito su un aperto U di M . Per la (18.26) abbiamo in U

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{X_i}\nabla f, X_i) = \sum_{i=1}^m (X_i^2 - \nabla_{X_i}X_i)f = -\Delta f.$$

□

Come conseguenza delle (18.30) e (18.46) abbiamo

PROPOSIZIONE 18.5.2. *Vale la*

$$(18.47) \quad \int_M g(\nabla f, \nabla \phi) \omega_g = \int_M f \Delta \phi \omega_g, \\ \forall f, \phi \in \mathcal{C}^\infty(M), \text{ con } \text{supp } f \cap \text{supp } \phi \Subset M. \quad \square$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un riferimento ortonormale su un aperto U di M , allora

$$g\left(\sum_{i=1}^m \nabla_{X_i} X_i, X_j\right) = -\sum_{i=1}^m g(X_i, \nabla_{X_i} X_j) = -\text{div } X_j.$$

Otteniamo quindi

$$(18.48) \quad \sum_{i=1}^m \nabla_{X_i} X_i = -\sum_{i=1}^m (\text{div } X_i) X_i$$

e dunque l'espressione del Laplaciano sulle funzioni rispetto ad un riferimento ortonormale:

$$(18.49) \quad \Delta = -\sum_{i=1}^m (X_i^2 + (\text{div } X_i) X_i).$$

Siano $\alpha \in \underline{\mathbb{T}}^{1,q}(M)$ e $\beta \in \underline{\mathbb{T}}^{0,q}(M)$, con $\text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta \Subset U$. Allora

$$\begin{aligned} \int_M g(\alpha, \nabla \beta) &= \sum_{i=1}^m \int_M g(\alpha(X_i), \nabla_{X_i} \beta) \omega_g \\ &= \sum_{i=1}^m \int_M [X_i g(\alpha(X_i), \beta) - g((\nabla_{X_i} \alpha)(X_i), \beta) - g(\alpha(\nabla_{X_i} X_i), \beta)] \omega_g \\ &= \sum_{i=1}^m \int_M [-(\text{div } X_i) g(\alpha(X_i), \beta) - g((\nabla_{X_i} \alpha)(X_i), \beta) - g(\alpha(\nabla_{X_i} X_i), \beta)] \omega_g \\ &= \int_M g\left(\sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i} \alpha)(X_i), \beta\right) \omega_g, \end{aligned}$$

perché, per la (18.48) la sommatoria dei primi e dei terzi addendi sono l'una l'opposta dell'altra.

18.5.1. Codifferenziale. Poiché la derivazione covariante commuta con gli isomorfismi \flat e \sharp , utilizzando la partizione dell'unità otteniamo la seguente:

PROPOSIZIONE 18.5.3. *Siano k, q due interi non negativi. Risulta univocamente determinato un operatore differenziale lineare del prim'ordine $\flat : \underline{\mathbb{T}}^{k+1,q} \rightarrow \underline{\mathbb{T}}^{k,q}$ tale che*

$$(18.50) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_M g(\flat \alpha, \beta) d\mu_g &= \int_M g(\alpha, \nabla \beta) d\mu_g, \\ \forall \alpha \in \underline{\mathbb{T}}^{k+1,q}(M), \forall \beta \in \underline{\mathbb{T}}^{k,q}(M), &\text{ con } \text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta \text{ compatto.} \end{aligned} \right.$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un riferimento ortonormale su un aperto U di M , abbiamo

$$(18.51) \quad \flat \alpha = -\sum_{i=1}^m X_i \lrcorner (\nabla_{X_i} \alpha) \text{ su } U. \quad \square$$

DEFINIZIONE 18.5.4. Il *codifferenziale* di $\alpha \in \underline{\mathbb{T}}^{k+1,q}(M)$ è il tensore $\flat \alpha$ definito da (18.51).

Porremo $\flat \alpha = 0$ se $\alpha \in \underline{\mathbb{T}}^{0,q}(M)$.

18.5.2. Codifferenziale sulle forme alternate e Laplaciano di Hodge-deRham.

Supponiamo nel seguito che (M, g) sia Riemanniana orientata, con forma di volume ω_g .

PROPOSIZIONE 18.5.5. *Il codifferenziale definisce un operatore $\flat : \Omega^{k+1} \rightarrow \Omega^k(M)$, che si può esprimere utilizzando il differenziale e l'operatore di Hodge mediante la formula*

$$(18.52) \quad \flat\alpha = (-1)^{k+1} * d(*\alpha), \quad \forall \alpha \in \Omega^k(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \int_M g(\flat\alpha, \beta)\omega_g &= \int_M g(\alpha, d\beta)\omega_g = \int_M (*\alpha) \wedge d\beta \\ &= (-1)^{k+1} \int_M (d(*\alpha)) \wedge \beta = (-1)^{k+1} \int_M g(*d*\alpha, \beta)\omega_g. \end{aligned}$$

□

DEFINIZIONE 18.5.6. Il Laplaciano di Hodge-deRham sulle k -forme è l'operatore differenziale

$$(18.53) \quad \Delta = (\flat \circ d + d \circ \flat) : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M).$$

18.5.3. Differenziazione di forme simmetriche.

NOTAZIONE 18.5.7. Indichiamo con $S^k M$ il fibrato vettoriale dei tensori simmetrici k -controvarianti su M e con $\mathcal{S}^k(M)$ lo spazio delle sue sezioni, cioè delle k -forme simmetriche su M .

La differenziazione covariante ∇ definisce un'applicazione $\nabla : \mathcal{S}^k(M) \rightarrow \Omega^1(M, S^k M)$.

DEFINIZIONE 18.5.8. Il differenziale simmetrico $\flat^* : \mathcal{S}^k(M) \rightarrow \mathcal{S}^{k+1}(M)$ è l'operatore differenziale

$$(18.54) \quad (\flat^* \alpha)(X_0, \dots, X_k) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (\nabla_{X_i} \alpha)(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k).$$

Se $\alpha \in \mathcal{S}^1(M) = \Omega^1(M)$, posto $A = \alpha^\sharp$, abbiamo

$$\begin{aligned} (\flat^* \alpha)(X, Y) &= \frac{1}{2} [(\nabla_X \alpha)(Y) + (\nabla_Y \alpha)(X)] \\ &= \frac{1}{2} (X\alpha(Y) - \alpha(\nabla_X Y) + Y\alpha(X) - \alpha(\nabla_Y X)) \\ &= \frac{1}{2} (Xg(A, Y) - g(A, \nabla_X Y) + Yg(A, X) - g(A, \nabla_Y X)) \\ &= \frac{1}{2} (g(\nabla_X A, Y) + g(\nabla_Y A, X)). \end{aligned}$$

Abbiamo poi

$$\begin{aligned} (L_A g)(X, Y) &= Ag(X, Y) - g([A, X], Y) - g([A, Y], X) \\ &= Ag(X, Y) - g(\nabla_A X - \nabla_X A, Y) - g(\nabla_A Y - \nabla_Y A, X) \\ &= g(\nabla_X A, Y) + g(\nabla_Y A, X) \end{aligned}$$

perché $\nabla_A g = 0$. Abbiamo perciò

LEMMA 18.5.9. Se $\alpha \in \mathcal{S}^1(M)$, allora

$$(18.55) \quad (d^*\alpha)(X, Y) = -\frac{1}{2}(L_{\alpha^\sharp}g)(X, Y).$$

DEFINIZIONE 18.5.10. Chiamiamo *divergenza* di una forma simmetrica l'aggiunto formale del differenziale covariante sulle forme simmetriche, cioè l'applicazione $\mathfrak{d} : \mathcal{S}^{k+1}(M) \rightarrow \mathcal{S}^k(M)$ definita da

$$(18.56) \quad \int_M g(\mathfrak{d}\alpha, \beta) d\mu_g = \int_M g(\alpha, \mathfrak{d}^*\beta) d\mu_g$$

per ogni $\alpha \in \mathcal{S}^{k+1}(M)$ e $\beta \in \mathcal{S}^k(M)$ con $\text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta \Subset M$.

Osserviamo che la divergenza è la restrizione alle forme simmetriche del codifferenziale covariante della Definizione 18.5.4.

18.6. Il Laplaciano naturale

Sia (M, g) una varietà Riemanniana. Ad ogni rappresentazione lineare di dimensione finita (ρ, V) di $\mathbf{O}(m)$ è associato un fibrato vettoriale $\eta = (E \xrightarrow{\pi_E} M)$, su cui la connessione di Levi-Civita definisce una differenziazione covariante. Indichiamo con $\mathcal{E}(M)$ lo spazio $\Gamma(M, E)$ delle sue sezioni, con $\mathcal{E}^{(1)}(M)$ lo spazio delle forme differenziali a coefficienti in E , cioè delle sezioni delle sezioni \mathcal{C}^∞ del fibrato $\eta \otimes \tau_M^* = (E \otimes_M T^*M \rightarrow M)$, e con

$$(18.57) \quad \nabla : \mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathcal{E}^{(1)}(M),$$

la differenziazione covariante.

Possiamo definire su V un prodotto scalare³ h_V per cui $\rho(\mathbf{O}(m)) \subset \mathbf{O}_{h_V}(V)$. Indichiamo con $(\cdot | \cdot)_0$ il corrispondente prodotto scalare sulle fibre di η . Vale allora

$$(18.58) \quad X(s_1, s_2)_0 = (\nabla_X s_1, s_2)_0 + (s_1, \nabla_X s_2)_0.$$

Risulta allora definito un prodotto scalare naturale sulle fibre di $\eta \otimes \tau_M^*$, che indicheremo con $(\cdot | \cdot)_1$. Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un riferimento ortonormale su un aperto U di M ed $\alpha, \beta \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$, allora

$$(18.59) \quad (\alpha | \beta)_1(p) = \sum_{i=1}^m (\alpha(\sigma_i) | \beta(\sigma_i))_0 \quad \text{su } U.$$

Siano $s \in \mathcal{E}(M)$, $\alpha \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$ tali che $\text{supp } s \cap \text{supp } \alpha \Subset U$. Integrando per parti, otteniamo, indicando con ω_g la forma di volume su U per cui σ è orientato positivamente,

$$\begin{aligned} \int_M (\nabla s | \alpha)_1 \omega_g &= \sum_{i=1}^m \int_M (\nabla_{X_i} s | \alpha(X_i))_0 \omega_g \\ &= \sum_{i=1}^m \int_M (X_i(s | \alpha(X_i))_0 - (s | \nabla_{X_i} [\alpha(X_i)]))_0 \omega_g \end{aligned}$$

³Questo prodotto scalare non è univocamente determinato. Lo è, a meno di una costante moltiplicativa, sui fattori irriducibili della rappresentazione (ρ, V) .

$$\begin{aligned}
&= \int_M L_{X_i}[(s|\alpha(X_i))_0 \omega_g] - \int_M (s|\alpha(X_i))_0 L_X \omega_g - \int_M \left(s \left| \sum_i \nabla_{X_i} [\alpha(X_i)] \right| \right)_0 \omega_g \\
&= - \int_M (s|\nabla^* \alpha)_0 \omega_g
\end{aligned}$$

ove

$$(18.60) \quad \nabla^* \alpha = - \sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i} + \operatorname{div} X_i) [\alpha(X_i)] \quad \text{su } U.$$

Osserviamo che un cambiamento di orientazione cambia il segno di ω_g e quindi di tutti i termini delle equazioni precedenti. La (18.60) è quindi ben definita, a prescindere dal dato di un'orientazione globale su M .

DEFINIZIONE 18.6.1. L'operatore differenziale $\nabla^* : \mathcal{E}^{(1)}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M)$ definito da (18.60) si dice l'*aggiunto formale della differenziazione covariante*.

L'operatore differenziale

$$(18.61) \quad \nabla^* \nabla : \mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathcal{E}(M)$$

è il *Laplaciano naturale* sulle sezioni di η rispetto alla metrica Riemanniana g .

PROPOSIZIONE 18.6.2. *Vale la formula d'integrazione per parti*

$$(18.62) \quad \int_M g(\nabla s_1, \nabla s_2) d\mu_g = \int_M g(\nabla^* \nabla s_1, s_2) d\mu_g,$$

$$\forall s_1, s_2 \in \mathcal{E}(M) \text{ con } \operatorname{supp} s_1 \cap \operatorname{supp} s_2 \Subset M.$$

In particolare, se M è compatta, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea

$$(18.63) \quad \nabla^* \nabla s = 0$$

sono parallele su M .

18.7. Il Laplaciano di Lichnerowicz

Descriviamo in questo paragrafo una nozione generale di Laplaciano sulle varietà Riemanniane, dovuta a Lichnerowicz⁴.

Introduciamo gli operatori di curvatura di Weitzenböck⁵.

Sia $\mathfrak{o}_M = (\mathfrak{o}(M) \xrightarrow{\pi} M)$ il fibrato vettoriale corrispondente alla rappresentazione aggiunta di $\mathbf{O}(m)$. Gli elementi di $\mathfrak{o}_p(M)$ sono gli endomorfismi \mathbb{R} -lineari di $T_p M$ che sono antisimmetrici per g_p :

$$A \in \mathfrak{o}_p(M) \iff (A \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(T_p M), \quad g_p(AX_p, Y_p) + g_p(X_p, AY_p) = 0, \quad \forall X_p, Y_p \in T_p M).$$

⁴André Lichnerowicz (1915-1998) è stato un matematico francese, allievo di Élie Cartan. Ha insegnato a Strasburgo e Parigi, dal 1952 al Collège de France. Si è occupato di geometria differenziale, relatività generale ed ha avuto un ruolo importante nella formulazione dei programmi di insegnamento della matematica in Francia.

⁵Roland Weitzenböck (1885-1955). Matematico austriaco, ha studiato a Vienna, Bonn e Göttingen. Ha insegnato a Praga, e dal 1923 al 1945 ad Amsterdam. Per la sua attività filo-nazista, fu internato al termine della guerra, fino al 1948. Si occupò di teoria degli invarianti, di invarianti spaziali e di teoria dei campi. Ottenne le formule per il Laplaciano di Hodge-deRham nel 1923. [Invariantentheorie, Groningen, Noordhoff]

Se $\alpha \in \Omega^2(M)$ ed $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora

$$g([X]\alpha]^\sharp, Y) = [X]\alpha](Y) = \alpha(X, Y) = -\alpha(Y, X) = -g(X, [Y]\alpha]^\sharp).$$

Quindi α definisce la sezione A_α del fibrato $\mathfrak{o}(M)$

$$(18.64) \quad A_\alpha(X) = [X]\alpha]^\sharp.$$

LEMMA 18.7.1. *La corrispondenza $A : \Omega^2(M) \ni \alpha \rightarrow A_\alpha \in \Gamma(M, \mathfrak{o}(M))$ è un isomorfismo lineare.* \square

Possiamo associare ad $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ la sezione di $A_{X,Y}$ di $\mathfrak{o}(M)$ definita da

$$(18.65) \quad A_{X,Y}(Z) = g(X, Z)Y - g(Y, Z)X, \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} g(A_{X,Y}Z_1, Z_2) &= g(g(X, Z_1)Y - g(Y, Z_1)X, Z_2) \\ &= g(X, Z_1)g(Y, Z_2) - g(Y, Z_1)g(X, Z_2) \\ &= g(Z_1, g(Y, Z_2)X - g(X, Z_2)Y) = -g(Z_1, A_{X,Y}Z_2). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 18.7.2. È $A_{X,Y} = A_{(X \wedge Y)^\flat}$.

Sia ora (ρ, V) una rappresentazione lineare di $\mathbf{O}(m)$ ed $\eta = (E \xrightarrow{\pi_E} M)$ il corrispondente fibrato vettoriale. Lo spazio totale E è il quoziente di $\mathbf{O}(M) \times V$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$(\sigma_1, v_1) \sim (\sigma_2, v_2) \iff (\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2), v_2 = \rho(\sigma_2^{-1}\sigma_1)(v_1)).$$

Indichiamo con $\varpi : \mathbf{O}(M) \times V \rightarrow E$ la proiezione nel quoziente. Ricordiamo ancora che possiamo definire un prodotto scalare h_V su V per cui $\rho(\mathbf{O}(m)) \subset \mathbf{O}_{h_V}(V)$ e che questo definisce un prodotto scalare invariante sulle fibre di η . Il differenziale di ρ nell'origine definisce una rappresentazione lineare $\rho_* : \mathfrak{o}(m) \rightarrow \mathfrak{o}_{h_V}(V)$ dell'algebra di Lie, che definisce un morfismo lineare di fibrati

$$(18.66) \quad [\rho]_* : \mathfrak{o}(M) \longrightarrow \mathfrak{o}(E)$$

ove abbiamo indicato con $\mathfrak{o}(E)$ lo spazio degli endomorfismi lineari antisimmetrici sulle fibre di η . Esso si definisce nel modo seguente. Siano $p \in M$ e T un endomorfismo g_p -antisimmetrico di T_pM . Se $\sigma \in \mathbf{O}_p(M)$, allora $\sigma^{-1} \circ T \circ \sigma \in \mathfrak{o}(m)$. Definiamo $[\rho]_*(T)$ in modo che

$$[\rho]_*(T)\varpi(\sigma, v) = \varpi(\sigma, \rho_*(\sigma^{-1} \circ T \circ \sigma)(v)), \quad \forall v \in V.$$

Definiamo quindi una forma $c_\rho \in \Omega^2(M, \mathfrak{o}(E))$ ponendo

$$(18.67) \quad c_\rho(X, Y) = [\rho]_*(A_{X,Y}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

DEFINIZIONE 18.7.3. Chiamiamo la $c_\rho \in \Omega^2(M, \mathfrak{o}(E))$, definita dalla (18.67), la *forma caratteristica* del fibrato η .

Ricordiamo che su ogni spazio tensoriale $\underline{T}^{r,s}(M)$ è definita la curvatura

$$(18.68) \quad R(X, Y)\tau = \nabla_X \nabla_Y \tau - \nabla_Y \nabla_X \tau - \nabla_{[X, Y]}\tau, \quad \forall \tau \in \underline{T}^{r,s}(M), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Ad esempio, se $\alpha \in \Omega^1(M)$ ed $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, otteniamo

$$(18.69) \quad (R(X, Y)\alpha)(Z) = -\alpha(R(X, Y)Z).$$

Infatti

$$\begin{aligned} (R(X, Y)\alpha)(Z) &= (\nabla_X \nabla_Y \alpha)(Z) - (\nabla_Y \nabla_X \alpha)(Z) - (\nabla_{[X, Y]}\alpha)(Z) \\ &= X((\nabla_Y \alpha)(Z)) - (\nabla_Y \alpha)(\nabla_X Z) - Y((\nabla_X \alpha)(Z)) + (\nabla_X \alpha)(\nabla_Y Z) \\ &\quad - [X, Y]\alpha(Z) + \alpha(\nabla_{[X, Y]}Z) \\ &= X(Y\alpha(Z) - \alpha(\nabla_Y Z)) - (\nabla_Y \alpha)(\nabla_X Z) \\ &\quad - Y(X\alpha(Z) - \alpha(\nabla_X Z)) + (\nabla_X \alpha)(\nabla_Y Z) \\ &\quad - [X, Y]\alpha(Z) + \alpha(\nabla_{[X, Y]}Z) \\ &= XY\alpha(Z) - (\nabla_X \alpha)(\nabla_Y Z) - (\nabla_Y \alpha)(\nabla_X Z) - \alpha(\nabla_X \nabla_Y Z) \\ &\quad - YX\alpha(Z) + (\nabla_Y \alpha)(\nabla_X Z) + (\nabla_X \alpha)(\nabla_Y Z) + \alpha(\nabla_Y \nabla_X Z) \\ &\quad - [X, Y]\alpha(Z) + \alpha(\nabla_{[X, Y]}Z) \end{aligned}$$

da cui, poiché la connessione di Levi-Civita è simmetrica, otteniamo la (18.69).

DEFINIZIONE 18.7.4. Il *tensore di Ricci generalizzato*, od *operatore di curvatura di Weitzenböck*, sui tensori k -controvarianti, con $k \geq 1$, è definito da

$$(18.70) \quad \mathcal{R}ic(\tau)(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (R(Y_i, X_j)\tau)(X_1, \dots, X_{j-1}, Y_i, X_{j+1}, \dots, X_k),$$

ove (Y_1, \dots, Y_m) è un qualsiasi riferimento ortonormale.

In particolare, se α è una 1-forma differenziale, abbiamo

$$(18.71) \quad \mathcal{R}ic(\alpha)(X) = \sum_{i=1}^m R(Y_i, X)\alpha(Y_i) = -\alpha(R(Y_i, X)Y_i)$$

DEFINIZIONE 18.7.5. Un *Laplaciano di Lichnerowicz* è della forma

$$(18.72) \quad \Delta_L \tau = \nabla^* \nabla \tau + c \mathcal{R}ic(\tau),$$

per una costante $c > 0$.

18.8. Laplaciano sulle forme differenziali alternate

18.8.1. Espressione del differenziale mediante la derivazione covariante.

La derivazione covariante rispetto ad una connessione simmetrica ci permette di calcolare il differenziale di una forma alternata con una formula che è diretta generalizzazione di quella, in coordinate, valida per gli spazi Euclidei.

PROPOSIZIONE 18.8.1. *Se ∇ è la derivazione covariante di una connessione affine simmetrica su M , allora, per ogni $\alpha \in \Omega^k(M)$ ed $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ vale la*

$$(18.73) \quad d\alpha(X_0, \dots, X_k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j (\nabla_{X_j} \alpha)(X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k).$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un sistema di riferimento su un aperto U di M e (ξ^1, \dots, ξ^m) il coriferimento duale, definito da $\xi^i(X_j) = \delta_j^i$ per $1 \leq i, j \leq m$, abbiamo

$$(18.74) \quad d\alpha = \sum_{i=1}^m \xi^i \wedge \nabla_{X_i} \alpha \quad \text{in } U.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} d\alpha(X_0, \dots, X_k) &= \sum_j (-1)^j X_j \alpha(\dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &= \sum_j (-1)^j (\nabla_{X_j} \alpha)(\dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad - \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha(\nabla_{X_i} X_j, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha(\nabla_{X_j} X_i, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &= \sum_j (-1)^j (\nabla_{X_j} \alpha)(\dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad - \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha(T(X_i, X_j), \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots), \end{aligned}$$

dove T è la torsione. Otteniamo quindi la (18.73) se supponiamo $T = 0$.

Verifichiamo ora la (18.74). Basta verificare che i due membri dell'equazione assumono gli stessi valori sulle k -uple di elementi del sistema di riferimento σ . Se $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$, otteniamo

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^m \xi^i \wedge \nabla_{X_i} \alpha \right) (X_{i_0}, \dots, X_{i_k}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^k (-1)^j \xi^i(X_{i_j}) (\nabla_{X_i} \alpha)(\dots, \widehat{X}_{i_j}, \dots) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j (\nabla_{X_{i_j}} \alpha)(\dots, \widehat{X}_{i_j}, \dots) \end{aligned}$$

e l'ultimo termine dell'uguaglianza è uguale a $d\alpha(X_{i_0}, \dots, X_{i_k})$ per la (18.73). \square

18.8.2. Aggiunto formale del differenziale. Utilizziamo la Proposizione 18.8.1 per calcolare l'aggiunto formale del differenziale esterno. Osserviamo che, se $\beta \in \mathcal{Q}^{k+1}(M)$ ed $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, allora

$$(X_i \lrcorner \beta)(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) = (-1)^i \beta(X_0, \dots, X_k), \quad \forall i = 0, 1, \dots, k.$$

Supponiamo ora che (M, g) sia una varietà Riemanniana e $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ un sistema di riferimento ortonormale su un aperto U di M . Siano $\alpha \in \mathcal{Q}^k(M)$ e $\beta \in \mathcal{Q}^{k+1}(M)$, con $\text{supp } \alpha \subseteq U$. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} &\int_M g(d\alpha, \beta) d\mu_g \\ &= \sum_{i_0 < \dots < i_k} \sum_j (-1)^j \int_M (\nabla_{X_{i_j}} \alpha)(X_{i_0}, \dots, \widehat{X}_{i_j}, \dots, X_{i_k}) \cdot \beta(X_{i_0}, \dots, X_{i_j}, \dots, X_{i_k}) d\mu_g \\ &= \sum_{i_0 < \dots < i_k} \sum_j \int_M (\nabla_{X_{i_j}} \alpha)(X_{i_0}, \dots, \widehat{X}_{i_j}, \dots, X_{i_k}) \cdot X_{i_j} \lrcorner \beta(X_{i_0}, \dots, \widehat{X}_{i_j}, \dots, X_{i_k}) d\mu_g \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^m \int_M g(\nabla_{X_j} \alpha, X_j \lrcorner \beta) d\mu_g$$

Osserviamo che, se $X, Y, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, è

$$\begin{aligned} (\nabla_X(Y \lrcorner \beta))(X_1, \dots, X_k) &= X\beta(Y, X_1, \dots, X_k) - \sum \beta(Y, \dots, \nabla_X X_j, \dots) \\ &= (\nabla_X \beta)(Y, X_1, \dots, X_k) + \beta(\nabla_X Y, X_1, \dots, X_k), \end{aligned}$$

abbiamo cioè

$$(18.75) \quad \nabla_X(Y \lrcorner \beta) = Y \lrcorner \nabla_X \beta + (\nabla_X Y) \lrcorner \beta.$$

Supponiamo ora di aver fissato un'orientazione su U , ed indichiamo con ω_g la corrispondente forma di volume. Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_M g(\nabla_X \alpha, Y \lrcorner \beta) \omega_g &= \int_M (Xg(\alpha, Y \lrcorner \beta)) \omega_g - \int_M g(\alpha, \nabla_X(Y \lrcorner \beta)) \omega_g \\ &= \int_M L_X(g(\alpha, Y \lrcorner \beta) \omega_g) - \int_M g(\alpha, Y \lrcorner \beta) L_X \omega_g \\ &\quad - \int_M g(\alpha, Y \lrcorner \nabla_X \beta) \omega_g - \int_M g(\alpha, \nabla_X Y \lrcorner \beta) \omega_g \\ &= - \int_M g(\alpha, Y \lrcorner \nabla_X \beta) \omega_g - \int_M g(\alpha, (\nabla_X Y + (\operatorname{div} X)Y) \lrcorner \beta) \omega_g. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi, per l'aggiunto formale del differenziale, l'espressione

$$d^* \beta = - \sum_i X_i \lrcorner \nabla_{X_i} \beta - \left(\sum_i (\nabla_{X_i} X_i + (\operatorname{div} X_i) X_i) \right) \lrcorner \beta.$$

Poiché

$$\sum_i (\operatorname{div} X_i) X_i = \sum_{i,j} g(\nabla_{X_j} X_i, X_j) X_i = - \sum_{i,j} g(X_i, \nabla_{X_j} X_j) X_i = - \sum_j \nabla_{X_j} X_j,$$

l'ultima sommatoria al secondo membro dell'espressione che abbiamo ottenuto per $d^* \beta$ si annulla ed otteniamo perciò

PROPOSIZIONE 18.8.2. *Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un riferimento ortogonale su un aperto U di M e $\beta \in \Omega^{k+1}(M)$, allora*

$$(18.76) \quad d^* \beta = \sum_{i=0}^m X_i \lrcorner \nabla_{X_i} \beta \quad \text{in } U. \quad \square$$

18.8.3. Aggiunti formali della derivazione covariante e del prodotto esterno. Raccogliamo in questo breve paragrafo alcune formule che ci saranno utili nel seguito.

LEMMA 18.8.3. *Se (M, g) è una varietà Riemanniana orientata, allora*

$$(18.77) \quad \nabla_X^* \alpha = -\nabla_X \alpha - (\operatorname{div} X) \cdot \alpha, \quad \forall \alpha \in \Omega^k(M), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\beta \in \Omega^k(M)$ e $\operatorname{supp} \alpha \cap \operatorname{supp} \beta \Subset M$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_M g(\alpha, \nabla_X \beta) \omega_g &= \int_M (Xg(\alpha, \beta)) \omega_g - \int_M g(\nabla_X \alpha, \beta) \omega_g \\ &= - \int_M g(\alpha, \beta) (\operatorname{div} X) \omega_g - \int_M g(\nabla_X \alpha, \beta) \omega_g, \end{aligned}$$

da cui segue la (18.77). □

LEMMA 18.8.4. Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$. L'applicazione

$$(18.78) \quad \mathcal{Q}^k(M) \ni \alpha \longrightarrow X^\flat \wedge \alpha \in \mathcal{Q}^{k+1}(M)$$

è l'aggiunta formale del prodotto interno

$$(18.79) \quad \mathcal{Q}^{k+1}(M) \ni \beta \longrightarrow X \lrcorner \beta \in \mathcal{Q}^k(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ un riferimento ortonormale su un aperto U di M . Abbiamo in U , per $\alpha \in \mathcal{Q}^k(M)$, $\beta \in \mathcal{Q}^{k+1}(M)$,

$$\begin{aligned} g(\alpha, X \lrcorner \beta) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \beta(X, X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \\ &= \sum_{i_0} \sum_{i_1 < \dots < i_k} g(X, X_{i_0}) \alpha(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \beta(X_{i_0}, X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \\ &= \sum_{i_0 < i_1 < \dots < i_k} \sum_{h=0}^k (-1)^h g(X, X_{i_h}) \alpha(\dots, \widehat{X_{i_h}}, \dots) \beta(X_{i_0}, X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \\ &= g(X^\flat \wedge \alpha, \beta). \end{aligned}$$

Questa uguaglianza dimostra il Lemma. \square

18.8.4. La formula di Weitzenböck. Dalla (18.74) della Proposizione 18.8.1 abbiamo:

PROPOSIZIONE 18.8.5. Sia $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ un riferimento ortonormale su un aperto U di M . Se $\alpha \in \mathcal{Q}^k(M)$, abbiamo

$$(18.80) \quad d\alpha = \sum_{i=1}^m X_i^\flat \wedge \nabla_{X_i} \alpha \quad \text{in } U.$$

Ricordiamo che la derivazione covariante è una derivazione dell'algebra esterna. È cioè

$$(18.81) \quad \nabla_X(\alpha \wedge \beta) = (\nabla_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \nabla_X \beta, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall \alpha, \beta \in \mathcal{Q}^*(M).$$

Metriche invarianti

19.1. Metriche pseudo-Riemanniane su spazi omogenei

Siano \mathbf{K} un gruppo di Lie connesso, \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso, $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$. Indichiamo con \mathfrak{p}_0 il punto base $\pi(\mathbf{H})$ ed identifichiamo T_0M al quoziente $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$ delle algebre di Lie \mathfrak{k} di \mathbf{K} ed \mathfrak{h} di \mathbf{H} . Ricordiamo che, per $X \in \mathfrak{k}$, $X^M \in \mathfrak{X}(M)$ è il generatore infinitesimale del gruppo a un parametro $(t, p) \rightarrow \exp(tX) \cdot p$.

Indichiamo con $\overline{\text{Ad}}(h)$ la rappresentazione aggiunta di \mathbf{H} sul quoziente $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$, e con \bar{X} l'elemento di $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$ corrispondente ad $X \in \mathfrak{k}$.

Supponiamo che \mathbf{K} operi effettivamente su M .

PROPOSIZIONE 19.1.1. *Vi è una corrispondenza biunivoca tra le metriche pseudo-Riemanniane g , \mathbf{K} -invarianti su M , e le forme bilineari simmetriche non degeneri b su $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$, invarianti rispetto ad $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{H})$, data da*

$$(19.1) \quad g_0(X^M, Y^M) = b(\bar{X}, \bar{Y}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

La g è definita positiva se e soltanto se lo è la b .

DIMOSTRAZIONE. La condizione necessaria e sufficiente affinché g sia una metrica pseudo-Riemanniana \mathbf{K} -invariante è che, per ogni $a \in \mathbf{K}$, risulti

$$g_{\pi(a)}(a_*X^M, a_*Y^M) = g_0(X^M, Y^M), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

Se $b \in \mathbf{K}$ e $\pi(b) = \pi(a)$, allora $a^{-1}b = h \in \mathbf{H}$ ed abbiamo allora

$$\begin{aligned} g_0(X^M, Y^M) &= g_{\pi(b)}(b_*X^M, b_*Y^M) = g_{\pi(a)}(b_*X^M, b_*Y^M) \\ &= g_0(a_*^{-1}b_*X^M, a_*^{-1}b_*Y^M) = g_0(h_*X^M, h_*Y^M). \end{aligned}$$

Questo dimostra che possiamo definire una forma bilineare $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{H})$ -invariante ponendo:

$$b(\bar{X}, \bar{Y}) = g_0(X^M, Y^M).$$

Vice versa, poiché $h_*X^M = (\text{Ad}(h)(X))^M$ per ogni $X \in \mathfrak{k}$, la (19.1) definisce una metrica \mathbf{K} -invariante, purché la b sia $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{H})$ -invariante. \square

COROLLARIO 19.1.2. *Supponiamo che M sia riduttiva, con decomposizione*

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}.$$

Allora la

$$(19.2) \quad g_0(X^M, Y^M) = b(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}$$

definisce una corrispondenza biunivoca tra le metriche pseudo-Riemanniane g , \mathbf{K} -invarianti su M , e le forme bilineari simmetriche non degeneri $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invarianti su \mathfrak{m} . Abbiamo

$$(19.3) \quad b([Z, X], Y) + b(X, [Z, Y]) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}, \forall Z \in \mathfrak{h},$$

e la condizione (19.3) è equivalente all'invarianza di b rispetto ad $\text{Ad}(\mathbf{H})$ se \mathbf{H} è connesso.

19.2. La connessione di Levi-Civita sugli spazi omogenei

Data una connessione affine Γ su M , associamo ad ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ il tensore 1-covariante ed 1-contravariante A_X , definito da

$$(19.4) \quad A_X Y = [X, Y] - \nabla_X Y = -\nabla_Y X - T(X, Y), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

LEMMA 19.2.1. Se g è una metrica pseudo-Riemanniana \mathbf{K} -invariante su $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$, allora per ogni $X \in \mathfrak{k}$, il tensore A_{X^M} è g -antisimmetrico.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $X \in \mathfrak{k}$, il gruppo a un parametro $\exp(tX)$ definisce un gruppo a un parametro di isometrie di (M, g) . Quindi la derivata di Lie $L_{X^M} g$ della metrica è nulla. Otteniamo quindi, per ogni $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned} X^M g(Y, Z) &= (L_{X^M} g)(Y, Z) + g([X^M, Y], Z) + g(Y, [X^M, Z]) \\ &= g([X^M, Y], Z) + g(Y, [X^M, Z]). \end{aligned}$$

D'altra parte, vale anche la

$$\begin{aligned} X^M g(Y, Z) &= (\nabla_{X^M} g)(Y, Z) + g(\nabla_{X^M} Y, Z) + g(Y, \nabla_{X^M} Z) \\ &= g(\nabla_{X^M} Y, Z) + g(Y, \nabla_{X^M} Z). \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro otteniamo

$$(19.5) \quad g(A_{X^M} Y, Z) + g(Y, A_{X^M} Z) = 0, \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

ed il Lemma è dimostrato. \square

TEOREMA 19.2.2. Supponiamo che M sia riduttiva, con decomposizione

$$(19.6) \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}.$$

Se g è la metrica pseudo-Riemanniana \mathbf{K} -invariante su M , associata alla forma bilineare simmetrica $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante b , allora la sua connessione di Levi-Civita è definita da

$$(19.7) \quad \Lambda_{\mathfrak{m}}(X)(Y) = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + \beta(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

ove β è la forma bilineare simmetrica definita da

$$(19.8) \quad 2b(\beta(X, Y), Z) = b(X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}) + b([Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}.$$

In particolare, la connessione di Levi-Civita coincide con la connessione naturale priva di torsione se e soltanto se il secondo membro della (19.8) è uguale a 0 per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che $\Lambda_m(X) = -A_{X_0^M}$ per ogni $X \in \mathfrak{m}$, e quindi $\Lambda_m(X)$ è antisimmetrica per ogni $X \in \mathfrak{m}$. Per la (??) del Teorema ??, abbiamo

$$\Lambda_m(X)Y - \Lambda_m(Y)X = [X, Y]_m, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

Quindi

$$\beta(X, Y) - \beta(Y, X) = [X, Y]_m - (\Lambda_m(X)Y - \Lambda_m(Y)X) = 0$$

e dunque β è simmetrica e soddisfa

$$b(\beta(X, Y), Z) + b(Y, \beta(X, Z)) = \frac{1}{2}(b([Y, X]_m, Z) + b(Y, [Z, X]_m)).$$

Da questa, dalle uguaglianze che da questa si ottengono mediante le permutazioni cicliche di X, Y, Z e dalla simmetria di β ricaviamo finalmente la (19.8). \square

DEFINIZIONE 19.2.3. Uno spazio omogeneo riduttivo $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$, con (19.6) ed una metrica pseudo-Riemanniana associata ad una forma bilineare simmetrica non degenera b su \mathfrak{m} si dice *naturalmente riduttivo* se

$$(19.9) \quad b(X, [Z, Y]_m) + b([Z, X]_m, Y) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}.$$

PROPOSIZIONE 19.2.4. *Supponiamo che M sia naturalmente riduttivo, con una metrica pseudo-Riemanniana invariante associata alla forma bilineare b . Allora la sua curvatura soddisfa*

$$(19.10) \quad g_0(R(X^M, Y^M)Y^M, X^M) = \frac{1}{4}b([X, Y]_m, [X, Y]_m) - b([X, Y]_b, Y, X),$$

$$\forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} R_0(X, Y)Z &= \frac{1}{4}[X, [Y, Z]_m]_m - \frac{1}{4}[Y, [X, Z]_m]_m \\ &\quad - \frac{1}{2}[[X, Y]_m, Z]_m - [[X, Y]_b, Z], \\ &\quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}. \end{aligned}$$

La tesi segue allora dal Teorema 19.2.2. \square

Un caso importante in cui si applicano i risultati precedenti è il seguente:

TEOREMA 19.2.5. *Sia $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ e supponiamo che vi sia una forma bilineare simmetrica non degenera $\text{Ad}(\mathbf{K})$ -invariante \mathbf{f} su \mathfrak{k} la cui restrizione ad \mathfrak{h} sia non degenera.*

Poniamo

$$(19.11) \quad \mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{k} \mid \mathbf{f}(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}.$$

Allora vale la decomposizione (19.6) ed inoltre la

$$(19.12) \quad b(X, Y) = \mathbf{f}(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

è una forma bilineare simmetrica non degenera ed $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante su \mathfrak{m} .

Rispetto a questa decomposizione ed alla metrica pseudo-Riemanniana \mathbf{K} -invariante associata a questa scelta di b lo spazio omogeneo M è naturalmente riduttivo.

Il tensore di curvatura rispetto a questa metrica soddisfa

$$(19.13) \quad g_0(R(X^M, Y^M)Y^M, X^M) = \frac{1}{4}\mathbf{f}([X, Y]_m, [X, Y]_m) + \mathbf{f}([X, Y]_b, [X, Y]_b),$$

$$\forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

OSSERVAZIONE 19.2.6. Se possiamo scegliere la \mathbf{f} definita positiva, allora la metrica g definita nel teorema precedente è Riemanniana, con curvatura sezionale non negativa.

ESEMPIO 19.2.7. Supponiamo che \mathbf{K} ammetta una forma bilineare simmetrica $\text{Ad}(\mathbf{K})$ -invariante e definita positiva e poniamo $\mathbf{H} = \{e\}$. Allora la connessione di Levi-Civita associata alla metrica descritta nel teorema precedente coincide con la 0-connessione ed ha curvatura $R_e(X^*, Y^*) = -\frac{1}{4}\text{ad}([X, Y])$.

Spazi simmetrici

20.1. Spazi affini localmente simmetrici

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m , con una connessione affine definita dalla derivazione covariante ∇ . Fissiamo un punto p di M ed intorno $V_0(p)$ di 0 in T_pM , ed U_p di p in M tali che l'esponenziale in p sia definito su $V_0(p)$ e sia un diffeomorfismo di $V_0(p)$ su U_p . Ricordiamo che l'esponenziale è definito da $\exp_p(X) = \gamma_X(1)$, se γ_X è la geodetica di punto iniziale p e velocità iniziale $X \in T_pM$. Possiamo supporre che $V_0(p)$ sia simmetrico rispetto all'origine e definire quindi in U_p la *simmetria geodetica rispetto al punto p* mediante la corrispondenza

$$(20.1) \quad s_p : U_p \ni \exp_p(X) \longrightarrow \exp_p(-X) \in U_p.$$

La s_p è un diffeomorfismo di U_p in sé con $ds_p(p) = -I$ (I è qui l'identità su T_pM) ed $s_p^2 = s_p \circ s_p = id_{U_p}$.

DEFINIZIONE 20.1.1. Diciamo che (M, ∇) è una *varietà affine localmente simmetrica* se ogni punto p di M ammette un intorno aperto U_p in M su cui la simmetria geodetica sia definita e sia una trasformazione affine.

TEOREMA 20.1.2. *Una varietà affine (M, ∇) è localmente simmetrica se e soltanto se è priva di torsione ed il suo tensore di curvatura è parallelo: è cioè*

$$(20.2) \quad T = 0, \quad \nabla_X R = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che (M, ∇) sia localmente simmetrica. In particolare, per ogni punto $p \in M$, il differenziale in p della simmetria geodetica s_p , essendo il differenziale di un'affinità, preserva torsione e curvatura. Avremo quindi

$$T(X_p, Y_p) = -T(-X_p, -Y_p) = -T(X_p, Y_p) \Rightarrow T(X_p, Y_p) = 0, \quad \forall X_p, Y_p \in T_pM.$$

Ciò dimostra che la torsione è nulla. Analogamente, se $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$, otteniamo:

$$[(\nabla_X R)(Y, Z)T]_p = -[(\nabla_{-X} R)(-Y, -Z)(-T)]_p = -[(\nabla_X R)(Y, Z)T]_p$$

e quindi $\nabla_X R = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$. □

Per concludere la dimostrazione, proveremo più in generale il:

LEMMA 20.1.3. *Siano (M, ∇) ed (M', ∇') due varietà affini con torsioni (risp. T e T') e curvatures (risp. R e R') parallele. Siano $p \in M$ e $q \in M'$ due punti per cui*

vi sia un isomorfismo lineare $\Phi : T_p M \rightarrow T_q M'$ per cui

$$\begin{cases} \Phi(T(v_1, v_2)) = T'(\Phi(v_1, v_2)), \\ \Phi(R(v_1, v_2)v_3) = R'(\Phi(v_1), \Phi(v_2))\Phi(v_3). \end{cases} \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in T_p M.$$

Allora esistono intorno aperti U_p di p in M , U'_q di q in M' ed un diffeomorfismo affine $\phi : U_p \rightarrow U'_q$ con $d\phi(p) = \Phi$. Tale ϕ è essenzialmente unica, è cioè univocamente determinata da Φ sulla componente connessa di p dell'intorno aperto di p in M su cui è definita.

DIMOSTRAZIONE. Sia $U_p = \exp_p(V_0(p))$ un intorno normale di p in M . Siano X_1, \dots, X_m campi di vettori in U_p ottenuti mediante il trasporto parallelo, lungo le geodetiche uscenti da p , di una base x_1, \dots, x_m di $T_p M$. L'ipotesi che curvatura e torsione abbiano differenziale covariante nullo ci dice che le componenti di T e di R , calcolate rispetto ai campi X_1, \dots, X_m , sono costanti in U_p .

Siano $x'_1 = \Phi(x_1), \dots, x'_m = \Phi(x_m)$ ed X'_1, \dots, X'_m i campi di vettori, definiti in un intorno normale $U'_q = \exp_q(V'_0(q))$, ottenuti da x'_1, \dots, x'_m per trasporto parallelo lungo le geodetiche uscenti da q . Per l'ipotesi che torsione e curvatura abbiano differenziale covariante nullo, le componenti di T' e di R' rispetto ai campi X'_1, \dots, X'_m , sono costanti. Poiché coincidono con quelle di T e di R in q , esse coincidono, essendo costanti, su tutto U'_q .

Per $r > 0$ sufficientemente piccolo, detta B_r la palla di raggio r con centro nell'origine di \mathbb{R}^m , sono definiti due diffeomorfismi

$$\begin{cases} \Psi(t_1, \dots, t_m) = \exp_p(t_1 x_1 + \dots + t_m x_m), \\ \Psi'(t_1, \dots, t_m) = \exp_q(t_1 x'_1 + \dots + t_m x'_m), \end{cases} \quad \forall (t_1, \dots, t_m) \in B_r$$

con intorno aperti $W_p \subseteq U_p$ di p in M e $W_q \subseteq U'_q$ di q in M' . La Φ è allora definita dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} & B_r & \\ \Psi \swarrow & & \searrow \Psi' \\ W_p & \xrightarrow{\phi} & W_q \end{array}$$

Il fatto che la ϕ così costruita sia un'affinità, segue dall'unicità della soluzione delle equazioni di struttura¹. \square

DEFINIZIONE 20.1.4. Diciamo che una varietà Riemanniana (M, g) è localmente simmetrica se ogni punto p di M ammette un intorno normale in cui la simmetria geodetica (rispetto alla connessione di Levi-Civita) sia un'isometria locale.

¹Ricordiamo che le equazioni di struttura sono le :

$$\begin{cases} d\omega^i = -\omega_h^i \wedge \omega^h + \frac{1}{2} T_{j,h}^i \omega^j \wedge \omega^h \\ d\omega_j^i = -\omega_h^i \wedge \omega_j^h + \frac{1}{2} R_{j,h,k}^i \omega^h \wedge \omega^k \end{cases}$$

con $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{i,j}^h X_h$, $T(X_i, X_j) = T_{i,j}^h X_h$, $R(X_h, X_k)X_j = R_{j,h,k}^i X_i$, $\omega^i(X_j) = \delta_j^i$, $\omega_j^i = \Gamma_{h,j}^i \omega^h$. Le forme ω^i ci consentono di calcolare le coordinate normali nell'intorno del punto p , quando i campi di vettori X_i siano scelti come nella dimostrazione del lemma.

TEOREMA 20.1.5. *Una varietà Riemanniana (M, g) è localmente simmetrica se e soltanto se la sua curvatura sezionale è invariante rispetto al trasporto parallelo.*

DIMOSTRAZIONE. Se (M, g) è localmente simmetrica, allora il suo tensore di curvatura, e quindi a maggior ragione la sua curvatura sezionale, è invariante per trasporto parallelo. Il viceversa segue dalle proprietà algebriche del tensore di curvatura: se s_p è la simmetria geodetica rispetto al punto p , consideriamo il tensore $B(X, Y, Z, T) = R(X, Y, Z, T) - R(s_p(X), s_p(Y), s_p(Z), s_p(T))$, definito quando $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(U_p)$ per un intorno normale simmetrico U_p di $p \in M$. Esso è antisimmetrico rispetto alla prima e alla seconda coppia di indici e simmetrico per lo scambio della prima con la seconda coppia di indici. Quindi esso si annulla identicamente perché, per l'ipotesi dell'invarianza rispetto alla simmetria geodetica della curvatura sezionale, abbiamo $B(X, Y, X, Y) = 0$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(U_p)$. Da questo si deduce l'invarianza di R rispetto al trasporto parallelo. Resta da verificare che le simmetrie geodetiche di una varietà Riemanniana, quando siano trasformazioni affini, sono anche isometrie. Questo è il contenuto del lemma seguente. \square

LEMMA 20.1.6. *Siano (M, g) una varietà Riemanniana connessa e $\phi : M \rightarrow M$ un'affinità per la connessione di Levi-Civita. Se per un punto p_0 di M il differenziale $d\phi(p_0) : T_{p_0}M \rightarrow T_{\phi(p_0)}M$ è un'isometria di spazi Euclidei, allora $\phi : M \rightarrow M$ è un'isometria.*

DIMOSTRAZIONE. Siano q un qualsiasi punto di M e $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una curva differenziabile che congiunga q a p_0 . Detto $\tau : T_qM \rightarrow T_{p_0}M$ il trasporto parallelo lungo γ , per ogni $x, y \in T_qM$, abbiamo

$$\begin{aligned} g_q(x, y) &= g_{p_0}(\tau(x), \tau(y)) && \text{perché } \tau \text{ preserva il prodotto scalare,} \\ &= g_{\phi(p_0)}(d\phi_{p_0}(\tau(x)), d\phi_{p_0}(\tau(y))) && \text{per l'ipotesi che } d\phi_{p_0} \text{ sia un'isometria,} \\ &= g_{\phi(q)}(d\phi_q(x), d\phi_q(y)) \end{aligned}$$

perché, essendo la ϕ affine, la $d\phi$ commuta col trasporto parallelo, trasporta cioè vettori paralleli lungo la curva γ in vettori paralleli lungo la curva $\phi \circ \gamma$. \square

20.2. Alcuni risultati sui gruppi di trasformazioni

Premettiamo allo studio del gruppo $O(M, g)$ delle isometrie di una varietà Riemanniana (M, g) alcune generalità sui gruppi di trasformazioni differenziabili.

TEOREMA 20.2.1. *Siano M una varietà differenziabile numerabile all'infinito e G un gruppo di diffeomorfismi di M in sé. Denotiamo con \mathfrak{G} l'insieme dei campi di vettori X su M che generano sottogruppi a un parametro di G .*

Se la sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{X}(M)$ generata da \mathfrak{G} ha dimensione finita, allora \mathfrak{G} è un'algebra di Lie e possiamo definire su G una struttura di gruppo di Lie di trasformazioni di M , con algebra di Lie (isomorfa a) \mathfrak{G} .

DIMOSTRAZIONE. Se $X \in \mathfrak{G}$, indichiamo con $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \text{Exp}(tX) \in G$ il gruppo a un parametro di diffeomorfismi generato da X . Siano $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ la sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{X}(M)$ generata da \mathfrak{G} , \tilde{G} un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$, ed $\exp : \mathfrak{G} \rightarrow \tilde{G}$ la corrispondente applicazione

esponenziale. Ogni $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ è generatore infinitesimale di un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di M , che denoteremo ancora con $\text{Exp}(tX)$:

$$V_X \ni (t, p) \longrightarrow \text{Exp}(tX)p \in M, \quad \{0\} \times M \subset V_X^{\text{aperto}} \subset \mathbb{R} \times M,$$

$$\text{Exp}(0 \cdot X)p = p, \quad \frac{d}{dt} \text{Exp}(tX)p = X_{\text{Exp}(tX)p}, \quad \forall p \in M, \quad \forall (t, p) \in V_X.$$

I campi X di \mathfrak{G} sono completi e quindi porremo $V_X = (\mathbb{R} \times M)$, se $X \in \mathfrak{G}$.

Poiché abbiamo supposto che $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ sia di dimensione finita, per i teoremi di esistenza, unicità e dipendenza \mathcal{C}^∞ dai dati iniziali per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie, possiamo trovare un intorno aperto \mathcal{U} di $(\{e\} \times M)$ in $(\tilde{\mathfrak{G}} \times M)$ tale che, se $(a, p) \in \mathcal{U}$, allora vi sono $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ e $t \in \mathbb{R}$ tali che $(t, p) \in V_X$ e $a = \exp(tX)$.

Per completare la dimostrazione, proviamo ora alcuni lemmi. □

LEMMA 20.2.2. Siano $X, Y \in \mathfrak{G}$. Allora $Z = \text{Ad}_{\exp(X)}(Y) \in \mathfrak{G}$.

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo verificare che Z genera un sottogruppo a un parametro di \mathfrak{G} . Poiché

$$M \ni p \rightarrow \text{Exp}(tZ)p = \text{Exp}(X) \circ \text{Exp}(tY) \circ \text{Exp}(-X)p \in M$$

definisce per ogni $t \in \mathbb{R}$ una trasformazione di \mathfrak{G} , il campo Z è completo e perciò appartiene a \mathfrak{G} . □

LEMMA 20.2.3. \mathfrak{G} genera $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ come spazio vettoriale su \mathbb{R} .

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con W il sottospazio vettoriale di $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ generato da \mathfrak{G} . Per il lemma precedente, abbiamo $\text{Ad}(\exp(\mathfrak{G}))(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{G}$ e quindi, per linearità, abbiamo anche $\text{Ad}(\exp(\mathfrak{G}))(W) \subseteq W$. Poiché \mathfrak{G} genera $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ come algebra di Lie, $\exp(\mathfrak{G})$ genera $\tilde{\mathfrak{G}}$ come gruppo. L'insieme degli elementi $a \in \tilde{\mathfrak{G}}$ per cui $\text{Ad}_a(W) \subseteq W$ è un sottogruppo di $\tilde{\mathfrak{G}}$. Ne segue che $\text{Ad}(\tilde{\mathfrak{G}})(W) \subseteq W$. Otteniamo in particolare che $\text{Ad}(\exp(W))(W) \subseteq W$, che ci dà, differenziando, $[W, W] \subseteq W$. Quindi W è un'algebra di Lie e perciò coincide con $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$. □

LEMMA 20.2.4. $\mathfrak{L}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{G}$ una base di $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ come spazio vettoriale. Allora l'applicazione

$$t_1 X_1 + \dots + t_n X_n \rightarrow \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_n X_n)$$

è un diffeomorfismo di un intorno N_0 di 0 in $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ su un intorno U_ϵ dell'identità e di $\tilde{\mathfrak{G}}$. Quindi, se $Y \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$, possiamo trovare un $\epsilon > 0$ e funzioni $a_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\sum_{i=1}^n a_i(t) X_i \in N_0$ ed

$$\exp(tY) = \exp(a_1(t) X_1) \cdots \exp(a_n(t) X_n) \quad \text{in } \tilde{\mathfrak{G}} \text{ se } |t| < \epsilon.$$

Questa uguaglianza ci dà la

$$\text{Exp}(tY) = \text{Exp}(a_1(t) X_1) \circ \cdots \circ \text{Exp}(a_n(t) X_n) \quad \text{su } M \text{ se } |t| < \epsilon.$$

Definendo $\text{Exp}(tY) = (\text{Exp}[(t/\nu)Y])^\nu$ se $|t| < \nu\epsilon$, otteniamo che $Y \in \mathfrak{G}$. Questo completa la dimostrazione del lemma. □

Proseguiamo nella dimostrazione del Teorema 20.2.1.

Sia \mathbf{G}^* il gruppo di diffeomorfismi di M generato da $\exp(\mathfrak{G})$. Poiché \mathbf{G}^* è generato dai sottogruppi a un parametro contenuti in \mathbf{G} , abbiamo $\mathbf{G}^* \subset \mathbf{G}$. Poiché per ogni $g \in \mathbf{G}$ ed ogni sottogruppo a un parametro $\mathbb{R} \ni t \rightarrow a_t \in \mathbf{G}$ anche $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \text{ad}(g)(a_t) \in \mathbf{G}$ è ancora un sottogruppo a un parametro di \mathbf{G} , il sottogruppo \mathbf{G}^* è normale in \mathbf{G} . Inoltre, l'applicazione $\text{ad}(g) : \mathbf{G}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$ è continua² per la topologia di gruppo di Lie di \mathbf{G}^* , perché trasforma sottogruppi a un parametro in sottogruppi a un parametro.

Il Teorema 20.2.1 è conseguenza del lemma seguente.

LEMMA 20.2.5. *Sia \mathbf{G}^* un sottogruppo normale di un gruppo \mathbf{G} . Se \mathbf{G}^* è un gruppo topologico e le applicazioni $\text{ad}(g) : \mathbf{G}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$ sono continue per ogni $g \in \mathbf{G}$, allora vi è un'unica topologia di gruppo topologico su \mathbf{G} per cui \mathbf{G}^* sia aperto in \mathbf{G} .*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo su \mathbf{G} la topologia meno fine per cui sono aperti tutti gli insiemi $L_g(A)$ con A aperto di \mathbf{G}^* . Si verifica facilmente che questa topologia è l'unica con le proprietà richieste nell'enunciato del lemma. \square

OSSERVAZIONE 20.2.6. In generale la topologia su \mathbf{G} è più fine della topologia compatta-aperta. Inoltre, non è detto che le componenti connesse di \mathbf{G} , con la topologia che abbiamo definito, formino un insieme di cardinalità al più numerabile. Possiamo ad esempio considerare l'azione sul gruppo additivo \mathbb{R} , che identifichiamo alla varietà M , di un qualsiasi suo sottogruppo \mathbf{G} totalmente sconnesso: in questo caso $\mathfrak{G} = \{0\}$ e la costruzione che abbiamo fatto ci dà su \mathbf{G} la topologia discreta.

Ricordiamo che un *parallelismo assoluto* su una varietà differenziabile M è una sezione $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{F}(M))$ del fibrato dei suoi sistemi di riferimento. In modo equivalente, è il dato di m campi di vettori X_1, \dots, X_m che definiscono in ogni punto $p \in M$ una base $(X_1(p), \dots, X_m(p))$ di $T_p M$. Un diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$ definisce un diffeomorfismo di fibrati principali $\hat{f} : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$.

DEFINIZIONE 20.2.7. Se (M, σ) è la coppia formata da una varietà differenziabile M e da un parallelismo assoluto σ assegnato su M , chiameremo *automorfismi* di (M, σ) i diffeomorfismi $f : M \rightarrow M$ tali che $\hat{f} \circ \sigma = \sigma \circ f$.

Gli automorfismi di (M, σ) formano un gruppo, che denoteremo $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$.

TEOREMA 20.2.8. *Sia (M, σ) la coppia formata da una varietà differenziabile connessa M numerabile all'infinito e da un parallelismo assoluto σ su M . Allora $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ è un gruppo di Lie di trasformazioni con $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{Aut}(M, \sigma) \leq \dim_{\mathbb{R}} M$. Più precisamente, per ogni $p \in M$, l'applicazione*

$$(*) \quad \mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni g \rightarrow g(p) \in M$$

² Un teorema di Chevalley ([Theory of Lie groups. Princeton Univ. Press, 1946], p.128) ci dice che, se \mathbf{G} e \mathbf{G}' sono due gruppi di Lie, un omomorfismo algebrico $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}'$ è un omomorfismo di gruppi di Lie se e soltanto se trasforma sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} in sottogruppi a un parametro di \mathbf{G}' .

è iniettiva e la sua immagine è una sottovarietà chiusa di M . Vi è un'unica struttura di gruppo di Lie su $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ per cui la (*) sia un diffeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma(p) = (X_1(p), \dots, X_m(p))$ e sia \mathfrak{B} il sottospazio vettoriale reale di $\mathfrak{X}(M)$ generato da X_1, \dots, X_m . Per definizione, le trasformazioni di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ lasciano \mathfrak{B} invariante. In particolare gli elementi di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ commutano con gli elementi dei sottogruppi a un parametro $\phi_v(\mathbf{t})$ di diffeomorfismi di M generati dagli elementi v di \mathfrak{B} . Poniamo $\tau_v = \phi_v(1)$. Osserviamo che, per ogni punto $p \in M$, $\tau_v(q)$ è definita per v in un intorno di 0 in \mathfrak{B} e q in un intorno di p in M .

LEMMA 20.2.9. Per ogni $p \in M$ l'applicazione $\mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni g \rightarrow g(p) \in M$ è iniettiva.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $g \in \mathbf{Aut}(M, \sigma)$ l'insieme $F_g = \{q \in M \mid g(q) = q\}$ dei punti fissi di g è un sottoinsieme chiuso di M . Fissato un punto $q \in M$, al variare di v in un intorno di 0 in \mathfrak{B} , gli elementi $\tau_v(q)$ sono definiti e formano un intorno di q in M . Poiché, come abbiamo osservato, $g \circ \tau_v = \tau_v \circ g$, otteniamo che F_g contiene un intorno di q . Dunque F_g risulta aperto e chiuso in M e quindi o è vuoto, o coincide con M per l'ipotesi che M sia connesso. \square

Sia $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ ($T > 0$) una curva differenziabile. Risultano allora determinate m funzioni scalari $a_\gamma^i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\dot{\gamma}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^m a_\gamma^i(\mathbf{t}) X_i(\gamma(\mathbf{t}))$ per ogni $t \in [0, T]$. Due curve differenziabili $\gamma_1, \gamma_2 : [0, T] \rightarrow M$ si diranno *parallele nel parallelismo completo* σ se $a_{\gamma_1}^i(\mathbf{t}) = a_{\gamma_2}^i(\mathbf{t})$ per ogni $t \in [0, T]$. Osserviamo che, data una curva differenziabile $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ ed un punto q_0 , vi è al più una curva differenziabile γ' parallela a γ ed uscente dal punto q_0 ; esisterà poi comunque, per qualche $0 < \epsilon \leq T$ sufficientemente piccolo, una $\gamma' : [0, \epsilon] \rightarrow M$ uscente da p_0 e parallela alla restrizione di γ a $[0, \epsilon]$.

LEMMA 20.2.10. Per ogni $p_0 \in M$, l'insieme $\mathbf{Aut}(M, \sigma)(p_0)$ è chiuso in M .

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{a_k\}$ una successione di elementi di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ tali che $\{a_k(p_0)\}$ converga a un elemento $q_0 \in M$.

Dimostriamo che ogni curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uscente dal punto p_0 ammette una parallela $\gamma' : [0, 1] \rightarrow M$ uscente da q_0 .

A questo scopo, indichiamo con T l'estremo superiore dei numeri reali $a > 0$ per cui la restrizione di γ a $[0, a]$ ammette una parallela γ'_a con punto iniziale q_0 . Vogliamo dimostrare che esiste la parallela γ'_T . A questo scopo, osserviamo che esistono le parallele $\gamma'_{T'}$, per ogni $0 < T' < T$ e che per ogni t con $0 \leq t < T$, abbiamo $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\gamma(\mathbf{t})) = \gamma'_{T'}(\mathbf{t})$ per $0 \leq t \leq T' < T$.

Fissiamo poi un intorno \mathfrak{B}_0 di 0 in \mathfrak{B} e un intorno U di $\gamma(T)$ in M tali che $\tau_v(p)$ sia definita per $v \in \mathfrak{B}_0$ e $p \in U$. Allora τ_v è anche definita, per $v \in \mathfrak{B}_0$, su tutti gli insiemi $a_k(U)$. Sia $\mathbf{t}_0 < T$ tale che $a_k(\gamma(\mathbf{t}_0)) \in U$ per ogni $k \gg 1$ e $\gamma(T) = \tau_{v_0}(\gamma(\mathbf{t}_0))$ per qualche $v_0 \in \mathfrak{B}_0$.

Possiamo allora definire γ'_T ponendo $\gamma'_T(\mathbf{t}) = \gamma'_{T'}(\mathbf{t})$ se $0 \leq t \leq T' < T$ e $\gamma'_T(T) = \tau_{v_0}(\gamma'_{T'}(\mathbf{t}_0))$ se $\mathbf{t}_0 \leq T' < T$.

Se fosse $T < 1$, potremmo prolungare γ'_T con una parallela a $\gamma(t-T)$ uscente dal punto $\gamma'_T(T)$, contraddicendo la definizione di T . Quindi $T = 1$ e questo dimostra

l'esistenza della parallela. Poiché $\gamma'(1) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\gamma(1))$, l'estremo $\gamma'(1)$ non dipende dalla scelta del cammino γ , ma soltanto dal suo punto finale $\gamma(1)$.

Dimostriamo in questo modo che $\{a_k(q)\}$ converge per ogni $q \in M$ e otteniamo quindi un'applicazione $a : M \rightarrow M$ mediante $a(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(q)$ per ogni $q \in M$. Poiché $\tau_v(a(q)) = a(\tau_v(q))$ per ogni $q \in M$, la a è chiaramente differenziabile. Si può dimostrare che è invertibile, ripetendo i raginamenti appena svolti per la successione delle applicazioni inverse $\{a_k^{-1}\}$. \square

Abbiamo facilmente:

LEMMA 20.2.11. *Sia \mathfrak{l} l'algebra di Lie dei campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ tali che $[X, \mathfrak{X}] = \{0\}$. Per ogni $p \in M$, l'applicazione $\mathfrak{l} \ni X \rightarrow X(p) \in T_p M$ è iniettiva.*

DIMOSTRAZIONE. I generatori di sottogruppi a un parametro di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ sono gli elementi di \mathfrak{l} che generano sottogruppi a un parametro di diffeomorfismi di M . Quindi, per il Teorema 20.2.1, il gruppo $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ è un gruppo di Lie, e l'applicazione $\mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni a \rightarrow a(p) \in M$ definisce per ogni $p \in M$ un diffeomorfismo di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ con una sottovarietà differenziabile chiusa di M . \square

Completiamo ora la dimostrazione del Teorema 20.2.8. L'insieme \mathfrak{G} dei campi di vettori $X \in \mathfrak{l}$ che generano sottogruppi a un parametro di trasformazioni di M è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{l} , e quindi ha dimensione finita. Possiamo perciò applicare il Teorema 20.2.1 al gruppo $\mathbf{G} = \mathbf{Aut}(M, \sigma)$ e a \mathfrak{G} , e concludere che \mathbf{G} ha una struttura di gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{G} . Poiché l'azione $\mathbf{G} \times M \rightarrow M$ è differenziabile, fissato un qualsiasi punto $p_0 \in M$, l'immersione differenziabile $\mathbf{G} \ni g \rightarrow g(p_0) \in M$ è un diffeomorfismo di \mathbf{G} con una sottovarietà differenziabile chiusa di M . \square

Ricordiamo che vale il teorema³:

TEOREMA 20.2.12 (Bochner-Montgomery). *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico localmente compatto e numerabile all'infinito di trasformazioni differenziabili di una varietà differenziabile paracompatta M . Allora \mathbf{G} è un gruppo di Lie.*

Ricordiamo ancora⁴ il:

TEOREMA 20.2.13 (Dantzig-van der Waerden). *Sia (E, d) uno spazio metrico localmente compatto. Sia $\mathbf{Isom}(E, d)$ il gruppo delle isometrie di (E, d) e, per $x \in E$, indichiamo con $\mathbf{Isom}_x(E, d)$ lo stabilizzatore di x in $\mathbf{Isom}(E, d)$. Consideriamo su $\mathbf{Isom}(E, d)$ la topologia compatta-aperta. Allora $\mathbf{Isom}(E, d)$ è localmente compatto e $\mathbf{Isom}_x(E, d)$ è compatto per ogni $x \in E$. Se M è compatto, anche $\mathbf{Isom}(E, d)$ è compatto.*

³S.Bochner, D.Montgomery *Locally compact groups of differentiable transformations*, Ann. of Math. **47** (1946), pp.639-657.

⁴D.Dantzig, B.L.van der Waerden *Über metrisch homogene Räume*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6** (1928) pp.374-376. Una dimostrazione completa si può trovare anche in: Kobayashi-Nomizu *Foundations of Differential Geometry*, New York: John Wiley & Sons, vol.1, 1963, alle pagine 46-50.

OSSERVAZIONE 20.2.14. Ricordiamo ancora che, se (M, g) è una varietà Riemanniana e d è la distanza nella metrica corrispondente, allora le isometrie $f : M \rightarrow M$ per la metrica d sono applicazioni differenziabili che preservano il tensore g della metrica. Indicheremo nel seguito con $\mathbf{O}(M, g)$ il gruppo delle isometrie della varietà Riemanniana (M, g) , cioè:

$$\mathbf{O}(M, g) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, M) \mid f^*g = g\}.$$

Se d è la distanza su M definita dalla metrica g , allora $\mathbf{Isom}(M, d) = \mathbf{O}(M, g)$.

20.3. Automorfismi affini e isometrie

Per utilizzare i risultati del §20.2 nella discussione del gruppo delle affinità di una varietà affine (M, ∇) e delle isometrie di una varietà Riemanniana (M, g) , è conveniente riformulare le nozioni di varietà affini e riemanniane nel contesto della teoria delle \mathbf{G} -strutture.

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Indichiamo con:

$$\mathfrak{F}(M) \xrightarrow[\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})]{\pi} M$$

il fibrato principale dei sistemi di riferimento su M .

Gli elementi della fibra $\mathfrak{F}_p(M) = \pi^{-1}(p)$ sono le basi (v_1, \dots, v_m) di $T_p M$. Il gruppo $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ opera a destra su $\mathfrak{F}(M)$ mediante:

$$(v_1, \dots, v_m) \cdot a = \left(\sum_{i=1}^m a_1^i v_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_m^i v_i \right) \quad \text{se} \quad a = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è una m -upla di campi di vettori che definiscono una base di $T_p M$ in ogni punto p di un aperto U di M , allora l'applicazione:

$$U \times \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \ni (p, a) \rightarrow \sigma(p) \cdot a \in \pi^{-1}(U)$$

è un diffeomorfismo per la struttura differenziabile di $\mathfrak{F}(M)$.

In modo equivalente, possiamo definire la fibra $\mathfrak{F}_p(M)$ sopra il punto $p \in M$ come l'insieme di tutte le applicazioni lineari invertibili $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$, identificando una base (v_1, \dots, v_m) di $T_p M$ all'isomorfismo lineare $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$ che associa al vettore $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{\rightarrow} 1, 0, \dots, 0)$ della base canonica di \mathbb{R}^m il vettore v_i di $T_p M$.

Definiamo allora in modo affatto naturale la forma canonica $\theta \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m)$ mediante:

$$\theta(v) = \xi^{-1}(d\pi(v)) \quad \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \quad \forall v \in T_\xi \mathfrak{F}(M).$$

Osserviamo che:

$$(R_a)^* \theta = a^{-1} \circ \theta \quad \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Infatti, se $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$, allora $dR_a(v) \in T_{\xi \cdot a} \mathfrak{F}(M)$ e $d\pi(dR_a(v)) = d\pi(v)$. Quindi:

$$(R_a)^* \theta(v) = \theta(dR_a(v)) = (\xi \cdot a)^{-1}(d\pi(dR_a(v))) = a^{-1} \circ \xi^{-1}(d\pi(v)) = a^{-1} \circ \theta(v).$$

PROPOSIZIONE 20.3.1. Ogni diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$ si solleva in modo unico ad un diffeomorfismo $\hat{f} : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ che lascia θ invariante. Viceversa, ogni automorfismo di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ -fibrato principale $F : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ che lasci θ invariante è il sollevamento di un diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $f : M \rightarrow M$ un diffeomorfismo. Definiamo allora il suo sollevamento \hat{f} mediante :

$$\hat{f} : \mathfrak{F}(M) \ni \xi \rightarrow df(\pi(\xi)) \circ \xi \in \mathfrak{F}(M).$$

Abbiamo allora, se $\xi \in \mathfrak{F}(M)$ e $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$:

$$\begin{aligned} \theta(d\hat{f}(v)) &= (df(\pi(\xi)) \circ \xi)^{-1} (d\pi(d\hat{f}(\xi)(v))) \\ &= (\xi^{-1} \circ (df(\pi(\xi)))^{-1}) (df(\pi(\xi)) \circ d\pi(v)) = \theta(v). \end{aligned}$$

Infatti, poiché \hat{f} preserva le fibre, abbiamo $f \circ \pi = \pi \circ \hat{f}$ e quindi $df \circ d\pi = d\pi \circ d\hat{f}$.

Viceversa, se $F : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ preserva le fibre e lascia θ invariante, detto $f : M \rightarrow M$ il diffeomorfismo definito da $\pi \circ F = f \circ \pi$, osserviamo che $\Phi = \hat{f}^{-1} \circ F$ è un automorfismo differenziabile di $\mathfrak{F}(M)$ che preserva la fibra, lascia θ invariante e induce l'identità su M . Perciò abbiamo :

$$\begin{aligned} \xi^{-1}(d\pi(v)) &= \theta(v) = \Phi^*(\theta(v)) = \theta(d\Phi(v)) \\ &= (\Phi(\xi))^{-1} (d\pi(d\Phi(v))) = (\Phi(\xi))^{-1} (d\pi(v)) \\ &\quad \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \quad \forall v \in T_\xi \mathfrak{F}(M). \end{aligned}$$

Otteniamo dunque $(\Phi(\xi))^{-1}(w) = \xi^{-1}(w)$ per ogni $w \in T_{\pi(\xi)}M$, e questo dimostra che Φ è l'identità su $\mathfrak{F}(M)$. \square

DEFINIZIONE 20.3.2. Per ogni $A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$, definiamo il *campo di vettori fondamentale* $A^* \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M))$ associato ad A come il generatore infinitesimale del gruppo a un parametro di diffeomorfismi $\mathfrak{F}(M) \times \mathbb{R} \ni (\xi, t) \rightarrow \xi \cdot \exp(tA) \in \mathfrak{F}(M)$.

Una *connessione affine* su M si può definire, oltre che per mezzo della derivazione covariante, mediante l'assegnazione di una *forma di connessione*, cioè di una forma differenziale $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ che goda delle proprietà :

- (1) $\omega(A^*) = A \quad \forall A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$
- (2) $R_a^* \omega = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega \quad \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$.

Un vettore $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$ con $\omega(v) = 0$ si dice *orizzontale*. Poiché $\omega(\xi) : T_\xi \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ ha rango m^2 e $\ker d\pi(\xi) \cap \ker \omega(\xi) = \{0\}$ per la proprietà (1), la forma di connessione ω ci permette di decomporre lo spazio tangente a $\mathfrak{F}(M)$ in un punto ξ nella somma diretta dei due sottospazi $\mathfrak{V}_\xi(M) = \ker d\pi(\xi)$ dei *vettori verticali in ξ* e $\mathfrak{H}_\xi(M)$ dei⁵ *vettori orizzontali in ξ* .

Poiché $d\pi(\xi) : \mathfrak{H}_\xi(M) \rightarrow T_{\pi(\xi)}M$ è per ogni $\xi \in \mathfrak{F}(M)$ un isomorfismo lineare, possiamo associare ad ogni campo di vettori X definito su un aperto U di M un campo di vettori orizzontale \tilde{X} su $\pi^{-1}(U)$, caratterizzato dalle :

$$\begin{cases} \omega(\tilde{X}) = 0 \\ d\pi(\tilde{X}) = X. \end{cases}$$

⁵ Un modo equivalente di definire una connessione affine è quello di assegnare una distribuzione vettoriale \mathfrak{H} su $\mathfrak{F}(M)$, complementare della distribuzione verticale.

La derivazione covariante associata alla connessione affine è definita dalla formula :

$$(\dagger) \quad \nabla_X Y(\pi(\xi)) = \xi \circ \tilde{X}_\xi(\xi^{-1}(Y)) = \xi \circ \tilde{X}(\theta(\tilde{Y})) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall \xi \in \mathfrak{F}(M),$$

dove osserviamo che, fissato $Y \in \mathfrak{X}(M)$, la $\xi \rightarrow \Psi_Y(\xi) = \xi^{-1}(Y(\pi(\xi)))$ è una funzione differenziabile su $\mathfrak{F}(M)$ a valori in \mathbb{R}^m . Chiaramente :

$$\begin{cases} R_a^* \Psi_Y(\xi) = \Psi_Y(\xi \cdot a) = (\xi \cdot a)^{-1} Y(\pi(\xi \cdot a)) = a^{-1} \xi^{-1} Y(\pi(\xi)) = a^{-1} \Psi_Y(\xi) \\ \forall Y \in \mathfrak{X}(M), \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}), \end{cases}$$

e quindi :

$$\begin{aligned} R_a^*(\xi \circ \tilde{X}(\Psi_Y)) &= (\xi \circ a) \circ (R_{a*} \tilde{X})(\Psi_Y) = (\xi \circ a) \circ \tilde{X}(R_a^* \Psi_Y) \\ &= \xi \circ a \circ \tilde{X}(a^{-1} \Psi_Y) = \xi \circ a \circ a^{-1} \circ \tilde{X}(\Psi_Y) = \xi \circ \tilde{X}(\Psi_Y) \end{aligned}$$

mostra che la derivata covariante $\nabla_X Y$ è ben definita dalla (\dagger) , perché il valore del secondo membro è costante quando ξ varia sulla fibra $\mathfrak{F}_p(M)$ del punto $p \in M$.

Viceversa, si può dimostrare che, data di una derivazione covariante ∇ , vi è un'unica forma di connessione ω per cui vale la (\dagger) .

Abbiamo infatti :

$$\xi \circ (X - [\omega(X)]^*)(\theta(\tilde{Y})) = \nabla_{d\pi(X)} Y \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M)), \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Quindi:

$$(\ddagger) \quad [\omega(X)]^*(\theta(\tilde{Y})) = X(\theta(\tilde{Y})) - \xi^{-1} \nabla_{d\pi(X)} Y \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M)), \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$$

ci permette di calcolare ω utilizzando la forma canonica θ e la derivazione covariante.

TEOREMA 20.3.3. *Sia M una varietà differenziabile, dotata di una connessione affine definita dalla forma di connessione $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$. Un diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$ è un'affinità se e soltanto se il suo sollevamento \hat{f} lascia invariante la forma di connessione ω .*

Viceversa, un diffeomorfismo di fibrati principali $F : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ è il sollevamento di un'affinità se e soltanto se lascia invarianti la forma canonica θ e la forma di connessione ω .

DIMOSTRAZIONE. Le (\dagger) e (\ddagger) ci dicono che le trasformazioni affini di M sono tutte e sole quelle il cui sollevamento lascia ω invariante. L'ultima affermazione segue dal fatto che un diffeomorfismo di $\mathfrak{F}(M)$ in sé è un sollevamento di un diffeomorfismo di M in sé se e soltanto se preserva le fibre e lascia invariante la forma canonica θ . \square

TEOREMA 20.3.4. *Il gruppo delle affinità di una varietà differenziabile M , dotata di una connessione affine, è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale a $m(m+1)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ la forma della connessione. Allora la forma

$$\theta \oplus \omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$$

definisce un parallelismo completo su $\mathfrak{F}(M)$. La tesi è allora conseguenza del Teorema 20.2.8. \square

Sia \mathbf{G} un sottogruppo *chiuso* del gruppo lineare $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. Una \mathbf{G} -struttura su M è il dato di un fibrato principale $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ e di un'immersione differenziabile $\iota : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathfrak{F}(M)$, in modo che sia commutativo il diagramma :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} \times \mathbf{G} & \longrightarrow & \mathfrak{F}(M) \times \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P} & \longrightarrow & \mathfrak{F}(M) \\ \varpi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xlongequal{\quad} & M \end{array}$$

in cui la prime due frecce orizzontali sono definite dalle inclusioni $\iota : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathfrak{F}(M)$ e $\mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$.

Osserviamo che \mathbf{P} è una *sottovarietà chiusa* di $\mathfrak{F}(M)$. Infatti, fissata una sezione differenziabile σ di \mathbf{P} , definita in un aperto U di M , abbiamo $\mathbf{P} \cap \pi^{-1}(U) = \{\xi \in \pi^{-1}(U) \mid \xi^{-1} \circ \sigma(\pi(\xi)) \in \mathbf{G}\}$ e l'applicazione $\pi^{-1}(U) \ni \xi \rightarrow \xi^{-1} \circ \sigma(\pi(\xi)) \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ è continua. Quindi $\mathbf{P} \cap \pi^{-1}(U)$ è chiuso in $\pi^{-1}(U)$ per l'ipotesi che \mathbf{G} fosse chiuso in $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. Poiché gli insiemi $\pi^{-1}(U)$, al variare di U tra gli aperti di trivializzazione di \mathbf{P} , formano un ricoprimento aperto di $\mathfrak{F}(M)$, otteniamo che \mathbf{P} è chiuso in $\mathfrak{F}(M)$.

Gli elementi X dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} definiscono campi di vettori su \mathbf{P} che sono la restrizione dei corrispondenti campi di vettori verticali X^* definiti su $\mathfrak{F}(M)$, e che indicheremo ancora con X^* .

Una \mathbf{G} -connessione affine su M è il dato di una \mathbf{G} -struttura $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ su M , e di una forma differenziale $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ con le proprietà :

- (1) $\omega'(A^*) = A \quad \forall A \in \mathfrak{g}$
- (2) $R_a^* \omega' = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega' \quad \forall a \in \mathbf{G}$.

Indichiamo con $\mathfrak{H}' = \ker \omega' \subset \mathfrak{X}(\mathbf{P})$ la distribuzione orizzontale associata alla \mathbf{G} -connessione affine. Abbiamo :

$$dR_a(\mathfrak{H}'_\xi) = \mathfrak{H}'_{\xi \cdot a} \quad \forall \xi \in \mathbf{P}, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Possiamo quindi estendere la distribuzione orizzontale \mathfrak{H}' su \mathbf{P} a una distribuzione orizzontale \mathfrak{H} su $\mathfrak{F}(M)$ ponendo

$$\mathfrak{H}_{\xi \cdot a} = dR_a(\mathfrak{H}'_\xi) \quad \text{se } \xi \in \mathbf{P}, a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Estendiamo così la $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ a una forma di connessione affine di Cartan $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$, ponendo :

$$\omega(X) = A \quad \text{se } X \in T_\xi \mathfrak{F}(M) \text{ e } X = A^*_\xi + Y \text{ con } A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \text{ e } Y \in \mathfrak{H}_\xi.$$

Possiamo quindi definire in modo equivalente una \mathbf{G} -connessione affine mediante il dato di una forma di connessione affine ω su $\mathfrak{F}(M)$ tale che, per una \mathbf{G} -struttura

$\mathbf{P} @ > \varpi > \mathbf{G} > M$, detta $\iota : \mathbf{P} \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ l'inclusione, risulti $\iota^* \omega \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$, tale cioè che la sua restrizione a \mathbf{P} sia una forma a valori nell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} .

LEMMA 20.3.5. Siano $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ una \mathbf{G} -struttura, $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ una \mathbf{G} -connessione affine e $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ la sua estensione a $\mathfrak{F}(M)$. Sia $f : M \rightarrow M$ un diffeomorfismo. Supponiamo che M sia connessa. Sono equivalenti:

- (a) $\hat{f}^* \omega = \omega$ ed esiste $\xi_0 \in \mathbf{P}$ tale che $\hat{f}(\xi_0) \in \mathbf{P}$.
- (b) $\hat{f}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$ e, detta $\hat{f}^{\mathbf{G}} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ la restrizione di \hat{f} a \mathbf{P} , abbiamo

$$(\hat{f}^{\mathbf{G}})^* \omega' = \omega'.$$

DIMOSTRAZIONE. (a) \implies (b). Sia $\text{pr} : \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \rightarrow V = \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})/\mathfrak{g}$ la proiezione nel quoziente. Consideriamo la forma differenziale $\text{pr} \circ \omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), V)$ e la corrispondente distribuzione vettoriale $\mathfrak{D} = \ker(\text{pr} \circ \omega)$ in $\mathfrak{F}(M)$. Ricordiamo che una varietà integrale di \mathfrak{D} è una sottovarietà differenziabile N di $\mathfrak{F}(M)$ con $T_\xi N \subset \mathfrak{D}_\xi$ per ogni $\xi \in N$. Poiché \hat{f} lascia fissa la forma ω , essa lascia fissa a maggior ragione la forma $\text{pr} \circ \omega$ e trasforma quindi varietà integrali di \mathfrak{D} in varietà integrali di \mathfrak{D} . La tesi segue allora dal fatto che \mathbf{P} è una sottovarietà integrale massimale di \mathfrak{D} .

(b) \implies (a). Segue dal fatto che $\hat{f}(\xi \cdot a) = \hat{f}^{\mathbf{G}}(\xi) \cdot a$ e $\omega(\xi \cdot a) = R_a^* \omega'(\xi)$ se $\xi \in \mathbf{P}$ e $a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. \square

DEFINIZIONE 20.3.6. Un diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$ che soddisfi le condizioni equivalenti (a) e (b) del Lemma 20.3.5 si dice una trasformazione \mathbf{G} -affine, o una \mathbf{G} -affinità, di M .

Sia $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ una \mathbf{G} struttura su M . Indichiamo ancora con θ la restrizione a \mathbf{P} della forma canonica di $\mathfrak{F}(M)$. La forma di connessione ω' di una \mathbf{G} -connessione affine definisce un parallelismo completo, mediante la forma $\theta \oplus \omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$. Per il Teorema 20.2.8 abbiamo:

COROLLARIO 20.3.7. Il gruppo delle trasformazioni \mathbf{G} -affini di M , per un'assegnata connessione affine $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ relativa a una \mathbf{G} -struttura $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ è un gruppo di Lie di dimensione $\leq \dim_{\mathbb{R}} M + \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{G}$. \square

COROLLARIO 20.3.8. Due trasformazioni \mathbf{G} -affini f, g di M , per un'assegnata connessione affine $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ relativa a una \mathbf{G} -struttura $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$, coincidono se sono uguali con i loro differenziali in un punto $\rho_0 \in M$.

Una metrica Riemanniana g su M definisce una $\mathbf{O}(m)$ -struttura $\mathfrak{D}(M)$ su M , in cui gli elementi della fibra $\mathfrak{D}_\rho(M)$ sono le basi ortonormali di $T_\rho M$ rispetto al prodotto scalare \mathfrak{g}_ρ . Viceversa, una $\mathbf{O}(m)$ -struttura su M definisce univocamente una metrica Riemanniana g su M .

Il Lemma 20.1.6 ci dice che le isometrie di (M, g) sono tutte e sole le trasformazioni affini f rispetto alla connessione di Levi-Civita per cui $df(\rho_0) : T_{\rho_0} M \rightarrow T_{f(\rho_0)} M$ è un'isometria in qualche punto $\rho_0 \in M$.

La restrizione ω' della forma ω della connessione di Levi-Civita è una $\mathbf{O}(m)$ -connessione affine.

Otteniamo perciò:

TEOREMA 20.3.9. *Sia (M, \mathfrak{g}) una varietà Riemanniana. Un'isometria di M è un automorfismo differenziabile $f : M \rightarrow M$ il cui sollevamento è un'affinità per la connessione di Levi-Civita e per cui $\hat{f}(\mathfrak{D}(M)) = \mathfrak{D}(M)$.*

Il gruppo delle isometrie $\mathbf{O}(M, \mathfrak{g})$ è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale di $m(m+1)/2$.

Lo stabilizzatore $\mathbf{O}_p(M, \mathfrak{g})$ di un punto $p \in M$ nel gruppo $\mathbf{O}(M, \mathfrak{g})$ delle isometrie di (M, \mathfrak{g}) è un gruppo compatto.

DIMOSTRAZIONE. Il teorema è una conseguenza delle osservazioni precedenti e del Corollario 20.3.7. Infatti $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{o}(m) = m(m-1)/2$ e quindi $\mathfrak{D}(M)$ è una varietà differenziabile di dimensione $[m(m-1)/2] + m = m(m+1)/2$. \square

Citiamo a questo punto, senza dimostrazione⁶, il seguente :

TEOREMA 20.3.10. *Sia (M, \mathfrak{g}) una varietà Riemanniana di dimensione m . Se il suo gruppo delle isometrie $\mathbf{O}(M, \mathfrak{g})$ ha dimensione massima $m(m+1)/2$, allora (M, \mathfrak{g}) è isometrico a uno dei seguenti spazi a curvatura costante :*

- (a) *Lo spazio Euclideo \mathbb{R}^m ;*
- (b) *La sfera m -dimensionale S^m ;*
- (c) *Lo spazio proiettivo m -dimensionale $\mathbb{R}P^m$;*
- (d) *Lo spazio iperbolico semplicemente connesso m -dimensionale H^m .*

Descriviamo brevemente un modello dello spazio iperbolico m -dimensionale H^m . Consideriamo l'ipersuperficie regolare di \mathbb{R}^{m+1} :

$$H^m = \left\{ x = (x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_0^2 = 1 + \sum_{i=1}^m x_i^2 \right\}$$

Abbiamo :

$$T_x H^m = \left\{ v = (v_0, v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_0 v_0 = \sum_{i=1}^m x_i v_i \right\}$$

e definiamo la metrica iperbolica g su H^m ponendo :

$$g_x(v, v) = c \cdot \left(-v_0^2 + \sum_{i=1}^m v_i^2 \right) \quad \forall x \in H^m, \forall v \in T_x H^m$$

per una costante $c > 0$. Osserviamo che H^m è l'orbita del punto $(1, 0, \dots, 0)$ rispetto al gruppo $\mathbf{O}(1, m)$ delle trasformazioni lineari di \mathbb{R}^{m+1} che preservano la forma bilineare simmetrica definita dalla matrice $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Il gruppo

⁶Vedi ad esempio: [S.Kobayashi *Transformation groups in Differential Geometry*, New York, Springer 1972] a pag.46.

$\mathbf{O}(1, m)$ è il gruppo delle isometrie di H^m , che si identifica allo spazio omogeneo $\mathbf{O}(1, m)/(\mathbf{O}(1) \times \mathbf{O}(m))$, dove :

$$\mathbf{O}(1) \times \mathbf{O}(m) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{O}(m) \right\}$$

è lo stabilizzatore in $\mathbf{O}(1, m)$ del punto $(1, 0, \dots, 0)$.

20.4. Spazi Riemanniani globalmente simmetrici

Sia (M, g) uno spazio Riemanniano. Diciamo che (M, g) è uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico se, per ogni punto $p \in M$ esiste un'isometria involutiva $s_p \in \mathbf{O}(M, g)$ che abbia p come punto fisso isolato.

Osserviamo che vale il seguente :

LEMMA 20.4.1. *Sia (M, g) uno spazio Riemanniano e $p \in M$. Allora esiste al più un'isometria involutiva s_p che abbia p come punto fisso isolato. Se una tale s_p esiste, allora $ds_p(p) = -\text{Id}$ su T_pM ed s_p coincide, in un intorno di p , con la simmetria geodetica rispetto alla connessione di Levi-Civita.*

DIMOSTRAZIONE. Sia s_p un'isometria involutiva di (M, g) con p come punto fisso isolato. Abbiamo $(ds_p(p))^2 = \text{Id}$ su T_pM e quindi T_pM si decompone nella somma diretta dei sottospazi corrispondenti agli autovalori 1 e -1 di $(ds_p(p))$. Se ci fosse un $v \in T_pM \setminus \{0\}$ con $ds_p(p)(v) = v$, allora s_p lascerebbe fissi tutti i punti della geodetica uscente da p con vettore tangente v e quindi p non sarebbe punto fisso isolato. Perciò $ds_p(p) = -\text{Id}$. Poiché, essendo un'isometria, s_p trasforma geodetiche in geodetiche, essa è allora, in un intorno di p , la simmetria geodetica rispetto a p . \square

LEMMA 20.4.2. *Ogni spazio Riemanniano globalmente simmetrico è completo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (M, g) uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico. Sia $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ una geodetica massimale. Se fosse ad esempio $b < +\infty$, fissato ϵ con $0 < 2\epsilon < b - a$, posto $p = \gamma(b - \epsilon)$, la simmetria s_p ci permette di prolungare la geodetica γ a una geodetica $\tilde{\gamma}$ definita su $(a, 2b - a - 2\epsilon)$:

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } a < t < b \\ s_p(\gamma(2b - 2\epsilon - t)) & \text{se } b \leq t < 2b - a - 2\epsilon, \end{cases}$$

contraddicendone la massimalità. Deve quindi essere $b = +\infty$, e con ragionamento analogo si dimostra che $a = -\infty$. \square

Osserviamo che, se $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ è una geodetica massimale con $\gamma(0) = p$, allora $s_p \circ \gamma(t) = \gamma(-t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Da questo fatto ricaviamo subito che :

TEOREMA 20.4.3. *Il gruppo delle isometrie di uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico connesso è un gruppo transitivo di trasformazioni.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (M, g) uno spazio Riemanniano connesso globalmente simmetrico. Indichiamo con d_g la distanza definita dalla metrica g . Siano p_0, p_1 due qualsiasi punti di M . Poiché (M, g) è completo, esiste una geodetica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$,

di lunghezza $\ell(\gamma) = d_g(p_0, p_1)$. Abbiamo allora $p_1 = s_{\gamma(\frac{1}{2})}(p_0)$. Infatti $s_{\gamma(\frac{1}{2})}$ è la simmetria geodetica rispetto al punto $\gamma(\frac{1}{2})$ e quindi trasforma la geodetica $\gamma(t)$ nella geodetica $\gamma(1-t)$. \square

TEOREMA 20.4.4. *Sia (M, g) uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico, connesso. Indichiamo con \mathbf{G} la componente connessa dell'identità nel gruppo di Lie $\mathbf{O}(M, g)$ delle isometrie di (M, g) . Fissiamo un punto $p_0 \in M$ e sia \mathbf{K} lo stabilizzatore di p_0 in \mathbf{G} .*

(i) *Lo stabilizzatore \mathbf{K} di p_0 in \mathbf{G} è un sottogruppo di Lie compatto di \mathbf{G} e il diagramma commutativo :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \longrightarrow & M \\ \downarrow & \nearrow f & \\ \mathbf{G}/\mathbf{K} & & \end{array}$$

in cui la freccia orizzontale è l'applicazione $\pi : \mathbf{G} \ni a \rightarrow a(p_0) \in M$ e la freccia verticale la proiezione nel quoziente, definisce un diffeomorfismo f dello spazio omogeneo \mathbf{G}/\mathbf{K} su M .

(ii) *L'applicazione $\sigma = \text{ad}(s_{p_0}) : \mathbf{G} \ni a \rightarrow s_{p_0} \circ a \circ s_{p_0} \in \mathbf{G}$ è un automorfismo involutivo di \mathbf{G} tale che, detto \mathbf{K}_σ l'insieme dei punti fissi di σ e \mathbf{K}_σ^0 la componente connessa dell'identità in \mathbf{K}_σ , risulta :*

$$\mathbf{K}_\sigma^0 \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_\sigma.$$

Il gruppo \mathbf{K} non contiene sottogruppi normali non banali di \mathbf{G} .

(iii) *Siano \mathfrak{g} e \mathfrak{k} le algebre di Lie di \mathbf{G} e \mathbf{K} , rispettivamente. Allora*

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(p_0)(X) = X\}$$

e, posto

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(p_0)(X) = -X\}$$

abbiamo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}.$$

Abbiamo poi $d\pi(e)(\mathfrak{k}) = \{0\}$ e $d\pi(e) : \mathfrak{p} \rightarrow T_{p_0}M$ è un isomorfismo. Se $X \in \mathfrak{p}$, allora :

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tX)(p_0) \in M$$

è la geodetica uscente da p_0 con velocità $d\pi(e)(X)$. Per ogni $v \in T_{p_0}M$, il vettore $[d\exp(tX)](p_0)(v)$ è il traslato di v parallelamente lungo la geodetica.

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione (i) è conseguenza del Teorema 20.3.9.

(ii) Per ogni $k \in \mathbf{K}$, le due isometrie k e $\sigma(k) = \text{ad}(s_{p_0})(k) = (s_{p_0} \circ k \circ s_{p_0})$ di (M, g) coincidono con il loro differenziale in p_0 . È quindi, per il Corollario 20.3.8, $\sigma(k) = \text{ad}(s_{p_0})(k) = k$ per ogni $k \in \mathbf{K}$. In particolare, $d\sigma(e)(\mathfrak{k}) = \text{Ad}(s_{p_0})(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$, e $d\sigma(e)$ è l'identità su \mathfrak{k} . D'altra parte, se $X \in \mathfrak{g}$ è un punto fisso di $d\sigma(e)$, avremo anche :

$$s_{p_0} \circ \exp_{\mathbf{G}}(tX) \circ s_{p_0} = \text{ad}(s_{p_0})(\exp_{\mathbf{G}}(tX)) = \exp_{\mathbf{G}}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(s_{p_0})(X)) = \exp_{\mathbf{G}}(tX),$$

onde $s_{p_0}(\exp_G(\tau X)(p_0)) = \exp_G(\tau X)(p_0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi $\exp_G(\tau X)(p_0) = p_0$, perché p_0 è un punto fisso isolato di s_{p_0} . Quindi \mathfrak{f} è proprio l'insieme dei punti fissi di $d\sigma(e)$. Poiché il gruppo delle isometrie $\mathbf{O}(M, \mathfrak{g})$ e \mathbf{G} operano su \mathbf{G}/\mathbf{K} in modo effettivo, \mathbf{K} non contiene sottogruppi normali non banali di \mathbf{G} .

(iii) Poiché $d\sigma(e)$ è un'involuzione e \mathfrak{f} è il sottospazio dei suoi punti fissi, abbiamo la decomposizione $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{p}$.

Poiché $d\pi(e)$ ha nucleo uguale a \mathfrak{f} , ne segue che la sua restrizione a \mathfrak{p} è un isomorfismo su $T_{p_0}M$.

Sia ora $X \in \mathfrak{p}$ e sia $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ la geodetica uscente da p_0 con velocità $d\pi(e)(X)$. Consideriamo, per ogni numero reale t , l'isometria $u_t = s_{\gamma(t/2)} \circ s_{p_0}$. Dico che $\mathbb{R} \ni t \rightarrow u_t \in \mathbf{O}(M, \mathfrak{g})$ è un sottogruppo a un parametro di $\mathbf{O}(M, \mathfrak{g})$. Infatti, se $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} u_{t_1} \circ u_{t_2}(p_0) &= u_{t_1} \circ s_{\gamma(t_2/2)}(p_0) = s_{\gamma(t_1/2)} \circ s_{p_0}(\gamma(t_2)) \\ &= s_{\gamma(t_1/2)}(\gamma(-t_2)) = \gamma(t_1 + t_2) \\ &= s_{\gamma((t_1+t_2)/2)}(p_0) = u_{t_1+t_2}(p_0). \end{aligned}$$

Inoltre, $du_t : T_{\gamma(s)} \rightarrow T_{\gamma(t+s)}$ definisce, per ogni coppia di numeri reali t, s , il trasporto parallelo lungo la geodetica γ .

Per verificare questo fatto, osserviamo in primo luogo che, per ogni numero reale s , la $-ds_{p_0}(\gamma(s))$ definisce il trasporto parallelo da $T_{\gamma(s)}$ a $T_{\gamma(-s)}$ lungo la geodetica γ . A questo scopo, indichiamo con $\tau_{s_1, s_2}^\gamma : T_{\gamma(s_1)}M \rightarrow T_{\gamma(s_2)}M$ il trasporto parallelo da $\gamma(s_1)$ a $\gamma(s_2)$ lungo γ . Abbiamo allora un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_{p_0}M & \xrightarrow{\tau_{0,s}^\gamma} & T_{\gamma(s)}M \\ ds_{p_0}(p_0) \downarrow & & \downarrow ds_{p_0}(\gamma(s)) \\ T_{p_0}M & \xrightarrow{\tau_{0,-s}^\gamma} & T_{\gamma(-s)}M \end{array}$$

Da questa ricaviamo che

$$\begin{aligned} \tau_{0,-s} \circ ds_{p_0}(p_0) &= ds_{p_0}(\gamma(s)) \circ \tau_{s,0}^\gamma \quad \text{e, poiché } -ds_{p_0}(p_0) = I, \\ \tau_{0,-s}^\gamma &= -ds_{p_0}(\gamma(s)) \circ \tau_{s,0}^\gamma, \quad \text{da cui otteniamo:} \\ -ds_{p_0}(\gamma(s)) &= \tau_{0,-s}^\gamma \circ [\tau_{0,s}^\gamma]^{-1} = \tau_{0,-s}^\gamma \circ \tau_{s,0}^\gamma = \tau_{s,-s}^\gamma. \end{aligned}$$

Analogamente, $-ds_{\gamma(s)}$ definisce, per ogni coppia di numeri reali s, t , il trasporto parallelo da $T_{\gamma(t)}M$ a $T_{\gamma(2s-t)}M$ lungo la geodetica γ . Quindi, per composizione, $du_t = (-ds_{\gamma(t/2)}) \circ (-ds_{p_0})$ definisce il trasporto parallelo lungo γ da $\gamma(s)$ a $\gamma(t+s)$. È perciò $du_{t_1} \circ du_{t_2} = du_{t_1+t_2}$, perché il trasporto parallelo da $\gamma(s)$ a $\gamma(s+t_1+t_2)$ si può ottenere componendo il trasporto parallelo da $\gamma(s)$ a $\gamma(s+t_2)$ con quello da $\gamma(s+t_2)$ a $\gamma(s+t_1+t_2)$.

In particolare $(u_{t_1} \circ u_{t_2})$ ed $u_{t_1+t_2}$ coincidono con i loro differenziali in p_0 ed, essendo isometrie, coincidono dappertutto: $u_{t_1} \circ u_{t_2} = u_{t_1+t_2}$ e $\mathbb{R} \ni t \rightarrow u_t \in \mathbf{O}(M, \mathfrak{g})$ è un gruppo a un parametro di isometrie. Possiamo quindi trovare $Y \in \mathfrak{g}$ tale che

$u_t = \exp_{\mathbf{G}}(tY)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Risulta poi

$$\sigma \circ u_t = s_{p_0} \circ s_{\gamma(t/2)} = s_{\gamma(-t/2)} \circ s_{p_0} = u_{-t}.$$

Da questa ricaviamo che $d\sigma(e)(Y) = -Y$, quindi $Y \in \mathfrak{p}$ e perciò $Y = X$. \square

20.5. Coppie simmetriche e simmetriche Riemanniane

Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie connesso ed \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso. La coppia (\mathbf{G}, \mathbf{H}) si dice una *coppia simmetrica* se esiste un automorfismo analitico involutivo $\sigma : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ con

$$\mathbf{G}_{\sigma}^0 \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{G}_{\sigma},$$

ove $\mathbf{G}_{\sigma} = \{a \in \mathbf{G} \mid \sigma(a) = a\}$ e \mathbf{G}_{σ}^0 è la componente connessa dell'identità di \mathbf{G}_{σ} .

Se $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{H})$ è compatto⁷ in $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{G})$, la coppia (\mathbf{G}, \mathbf{H}) si dice *simmetrica Riemanniana*.

TEOREMA 20.5.1. *Sia (\mathbf{G}, \mathbf{K}) una coppia simmetrica Riemanniana e sia M lo spazio omogeneo $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$. Siano $\pi : \mathbf{G} \rightarrow M$ la proiezione naturale nel quoziente e $\tau : \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(M)$ la rappresentazione di \mathbf{G} come gruppo di diffeomorfismi di M , indotta dalla traslazione a sinistra su M :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} \times \mathbf{G} & \xrightarrow{(a,b) \rightarrow (a,\pi(b))} & \mathbf{G} \times M \\ (a,b) \rightarrow ab \downarrow & & \downarrow (a,p) \rightarrow \tau(a)(p) \\ \mathbf{G} & \xrightarrow{a \rightarrow \pi(a)} & M. \end{array}$$

Sia σ un automorfismo analitico involutivo di \mathbf{G} tale che $\mathbf{K}_{\sigma}^0 \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_{\sigma}$ (ove \mathbf{K}_{σ} è il sottogruppo dei punti fissi di σ e \mathbf{K}_{σ}^0 la sua componente dell'identità). Allora esistono metriche Riemanniane \mathbf{G} -invarianti g su M . Rispetto a una qualsiasi metrica \mathbf{G} -invariante g , lo spazio (M, g) è globalmente simmetrico Riemanniano. Sia $\mathfrak{o} = \pi(e)$ e sia $s_{\mathfrak{o}}$ la corrispondente simmetrica geodetica. Essa soddisfa:

$$\begin{aligned} s_{\mathfrak{o}} \circ \pi &= \pi \circ \sigma \\ \tau(\sigma(a)) &= s_{\mathfrak{o}} \circ \tau(a) \circ s_{\mathfrak{o}} \quad \forall a \in \mathbf{G}. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 20.5.2. Osserviamo che, in particolare, la simmetria geodetica $s_{\mathfrak{o}}$ è indipendente dalla scelta della metrica Riemanniana \mathbf{G} -invariante. In effetti, la connessione di Levi-Civita su M risulta indipendente dalla particolare scelta della metrica \mathbf{G} -invariante su M .

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con \mathfrak{g} e \mathfrak{k} le algebre di Lie di \mathbf{G} e \mathbf{K} , rispettivamente e poniamo $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(e)(X) = -X\}$. Allora $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Se $X \in \mathfrak{p}$ e $k \in \mathbf{K}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \sigma(\exp_{\mathbf{G}}(t\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X))) &= \sigma(\text{ad}(k)(\exp_{\mathbf{G}}(tX))) = \text{ad}(k)(\exp_{\mathbf{G}}(-tX)) \\ &= \exp_{\mathbf{G}}(-t\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X)), \end{aligned}$$

⁷ Questo è vero in particolare se \mathbf{H} è un sottogruppo compatto di \mathbf{G} .

da cui otteniamo subito che $d\sigma(e)(\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X)) = -\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X)$. Quindi \mathfrak{p} è invariante rispetto ad $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$. L'applicazione $d\pi(e)$ manda \mathfrak{g} su $T_{\mathbf{o}}M$ ed ha come nucleo \mathfrak{f} . Se $X \in \mathfrak{p}$, abbiamo :

$$\pi(\exp_{\mathbf{G}}(\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(\mathfrak{t}X)) = \pi(\text{ad}(k)(\exp(\mathfrak{t}X))) = \tau(k)(\exp(\mathfrak{t}X)).$$

Differenziando quest'espressione per $t = 0$, otteniamo :

$$d\pi(e) \circ \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(X) = d\tau(k) \circ d\pi(e)(X) \quad \forall k \in \mathbf{K} \quad \forall X \in \mathfrak{p}.$$

Poiché $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(K)$ è compatto il $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$, esiste un prodotto scalare \mathbf{b} su \mathfrak{p} , invariante rispetto alla restrizione a \mathfrak{p} di $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$. Allora $\mathfrak{g}_{\mathbf{o}} = \mathbf{b} \circ (d\pi(e)|_{\mathfrak{p}})^{-1}$ è un prodotto scalare su $T_{\mathbf{o}}M$, invariante rispetto a $\tau(k)$ per ogni $k \in \mathbf{K}$. Definiamo allora una metrica Riemanniana su M ponendo :

$$\mathfrak{g}_{\tau(g)(\mathbf{o})}(d\tau(g)(v), d\tau(g)(w)) = \mathfrak{g}_{\mathbf{o}}(v, w) \quad \forall g \in \mathbf{G}, \quad \forall v, w \in T_{\mathbf{o}}M.$$

Questa definizione è consistente perché \mathbf{b} è invariante rispetto ad $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$.

Viceversa, ogni metrica Riemanniana \mathbf{G} -invariante su $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$ è di questa forma per qualche prodotto scalare invariante \mathbf{b} su \mathfrak{p} .

Definiamo ora la simmetria $s_{\mathbf{o}}$ di M mediante la condizione :

$$s_{\mathbf{o}} \circ \pi = \pi \circ \sigma.$$

Chiaramente $s_{\mathbf{o}}$ è un diffeomorfismo involutivo di M in sé, con $ds_{\mathbf{o}}(\mathbf{o}) = -\text{Id}$ su $T_{\mathbf{o}}M$.

Dimostriamo che $s_{\mathbf{o}}$ è un'isometria. Sia $p = \pi(a) = \tau(a)(\mathbf{o}) \in M$. Se $X, Y \in T_pM$, allora $X_0 = d\tau(a^{-1})(p)(X), Y_0 = d\tau(a^{-1})(p)(Y) \in T_{\mathbf{o}}M$. Per ogni $x \in \mathbf{G}$ abbiamo :

$$s_{\mathbf{o}} \circ \tau(a)(\pi(x)) = s_{\mathbf{o}}(\pi(ax)) = \pi(\sigma(ax)) = \pi(\sigma(a)\sigma(x)) = (\tau(\sigma(a)) \circ s_{\mathbf{o}})(\pi(x)).$$

Quindi $s_{\mathbf{o}} \circ \tau(a) = \tau(\sigma(a)) \circ s_{\mathbf{o}}$. Ricaviamo :

$$\begin{aligned} g(ds_{\mathbf{o}}(X), ds_{\mathbf{o}}(Y)) &= g(ds_{\mathbf{o}} \circ d\tau(a)(X_0), ds_{\mathbf{o}} \circ d\tau(a)(Y_0)) \\ &= g(d\tau(\sigma(a)) \circ ds_{\mathbf{o}}(X_0), d\tau(\sigma(a)) \circ ds_{\mathbf{o}}(Y_0)) \\ &= g(ds_{\mathbf{o}}(X_0), ds_{\mathbf{o}}(Y_0)) = g(X_0, Y_0) = g(X, Y). \end{aligned}$$

Quindi $s_{\mathbf{o}}$ è un'isometria e, poiché $s_{\mathbf{o}}(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ e $ds_{\mathbf{o}}(\mathbf{o}) = -\text{Id}$ su $T_{\mathbf{o}}M$, coincide con la simmetria geodetica rispetto a \mathbf{o} . Per un qualsiasi punto $p = \pi(a)$, la simmetria geodetica rispetto a p è l'isometria $s_p = \tau(a) \circ s_{\mathbf{o}} \circ \tau(a^{-1})$. Questo dimostra che $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$ è globalmente simmetrico. \square

La $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \tau(a) \in \mathbf{O}(M, \mathfrak{g})$ è un omomorfismo di gruppi di Lie. Il suo nucleo \mathbf{N} è un sottogruppo chiuso normale di \mathbf{G} , contenuto in \mathbf{K} . Se \mathbf{Z} è il centro di \mathbf{G} , i gruppi $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ e $\mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{Z})$ sono isomorfi. Poiché $\mathbf{K} \cap \mathbf{Z} \subset \mathbf{N}$, ne segue che $\mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{N})$ è compatto. Chiaramente la $(\mathbf{G}/\mathbf{N}, \mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{N}))$ è un'altra coppia simmetrica Riemanniana, che definisce lo stesso spazio simmetrico della coppia (\mathbf{G}, \mathbf{K}) .

TEOREMA 20.5.3. *Sia (\mathbf{G}, \mathbf{K}) una coppia simmetrica Riemanniana. Sia \mathfrak{k} l'algebra di Lie di \mathbf{K} e \mathfrak{z} quella del centro \mathbf{Z} di \mathbf{G} . Se $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$, allora esiste un*

unico automorfismo involutivo $\sigma : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ tale che $\mathbf{K}_\sigma^0 \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_\sigma$ (dove \mathbf{K}_σ è il sottogruppo dei punti fissi di σ e \mathbf{K}_σ^0 la sua componente connessa dell'identità).

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che il differenziale in e dell'involuzione σ cercata è l'identità su \mathfrak{k} , e l'opposto dell'identità su un sottospazio di \mathfrak{g} complementare di \mathfrak{k} in \mathfrak{g} , e trasforma in sé l'ortogonale \mathfrak{k}^\perp di \mathfrak{k} rispetto alla forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ di \mathfrak{g} .

Poiché $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$, la forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ è definita negativa su \mathfrak{k} . Infatti, poiché $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ è un sottogruppo compatto, gli elementi $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$, per $X \in \mathfrak{k}$, si esprimono come matrici antisimmetriche $(a_{i,j}(X))$, in una opportuna base⁸ di \mathfrak{g} . Quindi, se $X \in \mathfrak{k}$:

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X, X) = - \sum_{i,j} [a_{i,j}]^2 \leq 0$$

e vale l'uguaglianza se e soltanto se $a_{i,j}(X) = 0$ per ogni i, j , cioè se $X \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{z}$. Quindi $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}^\perp$, dove \mathfrak{k}^\perp è l'ortogonale di \mathfrak{k} rispetto alla forma di Killing e $d\sigma(e)$ è completamente determinato perché è l'identità su \mathfrak{k} e $-\text{Id}$ su \mathfrak{k}^\perp . A sua volta $d\sigma(e)$ determina completamente σ . \square

Un'algebra di Lie ortogonale simmetrica è una coppia $(\mathfrak{g}, \vartheta)$, formata da:

- (i) un'algebra di Lie reale di dimensione finita \mathfrak{g} ,
- (ii) un automorfismo involutivo $\vartheta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, tale che :
l'insieme $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \vartheta(X) = X\}$ dei punti fissi
- (iii) di ϑ sia una sottoalgebra immersa in \mathfrak{g} in modo compatto.
Diciamo che la coppia $(\mathfrak{g}, \vartheta)$ è *effettiva* se, detto \mathfrak{z} il centro di \mathfrak{g} , è:
- (iv) $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$.

Ricordiamo che il fatto che \mathfrak{k} sia immersa in modo compatto in \mathfrak{g} significa che la sottoalgebra $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ di $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ genera un sottogruppo compatto del gruppo $\text{Int}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ degli automorfismi interni di \mathfrak{g} . Nel caso in cui la coppia $(\mathfrak{g}, \vartheta)$ sia effettiva, la condizione è equivalente al fatto che la forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ di \mathfrak{g} sia definita negativa su \mathfrak{k} .

Abbiamo osservato che, ad una coppia simmetrica Riemanniana (\mathbf{G}, \mathbf{K}) , a cui sia associato un automorfismo involutivo σ di \mathbf{G} , è associata l'algebra di Lie ortogonale simmetrica $(\mathfrak{g}, \vartheta)$, ove \mathfrak{g} è l'algebra di Lie di \mathbf{G} e $\vartheta = d\sigma(e)$.

Sia $(\mathfrak{g}, \vartheta)$ un'algebra di Lie simmetrica ortogonale e sia \mathfrak{k} il luogo dei punti fissi di ϑ .

Una coppia (\mathbf{G}, \mathbf{K}) di gruppi di Lie associata a $(\mathfrak{g}, \vartheta)$ è una coppia formata da un gruppo di Lie connesso \mathbf{G} ed un suo sottogruppo chiuso \mathbf{K} con algebre di Lie uguali a \mathfrak{g} e a \mathfrak{k} , rispettivamente.

Abbiamo:

TEOREMA 20.5.4. *Sia $(\mathfrak{g}, \vartheta)$ un'algebra di Lie ortogonale simmetrica e sia \mathfrak{k} la sottoalgebra di Lie dei punti fissi di ϑ .*

⁸È sufficiente considerare una base ortonormale di \mathfrak{g} rispetto a un prodotto scalare invariante per $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$.

(a) Sia $\tilde{\mathbf{G}}$ un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie \mathfrak{g} e sia $\tilde{\mathbf{K}}$ il suo sottogruppo analitico con algebra di Lie \mathfrak{k} . Allora $\tilde{\mathbf{K}}$ è un sottogruppo chiuso di $\tilde{\mathbf{G}}$ e $(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}})$ è una coppia simmetrica Riemanniana. Lo spazio simmetrico $\tilde{M} = \tilde{\mathbf{G}}/\tilde{\mathbf{K}}$ è semplicemente connesso.

(b) Se (\mathbf{G}, \mathbf{K}) è una qualsiasi coppia di gruppi di Lie associata a $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, allora $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$ è uno spazio Riemanniano localmente simmetrico rispetto a qualsiasi metrica \mathbf{G} -invariante.

(c) \tilde{M} è il rivestimento universale di M .

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\tilde{\mathbf{G}}$ è semplicemente connesso, l'involuzione ϑ di \mathfrak{g} definisce univocamente un automorfismo $\tilde{\sigma}$ di $\tilde{\mathbf{G}}$ con $d\tilde{\sigma}(e) = \vartheta$. Il luogo $\tilde{\mathbf{K}}_{\tilde{\sigma}}$ dei punti fissi di $\tilde{\sigma}$ è chiuso in $\tilde{\mathbf{G}}$ e quindi è tale anche la sua componente connessa dell'identità $\tilde{\mathbf{K}}$. Poiché $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\tilde{\mathbf{K}})$ è il sottogruppo analitico di $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ generato da $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$, è compatto e quindi $(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}})$ è una coppia Riemanniana simmetrica e $\tilde{M} = \tilde{\mathbf{G}}/\tilde{\mathbf{K}}$ è uno spazio globalmente simmetrico Riemanniano rispetto a qualsiasi metrica $\hat{\mathbf{G}}$ -invariante su \tilde{M} , definita a partire da un prodotto scalare $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ -invariante su $T_0\tilde{M}$.

Se \mathbf{G} è un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} e \mathbf{K} un suo sottogruppo chiuso con algebra di Lie \mathfrak{k} , il rivestimento $\tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ definisce per passaggio al quoziente il rivestimento universale $\tilde{M} \rightarrow M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$. La simmetrie geodetiche globali di \tilde{M} definiscono, per diffeomorfismi locali, simmetrie Riemanniane locale di M , rispetto a qualsiasi metrica \mathbf{G} -invariante di M . \square

Mappa momento

21.1. Varietà simplettiche

In meccanica hamiltoniana si suppone che le possibili configurazioni del sistema si possano descrivere come i punti di una varietà differenziabile Q . Lo *spazio delle fasi* è il fibrato cotangente T^*Q . Su di esso è definita la *forma tautologica*¹

$$\theta_\zeta(X) = \tau(\pi_*(X)), \quad \forall \zeta \in T^*Q, \quad \forall X \in T_\zeta(T^*Q).$$

In una carta locale (U, q) di Q , dette $p = (p_1, \dots, p_m)$ le corrispondenti coordinate sulla fibra, la θ ha l'espressione

$$\theta = \sum_{i=1}^m p_i dq^i.$$

Le coordinate (q^i, p_i) in T^*Q si dicono *coordinate canoniche*. Il differenziale $\omega = d\theta$ è una due-forma esatta non degenere su T^*Q , che ha nelle coordinate canoniche locali l'espressione

$$(21.1) \quad \omega = \sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq^i.$$

Con la struttura definita dalla forma ω , lo spazio cotangente è l'esempio più semplice di varietà simplettica.

Consideriamo ora la situazione generale. Sia M una varietà differenziabile.

DEFINIZIONE 21.1.1. Una *forma simplettica* su M è una due forma differenziale chiusa e non degenere su M .

Abbiamo (vedi ad esempio [61, Ch.III,§6])

PROPOSIZIONE 21.1.2 (Darboux). *Se esiste una forma simplettica ω su M , allora M ha dimensione pari ed ammette in ogni punto una carta locale $(V, (p, q))$ in cui ω abbia l'espressione (21.1).* \square

DEFINIZIONE 21.1.3. Una *varietà simplettica* è una coppia (M, ω) che consiste di una varietà differenziabile M e di una forma simplettica ω su M .

Se (M, ω) ed (M', ω') sono due varietà simplettiche, chiamiamo *simplettica* un'applicazione $f \in \mathcal{C}^\infty(M, M')$ per cui $f^*\omega' = \omega$.

Chiamiamo *simplettomorfismo* un'applicazione simplettica che sia anche un diffeomorfismo. I simplettomorfismi di (M, ω) in sé formano un gruppo, che indichiamo con $\mathbf{Sp}(M, \omega)$.

Nota che un'applicazione simplettica è sempre un'immersione differenziabile.

¹La forma tautologica è detta anche *di Liouville*, *di Poincaré*, *canonica* o *potenziale simplettico*.

21.2. Campi simplettici e hamiltoniani

I simplettomorfismi formano un gruppo di dimensione infinita. Definiamo la sua *algebra di Lie* come lo spazio dei campi di vettori che generano gruppi locali a un parametro di simplettomorfismi.

DEFINIZIONE 21.2.1. Si dice *simplettico* un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ tale che

$$(21.2) \quad L_X \omega = 0.$$

PROPOSIZIONE 21.2.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un campo di vettori X sia simplettico è che la 1-forma $\phi_X = X \lrcorner \omega$ sia chiusa.*

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza immediata della formula di Cartan² (vedi ad es. [61, p.102]) che lega derivata di Lie, differenziale e prodotto interno:

$$L_X(\omega) = X \lrcorner (d\omega) + d(X \lrcorner \omega) = d(X \lrcorner \omega). \quad \square$$

Se U è un aperto semplicemente connesso di M , per ogni campo simplettico X possiamo determinare in U una funzione $h_X \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tale che

$$(21.3) \quad dh_X = -X \lrcorner \omega.$$

DEFINIZIONE 21.2.3. Una funzione $h_X \in \mathcal{C}^\infty(U)$ che soddisfi (21.3) in U si dice un *hamiltoniano* del campo simplettico X in U .

Per il teorema di rappresentazione di Riesz una qualsiasi 1-forma $\phi \in \Omega^1(M)$ determina univocamente un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ tale che

$$(21.4) \quad \phi = -X \lrcorner \omega,$$

che sarà simplettico se e soltanto se ϕ è chiusa. In particolare, possiamo considerare i campi simplettici associati alle forme esatte.

DEFINIZIONE 21.2.4 (campo hamiltoniano). Si dice *hamiltoniano* o *gradiente simplettico* di una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ il campo simplettico H_f definito da

$$(21.5) \quad df = -H_f \lrcorner \omega.$$

OSSERVAZIONE 21.2.5. Se M è compatto, ogni campo di vettori genera un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di M . Quindi, se (M, ω) è simplettica e compatta, ad ogni funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ corrisponde un gruppo a un parametro di simplettomorfismi di M . In generale, se (M, ω) è una qualsiasi varietà simplettica, poiché i campi vettoriali a supporto compatto sono completi, ad ogni $f \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$ corrisponde un gruppo a un parametro di simplettomorfismi (che lasciano fissi tutti i punti che non appartengono al supporto di f .)

²Ricaviamo la formula di Cartan in questo caso particolare. Per ogni $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= (d\omega)(X, X_1, X_2) = X\{\omega(X_1, X_2)\} - X_1\{\omega(X, X_2)\} + X_2\{\omega(X, X_1)\} \\ &\quad - \omega([X, X_1], X_2) + \omega([X, X_2], X_1) + \omega(X, [X_1, X_2]) \\ &= X\{\omega(X_1, X_2)\} - \omega([X, X_1], X_2) - \omega(X_1, [X, X_2]) \\ &\quad - X_1\{\omega(X, X_2)\} + X_2\{\omega(X, X_1)\} + \omega(X, [X_1, X_2]) \\ &= \{L_X \omega\}(X_1, X_2) - \{d(X \lrcorner \omega)\}(X_1, X_2). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 21.2.6. Se (M, ω) è una varietà simplettica, chiamiamo *canonica* una sua carta locale $(U, (p, q))$ in cui sia $\omega = \sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq^i$. Ad un campo di vettori $X = \sum_{i=1}^m (a_i \frac{\partial}{\partial p_i} + b^i \frac{\partial}{\partial q^i})$ è associata la forma $X \lrcorner \omega = \sum_{i=1}^m (a_i dq^i - b^i dp_i)$. Il campo hamiltoniano di una funzione f è quindi, nelle coordinate canoniche,

$$(21.6) \quad H_f = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Il *flusso* corrispondente è descritto nelle coordinate canoniche dalle *equazioni di Hamilton*

$$(21.7) \quad \dot{q}^i = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial f}{\partial q^i}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

PROPOSIZIONE 21.2.7. *I campi di vettori simplettici formano un'algebra di Lie rispetto alla commutazione.*

Il commutatore di due campi simplettici è un campo hamiltoniano.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$L_{[X, Y]}(\omega) = L_X(L_Y(\omega)) - L_Y(L_X(\omega))$$

e quindi $[X, Y]$ è simplettico se X ed Y sono entrambi simplettici.

Per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= (d\omega)(X, Y, Z) = X(\omega(Y, Z)) + Y(\omega(Z, X)) + Z(\omega(X, Y)) \\ &\quad - \omega([X, Y], Z) - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y) \\ &= X(\omega(Y, Z)) - \omega([X, Y], Z) - \omega(Y, [X, Z]) \\ &\quad - Y(\omega(X, Z)) + \omega([Y, X], Z) + \omega(X, [Y, Z]) \\ &\quad + Z(\omega(X, Y)) + \omega([X, Y], Z) \\ &= (L_X\omega)(Y, Z) - (L_Y\omega)(Y, Z) + \{(d(\omega(X, Y)))(Z) + \omega([X, Y], Z)\}. \end{aligned}$$

Se X, Y sono simplettici, allora i due primi addendi all'ultimo membro si annullano e l'uguaglianza

$$(21.8) \quad d(\omega(X, Y)) = -[X, Y] \lrcorner \omega,$$

ci dimostra che $[X, Y]$ è il campo hamiltoniano di $f = \omega(X, Y)$. \square

21.2.1. Parentesi di Poisson.

DEFINIZIONE 21.2.8. Chiamiamo *parentesi di Poisson* $\{f_1, f_2\} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ di due funzioni $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ la funzione definita dai valori che la forma simplettica assume sulla coppia dei loro campi hamiltoniani:

$$(21.9) \quad \{f_1, f_2\} = \omega(H_{f_1}, H_{f_2}) = H_{f_1}(f_2) = -H_{f_2}(f_1).$$

DEFINIZIONE 21.2.9 (varietà di Poisson). Una *struttura di Poisson* su una varietà differenziabile M è un prodotto di Lie

$$(21.10) \quad \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \ni (f_1, f_2) \longrightarrow \{f_1, f_2\} \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

che verifichi la condizione

$$(21.11) \quad \{f_1, f_2 \cdot f_3\} = \{f_1, f_2\} \cdot f_3 + f_2 \cdot \{f_1, f_3\}, \quad \forall f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Una *varietà di Poisson* è una varietà differenziabile M su cui sia assegnata una struttura di Poisson.

PROPOSIZIONE 21.2.10. *Le parentesi di Poisson definiscono su una varietà simplettica una struttura di varietà di Poisson.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $d(f_2 \cdot f_3) = f_2 df_3 + f_3 df_2$, risulta $H_{f_2 \cdot f_3} = f_2 \cdot H_{f_3} + f_3 \cdot H_{f_2}$, da cui segue facilmente la (21.11). \square

21.3. Definizione della mappa momento

Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} . Supponiamo assegnata un'azione differenziabile di \mathbf{G} su M . Per ogni X di \mathfrak{g} indichiamo con X^* il generatore infinitesimale del flusso $M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \rightarrow \exp(t \cdot X) \cdot p \in M$. La corrispondenza $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow X^* \in \mathfrak{X}(M)$ è un antiomorfismo di \mathfrak{g} nell'algebra di Lie dei campi di vettori di M : vale cioè $[X, Y]^* = -[X^*, Y^*]$ per ogni coppia di elementi X, Y di \mathfrak{g} .

DEFINIZIONE 21.3.1. L'azione di \mathbf{G} su (M, ω) si dice *simplettica* se \mathbf{G} agisce su M mediante simplettomorfismi.

LEMMA 21.3.2. *Se l'azione di \mathbf{G} su (M, ω) è simplettica, allora per ogni X in \mathfrak{g} il campo X^* è simplettico. Se \mathbf{G} è connesso, questa condizione è necessaria e sufficiente affinché l'azione di \mathbf{G} su (M, ω) sia simplettica.* \square

La corrispondenza

$$(21.12) \quad \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \phi_X = -X^* \lrcorner \omega \in \Omega^1(M)$$

associa ad ogni elemento X di \mathfrak{g} una 1-forma ϕ , definita e di classe \mathcal{C}^∞ su M . Possiamo quindi considerare la ϕ come una uno-forma a valori nel duale \mathfrak{g}^* di \mathfrak{g} . Per la Proposizione 21.2.2, se l'azione di \mathbf{G} su (M, ω) è simplettica, allora la ϕ è chiusa. Se U è un aperto connesso e semplicemente connesso di M , fissato un qualsiasi punto p_0 in U , la primitiva

$$\mu(p) = \int_{p_0}^p \phi$$

è una funzione di classe \mathcal{C}^∞ a valori in \mathfrak{g}^* , tale che, posto $\mu_X = \langle X, \mu \rangle$, è

$$(21.13) \quad d\mu_X = d\langle X, \mu \rangle = \langle X, d\mu \rangle = \phi_X = -X^* \lrcorner \omega, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Due primitive $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathfrak{g}^*)$ di ϕ su un aperto connesso U differiscono per un elemento di \mathfrak{g}^* .

La duale Ad^T della rappresentazione aggiunta di \mathbf{G} è caratterizzata da

$$(21.14) \quad \langle X, \text{Ad}_a^T(\zeta) \rangle = \langle \text{Ad}_{a^{-1}}(X), \zeta \rangle, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall \zeta \in \mathfrak{g}^*, \forall a \in \mathbf{G}.$$

La corrispondente azione infinitesimale ad^T di \mathfrak{g} su \mathfrak{g}^* è data allora da

$$\langle Y, \text{ad}_X^T(\zeta) \rangle = -\zeta([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall \zeta \in \mathfrak{g}^*.$$

Indicheremo per semplicità con lo stesso simbolo a sia l'elemento di \mathbf{G} che il corrispondente simplettomorfismo di (M, ω) . Sia $X \in \mathfrak{g}$.

Poiché

$$e^{tX} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{a} \cdot e^{t \cdot \text{Ad}_{\mathbf{a}^{-1}X} \cdot \mathbf{p}},$$

è $X_{\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}}^* = \mathbf{a}_* (\text{Ad}_{\mathbf{a}^{-1}}(X))^*$. È dunque, per $v \in T_{\mathbf{p}}M$,

$$\begin{aligned} \langle X, \mathbf{a}^* \phi \rangle(v) &= -\omega(X_{\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}}^*, \mathbf{a}_*(v)) = -\omega(\mathbf{a}_*((\text{Ad}_{\mathbf{a}^{-1}}(X))^*_\mathbf{p}), \mathbf{a}_*v) \\ &= -\omega(((\text{Ad}_{\mathbf{a}^{-1}}(X))^*_\mathbf{p}), v) = \langle (\text{Ad}_{\mathbf{a}^{-1}}(X)), \phi \rangle(v). \end{aligned}$$

Questo dimostra che

$$(21.15) \quad \mathbf{a}^* \phi = \text{Ad}_{\mathbf{a}}^T \circ \phi.$$

Se $\mu \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathfrak{g}^*)$ è una primitiva di ϕ , allora

$$\mathbf{d}(\mathbf{a}^* \mu) = \mathbf{a}^*(\mathbf{d}\mu) = \mathbf{a}^* \phi = \text{Ad}_{\mathbf{a}}^T(\phi) = \text{Ad}_{\mathbf{a}}^T(\mathbf{d}\mu) = \mathbf{d}(\text{Ad}_{\mathbf{a}}^T \mu).$$

In particolare, su ogni componente connessa di U la differenza $(\mathbf{a}^* \mu - \text{Ad}_{\mathbf{a}}^T \mu)$ è costante.

DEFINIZIONE 21.3.3 (momento). Si dice *mappa momento* dell'azione di \mathbf{G} su M un'applicazione $\mu \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{g}^*)$ che verifichi (21.13) su tutto M , per cui valga cioè

$$(21.16) \quad H_{\mu_X} = X^*, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Un'azione simplettica si dice *hamiltoniana* se ammetta una mappa momento e *fortemente hamiltoniana* se ammetta una mappa momento \mathbf{G} -equivariante, tale cioè che

$$(21.17) \quad \mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}) = \text{Ad}_{\mathbf{a}}^T(\mu(\mathbf{p})), \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{G}, \forall \mathbf{p} \in M.$$

LEMMA 21.3.4. Sia $\mu \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{g}^*)$ una mappa momento e supponiamo che \mathbf{G} sia connesso. Condizione necessaria e sufficiente affinché μ sia \mathbf{G} -equivariante è che soddisfi

$$(21.18) \quad \{\mu_{X_1}, \mu_{X_2}\} = -\mu_{[X_1, X_2]}, \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mu \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{g}^*)$ una mappa momento. Per ogni X_1, X_2 in \mathfrak{g} abbiamo

$$\begin{aligned} \mu_{[X_1, X_2]} &= \langle [X_1, X_2], \mu \rangle = -\langle X_2, \text{ad}_{X_1}^T \mu \rangle, \\ \{\mu_{X_1}, \mu_{X_2}\} &= X_1^* \mu_{X_2} \end{aligned}$$

La (21.18) è perciò equivalente a

$$(21.19) \quad X^* \mu = \text{ad}_X^T \mu, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Poiché \mathbf{G} è connesso, questa equivale ad $\mathbf{a}^* \mu = \text{Ad}_{\mathbf{a}}^T \mu$ per ogni \mathbf{a} in \mathbf{G} . \square

TEOREMA 21.3.5. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie connesso, con algebra di Lie \mathfrak{g} tale che $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$ ed $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$. Allora ogni azione simplettica di \mathbf{G} su una varietà simplettica (M, ω) ha una e una sola mappa momento.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che M sia connessa.

Poiché $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$, è $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e quindi tutti i campi X^* , al variare di X in \mathfrak{g} , sono hamiltoniani. Questo ci permette di definire un'applicazione lineare

$$h : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \text{ tale che } X^* = H_{h_X}, \text{ cioè } \mathbf{d}h_X = -X^* \lrcorner \omega, \text{ per ogni } X \text{ in } \mathfrak{g}.$$

Se $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $Z \in \mathfrak{X}(M)$, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega(X^*, Y^*, Z) = X^* \omega(Y^*, Z) - Y^* \omega(X^*, Z) + Z \omega(X^*, Y^*) \\ &\quad - \omega([X^*, Y^*], Z) + \omega(X^*, [Y^*, Z]) - \omega(Y^*, [X^*, Z]) \\ &= X^* \omega(Y^*, Z) - \omega([X^*, Y^*], Z) - \omega(Y^*, [X^*, Z]) \\ &\quad + Y^* \omega(Z, X^*) - \omega([Y^*, Z], X^*) - \omega(Z, [Y^*, X^*]) \\ &\quad + Z \omega(X^*, Y^*) + \omega([X^*, Y^*], Z). \end{aligned}$$

Le prime due delle ultime tre righe sono uguali a zero perché uguali alle derivate di Lie ($L_{X^*} \omega$) ed ($L_{Y^*} \omega$), calcolate in (Y^*, Z) e (Z, X^*) rispettivamente. Ricordiamo che, per la definizione delle parentesi di Poisson,

$$\omega(X^*, Y^*) = \omega(H_{h_X}, H_{h_Y}) = \{h_X, h_Y\}$$

e quindi possiamo riscrivere la relazione che abbiamo ottenuto nella forma

$$d\{h_X, h_Y\} = -[X^*, Y^*] \lrcorner \omega = [X, Y]^* \lrcorner \omega = -d h_{[X, Y]}$$

Questo ci dice che $d(\{h_X, h_Y\} + h_{[X, Y]}) = 0$ e quindi

$$\{h_X, h_Y\} + h_{[X, Y]} = c(X, Y) \text{ è costante in } M.$$

Poiché le parentesi di Poisson soddisfano la relazione di Jacobi e la corrispondenza $X \rightarrow h_X$ è lineare, ne segue che $c(X, Y)$ è un cociclo in $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$. Per l'ipotesi che fosse $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$, possiamo trovare un'applicazione lineare $b : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$, cioè un elemento di \mathfrak{g}^* , per cui $c(X, Y) = b([X, Y])$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$. Possiamo considerare h come una funzione definita su M ed a valori in \mathfrak{g}^* . Se poniamo $\mu = h - b$, otteniamo

$$\{\mu_X, \mu_Y\} + \mu_{[X, Y]} = \{h_X, h_Y\} + h_{[X, Y]} - b([X, Y]) = c(X, Y) - b([X, Y]) = 0.$$

Per il Lemma 21.3.4 questo significa che μ è \mathbf{G} -invariante.

L'unicità segue dal fatto che la differenza tra due mappe momento \mathbf{G} -invarianti sarebbe un elemento costante ζ_0 di \mathfrak{g}^* invariante rispetto ad Ad^\top e quindi rispetto ad ad^\top . Questo significa che $\zeta([X, Y]) = 0$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$ e quindi $\zeta_0 = 0$ perché $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ per l'ipotesi che $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$. \square

PROPOSIZIONE 21.3.6. *Supponiamo che \mathbf{G} sia un gruppo di Lie con azione hamiltoniana su M . Se l'azione di \mathbf{G} è fortemente hamiltoniana, allora*

$$(21.20) \quad Y^* \mu_X = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Se \mathbf{G} è connesso, la (21.20) è anche sufficiente affinché l'azione di \mathbf{G} su M sia fortemente hamiltoniana.

21.4. Gruppi di coomologia delle algebre di Lie

Siano \mathfrak{g} un'algebra di Lie ed \mathbb{A} un \mathfrak{g} -modulo. Si possono calcolare i gruppi di coomologia di \mathfrak{g} a coefficienti in \mathbb{A} utilizzando il complesso di Chevalley-Eilenberg.

Definiamo $\Lambda^q(\mathfrak{g}, \mathbb{A})$ come lo spazio vettoriale delle forme alternate di grado q su \mathfrak{g} a valori in \mathbb{A} ed il differenziale $\delta_q : \Lambda^q(\mathfrak{g}, \mathbb{A}) \rightarrow \Lambda^{q+1}(\mathfrak{g}, \mathbb{A})$ mediante

$$(21.21) \quad \left[\begin{aligned} (\delta_q \phi)(X_0, X_1, \dots, X_q) &= \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i X_i \cdot \phi(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_q) \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \phi([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q), \end{aligned} \right. \\ \forall \phi \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, \mathbb{A}).$$

ESEMPIO 21.4.1. Descriviamo il differenziale δ_q per $q = 0, 1, 2$.

- È $\Lambda^0(\mathfrak{g}, \mathbb{A}) = \mathbb{A}$. Se $a \in \mathbb{A}$, allora

$$(\delta a)(X) = X \cdot a, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

- È $\Lambda^1(\mathfrak{g}, \mathbb{A}) = \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{A})$. Se $\phi \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{A})$, allora

$$(\delta_1 \phi)(X, Y) = X \cdot \phi(Y) - Y \cdot \phi(X) - \phi([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

- Se $\phi \in \Lambda^2(\mathfrak{g}, \mathbb{A})$, allora

$$\begin{aligned} (\delta_2 \phi)(X_1, X_2, X_3) &= X_1 \cdot \phi(X_2, X_3) + X_2 \cdot \phi(X_3, X_1) + X_3 \cdot \phi(X_1, X_2) \\ &- \phi([X_1, X_2], X_3) - \phi([X_2, X_3], X_1) - \phi([X_3, X_1], X_2) \\ &\forall X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

PROPOSIZIONE 21.4.2. Sia $n = \dim(\mathfrak{g})$. La successione

$$(21.22) \quad \begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda^0(\mathfrak{g}, \mathbb{A}) & \xrightarrow{\delta_0} & \Lambda^1(\mathfrak{g}, \mathbb{A}) & \xrightarrow{\delta_1} & \Lambda^2(\mathfrak{g}, \mathbb{A}) & \longrightarrow & \dots & & \\ & & & & \dots & \longrightarrow & \Lambda^{n-1}(\mathfrak{g}, \mathbb{A}) & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & \Lambda^n(\mathfrak{g}, \mathbb{A}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

è un complesso di spazi vettoriali. □

DEFINIZIONE 21.4.3. Definiamo i gruppi di coomologia di \mathfrak{g} a coefficienti in \mathbb{A} come i quozienti

$$(21.23) \quad H^q(\mathfrak{g}, \mathbb{A}) = \frac{\ker(\delta_q)}{\text{Imm}(\delta_{q-1})}, \quad \text{per } q \in \mathbb{Z}.$$

TEOREMA 21.4.4 (Whitehead). Se \mathfrak{g} è semisemplice ed \mathbb{A} ha dimensione finita, allora $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{A}) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per assurdo. Se la tesi non fosse vera, esisterebbe un modulo \mathbb{A} di dimensione minima per cui $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{A}) \neq 0$. Dico che \mathbb{A} è semplice. Infatti, se non lo fosse, conterebbe un sottomodulo non banale \mathbb{A}' . Alla successione esatta di \mathfrak{g} -moduli

$$0 \longrightarrow \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}/\mathbb{A}' \longrightarrow 0$$

corrisponde una successione esatta in coomologia

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \dots & \longrightarrow & H^{q-1}(\mathfrak{g}, \mathbb{A}/\mathbb{A}') & \longrightarrow \\ \longrightarrow & H^q(\mathfrak{g}, \mathbb{A}') & \longrightarrow & H^q(\mathfrak{g}, \mathbb{A}) & \longrightarrow & H^q(\mathfrak{g}, \mathbb{A}/\mathbb{A}') & \longrightarrow \\ \longrightarrow & H^{q+1}(\mathfrak{g}, \mathbb{A}') & \longrightarrow & \dots & & & \end{array}$$

Per l'ipotesi induttiva, $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{A}') = 0$ ed $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{A}/\mathbb{A}') = 0$, perché sia \mathbb{A}' che \mathbb{A}/\mathbb{A}' hanno dimensione minore di quella di \mathbb{A} . Ne segue che anche $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{A}) = 0$, contraddicendo la scelta di \mathbb{A} . \square

Parte 3

Algebre di Clifford

Campi di vettori sulle sfere

Le algebre di Clifford hanno importanti applicazioni sia in matematica che in fisica. In questo capitolo introduttivo mostreremo come esse si associno in modo naturale al problema dell'esistenza, sulle sfere euclidee S^n , di sistemi di campi di vettori indipendenti privi di punti critici.

È comunque interessante accennare anche al loro ruolo in meccanica quantistica. Tra la seconda metà degli anni '20 e l'inizio degli anni '30 del secolo scorso, il fisico inglese Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) formulò la sua teoria relativistica dell'elettrone, la cui validità fu confermata dalla scoperta successiva del *positrone*, da essa predetto. Tracciamone qui alcune idee fondamentali (vedi ad es. [49]). Il problema che Dirac si poneva era quello di trovare un'equazione delle onde $D\psi = \lambda\psi$ che fosse invariante rispetto al gruppo di Lorentz e compatibile con l'equazione di Klein-Gordon $\square\psi = \lambda\psi$, ove $\square = (\partial/\partial x_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\partial/\partial x_i)^2$ è l'operatore delle onde in quattro variabili. Per il principio di causalità, D doveva essere un operatore del prim'ordine rispetto al tempo e, per l'invarianza rispetto al gruppo di Lorentz, del prim'ordine anche rispetto alle altre coordinate. La soluzione di questo problema fu ottenuta considerando, invece della funzione d'onda complessa ψ , un n -vettore $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ di funzioni d'onda ed introducendo un nuovo operatore $D = \sum_{i=0}^3 \gamma_i \cdot (\partial/\partial x_i)$ in cui le γ_i fossero matrici $n \times n$, con $D^2 = \text{diag}(\square, \dots, \square)$. Questa condizione si traduce per le matrici γ_i , in un sistema di equazioni algebriche $\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = \pm \delta_{i,j}$, che, come vedremo, caratterizzano, al variare dei segni e di n , le diverse algebre di Clifford reali.

Una proprietà fondamentale della costruzione di Dirac è il fatto che la trasformazione delle Ψ , associata ad una trasformazione di Lorentz, è determinata solo a meno del segno. Ciò è conseguenza del fatto che le Ψ sono gli elementi di una rappresentazione del rivestimento a due fogli del gruppo di Lorentz, cioè del gruppo spinoriale.

Questo corrisponde ad un fatto centrale della teoria delle rappresentazioni del gruppo ortogonale $\mathbf{SO}(n)$, che era stato scoperto e studiato in precedenza da Cartan e Weyl (vedi e.g. [13, 17]): tutte le rappresentazioni della sua algebra di Lie si ottengono dalla rappresentazione standard su \mathbb{R}^n (e le sue potenze esterne e simmetriche) e da una seconda rappresentazione che si costruisce a partire dall'algebra generata dalle γ_i , cioè dall'algebra di Clifford associata alla forma quadratica che definisce il gruppo ortogonale, e che si chiama la *rappresentazione spin*. Questa non è una rappresentazione del gruppo ortogonale, ma del suo rivestimento $\mathbf{Spin}(n)$. Oltre alle motivazioni fisiche appena descritte, la rappresentazione spin ha un ruolo centrale in molte questioni matematiche: oltre ai campi di vettori sulle

sfere, di cui ci occupiamo in questo capitolo, entra in problemi di immersioni di varietà, nell'integralità di alcuni numeri caratteristici, nella dualità in dimensione otto, in questioni di esistenza di strutture complesse, nell'esistenza di metriche con curvatura scalare positiva, nella teoria dell'indice degli operatori ellittici sulle varietà compatte, nell'introduzione dell'importante classe delle varietà di spin, che sono l'oggetto di [49].

22.1. Vettori tangenti unitari sulle sfere

Sappiamo che, su $S^1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$, la derivata $(\partial/\partial\theta)$ definisce un campo di vettori unitari. Dimostriamo innanzi tutto il seguente

PROPOSIZIONE 22.1.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista un campo di vettori unitario sulla sfera S^n è che n sia un numero dispari.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo l'identificazione

$$TS^n = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid (x|v) = 0\} \subset S^n \times \mathbb{R}^{n+1}.$$

Se $n = 2m - 1$ è un numero dispari, possiamo considerare la sfera S^n immersa nello spazio complesso $\mathbb{C}^m \simeq \mathbb{R}^{n+1}$. L'applicazione

$$S^n \ni z \rightarrow (z, i \cdot z) \in TS^n \subset S^n \times \mathbb{C}^m$$

è un campo di vettori unitario su S^n .

Supponiamo viceversa che vi sia su S^n un campo di vettori $S^n \ni x \rightarrow v(x) \in S^n$, con $(x|v(x)) = 0$ per ogni x . Allora $v(x)$ è linearmente indipendente da x per ogni $x \in S^n$ e quindi

$$S^n \times [0, 1] \ni (x, t) \rightarrow f_t(x) = (1-2t) \cdot x + 2\sqrt{t-t^2} \cdot v(x) \in S^n$$

è un'omotopia in $\mathcal{C}(S^n, S^n)$ dell'identità con la mappa antipodale. Questa ha grado $(-1)^{n+1}$ ed n deve quindi essere un numero dispari. \square

OSSERVAZIONE 22.1.2. Sia m un intero positivo. Consideriamo la sfera S^{4m-1} immersa nello spazio vettoriale \mathbb{H}^m , Allora, per ogni $\mathbf{q} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3 \simeq \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} \mid \bar{\mathbf{q}} = -\mathbf{q}\}$ i campi $L_{\mathbf{q}} : S^{4m-1} \ni \xi \rightarrow \mathbf{q} \cdot \xi \in S^{4m-1}$ ed $R_{\mathbf{q}} : S^{4m-1} \ni \xi \rightarrow \xi \cdot \mathbf{q} \in S^{4m-1}$, essendo $\mathbf{q} \cdot \xi$ e $\xi \cdot \mathbf{q}$ ortogonali a ξ , sono campi di vettori unitari tangenti ad S^{4m-1} .

22.2. Moltiplicazione ortogonale

DEFINIZIONE 22.2.1. Chiamiamo *moltiplicazione ortogonale* un'applicazione

$$(22.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \ni (\xi, x) \rightarrow \xi \times x \in \mathbb{R}^n, \\ \text{bilineare e tale che} \\ \|\xi \times x\| = \|\xi\| \cdot \|x\|, \forall \xi \in \mathbb{R}^k, \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

ESEMPIO 22.2.2. Il prodotto di quaternioni è un esempio di moltiplicazione ortogonale, con $n=k=4$.

LEMMA 22.2.3. *Sia (22.1) una moltiplicazione ortogonale. Allora*

$$(1) \quad k \leq n;$$

- (2) per ogni $\xi \in S^{k-1}$, l'applicazione $u_\xi : \mathbb{R}^n \ni x \rightarrow \xi \times x \in \mathbb{R}^n$ definisce un elemento u_ξ del gruppo ortogonale $\mathbf{O}(n)$;
- (3) per ogni $x \in S^{n-1}$, l'applicazione $\iota_x : \mathbb{R}^k \ni \xi \rightarrow \xi \times x \in \mathbb{R}^n$ è un'immersione ortogonale¹ di \mathbb{R}^k in \mathbb{R}^n .

DIMOSTRAZIONE. Gli enunciati (2) e (3) seguono dalle formule di polarizzazione, che ci dicono che una trasformazione lineare che preserva le lunghezze dei vettori è un'immersione ortogonale. La (1) è conseguenza della (3). \square

LEMMA 22.2.4. Se (22.1) è una moltiplicazione ortogonale e $u \in \mathbf{O}(n)$, allora anche

$$(22.2) \quad \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \ni (\xi, x) \longrightarrow \xi \times_u x = \xi \times u(x) \in \mathbb{R}^n$$

è una moltiplicazione ortogonale. \square

DEFINIZIONE 22.2.5. Le due moltiplicazioni ortogonali (22.1) e (22.2) si dicono equivalenti.

DEFINIZIONE 22.2.6. Chiamiamo *normalizzata* una moltiplicazione ortogonale (22.1) per cui

$$(22.3) \quad e_k \times x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

LEMMA 22.2.7. Ogni moltiplicazione ortogonale è equivalente ad una moltiplicazione ortogonale normalizzata. \square

PROPOSIZIONE 22.2.8. Se (22.1) è una moltiplicazione ortogonale normalizzata, allora le $u_{e_1}(x), \dots, u_{e_{k-1}}(x)$, per $x \in S^{n-1}$, sono $(k-1)$ campi di vettori unitarii, due a due ortogonali tra loro, tangenti ad S^{n-1} . \square

TEOREMA 22.2.9. L'insieme delle moltiplicazioni ortogonali $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è in corrispondenza biunivoca con le $(k-1)$ -uple u_1, \dots, u_{k-1} di elementi di $\mathbf{O}(n)$ che soddisfano le condizioni

$$(22.4) \quad u_i^2 = -\text{id}, \quad u_i \circ u_j + u_j \circ u_i = 0, \quad \forall 1 \leq i \neq j < k.$$

La corrispondenza si ottiene ponendo $u_k = \text{id}$ e

$$(22.5) \quad e_i \times x = u_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \leq i \leq k.$$

DIMOSTRAZIONE. Data una moltiplicazione ortogonale normalizzata e definiti gli u_i mediante la (22.5), per ogni $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in S^{k-1} \subset \mathbb{R}^k$ l'applicazione $u_{\sum \lambda_i u_i}$ è ortogonale. Quindi

$$\begin{aligned} \text{id} &= \left(\sum_i \lambda_i u_i \right) \left(\sum_i \lambda_i u_i \right)^* = \sum_{1 \leq i, j \leq k} \lambda_i \lambda_j \cdot u_i \circ u_j^* \\ &= \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i^2 \right) \cdot \text{id} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \lambda_i \lambda_j (u_i \circ u_j^* + u_j \circ u_i^*). \end{aligned}$$

Da questa ricaviamo che

$$u_i \circ u_j^* + u_j \circ u_i^* = 0, \quad \forall 1 \leq i < j \leq k$$

¹Ricordiamo che un'immersione ortogonale di \mathbb{R}^k in \mathbb{R}^n è un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $(\phi(\xi)|\phi(\eta))_{\mathbb{R}^n} = (\xi|\eta)_{\mathbb{R}^k}$.

Per $j = k$ quest'uguaglianza dà $u_i = -u_i^* = -u_i^{-1}$, e quindi $u_i^2 = -\text{id}$ per ogni $i = 1, 2, \dots, k-1$. Sostituendo $u_i^* = -u_i$ per $1 \leq i < k$, otteniamo le

$$u_i \circ u_j + u_j \circ u_i = 0, \quad \forall 1 \leq i < j < k.$$

Viceversa, supponiamo date le u_1, \dots, u_{k-1} ed usiamo le (22.5), insieme ad $e_k \times x = x$ per ogni x , per definire una forma bilineare $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \ni (\xi, x) \rightarrow \xi \times x \in \mathbb{R}^n$. Utilizzando le ipotesi (22.4) sulle u_i si verifica immediatamente che vale la $\|\xi \times x\| = \|\xi\| \cdot \|x\|$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^k$ ed $x \in \mathbb{R}^n$. \square

Le (22.4) caratterizzano le regole di moltiplicazione dei generatori di un'algebra di Clifford e la loro azione su \mathbb{R}^n come trasformazioni ortogonali è una *representazione dell'algebra di Clifford*. Il problema dell'esistenza di campi di vettori unitari tangenti alle sfere sono quindi naturalmente legati alle rappresentazioni ortogonali delle algebre di Clifford.

CAPITOLO XXIII

Algebre

In questo capitolo raccogliamo alcuni risultati generali relativi alle algebre (soprattutto associative e unitarie), che utilizzeremo nello studio delle algebre di Clifford e degli spinori. Per una trattazione più esauriente si possono consultare [38, 39].

23.1. Prime definizioni

Sia \mathbb{K} un campo. Lo penseremo nel seguito fissato, evitando, quando possibile, di farvi esplicito riferimento.

DEFINIZIONE 23.1.1. Un'algebra su \mathbb{K} è uno spazio vettoriale \mathbb{A} su \mathbb{K} , su cui è assegnato un prodotto interno bilineare, che definisce un'applicazione lineare $\mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$. Indichiamo con $a \cdot b$ il prodotto di a e b , cioè l'immagine di $a \otimes b$.

L'algebra \mathbb{A} si dice:

- | | |
|-------------|--|
| associativa | se $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{A},$ |
| commutativa | se $a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall a, b \in \mathbb{A},$ |
| unitaria | se $\exists 1_{\mathbb{A}} \in \mathbb{A}$ tale che $1_{\mathbb{A}} \cdot a = a \cdot 1_{\mathbb{A}} = a, \quad \forall a \in \mathbb{A}.$ |

In un'algebra unitaria \mathbb{A} , con identità del prodotto $1_{\mathbb{A}}$, identifichiamo il campo \mathbb{K} degli scalari ad una sua sottoalgebra, mediante l'applicazione $\mathbb{K} \ni k \rightarrow k \cdot 1_{\mathbb{A}} \in \mathbb{A}$.

Nel seguito, indicheremo semplicemente con 1 , invece di $1_{\mathbb{A}}$, l'identità del prodotto.

DEFINIZIONE 23.1.2. Chiamiamo *di divisione* un'algebra unitaria in cui ogni elemento non nullo abbia un'unica inversa destra ed un'unica inversa sinistra.

Una sotto-algebra \mathbb{I} di \mathbb{A} è un

- | | |
|-----------------|--|
| ideale sinistro | se $x \cdot a \in \mathbb{I}, \quad \forall a \in \mathbb{I}, \quad \forall x \in \mathbb{A},$ |
| ideale destro | se $a \cdot x \in \mathbb{I}, \quad \forall a \in \mathbb{I}, \quad \forall x \in \mathbb{A},$ |
| ideale bilatero | se $x \cdot a, ax \in \mathbb{I}, \quad \forall a \in \mathbb{I}, \quad \forall x \in \mathbb{A}.$ |

23.2. Algebre artiniane e noetheriane

DEFINIZIONE 23.2.1. Chiamiamo¹ *artiniana a sinistra* (risp. *a destra*) un'algebra \mathbb{A} per cui ogni successione decrescente $\{\mathbb{I}_n\}$ di ideali sinistri (risp. destri) si stabilizzi: esista cioè un intero positivo m tale che $\mathbb{I}_n = \mathbb{I}_m$ per ogni $n > m$.

¹E. Artin, C. J. Nesbitt, and R. M. Thrall, *Rings with minimal condition*, University of Michigan Publications in Mathematics, no. 1, 1944.

Diciamo che \mathbb{A} è *artiniana* se lo è sia a sinistra che a destra.

Ogni algebra di dimensione finita è artiniana.

ESEMPIO 23.2.2. Siano $\mathbb{R}(t)$ il campo delle funzioni razionali reali ed

$$\mathbb{A} = \left\{ \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid f(t), g(t) \in \mathbb{R}(t), \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Con il prodotto righe per colonne di matrici, \mathbb{A} è un'algebra reale associativa e unitaria, che è artiniana a sinistra, ma non a destra.

Per verificarlo, osserviamo che gli elementi di \mathbb{A} con determinante diverso da zero sono invertibili e quindi un ideale (a destra o a sinistra) che contenga un tale elemento è uguale ad \mathbb{A} .

Gli ideali sinistri propri non banali di \mathbb{A} sono allora di una delle forme:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{R}(t) & \mathbb{R}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} \begin{pmatrix} 1 & g(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R}(t) \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

ed è quindi immediato che valgano sia la condizione della catena discendente che di quella ascendente.

Ciò non vale per gli ideali destri: sono infatti ideali destri quelli della forma

$$\mathbb{I}_W = \begin{pmatrix} 0 & W \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } W \text{ sottospazio vettoriale su } \mathbb{R} \text{ di } \mathbb{R}(t).$$

Poiché $\mathbb{R}(t)$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita su \mathbb{R} , non valgono né la condizione della catena ascendente, né quella della catena discendente.

Osserviamo che invece

$$\begin{pmatrix} \mathbb{R}(t) & \mathbb{R}(t) \\ 0 & \mathbb{R}(t) \end{pmatrix},$$

considerata come algebra reale, è artiniana e noetheriana sia a sinistra che a destra.

Questo esempio ci dice che ci sono algebre artiniane di dimensione infinita e che un'algebra può essere artiniana a sinistra, ma non a destra, e viceversa (basta nell'esempio precedente considerare matrici triangolari inferiori invece che superiori).

DEFINIZIONE 23.2.3. Diciamo che \mathbb{A} è *noetheriana a sinistra* (rispettivamente *a destra*) se ogni catena crescente di suoi ideali sinistri (rispettivamente destri) ammette un elemento massimale. La diremo semplicemente *noetheriana* se lo è sia a destra che a sinistra.

ESEMPIO 23.2.4. I polinomi reali in una indeterminata $\mathbb{R}[t]$ formano un'algebra reale di dimensione infinita, noetheriana, ma non artiniana, né a sinistra né a destra.

PROPOSIZIONE 23.2.5. Per un'algebra unitaria \mathbb{A} sono equivalenti:

- (1) \mathbb{A} è noetheriana a sinistra;
- (2) ogni ideale sinistro di \mathbb{A} è finitamente generato, è cioè della forma $\mathbb{I} = \sum_{i=1}^m \mathbb{A}a_i$ per un sottoinsieme finito a_1, \dots, a_m di elementi di \mathbb{A} .

Ogni algebra unitaria artiniana a sinistra (risp. destra) è anche noetheriana a sinistra (risp. destra) ed ogni suo ideale sinistro (risp. destro) è finitamente generato.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che un'unione crescente di ideali sinistri è un ideale sinistro, e quindi è chiaro che (2) implica (1).

Supponiamo viceversa che \mathbb{A} sia noetheriana a sinistra e sia \mathbb{I} un suo ideale sinistro. Se \mathbb{I} non fosse finitamente generato, potremmo costruire una successione $\{a_n\}$ di elementi di \mathbb{I} a partire da un qualsiasi $a_1 \in \mathbb{I}$, scegliendo per ricorrenza i successivi a_n in modo che $a_{n+1} \notin \mathbb{I}_n := \sum_{i=1}^n \mathbb{A} \cdot a_i$. Otterremmo così una successione di ideali sinistri con $\mathbb{I}_1 \subsetneq \mathbb{I}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathbb{I}_n \subsetneq \mathbb{I}_{n+1} \subsetneq \dots$, contraddicendo la (1).

Dimostriamo ora che gli ideali sinistri di un'algebra artiniana a sinistra sono finitamente generati. Sia \mathbb{I} un qualsiasi ideale sinistro di \mathbb{A} . Per il Lemma di Zorn, possiamo trovare una catena massimale di ideali sinistri $\{\mathbb{I}_i \mid i \in I\}$ di \mathbb{A} con $\mathbb{I}_i \subseteq \mathbb{I}$ e $\mathbb{I}_{i+1} \subsetneq \mathbb{I}_i$ se i non è il massimo di I (l'insieme I è bene-ordinato ed abbiamo indicato con $i+1$ l'elemento successivo ad i). Per l'ipotesi che \mathbb{A} sia artiniano la catena ha lunghezza finita:

$$\mathbb{I} = \mathbb{I}_1 \supsetneq \mathbb{I}_2 \supsetneq \dots \supsetneq \mathbb{I}_n \supsetneq \{0\} = \mathbb{I}_{n+1}.$$

Fissiamo elementi a_1, \dots, a_n in modo che $a_i \in \mathbb{I}_i \setminus \mathbb{I}_{i+1}$ se $1 \leq i \leq n$. Per la massimalità della catena, è $\mathbb{I}_n = \mathbb{A}a_n$ perché \mathbb{I}_n è minimale e, poiché $\mathbb{I}_{i+1} \subsetneq \mathbb{I}_{i+1} + \mathbb{A} \cdot a_i \subseteq \mathbb{I}_i$, è $\mathbb{I}_i = \mathbb{I}_{i+1} + \mathbb{A} \cdot a_i$ per $1 \leq i < n$. Ne segue che $\mathbb{I} = \sum_{i=1}^n \mathbb{A} \cdot a_i$ e quindi finitamente generato. La dimostrazione è completa. \square

23.3. Prodotto tensoriale

Il *prodotto tensoriale* $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ di due algebre \mathbb{A} e \mathbb{B} sullo stesso campo di scalari \mathbb{K} è ancora un'algebra su \mathbb{K} , con il prodotto definito sugli elementi di rango uno da

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2), \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{A}, \forall b_1, b_2 \in \mathbb{B}.$$

Nota che in questa definizione del prodotto abbiamo utilizzato l'isomorfismo di commutazione $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \otimes (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \simeq (\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}) \otimes (\mathbb{B} \otimes \mathbb{B})$.

Se \mathbb{A} e \mathbb{B} sono entrambe o commutative, o associative, o unitarie, lo è anche il loro prodotto tensoriale.

Utilizziamo la notazione $\mathbb{A}(n)$ per l'algebra delle matrici $n \times n$ a coefficienti in \mathbb{A} (con il prodotto righe per colonne di matrici).

LEMMA 23.3.1. *Valgono gli isomorfismi*

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \quad \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{C}(2), \quad \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}(4).$$

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni (z, w) \rightarrow (zw, \bar{z}w) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ è \mathbb{R} -bilineare e quindi si prolunga ad un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, che è un omomorfismo di algebre. Poiché

$$\phi(1 \otimes 1) = (1, 1), \quad \phi(1 \otimes i) = (i, i), \quad \phi(i \otimes 1) = (i, -i), \quad \phi(i \otimes i) = (-1, 1),$$

la ϕ è un isomorfismo lineare e quindi un isomorfismo di algebre.

L'isomorfismo $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{C}(2)$ esprime il fatto che \mathbb{H} è una *forma reale* di $\mathbb{C}(2)$. Per esplicitare l'isomorfismo, consideriamo l'applicazione \mathbb{R} -bilineare

$$\mathbb{C} \times \mathbb{H} \ni \left(a, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(2).$$

Essa si estende ad un isomorfismo del prodotto tensoriale $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ su $\mathbb{C}(2)$.

Infine, per verificare l'ultimo isomorfismo dell'enunciato, identifichiamo \mathbb{R}^4 ad \mathbb{H} e consideriamo l'applicazione

$$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \ni (c_1, c_2) \longrightarrow \{\mathbb{H} \ni \mathbf{x} \rightarrow c_1 \cdot \mathbf{x} \cdot \bar{c}_2 \in \mathbb{H}\} \in \mathbb{R}(4).$$

Poiché $\overline{c_1 c_2} = \bar{c}_2 \bar{c}_1$, questa applicazione è un isomorfismo di \mathbb{R} -algebre. \square

23.4. Centro

DEFINIZIONE 23.4.1. Il *centro* di un'algebra \mathbb{A} su \mathbb{K} è l'insieme

$$Z(\mathbb{A}) = \{a \in \mathbb{A} \mid a \cdot x = x \cdot a, \forall x \in \mathbb{A}\}.$$

Se \mathbb{A} è associativa e unitaria, il suo centro è una sottoalgebra commutativa unitaria, che contiene \mathbb{K} .

DEFINIZIONE 23.4.2. Chiamiamo *centrale* un'algebra associativa unitaria \mathbb{A} con

$$Z(\mathbb{A}) = \mathbb{K}.$$

ESEMPIO 23.4.3. Sia n un intero positivo.

Per ogni campo \mathbb{K} , la \mathbb{K} -algebra $\mathbb{K}(n)$ è centrale.

L'algebra $\mathbb{H}(n)$ è centrale su \mathbb{R} .

L'algebra $\mathbb{C}(n)$ è centrale su \mathbb{C} , ma non su \mathbb{R} .

23.5. Gruppo delle unità

Sia \mathbb{A} un'algebra associativa e unitaria su un campo \mathbb{K} .

DEFINIZIONE 23.5.1. Un elemento a di \mathbb{A} è un'unità se \mathbb{A} contiene un altro elemento b tale che $ab = ba = 1$. La b è univocamente determinata, si dice l'*inversa* di a e si denota con a^{-1} . L'insieme delle unità di \mathbb{A} si indica con $\mathcal{U}(\mathbb{A})$, oppure \mathbb{A}^* , e si dice il *gruppo delle unità* di \mathbb{A} .

LEMMA 23.5.2. L'insieme \mathbb{A}^* delle unità di \mathbb{A} è un gruppo moltiplicativo. \square

LEMMA 23.5.3. Se \mathbb{A} è un'algebra associativa e unitaria di dimensione finita su un campo \mathbb{K} ed $a \in \mathbb{A}$ sono equivalenti

- (1) a ammette un'inversa sinistra;
- (2) a ammette un'inversa destra;
- (3) esiste un unico elemento a^{-1} in \mathbb{A} tale che $a^{-1}a = a \cdot a^{-1} = 1$.

DIMOSTRAZIONE. (1) \Rightarrow (2). Se a ammette un'inversa sinistra, l'applicazione $\mathbb{A} \ni x \rightarrow a \cdot x \in \mathbb{A}$ è surgettiva e quindi un isomorfismo lineare. In particolare a ammette un'inversa destra. In modo analogo si verifica che (2) \Rightarrow (1). Se $ab = 1$ e $ca = 1$, la proprietà associativa dà $c = c(ab) = (ca)b = b$ e questo dimostra che (3) è equivalente ad (1) e (2). \square

23.6. \mathbb{A} -moduli

Sia \mathbb{A} un'algebra associativa su \mathbb{K} .

DEFINIZIONE 23.6.1. Una *rappresentazione lineare* di \mathbb{A} è il dato di uno spazio vettoriale V su \mathbb{K} e di un omomorfismo di algebre associative unitarie

$$\rho : \mathbb{A} \ni a \rightarrow \rho_a \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V).$$

La ρ è cioè \mathbb{K} -lineare e $\rho_{a \cdot b} = \rho_a \circ \rho_b$, per ogni $a, b \in \mathbb{A}$.

In questo caso diciamo anche che V è un \mathbb{A} -modulo ed utilizzeremo spesso, quando ciò non crei confusione, la notazione $a \cdot v$ per indicare $\rho_a(v)$.

Il nucleo $\ker(\rho) = \{a \in \mathbb{A} \mid a \cdot v = 0, \forall v \in V\}$ è un ideale bilatero di \mathbb{A} , che si dice *nucleo d'infedeltà* della rappresentazione.

Se $\ker \rho = \{0\}$, diciamo che la rappresentazione ρ e l' \mathbb{A} -modulo V sono *fedeli*.

La moltiplicazione a sinistra definisce su \mathbb{A} una struttura di \mathbb{A} -modulo.

Se \mathbb{A} è unitaria, questa rappresentazione è fedele e ci permette di identificare \mathbb{A} ad una sottoalgebra di $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$.

Se S è un sottoinsieme di un \mathbb{A} -modulo V , indichiamo con $\langle S \rangle$, o con $\mathbb{A}\langle S \rangle$ quando sia necessario specificare l'algebra dei coefficienti, il sotto- \mathbb{A} -modulo di V i cui elementi sono le somme delle combinazioni lineari degli elementi di S con coefficienti in \mathbb{A} . Se $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ è un insieme finito, scriviamo $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ (oppure $\mathbb{A}\langle v_1, \dots, v_m \rangle$) invece di $\langle S \rangle$ (oppure $\mathbb{A}\langle S \rangle$). Chiamiamo S un insieme di *generatori* di $\langle S \rangle$.

DEFINIZIONE 23.6.2. Un *morfismo di \mathbb{A} -moduli*, o *applicazione \mathbb{A} -lineare* è il dato di due \mathbb{A} -moduli V_1, V_2 e di un'applicazione \mathbb{K} -lineare $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ tale che

$$\phi(a \cdot v) = a \cdot \phi(v), \quad \forall v \in V_1, \forall a \in \mathbb{A}.$$

Indichiamo con $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(V_1, V_2)$ lo spazio vettoriale dei morfismi dell' \mathbb{A} -modulo V_1 a valori nell' \mathbb{A} -modulo V_2 .

Se ϕ è invertibile, anche l'inversa è un morfismo di \mathbb{A} -moduli e la ϕ si dice un *isomorfismo* o un' *equivalenza* di \mathbb{A} -moduli.

Si dice *commutante dell' \mathbb{A} -modulo V* l'algebra associativa unitaria

$$(23.1) \quad \mathbb{F}(V) = \text{Hom}_{\mathbb{A}}(V, V) = \{\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid \phi(a \cdot v) = a \cdot \phi(v), \forall v \in V, \forall a \in \mathbb{A}\}$$

dei morfismi dell' \mathbb{A} -modulo V in sé (*endomorfismi*).

I suoi elementi invertibili formano il gruppo $\text{Aut}_{\mathbb{A}}(V)$ degli *automorfismi* di V .

23.6.1. Moduli artiniani e noetheriani.

DEFINIZIONE 23.6.3. Un \mathbb{A} -modulo V si dice:

- *artiniano* se ogni sua catene decrescente di sotto- \mathbb{A} -moduli si stabilizza;
- *noetheriano* se ogni sua catena crescente di sotto- \mathbb{A} -moduli si stabilizza;
- *finitamente generato* se ammette un sistema finito di generatori.

PROPOSIZIONE 23.6.4. *Supponiamo che \mathbb{A} sia unitaria.*

- (1) *Un \mathbb{A} -modulo V è noetheriano se e soltanto se tutti i suoi sotto- \mathbb{A} -moduli sono finitamente generati.*

(2) *Ogni modulo artiniiano è anche noetheriano.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Ragioniamo per assurdo. Se V contenesse un sotto- \mathbb{A} -modulo W che non fosse finitamente generato, potremmo costruire una successione $\{z_n\}_{n \geq 0}$ di elementi di W con $z_{n+1} \notin \langle z_0, z_1, \dots, z_n \rangle$ per ogni intero $n \geq 0$. Allora i $W_n = \langle z_0, z_1, \dots, z_n \rangle$ formerebbero una successione infinita strettamente crescente di sotto- \mathbb{A} -moduli e quindi V non sarebbe Noetheriano.

Viceversa, l'unione W di una catena non decrescente di sotto- \mathbb{A} -moduli $\{W_i\}_{i \in I}$ di V è ancora un sotto- \mathbb{A} -modulo di V . Se W è finitamente generato, se cioè $W = \langle z_1, \dots, z_n \rangle$, i generatori z_1, \dots, z_n , essendo in numero finito, appartengono tutti ad uno stesso elemento W_i della catena: avremo quindi $W_j = W_i$ per ogni $j > i$ e quindi la catena si stabilizza. Ciò dimostra che se tutti i sotto- \mathbb{A} -moduli di V sono finitamente generati, allora V è noetheriano. Questo completa la dimostrazione della prima affermazione dell'enunciato.

(2) Supponiamo ora che V sia artiniiano. Se W è un qualsiasi suo sotto- \mathbb{A} -modulo, per il lemma di Zorn possiamo costruire una catena massimale $\{W_i\}_{i \in I}$ di sotto- \mathbb{A} -moduli con $W \supset W_i \supsetneq W_{i+1}$ se i non è massimo in I . Per l'ipotesi di artinianità, la catena deve essere finita, della forma

$$W = W_1 \supsetneq W_2 \supsetneq \dots \supsetneq W_n \supsetneq \{0\} = W_{n+1}.$$

Scegliendo $z_i \in W_i \setminus W_{i+1}$ per $1 \leq i \leq n$, otteniamo $W = \langle z_1, \dots, z_n \rangle$. Questo dimostra che W è finitamente generato. Poiché tutti i suoi sotto- \mathbb{A} -moduli sono finitamente generati, V è noetheriano. \square

PROPOSIZIONE 23.6.5. *Tutti gli \mathbb{A} -moduli finitamente generati di un'algebra artiniiana a sinistra sono artiniiani.*

DIMOSTRAZIONE. Se V è un \mathbb{A} -modulo che ammette un sistema finito di generatori v_1, \dots, v_ℓ , allora l'applicazione $\pi : \mathbb{A}^\ell \ni (a_1, \dots, a_\ell) \rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell \in V$ è un morfismo surgettivo di \mathbb{A} -moduli e l'immagine inversa $\pi^{-1}(W)$ di ogni sotto- \mathbb{A} -modulo W di V è un sotto- \mathbb{A} -modulo di \mathbb{A}^ℓ con $\pi(\pi^{-1}(W)) = W$. È quindi sufficiente dimostrare la Proposizione nel caso in cui $V = \mathbb{A}^\ell$.

Poiché abbiamo supposto \mathbb{A} artiniiano, la tesi è vera per ipotesi se $\ell=1$. Ragioniamo allora per ricorrenza, supponendo $\ell > 1$ ed $\mathbb{A}^{\ell-1}$ artiniiano.

Sia $\{V_i\}_{i \in I}$ una catena decrescente di sotto- \mathbb{A} -moduli di V . I

$$W_i = \{(a_1, \dots, a_{\ell-1}) \mid (a_1, \dots, a_{\ell-1}, 0) \in V_i\}$$

formano una catena decrescente $\{W_i\}$ di sotto- \mathbb{A} -moduli di $\mathbb{A}^{\ell-1}$ che, per l'ipotesi induttiva, si stabilizza: possiamo trovare un $i_0 \in I$ tale che $W = W_{i_0} = W_i$ per ogni $i > i_0$. Gli

$$\mathbb{I}_i = \{a \in \mathbb{A} \mid \exists a_1, \dots, a_{\ell-1} \text{ t.c. } (a_1, \dots, a_{\ell-1}, a) \in V_i\}$$

formano una catena decrescente di ideali sinistri di \mathbb{A} . Per ipotesi, la catena $\{\mathbb{I}_i\}_{i \in I}$ si stabilizza: possiamo trovare cioè un $i_1 \in I$, che supporremo per semplicità con $i_1 \geq i_0$, tale che $\mathbb{I} = \mathbb{I}_{i_1} = \mathbb{I}_i$ per ogni $i > i_1$.

Se $i > i_1$ ed $(a_1, \dots, a_{\ell-1}, a_n) \in V_i$, allora $a_n \in \mathbb{I}_i = \mathbb{I}_{i_1}$ e possiamo trovare $b_1, \dots, b_{\ell-1} \in \mathbb{A}$ tali che $(b_1, \dots, b_{\ell-1}, a_n) \in V_{i_1}$. Quindi $(a_1 - b_1, \dots, a_{\ell-1} - b_{\ell-1}) \in$

$W_i = W_{i_1}$ e finalmente

$$(a_1, \dots, a_{\ell-1}, a_n) = (b_1, \dots, b_{\ell-1}, a_n) + (a_1 - b_1, \dots, a_{\ell-1} - b_{\ell-1}, 0) \in V_{i_1}.$$

Questo dimostra che $V_i = V_{i_1}$ per ogni $i > i_1$. Abbiamo così verificato che \mathbb{A}^ℓ è artiniana a sinistra. La dimostrazione è completa. \square

23.6.2. Moduli semplici e lemma di Schur.

DEFINIZIONE 23.6.6. Diciamo che l' \mathbb{A} -modulo V (o la corrispondente rappresentazione) è *semplice*, o *irriducibile*, se V non contiene sotto- \mathbb{A} -moduli propri non banali.

LEMMA 23.6.7 (Schur [59]). *Se V e W sono \mathbb{A} -moduli semplici e $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{A}}(V, W)$, allora o ϕ è nulla, o è un isomorfismo lineare.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti $\ker \phi$ ed $\text{Imm}(\phi)$ sono due sotto- \mathbb{A} -moduli di \mathbb{A} -moduli semplici, e quindi o nulli o uguali al modulo semplice in cui sono contenuti. \square

COROLLARIO 23.6.8 (Schur). *Il commutante di un \mathbb{A} -modulo semplice è un'algebra di divisione associativa.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se V è un \mathbb{A} -modulo semplice, gli elementi non nulli ζ di $\mathbb{F}(V)$ sono, per il Lemma 23.6.7, invertibili. Inoltre, essendo un'algebra di endomorfismi lineari, è associativa². \square

23.6.3. Moduli semisemplici.

DEFINIZIONE 23.6.9. Chiamiamo *semisemplice* un \mathbb{A} -modulo che si possa decomporre in una somma diretta di sotto- \mathbb{A} -moduli semplici.

LEMMA 23.6.10. *Ogni \mathbb{A} -modulo che sia somma di \mathbb{A} -moduli semplici è semisemplice.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $V = \sum_{i \in I} V_i$ un \mathbb{A} -modulo, con i V_i sotto- \mathbb{A} -moduli semplici. Sia \mathcal{J} la famiglia dei sottoinsiemi J di I per cui la somma $\sum_{i \in J} V_i$ sia diretta. Questa famiglia è induttiva ed ammette quindi un elemento massimale J_0 . Dico che $V = \bigoplus_{i \in J_0} V_i$. Infatti, se così non fosse, potremmo trovare un indice j_0 tale che V_{j_0} non sia contenuto in nessuna somma finita W di V_i con $i \in J_0$. Ma allora $V_{j_0} \cap W = \{0\}$ perché l'intersezione è un sotto- \mathbb{A} -modulo proprio di V_{j_0} . Questo mostra che la somma $V_{j_0} + \sum_{i \in J_0} V_i$ è diretta, contraddicendo la massimalità di J_0 . La dimostrazione è completa. \square

PROPOSIZIONE 23.6.11. *Se V è un \mathbb{A} -modulo semisemplice e W un suo sotto- \mathbb{A} -modulo proprio non nullo, allora W e V/W sono \mathbb{A} -moduli semisemplici ed esiste un sotto- \mathbb{A} -modulo U di V tale che $V = U \oplus W$.*

²Ricordiamo che in un'algebra di divisione associativa inversa destra e sinistra coincidono (vedi il Lemma 23.5.3).

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ come somma diretta di sotto- \mathbb{A} -moduli semplici e sia $\pi : V \rightarrow V/W$ la proiezione nel quoziente. Per ogni indice i il sotto- \mathbb{A} -modulo $\pi(V_i)$ di V/W è o semplice, perché isomorfo ad un \mathbb{A} -modulo semplice, o uguale a $\{0\}$. Poiché $(V/W) = \sum_{\pi(V_i) \neq \{0\}} \pi(V_i)$ è somma di \mathbb{A} -moduli semplici, è semisemplice per il Lemma 23.6.10 e, per l'argomento nella dimostrazione del Lemma 23.6.10, possiamo trovare un sottoinsieme di indici $J \subset I$ per cui $\pi(V_i) \neq \{0\}$ per ogni $i \in J$ e $(V/W) = \bigoplus_{i \in J} \pi(V_i)$. Poniamo $V' = \bigoplus_{i \in I \setminus J} V_i$, $V'' = \bigoplus_{i \in J} V_i$. Allora (V/W) è isomorfo a V'' , e W a V/V'' , che è isomorfo a V' . Quindi W è semisemplice perché isomorfo all' \mathbb{A} -modulo semisemplice V' , e $U = V''$ è un \mathbb{A} -modulo complementare di W in V . \square

PROPOSIZIONE 23.6.12. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un \mathbb{A} -modulo sia semisemplice è che ogni suo sotto- \mathbb{A} -modulo ammetta un complemento in V .*

DIMOSTRAZIONE. La necessità segue dalla Proposizione 23.6.11. Dimostriamo la sufficienza.

Dimostriamo preliminarmente che per ogni sotto- \mathbb{A} -modulo proprio U di V c'è un sotto- \mathbb{A} -modulo semplice W di V con $U \cap W = \{0\}$.

Fissato $v_0 \in V \setminus U$, consideriamo la famiglia \mathcal{F} dei sotto- \mathbb{A} -moduli di V che contengono U ma non v_0 . Semiordinata mediante inclusione, \mathcal{F} è induttiva e contiene quindi un elemento massimale \tilde{U} . Per ipotesi, possiamo trovare un sotto- \mathbb{A} -modulo W con $\tilde{U} \oplus W = V$. Dico che W è semplice. Infatti, v_0 si decompone in modo unico nella somma $u_0 + z_0$ di un elemento u_0 di \tilde{U} e z_0 di W . Se $z \in W \setminus \{0\}$, allora $\langle \tilde{U} \cup \{z\} \rangle$ contiene propriamente \tilde{U} e quindi z_0 . Di conseguenza, z_0 appartiene ad ogni $\langle z \rangle$ con $z \in W \setminus \{0\}$. L'intersezione $W_0 = \bigcap_{z \in W \setminus \{0\}} \langle z \rangle$ è un sotto- \mathbb{A} -modulo semplice, non banale perché contiene $z_0 \neq 0$, contenuto in W , e quindi, in particolare, con $W_0 \cap U = \{0\}$.

Dico che $W = W_0$. Infatti, se $\tilde{U} \oplus W_0$ non fosse uguale a V , avrebbe in V un complemento U' ed $\tilde{U} \oplus U'$ sarebbe un \mathbb{A} -modulo contenente U , ma non z_0 e quindi nemmeno v_0 , dunque un elemento di \mathcal{F} che contiene propriamente \tilde{U} . Quindi $U' = \{0\}$ e $W = W_0$.

Abbiamo ricavato che *un sottomodulo complementare di un sottomodulo massimale è (in questo caso) semplice.*

Per il Lemma 23.6.10, la somma U di tutti i sotto- \mathbb{A} -moduli semisemplici di V è un suo sotto- \mathbb{A} -modulo semisemplice. Esso deve essere uguale a V , perché altrimenti, per la prima parte della dimostrazione, potremmo trovare un sotto- \mathbb{A} -modulo semisemplice di V non contenuto in U e questo contraddirebbe la definizione di U . La dimostrazione è completa. \square

Se V è un \mathbb{A} -modulo, allora gli \mathbb{A} -endomorfismi di V formano un'algebra associativa e unitaria $\mathbb{F} = \mathbb{F}(V)$. In modo naturale, possiamo considerare V come un \mathbb{F} -modulo. Gli elementi di \mathbb{A} definiscono dei \mathbb{F} -endomorfismi di V . Abbiamo quindi un'applicazione naturale

$$(23.2) \quad \mathbb{A} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(V) \quad \text{con } \mathbb{F} = \mathbb{F}(V).$$

LEMMA 23.6.13. *Se V è semisemplice ed $\mathbb{F} = \mathbb{F}(V)$, allora*

$$(23.3) \quad \psi(\mathbb{A} \cdot v) \subseteq \mathbb{A} \cdot v, \quad \forall v \in V, \forall \psi \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $v \in V$ un elemento non nullo. Per la Proposizione 23.6.11 possiamo trovare un sotto- \mathbb{A} -modulo W tale che $V = \mathbb{A}v \oplus W$. La proiezione π di V su $\mathbb{A}v$ lungo W è un \mathbb{A} -endomorfismo di V . Ogni elemento ψ di $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ commuta con π e quindi, in particolare, $\psi(\mathbb{A}v) = \psi(\pi(\mathbb{A}v)) = \pi(\psi(\mathbb{A}v)) \subseteq \mathbb{A}v$. \square

Gli elementi di $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ preservano quindi i sottomoduli di V .

TEOREMA 23.6.14 (Jacobson). *Se V è un \mathbb{A} -modulo semisemplice finitamente generato, allora l'omomorfismo (23.2) è surgettivo.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché V è semisemplice e finitamente generato, è somma diretta $V = \bigoplus_{i=1}^m S_i$ di un numero finito di sotto- \mathbb{A} -moduli semplici. Per ogni indice $i=1, \dots, m$ scegliamo un elemento $s_i \in S_i$ diverso da zero. Per il Lemma 23.6.13, per ogni $\psi \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ possiamo trovare un elemento $a \in \mathbb{A}$ tale che $\psi(s_1 + \dots + s_m) = a \cdot (s_1 + \dots + s_m)$ e da questa segue che $\psi(s_i) = a \cdot s_i$ per ogni i e quindi $\psi(v) = a \cdot v$ per ogni $v \in V$. \square

23.6.4. Radicale e zoccolo di un \mathbb{A} -modulo. Sia V un \mathbb{A} -modulo. Nella famiglia $\mathcal{G}_{\mathbb{A}}(V)$ dei suoi sotto- \mathbb{A} -moduli, i sottomoduli propri massimali e quelli semplici sono oggetti in qualche modo duali. Utilizzando i primi, definiamo il *radicale*, i secondi lo *zoccolo* di V .

DEFINIZIONE 23.6.15. Chiamiamo:

- *radicale* di V l'intersezione $\text{rad}(V)$ di tutti i suoi sotto- \mathbb{A} -moduli propri massimali;
- *zoccolo*³ di V la somma $\text{soc}(V)$ di tutti i suoi sotto- \mathbb{A} -moduli semplici.

Per il Lemma 23.6.10 gli \mathbb{A} -moduli semisemplici sono quelli che coincidono con il proprio zoccolo.

LEMMA 23.6.16. *Ogni \mathbb{A} -modulo semisemplice ha radicale nullo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $V = \bigoplus_{i \in I} S_i$ un \mathbb{A} -modulo semisemplice, decomposto nella somma diretta di una famiglia di suoi sotto- \mathbb{A} -moduli semplici S_i . Per ogni indice i , la somma diretta $W_i = \bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} S_j$ è un sotto- \mathbb{A} -modulo proprio massimale di V e $\text{rad}(V) \subset \bigcap_{i \in I} W_i = \{0\}$ dimostra che $\text{rad}(V) = \{0\}$. \square

PROPOSIZIONE 23.6.17. *Se V è un \mathbb{A} -modulo artiniiano, allora:*

- (1) *Ogni sotto- \mathbb{A} -modulo non banale di V ne contiene uno semplice.*
- (2) *Se $\text{rad}(V)$ è nullo, allora V è semisemplice e finitamente generato.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Se W è un sotto- \mathbb{A} -modulo non banale di V , possiamo semiordinare la famiglia $\mathcal{G}_{\mathbb{A}}^*(W)$ dei suoi sotto- \mathbb{A} -moduli non banali dicendo che $U_1 < U_2$ se $U_1 \supset U_2$. Per la proprietà di artinianità la famiglia $\mathcal{G}_{\mathbb{A}}^*(W)$ è induttiva e contiene quindi degli elementi massimali, che sono necessariamente semplici.

³In inglese e francese *socle*.

(2) Se V è semplice, ha radicale nullo ed è semisemplice e generato da un suo qualsiasi elemento non nullo.

Consideriamo il caso in cui V non sia semplice: allora la famiglia $\mathcal{M}(V)$ dei suoi sotto- \mathbb{A} -moduli propri non nulli e massimali non è vuota. Poiché abbiamo supposto V artiniano, possiamo trovare un insieme finito minimale W_1, \dots, W_m di elementi di $\mathcal{M}(V)$ tali che $W_1 \cap \dots \cap W_m = \bigcap \mathcal{M} = \text{rad}(V) = \{0\}$. Per ogni indice $i = 1, \dots, m$, l'intersezione $\bigcap \{W_j \mid 1 \leq j \leq m, j \neq i\}$ è diversa da $\{0\}$ e quindi, per l'ipotesi di artinianità, contiene un sotto- \mathbb{A} -modulo semplice S_i . È allora $V = W_i \oplus S_i$, perché $S_i \cap W_i = \{0\}$ e $V = W_i + S_i$ in quanto W_i è massimale. La somma $\sum_{i=1}^m S_i$ è diretta perché per ogni indice i la somma degli S_j con $j \neq i$ è contenuta nel complemento W_i di S_i . Dato un qualsiasi vettore $v \in V$, possiamo trovare, per ricorrenza, elementi $s_1, \dots, s_m, z_1, \dots, z_m$ di V con

$$\begin{cases} v = s_1 + z_1, & s_1 \in S_1, z_1 \in W_1, \\ z_1 = s_2 + z_2, & s_2 \in S_2, z_2 \in W_2, \\ \dots & \dots, z_h \in W_h, \\ z_h = s_{h+1} + z_{h+1}, & s_{h+1} \in S_{h+1}, z_{h+1} \in W_{h+1}, \quad 1 < h < m. \end{cases}$$

Dico che, per ogni h , $z_h \in W_1 \cap \dots \cap W_h$. Infatti, ciò è vero per $h=1$. Se è vero per un z_h con $1 \leq h < m$, osserviamo che, poiché s_{h+1} appartiene a tutti i W_i con $i \neq h+1$, il vettore $z_{h+1} = z_h - s_{h+1}$ sta nell'intersezione di W_{h+1} con $W_1 \cap \dots \cap W_h$. È perciò $z_m = 0$ e da questo ricaviamo che $v = s_1 + \dots + s_m$. Ciò prova che $V = \bigoplus_{i=1}^m S_i$ ed è quindi semisemplice. \square

Fissato un elemento v di un \mathbb{A} -modulo V , indichiamo con r_v l'applicazione $\mathbb{A} \ni a \rightarrow a \cdot v$ e consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{r_v} & \langle v \rangle \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbb{A} / \ker r_v & \end{array}$$

in cui la freccia a sinistra è la proiezione nel quoziente e quella a destra il quoziente iniettivo di r_v , che è un isomorfismo di $\langle v \rangle$ con il quoziente di \mathbb{A} rispetto all'ideale sinistro $\ker r_v$. Quindi, *gli \mathbb{A} -moduli ciclici sono tutti isomorfi a quozienti di \mathbb{A} ed, in particolare, quelli semplici ai quozienti di \mathbb{A} rispetto ai suoi ideali sinistri massimali.*

Se \mathbb{I} è un ideale sinistro massimale di \mathbb{A} , il quoziente $S = \mathbb{A}/\mathbb{I}$ è un \mathbb{A} -modulo semplice. Sia $\pi : \mathbb{A} \rightarrow S$ la proiezione nel quoziente. Per ogni $a_0 \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{I}$, la traslazione a destra rispetto ad a_0 definisce per passaggio al quoziente un'applicazione $\mathbb{A} / \ker r_{\pi(a_0)} \rightarrow \mathbb{A}/\mathbb{I} = S$. L'ideale sinistro $\ker r_{\pi(a_0)}$ è anch'esso massimale.

PROPOSIZIONE 23.6.18. *La decomposizione di un \mathbb{A} -modulo semisemplice in somma diretta di sotto- \mathbb{A} -moduli semplici è essenzialmente unica: in essa le famiglie di sotto- \mathbb{A} -moduli semplici isomorfi ad un \mathbb{A} -modulo semplice assegnato hanno la stessa cardinalità.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $V = \bigoplus_{i \in I} S_i$ una decomposizione di V in somma diretta di sotto- \mathbb{A} -moduli semplici. Se S è un qualsiasi sotto- \mathbb{A} -modulo semplice di V , indichiamo con $I(S)$ l'insieme degli indici $i \in I$ per cui S_i è isomorfo ad S .

Un elemento non nullo $s \in S$ si decompone in modo unico come somma di una combinazione lineare finita $s = s_{i_1} + \dots + s_{i_m}$ di vettori linearmente indipendenti $s_{i_h} \in S_{i_h}$. Poiché

$$\ker r_s = \{x \in \mathbb{A} \mid x \cdot s = 0\} = \bigcap_{h=1}^m \{x \in \mathbb{A} \mid x \cdot s_{i_h} = 0\} = \bigcap_{h=1}^m \ker r_{s_{i_h}}$$

e $\ker r_s$ è un ideale sinistro massimale, se ne ricava che tutti gli ideali $\ker r_{s_{i_h}}$ sono uguali e l'applicazione $x \cdot s \rightarrow x \cdot s_{i_h}$ definisce per passaggio al quoziente un isomorfismo tra S ed S_{i_h} per ogni $h = 1, \dots, m$. Quindi $S \subseteq \bigoplus_{i \in I(S)} S_i$.

Perciò, se $V = \bigoplus_{j \in J} S'_j$ è un'altra decomposizione di V in somma diretta di sotto- \mathbb{A} -moduli semplici e $J(S)$ gli indici j per cui $S'_j \simeq S$, allora

$$\bigoplus_{i \in I(S)} S_i = \bigoplus_{j \in J(S)} S'_j.$$

Questo ci permette di ricondurci, per il resto della dimostrazione, al caso in cui i sotto- \mathbb{A} -moduli semplici di V siano tutti isomorfi tra loro.

Supponiamo che I sia finito. Per ogni $i \in I$, un generatore s_i di S_i , e quindi S_i , è contenuto in una somma finita $\sum_{j \in J(i)} S'_j$. Allora $J' = \bigcup_{i \in I} J(i)$ è finito e $V = \bigoplus_{j \in J'} S'_j$: quindi $J = J'$ è finito. Possiamo quindi supporre sia $I = \{1, \dots, m\}$ e $J = \{1, \dots, n\}$. Scegliamo generatori s_i di S_i ed s'_j di S'_j .

Possiamo trovare allora coefficienti $a_{j,i} \in \mathbb{A}$ tali che

$$(*) \quad s'_j = a_{j,1} s_1 + \dots + a_{j,m} s_m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Poiché $s'_1 \neq 0$, a meno di riordinare gli indici, possiamo supporre che $a_{1,1} s_1 \neq 0$. Poiché anche $a_{1,1} s_1$ è un generatore di S_1 , possiamo supporre che semplicità che $a_{1,1} = 1$. Allora

$$s'_j - a_{j,1} s_1 \in \langle s_2, \dots, s_m \rangle, \quad \forall 2 \leq j \leq n.$$

Per ricorrenza, possiamo riordinare gli indici $1, 2, \dots, m$ e definire coefficienti $b_{j,h} \in \mathbb{A}$, con $j > h \geq 1$ tali che

$$\begin{aligned} s'_j - b_{j,1} s_1 - \dots - b_{j,j-1} s_{j-1} &\in \mathbb{A}[s_j, \dots, s_m], & \text{se } j \leq m, \\ s'_j - b_{j,1} s_1 - \dots - b_{j,m-1} s_{m-1} - b_{j,m} s_m &= 0, & \text{se } j > m. \end{aligned}$$

Da questo segue che $n \leq m$. Scambiando i ruoli delle s_i e delle s'_j si dimostra allora in modo analogo che $m \leq n$ e quindi che $m = n$.

Se la cardinalità degli insiemi I e J è infinita, l'osservazione che ogni sotto- \mathbb{A} -modulo isomorfo ad S è contenuto nella somma diretta di un numero finito di S_i e di S'_j è sufficiente per concludere che $\text{card}(I) = \text{card}(J)$. La dimostrazione è completa. \square

DEFINIZIONE 23.6.19. Diciamo che un sottoinsieme B di un \mathbb{A} -modulo V è una sua \mathbb{A} -base se:

- (1) per ogni $b \in B$ il sotto- \mathbb{A} -modulo $\langle b \rangle$ è semplice;
- (2) $V = \bigoplus_{b \in B} \langle b \rangle$.

TEOREMA 23.6.20. *Ogni \mathbb{A} -modulo semisemplice ammette una base.*

Se B, B' sono due \mathbb{A} -basi di uno stesso \mathbb{A} -modulo semisemplice V , allora esiste un automorfismo $\phi \in \mathcal{A}ut_{\mathbb{A}}(V)$ tale che $\phi(B) = B'$. \square

In particolare, due \mathbb{A} -basi di un modulo semisemplice hanno la stessa cardinalità.

DEFINIZIONE 23.6.21. Chiamiamo \mathbb{A} -dimensione di un \mathbb{A} -modulo semisemplice V la cardinalità di una sua base, che indichiamo con $\dim_{\mathbb{A}} V$.

23.7. Algebre semisemplici

DEFINIZIONE 23.7.1. Chiamiamo *semisemplice* un'algebra \mathbb{A} che lo sia come \mathbb{A} -modulo.

PROPOSIZIONE 23.7.2. *Se \mathbb{A} è semisemplice, ogni \mathbb{A} -modulo V è semisemplice.*

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza del fatto che ogni \mathbb{A} -modulo è un quoziente di una somma diretta di copie di \mathbb{A} : se $(v_i \mid i \in I)$ è una base di V come spazio vettoriale su \mathbb{K} , allora l'applicazione⁴

$$\bigoplus_{i \in I} (\mathbb{A})_i \ni (a_i) \rightarrow \sum_{i \in I} a_i v_i \in V$$

è un \mathbb{A} -morfismo surgettivo, che identifica V ad un quoziente dell' \mathbb{A} -modulo semisemplice $\bigoplus_{i \in I} (\mathbb{A})_i$. \square

23.8. Algebre semplici

DEFINIZIONE 23.8.1. Si dice *semplice* un'algebra che non contenga ideali bilateri non banali.

PROPOSIZIONE 23.8.2. *Ogni algebra associativa semplice e artiniana a sinistra (ciò vale ad esempio se \mathbb{A} ha dimensione finita su \mathbb{K}) è semi-semplice.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo artiniana, \mathbb{A} contiene un ideale sinistro non banale minimale S , che è anche un \mathbb{A} -modulo semplice. Per ogni $a \in \mathbb{A}$ per cui $S \cdot a \neq \{0\}$ anche $S \cdot a$ è un \mathbb{A} -modulo (utilizziamo qui l'ipotesi che \mathbb{A} sia associativa) semplice, isomorfo ad S , perché l'applicazione $r_a : S \ni s \rightarrow s \cdot a \in S \cdot a$ è un isomorfismo di \mathbb{A} -moduli, (il suo nucleo è un sotto- \mathbb{A} -modulo proprio di S e quindi banale). L'unione $S\mathbb{A} = \bigcup_{a \in \mathbb{A}} Sa$ è un ideale bilatero non banale di \mathbb{A} , quindi uguale ad \mathbb{A} perché abbiamo supposto \mathbb{A} semplice. Quindi \mathbb{A} è semisemplice per il Lemma 23.6.10, e possiamo trovare un sottoinsieme I di \mathbb{A} tale che $\mathbb{A} = \bigoplus_{a \in I} Sa$. \square

COROLLARIO 23.8.3. *Tutti gli \mathbb{A} -moduli semplici di un'algebra associativa semplice artiniana a sinistra \mathbb{A} sono isomorfi. Tutti i suoi \mathbb{A} -moduli sono semisemplici ed \mathbb{A} -moduli che abbiano la stessa \mathbb{A} -dimensione sono isomorfi.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\mathbb{A} = \bigoplus_{a \in I} S \cdot a$, con S ideale sinistro minimale di \mathbb{A} , tutti gli \mathbb{A} -moduli semplici sono isomorfi ad S e quindi isomorfi tra loro. L'ultima affermazione segue allora dalla Proposizione 23.7.2 e dal Teorema 23.6.20. \square

⁴Ricordiamo che la somma diretta consiste degli elementi del prodotto cartesiano che hanno soltanto un numero finito di componenti diversi da zero.

Il nucleo di una rappresentazione lineare $\rho : \mathbb{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ di un'algebra associativa \mathbb{A} è un suo ideale bilatero. Otteniamo quindi:

PROPOSIZIONE 23.8.4. *Ogni rappresentazione lineare non banale di un'algebra associativa semplice è fedele.* \square

Supponiamo che \mathbb{A} sia associativa e artiniana a sinistra. Se S è un suo \mathbb{A} -modulo semplice, il suo commutante

$$\mathbb{F} = \{\zeta \in \text{End}_{\mathbb{K}}(S) \mid a(\zeta(s)) = \zeta(as), \forall a \in \mathbb{A}, \forall s \in S\}$$

è, per il Lemma di Schur, un'algebra di divisione. Per la Proposizione 23.8.4 abbiamo

PROPOSIZIONE 23.8.5. *Sia \mathbb{A} un'algebra associativa semplice e artiniana. La rappresentazione su un suo \mathbb{A} -modulo semplice S con commutante \mathbb{F} definisce un omomorfismo iniettivo di algebre associative*

$$(23.4) \quad \rho : \mathbb{A} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(S). \quad \square$$

DEFINIZIONE 23.8.6. La (23.4) si dice l'*applicazione strutturale* di \mathbb{A} .

PROPOSIZIONE 23.8.7. *Un'algebra associativa unitaria di dimensione finita su un campo \mathbb{K} è semisemplice se e soltanto se è somma diretta di algebre associative unitarie semplici.*

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 23.8.2, una somma diretta di algebre semplici è semisemplice. Per dimostrare il viceversa, ragioniamo per ricorrenza sulla dimensione N di \mathbb{A} come spazio vettoriale su \mathbb{K} . Naturalmente, se \mathbb{A} fosse semplice, non avremmo nulla da dimostrare. Supporremo quindi che \mathbb{A} non sia semplice e che ogni algebra associativa unitaria semisemplice di dimensione inferiore ad N si decomponga in una somma diretta di ideali semplici, ciascuno dei quali sia un'algebra unitaria. Sia \mathbb{B} un ideale bilatero non banale di \mathbb{A} , di dimensione minimale. Per l'ipotesi di semisemplicità possiamo trovare un ideale sinistro \mathbb{B}' di \mathbb{A} con $\mathbb{A} = \mathbb{B} \oplus \mathbb{B}'$. In particolare, l'unità $1_{\mathbb{A}}$ si decompone in modo unico in una somma $1_{\mathbb{A}} = p + p'$ con $p \in \mathbb{B}$ e $p' \in \mathbb{B}'$, entrambi non nulli perché \mathbb{B} e \mathbb{B}' sono propri.

Osserviamo che tutti i prodotti $b \cdot b'$, in cui il primo fattore appartenga a \mathbb{B} ed il secondo a \mathbb{B}' , sono nulli perché appartengono all'intersezione $\mathbb{B} \cap \mathbb{B}' = \{0\}$. Dimostriamo che lo sono anche i prodotti in cui il primo fattore sta in \mathbb{B}' ed il secondo in \mathbb{B} . A questo scopo, consideriamo il sottospazio vettoriale N di \mathbb{A} generato dai monomi $b' \cdot b$, con $b' \in \mathbb{B}'$, $b \in \mathbb{B}$. Esso è un ideale bilatero, perché è chiaramente un ideale a destra, essendo \mathbb{B} un ideale a destra, ed un ideale a sinistra essendo \mathbb{B}' un ideale a sinistra. Poiché \mathbb{B} è bilatero, N è contenuto in \mathbb{B} e quindi, per l'ipotesi di minimalità, deve essere o uguale a \mathbb{B} , oppure a $\{0\}$. Se fosse, per assurdo, $N = \mathbb{B}$, potremmo trovare, in particolare, due elementi $b'_0 \in \mathbb{B}'$ e $b_0 \in \mathbb{B}$ tali che $p = b'_0 \cdot b_0$. Ma

$$p = p \cdot 1_{\mathbb{A}} = p \cdot (p + p') = p^2$$

contrasta con $p = p^2 = p \cdot b'_0 \cdot b_0 = 0 \cdot b_0 = 0$. Ne segue, in particolare, che p ed p' appartengono al centro di \mathbb{A} e quindi anche \mathbb{B}' , essendo l'annullatore dell'elemento p del centro di \mathbb{A} , è un ideale bilatero. Infine, p e p' sono l'identità del prodotto in \mathbb{B} e \mathbb{B}' , rispettivamente.

Per l'ipotesi induttiva, \mathbb{B}' , avendo dimensione minore di N , è una somma diretta di ideali bilateri che sono algebre unitarie e dunque anche \mathbb{A} lo è. La dimostrazione è completa. \square

23.8.1. Il teorema di Artin-Wedderburn. Per la Proposizione 23.8.8 possiamo ricondurre lo studio delle algebre associative unitarie semisemplici e di dimensione finita a quello delle algebre semplici. Mostriamo che in questo caso, se \mathbb{K} ha caratteristica zero, l'applicazione strutturale è un isomorfismo.

PROPOSIZIONE 23.8.8. *Un'algebra associativa unitaria di dimensione finita su un campo \mathbb{K} di caratteristica zero è semplice se e soltanto se ammette una rappresentazione lineare fedele irriducibile di dimensione finita.*

Tutte le rappresentazioni lineari fedeli ed irriducibili sono isomorfe tra loro.

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathbb{A} un'algebra associativa unitaria di dimensione finita su un campo \mathbb{K} che contenga infiniti elementi.

Dimostriamo che, se \mathbb{A} ammetta una rappresentazione lineare fedele ed irriducibile di dimensione finita $\rho : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{K}}(V)$, allora è semplice.

Sia \mathbb{B} un ideale bilatero non banale di \mathbb{A} . Poiché

$$\ker \mathbb{B} = \{v \in V \mid \rho(\mathbf{b})v = 0, \forall \mathbf{b} \in \mathbb{B}\}$$

è un sotto- \mathbb{A} -modulo di V , e l'azione di \mathbb{B} su V è per ipotesi non banale, deve essere $\ker \mathbb{B} = \{0\}$. Questo ci dice che, per ogni vettore non nullo v_0 di V ,

$$(*) \quad \mathbb{B}v_0 = \{\rho(\mathbf{b})(v_0) \mid \mathbf{b} \in \mathbb{B}\} = V,$$

perché è un sotto- \mathbb{A} -modulo non nullo di V .

Verifichiamo che \mathbb{B} contiene un elemento \mathbf{b}_0 per cui $\rho(\mathbf{b}_0)$ sia invertibile.

Fissiamo un $\mathbf{b}_0 \in \mathbb{B}$ per cui $\ker \rho(\mathbf{b}_0)$ abbia dimensione minima. Se $\rho(\mathbf{b}_0)$ non fosse invertibile, non sarebbe né iniettiva né surgettiva e potremmo perciò fissare due vettori non nulli v_0 e z_0 , il primo in $\ker(\rho(\mathbf{b}_0))$, il secondo non appartenente all'immagine di $\rho(\mathbf{b}_0)$. Per la (*) \mathbb{B} contiene un \mathbf{b}_1 per cui $\rho(\mathbf{b}_1)(v_0) = z_0$.

Supponiamo che $\rho(\mathbf{b}_0)$ abbia rango m e sia v_1, \dots, v_m la base di un sottospazio complementare di $\ker \rho(\mathbf{b}_0)$ in V . Sia

$$\Phi(\lambda) = z_0 \wedge (\rho(\mathbf{b}_0 + \lambda\mathbf{b}_1)(v_1) \wedge \dots \wedge \rho(\mathbf{b}_0 + \lambda\mathbf{b}_1)(v_m)).$$

Poiché $\Phi(0) \neq 0$, l'equazione algebrica $\Phi(\lambda) = 0$ ha in \mathbb{K} al più un numero finito di soluzioni. Quindi, per l'ipotesi che \mathbb{K} contenga un numero infinito di elementi, possiamo trovare un $\lambda \neq 0$ per cui $\Phi(\lambda) \neq 0$. Ciò significa che $\rho(\mathbf{b}_0 + \lambda\mathbf{b}_1)$, la cui immagine contiene gli $(m+1)$ vettori indipendenti $z_0, (\rho(\mathbf{b}_0 + \lambda\mathbf{b}_1)(v_1), \dots, \rho(\mathbf{b}_0 + \lambda\mathbf{b}_1)(v_m)$, ha rango strettamente maggiore di m , contraddicendo così la scelta di \mathbf{b}_0 .

Abbiamo $[\rho(\mathbf{b}_0)]^{-1} \in \mathbb{K}[\rho(\mathbf{b}_0)]$: possiamo trovare cioè un polinomio $P \in \mathbb{K}[\lambda]$ tale che $P(\rho(\mathbf{b}_0)) = (\rho(\mathbf{b}_0))^{-1}$. Poiché ρ è fedele, questo significa che $P(\mathbf{b}_0) \in \mathbb{A}$ è un'inversa di \mathbf{b}_0 in \mathbb{A} . Allora $1 = P(\mathbf{b}_0)\mathbf{b}_0 \in \mathbb{B}$ e quindi $\mathbb{B} = \mathbb{A}$. Ciò completa la dimostrazione della semplicità di \mathbb{A} .

Supponiamo viceversa che \mathbb{A} sia semplice e sia V un suo ideale sinistro di minima dimensione positiva. La moltiplicazione a sinistra definisce una rappresentazione di \mathbb{A} su V , che è irriducibile e fedele perché il suo nucleo d'infedeltà è un ideale bilatero proprio di \mathbb{A} .

Se V è un \mathbb{A} -modulo irriducibile non banale, la restrizione ad V della rappresentazione $\rho : \mathbb{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ è non banale perché ρ è fedele ed è surgettiva perché l'immagine è un sotto- \mathbb{A} -modulo non banale di V . Questo ci dice che V è isomorfo ad V come \mathbb{A} -modulo. \square

Vale il⁵

TEOREMA 23.8.9 (Artin-Wedderburn). *Ogni algebra associativa unitaria semplice di dimensione finita su un campo \mathbb{K} di caratteristica zero è isomorfa ad un'algebra di matrici $\mathbb{F}(n)$, ove \mathbb{F} è il commutante di una sua rappresentazione irriducibile.*

DIMOSTRAZIONE. Siano V un ideale sinistro non nullo minimale di \mathbb{A} ed \mathbb{F} il suo commutante. Per il Lemma di Schur, \mathbb{F} è un'algebra di divisione su \mathbb{K} , ed V uno spazio vettoriale (a sinistra) di dimensione finita su \mathbb{F} .

La moltiplicazione a sinistra per gli elementi di \mathbb{A} , essendo una rappresentazione fedele, definisce un monomorfismo $\psi : \mathbb{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

La moltiplicazione a destra per un elemento di V è un endomorfismo \mathbb{K} -lineare di V , che commuta con la moltiplicazione a sinistra per gli elementi di \mathbb{A} e definisce quindi un'applicazione \mathbb{F} -lineare non banale $\lambda : V \rightarrow \mathbb{F}$ tale che

$$(*) \quad t \cdot s = \lambda(s) \cdot t, \quad \forall s, t \in V.$$

Questo ci dice che, per ogni $t \neq 0$ in V , la $\psi(t)$, che è definita da

$$\psi(t)(s) = t \cdot s = \lambda(s) \cdot t,$$

è un elemento di rango uno in $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

Poiché $\psi(\mathbb{A})(s) = V$ per ogni elemento non nullo s di V , le $\lambda \circ \psi(a)$, al variare di a in \mathbb{A} , descrivono l' \mathbb{F} -duale $V^{\sharp} := \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$ di V . Quindi, al variare di t in V e di a in \mathbb{A} , gli elementi $\psi(t \cdot a)$, definiti da

$$\psi(t \cdot a) = \lambda(a \cdot s) \cdot t, \quad \forall s \in V,$$

descrivono tutti gli elementi di rango uno di $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. La $\psi(\mathbb{A})$, essendo una sottoalgebra di $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ che contiene tutti i suoi elementi di rango uno, coincide con essa. \square

⁵J.H.M. Wedderburn, *On Hypercomplex Numbers*, Proceedings of the London Mathematical Society, **6** (1908), pp. 77-118. I risultati di Wedderburn per algebre di dimensione finita su un campo furono estesi da Artin al caso di anelli che soddisfino la condizione della catena discendente per ideali in: Emil Artin, *Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen*, Hamb. Abh. **5** (1928), pp. 251-260.

Il campo \mathbb{C} dei numeri complessi è anche l'unica algebra di divisione complessa di dimensione finita. Frobenius⁶ ha dimostrato che le algebre di divisione reali di dimensione finita sono $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Otteniamo perciò

TEOREMA 23.8.10. *Ogni \mathbb{C} -algebra associativa unitaria semplice di dimensione finita è isomorfa a $\mathbb{C}(n)$ per qualche intero $n \geq 1$.*

Ogni \mathbb{R} -algebra associativa unitaria semplice di dimensione finita è isomorfa, per qualche intero positivo n , ad una delle algebre $\mathbb{R}(n), \mathbb{C}(n), \mathbb{H}(n)$. \square

23.9. Algebre semplici centrali di dimensione finita

Tutte le algebre che considereremo in questo paragrafo avranno un comune campo degli scalari \mathbb{K} , che considereremo fissato una volta per tutte.

Dimostriamo innanzi tutto un lemma, che caratterizza in modo astratto il prodotto tensoriale di algebre.

LEMMA 23.9.1. *Siano \mathbb{A} e \mathbb{B} due sottoalgebre unitarie di un'algebra associativa unitaria \mathbb{L} . Sia $\{b_i\}_{i \in I}$ una base di \mathbb{B} come spazio vettoriale su \mathbb{K} . Condizione necessaria e sufficiente affinché $\mathbb{L} \simeq \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ è che valgano:*

$$(1) \quad a \cdot b = b \cdot a \neq 0, \quad \forall a \in \mathbb{A} \setminus \{0\}, \quad \forall b \in \mathbb{B} \setminus \{0\};$$

$$(2) \quad \mathbb{L} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{A} \cdot b_i.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la proprietà universale del prodotto tensoriale, l'applicazione $\mathbb{A} \times \mathbb{B} \ni (a, b) \rightarrow a \cdot b \in \mathbb{L}$ definisce in modo unico un'applicazione lineare $\Phi : \mathbb{A} \otimes \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{L}$. Se vale (1), la Φ è un omomorfismo e, se valgono (1), (2), questo omomorfismo è bigettivo.

Se $\mathbb{L} = \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$, le proprietà (1), (2) sono verificate se si identificano \mathbb{A} e \mathbb{B} con le loro immagini mediante gli omomorfismi $\mathbb{A} \ni a \rightarrow a \otimes 1 \in \mathbb{L}$ e $\mathbb{B} \ni b \rightarrow 1 \otimes b \in \mathbb{L}$. \square

Utilizzando questo lemma, otteniamo:

PROPOSIZIONE 23.9.2. *Sia \mathbb{A} un'algebra unitaria su \mathbb{K} . Per ogni intero positivo n , abbiamo $\mathbb{A}(n) \simeq \mathbb{K}(n) \otimes \mathbb{A}$.*

DIMOSTRAZIONE. Identifichiamo \mathbb{A} alla sottoalgebra di $\mathbb{A}(n)$ formata dai multipli della matrice identità

$$\text{diag}(a, \dots, a) \in \mathbb{A}(n), \quad a \in \mathbb{A}.$$

Allora \mathbb{A} e $\mathbb{K}(n)$ sono sottoalgebre di $\mathbb{A}(n)$ che soddisfano le condizioni (1) e (2) del Lemma 23.9.1. Da questa osservazione segue la tesi. \square

PROPOSIZIONE 23.9.3. $\mathbb{K}(m) \otimes \mathbb{K}(n) \simeq \mathbb{K}(mn)$.

⁶ Ferdinand Georg Frobenius, *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **84**, (1878), 1-63 (Crelle's Journal). Ristampato in: *Gesammelte Abhandlungen*, Band I, pp.343-405.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con I_m la matrice identità $m \times m$. Identifichiamo $\mathbb{K}(m)$ alla sottoalgebra

$$\mathbb{A} = \{\text{diag}(X, \dots, X) \mid X \in \mathbb{K}(m)\} \subset \mathbb{K}(mn)$$

e $\mathbb{K}(n)$ alla

$$\mathbb{B} = \{(y_{i,j} I_m) \mid (y_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{K}(n)\} \subset \mathbb{K}(mn).$$

Si verifica facilmente che \mathbb{A} e \mathbb{B} soddisfano le condizioni (1) e (2) del Lemma 23.9.1. Ciò completa la dimostrazione. \square

DEFINIZIONE 23.9.4. Se \mathbb{A} è un'algebra su \mathbb{K} , la sua opposta \mathbb{A}^{op} è l'algebra definita, sullo stesso spazio vettoriale \mathbb{A} , dal prodotto

$$a * b = b \cdot a, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

Si dice *algebra involupante* di \mathbb{A} il prodotto tensoriale $\mathbb{A}^e = \mathbb{A} \otimes \mathbb{A}^{op}$.

Osserviamo che \mathbb{A} coincide con la sua opposta se è commutativa, e che l'opposta è unitaria, o associativa, se è tale l'algebra \mathbb{A} .

L'algebra involupante \mathbb{A}^e ha un'azione naturale su \mathbb{A} definita da

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \right) x = \sum_{i=1}^n (a_i \cdot x \cdot b_i), \quad \forall a_i, b_i, x \in \mathbb{A}.$$

I sottospazi \mathbb{A}^e -invarianti di \mathbb{A} sono i suoi ideali bilateri. In particolare, se \mathbb{A} è semplice, è un \mathbb{A}^e -modulo irriducibile.

TEOREMA 23.9.5. Se \mathbb{A} è semplice centrale di dimensione finita n su \mathbb{K} , allora $\mathbb{A}^e = \mathbb{A} \otimes \mathbb{A}^{op} \simeq \mathbb{K}(n)$.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo che \mathbb{A}^e è ancora semplice centrale.

Sia $\xi = a_1 \otimes b_1 + \dots + a_m \otimes b_m \in Z(\mathbb{A}^e)$, con a_1, \dots, a_m e b_1, \dots, b_m linearmente indipendenti. Per ogni $x, y \in \mathbb{A}$ abbiamo

$$0 = [\xi, x \otimes 1] = \sum [a_i \otimes b_i, x \otimes 1] = \sum [a_i, x] \otimes b_i \Rightarrow [a_i, x] = 0, \quad \forall i,$$

$$0 = [\xi, 1 \otimes y] = \sum [a_i \otimes b_i, 1 \otimes y] = \sum a_i \otimes [b_i, y] \Rightarrow [b_i, y] = 0, \quad \forall i.$$

Poiché \mathbb{A} è centrale, questo implica che $i = 1$ ed $a_i, b_i \in \mathbb{K}$, cioè $\xi \in \mathbb{K}$.

Sia ora \mathbb{I} un ideale bilatero non banale di \mathbb{A}^e e $\xi = a_1 \otimes b_1 + \dots + a_m \otimes b_m$, con a_1, \dots, a_m e b_1, \dots, b_m linearmente indipendenti, un suo elemento di rango minimo. Poiché \mathbb{A} è semplice, possiamo trovare $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{A}$ tali che $\sum_{j=1}^n x_j \cdot b_1 \cdot y_j = 1$. Allora

$$\mathbb{I} \ni \xi' = \sum_{j=1}^n (1 \otimes x_j) \xi (1 \otimes y_j) = a_1 \otimes 1 + a_2 \otimes b'_2 + \dots + a_m \otimes b'_m,$$

con $1, b'_2, \dots, b'_m$ linearmente indipendenti in \mathbb{A} . Per ogni $y \in \mathbb{A}$ abbiamo allora

$$\mathbb{I} \ni \xi'' = [\xi', 1 \otimes y] = \sum_{i=2}^m a_i \otimes [b'_i, y].$$

Ma ξ'' ha rango minore di m e quindi per la nostra scelta di m deve essere nullo. Poiché gli a_i sono linearmente indipendenti, questo implica che per ogni $i = 2, \dots, m$ è $[b'_i, y] = 0$ per ogni $y \in \mathbb{A}$, e questo implica che $b'_i \in \mathbb{K}$ perché abbiamo supposto che \mathbb{A} sia centrale. Questo dimostra che \mathbb{I} contiene elementi non nulli

della forma $a \otimes 1$. Gli $a \in \mathbb{A}$ per cui $a \otimes 1 \in \mathbb{I}$ formano un ideale bilatero non nullo di \mathbb{A} , che per l'ipotesi di semplicità coincide con \mathbb{A} . In particolare \mathbb{I} contiene $1 \otimes 1$ e perciò è uguale ad \mathbb{A}^e . Quindi \mathbb{A}^e è semplice centrale. Dunque, la sua rappresentazione su \mathbb{A} è fedele. Poiché \mathbb{A}^e ed $\mathcal{E}nd_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$ hanno la stessa dimensione, l'omomorfismo di rappresentazione, essendo iniettivo, è un isomorfismo. \square

TEOREMA 23.9.6 (Skolem-Noether). *Ogni automorfismo di un'algebra semplice centrale di dimensione finita è interno.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 23.9.5, \mathbb{A} è un \mathbb{B} -modulo semplice per l'algebra $\mathbb{B} = \mathbb{A} \otimes \mathbb{A}^{\text{opp}}$ e l'azione definita da

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i \otimes b_i \right) \cdot x = \sum_{i=1}^k a_i \cdot x \cdot b_i.$$

Un automorfismo β di \mathbb{A} ci permette di definire su \mathbb{A} un'altra struttura di \mathbb{B} -modulo, mediante

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i \otimes b_i \right) * x = \sum_{i=1}^k \beta(a_i) \cdot x \cdot b_i.$$

Poiché tutti i \mathbb{B} -moduli semplici sono equivalenti, possiamo trovare una trasformazione lineare Φ di \mathbb{A} in sé tale che

$$\Phi \left(\sum_{i=1}^k a_i \cdot x \cdot b_i \right) = \sum_{i=1}^k \beta(a_i) \cdot \Phi(x) \cdot b_i.$$

Abbiamo in particolare $\Phi(x \cdot b) = \Phi(x) \cdot b$ per ogni $x, b \in \mathbb{A}$ e quindi $\Phi(x) = g \cdot x$ per ogni $x \in \mathbb{A}$, con $g = \Phi(1) \in \mathbb{A}$ invertibile.

Infine, è

$$g \cdot a = \Phi(a) = \Phi(a \cdot 1) = \beta(a) \cdot \Phi(1) = \beta(a) \cdot g,$$

da cui segue che $\beta(a) = g \cdot a \cdot g^{-1}$. La dimostrazione è completa. \square

23.9.1. Corpi quaternionici. Fissiamo due elementi a, b del corpo \mathbb{K} e, sullo spazio vettoriale \mathbb{K}^4 con base $1, i, j, \kappa$ definiamo una struttura di algebra associativa unitaria definendo il prodotto in modo che 1 ne sia unità moltiplicativa e che

$$(23.5) \quad i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad i \cdot j = -j \cdot i = \kappa.$$

Da queste relazioni segue la tabella per il prodotto

1	i	j	κ
i	a	κ	aj
j	$-\kappa$	b	$-bi$
κ	$-aj$	bi	$-ab$

in cui in ogni casella abbiamo scritto il prodotto del primo elemento della riga e del primo elemento della colonna che la contiene.

DEFINIZIONE 23.9.7. L'algebra associativa unitaria su \mathbb{K} generata dalle relazioni (23.5) si dice *l'algebra quaternionica di \mathbb{K} di parametri a, b* e si indica con $\left(\frac{a, b}{\mathbb{K}} \right)$, oppure con $\mathbb{K}^{a, b}$.

PROPOSIZIONE 23.9.8. *Le algebre quaternioniche $\mathbb{K}^{a, b}$ sono semplici e centrali.*

\square

Un elemento v di $\mathbb{K}^{a,b}$ si rappresenta in modo unico come una combinazione lineare

$$v = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 \kappa.$$

Poniamo

$$\bar{v} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 \kappa, \quad \mathfrak{q}_{a,b}(v) = v \cdot \bar{v} = x_0^2 - a x_1^2 - b x_2^2 + ab x_3^2.$$

Allora $(\mathbb{K}^{a,b}, \mathfrak{q})$ è uno spazio quadratico. Abbiamo l'alternativa

PROPOSIZIONE 23.9.9. *Due algebre quaternioniche su \mathbb{K} sono isomorfe se e soltanto se i corrispondenti spazi ortogonali sono isometrici. Possono darsi i due casi:*

- (1) *Se $(\mathbb{K}^{a,b}, \mathfrak{q}_{a,b})$ contiene vettori isotropi, allora è iperbolico e $\mathbb{K}^{a,b} \simeq \mathbb{K}(2)$.*
- (2) *Se $(\mathbb{K}^{a,b}, \mathfrak{q}_{a,b})$ è totalmente anisotropo, allora $\mathbb{K}^{a,b}$ è un'algebra di divisione.*

DIMOSTRAZIONE. La verifica di (2) è semplice: se $(\mathbb{K}^{a,b}, \mathfrak{q}_{a,b})$ è totalmente anisotropo, allora per ogni $v \neq 0$ in $\mathbb{K}^{a,b}$, l'elemento $v^{-1} = [\mathfrak{q}_{a,b}(v)]^{-1} \cdot \bar{v}$ è inverso destro e sinistro di v .

Viceversa, se $(\mathbb{K}^{a,b}, \mathfrak{q}_{a,b})$ contiene un vettore isotropo non nullo v , allora l'uguaglianza $v \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot v = 0$ ci dice che v non può avere né inversa destra né sinistra e quindi $\mathbb{K}^{a,b}$ non è un'algebra di divisione.

Dimostriamo (1). Osserviamo a questo scopo che il determinante della matrice che rappresenta $\mathfrak{q}_{a,b}$ nella base $1, i, j, \kappa$ è il quadrato $a^2 b^2$ in \mathbb{K} . Il discriminante della $\mathfrak{q}_{a,b}$ è quindi nella classe di 1 in \mathbb{K}/\mathbb{K}^2 . Se $(\mathbb{K}^{a,b}, \mathfrak{q}_{a,b})$ contiene un vettore anisotropo non nullo, allora contiene un piano iperbolico H . Se H^\perp è il piano ad esso ortogonale, allora il discriminante di $\mathfrak{q}_{a,b}$ è il prodotto dei discriminanti della sua restrizione ad H e della sua restrizione ad H^\perp . Dal momento che la classe della restrizione ad H è (-1) , deve allora essere tale anche quella della sua restrizione ad H^\perp , che quindi è anch'esso un piano iperbolico. Perciò $(\mathbb{K}^{a,b}, \mathfrak{q}_{a,b})$ è iperbolico, essendo somma ortogonale di due piani iperbolici. Tutti gli spazi iperbolici della stessa dimensione su \mathbb{K} sono isometrici tra loro e quindi lo sono le rispettive algebre quaternioniche associate. In particolare, scegliendo $\mathbb{K}^{1,-1}$ otteniamo che $\mathbb{K}^{1,-1} \simeq \mathbb{K}(2)$, con

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathfrak{q}_{1,-1}(A) = \det(A).$$

□

Indichiamo con $\mathbb{K}_0^{a,b}$ il sottospazio dei quaternioni puramente immaginari di $\mathbb{K}^{a,b}$, cioè di quei quaternioni v per cui $\bar{v} = -v$. Esso è l'ortogonale di \mathbb{K} in $(\mathbb{K}^{a,b}, \mathfrak{q}_{a,b})$. Indichiamo con $(\mathbb{K}_0^{a,b}, \mathfrak{q}_{a,b})$ lo spazio quadratico ottenuto da $(\mathbb{K}^{a,b}, \mathfrak{q}_{a,b})$ per restrizione. Si può ricavare facilmente la

PROPOSIZIONE 23.9.10. *Due algebre quaternioniche $\mathbb{K}^{a,b}$ e $\mathbb{K}^{a',b'}$ sono isomorfe se e soltanto se $(\mathbb{K}_0^{a,b}, \mathfrak{q}_{a,b})$ e $(\mathbb{K}_0^{a',b'}, \mathfrak{q}_{a',b'})$ sono isometrici e possono darsi i due casi*

- (1) *$(\mathbb{K}_0^{a,b}, \mathfrak{q}_{a,b})$ contiene vettori isotropi, allora $\mathbb{K}^{a,b} \simeq \mathbb{K}(2)$;*

(2) $(\mathbb{K}_0^{a,b}, \mathfrak{q}_{a,b})$ è totalmente anisotropo e $\mathbb{K}^{a,b}$ è un'algebra di divisione. \square

23.10. Algebre graduate e superalgebre

Se Δ è un monoid additivo, diciamo che una \mathbb{K} -algebra \mathbb{A} è Δ -graduata se è assegnata una decomposizione

$$(23.6) \quad \mathbb{A} = \sum_{\mu \in \Delta} \mathbb{A}^\mu$$

di \mathbb{A} in somma diretta di sottospazi vettoriali, in modo che

$$(23.7) \quad a_1 \in \mathbb{A}^{\mu_1}, a_2 \in \mathbb{A}^{\mu_2} \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \in \mathbb{A}^{\mu_1 + \mu_2}.$$

DEFINIZIONE 23.10.1. Una \mathbb{K} -algebra \mathbb{Z}_2 -graduata si dice una *superalgebra*.

ESEMPIO 23.10.2. L'algebra $\mathbb{K}(n)$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti nel campo \mathbb{K} è una superalgebra con la gradazione

$$\begin{cases} \mathbb{K}^0(n) = \{(a_{i,j}) \in \mathbb{K}(n) \mid a_{i,j} = 0 \text{ se } i+j \notin 2\mathbb{Z}\}, \\ \mathbb{K}^1(n) = \{(a_{i,j}) \in \mathbb{K}(n) \mid a_{i,j} = 0 \text{ se } i+j \in 2\mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

Possiamo dedurre questa \mathbb{Z}_2 -gradazione dalla \mathbb{Z} -gradazione che assegna, alla matrice $E_{i,j}$ che ha il coefficiente della i -esima riga e j -esima colonna uguale ad 1 e tutti gli altri uguali a zero il grado $(i-j)$.

Algebre di Clifford

Le algebre che incominciamo a studiare in questo capitolo furono introdotte da W.K.Clifford¹ come generalizzazioni dei quaternioni. Hanno un ruolo fondamentale nella descrizione delle rappresentazioni lineari delle algebre di Lie ortogonali ed importanti applicazioni in fisica teorica e geometria differenziale.

Esse ci permettono di descrivere, accanto alla rappresentazione standard (che si dice *vettoriale* e descrive in fisica i *bosoni di gauge*, cioè le forze nel modello standard), quella *spinoriale*² (corrispondente ai *fermioni*, cioè quark e leptoni).

Inizieremo con una descrizione elementare delle algebre di Clifford associate agli spazi reali euclidei, e studieremo poi, seguendo l'impostazione generale di Deligne e Varadarajan (vedi e.g, [25]), quelle associate a spazi ortogonali generali.

24.1. Algebre di Clifford associate al prodotto scalare reale

Sia V uno spazio vettoriale reale, su cui sia stato fissato un prodotto scalare, $V \times V \ni (v_1, v_2) \rightarrow (v_1|v_2) \in \mathbb{R}$, con norma $\|v\| = \sqrt{(v|v)} \geq 0$.

DEFINIZIONE 24.1.1. L'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell(V)$ è l'algebra associativa unitaria reale generata da V , modulo le relazioni

$$(24.1) \quad v^2 + \|v\|^2 = 0, \quad \forall v \in V.$$

In modo equivalente, possiamo definire $\mathcal{C}\ell(V)$ come *il quoziente dell'algebra tensoriale $\mathbf{T}(V)$ rispetto all'ideale bilatero generato dagli elementi $v \otimes v + \|v\|^2$, al variare di v in V .*

Per le formule di polarizzazione, la (24.1) è equivalente a

$$(24.2) \quad v_1 v_2 + v_2 v_1 + 2(v_1|v_2) = 0, \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

OSSERVAZIONE 24.1.2. Se sostituissimo alle (24.1) le relazioni $v^2 = 0$, otterremmo l'algebra di Grassmann dei tensori alternati. Più in generale, possiamo considerare algebre definite dalle relazioni $v^2 + b(v, v) = 0$ per una qualsiasi forma bilineare simmetrica b su V , ottenendo così una collezione di strutture che comprende sia le algebre di Grassmann che quelle di Clifford. In fisica, questa

¹William Kingdon Clifford (1845-1879), matematico e filosofo britannico. Insieme a Hermann Günther Grassmann, si può considerare il fondatore dell'*algebra geometrica*. Introdusse le algebre che portano il suo nome nell'articolo: *Applications of Grassmann's extensive algebra*, Amer. Jour. Math. **1** (1878), pp. 350-358.

²Definiremo gli *spinori* come gli elementi di una rappresentazione irriducibile di un'algebra di Clifford.

relazione si esprime dicendo che le algebre di Clifford sono una *quantizzazione* di quelle di Grassmann.

Se V ha dimensione finita n , gli elementi e_1, \dots, e_n di una sua base ortonormale verificano in $\mathcal{C}\ell(V)$ le relazioni

$$(24.3) \quad e_i^2 = -1, \quad e_i e_j = -e_j e_i, \quad \text{se } 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Quindi $\mathcal{C}\ell(V)$ è l'algebra associativa unitaria generata su \mathbb{R} da n unità immaginarie e_1, \dots, e_n che *anti-commutano* tra loro.

Le algebre di Clifford reali sono caratterizzate dalla *proprietà universale*:

TEOREMA 24.1.3. *Un'algebra reale associativa e unitaria \mathbb{A} è isomorfa all'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell(V)$ se e soltanto se possiamo trovare un'applicazione lineare iniettiva $\iota : V \rightarrow \mathbb{A}$ per cui valga la PROPRIETÀ UNIVERSALE:*

Ogni applicazione lineare $\phi : V \rightarrow \mathbb{B}$ di V in un'algebra associativa unitaria reale \mathbb{B} , che verifichi

$$[\phi(v)]^2 = -\|v\|^2 \cdot 1_{\mathbb{B}}$$

si estende in modo unico ad un omomorfismo

$$\tilde{\phi} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$$

di algebre associative unitarie reali, con

$$\tilde{\phi}(\iota(v)) = \phi(v), \quad \forall v \in V.$$

Abbiamo cioè un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{B} \\ & \searrow \iota & \nearrow \tilde{\phi} \\ & \mathbb{A} & \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Siano \mathbb{B} un'algebra reale, associativa e unitaria e $\phi : V \rightarrow \mathbb{B}$ un'applicazione lineare. Per la proprietà universale del prodotto tensoriale, la ϕ si estende in modo unico ad un omomorfismo di algebre associative e unitarie reali $\Phi : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathbb{B}$. Il nucleo di Φ è un ideale bilatero di $\mathbf{T}(V)$. Se $\ker \Phi$ contiene tutti gli elementi $v \otimes v + \|v\|^2$, allora la Φ definisce per passaggio al quoziente un omomorfismo di $\mathcal{C}\ell(V)$ in \mathbb{B} .

Supponiamo ora che \mathbb{A} sia un'algebra reale associativa e unitaria che goda della proprietà universale. Possiamo allora definire omomorfismi $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{C}\ell(V)$ con $\phi(\iota(v)) = v$ per ogni $v \in V$, utilizzando la proprietà universale, e $\psi : \mathcal{C}\ell(V) \rightarrow \mathbb{A}$ con $\psi(v) = \iota(v)$ per la prima parte della dimostrazione. Poiché la composizione $\phi \circ \psi : \mathcal{C}\ell(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell(V)$ è l'identità, la ϕ è inversa sinistra di ψ . La $\psi \circ \phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ è un omomorfismo di algebre con $\psi \circ \phi \circ \iota = \iota$ su V . Poiché l'identità ha questa proprietà, per l'unicità è $\psi \circ \phi = \text{id}_{\mathbb{A}}$ e quindi ϕ è anche inversa destra di ψ . Ciò dimostra che le due algebre sono isomorfe. \square

COROLLARIO 24.1.4. *Se W è un sottospazio di V , l'inclusione $W \subset V \subset \mathcal{C}\ell(V)$ si estende ad un monomorfismo di algebre $\mathcal{C}\ell(W) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(V)$.* \square

L'algebra tensoriale $\mathbf{T}(V)$ è \mathbb{Z} -graduata. Poiché gli elementi $v \otimes v + \|v\|^2$ che generano il nucleo della proiezione $\pi : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell(V)$ sono somme di termini di grado pari, l'algebra $\mathcal{C}\ell(V)$ è \mathbb{Z}_2 -graduata. Poniamo (con $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$)

$$(24.4) \quad \mathcal{C}\ell(V) = \mathcal{C}\ell^0(V) \oplus \mathcal{C}\ell^1(V), \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathcal{C}\ell^0(V) = \pi\left(\sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{T}^{2p}V\right), \\ \mathcal{C}\ell^1(V) = \pi\left(\sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{T}^{2p+1}V\right) \end{cases}$$

PROPOSIZIONE 24.1.5. *Con la \mathbb{Z}_2 -gradazione (24.4) l'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell(V)$ è una superalgebra associativa e unitaria. Gli elementi di grado pari formano una sua sottoalgebra.* \square

NOTAZIONE 24.1.6. Utilizzeremo nel seguito il simbolo " $A \approx B$ " per indicare che due \mathbb{K} -algebre sono isomorfe ed il simbolo " $A \simeq B$ " per indicare che A e B sono \mathbb{K} -superalgebre ed isomorfe come superalgebre.

DEFINIZIONE 24.1.7. Indichiamo con $\alpha : \mathcal{C}\ell(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell(V)$ l'involuzione di $\mathcal{C}\ell(V)$ associata al grado, definita da

$$\alpha(\xi_0 + \xi_1) = \xi_0 - \xi_1, \quad \forall \xi_0 \in \mathcal{C}\ell^0(W), \quad \forall \xi_1 \in \mathcal{C}\ell^1(W).$$

PROPOSIZIONE 24.1.8. *Se lo spazio euclideo V ha dimensione n , allora la corrispondente algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell(V)$ ha dimensione 2^n .*

Se W è un iperpiano di V , allora $\mathcal{C}\ell^0(V) \simeq \mathcal{C}\ell(W)$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un vettore e ortogonale a W , con $\|e\|=1$. Per il Corollario 24.1.4, possiamo considerare $\mathcal{C}\ell(W)$ una sottoalgebra di $\mathcal{C}\ell(V)$. Se $\xi \in \mathcal{C}\ell(W)$, allora $e \cdot \xi = \alpha(\xi) \cdot e$, con $\alpha(\xi) \in \mathcal{C}\ell(W)$. Da questo segue che ogni elemento ξ di $\mathcal{C}\ell(V)$ si decompone in modo unico in una somma

$$\xi = \xi' + e \cdot \xi'', \quad \text{con } \xi', \xi'' \in \mathcal{C}\ell(W)$$

e quindi $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(V) = 2 \cdot \dim \mathcal{C}\ell(W)$. Si verifica facilmente che $\mathcal{C}\ell(\{0\}) = \mathbb{R}$ e da questa osservazione segue, per ricorrenza, la formula sulla dimensione.

Per la proprietà universale, l'applicazione

$$W \ni w \longrightarrow e \cdot w \in \mathcal{C}\ell^0(V)$$

si estende ad un omomorfismo di algebre associative unitarie di $\mathcal{C}\ell(W)$ in $\mathcal{C}\ell^0(V)$. Poiché gli $e \cdot w$, al variare di w in W , generano $\mathcal{C}\ell^0(V)$, l'omomorfismo è surgettivo e quindi un isomorfismo, perché le due algebre, per la prima parte della dimostrazione, hanno la stessa dimensione. \square

24.1.1. Classificazione. È utile introdurre preliminarmente qualche notazione. Se e_1, \dots, e_n è una base ortonormale assegnata in \mathbb{R}^n , indichiamo con

$$(24.5) \quad \eta_n = e_1 \cdots e_n \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$$

lo *pseudoscalare* corrispondente all'elemento di volume unitario. Valgono allora

$$\eta_n^2 = (-1)^{n(n+1)/2} = \begin{cases} 1, & \text{se } n \equiv 0, 3 \pmod{4}, \\ -1, & \text{se } n \equiv 1, 2 \pmod{4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v \cdot \eta_n + \eta_n \cdot v = 0, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ v \cdot \eta_n - \eta_n \cdot v = 0, & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases} \quad \forall v \in V.$$

TEOREMA 24.1.9. *Valgono i seguenti isomorfismi di superalgebre*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^0) &\simeq \mathbb{R}, & \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^1) &\simeq \mathbb{C}, \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2) &\simeq \mathbb{H}, & \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^3) &\simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) &\simeq \mathbb{H}(2), & \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^5) &\simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{H}(2) \approx \mathbb{C}(4), \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6) &\simeq \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}(2) \approx \mathbb{R}(8), & \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^7) &\simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6) \oplus \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6) \approx \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8), \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) &\simeq \mathbb{H}(2) \otimes \mathbb{H}(2) \approx \mathbb{R}(16), & \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n+8}) &\simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

L'ultimo isomorfismo esprime la *periodicità* delle algebre di Clifford.

Prima di dare la dimostrazione, esplicitiamo le \mathbb{Z}_2 -gradazioni che definiscono le strutture di superalgebre. Nella tabella Indichiamo con \mathbb{A} una qualsiasi algebra reale e, nell'ultima riga, con \mathbb{A} e \mathbb{B} due superalgebre.

\mathbb{R}	$\mathbb{R}^0 = \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^1 = \{0\}$
\mathbb{C}	$\mathbb{C}^0 = \mathbb{R}$	$\mathbb{C}^1 = i \cdot \mathbb{R}$
\mathbb{H}	$\mathbb{H}^0 = \langle 1, i \rangle_{\mathbb{R}}$	$\mathbb{H}^1 = \langle j, \kappa \rangle_{\mathbb{R}}$
$\mathbb{A} \oplus \mathbb{A}$	$(\mathbb{A} \oplus \mathbb{A})^0 = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{A}\}$	$(\mathbb{A} \oplus \mathbb{A})^1 = \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{A}\}$
$\mathbb{A}(n) = \{(a_{i,j}) \in \mathbb{A}^{n \times n}\}$	$\mathbb{A}^0(n) = \{a_{i,j} = 0 \text{ se } i+j \notin 2\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{A}^1(n) = \{a_{i,j} = 0 \text{ se } i+j \in 2\mathbb{Z}\}$
$\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$	$(\mathbb{A} \otimes \mathbb{B})^0 = (\mathbb{A}^0 \otimes \mathbb{B}^0) \oplus (\mathbb{A}^1 \otimes \mathbb{B}^1)$	$(\mathbb{A} \otimes \mathbb{B})^1 = (\mathbb{A}^0 \otimes \mathbb{B}^1) \oplus (\mathbb{A}^1 \otimes \mathbb{B}^0)$

DIMOSTRAZIONE. 0. Se $V = \{0\}$, l'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell(\{0\})$ è il campo \mathbb{R} .

1. Consideriamo l'applicazione $\phi_1 : \mathbb{R} \ni x \rightarrow ix \in \mathbb{C}$.

Poiché $(\phi_1(x))^2 = -x^2$, la ϕ si estende ad un omomorfismo di algebre reali associative unitarie $\tilde{\phi}_1 : \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^1) \rightarrow \mathbb{C}$. La $\tilde{\phi}_1$ è surgettiva, perché l'immagine contiene 1 ed i , ed è quindi un isomorfismo perché $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^1)$ e \mathbb{C} hanno la stessa dimensione reale 2.

2. Sia \mathbb{H} l'algebra di divisione reale dei quaternioni. Indichiamo con i, j, κ tre unità immaginarie di \mathbb{H} che anticommutano tra loro.

Poiché $(x \cdot j + y \cdot \kappa)^2 = -(x^2 + y^2)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare

$$\phi_2 : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longrightarrow x \cdot j + y \cdot \kappa \in \mathbb{H},$$

si estende in modo unico ad un omomorfismo di algebre associative unitarie reali $\tilde{\phi}_2 : \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{H}$. Poiché 1, i, j, κ appartengono all'immagine di $\tilde{\phi}_2$, la $\tilde{\phi}_2$ è surgettiva e quindi un isomorfismo perché $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2)$ ed \mathbb{H} hanno la stessa dimensione 4.

3. Identifichiamo \mathbb{R}^3 allo spazio V dei quaternioni puramente immaginari. La

$$\phi_3 : V \ni v \longrightarrow (v, -v) \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$$

è lineare e verifica $(\phi_3(v))^2 = -\|v\|^2(1, 1)$. Per la proprietà universale si estende in modo unico ad un omomorfismo $\tilde{\phi}_3 : \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Si verifica facilmente che

la $\tilde{\phi}$ è surgettiva³, con $\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^3) \simeq \{(c, c) \mid c \in \mathbb{H}\}$ e $\mathcal{C}\ell^1(\mathbb{R}^3) \simeq \{(c, -c) \mid c \in \mathbb{H}\}$, ed è quindi un isomorfismo perché $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^3)$ ed $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ hanno entrambe dimensione 8.

4. Identifichiamo \mathbb{R}^4 ad \mathbb{H} e consideriamo l'applicazione lineare

$$\phi_4 : \mathbb{H} \ni q \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\bar{q} \\ q & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}(2).$$

Poiché $[\phi_4(q)]^2 = -\|q\|^2 \cdot I_2$, per la proprietà universale la ϕ_4 si estende in modo unico ad un omomorfismo $\tilde{\phi}_4 : \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{H}(2)$. Basterà verificare che $\tilde{\phi}_4$ è surgettivo per concludere che $\tilde{\phi}_4$ è un isomorfismo, perché le due algebre hanno entrambe dimensione 16. Infatti:

L'immagine di $\tilde{\phi}_4$ contiene le matrici

$$\begin{pmatrix} v & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & \\ & -v \end{pmatrix} \quad \text{per ogni quaternione immaginario } v.$$

Da questo segue, come nel punto precedente, che l'immagine di $\tilde{\phi}_4$ contiene tutte le matrici

$$\begin{pmatrix} q_1 & \\ & q_2 \end{pmatrix}, \quad \text{con } q_1, q_2 \in \mathbb{H}$$

e perciò anche le

$$\begin{pmatrix} & q_1 \\ q_2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & \\ & -q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \quad \text{con } q_1, q_2 \in \mathbb{H}.$$

5. Sia e_1, e_2, e_3, e_4 una base ortonormale di \mathbb{R}^4 . Con $\eta_4 = e_1 e_2 e_3 e_4$, consideriamo l'applicazione

$$\phi_5 : \mathbb{R}^5 = \mathbb{R}_t^1 \oplus \mathbb{R}^4 \ni (t, v) \longrightarrow (i \cdot t) \otimes \eta_4 + 1 \otimes v \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4).$$

Poiché $\eta_4^2 = 1_4$ ed anticommute coi vettori di \mathbb{R}^4 , otteniamo che

$$(\phi_5(t, v))^2 = -(t^2 + \|v\|^2) 1 \otimes 1_4, \quad \forall (t, v) \in \mathbb{R}^5.$$

La ϕ_5 si prolunga quindi in modo unico ad un omomorfismo di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^5)$ nel prodotto tensoriale $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$. Si verifica facilmente che l'omomorfismo è surgettivo e quindi un isomorfismo perché le due algebre hanno la stessa dimensione 32. Osserviamo infine che, poiché $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$ è isomorfa ad $\mathbb{H}(2)$, che è una forma reale di $\mathbb{C}(4)$, è $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2) \simeq \mathbb{C}(4)$.

Diamo una descrizione esplicita dell'isomorfismo in termini di matrici. Chiamiamo *quaternioniche* le matrici complesse

$$q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{C}$$

ed indichiamo con \mathbb{Q} l'algebra di divisione di dimensione reale 4 delle matrici complesse quaternioniche. Poiché $q \cdot q^* = q^* \cdot q = (|a|^2 + |b|^2) \cdot I_2$, l'applicazione

$$\psi_5 : \mathbb{R}^5 \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \ni (t, q) \longrightarrow \begin{pmatrix} i \cdot t \cdot I_2 & i \cdot q \\ i \cdot q^* & -i \cdot t \cdot I_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(4)$$

³L'immagine di $\tilde{\phi}_3$ contiene $(i, -i)$, $(j, -j)$, $(k, -k)$, ed i loro prodotti due a due, che sono (i, i) , (j, j) , (k, k) ed anche $(1, 1) = (i, -i) \cdot (-i, i)$ ed $(1, -1) = (i, i) \cdot (-i, i)$.

si estende in modo unico ad un omomorfismo $\tilde{\psi}_5$ di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{5,0})$ in $\mathbb{C}(4)$. Si verifica che $\tilde{\psi}_5$ è surgettivo e quindi un isomorfismo perché le due algebre hanno la stessa dimensione. La \mathbb{Z}_2 -gradazione è descritta da

$$\begin{cases} \mathbb{C}^0(4) = \left\{ \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} \mid q_i \in \mathbb{Q} \right\} \simeq \mathbb{H}(2), \\ \mathbb{C}^1(4) = i \cdot \mathbb{C}^0(4). \end{cases}$$

6. Consideriamo il prodotto tensoriale $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2)$. Poiché $\eta_4 \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$ ha quadrato 1_4 ed anticommute coi vettori, l'applicazione lineare

$$\phi_6 : \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}_v^2 \oplus \mathbb{R}_w^4 \ni (v, w) \longrightarrow v \otimes \eta_4 + 1_2 \otimes w \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$$

soddisfa

$$(\phi_6(v, w))^2 = v^2 \otimes 1_2 + v \otimes (\eta_4 w) + v \otimes (w \eta_4) + 1_2 \otimes w^2 = -(\|v\|^2 + \|w\|^2)(1_2 \otimes 1_6).$$

Per la proprietà universale la ϕ_6 si estende ad un omomorfismo $\tilde{\phi}_6$ di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6)$ in $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$. Poiché esso è surgettivo e le due algebre hanno la stessa dimensione $2^6 = 2^2 2^4 = 64$, la $\tilde{\phi}_6$ è un isomorfismo di algebre. Osserviamo infine che $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2) \simeq (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H})(2) \simeq (\mathbb{R}(4))(2) \simeq \mathbb{R}(8)$ (vedi il Lemma 23.3.1).

Anche in questo caso possiamo dare una descrizione esplicita, in termini di matrici, dell'isomorfismo. A questo scopo, osserviamo che i quaternioni si possono identificare ad \mathbb{R}^4 e considerare quindi la moltiplicazione per un quaternione come un'applicazione lineare di \mathbb{R}^4 in sé, cioè una matrice di $\mathbb{R}(4)$. Abbiamo allora la rappresentazione come moltiplicazione a sinistra, che dà un isomorfismo di \mathbb{H} con l'algebra Q' delle matrici reali

$$q' = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix}$$

e quella per moltiplicazione a destra, che dà un antisomorfismo con l'algebra delle matrici reali Q'' della forma

$$q'' = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & x_3 & -x_2 \\ x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 \\ x_3 & x_2 & -x_1 & x_0 \end{pmatrix}.$$

Le q' ed q'' corrispondono al quaternione $q = x_0 + x_1 \cdot i + x_2 \cdot j + x_3 \cdot k$. Osserviamo che la trasposizione è l'involuzione su Q' e Q'' che corrisponde al coniugio (in entrambe le matrici simmetriche sono multiple dell'identità). Poiché azioni a destra e a sinistra commutano, per ogni coppia di quaternioni q_1, q_2 , è $q'_1 \cdot q'_2 = q'_2 \cdot q'_1$. Indicando con $U = \langle j, k \rangle_{\mathbb{R}}$ il sottospazio vettoriale reale di \mathbb{H} generato dalle unità immaginarie j, k , otteniamo l'isomorfismo di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6)$ con $\mathbb{R}(8)$ come estensione della

$$\mathbb{R}^6 \simeq U \oplus \mathbb{H} \ni (q_1, q_2) \longrightarrow \begin{pmatrix} q'_1 & -(q'_2)^T \\ q'_2 & -q'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q'_1 & -\bar{q}'_2 \\ q'_2 & -q'_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(8).$$

7. Sia $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ una base ortonormale di \mathbb{R}^6 ed $\eta_6 = e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdot e_4 \cdot e_5 \cdot e_6$ uno pseudoscalare in $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6)$. Abbiamo:

$$\eta_6^2 = -1_6, \quad \eta_6 \cdot v + v \cdot \eta_6 = 0, \quad (t\eta + v)^2 = -(t^2 + \|v\|^2)1_6, \quad \forall v \in \mathbb{R}^6, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Definiamo l'inclusione lineare

$$\phi_7 : \mathbb{R}^7 = \mathbb{R}^6 \oplus \mathbb{R}_t^1 \ni (v, t) \longrightarrow (v + t \cdot \eta_6, -v - t \cdot \eta_6) \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6) \oplus \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6).$$

Poiché $[\phi_t(v, t)]^2 = -(\|v\|^2 + t^2) \cdot (1_6, 1_6)$, la ϕ_7 si estende in modo unico ad un omomorfismo $\tilde{\phi}_7 : \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^7) \rightarrow \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6) \oplus \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6)$. L'immagine di $\tilde{\phi}_7$ contiene

$$(v, -v) \cdot (\eta_6, -\eta_6) = (v \cdot \eta_6, v \cdot \eta_6).$$

e gli $\epsilon_i = e_i \cdot \eta_6$ generano $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6)$, perché, se $\sigma \in \mathbf{S}_6$, allora

$$e_{\sigma_1} = \pm \epsilon_{\sigma_2} \cdot \epsilon_{\sigma_3} \cdot \epsilon_{\sigma_4} \cdot \epsilon_{\sigma_5} \cdot \epsilon_{\sigma_6}.$$

Da queste osservazioni ricaviamo che l'immagine di $\tilde{\phi}_7$ contiene tutte le coppie (ξ, ξ) con ξ in $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6)$. Allora contiene anche le coppie $(\xi \cdot \eta_6, -\xi \cdot \eta_6)$, al variare di ξ in $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6)$, cioè tutte le coppie $(\xi, -\xi)$ con $\xi \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6)$ perché la moltiplicazione a destra per η_6 è un'operazione invertibile in $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6)$. Con questa identificazione,

$$\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^7) = \{(\xi, \xi) \mid \xi \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6)\}, \quad \mathcal{C}\ell^1(\mathbb{R}^7) = \{(\xi, -\xi) \mid \xi \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6)\}.$$

La dimensione di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^7) \simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6) \oplus \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6) \approx \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$ è $2^7 = 2 \cdot 2^6 = 128$.

8. Sia e_1, e_2, e_3, e_4 una base ortonormale di \mathbb{R}^4 ed $\eta_4 = e_1 e_2 e_3 e_4$ in $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$. Abbiamo

$$\eta_4^2 = 1_4, \quad \eta_4 \cdot v + v \cdot \eta_4 = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^4.$$

L'applicazione lineare

$$\phi_8 : \mathbb{R}^8 = \mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^4 \ni (v, w) \longrightarrow v \otimes \eta_4 + 1_4 \otimes w \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$$

soddisfa

$$\begin{aligned} (\phi_8(v, w))^2 &= (v \otimes \eta_4 + 1_4 \otimes w)^2 = v^2 \otimes \eta_4^2 + v \otimes (w \eta_4 + \eta_4 w) + 1 \otimes w^2 \\ &= -(\|v\|^2 + \|w\|^2)(1_4 \otimes 1_4). \end{aligned}$$

Per la proprietà universale, la ϕ_8 si estende ad un omomorfismo $\tilde{\phi}_8$ di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8)$ nel prodotto tensoriale $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$, che è surgettivo e quindi un isomorfismo perché le due algebre hanno la stessa dimensione $2^8 = 2^4 2^4 = 256$.

Infatti l'immagine di $\tilde{\phi}_8$ contiene gli $1_4 \otimes w$ per $w \in \mathbb{R}^4$ e quindi $1_4 \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$. Da questa segue che contiene anche $v \otimes_{\mathbb{R}} 1_4 = (v \otimes \eta_4) \cdot (1_4 \otimes \eta_4)$ per ogni $v \in \mathbb{R}^4$ e quindi $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \otimes_{\mathbb{R}} 1_4$ e dunque $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) = \langle (\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \otimes_{\mathbb{R}} 1_4) \cdot (1_4 \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)) \rangle$.

Osserviamo infine che (vedi il Lemma 23.3.1)

$$\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{H}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2) \approx (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H})(4) \approx (\mathbb{R}(4))(4) \simeq \mathbb{R}(16).$$

PERIODICITÀ. Sia e_1, \dots, e_8 una base ortonormale di \mathbb{R}^8 ed

$$\eta_8 = e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8 \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8)$$

il corrispondente pseudoscalare. È $\eta_8^2 = 1_8$ ed $\eta_8 \cdot w + w \cdot \eta_8 = 0$ per ogni $w \in \mathbb{R}^8$. Consideriamo l'applicazione lineare

$$(24.6) \quad \phi : \mathbb{R}^8 \oplus \mathbb{R}^n \ni (w, v) \longrightarrow w \otimes 1_n + \eta_8 \otimes v \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n),$$

ove abbiamo indicato con 1_n l'identità di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} (\phi(w, v))^2 &= w^2 \otimes 1_n + (w \cdot \eta_8 + \eta_8 \cdot w) \otimes v + \eta_8^2 \otimes v^2 \\ &= -(\|w\|^2 + \|v\|^2)(1_8 \otimes 1_n). \end{aligned}$$

La ϕ si estende quindi, per la proprietà universale, ad un omomorfismo

$$(24.7) \quad \tilde{\phi} : \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n+8}) \rightarrow \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}(16) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n).$$

L'immagine di $\tilde{\phi}$ è una sottoalgebra di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$ che contiene $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes 1_n$ ed $\eta_8 \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$. Poiché $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes 1_n$ ed $\eta_8 \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$ generano l'algebra prodotto tensoriale $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$, ne segue che $\tilde{\phi}$ è surgettiva e quindi un isomorfismo, perché le due algebre hanno la stessa dimensione 2^{n+8} . \square

OSSERVAZIONE 24.1.10. L'algebra $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8)$ si può costruire utilizzando le traslazioni a sinistra dell'algebra non associativa \mathbb{O} degli ottonioni (vedi il Cap. XXVII). Questi si possono definire a partire dai quaternioni, introducendo un'altra unità immaginaria ℓ . È $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus (\ell \cdot \mathbb{H})$ con la regola del prodotto:

$$(24.8) \quad (c_1 + \ell \cdot c_2) \cdot (c_3 + \ell \cdot c_4) = (c_1 c_3 - c_4 \bar{c}_2) + \ell \cdot (c_1 c_4 + c_3 c_2), \quad \forall c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{H}.$$

Possiamo scegliere gli ottonioni

$$(24.9) \quad 1, i, j, k, \ell, \ell i, \ell j, \ell k$$

come base ortonormale di $\mathbb{R}^8 \simeq \mathbb{O}$. Facciamo corrispondere al vettore x , di componenti (x_0, \dots, x_8) nella base (24.9) la matrice

$$(24.10) \quad L_x = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 & x_5 & -x_4 & x_7 & -x_6 \\ x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 & x_6 & -x_7 & -x_4 & -x_5 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 & x_7 & x_6 & -x_5 & -x_4 \\ x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_5 & x_4 & x_7 & -x_5 & -x_1 & x_0 & x_3 & -x_2 \\ x_6 & -x_7 & x_4 & -x_5 & -x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 \\ x_7 & x_6 & -x_5 & x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 & x_0 \end{pmatrix}$$

associata alla moltiplicazione a sinistra per l'ottonione corrispondente ad x . L'isomorfismo di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8)$ con $\mathbb{R}(16)$ si ottiene dalla proprietà universale estendendo l'applicazione lineare

$$(24.11) \quad \mathbb{R}^8 \simeq \mathbb{O} \ni x \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & L_x \\ -L_x^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(16).$$

24.2. Algebre di Clifford di spazi vettoriali quadratici

Generalizziamo la costruzione in §24.1, associando un'algebra di Clifford ad un qualsiasi spazio vettoriale *quadratico* (vedi e.g. [19]) su un campo \mathbb{K} . Ci limiteremo nel seguito, per semplicità, a campi di scalari \mathbb{K} di caratteristica zero.

Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita m su \mathbb{K} e $\mathbf{T}(V) = \bigoplus_{h=0}^{\infty} \mathbf{T}^h(V)$ la sua algebra tensoriale. Ricordiamo che $\mathbf{T}(V)$ è \mathbb{Z}_+ -graduata e caratterizzata dalla proprietà universale:

PROPOSIZIONE 24.2.1. $\mathbf{T}(V)$ è un'algebra associativa unitaria su \mathbb{K} che contiene V come sottospazio vettoriale ed è caratterizzata, a meno di isomorfismi, dalla proprietà che ogni applicazione lineare ϕ di V in un'algebra associativa unitaria \mathbb{A} si estende in modo unico ad un omomorfismo di algebre associative unitarie $\tilde{\phi} : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathbb{A}$. \square

Una forma quadratica q su V è una

(24.12) $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ tale che $q' : V \times V \ni (v_1, v_2) \rightarrow q(v_1 + v_2) - q(v_1) - q(v_2) \in \mathbb{K}$ sia \mathbb{K} -bilineare⁴. Diciamo che q è *non degenera* se per ogni $v_1 \in V \setminus \{0\}$ possiamo trovare un $v_2 \in V$ tale che $q(v_1 + v_2) \neq q(v_2)$.

DEFINIZIONE 24.2.2. Uno spazio vettoriale quadratico su \mathbb{K} è la coppia (V, q) di uno spazio vettoriale V su \mathbb{K} e di una forma quadratica non degenera⁵ su V .

NOTAZIONE 24.2.3. Sia \mathbf{J}_q l'ideale bilatero di $\mathbf{T}(V)$ generato dagli elementi della forma $v \otimes v + q(v)$, al variare di v in V .

DEFINIZIONE 24.2.4. L'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_q(V)$ dello spazio ortogonale (V, q) è il quoziente $\mathbf{T}(V)/\mathbf{J}_q$ dell'algebra tensoriale $\mathbf{T}(V)$, rispetto all'ideale bilatero \mathbf{J}_q .

Poiché $\mathbf{T}(V)$ è associativa e unitaria, anche $\mathcal{C}\ell_q(V)$ è associativa e unitaria. Indichiamo con

$$(24.13) \quad \pi : \mathbf{T}(V) \longrightarrow \mathcal{C}\ell_q(V) = \mathbf{T}(V)/\mathbf{J}_q$$

la proiezione nel quoziente.

La composizione

$$V \hookrightarrow \mathbf{T}(V) \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}\ell_q(V)$$

è iniettiva e ci permette di considerare V come un sottospazio di $\mathcal{C}\ell_q(V)$.

Come nel caso delle algebre di Clifford associate agli spazi euclidei, abbiamo:

PROPOSIZIONE 24.2.5 (proprietà universale). L'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_q(V)$ è associativa e unitaria su \mathbb{K} , caratterizzata dalla PROPRIETÀ UNIVERSALE :

$V \subset \mathcal{C}\ell_q(V)$ ed ogni applicazione \mathbb{K} -lineare $\phi : V \rightarrow \mathbb{A}$ di V in una \mathbb{K} -algebra associativa unitaria \mathbb{A} , tale che $[\phi(v)]^2 = -q(v) \cdot 1_{\mathbb{A}}$, si estende in modo unico ad un omomorfismo $\tilde{\phi} : \mathcal{C}\ell_q(V) \rightarrow \mathbb{A}$.

DIMOSTRAZIONE. Un'applicazione lineare $\phi : V \rightarrow \mathbb{A}$ di V in un'algebra associativa unitaria su \mathbb{K} si estende in modo unico ad un omomorfismo $\hat{\phi} : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathbb{A}$. La condizione che $[\phi(v)]^2 = -q(v) \cdot 1_{\mathbb{A}}$ per ogni $v \in V$ ci dice che \mathbf{J}_q è contenuto nel nucleo di $\hat{\phi}$ e definisce quindi per passaggio al quoziente un omomorfismo $\tilde{\phi}$ di $\mathcal{C}\ell_q(V)$ in \mathbb{A} .

Supponiamo ora che \mathbb{A} sia un'algebra associativa unitaria che contenga V e goda della proprietà universale. Risultano allora definiti due omomorfismi di algebre $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{C}\ell_q(V)$ e $\psi : \mathcal{C}\ell_q(V) \rightarrow \mathbb{A}$ con $\phi(v) = v$ e $\psi(v) = v$ per ogni $v \in V$. Le composizioni $\phi \circ \psi : \mathcal{C}\ell_q(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell_q(V)$ e $\psi \circ \phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ si restringono all'identità

⁴Osserviamo che, se \mathbb{K} ha caratteristica zero, è $q'(v_1, v_2) = dq(v_1)(v_2)$.

⁵Molte delle proprietà generali valgono anche senza l'ipotesi che q sia non degenera.

su V e quindi per l'unicità del prolungamento sono uguali all'identità. Perciò gli omomorfismi ϕ e ψ , essendo l'uno all'inverso dell'altro, sono isomorfismi. \square

NOTAZIONE 24.2.6. Se $v_1, \dots, v_k \in V$, indichiamo con $v_1 \cdots v_k$ l'immagine mediante π di $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ in $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$. In generale, indichiamo con $\xi \cdot \eta$, o semplicemente con $\xi\eta$, il prodotto di $\xi, \eta \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$.

Mediante polarizzazione, otteniamo la *formula di anticommutazione*⁶

$$(24.14) \quad v_1 \cdot v_2 + v_2 \cdot v_1 + \mathfrak{q}'(v_1, v_2) = 0, \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

In particolare, $v_1 \cdot v_2 = -v_2 \cdot v_1$ se v_1 e v_2 sono \mathfrak{q} -ortogonali.

PROPOSIZIONE 24.2.7. *L'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ è una superalgebra, con la \mathbb{Z}_2 -gradazione:*

$$(24.15) \quad \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) = \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V) \oplus \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^1(V), \quad \text{con} \quad \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^p(V) = \pi \left(\bigoplus_{h=0}^{\infty} \mathbf{T}^{2h+p}(V) \right).$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo su $\mathbf{T}(V)$ la \mathbb{Z}_2 -gradazione indotta dalla \mathbb{Z}_+ -gradazione. L'ideale $\mathbf{J}_{\mathfrak{q}}$ è \mathbb{Z}_2 -graduato, perché ammette un sistema di generatori di grado pari. Il quoziente $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ risulta allora anch'esso \mathbb{Z}_2 -graduato. \square

24.2.1. Basi e inclusioni delle algebre di Clifford.

PROPOSIZIONE 24.2.8. *Siano (V, \mathfrak{q}_V) e (W, \mathfrak{q}_W) due spazi vettoriali quadratici su \mathbb{K} . Ogni isometria $\phi : (W, \mathfrak{q}_W) \rightarrow (V, \mathfrak{q}_V)$ si prolunga in modo unico ad un monomorfismo $\tilde{\phi} : \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}_W}(W) \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}_V}(V)$.*

DIMOSTRAZIONE. Identificando W ad un sottospazio di V , otteniamo un'inclusione $\mathbf{T}(W) \hookrightarrow \mathbf{T}(V)$. Quest'inclusione defisce per passaggio ai quozienti un'inclusione $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}_W}(W) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}_V}(V)$, perché $\mathbf{J}_{\mathfrak{q}_V} \cap \mathbf{T}(W) = \mathbf{J}_{\mathfrak{q}_W}$. \square

Se V ha dimensione finita, possiamo identificare $\mathbf{T}^k(V)$ allo spazio delle forme k -multilineari sul duale V^* e $\Lambda^k V$ al sottospazio delle τ di $\mathbf{T}^k(V)$ che si annullano sulle k -uple $(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ di covettori linearmente dipendenti. Indichiamo con $\Lambda V = \sum_{k \geq 0} \Lambda^k V$ l'algebra di Grassmann di V . Poiché abbiamo supposto che \mathbb{K} abbia caratteristica zero, ΛV si identifica al sottospazio dei tensori alternati di $\mathbf{T}(V)$. L'*alternatore*, definito, sui tensori di rango uno, da

$$(24.16) \quad \varepsilon(v_1 \otimes \cdots \otimes v_q) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_q = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_q} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma_q},$$

è una proiezione

$$(24.17) \quad \varepsilon : \mathbf{T}(V) \longrightarrow \Lambda(V).$$

TEOREMA 24.2.9. *La restrizione della proiezione (24.13) definisce un isomorfismo di spazi vettoriali*

$$(24.18) \quad \pi : \Lambda V \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V).$$

In particolare, $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) = 2^m$, con $m = \dim_{\mathbb{K}} V$.

⁶Questa è infatti conseguenza della $(v_1 + v_2)(v_1 + v_2) + \mathfrak{q}(v_1 + v_2) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\mathbf{J}_q \cap \Lambda V = \{0\}$, la restrizione di $\pi : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathcal{C}l_q(V)$ a ΛV è iniettiva. Utilizzando la formula di anticommutazione (24.14), si verifica che $\pi : \Lambda V \rightarrow \mathcal{C}l_q(V)$ è anche surgettiva e quindi un isomorfismo lineare. \square

Fissiamo una base e_1, \dots, e_m di V . Posto $m = \{1, \dots, m\}$, per ogni $I \subseteq m$ definiamo l'elemento e_I di $\mathcal{C}l_q(V)$ ponendo

$$(24.19) \quad e_I = \begin{cases} 1, & \text{se } I = \emptyset, \\ e_i, & \text{se } I = \{i\} \text{ con } 1 \leq i \leq m, \\ e_{i_1} \cdots e_{i_h}, & \text{se } I = \{i_1, \dots, i_h\}, \text{ con } 1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m. \end{cases}$$

PROPOSIZIONE 24.2.10. *Se e_1, \dots, e_m è una base di V , allora $(e_I)_{I \subseteq m}$ è una base di $\mathcal{C}l_q(V)$ come spazio vettoriale su \mathbb{K} .* \square

Se W è un sottospazio anisotropo di V , la Proposizione 24.2.8 ci permette di identificare l'algebra di Clifford di $(W, q|_W)$, che indicheremo per semplicità con $\mathcal{C}l_q(W)$, ad una sottoalgebra di $\mathcal{C}l_q(V)$. Abbiamo in particolare

PROPOSIZIONE 24.2.11. *Se e_1 è un vettore anisotropo di (V, q) e $W = e_1^\perp$, allora*

$$(24.20) \quad \mathcal{C}l_q(V) = \mathcal{C}l_q(W) \oplus (e_1 \cdot \mathcal{C}l_q(W)).$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza del Teorema 24.2.9, perché $\Lambda V = \Lambda W \oplus (e_1 \wedge \Lambda W)$. \square

24.2.2. Pseudo-scalari. Sia (V, q) uno spazio vettoriale quadratico di dimensione m su \mathbb{K} .

DEFINIZIONE 24.2.12. Chiamiamo *pseudo-scalari* le immagini degli elementi di $\Lambda^m V$ mediante l'isomorfismo lineare $\pi : \Lambda(V) \rightarrow \mathcal{C}l_q(V)$ della (24.18).

LEMMA 24.2.13. *Gli pseudoscalari non nulli di $\mathcal{C}l_q(V)$ sono tutti e soli i prodotti $v_1 \cdots v_m$ degli elementi v_1, \dots, v_m di una base q -ortogonale di V .*

DIMOSTRAZIONE. Sia e_1, \dots, e_m una base ortogonale di V . Si verifica facilmente che $e_1 \cdots e_m = \pi(e_1 \wedge \cdots \wedge e_m)$. Viceversa, se v_1, \dots, v_m è una base di V , v è un'unica trasformazione $A \in \mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ per cui $v_i = A(e_i)$ ed abbiamo

$$(*) \quad v_1 \wedge \cdots \wedge v_m = A(e_1) \wedge \cdots \wedge A(e_m) = \det(A) e_1 \wedge \cdots \wedge e_m.$$

Allora $\pi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_m) = \pi(\det(A) e_1 \wedge \cdots \wedge e_m) = (\det(A) e_1) \cdot e_2 \cdots e_m$ è prodotto in $\mathcal{C}l_q(V)$ degli elementi della base q -ortogonale $(\det(A) \cdot e_1, e_2, \dots, e_m)$ di V . \square

OSSERVAZIONE 24.2.14. Per la proprietà universale, ogni isometria a di (V, q) si estende in modo unico ad un isomorfismo \tilde{a} di $\mathcal{C}l_q(V)$, che lascia fissi gli scalari e trasforma in sé il sottospazio V . Per la (*) la \tilde{a} lascia invariati o cambia di segno gli pseudo-scalari, a seconda che il suo determinante sia uguale ad uno o a meno uno. Gli *pseudo-scalari* devono la loro denominazione a questa proprietà: come gli scalari formano un sottospazio di dimensione uno di $\mathcal{C}l_q(V)$, e quindi si parametrizzano con gli elementi di \mathbb{K} , ma non sono *scalari* perché il loro *segno* dipende dall'*orientazione* del sistema di riferimento.

NOTAZIONE 24.2.15. Indicheremo con \mathbb{K}_q^V la retta degli pseudoscalari di $\mathcal{C}l_q(V)$.

LEMMA 24.2.16. (1) Se v_1, \dots, v_n sono vettori di V due a due ortogonali tra loro, allora

$$(24.21) \quad (v_1 \cdots v_n)^2 = (-1)^{n(n+1)/2} \mathfrak{q}(v_1) \cdots \mathfrak{q}(v_n).$$

Per gli pseudoscalari vale la

$$(24.22) \quad \xi \cdot \eta = (-1)^{p(m-1)} \eta \cdot \xi, \quad \forall \eta \in \mathbb{K}_{\mathfrak{q}}^{\vee}, \quad \forall \xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^p(V), \quad p=0, 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la (1) per ricorrenza su n . La formula è vera per $n=1$. Se $n>1$ e la formula vale per un sistema di meno di n vettori ortogonali, allora, poiché vettori ortogonali anticommutano, abbiamo

$$\begin{aligned} (v_1 v_2 \cdots v_n)^2 &= v_1 v_2 \cdots v_n \cdot v_1 v_2 \cdots v_n = (-1)^{n-1} v_1^2 \cdot (v_2 \cdots v_n)^2 \\ &= (-1)^{(n-1)} \mathfrak{q}(v_1) \cdot (-1)^{(n-2)(n-1)/2} \mathfrak{q}(v_2) \cdots \mathfrak{q}(v_n), \end{aligned}$$

da cui segue la (24.21).

Sia e_1, \dots, e_m una base ortogonale di (V, \mathfrak{q}) ed $\eta = e_1 \cdots e_m$. Poiché e_i anticommuta con gli e_j per $j \neq i$ e commuta con e_i , abbiamo

$$\eta \cdot e_i = (-1)^{m-1} e_i \cdot \eta, \quad \text{per } i=1, \dots, m.$$

Da questa identità segue la (24.22). □

Come conseguenza del Lemma 24.2.16 otteniamo la

PROPOSIZIONE 24.2.17. Sia (V, \mathfrak{q}) uno spazio vettoriale quadratico. Allora

- (1) Il quadrato in $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ di uno pseudoscalare è uno scalare ed è nullo se e soltanto se lo pseudoscalare è nullo. Il rapporto dei quadrati di due pseudoscalari non nulli è il quadrato di uno scalare.
- (2) Gli pseudoscalari appartengono al centro di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ se e soltanto se V ha dimensione dispari. □

Gli elementi non nulli di \mathbb{K} formano un gruppo abeliano (moltiplicativo) \mathbb{K}^{\times} . L'insieme $\mathbb{K}^2 = \{\lambda^2 \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ dei loro quadrati è un suo sottogruppo.

Se e_1, \dots, e_m è una qualsiasi base di V e B la matrice simmetrica $(\mathfrak{q}'(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq m}$ che rappresenta \mathfrak{q}' in questa base, l'elemento di \mathbb{K}/\mathbb{K}^2 definito dal determinante di B è un invariante $d^{\mathbb{K}}(\mathfrak{q})$ di (V, \mathfrak{q}) .

DEFINIZIONE 24.2.18 (discriminante). Chiamiamo $d^{\mathbb{K}}(\mathfrak{q})$ il discriminante di \mathfrak{q} e la classe $\delta^{\mathbb{K}}(\mathfrak{q}) = (-1)^{m(m+1)/2} d^{\mathbb{K}}(\mathfrak{q})$ dei quadrati degli pseudoscalari non nulli di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ il suo discriminante con segno.

24.3. Proprietà generali delle algebre di Clifford

In questo paragrafo descriviamo alcune proprietà delle algebre di Clifford.

24.3.1. Semplicità e semisemplicità. Utilizziamo, per descrivere gli elementi di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$, la Proposizione 24.2.10. Fissiamo una base ortogonale e_1, \dots, e_m di V e consideriamo la corrispondente base (e_I) di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$, indicizzata con i sottoinsiemi I di $m = \{1, \dots, m\}$. Chiameremo *lunghezza* di un elemento ξ di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ il numero di addendi non nulli di una sua espressione come combinazione lineare di elementi della base (e_I) . Per ogni $I \subseteq m$ indichiamo con $|I|$ il numero dei suoi elementi. Poiché

$$(*) \quad e_I \cdot e_J = a_{I,J} e_K, \quad \text{con } K = I \ominus J = (I \cup J) \setminus (I \cap J) \text{ ed } a_{I,J} = \pm \prod_{h \in I \cap J} \mathfrak{q}(e_h) \neq 0,$$

i prodotti $e_I \cdot \xi$ e $\xi \cdot e_I$ di un elemento ξ di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ per un monomio e_I hanno lunghezza minore o uguale a quella di ξ e, se $\xi \neq 0$, moltiplicandolo per il multiplo di un monomio, otteniamo un nuovo elemento ξ' della forma $\xi' = 1 + \sum'_{I \neq \emptyset} a'_I e_I$, di lunghezza non superiore a quella di ξ .

LEMMA 24.3.1. *Ogni ideale bilatero non banale di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ contiene un elemento non nullo che sia somma di uno scalare e di uno pseudoscalare.*

DIMOSTRAZIONE. Siano \mathcal{I} un ideale bilatero non banale di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ e ξ un suo elemento non nullo di lunghezza minima. Per quanto osservato sopra, possiamo supporre che ξ sia della forma

$$\xi = 1 + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq m} a_I e_I, \quad \text{con } a_I \in \mathbb{K}.$$

Se ci fosse un $a_J \neq 0$ con $\emptyset \neq J \neq m$, potremmo fissare due indici i, j in m con $i \notin J$ e $j \in J$. Poiché, se $|J|$ è dispari, allora e_i anticommuta ed e_j commuta con e_J e, se $|J|$ è pari, e_i commuta ed e_j anticommuta con e_J , otteniamo che

$$e_j \cdot e_i \cdot e_J \cdot e_i \cdot e_j = -\mathfrak{q}(e_i) \mathfrak{q}(e_j) e_J.$$

In generale, per ogni $I \subseteq m$, abbiamo $e_j \cdot e_i \cdot e_I \cdot e_i \cdot e_j = \pm \mathfrak{q}'(e_i) \mathfrak{q}'(e_j) e_I$ e perciò

$$e_j e_i \xi e_i e_j = \mathfrak{q}(e_i) \mathfrak{q}(e_j) \left(1 - a_J e_J + \sum_{\emptyset \neq I \neq J} a'_I e_I \right),$$

con $a'_I = \pm a_I$. Allora $\xi' = e_j \cdot e_i \cdot \xi \cdot e_i \cdot e_j + \mathfrak{q}(e_i) \mathfrak{q}(e_j) \cdot \xi$ sarebbe un elemento non nullo di \mathcal{I} di lunghezza strettamente minore di quella di ξ . Abbiamo ottenuto una contraddizione, che ci mostra che $\xi = 1 + \eta$ con $\eta \in \mathbb{K}_{\mathfrak{q}}^{\vee}$. \square

Gli elementi di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ di lunghezza uno sono invertibili e quindi un suo ideale bilatero che ne contenga uno coincide con $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$.

Se V ha dimensione pari, allora i vettori e gli pseudoscalari di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ anticommutano. Quindi, se un ideale bilatero \mathcal{I} di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ contiene $1 + \eta$ per uno pseudovettore $\eta \neq 0$, allora contiene sia $e_1 + e_1 \cdot \eta$ che $e_1 + \eta \cdot e_1 = e_1 - e_1 \cdot \eta$ e quindi contiene e_1 e coincide con $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$.

Se V ha dimensione dispari, allora gli pseudoscalari appartengono al centro di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$. Supponiamo che, per uno pseudoscalare $\eta \neq 0$, l'elemento $1 + \eta$ appartenga ad un suo ideale proprio non banale \mathcal{I} . Poiché $1 + \eta$ appartiene al centro di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$, sia il nucleo che l'immagine di

$$\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \ni \xi \longrightarrow (1 + \eta) \cdot \xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$$

sono ideali bilateri di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$. Per il Lemma 24.3.1 il nucleo \mathcal{I}' di quest'applicazione contiene un elemento della forma $1+\eta'$ per uno pseudoscalare η' ed abbiamo

$$(1+\eta)\cdot(1+\eta') = 0 \Rightarrow (1+\eta\cdot\eta')+(\eta+\eta') = 0.$$

Se V ha dimensione maggiore o uguale di uno, scalari e pseudoscalari sono linearmente indipendenti in $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ e questa relazione ci dice che $\eta' = -\eta$ ed

$$(24.23) \quad \eta^2 = 1.$$

Viceversa, se V ha dimensione dispari $m \geq 1$ e possiamo trovare uno pseudoscalare η con $\eta^2 = 1$, allora $\mathcal{I}_+ = (1+\eta)\cdot\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ ed $\mathcal{I}_- = (1-\eta)\cdot\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ sono due ideali propri di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ con $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) = \mathcal{I}_+ \oplus \mathcal{I}_-$. Poiché un ideale bilatero proprio di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ contiene un solo elemento della forma $1+\eta$ con η pseudoscalare, ciascuno dei due ideali \mathcal{I}_+ , \mathcal{I}_- , è semplice.

Riassumiamo la discussione svolta fin qui nel seguente teorema di struttura.

TEOREMA 24.3.2. *Sia (V, \mathfrak{q}) uno spazio ortogonale e $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ la sua algebra di Clifford. Allora:*

- (i) *Se $m = \dim(V)$ è pari, allora $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ è semplice.*
- (ii) *Se $m = \dim(V)$ è dispari e $\delta(\mathfrak{q}) = 1$, cioè esiste uno pseudoscalare η con $\eta^2 = 1$, allora $\mathcal{C}\ell(V)$ è semisemplice e somma dei due ideali semplici*

$$(24.24) \quad \mathcal{C}\ell(V) = \mathcal{I}_+ \oplus \mathcal{I}_-, \quad \text{con } \mathcal{I}_{\pm} = \{\xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \mid \eta \cdot \xi = \pm \xi\}.$$

- (iii) *Se $m = \dim(V)$ è dispari e $\delta(\mathfrak{q}) \neq 1$, cioè se i quadrati degli pseudoscalari non nulli non sono quadrati in \mathbb{K} , allora $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ è semplice. \square*

Supponiamo che (V, \mathfrak{q}) sia uno spazio quadratico reale con segnatura (p, q) . Fissata una sua base ortonormale e_1, \dots, e_m , è

$$(e_1 \cdots e_m)^2 = (-1)^{p+m(m-1)/2} = (-1)^{(p-q)(p-q+1)/2}.$$

Quindi il discriminante con segno dipende soltanto dalla classe di resto modulo 4 della differenza $p-q$. Abbiamo perciò

$p-q \pmod{4}$	0	1	2	3
$\delta^{\mathbb{R}}(\mathfrak{q}) = \eta^2$	1	-1	-1	1

Nel caso reale il Teorema 24.3.2 ci dà

PROPOSIZIONE 24.3.3. *L'algebra di Clifford di uno spazio quadratico reale di segnatura (p, q) è*

- *semplice se $p-q \not\equiv 3 \pmod{4}$;*
- *somma diretta di due ideali semplici se $p-q \equiv 3 \pmod{4}$. \square*

24.3.2. Centro e teorema di struttura. Sia (V, \mathfrak{q}) uno spazio quadratico e $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ la sua algebra di Clifford.

Per la proprietà universale, ogni simmetria \mathfrak{q} -ortogonale di V si estende in modo unico ad un'involuzione di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$. In particolare, indicheremo con α l'involuzione associata al grado, che corrisponde alla simmetria rispetto all'origine $v \rightarrow (-v)$ di V , che lascia fissi gli elementi di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$ e trasforma quelli di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^1(V)$ nei loro opposti.

Poiché vettori tra loro ortogonali anticommutano, per ogni $v \in V$ anisotropo, abbiamo

$$(24.25) \quad v \cdot \xi = \alpha(\xi) \cdot v, \quad \forall v \in V, \forall \xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(v^{\perp}).$$

Utilizzando la (24.25), otteniamo

TEOREMA 24.3.4. *Il centro di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ è*

- \mathbb{K} se V ha dimensione pari,
- la somma $\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}_{\mathfrak{q}}^{\vee}$ degli scalari e degli pseudo-scalari se V ha dimensione dispari.

DIMOSTRAZIONE. Fissata una base ortogonale e_1, \dots, e_m di V , ed un indice $i \in m$, per la Proposizione 24.2.11 ogni elemento ξ di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ si decompone in modo unico nella somma

$$(\dagger) \quad \xi = \xi'_i + e_i \cdot \xi''_i, \quad \text{con } \xi'_i, \xi''_i \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(e_i^{\perp}).$$

Per la (24.25) abbiamo

$$(\ddagger) \quad e_i \cdot \xi = e_i \cdot \xi'_i - \mathfrak{q}(e_i) \cdot \xi''_i, \quad \xi \cdot e_i = e_i \cdot \alpha(\xi'_i) - \mathfrak{q}(e_i) \cdot \alpha(\xi''_i).$$

L'elemento ξ appartiene al centro di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$, se e soltanto se commuta con tutti i vettori e_1, \dots, e_m . Per l'unicità della decomposizione (\dagger) , ricaviamo dalle (\ddagger) che $\alpha(\xi'_i) = \xi'_i$ ed $\alpha(\xi''_i) = \xi''_i$. Dunque $\xi'_i, \xi''_i \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(e_i^{\perp}) \subset \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$. Questo dice che il numero di fattori e_j con indice diverso da un qualsiasi indice i assegnato in ogni monomio $k_I e_I$ non nullo nella decomposizione $\xi = \sum k_I e_I$ deve essere pari. Ciò è possibile solo se ξ è uno scalare, oppure la somma di uno scalare e di uno pseudoscalare quando la dimensione di V sia dispari. \square

Se m è dispari e $\delta(\mathfrak{q}) \neq 1$, allora $\mathbb{K}' := \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}_{\mathfrak{q}}^{\vee}$ è un campo, estensione quadratica di \mathbb{K} mediante lo pseudoscalare η . Utilizzando il Teorema di Artin-Wedderburn (Teorema 23.8.9), otteniamo il seguente teorema di struttura.

TEOREMA 24.3.5. *Sia (V, \mathfrak{q}) uno spazio vettoriale quadratico di dimensione finita m su \mathbb{K} e $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ la sua algebra di Clifford.*

- (i) *Se m è pari, allora $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ è semplice centrale e $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \approx \mathbb{F}(\ell)$ per una \mathbb{K} -algebra di divisione \mathbb{F} su \mathbb{K} , con centro \mathbb{K} , ed un opportuno $\ell \in \mathbb{Z}^+$.*
- (ii) *Se m è dispari e $\delta(\mathfrak{q}) \neq 1$, allora il centro $\mathbf{C} = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}_{\mathfrak{q}}^{\vee}$ di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ è un campo, estensione quadratica di \mathbb{K} e $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ è semplice centrale come algebra su \mathbf{C} e quindi isomorfa, come algebra associativa unitaria, ad $\mathbb{F}(\ell)$ per una \mathbf{C} -algebra di divisione \mathbb{F} con centro \mathbf{C} .*
- (iii) *Se m è dispari e $\delta(\mathfrak{q}) = 1$, allora $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ è somma diretta di due ideali semplici centrali isomorfi tra loro e ciascuno isomorfo ad $\mathbb{F}(\ell)$ per una \mathbb{K} -algebra di divisione \mathbb{F} con centro \mathbb{K} .* \square

24.3.3. La sottoalgebra $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$. Come vedremo, le algebre ortogonali si possono considerare come sottoalgebre di Lie di $\text{Lie}(\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V))$. Le loro rappresentazioni spinoriali si ottengono quindi dalle restrizioni a $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$ delle rappresentazioni irriducibili di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$. È quindi per noi interessante cercare di comprendere l'inclusione di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$ in $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$.

Fissata una base ortogonale e_1, \dots, e_m di V , consideriamo su $W=e_m^\perp$ la forma quadratica

$$(24.26) \quad \mathfrak{b}(w) = \mathfrak{q}(e_m) \cdot \mathfrak{q}(w), \quad \forall w \in W=e_m^\perp.$$

TEOREMA 24.3.6. *Utilizziamo la notazione introdotta sopra. L'applicazione*

$$(24.27) \quad \phi : W \ni w \longrightarrow e_m \cdot w \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$$

si estende in modo unico ad un isomorfismo di algebre $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(W) \simeq \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$(\phi(w))^2 = e_m \cdot w \cdot e_m \cdot w = -e_m \cdot e_m \cdot w \cdot w = -\mathfrak{q}(e_m)\mathfrak{q}(w) = -\mathfrak{b}(w), \quad \forall w \in W.$$

Per la proprietà universale, la ϕ si estende in modo unico ad un omomorfismo $\tilde{\phi} : \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(W) \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$ di \mathbb{K} -algebre associative unitarie. Gli elementi non scalari di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$ sono somme di polinomi di $e_i \cdot e_j$ per $1 \leq i < j \leq m$. L'immagine di $\tilde{\phi}$ contiene gli $e_i \cdot e_m$ ed anche gli $e_i \cdot e_j = [\mathfrak{q}(e_m)]^{-1} (e_i \cdot e_m) \cdot (e_j \cdot e_m)$ per $1 \leq i < j < m$. Quindi la $\tilde{\phi}$ è surgettiva e dunque un isomorfismo perché le due algebre hanno la stessa dimensione finita. \square

COROLLARIO 24.3.7. *Se \mathfrak{q} è una forma quadratica non degenera sullo spazio vettoriale V , di dimensione finita su \mathbb{K} , allora $\mathcal{C}\ell_{-\mathfrak{q}}^0(V) \simeq \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$.* \square

Viceversa, siano V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e $V=W \oplus L$ una sua decomposizione nella somma di un suo iperpiano W e di una retta ad esso trasversale. Fissata su W una struttura di spazio quadratico (W, \mathfrak{b}) , una base e_0 di L ed uno scalare $k \neq 0$, possiamo definire su V una struttura di spazio quadratico ponendo

$$(24.28) \quad \mathfrak{q}(w + t \cdot e_0) = -k^{-1} \mathfrak{b}(w) - k t^2.$$

Allora l'applicazione

$$W \ni w \longrightarrow e_0 \cdot w \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$$

si estende in modo unico, per la proprietà universale, ad un isomorfismo tra $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(W)$ e $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$. Fissata una base ortogonale e_1, \dots, e_m di W , poiché e_0 è \mathfrak{q} -ortogonale a W , il prodotto $\eta = e_0 \cdot e_1 \cdot \dots \cdot e_m$ è uno pseudoscalare di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ per cui vale

$$\eta^2 = (-1)^{m(m+1)/2} k^{1-m} \mathfrak{b}(e_1) \cdot \dots \cdot \mathfrak{b}(e_m).$$

24.4. Algebre di Clifford di spazi split

L'indice di Witt di uno spazio quadratico (V, \mathfrak{q}) è la massima dimensione di un suo sottospazio totalmente isotropo; è detta di Witt la sua decomposizione $V=U \oplus W \oplus Z$ nella somma diretta di due sottospazi totalmente isotropi massimali U, W , trasversali tra loro, e di un sottospazio Z totalmente anisotropo, con $U \oplus W = Z^\perp$.

I sottospazi U e W hanno dimensione uguale all'indice di Witt e Z è *nucleo anisotropo* di (V, \mathfrak{q}) . L'indice di Witt e la classe di congruenza del nucleo anisotropo formano un sistema completo di invarianti di (V, \mathfrak{q}) (vedi ad esempio [10, §4]). Nel §24.2.2 abbiamo definito il *discriminante* come la classe $d(\mathfrak{q})$ in \mathbb{K}/\mathbb{K}^2 del determinante della matrice $(\mathfrak{q}'(e_i, e_j))$, per una qualsiasi base e_1, \dots, e_m di V ed il *discriminante con segno* $\delta(\mathfrak{q}) = (-1)^{m(m-1)/2}d(\mathfrak{q})$. Sia il discriminante che il discriminante con segno sono uguali a quelli della restrizione di \mathfrak{q} al nucleo anisotropo.

DEFINIZIONE 24.4.1. Si dice *split* uno spazio quadratico (V, \mathfrak{q}) con nucleo anisotropo di dimensione minore o uguale ad uno e $\delta(\mathfrak{q})=1$. Chiamiamo *iperbolico* uno spazio split di dimensione pari⁷.

OSSERVAZIONE 24.4.2. Tutti gli spazi quadratici su un campo \mathbb{K} algebricamente chiuso sono split.

Se (V, \mathfrak{q}) ha dimensione pari $2n$ ed indice di Witt n , uguale alla metà della dimensione, allora il suo discriminante con segno è 1 e pertanto è iperbolico.

Tutti gli spazi iperbolici della stessa dimensione $2n$ sullo stesso campo \mathbb{K} sono tra loro isometrici.

Un modello dello spazio iperbolico di dimensione $2n$ su \mathbb{K} si ottiene considerando uno spazio vettoriale W di dimensione n su \mathbb{K} , il suo duale $W^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, \mathbb{K})$ e lo spazio quadratico $(W \oplus W^*, \mathfrak{q})$, con a forma quadratica definita da

$$(24.29) \quad \mathfrak{q}(w \oplus \eta) = \eta(w), \quad \forall w \in W, \eta \in W^*.$$

Uno spazio quadratico (V, \mathfrak{q}) di dimensione dispari $2n+1$ ed indice di Witt n è split se e soltanto se per uno e quindi per tutti i vettori non nulli e di un suo nucleo anisotropo $\mathfrak{q}(e)$ appartiene alla classe (-1) di \mathbb{K}/\mathbb{K}^2 .

24.4.1. Algebra di Clifford e spinori degli spazi iperbolici. Gli spazi iperbolici hanno dimensione pari e quindi algebra di Clifford semplice centrale. Mostriamo che in questo caso un suo ideale sinistro minimale non banale \mathbf{S} ha commutante \mathbb{K} e quindi $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ è isomorfa ad $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbf{S})$.

LEMMA 24.4.3. Siano (V, \mathfrak{q}) uno spazio quadratico e W un suo sottospazio totalmente isotropo. La proiezione canonica $\pi : \Lambda V \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ si restringe ad un omomorfismo iniettivo di superalgebra associative unitarie

$$(24.30) \quad \pi : \Lambda W \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V), \quad \text{con } \pi(w_1 \wedge \dots \wedge w_k) = w_1 \cdots w_k, \quad \forall w_1, \dots, w_k \in W. \quad \square$$

NOTAZIONE 24.4.4. Utilizzeremo nel seguito l'omomorfismo iniettivo (24.30) per identificare l'algebra esterna di un sottospazio totalmente isotropo W di (V, \mathfrak{q}) ad una sottoalgebra unitaria di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$, scrivendo $\Lambda W \subset \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$.

TEOREMA 24.4.5. Siano (V, \mathfrak{q}) uno spazio iperbolico di dimensione $2n$ e W un suo sottospazio totalmente isotropo di dimensione n . Allora l'ideale sinistro \mathbf{S} generato da $\Lambda^n W$ è minimale tra gli ideali sinistri di dimensione positiva di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ ed è un $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ -modulo con commutante \mathbb{K} .

⁷In letteratura questi spazi sono detti anche *metabolici*.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un sottospazio totalmente isotropo U trasversale a W e due basi w_1, \dots, w_n di W ed u_1, \dots, u_n di U , in *dualità* tra loro; caratterizzate cioè dalla condizione che

$$(24.31) \quad w_i \cdot u_j + u_j \cdot w_i = \delta_{i,j}.$$

Sia $n = \{1, \dots, n\}$ e consideriamo le basi $(u_I)_{I \subseteq n}$, $(w_I)_{I \subseteq n}$ di $\Lambda U, \Lambda W \subset \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ definite ponendo $u_{\emptyset} = 1$, $w_{\emptyset} = 1$, $u_I = w_{i_1} \cdots w_{i_k}$, $w_I = w_{i_1} \cdots w_{i_k}$, se $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. I monomi $u_I \cdot w_J$, con $I, J \subseteq n$, formano una base di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$.

L'ideale S è generato da w_n . Poiché $u_I \cdot w_J \cdot w_n = 0$ se $J \neq \emptyset$, gli elementi s di S sono combinazioni lineari dei monomi $u_I \cdot w_n$. Definiamo *lunghezza* di un elemento di S il numero di addendi non nulli di una sua espressione come combinazione lineare dei monomi $u_I \cdot w_n$.

Supponiamo che S' sia un ideale sinistro non banale contenuto in S e sia

$$(*) \quad s = \sum_{I \subseteq \mathbb{I}} \lambda_I u_I \cdot w_n, \quad \text{con } \lambda_I \in \mathbb{K}$$

un suo elemento di minima lunghezza positiva. Se s avesse lunghezza maggiore di uno, ci sarebbero due sottoinsiemi $I, J \subseteq n$ ed un indice $j \in n$ tali che $j \in I \setminus J$ e $\lambda_I \neq 0 \neq \lambda_J$. Allora $s' = u_j \cdot s$ sarebbe un elemento non nullo di S' di lunghezza inferiore a quella di s . Questa contraddizione ci dimostra che S' contiene un monomio $u_I \cdot w_n$ e quindi anche $w_I \cdot u_I \cdot w_n = \pm w_n$ e dunque coincide con S . Questo dimostra che S è una rappresentazione irriducibile di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$.

Calcoliamo il commutante di S . Un suo elemento $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)}(S)$ è completamente caratterizzato dall'immagine $s = \psi(w_n)$ del generatore w_n . La decomposizione (*) di s come combinazione lineare degli $u_I \cdot w_n$ non può contenere addendi non nulli per $I \neq \emptyset$, perché in caso contrario avremmo $w_i \cdot s \neq 0$ se $i \in I$, mentre $\psi(w_i \cdot w_n) = \psi(0) = 0$. I $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ -endomorfismi di S sono perciò tutte e sole le moltiplicazioni per scalari di \mathbb{K} . \square

TEOREMA 24.4.6. *Se (V, \mathfrak{q}) è uno spazio iperbolico ed U un suo sottospazio totalmente isotropo massimale. Allora*

$$(24.32) \quad \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \simeq \text{End}_{\mathbb{K}}(\Lambda U).$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 24.3.5, l'algebra $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ è semplice centrale ed è perciò isomorfa all'algebra degli endomorfismi \mathbb{K} -lineari di un suo ideale sinistro minimale S . Utilizzando la descrizione di S del Teorema 24.4.5, basterà allora osservare che l'applicazione $\Lambda(U) \ni t \rightarrow t \cdot w_n \in S$ è un isomorfismo \mathbb{K} -lineare, per ricavarne l'isomorfismo (24.32). \square

OSSERVAZIONE 24.4.7. Nell'identificazione $S \simeq \Lambda U$, la moltiplicazione per i vettori u di U , che possiamo indicare con λ_u , corrisponde al prodotto nell'algebra di Grassmann ΛU ed in fisica si dice *operatore di creazione*. La moltiplicazione per vettori w di W , che indichiamo con δ_w , corrisponde al prodotto interno in ΛU per un elemento del duale e si dice *operatore di distruzione*. Otteniamo l'isomorfismo (24.32) dalla proprietà universale, estendendo l'applicazione

$$U \oplus W \ni u + w \longrightarrow (\lambda_u + \delta_w) \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\Lambda(U)).$$

ad un isomorfismo di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(U \oplus W)$ con $\text{End}_{\mathbb{K}}(\Lambda(U))$.

A partire da basi u_1, \dots, u_n e w_1, \dots, w_n di due sottospazi totalmente isotropi e complementari U e W di (V, \mathfrak{q}) , che verifichino la relazione di dualità (24.31), costruiamo la base ortogonale $(e_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ di V ponendo $e_i = (u_i - w_i)$, $e_{n+i} = (u_i + w_i)$. È

$$e_i^2 = -1, \quad e_{n+i}^2 = +1 \quad \text{ed} \quad e_i \cdot e_{n+i} = u_i \cdot w_i - w_i \cdot u_i = [u_i, w_i].$$

DEFINIZIONE 24.4.8 (Chiralità). Chiamiamo *operatore di chiralità* lo pseudo-scalare

$$\chi = e_1 \cdot e_{n+1} \cdots e_n \cdot e_{2n} = [u_1, w_1] \cdots [u_n, w_n].$$

Poiché $\chi^2 = 1$, la moltiplicazione a sinistra per χ è un'involuzione di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$. L'elemento $[u_i, w_i]$ commuta con u_j e w_j se $i \neq j$, ed $[u_i, w_i] \cdot u_i = u_i$, $[u_i, w_i] \cdot w_i = -w_i$. Otteniamo perciò

$$\chi \cdot u_I \cdot w_n = (-1)^{n-|I|} u_I \cdot w_n, \quad \forall I \in \mathbb{I},$$

ove abbiamo indicato con $|I|$ il numero di elementi di I . La chiralità opera perciò su \mathbf{S} lasciando fissi gli elementi di $\mathbf{S}^+ = \mathbf{S} \cap \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$, e cambiando di segno quelli di $\mathbf{S}^- = \mathbf{S} \cap \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^1(V)$.

DEFINIZIONE 24.4.9 (Spinori). Chiamiamo gli elementi di \mathbf{S} *spinori*⁸; di (V, \mathfrak{q}) . Quelli di \mathbf{S}^+ si dicono *destrorsi*, o con⁹ *chiralità positiva*, quelli di \mathbf{S}^- *sinistrorsi* o con *chiralità negativa*.

24.4.2. Algebra di Clifford e spinori di spazi split di dimensione dispari.

Supponiamo che (V, \mathfrak{q}) sia uno spazio split di dimensone dispari $2n+1$.

Per l'ipotesi che $\delta(\mathfrak{q})=1$, c'è uno pseudoscalare $\eta \in \mathbb{K}_{\mathfrak{q}}^{\vee}$ con $\eta^2=1$. Poiché siamo in dimensione dispari, gli pseudoscalari appartengono al centro di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ e quindi $(1+\eta) \cdot (1-\eta) = 0$ e sia il nucleo che l'immagine delle moltiplicazioni per $(1 \pm \eta)$

$$\mathcal{I}_+ = (1+\eta) \cdot \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) = \{\xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \mid (1-\eta) \cdot \xi = 0\},$$

$$\mathcal{I}_- = (1-\eta) \cdot \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) = \{\xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \mid (1+\eta) \cdot \xi = 0\},$$

sono ideali bilateri e $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ ne è somma diretta.

Gli ideali \mathcal{I}_{\pm} non sono graduati. Indicando con α l'involuzione di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ che trasforma ogni elemento di V nel suo opposto, abbiamo $\alpha(\mathcal{I}_{\pm}) = \mathcal{I}_{\mp}$ e

$$\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V) = \{\xi + \alpha(\xi) \mid \xi \in \mathcal{I}_+\}, \quad \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^1(V) = \{\xi - \alpha(\xi) \mid \xi \in \mathcal{I}_+\}.$$

LEMMA 24.4.10. *Gli ideali \mathcal{I}_+ , \mathcal{I}_- sono algebre associative unitarie, semplici e centrali, con identità definite, rispettivamente, da $1_+ = \frac{1}{2}(1+\eta)$ ed $1_- = \frac{1}{2}(1-\eta)$.*

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato è conseguenza della parte (iii) del Teorema 24.3.5. Il fatto che 1_+ ed 1_- siano l'identità del prodotto in \mathcal{I}_+ , \mathcal{I}_- , rispettivamente, segue dalle formule

$$(1+\eta)^2 = 2(1+\eta) \quad \text{ed} \quad (1-\eta)^2 = 2(1-\eta). \quad \square$$

⁸Nel caso in cui $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, gli elementi di \mathbf{S} sono noti in fisica come *spinori di Dirac*, o anche (1/2)-spinori

⁹In greco $\chi\epsilon\upsilon\rho$ significa *mano*. La *chiralità* è la proprietà di una configurazione spaziale di non essere sovrapponibile alla sua immagine speculare.

Per descrivere la struttura di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$, fissiamo due sottospazi isotropi massimali U, W , di dimensione n , di (V, \mathfrak{q}) , con $U \cap W = \{0\}$. Sia u_1, \dots, u_n una base di U e w_1, \dots, w_n , con

$$u_i \cdot w_j + w_j \cdot u_i = \delta_{i,j} \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq n.$$

la base duale in W . Lo spazio quadratico (E, \mathfrak{b}) , con $E = U \oplus W$ e $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}|_E$, è iperbolico.

Poiché $\delta(\mathfrak{q}) = 1$, la retta Z perpendicolare ad E contiene un vettore e_0 con $e_0^2 = 1$. I vettori $e_i = w_i + u_i$ ed $e_{n+i} = w_i - u_i$, per $1 \leq i \leq n$, formano, insieme ad e_0 , una base ortogonale di (V, \mathfrak{q}) , con $e_0^2 = 1$ ed $e_i^2 = 1$, $e_{n+i}^2 = -1$ per $1 \leq i \leq n$. Poiché

$$e_i \cdot e_{n+i} = u_i \cdot w_i - w_i \cdot u_i = [u_i, w_i], \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

indicando con χ l'operatore di chiralità di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(E)$, risulta $\eta^2 = 1$ con

$$(24.33) \quad \eta = e_0 \cdot \chi = e_0 \cdot e_1 \cdot e_{n+1} \cdots e_n \cdot e_{2n} = e_0 \cdot [u_1, w_1] \cdots [u_n, w_n] \in \mathbb{K}_{\mathfrak{q}}^{\vee}.$$

L'ultima espressione descrive η come un prodotto di $(n+1)$ fattori che commutano tra loro e ciascuno dei quali ha come quadrato lo scalare 1.

Poiché le applicazioni naturali $\Lambda U \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ e $\Lambda W \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ sono omomorfismi iniettivi di algebre associative unitarie, considereremo ΛU e ΛW come sottospazi di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$, identificandoli alle loro immagini.

Si verifica facilmente:

LEMMA 24.4.11. *Le applicazioni*

$$(24.34) \quad \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(E) \ni \xi \rightarrow \frac{1}{2}(1+\eta) \cdot \xi \in \mathcal{A}_+ \quad \text{e} \quad \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(E) \ni \xi \rightarrow \frac{1}{2}(1-\eta) \cdot \xi \in \mathcal{A}_-$$

sono isomorfismi di algebre associative unitarie. □

Gli isomorfismi (24.34) e la discussione precedente ci danno il seguente

TEOREMA 24.4.12. *Se (V, \mathfrak{q}) è split di dimensione dispari $2n+1$ ed U un suo sottospazio totalmente isotropo massimale, di dimensione n , allora*

$$(24.35) \quad \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \simeq \text{End}_{\mathbb{K}}(\Lambda U) \oplus \text{End}_{\mathbb{K}}(\Lambda U),$$

con la \mathbb{Z}_2 -gradazione

$$(24.36) \quad \begin{cases} [\text{End}_{\mathbb{K}}(\Lambda U) \oplus \text{End}_{\mathbb{K}}(\Lambda U)]^0 = \{(\xi, \xi) \mid \xi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\Lambda U)\}, \\ [\text{End}_{\mathbb{K}}(\Lambda U) \oplus \text{End}_{\mathbb{K}}(\Lambda U)]^1 = \{(\xi, -\xi) \mid \xi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\Lambda U)\}. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando la notazione introdotta in precedenza, consideriamo l'applicazione lineare ℓ di V in $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(E)$ che è l'identità su E e fa corrispondere ad e_0 l'elemento χ di chiralità di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(E)$. L'applicazione

$$\Phi : V \ni v \rightarrow (\ell(v), -\ell(v)) \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(E) \oplus \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(E)$$

verifica $(\Phi(v))^2 = v^2 \cdot (1_E, 1_E)$. Per la proprietà universale, Φ si estende in modo unico ad un omomorfismo di algebre associative unitarie \mathbb{Z}_2 -graduate $\tilde{\Phi}$ di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ in $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(E) \oplus \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(E)$. Si verifica facilmente che la $\tilde{\Phi}$ è surgettiva e quindi, poiché le due algebre hanno la stessa dimensione, un isomorfismo. La tesi segue allora dal Teorema 24.4.6. □

Gli *spinori* di (V, \mathfrak{q}) sono i vettori di un $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ -modulo irriducibile, che possiamo realizzare come gli elementi di un suo ideale sinistro minimale. Utilizziamo, per descrivere basi di ΛU e ΛW , la notazione introdotta nella dimostrazione della Proposizione 24.4.5.

TEOREMA 24.4.13. *Gli ideali sinistri S_{\pm} di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ generati da*

$$(24.37) \quad s_0^{\pm} = (1 \pm \eta) \cdot w_n$$

sono rappresentazioni irriducibili non equivalenti¹⁰ di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$. Ogni rappresentazione irriducibile non banale di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ è equivalente ad una delle S_{\pm} .

Le applicazioni

$$(24.38) \quad \Lambda U \ni t \longrightarrow t \cdot s_0^{\pm} \in S_{\pm}$$

sono isomorfismi lineari.

Come $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0$ -moduli, gli ideali sinistri S_+ ed S_- sono irriducibili, equivalenti ed hanno commutante \mathbb{K} .

DIMOSTRAZIONE. Gli ideali sinistri non banali minimali di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ sono contenuti in uno degli ideali \mathcal{I}_{\pm} e l'involuzione α trasforma quelli contenuti in \mathcal{I}_+ in quelli contenuti in \mathcal{I}_- e viceversa. Utilizzando l'isomorfismo (24.34), possiamo affermare che essi sono immagini degli ideali sinistri minimali di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(E)$ mediante la traslazione rispetto ad $\frac{1}{2}(1 \pm \eta)$. Questo ci dice che gli S_{\pm} sono ideali sinistri minimali e la (24.38) si ottiene componendo gli isomorfismi $\Lambda U \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(E) \cdot w_n \rightarrow S_{\pm} \subset \mathcal{I}_{\pm}$.

Gli ideali S_+ ed S_- non sono isomorfi come $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ -moduli, perché la moltiplicazione per $\frac{1}{2}(1 + \eta)$ è l'identità sul primo e la mappa nulla per il secondo.

Il fatto che siano irriducibili è conseguenza del fatto che lo sia, per il Teorema 24.4.5, l'ideale sinistro di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(E)$ generato da w_n .

L'involuzione α definisce un isomorfismo di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$ -moduli tra S_+ ed S_- . Se $\xi = \xi_0 + \xi_1$ con $\xi_i \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^i(V)$, allora $\xi' = \xi_0 + \eta \cdot \xi_1 \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$ e $\xi \cdot s = \xi' \cdot s$ per ogni $s \in S_+$. Questo ci dice che S_+ , essendo irriducibile come $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ -modulo, lo è anche come $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$ -modulo.

Il commutante di S_{\pm} è uguale al commutante di un $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(E)$ -modulo minimale e perciò uguale a \mathbb{K} per il Teorema 24.4.5. \square

24.5. Spazi quadratici reali di segnatura (p, q)

Tutti gli spazi quadratici complessi sono split e dunque i Teoremi 24.4.6 e 24.4.12 descrivono completamente la struttura delle algebre di Clifford complesse.

Consideriamo in questo paragrafo le algebre di Clifford degli spazi vettoriali quadratici reali. Per semplicità, indicheremo con $\mathbb{R}^{p,q}$ uno spazio vettoriale reale \mathbb{R}^{p+q} su cui sia stata assegnata una forma quadratica \mathfrak{q} di segnatura (p, q) e con $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ la corrispondente algebra di Clifford.

Come vedremo, la classificazione richiede alcuni risultati generali di equivalenza e la conoscenza di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,0})$ e $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,p})$ per $p=1, 2, 3, 4$. Ricordiamo che $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{1,0}) \approx \mathbb{C}$, $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{2,0}) \approx \mathbb{H}$, $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{3,0}) \approx \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{4,0}) \approx \mathbb{H}(2)$.

¹⁰Nel caso in cui $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, sono di tipo reale.

PROPOSIZIONE 24.5.1. *Valgono gli isomorfismi*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,1}) &\simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,2}) &\simeq \mathbb{R}(2), \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,3}) &\simeq \mathbb{C}(2), & \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,4}) &\simeq \mathbb{H}(2).\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Le applicazioni

$$\mathbb{R}^{0,1} \ni t \longrightarrow \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_2(\mathbb{R}) = \{\text{diag}(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbb{R}^{0,2} \ni (x, y) \longrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2),$$

$$\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{R} \ni (z, t) \longrightarrow \begin{pmatrix} t & \bar{z} \\ z & -t \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(2),$$

$$\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{H} \ni \mathfrak{q} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{Re}(\mathfrak{q}) & -\text{Im}(\mathfrak{q}) \\ \text{Im}(\mathfrak{q}) & -\text{Re}(\mathfrak{q}) \end{pmatrix} \in \mathbb{H}(2)$$

si estendono, per la proprietà universale, ad omomorfismi delle algebre di Clifford $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,p})$ nelle algebre $\mathbf{D}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}(2)$, $\mathbb{C}(2)$, $\mathbb{H}(2)$, che si verifica facilmente essere degli isomorfismi. \square

OSSERVAZIONE 24.5.2. La struttura di superalgebra per le rappresentazioni delle $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,p})$ della Proposizione 24.5.1 è descritta da

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_2^0(\mathbb{R}) &= \{\text{diag}(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}, & \mathbf{D}_2^1(\mathbb{R}) &= \{\text{diag}(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\}, \\ \mathbb{R}^0(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, & \mathbb{R}^1(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \\ \mathbb{C}^0(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}, & \mathbb{C}^1(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & -\bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}, \\ \mathbb{H}^0(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{H} \right\}, & \mathbb{H}^1(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{H} \right\}.\end{aligned}$$

In particolare i numeri complessi si identificano alla sottoalgebra degli elementi di grado pari di $\mathbb{R}(2)$, i quaternioni agli elementi di grado pari di $\mathbb{C}(2)$.

ESEMPIO 24.5.3. Diamo qui un'altra dimostrazione dell'isomorfismo di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{4,0})$ con $\mathbb{H}(2)$, utilizzando il fatto che $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{1,1}) \simeq \mathbb{R}(2)$. Fissiamo una base ortogonale e_1, e_2 di $\mathbb{R}^{1,1}$ con $e_1^2 = -1$, $e_2^2 = 1$ e consideriamo il sottospazio vettoriale E di $\mathbb{H} \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{1,1})$ generato da

$$1 \otimes e_1, i \otimes e_2, j \otimes e_2, k \otimes e_2.$$

I quattro vettori anticommutano due a due ed hanno tutti quadrato $(-1 \otimes 1)$. Per la proprietà universale, l'inclusione di E si estende in modo unico ad un isomorfismo di algebre associative unitarie $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{4,0}) \rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{1,1}) \simeq \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \simeq \mathbb{H}(2)$.

ESEMPIO 24.5.4. Abbiamo $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{2,2}) \simeq \mathbb{R}(4)$.

Consideriamo la struttura di superalgebra di \mathbb{H} associata alla gradazione

$$\mathbb{H}^0 = \langle 1, i \rangle_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{C}, \quad \mathbb{H}^1 = \langle j, k \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Sul sottospazio vettoriale

$$V = (1 \otimes \mathbb{H}^1) \oplus (\mathbb{H}^1 \otimes i)$$

di $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ definiamo la forma quadratica q , ponendo $v^2 = -q(v) \cdot 1 \otimes 1$. Allora (V, q) è iperbolico, con q definita positiva su $1 \otimes \mathbb{H}^1$ e negativa su $\mathbb{H}^1 \otimes i$. L'inclusione di V in $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ si estende allora per la proprietà universale ad un isomorfismo di superalgebre $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{2,2}) \simeq \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$. Per il Teorema 24.4.6, $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{2,2}) \simeq \mathbb{R}(4)$.

24.5.1. Periodicità. Le algebre di Clifford reali verificano una proprietà di *periodicità* modulo 8. Specificamente, se diciamo *equivalenti* due superalgebre associative ed unitarie reali A_1 ed A_2 per cui si possano trovare due interi non negativi n_1, n_2 ed un isomorfismo di superalgebre $A_1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(n_1) \simeq A_2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(n_2)$, allora

$$\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}) \sim \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p',q'}) \text{ se } p-q \equiv p'-q' \pmod{8}.$$

Possiamo ottenere questo risultato come una conseguenza degli isomorfismi che stabiliremo nelle due proposizioni seguenti.

LEMMA 24.5.5. *Siano p, q, n tre interi non negativi. Allora*

$$(24.39) \quad \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p+4n,q}) \simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q+4n}).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $m = p+q+4n$ ed $e_1, \dots, e_{p+q}, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{4n}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^{p+4n,q}$ per cui e_1, \dots, e_{p+q} generi un sottospazio $\mathbb{R}^{p,q}$ ed $\epsilon_i^2 = -1$ per $1 \leq i \leq 4n$. Sia $\eta_{4n} = \epsilon_1 \cdots \epsilon_{4n}$ e poniamo $e_i = \epsilon_i \cdot \eta_{4n}$, per $1 \leq i \leq 4n$. Poiché $\eta_{4n}^2 = 1$ ed η_{4n} anticommute con gli ϵ_i , abbiamo $e_i^2 = 1$. Inoltre, gli e_i anticommutano tra loro e con gli e_j , per $1 \leq j \leq p+q$. Il sottospazio V di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p+4n,q})$ generato da $e_1, \dots, e_{p+q}, e_1, \dots, e_{4n}$, con la q definita da

$$v^2 = -q(v) \cdot 1_{\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p+4n,q})}, \quad \forall v \in V$$

è perciò quadratico di segnatura $(p, q+4n)$ e l'inclusione $V \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p+4n,q})$ si estende per la proprietà universale ad un isomorfismo di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q+4n})$ su $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p+4n,q})$. \square

PROPOSIZIONE 24.5.6. *Se p, p', q, q' sono interi non negativi, allora*

$$(24.40) \quad \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p',q'}) \text{ se } p+q=p'+q' \text{ e } p-q \equiv p'-q' \pmod{8}.$$

DIMOSTRAZIONE. La (24.40) è conseguenza della (24.39). Infatti, se p, p', q, q' sono interi non negativi con $p+q=p'+q'$ e $(p-q) \equiv (p'-q') \pmod{8}$, a meno di scambiare p con p' e q con q' , possiamo supporre che $(p-q) - (p'-q') = 8n$ con $n \geq 0$. Ricaviamo allora che $p = p' + 4n$, $q = q + 4n$. Per la (24.39) abbiamo

$$\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}) = \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p'+4n,q}) \simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p',q+4n}) = \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p',q'}). \quad \square$$

PROPOSIZIONE 24.5.7. *Se p, q, n sono tre interi non negativi, allora*

$$(24.41) \quad \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p+n,q+n}) \simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n,n}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq \mathbb{R}(2^n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}).$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\mathbb{R}^{n,n}$ è iperbolico, $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n,n})$ contiene un elemento di chiralità χ , che anticommute con i vettori di $\mathbb{R}^{n,n}$ ed ha quadrato 1. Consideriamo il sottospazio vettoriale $V = (\mathbb{R}^{n,n} \otimes 1) \oplus (\chi \otimes \mathbb{R}^{p,q})$ di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n,n}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$. Gli elementi

di V hanno grado dispari; i loro quadrati sono scalari reali e la forma quadratica q su V definita da

$$v^2 = -q(v) \cdot 1 \otimes 1, \quad \forall v \in V,$$

ha segnatura $(p+n, q+n)$. Per la proprietà universale, l'inclusione di V si prolunga in modo unico ad un omomorfismo $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p+n, q+n}) \rightarrow \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n, n}) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}^{p, q})$ di algebre associative unitarie \mathbb{Z}_2 -graduate. L'immagine contiene $\chi \otimes 1$, prodotto degli $e_i \otimes 1 \in V$ per una base ortonormale e_1, \dots, e_{2n} di $\mathbb{R}^{n, n}$ e quindi $1 \otimes w = (\chi \otimes w) \cdot (\chi \otimes 1)$, per ogni $w \in \mathbb{R}^{p, q}$, ed $\mathbb{R}^{n, n} \otimes 1$. Ne segue che l'omomorfismo, essendo surgettivo tra algebre reali della stessa dimensione, è un isomorfismo. \square

TEOREMA 24.5.8. *Se p, p', q, q' sono interi non negativi con $p-q \equiv p'-q' \pmod{8}$, e $(p+q)-(p'+q') = 2k \geq 0$, allora*

$$(24.42) \quad \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p, q}) \simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{k, k}) \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p', q'}) \simeq \mathbb{R}(2^k) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p', q'}).$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo ora che p, p', q, q' siano interi non negativi con $p-q \equiv p'-q' \pmod{8}$. Sia

$$\begin{cases} p-q = p'-q'+8n, \\ p+q = p'+q'+2k, \end{cases} \quad \text{con } n, k \in \mathbb{Z}. \quad \text{Allora } \begin{cases} p = p'+4n+k, \\ q = q'-4n+k \end{cases}$$

Otteniamo quindi

$$\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p, q}) = \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p'+4n+k, q'-4n+k}) \simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p'+k, q'+k}) \simeq \mathbb{R}(2^k) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p', q'}),$$

in cui il primo isomorfismo di superalgebre segue dalla Proposizione 24.5.6, il secondo dalla Proposizione 24.5.7. \square

24.5.2. Il teorema di classificazione. Per il Teorema 24.5.8, Il tipo di un'algebra di Clifford reale $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p, q})$, il fatto cioè che il commutante del suo ideale minimale non banale sia \mathbb{R}, \mathbb{C} od \mathbb{H} , è determinato dalla classe di resto di $(p-q) \pmod{8}$. Utilizzando le Proposizioni 24.5.1, 24.5.7, e la classificazione in §24.1 delle algebre di Clifford degli spazi quadratici positivi, otteniamo il seguente

TEOREMA 24.5.9 (Classificazione delle algebre di Clifford reali). *Siano p, q interi non negativi con $p+q=m>0$. Vale allora la tabella di isomorfismi di algebre \mathbb{Z}_2 -graduate:*

$p-q \pmod{8}$	$\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p, q}) \simeq$	rapp. matriciale
0	$\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{m/2, m/2})$	$\mathbb{R}(2^{m/2})$
1	$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{(m-1)/2, (m-1)/2})$	$\mathbb{C}(2^{(m-1)/2})$
2	$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{(m-2)/2, (m-2)/2})$	$\mathbb{H}(2^{(m-2)/2})$
3	$(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{(m-3)/2, (m-3)/2})$	$\mathbb{H}(2^{(m-3)/2}) \oplus \mathbb{H}(2^{(m-3)/2})$
4	$\mathbb{H}(2) \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{(m-4)/2, (m-4)/2})$	$\mathbb{H}(2^{(m-2)/2})$
5	$\mathbb{C}(2) \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{(m-3)/2, (m-3)/2})$	$\mathbb{C}(2^{(m-1)/2})$
6	$\mathbb{R}(2) \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{(m-2)/2, (m-2)/2})$	$\mathbb{R}(2^{m/2})$
7	$(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{(m-1)/2, (m-1)/2})$	$\mathbb{R}(2^{(m-1)/2}) \oplus \mathbb{R}(2^{(m-1)/2})$

Poiché le dimensioni delle algebre di Clifford ci permettono di determinare facilmente gli argomenti delle $\mathbb{R}(\cdot)$, $\mathbb{C}(\cdot)$, $\mathbb{H}(\cdot)$ della tabella, è sufficiente memorizzare la tabella semplificata

$p-q \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
tipo	\mathbb{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	\mathbb{H}	\mathbb{C}	\mathbb{R}	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

ESEMPIO 24.5.10. Un caso particolarmente importante per le applicazioni fisiche è quello delle algebre $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n,1})$ e $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{1,n})$ (di tipo spazio-tempo). La loro tabella semplificata è la seguente

$n \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
tipo di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n,1})$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	\mathbb{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	\mathbb{H}	\mathbb{C}	\mathbb{R}
tipo di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{1,n})$	\mathbb{C}	\mathbb{R}	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	\mathbb{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	\mathbb{H}

24.6. Sottoalgebre $\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^{p,q})$

Come vedremo nel Cap.XXV, le rappresentazioni spinoriali delle algebre di Lie $\mathfrak{o}_{\mathfrak{q}}(V)$ delle isometrie infinitesime degli spazi quadratici (V, \mathfrak{q}) sono restrizioni delle rappresentazioni sottoalgebre di Clifford $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$. È quindi interessante classificare specificamente tali algebre. Indichiamo nell'enunciato con "≈" un isomorfismo di algebre associative unitarie (che può non rispettare la \mathbb{Z}_2 -gradazione).

PROPOSIZIONE 24.6.1. Siano p, q interi non negativi con $p+q>0$. Allora

$$(24.43) \quad \mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^{p,q}) \approx \begin{cases} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p-1,q}), & \text{se } p > 0, \\ \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{q-1,p}), & \text{se } q > 0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $p>0$, possiamo fissare in $\mathbb{R}^{p,q}$ un vettore e_0 con $e_0^2=-1$ in $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$. Poiché

$$(e_0 \cdot u)^2 = -e_0^2 u^2 = u^2, \quad \forall u \in e_0^\perp,$$

gli elementi del sottospazio $V = \{e_0 \cdot u \mid u \in e_0^\perp\}$ di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ hanno per quadrato in $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ uno scalare reale. Con la forma $\mathfrak{q}_V(v) = -v^2$, otteniamo uno spazio quadratico (V, \mathfrak{q}_V) di segnatura $(p-1, q)$. Per la proprietà universale è determinato un unico omomorfismo di algebre associative unitarie $\Psi_V : \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p-1,q}) \rightarrow \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ che estende l'inclusione. Poiché gli elementi di V hanno grado pari, l'immagine di Ψ è contenuta in $\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^{p,q})$. Inoltre V genera $\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^{p,q})$ come algebra associativa unitaria, e perciò la Ψ_V è surgettiva e quindi un isomorfismo perché le due algebre hanno la stessa dimensione.

Se $q>0$, possiamo fissare un vettore ϵ_0 in $\mathbb{R}^{p,q}$ per cui $\epsilon_0^2=1$ in $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$. Poiché

$$(\epsilon_0 \cdot u)^2 = -\epsilon_0^2 u^2 = -u^2, \quad \forall u \in \epsilon_0^\perp,$$

gli elementi di $W = \{\epsilon_0 \cdot u \mid u \in \epsilon_0^\perp\} \subset \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ hanno quadrato scalare e , con la forma $\mathfrak{q}_W(w) = -w^2$, lo spazio quadratico (W, \mathfrak{q}_W) ha segnatura $(q-1, p)$. Per la proprietà universale otteniamo un unico omomorfismo di algebre associative unitarie $\Psi_W : \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{q-1,p}) \rightarrow \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ che estende l'inclusione. Poiché gli elementi di W hanno grado pari, l'immagine di Ψ_W è contenuta in $\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^{p,q})$. Inoltre W genera $\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^{p,q})$

come algebra associativa unitaria. Se ne conclude che la Ψ_W è surgettiva e quindi un isomorfismo perché le due algebre hanno la stessa dimensione.

La dimostrazione è completa. \square

COROLLARIO 24.6.2. *Se $p+q>0$, allora $\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq \mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^{q,p})$.*

DIMOSTRAZIONE. Scambiando tra loro, se necessario, p e q , possiamo supporre sia $p \geq q$. Allora $p > 0$ e, per la Proposizione 24.6.1, abbiamo

$$\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p-1,q}) \simeq \mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^{q,p}). \quad \square$$

Abbiamo ottenuto quindi la seguente classificazione

TEOREMA 24.6.3 (Classificazione delle algebre $\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^{p,q})$).

$p-q \pmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
tipo di $\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^{p,q})$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	\mathbb{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	\mathbb{H}	\mathbb{C}	\mathbb{R}

Qui, come nella tabella data in precedenza per le algebre di Clifford, \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} significa che la casella deve essere riempita con un $\mathbb{R}(\ell)$, $\mathbb{C}(\ell)$, $\mathbb{H}(\ell)$, ed $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ con $\mathbb{R}(\ell) \oplus \mathbb{R}(\ell)$, $\mathbb{H}(\ell) \oplus \mathbb{H}(\ell)$ in modo che la dimensione reale delle algebre considerate sia la dimensione 2^{p+q-1} di $\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^{p,q})$.

Gruppi ortogonali e spinoriali

I gruppi ortogonali non sono semplicemente connessi e non tutte le rappresentazioni lineari delle loro algebre di Lie si rialzano a rappresentazioni del gruppo. In particolare, le loro *rappresentazioni spinoriali* non si rialzano al gruppo ortogonale, ma ai gruppi spinoriali, che ne sono rivestimenti a due fogli. Sia gli spinori che gli elementi delle algebre di Lie ortogonali e del gruppo spinoriale si possono rappresentare all'interno delle algebre di Clifford.

25.1. Gruppi ortogonali e loro algebre di Lie

Dato uno spazio quadratico (V, \mathfrak{q}) , di dimensione finita m su \mathbb{K} , siano

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V) &= \{x \in \mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V) \mid \mathfrak{q}(x(v)) = \mathfrak{q}(v), \forall v \in V\}, \\ \mathbf{SO}_{\mathfrak{q}}(V) &= \{x \in \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V) \mid \det(x) = 1\}, \\ \mathfrak{o}_{\mathfrak{q}}(V) &= \{X \in \mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(V) \mid \mathfrak{q}'(Xv, v) = 0, \forall v \in V\}\end{aligned}$$

i suoi: *gruppo ortogonale*, *gruppo ortogonale speciale* ed *algebra di Lie delle isometrie infinitesime*.

Gruppi ortogonali reali. Le forme quadratiche reali si classificano, modulo isomorfismi, in base alla loro *segnatura*.

Sia (V, \mathfrak{q}) uno spazio quadratico reale.

Se \mathfrak{q} è definita, positiva o negativa, allora $\mathbf{SO}_{\mathfrak{q}}(V)$ è connesso e diffeomorfo al suo complemento $\mathcal{C}\mathbf{SO}(n) = \{x \in \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V) \mid \det(x) = -1\}$ in $\mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V)$. Il gruppo $\mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V)$ consiste perciò di due componenti connesse, diffeomorfe ad $\mathbf{SO}(n)$.

Se \mathfrak{q} è indefinita, allora $\mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V)$ ha quattro componenti connesse. Supponiamo abbia segnatura (p, q) , con $p \cdot q > 0$. Distinguiamo i vettori non nulli v di V in *positivi*, *negativi*, *isotropi* a seconda che $\mathfrak{q}(v)$ sia positivo, negativo, o nullo.

Fissiamo una base ortonormale e_1, \dots, e_m di V , ordinata in modo che \mathfrak{q} sia positiva su $V_+ = \langle e_1, \dots, e_p \rangle$ e negativa su $V_- = \langle e_{p+1}, \dots, e_m \rangle$. Se $a \in \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V)$, allora \mathfrak{q} è positiva su $a(V_+)$ e negativa su $a(V_-)$. In particolare, $V_- \cap a(V_+) = \{0\}$ e $V_+ \cap a(V_-) = \{0\}$ e quindi

$$a(e_1) \wedge \dots \wedge a(e_p) \wedge e_{p+1} \wedge \dots \wedge e_m \neq 0, \quad \text{ed} \quad e_1 \wedge \dots \wedge e_p \wedge a(e_{p+1}) \wedge \dots \wedge a(e_m) \neq 0.$$

Questa osservazione ci permette di definire i due sottogruppi normali

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_{\mathfrak{q}}^+(V) &= \{a \in \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V) \mid (a(e_1) \wedge \dots \wedge a(e_p) \wedge e_{p+1} \wedge \dots \wedge e_m) / (e_1 \wedge \dots \wedge e_m) > 0\}, \\ \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}^-(V) &= \{a \in \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V) \mid (e_1 \wedge \dots \wedge e_p \wedge a(e_{p+1}) \wedge \dots \wedge a(e_m)) / (e_1 \wedge \dots \wedge e_m) > 0\}.\end{aligned}$$

Se rappresentiamo l'elemento a di $\mathbf{O}_q(V)$ come una matrice nella base ortonormale e_1, \dots, e_m , i minori $D_+(a)$ delle prime p righe e colonne e $D_-(a)$ dalle ultime q righe e colonne sono entrambi diversi da zero. Le a di $\mathbf{O}_q^+(V)$ sono caratterizzate da $D_+(a) > 0$, quelle di $\mathbf{O}_q^-(V)$ da $D_-(a) > 0$.

Quindi $\mathbf{O}_q^+(V)$ è il gruppo delle trasformazioni ortogonali che *preservano l'orientazione dei sottospazi positivi massimali*, $\mathbf{O}_q^-(V)$ quello delle trasformazioni ortogonali che *preservano l'orientazione dei sottospazi negativi massimali*.

Ciascuno dei sottogruppi $\mathbf{SO}_q(V)$, $\mathbf{O}_q^+(V)$, $\mathbf{O}_q^-(V)$ ha indice due in $\mathbf{O}_q(V)$ e ne è quindi un sottogruppo normale.

La componente connessa $\mathbf{SO}_q^+(V)$ dell'identità di $\mathbf{O}_q(V)$ è l'intersezione di una coppia qualsiasi di questi sottogruppi:

$$\mathbf{SO}_q^+(V) = \mathbf{O}_q^+(V) \cap \mathbf{SO}_q(V) = \mathbf{O}_q^-(V) \cap \mathbf{SO}_q(V) = \mathbf{O}_q^+(V) \cap \mathbf{O}_q^-(V).$$

Nella base ortonormale descritta sopra, l'algebra $\mathfrak{o}_q(V)$ si rappresenta come l'algebra di matrici

$$(25.1) \quad \mathfrak{o}(p, q) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix} \middle| A \in \mathbb{R}^{p \times p}, A^\top = -A, B \in \mathbb{R}^{p \times q}, C \in \mathbb{R}^{q \times q}, C^\top = -C \right\}$$

ed abbiamo per $\mathbf{O}(p, q)$ la DECOMPOSIZIONE DI CARTAN, cioè il diffeomorfismo

$$(25.2) \quad \mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(q) \times \mathbb{R}^{p+q} \ni (x, y, B) \xrightarrow{\cong} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \exp \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}(p, q).$$

Simmetrie vettoriali e teorema di Cartan. Riprendiamo la discussione generale dei gruppi ortogonali su un qualsiasi campo \mathbb{K} di caratteristica zero.

DEFINIZIONE 25.1.1. Se $v_0 \in V$ è un vettore anisotropo, la

$$s_{v_0} : V \ni v \longrightarrow v - \frac{q'(v, v_0)}{q(v_0)} v_0 \in V$$

è una simmetria ortogonale, con determinante -1 , che si dice *di vettore* v_0 .

OSSERVAZIONE 25.1.2. Nel caso reale, una simmetria di vettore positivo appartiene ad $\mathbf{O}_q^-(V)$ ed una di vettore negativo ad $\mathbf{O}_q^+(V)$.

PROPOSIZIONE 25.1.3 (Cartan). *Ogni trasformazione ortogonale di uno spazio quadratico di dimensione finita m è prodotto di al più m simmetrie rispetto a vettori anisotropi¹.*

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per ricorrenza sulla dimensione m di V .

Se $m=1$, allora il gruppo $\mathbf{O}_q(V)$ contiene soltanto l'identità e la simmetria rispetto ad un vettore non nullo e quindi la tesi è banalmente verificata.

Supponiamo $m > 1$ e la tesi vera per spazi quadratici di dimensione minore di m . Sia $a \in \mathbf{O}_q(V)$. Se a fissa un vettore anisotropo v_0 , si restringe ad una trasformazione ortogonale di v_0^\perp , che per l'ipotesi induttiva è prodotto di al più $m-1$ simmetrie rispetto a vettori anisotropi di v_0^\perp . Queste si estendono a simmetrie vettoriali di V che lasciano fisso il vettore v_0 e la cui composizione dà a .

¹L'identità si considera, convenzionalmente, prodotto di 0 simmetrie vettoriali.

Se a non fissa nessun vettore anisotropo, ma vi è un vettore anisotropo v_0 per cui $w_0 = v_0 - a(v_0)$ sia ancora anisotropo, allora s_{w_0} , lasciando fisso $v_0 + a(v_0)$ e trasformando w_0 in $-w_0$, scambia tra loro v_0 ed $a(v_0)$. Quindi $s_{w_0} \circ a$ lascia fisso il vettore anisotropo v_0 ed è, per la discussione precedente, prodotto di al più $m-1$ simmetrie rispetto a vettori anisotropi. Quindi $a = s_{w_0} \circ (s_{w_0} \circ a)$ è prodotto di al più m simmetrie rispetto a vettori anisotropi.

Rimane da considerare il caso in cui a non lasci fisso nessun vettore anisotropo e $v-a(v)$ sia isotropo per ogni vettore anisotropo v . Poiché i vettori anisotropi sono un aperto di Zariski di V , ne segue che $v-a(v)$ è isotropo per ogni $v \in V$ e quindi $W = \{v-a(v) \mid v \in V\}$ è un sottospazio totalmente isotropo di V . Per ipotesi anche $W' = \{v \in V \mid a(v) = v\}$ è totalmente isotropo. Poiché W è l'immagine e W' il nucleo di $(\text{id}_V - a)$, le dimensioni di W e di W' sono complementari. Dal momento che la dimensione di ciascun sottospazio isotropo non può eccedere la metà della dimensione di V , lo spazio V ha dimensione pari $2n$ e ciascuno dei W, W' , dimensione n e $W = W^\perp, W' = W'^\perp$.

Abbiamo poi $W \subset W'^\perp = W'$, perché, se $a(w) = w$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}'(a(v) - v, w) &= \mathfrak{q}'(a(v), w) - \mathfrak{q}'(v, w) = \mathfrak{q}'(a(v), w) - \mathfrak{q}'(a(v), a(w)) \\ &= \mathfrak{q}'(a(v), w - a(w)) = 0. \end{aligned}$$

Quindi W e W' , avendo la stessa dimensione ed essendo contenuti l'uno nell'altro, coincidono. Essendo diversa dall'identità, a ha polinomio minimo $(\lambda - 1)^2$ e quindi, in particolare, determinante 1.

Se v_0 è un qualsiasi vettore anisotropo, $s_{v_0} \circ a$ ha allora determinante (-1) e, per la discussione precedente, deve essere prodotto di al più $2n$ simmetrie rispetto a vettori anisotropi. Le simmetrie non possono essere $2n$, ma al più $(2n-1)$, perché il prodotto di un numero pari di simmetrie avrebbe determinante $(+1)$. Da questo segue che a è prodotto di al più $m = 2n$ simmetrie vettoriali. \square

ESEMPIO 25.1.4. Se \mathfrak{q} è la forma quadratica su \mathbb{K}^{2n} associata a $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$, allora tutte le matrici $\begin{pmatrix} b^\top & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$, con $b \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, appartengono ad $\text{SO}_{\mathfrak{q}}(\mathbb{K}^{2n})$. Se b è unipotente, lo è anche a . In particolare, per ogni $1 \leq p \leq n$ possiamo trovare $a \in \text{SO}_{\mathfrak{q}}(\mathbb{K}^{2n})$ con polinomio minimo $(\lambda - 1)^p$.

Alcune proprietà delle algebre ortogonali. Sia (V, \mathfrak{q}) uno spazio quadratico di dimensione finita m su \mathbb{K} .

LEMMA 25.1.5. *L'algebra di Lie $\mathfrak{o}_{\mathfrak{q}}(V)$ delle isometrie infinitesime di (V, \mathfrak{q}) ha dimensione $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una base e_1, \dots, e_m di V e sia Q la matrice simmetrica non degenera di $\mathbb{K}^{m \times m}$ che rappresenta \mathfrak{q} in questa base. Una matrice $X \in \mathbb{K}^{m \times m}$ che rappresenti una trasformazione di $\mathfrak{o}_{\mathfrak{q}}(V)$ verifica

$$\mathfrak{q}'(v, Xv) = 2v^\top QXv = 0, \quad \forall v \in \mathbb{K}^m \iff QX \in \mathfrak{o}_m(\mathbb{K})$$

ove $\mathfrak{o}_m(\mathbb{K})$ è l'algebra di Lie delle matrici antisimmetriche $m \times m$ a coefficienti in \mathbb{K} , che ha dimensione $m(m-1)/2$. Poiché l'applicazione lineare $X \rightarrow QX$ è un isomorfismo lineare di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ in sé, anche $\mathfrak{o}_{\mathfrak{q}}(V)$, immagine inversa di $\mathfrak{o}_m(\mathbb{K})$ rispetto a quest'isomorfismo, ha la stessa dimensione. \square

Possiamo definire un isomorfismo lineare tra lo spazio $\Lambda^2 V$ dei bivettori di uno spazio ortogonale (V, \mathfrak{q}) e l'algebra $\mathfrak{o}_{\mathfrak{q}}(V)$ delle sue isometrie infinitesime.

Consideriamo l'applicazione bilineare

$$V \times V \ni (v_1, v_2) \rightarrow R_{v_1, v_2} \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V),$$

che associa alla coppia (v_1, v_2) la trasformazione

$$(25.3) \quad R_{v_1, v_2}(v) = \mathfrak{q}'(v_1, v)v_2 - \mathfrak{q}'(v_2, v)v_1, \quad \forall v \in V.$$

La R_{v_1, v_2} è un'isometria infinitesima, perché

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}'(R_{v_1, v_2}(v), v) &= \mathfrak{q}'(\mathfrak{q}'(v_1, v)v_2 - \mathfrak{q}'(v_2, v)v_1, v) \\ &= \mathfrak{q}'(v_1, v)\mathfrak{q}'(v_2, v) - \mathfrak{q}'(v_2, v)\mathfrak{q}'(v_1, v) = 0, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

La R è bilineare e si annulla sulle coppie (v, v) . Per la proprietà universale del prodotto esterno, si estende in modo unico ad un'applicazione lineare, che indichiamo ancora con R ,

$$(25.4) \quad R : \Lambda^2 V \rightarrow \mathfrak{o}_{\mathfrak{q}}(V).$$

PROPOSIZIONE 25.1.6. *L'applicazione R in (25.4) è un isomorfismo lineare.*

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo che R è iniettiva. Un elemento non nullo ζ di $\Lambda^2 V$ si può scrivere come una somma di bivettori

$$\zeta = v_1 \wedge v_2 + \cdots + v_{2r-1} \wedge v_{2r},$$

con v_1, \dots, v_{2r} linearmente indipendenti. Allora

$$R_{\zeta}(v) = \sum_{i=1}^r (\mathfrak{q}'(v_{2i-1}, v)v_{2i} - \mathfrak{q}'(v_{2i}, v)v_{2i-1})$$

e quindi, se $\mathfrak{q}'(v_1, v) \neq 0$, allora $R_{\zeta}(v) \neq 0$. Questo ci dice che $R_{\zeta} \neq 0$ se $\zeta \neq 0$ e quindi R è iniettiva. È un isomorfismo perché è anche surgettiva, in quanto entrambi gli spazi hanno la stessa dimensione. \square

25.2. Rappresentazioni spinoriali dell'algebra ortogonale

L'isomorfismo (25.4) della Proposizione 25.1.6 è compatibile con la proiezione dell'algebra di Grassmann sull'algebra di Clifford. Mostriamo che le derivazioni dell'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ che trasformano V in sé formano un'algebra riduttiva, il cui ideale semisemplice è formato dalle isometrie infinitesime.

Ricordiamo che una *derivazione* di una \mathbb{K} -algebra \mathbb{A} è un endomorfismo \mathbb{K} -lineare $D : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ che soddisfa l'identità di Leibnitz:

$$(25.5) \quad D(\xi_1 \cdot \xi_2) = D(\xi_1) \cdot \xi_2 + \xi_1 \cdot D(\xi_2), \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{A}.$$

Le derivazioni di \mathbb{A} formano una sotto- \mathbb{K} -algebra di Lie $\mathfrak{Der}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$ di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$.

Se \mathbb{A} è associativa, allora per ogni $\xi_0 \in \mathbb{A}$ l'applicazione lineare $D_{\xi_0} \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$ definita da

$$D_{\xi_0}(\xi) = [\xi_0, \xi] = \xi_0 \cdot \xi - \xi \cdot \xi_0, \quad \forall \xi \in \mathbb{A},$$

è una sua derivazione. Le derivazioni D_{ξ} , al variare di ξ in \mathbb{A} , si dicono *interne*; l'applicazione

$$D : \mathbb{A} \ni \xi \longrightarrow D_{\xi} \in \mathfrak{Der}(\mathbb{A})$$

è un omomorfismo dell'algebra di Lie $\text{Lie}(\mathbb{A})$ associata² ad \mathbb{A} nell'algebra di Lie $\mathfrak{Der}(\mathbb{A})$ delle derivazioni di \mathbb{A} . Il suo nucleo è il centro di \mathbb{A} e la sua immagine $\text{Int}(\mathbb{A})$ un ideale di $\mathfrak{Der}(\mathbb{A})$.

Sia (V, \mathfrak{q}) uno spazio vettoriale quadratico di dimensione finita m sul campo \mathbb{K} , che supponiamo di caratteristica zero e $\text{Lie}(\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V))$ l'algebra di Lie dell'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$: le parentesi di Lie in $\text{Lie}(\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V))$ sono il prodotto di commutazione

$$(25.6) \quad [\xi_1, \xi_2] = \xi_1 \cdot \xi_2 - \xi_2 \cdot \xi_1, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V).$$

L'omomorfismo naturale di algebre di Lie

$$(25.7) \quad \text{Lie}(\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)) \ni \xi \longrightarrow D_{\xi} \in \text{Int}(\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)) \subset \mathfrak{Der}(\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)),$$

ha come nucleo il centro $Z(\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V))$ di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$.

Ricordiamo che abbiamo definito $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ come un quoziente dell'algebra tensoriale $T(V)$ ed indicato con $\pi : \Lambda V \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ l'isomorfismo lineare ottenuto per restrizione della proiezione nel quoziente.

LEMMA 25.2.1. *L'immagine $\mathfrak{g}_{\mathfrak{q}}(V) = \pi(\Lambda^2 V)$ dello spazio dei tensori alternati di grado due è una sottoalgebra di Lie di $\text{Lie}(\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V))$ per cui vale l'inclusione*

$$(25.8) \quad [\mathfrak{g}_{\mathfrak{q}}(V), V] \subseteq V.$$

Vale la formula

$$(25.9) \quad [[v_1, v_2], v] = 2\mathfrak{q}'(v_2, v)v_1 - 2\mathfrak{q}'(v_1, v)v_2, \quad \forall v, v_1, v_2 \in V.$$

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo la (25.9). Abbiamo

$$\begin{aligned} [v_1, v_2] &= v_1 \cdot v_2 - v_2 \cdot v_1 = 2v_1 \cdot v_2 + \mathfrak{q}'(v_1, v_2) = -2v_2 \cdot v_1 - \mathfrak{q}'(v_1, v_2), \\ [[v_1, v_2], v] &= 2v_1 \cdot v_2 \cdot v - 2v \cdot v_1 \cdot v_2 = 2v_1 \cdot v_2 \cdot v + 2v_1 \cdot v \cdot v_2 + 2\mathfrak{q}'(v_1, v)v_2 \\ &= 2\mathfrak{q}'(v_1, v)v_2 - 2\mathfrak{q}'(v_2, v)v_1. \end{aligned}$$

Questo dimostra le (25.8), (25.9). Rimane da verificare che $\mathfrak{g}_{\mathfrak{q}}(V)$ è una sottoalgebra di Lie. Utilizzando la prima identità dimostrata all'inizio della dimostrazione, abbiamo per ogni $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$,

$$[[v_1, v_2], [v_3, v_4]] = [[[v_1, v_2], v_3], v_4] + [v_3, [[v_1, v_2], v_4]] \in \mathfrak{g}_{\mathfrak{q}}(V),$$

perché, per la (25.8), $[[v_1, v_2], v_3], [[v_1, v_2], v_4] \in V$. \square

PROPOSIZIONE 25.2.2. *Se $m = \dim_{\mathbb{K}} V \geq 2$, allora la (25.8) definisce una rappresentazione fedele di $\mathfrak{g}_{\mathfrak{q}}(V)$ ed un isomorfismo di $\mathfrak{g}_{\mathfrak{q}}(V)$ con l'algebra di Lie $\mathfrak{o}_{\mathfrak{q}}(V)$ degli isomorfismi infinitesimi di (V, \mathfrak{q}) .*

² $\text{Lie}(\mathbb{A})$ è lo spazio vettoriale \mathbb{A} con l'operazione $[\xi_1, \xi_2] = \xi_1 \cdot \xi_2 - \xi_2 \cdot \xi_1$.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione che associa ad ogni elemento ξ di $\mathfrak{g}_q(V)$ la corrispondente derivazione interna D_ξ è iniettiva, perché, essendo $m \geq 2$, gli elementi non nulli di $\mathfrak{g}_q(V)$ non appartengono al centro di $\mathcal{C}\ell_q(V)$.

Resta da verificare che gli elementi di $\mathfrak{g}_q(V)$ definiscano isometrie infinitesime. Fissati $v_1, v_2 \in V$ abbiamo, per ogni $v \in V$,

$$\begin{aligned} -q'([v_1, v_2]v, v) &= [v_1, v_2] \cdot v \cdot v + v \cdot [v_1, v_2] \cdot v \\ &= 2q'(v_1, v) v_2 \cdot v - 2q'(v_2, v) v_1 \cdot v + 2q'(v_1, v) v \cdot v_2 - 2q'(v_2, v) v \cdot v_1 \\ &= q'(v_1, v)(v_2 \cdot v + v_2 \cdot v) - q'(v_2, v)(v_1 \cdot v + v \cdot v_1) = 0. \end{aligned}$$

Poiché $\mathfrak{g}_q(V)$ ed $\mathfrak{o}_q(V)$ hanno la stessa dimensione, la corrispondenza che abbiamo stabilito è un isomorfismo. \square

L'identificazione di $\mathfrak{o}_q(V)$ con $\mathfrak{g}_q(V)$ ci permette di restringere una qualsiasi rappresentazione lineare dell'algebra associativa $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$ ad una rappresentazione di $\mathfrak{o}_q(V)$.

Utilizzeremo nel seguito la notazione $\mathfrak{g}_q(V)$ invece di $\mathfrak{o}_q(V)$ quando vorremo sottolineare la descrizione esplicita di quest'algebra di Lie come sottoalgebra di $\text{Lie}(\mathcal{C}\ell_q(V))$.

DEFINIZIONE 25.2.3. Chiamiamo *spinoriali* le restrizioni ad $\mathfrak{o}_q(V) \simeq \mathfrak{g}_q(V)$ di rappresentazioni lineari di $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$.

LEMMA 25.2.4. $\{\xi \in \mathcal{C}\ell_q(V) \mid D_\xi(V) \subseteq V\} = \mathfrak{g}_q(V) \oplus Z(\mathcal{C}\ell_q(V))$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\xi \in \mathcal{C}\ell_q(V)$ con $D_\xi(V) = [\xi, V] \subseteq V$. È allora, per ogni $v \in V$,

$$-q'(D_\xi(v), v) = [\xi, v] \cdot v + v \cdot [\xi, v] = \xi \cdot v^2 - v \cdot \xi \cdot v + v \cdot \xi \cdot v - v^2 \cdot \xi = 0,$$

perché $v^2 = -q(v)$ è uno scalare e quindi commuta con ξ . Questo dimostra che la restrizione di D_ξ a V è un elemento di $\mathfrak{o}_q(V)$ e quindi, per la Proposizione 25.2.2, possiamo trovare $\xi_0 \in \mathfrak{g}_q(V)$ tale che D_ξ e D_{ξ_0} coincidano su V . La differenza $\xi - \xi_0$ commuta con tutti i vettori e perciò appartiene al centro di $\mathcal{C}\ell_q(V)$. \square

PROPOSIZIONE 25.2.5. *Il sottospazio $\mathfrak{g}_q(V)$ genera $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$ come algebra associativa unitaria.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni coppia di vettori v, w di V è

$$v \cdot w = \frac{1}{2} \{(v \cdot w - w \cdot v) + (v \cdot w + w \cdot v)\} = \frac{1}{2} ([v, w] - q'(v, w)) \in \mathfrak{g}_q(V) + \mathbb{K}.$$

Ciò mostra che la sottoalgebra associativa e unitaria di $\mathcal{C}\ell_q(V)$ che contiene $\mathfrak{g}_q(V)$ contiene tutti i prodotti $v \cdot w$ di coppie di vettori $v, w \in V$ e coincide perciò con $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$. \square

COROLLARIO 25.2.6. *Una rappresentazione lineare di $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$ come algebra associativa unitaria è irriducibile se e soltanto se lo è come rappresentazione lineare dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}_q(V)$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\mathfrak{g}_q(V) \subset \mathcal{C}\ell_q^0(V)$, è chiaro che una rappresentazione irriducibile per $\mathfrak{g}_q(V)$ lo è anche per $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$. Il viceversa è conseguenza della Proposizione 25.2.5. \square

25.3. Antinvoluzioni canoniche

Sia (V, \mathfrak{q}) uno spazio quadratico. In questo paragrafo introduciamo le antinvoluzioni canoniche della sua algebra di Clifford che utilizzeremo per definire i gruppi spinoriali e pinoriali.

Nel §24.3.2 abbiamo considerato l'involuzione α , associata alla struttura di superalgebra, definita sugli elementi omogenei da

$$\alpha(\xi) = (-1)^p \xi, \quad \text{se } \xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^p(V), \quad p=0, 1.$$

LEMMA 25.3.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché $\xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ soddisfi*

$$(25.10) \quad v \cdot \xi = \alpha(\xi) \cdot v, \quad \forall v \in V,$$

è che ξ sia uno scalare.

DIMOSTRAZIONE. Se ξ soddisfa (25.10), le sue componenti di grado pari e dispari soddisfano la (25.10). La sua parte di grado pari appartiene al centro di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ ed è perciò uno scalare per il Teorema 24.3.4. Per concludere la dimostrazione, basta dimostrare che un elemento ξ di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^1(V)$ che anticommuti con tutti i vettori è nullo. Fissato un qualsiasi vettore anisotropo v_0 di (V, \mathfrak{q}) , possiamo decomporre in modo unico ξ in una somma

$$\xi = \xi' + v_0 \cdot \xi'', \quad \text{con } \xi' \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^1(v_0^\perp), \quad \xi'' \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(v_0^\perp).$$

Poiché Gli elementi di grado pari di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(v_0^\perp)$ commutano, mentre quelli di grado dispari anticommutano, con v_0 , da

$$v_0 \cdot \xi' + v_0^2 \cdot \xi'' = v_0 \cdot \xi = -\xi \cdot v_0 = -\xi' \cdot v_0 - v_0 \cdot \xi'' \cdot v_0 = v_0 \cdot \xi' - v_0^2 \cdot \xi''$$

ricaviamo che $\xi''=0$. Fissiamo una base ortogonale e_1, \dots, e_m di (V, \mathfrak{q}) e scriviamo ξ come una combinazione lineare $\xi = \sum_{I \subset \{1, \dots, m\}} \lambda_I e_I$ dei monomi $e_I = e_{i_1} \cdots e_{i_n}$, per $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m$. Per ogni $1 \leq i \leq m$ fissato, $\xi = \xi'_i + e_i \cdot \xi''_i$ con $\xi'_i, \xi''_i \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(e_i^\perp)$ ed $e_i \cdot \xi''_i = \sum_{i \in I} \lambda_I e_I$ uguale a zero per la prima parte della dimostrazione. Da questo segue che $\xi=0$. \square

L'antinvoluzione $\tilde{\beta}$ di $\mathbf{T}(V)$, definita sui tensori di rango uno da

$$\tilde{\beta}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_k \otimes \cdots \otimes v_1, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall v_1, \dots, v_k \in V,$$

trasforma in sé l'ideale $\mathbf{J}_{\mathfrak{q}}$ e definisce quindi, per passaggio al quoziente, un'antinvoluzione β dell'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$. È l'unica antinvoluzione che lasci fissi tutti i vettori di V .

DEFINIZIONE 25.3.2. Chiamiamo *inversione* l'antinvoluzione β di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ che lascia fissi tutti i vettori di V .

Chiamiamo *coniugazione di Clifford* l'antinvoluzione γ che trasforma ciascun vettore di V nel suo opposto.

Le antinvoluzioni β e γ sono caratterizzate da

$$\begin{aligned} \beta(v_1 \cdots v_h) &= v_h \cdots v_1, \\ \gamma(v_1 \cdots v_h) &= (-1)^h v_h \cdots v_1, \end{aligned} \quad \forall v_1, \dots, v_h \in V.$$

LEMMA 25.3.3. L'involuzione α e le antinvoluzioni β e γ commutano tra loro ed $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha = \gamma$, $\alpha \circ \gamma = \gamma \circ \alpha = \beta$, $\beta \circ \gamma = \gamma \circ \beta = \alpha$. \square

OSSERVAZIONE 25.3.4. Poiché commutano tra loro, l'involuzione α e le antinvoluzioni β , γ ci permettono di definire dare una \mathbb{Z}_4 gradazione

$$\mathcal{Cl}_{\mathfrak{q}}(\mathbf{V}) = \sum_{p=0}^3 \mathcal{Cl}_{\mathfrak{q}}^{(p)}(\mathbf{V}), \quad \text{con } \mathcal{Cl}_{\mathfrak{q}}^{(p)}(\mathbf{V}) = \pi \left(\sum_{h=0}^{\infty} \Lambda^{4h+p} \mathbf{V} \right)$$

che raffina la \mathbb{Z}_2 -gradazione di superalgebra di $\mathcal{Cl}_{\mathfrak{q}}(\mathbf{V})$.

ESEMPIO 25.3.5. Le α , β e γ sono descritte, per $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{1,0}) \simeq \mathbb{C}$ e $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{2,0}) \simeq \mathbb{H}$, dalle tabelle

		1		i			1		i		j		κ
α		1		$-i$			1		i		$-j$		$-\kappa$
β		1		i			1		$-i$		j		κ
γ		1		$-i$			1		$-i$		$-j$		$-\kappa$

La γ definisce, sia sui complessi che sui quaternioni il coniugio usuale: da questo il nome di *coniugio di Clifford*.

L'involuzione α e le antinvoluzioni β , γ trasformano ogni pseudoscalare o in se stesso o nel suo opposto, secondo l'indicazione della tabella

		m		
		mod 4	α	β
involuzioni/antinvoluzioni		0	+	+
degli pseudoscalari		1	-	+
		2	+	-
		3	-	-

25.4. Gruppi spinoriali e loro rappresentazione vettoriale

Gli elementi invertibili di un'algebra associativa unitaria \mathbb{A} formano il suo *gruppo moltiplicativo* $\mathcal{U}(\mathbb{A})$.

Se \mathbb{A} ha dimensione finita, tutti i suoi elementi che non siano divisori di zero sono invertibili. Infatti, dire che ξ non è un divisore (sinistro) di zero equivale al fatto che $\ker\{L_{\xi} : \mathbb{A} \ni \zeta \rightarrow \xi \cdot \zeta \in \mathbb{A}\} = \{0\}$, e quindi che L_{ξ} sia un isomorfismo lineare di \mathbb{A} . In particolare, vi è un elemento $\eta \in \mathbb{A}$ per cui $\xi \cdot \eta = 1$. Allora $\xi \cdot (\eta \cdot \xi - 1) = 0$ e quindi anche $\eta \cdot \xi = 1$ ed η è sia inversa destra che sinistra di ξ .

DEFINIZIONE 25.4.1. Chiamiamo *gruppo di Clifford*³ di $(\mathbf{V}, \mathfrak{q})$ il sottogruppo

$$(25.11) \quad \mathbf{G}_{\mathfrak{q}} = \{\xi \in \mathcal{U}(\mathcal{Cl}_{\mathfrak{q}}(\mathbf{V})) \mid \xi \cdot \mathbf{V} \cdot \xi^{-1} = \mathbf{V}\} \subset \mathcal{U}(\mathcal{Cl}_{\mathfrak{q}}(\mathbf{V})).$$

³Questo gruppo fu introdotto da Lipschitz, che riscoprì in modo indipendente le algebre di Clifford e fu il primo a stabilire il loro legame con il gruppo ortogonale, introducendo il gruppo che ora chiamiamo *di Clifford*, nell'articolo del 1880: *Principes d'un calcul algébrique qui contient comme espèces particulières le calcul des quantités imaginaires et des quaternions*, C. R. Acad. Sci. Paris. 91: 619-621, 660-664.

Rudolf Otto Sigmund Lipschitz (1832 -1903) fu un matematico tedesco. Ha lasciato contributi importanti in analisi, geometria differenziale, teoria dei numeri, algebra e meccanica classica.

L'omomorfismo

$$(25.12) \quad \mathbf{G}_q \ni \xi \longrightarrow \rho_\xi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V), \quad \text{con } \rho_\xi : V \ni v \longrightarrow \alpha(\xi) \cdot v \cdot \xi^{-1} \in V$$

definisce la sua *rappresentazione vettoriale*.

PROPOSIZIONE 25.4.2. *Per ogni $\xi \in \mathbf{G}_q$, la ρ_ξ è un'isometria di (V, q) . La*

$$(25.13) \quad \rho : \mathbf{G}_q \ni \xi \longrightarrow \rho_\xi \in \mathbf{O}_q(V)$$

è un omomorfismo surgettivo di gruppi, con nucleo $\mathbb{K} = \{k \in \mathbb{K} \mid k \neq 0\}$.

Ogni vettore anisotropo v di V è un elemento di \mathbf{G}_q e ρ_v è la simmetria vettoriale di vettore v .

DIMOSTRAZIONE. Poiché α è un'involuzione di $\mathcal{C}\ell_q(V)$, abbiamo, per ogni $\xi \in \mathbf{G}_q$ ed ogni $v \in V$,

$$\rho_\xi(v) = -\alpha(\rho_\xi(v)) = -\alpha(\alpha(\xi) \cdot v \cdot \xi^{-1}) = -\xi \cdot \alpha(v) \cdot \alpha(\xi^{-1}) = \xi \cdot v \cdot \alpha(\xi^{-1}),$$

e quindi

$$q(\rho_\xi(v)) = -\rho_\xi(v) \cdot \rho_\xi(v) = -\alpha(\xi) \cdot v \cdot \xi^{-1} \cdot \xi \cdot v \cdot \alpha(\xi^{-1}) = -v^2 = q(v).$$

Questo dimostra che $\rho_\xi \in \mathbf{O}_q(V)$ per ogni $\xi \in \mathbf{G}_q$.

La ρ è chiaramente un omomorfismo di gruppi. Se $\xi \in \ker \rho$, abbiamo

$$\alpha(\xi) \cdot v \cdot \xi^{-1} = v \iff \alpha(\xi) \cdot v = v \cdot \xi, \quad \forall v \in V,$$

e quindi, per il Lemma 25.3.1, ξ è uno scalare. Questo prova che $\ker(\rho) = \mathbb{K}$.

Ogni vettore anisotropo v di V è un elemento invertibile di $\mathcal{C}\ell_q(V)$, con inversa $(-v/q(v))$ e per ogni $w \in V$ risulta

$$\begin{aligned} \rho_v(w) &= \alpha(v) \cdot w \cdot v^{-1} = (-v) \cdot w \cdot \frac{-v}{q(v)} = \frac{v \cdot w \cdot v}{q(v)} = \frac{-w \cdot v \cdot v + (w \cdot v + v \cdot w) \cdot v}{q(v)} \\ &= w - \frac{q'(w, v)}{q(v)} \cdot v. \end{aligned}$$

Quindi $v \in \mathbf{G}_q(V)$ e ρ_v è la simmetria di vettore v di (V, q) . Poiché le simmetrie rispetto a vettori anisotropi generano $\mathbf{O}_q(V)$ (Proposizione 25.1.3), l'omomorfismo ρ è surgettivo. \square

COROLLARIO 25.4.3. *Sia (V, q) uno spazio quadratico.*

- (1) *Ogni elemento di \mathbf{G}_q si può rappresentare come un prodotto $v_1 \cdots v_k$ di vettori anisotropi di (V, q) .*
- (2) *È $\mathbf{G}_q = \mathbf{G}_q^0 \cup \mathbf{G}_q^1$, con $\mathbf{G}_q^p = \mathbf{G}_q \cap \mathcal{C}\ell_q^p(V)$, per $p = 0, 1$.*
- (3) *Gli elementi di grado pari formano un sottogruppo normale \mathbf{G}_q^0 di indice due di \mathbf{G}_q , con $\rho(\mathbf{G}_q^0) = \mathbf{SO}_q(V)$, ed abbiamo le due successioni esatte*

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow \mathbf{G}_q \xrightarrow{\rho} \mathbf{O}_q(V) \longrightarrow 0, \\ 1 &\longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow \mathbf{G}_q^0 \xrightarrow{\rho} \mathbf{SO}_q(V) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché (Proposizione 25.1.3) ogni isometria di (V, \mathfrak{q}) è prodotto di $\ell \leq m$ simmetrie rispetto a vettori anisotropi, per la Proposizione 25.4.2, dato $\xi \in \mathbf{G}_{\mathfrak{q}}$, possiamo trovare vettori anisotropi v_1, \dots, v_ℓ (con $\ell \leq m$) tali che $\rho_\xi = \rho_{v_1} \circ \dots \circ \rho_{v_\ell} = \rho_{v_1 \dots v_\ell}$. Ancora per la Proposizione 25.4.2 otteniamo allora che $\xi = (k \cdot v_1) \dots v_\ell$, con $k \in \mathbb{K}^*$. Questo dimostra la (1). Le altre affermazioni seguono facilmente. \square

LEMMA 25.4.4. È

$$(25.14) \quad \xi \cdot \beta(\xi) = (-1)^p \xi \cdot \gamma(\xi) \in \mathbb{K}, \quad \forall \xi \in \mathbf{G}_{\mathfrak{q}}^p, \quad p = 0, 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la (1) del Corollario 25.4.3, ogni $\xi \in \mathbf{G}_{\mathfrak{q}}$ si scrive come un prodotto $\xi = v_1 \dots v_k$ di vettori anisotropi di (V, \mathfrak{q}) . Allora:

$$\xi \cdot \beta(\xi) = v_1 \dots v_k v_k \dots v_1 = (-1)^k \mathfrak{q}(v_1) \dots \mathfrak{q}(v_k),$$

$$\xi \cdot \gamma(\xi) = (-1)^k v_1 \dots v_k v_k \dots v_1 = \mathfrak{q}(v_1) \dots \mathfrak{q}(v_k). \quad \square$$

OSSERVAZIONE 25.4.5. In particolare, se (V, \mathfrak{q}) è uno spazio quadratico reale,

$$\begin{cases} \beta(v) \cdot v < 0, & \gamma(v) \cdot v > 0, & \text{se } v \text{ è positivo,} \\ \beta(v) \cdot v > 0, & \gamma(v) \cdot v < 0, & \text{se } v \text{ è negativo.} \end{cases}$$

I valori di $\xi \cdot \beta(\xi)$ e di $\xi \cdot \gamma(\xi)$, per un elemento $\xi \in \mathbf{G}_{\mathfrak{q}}$, sono determinati da $\rho(\xi)$, modulo il prodotto per un elemento di \mathbb{K}^2 .

LEMMA 25.4.6. All'inversione ed alla coniugazione di Clifford corrispondono omomorfismi di gruppi

$$(25.15) \quad N_\beta : \mathbf{G}_{\mathfrak{q}} \ni \xi \rightarrow \xi \cdot \beta(\xi) \in \mathbb{K}, \quad N_\gamma : \mathbf{G}_{\mathfrak{q}} \ni \xi \rightarrow \xi \cdot \gamma(\xi) \in \mathbb{K},$$

con $N_\beta(\xi) = N_\gamma(\xi)$ su $\mathbf{G}_{\mathfrak{q}}^0$. \square

DEFINIZIONE 25.4.7. Chiamiamo

$$(25.16) \quad \mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V) = \{\xi \in \mathbf{G}_{\mathfrak{q}}^0 \mid \xi \cdot \beta(\xi) = 1\} = \{\xi \in \mathbf{G}_{\mathfrak{q}}^0 \mid \xi \cdot \gamma(\xi) = 1\} \subset \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$$

gruppo spinoriale dello spazio vettoriale quadratico (V, \mathfrak{q}) e

$$(25.17) \quad \mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}^+(V) = \{\xi \in \mathbf{G}_{\mathfrak{q}} \mid \xi \cdot \gamma(\xi) = 1\},$$

$$(25.18) \quad \mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}^-(V) = \{\xi \in \mathbf{G}_{\mathfrak{q}} \mid \xi \cdot \beta(\xi) = 1\},$$

$$(25.19) \quad \mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}(V) = \{\xi \in \mathbf{G}_{\mathfrak{q}} \mid \xi \cdot \beta(\xi) = \pm 1\} = \{\xi \in \mathbf{G}_{\mathfrak{q}} \mid \xi \cdot \gamma(\xi) = \pm 1\}$$

i suoi gruppi pinoriali.

Poiché $\xi \cdot \beta(\xi) = (-1)^p \xi \cdot \gamma(\xi)$ se $\xi \in \mathbf{G}_{\mathfrak{q}}^p$ ($p=0, 1$) ed il gruppo spinoriale ed i diversi gruppi pinoriali sono definiti come immagini inverse di sottogruppi di \mathbb{K} mediante le (25.15), abbiamo

LEMMA 25.4.8. Valgono le

$$(25.20) \quad \mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V) = \mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}^+(V) \cap \mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}^-(V) \triangleleft \begin{cases} \mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}^+(V) \triangleleft \mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}(V) \triangleleft \mathbf{G}_{\mathfrak{q}}, \\ \mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}^-(V) \triangleleft \mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}(V) \triangleleft \mathbf{G}_{\mathfrak{q}}, \end{cases}$$

ove “ \triangleleft ” significa che il primo è sottogruppo normale del secondo. \square

La scelta dei diversi gruppi è giustificata da:

PROPOSIZIONE 25.4.9. *Se (V, \mathfrak{q}) è uno spazio quadratico complesso, allora gli omomorfismi*

$$(25.21) \quad \rho : \mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V) \longrightarrow \mathbf{SO}_{\mathfrak{q}}(V),$$

$$(25.22) \quad \rho : \mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}^{\pm}(V) \longrightarrow \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V)$$

sono surgettivi ed hanno nucleo $\{\pm 1\}$. Essi sono quindi rivestimenti a due fogli. \square

PROPOSIZIONE 25.4.10. *Se (V, \mathfrak{q}) è uno spazio quadratico reale, allora gli omomorfismi*

$$(25.23) \quad \rho : \mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V) \longrightarrow \mathbf{SO}_{\mathfrak{q}}^{+}(V),$$

$$(25.24) \quad \rho : \mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}^{+}(V) \longrightarrow \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}^{+}(V),$$

$$(25.25) \quad \rho : \mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}^{-}(V) \longrightarrow \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}^{-}(V),$$

$$(25.26) \quad \rho : \mathbf{Pin}(V, \mathfrak{q}) \longrightarrow \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V),$$

sono surgettivi ed hanno nucleo $\{\pm 1\}$. Essi sono quindi rivestimenti a due fogli. \square

OSSERVAZIONE 25.4.11. Nel caso in cui \mathfrak{q} sia definita positiva, $\mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}^{+}(V) = \mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ e $\mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}^{-}(V) = \mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}(V)$. Analogamente, se \mathfrak{q} è definita negativa, $\mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}^{-}(V) = \mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ e $\mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}^{+}(V) = \mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}(V)$. I quattro gruppi sono distinti quando \mathfrak{q} è indefinita.

PROPOSIZIONE 25.4.12. (1) *Se (V, \mathfrak{q}) è uno spazio ortogonale complesso di dimensione maggiore o uguale a due, oppure uno spazio ortogonale reale per una \mathfrak{q} che ha almeno due valori propri dello stesso segno, allora $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ è connesso.*

(2) *Se V è uno spazio ortogonale complesso di dimensione maggiore o uguale a tre, oppure uno spazio ortogonale reale per una \mathfrak{q} che ha almeno tre valori propri dello stesso segno e indice di Witt⁴ minore o uguale ad uno, allora $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ è semplicemente connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Sotto le ipotesi di (1), $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ è un rivestimento a due fogli di un gruppo di Lie connesso. Basta quindi dimostrare che i due elementi ± 1 di $\ker \rho$ possono essere congiunti con un cammino continuo in $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$. Per l'ipotesi fatta, possiamo scegliere in V due vettori v_0, v_1 , tra loro ortogonali, con $\mathfrak{q}(v_0) = \mathfrak{q}(v_1) \in \{\pm 1\}$. Allora

$$[0, \pi] \ni t \rightarrow \xi_t = v_0 \cdot (v_0 \cos t + v_1 \sin t) \in \mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$$

è un cammino di classe \mathcal{C}^{∞} con $\xi_0 = \mp 1$ e $\xi_{\pi} = \pm 1$.

La (2) è conseguenza di (1). Infatti, sotto le ipotesi di (2), $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ è un rivestimento connesso a due fogli di un gruppo di Lie con gruppo fondamentale \mathbb{Z}_2 . Dalla successione esatta di omotopia del rivestimento

$$0 \longrightarrow \pi_1(\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)) \longrightarrow \pi_1(\rho(\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V))) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0,$$

otteniamo che $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ è semplicemente connesso quando la sua immagine in $\mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V)$ sia connessa ed abbia gruppo fondamentale \mathbb{Z}_2 . \square

⁴Se \mathfrak{q} ha segnatura (p, q) , l'indice di Witt è $\min\{p, q\}$.

Da questo segue

TEOREMA 25.4.13. *Sia (V, \mathfrak{q}) uno spazio quadratico, reale o complesso, di dimensione finita maggiore o uguale a tre. Allora ogni rappresentazione lineare di dimensione finita dell'algebra ortogonale $\mathfrak{o}_{\mathfrak{q}}(V)$ si rialza in modo unico ad una rappresentazione lineare di $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$.*

DIMOSTRAZIONE. Se V è complesso, ciò è conseguenza del fatto che $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ è connesso e semplicemente connesso.

Supponiamo che V sia reale. Possiamo estendere \mathfrak{q} ad una forma quadratica $\mathfrak{q}^{\mathbb{C}}$ sullo spazio complesso $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$. Ogni rappresentazione lineare reale W di $\mathfrak{o}_{\mathfrak{q}}(V)$ si estende ad una rappresentazione lineare complessa $W^{\mathbb{C}}$ di $\mathfrak{o}_{\mathfrak{q}^{\mathbb{C}}}(V^{\mathbb{C}})$. Questa si rialza ad una rappresentazione lineare complessa di $\mathbf{Spin}(V^{\mathbb{C}}, \mathfrak{q}^{\mathbb{C}})$. Poiché $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ è una forma reale connessa di $\mathbf{Spin}(V^{\mathbb{C}}, \mathfrak{q}^{\mathbb{C}})$, la restrizione a $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ lascia $W \subset W^{\mathbb{C}}$ invariante e definisce quindi una rappresentazione reale di $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ su W . \square

DEFINIZIONE 25.4.14. Chiamiamo l'azione su V

$$(25.27) \quad (\xi, v) \longrightarrow \xi * v = \alpha(\xi) \cdot v \cdot \xi^{-1},$$

rappresentazione vettoriale di $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ (o di $\mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}(V)$, $\mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}^{\pm}(V)$).

OSSERVAZIONE 25.4.15. Se $\xi \in \mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$, allora $\alpha(\xi) = \xi$ e quindi è

$$\xi * v = \xi \cdot v \cdot \xi^{-1}, \quad \forall \xi \in \mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V), \quad \forall v \in V.$$

25.5. Rappresentazione spinoriale

Sia (V, \mathfrak{q}) uno spazio quadratico, di dimensione finita m sul campo \mathbb{K} e $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ la sua algebra di Clifford. Poiché abbiamo definito $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ come un sottogruppo del gruppo dei suoi elementi invertibili, le rappresentazioni di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$ si restringono a rappresentazioni del gruppo spinoriale.

Lo spazio V della rappresentazione vettoriale di $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ è contenuto nell'algebra di Clifford. È utile, anche per studiare i morfismi che coinvolgono rappresentazioni vettoriali e spinoriali, considerare anche le rappresentazioni spinoriali come sottorappresentazioni delle rappresentazioni irriducibili delle algebre di Clifford.

DEFINIZIONE 25.5.1. Chiamiamo *spinoriale* la restrizione a $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ di una rappresentazione irriducibile di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$.

Chiamiamo⁵ *pinoriali* le rappresentazioni irriducibili delle algebre di Clifford.

Il Teorema 24.3.5 ci dà l'informazione essenziale sulle rappresentazioni pinoriali:

- Se m è pari, allora $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ è semplice centrale ed ha, modulo equivalenza, un'unica rappresentazione pinoriale P , il cui commutante è un'estensione centrale di \mathbb{K} .

⁵Anche per l'origine del nome, vedi [3].

- Se m è dispari con $\delta(q) \neq 1$, allora $\mathcal{C}\ell_q(V)$ è semplice ed ha, a meno di equivalenza, un'unica rappresentazione pinoriale P , il cui commutante è un'estensione centrale di un'estensione quadratica di \mathbb{K} .
- Quando m è dispari e $\delta(q)=1$, allora $\mathcal{C}\ell_q(V)$ è somma diretta di due ideali bilateri \mathcal{I}_\pm , che sono algebre unitarie semplici. Ciascuno di essi definisce una rappresentazione pinoriale P_\pm . Le P_\pm non sono equivalenti come rappresentazioni di $\mathcal{C}\ell_q(V)$, ma lo sono come rappresentazioni di $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$, perché si possono realizzare mediante due ideali sinistri minimali che sono scambiati tra loro dall'involuzione α .

Ricordiamo (vedi il Corollario 25.2.6) che le rappresentazioni spinoriali di $\mathbf{Spin}_q(V)$ (o di $\mathfrak{so}_q(V)$) sono irriducibili se e soltanto se lo sono come rappresentazioni di $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$.

Come algebra associativa unitaria, $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$ è isomorfa all'algebra di Clifford di uno spazio quadratico di dimensione $(m-1)$. Possiamo quindi utilizzare ancora il Teorema 24.3.5 per ottenere informazioni sulle sue rappresentazioni irriducibili. Abbiamo la situazione seguente. allora

- Se m è dispari, $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$ è semplice centrale e c'è quindi modulo equivalenza, un'unica rappresentazione spinoriale. A seconda che $\mathcal{C}\ell_q(V)$ sia o no semplice, possono darsi i due casi:
 - (1) C'è un'unica rappresentazione pinoriale, che si decompone nella somma diretta di due rappresentazioni spinoriali equivalenti;
 - (2) Ci sono due rappresentazioni pinoriali non equivalenti, ciascuna isomorfa alla rappresentazione spinoriale.
- Se m è pari, $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$ può essere semplice, con centro uguale ad un'estensione quadratica di \mathbb{K} , oppure somma di due ideali bilateri semplici centrali, mentre $\mathcal{C}\ell_q(V)$ è sempre semplice centrale. Si possono allora produrre i seguenti casi:
 - (1) La rappresentazione pinoriale e spinoriale coincidono;
 - (2) La rappresentazione pinoriale è somma diretta di due rappresentazioni spinoriali equivalenti;
 - (3) La rappresentazione pinoriale è somma diretta di due rappresentazioni spinoriali non equivalenti.

DEFINIZIONE 25.5.2. Quando la rappresentazione spinoriale S si decompone nella somma diretta di due rappresentazioni irriducibili non equivalenti S^+ ed S^- di $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$, chiamiamo ciascuna di esse *rappresentazione di spin* $\frac{1}{2}$.

25.6. Forme bilineari invarianti

25.6.1. Forma di traccia in un'algebra associativa unitaria di dimensione finita. Sia A un'algebra associativa e unitaria di dimensione finita sul campo \mathbb{K} . Ricordiamo (vedi [11, A.III.9.3]) che *traccia*, *norma* e *polinomio caratteristico* di un suo elemento a si definiscono come la traccia, il determinante ed il polinomio caratteristico della corrispondente traslazione a sinistra L_a , considerata come un

endomorfismo di \mathbb{A} :

$$(25.28) \quad \text{trac}(\mathbf{a}) := \text{trac}(L_{\mathbf{a}}), \quad \|\mathbf{a}\| := \det(L_{\mathbf{a}}), \quad p_{\mathbf{a}}(\lambda) := p_{L_{\mathbf{a}}}(\lambda).$$

La *forma di traccia*

$$\mathbb{A} \times \mathbb{A} \ni (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \longrightarrow \text{trac}(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) \in \mathbb{K}.$$

è bilineare e simmetrica⁶ ed il suo nucleo

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{A} \mid \text{trac}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{A}\}$$

un ideale bilatero. In particolare, la forma di traccia è non degenera se \mathbb{A} è semi-semplce.

LEMMA 25.6.1. *Sia \mathbb{A} un'algebra associativa e unitaria di dimensione finita, su cui la forma di traccia sia non degenera. Allora*

$$\text{trac}(\mathbf{a}) = \text{trac}(R_{\mathbf{a}}), \quad \|\mathbf{a}\| = \det(R_{\mathbf{a}}), \quad p_{R_{\mathbf{a}}}(\lambda) = p_{\mathbf{a}}(\lambda), \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{A}.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per ogni $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$, le traslazioni a destra e a sinistra $R_{\mathbf{a}}$ ed $L_{\mathbf{a}}$ sono l'una l'aggiunta dell'altra rispetto alla forma di traccia. \square

Ricordiamo che una simmetria τ di \mathbb{A} (è cioè $\tau^2 = \text{id}_{\mathbb{A}}$) si dice

- un' *involutione* se $\tau(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = \tau(\mathbf{a}_1) \cdot \tau(\mathbf{a}_2)$, per ogni $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{A}$,
- un' *antinvolutione* se $\tau(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = \tau(\mathbf{a}_2) \cdot \tau(\mathbf{a}_1)$, per ogni $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{A}$.

LEMMA 25.6.2. *Sia \mathbb{A} un'algebra associativa unitaria di dimensione finita su \mathbb{K} , su cui la forma di traccia sia non degenera. Se τ è o un'involutione o un'antinvolutione di \mathbb{A} , allora*

$$(25.29) \quad \text{trac}(\tau(\mathbf{a})) = \text{trac}(\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{A}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se τ è un'involutione, allora $L_{\tau(\mathbf{a})} = \tau \circ L_{\mathbf{a}} \circ \tau$, se è un'antinvolutione, allora $L_{\tau(\mathbf{a})} = \tau \circ R_{\mathbf{a}} \circ \tau$. Poiché $\tau = \tau^{-1}$, ne ricaviamo che $L_{\tau(\mathbf{a})}$ è coniugato nel primo caso ad $L_{\mathbf{a}}$, nel secondo ad $R_{\mathbf{a}}$ e quindi, in particolare, hanno la stessa traccia di $L_{\mathbf{a}}$. \square

Ad un'antinvolutione τ associamo la forma bilineare

$$(25.30) \quad \mathfrak{q}'_{\tau}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \text{trac}(\tau(\mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{a}_2), \quad \forall \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{A}.$$

Le traslazioni a sinistra e a destra per gli elementi di \mathbb{A} verificano le formule di aggiunzione

$$(25.31) \quad \begin{cases} \mathfrak{q}'_{\tau}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \mathfrak{q}'_{\tau}(\mathbf{a}_1, \tau(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}_2), \\ \mathfrak{q}'_{\tau}(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}, \mathbf{a}_2) = \mathfrak{q}'_{\tau}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \cdot \tau(\mathbf{a})), \end{cases} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{A}.$$

LEMMA 25.6.3. *Per ogni antinvolutione τ , la forma bilineare \mathfrak{q}'_{τ} è simmetrica.*

DIMOSTRAZIONE. La simmetria è conseguenza del Lemma 25.6.2. \square

⁶La simmetria è conseguenza della proprietà associativa.

OSSERVAZIONE 25.6.4. L'insieme

$$(25.32) \quad \mathbf{G}_\tau(\mathbb{A}) = \{a \in \mathbb{A} \mid \tau(a) \cdot a = 1\}$$

è un gruppo contenuto in \mathbb{A} . La forma q'_τ è invariante per l'azione di $\mathbf{G}_\tau(\mathbb{A})$ su \mathbb{A} per moltiplicazione a sinistra o a destra; $\mathbf{G}_\tau(\mathbb{A})$ agisce cioè come un gruppo di isometrie di (\mathbb{A}, q_τ) .

PROPOSIZIONE 25.6.5. *Siano S ed S^* due ideali sinistri minimali e τ un'antinvolutione di \mathbb{A} . Allora la*

$$S \times S^* \ni (s, s^*) \longrightarrow q'_\tau(s, s^*) \in \mathbb{K}$$

è o identicamente nulla o un accoppiamento di dualità tra S ed S^* .

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{s \in S \mid q'_\tau(s, s^*) = 0, \forall s^* \in S^*\}$ che $\{s^* \in S^* \mid q'_\tau(s, s^*) = 0, \forall s \in S\}$ sono ideali sinistri di \mathbb{A} , e quindi o entrambi $\{0\}$, oppure uguali ad S, S^* , rispettivamente. \square

25.6.2. Forma di traccia nelle algebre di Clifford. Sia (V, q) uno spazio vettoriale quadratico, di dimensione finita m su \mathbb{K} .

NOTAZIONE 25.6.6. Fissata una base ortonormale e_1, \dots, e_m di (V, q) , indichiamo con $m = \{1, \dots, m\}$ l'insieme dei primi m interi positivi e con $(e_I)_{I \subseteq m}$ la base di $\mathcal{C}\ell_q(V)$ (come spazio vettoriale su \mathbb{K}) formata da $e_\emptyset = 1, e_{\{i\}} = e_i$ ed $e_I = e_{i_1} \cdots e_{i_h}$ se $I = \{i_1, \dots, i_h\}$ ed $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$.

LEMMA 25.6.7. *La forma di traccia su $\mathcal{C}\ell_q(V)$, definita da*

$$(25.33) \quad \mathcal{C}\ell_q(V) \times \mathcal{C}\ell_q(V) \ni (\xi_1, \xi_2) \longrightarrow \text{trac}(\xi_1 \cdot \xi_2) \in \mathbb{K}$$

è non degenere.

DIMOSTRAZIONE. La traccia su $\mathcal{C}\ell_q(V)$ è caratterizzata dalla formula

$$(25.34) \quad \text{trac} \left(\sum_{I \subseteq m} k_I e_I \right) = 2^m k_\emptyset, \quad \forall k_I \in \mathbb{K}.$$

È infatti $\text{trac}(e_\emptyset) = 2^m$, perché la traccia dell'identità su $\mathcal{C}\ell_q(V)$ è la sua dimensione. Per la linearità della traccia, è allora sufficiente verificare che $\text{trac}(e_I) = 0$ se $I \neq \emptyset$. Poiché

$$e_I \cdot e_J = c_{I, J} e_{I \ominus J}, \quad \text{con } c_{I, J} \in \mathbb{K} \text{ ed } I \ominus J = (I \cup J) \setminus (I \cap J) = (I \setminus J) \cup (J \setminus I),$$

se $I \neq \emptyset$, la matrice della moltiplicazione a sinistra per e_I ha, rispetto alla base canonica, tutti i termini sulla diagonale principale uguali a zero e quindi traccia nulla. Ne segue che la matrice che rappresenta la forma di traccia rispetto alla base (e_I) è diagonale, con tutti i termini sulla diagonale principale diversi da zero, e quindi non degenere. \square

DEFINIZIONE 25.6.8. Fissata un'antinvolutione τ di $\mathcal{C}\ell_q(V)$ che trasformi V in sé poniamo

$$(25.35) \quad q_\tau(\xi) = \frac{1}{2} \text{trac}(\tau(\xi) \cdot \xi), \quad q'_\tau(\xi_1, \xi_2) = \text{trac}(\tau(\xi_1) \cdot \xi_2), \quad \forall \xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{C}\ell_q(V).$$

Se τ è o l'involuzione o il coniugio di Clifford, allora la restrizione di q_τ a V è conforme alla q . Infatti,

$$\text{trac}(v \cdot w) = \frac{1}{2} \text{trac}(v \cdot w + w \cdot v) = -2^{m-1} q'(v, w), \quad \forall v, w \in V.$$

Dai Lemmi 25.6.3 e 25.6.7 ricaviamo

PROPOSIZIONE 25.6.9. *La forma q'_τ definita in (25.35) è bilineare simmetrica e non degenera.* \square

25.6.3. La forma canonica. Sia (V, q) uno spazio quadratico di dimensione finita m su \mathbb{K} . La sua algebra di Clifford è semplice se m è pari o, per m dispari, se $\delta(q) \neq 1$. In questo caso, $\mathcal{C}l_q(V)$ ha, a meno di equivalenza, un'unica rappresentazione lineare fedele irriducibile S (cf. la Proposizione 23.8.8). Se m è dispari e $\delta(q) = 1$, allora $\mathcal{C}l_q(V)$ è somma diretta di due suoi ideali bilateri semplici \mathcal{I}_\pm e ciascuna delle sue due rappresentazioni irriducibili S_\pm è l'unica (a meno di equivalenza) rappresentazione irriducibile di uno dei suoi due ideali \mathcal{I}_\pm .

Fissata una rappresentazione irriducibile S di $\mathcal{C}l_q(V)$, sia $S^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(S, \mathbb{K})$ il suo spazio duale⁷. Un'antinvolutione τ di $\mathcal{C}l_q(V)$ ci permette di definire una struttura di $\mathcal{C}l_q(V)$ -modulo su S^* ponendo

$$(25.36) \quad (\xi \cdot s^*)(s) = s^*(\tau(\xi) \cdot s), \quad \forall s^* \in S^*, \forall s \in S, \forall \xi \in \mathcal{C}l_q(V).$$

È infatti

$$\begin{aligned} (\xi_1 \cdot (\xi_2 \cdot s^*))(s) &= (\xi_2 \cdot s^*)(\tau(\xi_1) \cdot s) = s^*(\tau(\xi_2) \cdot \tau(\xi_1) \cdot s) \\ &= s^*(\tau(\xi_1 \cdot \xi_2) \cdot s) = ((\xi_1 \cdot \xi_2) \cdot s^*)(s), \quad \forall s \in S, \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{C}l_q(V). \end{aligned}$$

Indichiamo con S_τ^* il duale di S con la struttura di $\mathcal{C}l_q(V)$ -modulo descritta da (25.36). È possibile scegliere τ in modo che S_τ^* sia equivalente ad S . Infatti, non ci sono restrizioni nella scelta di τ quando $\mathcal{C}l_q(V)$ sia semplice, mentre, se m è dispari e $\delta(q) = 1$, dobbiamo scegliere un'antinvolutione che trasformi in sé ciascuno degli ideali \mathcal{I}_\pm . Ad esempio, possiamo prendere τ uguale a β o a γ a seconda che la sua classe di resto nella divisione per 4 sia 1 o 3, rispettivamente: in questo modo τ lascia fissi gli pseudoscalari e quindi trasforma in sé ciascuno degli ideali \mathcal{I}_\pm .

Poiché hanno la stessa dimensione e sono rappresentazioni irriducibili di una stessa algebra semplice, S ed S_τ^* sono equivalenti e possiamo perciò trovare un isomorfismo lineare

$$(25.37) \quad \phi_\tau : S \rightarrow S_\tau^*, \quad \text{con } \phi_\tau(\xi \cdot s) = \xi \cdot \phi_\tau(s), \quad \forall s \in S, \forall \xi \in \mathcal{C}l_q(V).$$

La ϕ_τ è univocamente determinato modulo la composizione con un elemento del commutante \mathbb{F} di S . Allora

$$(25.38) \quad b_\tau(s_1, s_2) = \phi_\tau(s_1)(s_2), \quad \text{per } s_1, s_2 \in S,$$

è una forma bilineare, anch'essa univocamente determinata modulo l'azione di \mathbb{F} .

⁷In generale il duale di una rappresentazione lineare di un'algebra associativa si può considerare come una rappresentazione lineare della sua algebra opposta.

DEFINIZIONE 25.6.10. Sia \mathbb{F} il commutante di \mathbf{S} . Chiamiamo \mathbb{F} -congruenti due forme bilineari b, b' su \mathbf{S} se si possono trovare un elemento ψ del commutante \mathbb{F} di \mathbf{S} tali che

$$(25.39) \quad b'(s_1, s_2) = b(\psi(s_1), s_2), \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbf{S}.$$

PROPOSIZIONE 25.6.11. Sia τ un'antinvolutione su \mathbf{S} . Una forma bilineare b_τ su \mathbf{S} , che soddisfi

$$(25.40) \quad b_\tau(\xi \cdot s_1, s_2) = b_\tau(s_1, \tau(\xi) \cdot s_2), \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbf{S}, \forall \xi \in \mathcal{L}_q(V)$$

è o identicamente nulla o non degenera.

Se b_τ è non degenera, allora l'applicazione

$$(25.41) \quad \phi_\tau : \mathbf{S} \ni s \longrightarrow s^* = \{p \rightarrow b_\tau(p, s)\} \in \mathbf{S}_\tau^*$$

è un'equivalenza di $\mathcal{L}_q(V)$ -moduli e la b_τ e ϕ_τ sono tra loro legate dalla (25.38).

La b_τ è \mathbb{F} -congruente ad una forma simmetrica o antisimmetrica.

DIMOSTRAZIONE. Fissata una forma b_τ che soddisfi (25.40),

sia $L = \{s \in \mathbf{S} \mid b_\tau(s, s') = 0, \forall s' \in \mathbf{S}\}$ che $R = \{s \in \mathbf{S} \mid b_\tau(s', s) = 0, \forall s' \in \mathbf{S}\}$

sono $\mathcal{L}_q(V)$ -moduli contenuti in \mathbf{S} . Per l'irriducibilità sono o entrambi nulli o entrambi uguali ad \mathbf{S} . Questo dimostra la prima affermazione.

La seconda si verifica direttamente.

Infine, osserviamo che le parti simmetrica ed antisimmetrica di b_τ

$$\begin{cases} b_\tau^s(s_1, s_2) = \frac{1}{2}(b_\tau(s_1, s_2) + b_\tau(s_2, s_1)), \\ b_\tau^a(s_1, s_2) = \frac{1}{2}(b_\tau(s_1, s_2) - b_\tau(s_2, s_1)), \end{cases} \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbf{S}$$

soddisfano entrambe la (25.40) e quindi sono o nulle, o non degeneri. Se sono entrambe nulle, non c'è niente da dimostrare. Se $b_\tau \neq 0$, almeno una di esse è non nulla e determina quindi la ϕ_τ a meno di un elemento del commutante \mathbb{F} ed è perciò \mathbb{F} -congruente a b_τ . \square

DEFINIZIONE 25.6.12. Una forma bilineare b_τ , definita dalle (25.36), (25.37), (25.38) e che sia o simmetrica o antisimmetrica si dice una *forma canonica* su \mathbf{S} associata all'antinvolutione τ .

COROLLARIO 25.6.13. Siano \mathbf{S} un ideale minimale non banale di $\mathcal{L}_q(V)$, τ un'antinvolutione di $\mathcal{L}_q(V)$ e ξ_0 un suo elemento. Allora

$$q'_\tau(s_1, s_2 \cdot \xi_0), \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbf{S}$$

è o identicamente nulla, o congruente ad una forma canonica su \mathbf{S} .

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato è una conseguenza immediata della Proposizione 25.6.11. \square

PROPOSIZIONE 25.6.14. La forma canonica su \mathbf{S} associata ad un'antinvolutione $\tau \in \{\beta, \gamma\}$ è $\mathbf{Spin}_q(V)$ -invariante: vale cioè

$$(25.42) \quad b_\tau(a \cdot s_1, a \cdot s_2) = b_\tau(s_1, s_2), \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbf{S}, \forall a \in \mathbf{Spin}_q(V).$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza della (25.40) e del fatto che $\tau(a) \cdot a = 1$ se $a \in \mathbf{Spin}_q(V)$. \square

25.7. Prodotto vettore di spinori

Sia (V, q) uno spazio quadratico di dimensione finita su \mathbb{K} ed S una rappresentazione irriducibile della sua algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_q(V)$. Identificando S ad un ideale sinistro minimale di $\mathcal{C}\ell_q(V)$, risulta definito un prodotto

$$(25.43) \quad V \times S \ni (v, s) \longrightarrow v \cdot s \in S$$

come restrizione a V dell'azione di $\mathcal{C}\ell_q(V)$ su S per moltiplicazione a sinistra.

DEFINIZIONE 25.7.1. Chiamiamo (25.43) *prodotto vettore per spinore*.

PROPOSIZIONE 25.7.2. *Il prodotto vettore per spinore è equivariante per l'azione di $\mathbf{Spin}_q(V)$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $v \in V$, $s \in S$ ed $a \in \mathbf{Spin}_q(V)$, allora

$$(a * v) \cdot (a \cdot s) = (a \cdot v \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot s) = a \cdot (v \cdot s). \quad \square$$

Sia b_τ una forma canonica su S , associata all'antinvoluzione τ , che supponiamo uguale o a β o a γ . Dati due spinori $s_1, s_2 \in S$, l'applicazione

$$V \ni v \longrightarrow b_\tau(v \cdot s_1, s_2) \in \mathbb{K}$$

è una forma lineare su V . Poiché q è per ipotesi non degenera, vi è un unico vettore $s_1 \otimes s_2$ in V per cui

$$(25.44) \quad q'(s_1 \otimes s_2, v) = b_\tau(v \cdot s_1, s_2), \quad \forall v \in V.$$

DEFINIZIONE 25.7.3. Chiamiamo l'applicazione

$$(25.45) \quad S \times S \ni (s_1, s_2) \longrightarrow s_1 \otimes s_2 \in V,$$

definita dalla (25.44) *prodotto vettore*.

LEMMA 25.7.4. *Il prodotto vettore di spinori è un morfismo di rappresentazioni del gruppo spinoriale. Vale cioè*

$$(25.46) \quad a \cdot s_1 \otimes a \cdot s_2 = a * (s_1 \otimes s_2), \quad \forall s_1, s_2 \in S.$$

DIMOSTRAZIONE. La (25.46) è equivalente a

$$b_\tau(v \cdot a \cdot s_1, a \cdot s_2) = q'_\tau(a * (s_1 \otimes s_2), v) = q'_\tau(s_1 \otimes s_2, a^{-1} * v),$$

che è verificata perché

$$q'_\tau(s_1 \otimes s_2, a^{-1} * v) = b_\tau((a^{-1} * v) \cdot s_1, s_2) = b_\tau(a^{-1} \cdot v \cdot a \cdot s_1, s_2) = b_\tau(v \cdot a \cdot s_1, a \cdot s_2).$$

Ciò completa la dimostrazione. \square

OSSERVAZIONE 25.7.5. Quando $\tau = \beta$, allora il prodotto vettore è simmetrico od antisimmetrico a seconda del fatto che b_β sia simmetrico od antisimmetrico.

Se invece $\tau = \gamma$, allora il prodotto vettore è simmetrico od antisimmetrico a seconda del fatto che b_β sia antisimmetrico o simmetrico.

Quindi, scegliendo come antinvoluzione τ o l'inversione o il coniugio di Clifford, otteniamo un prodotto vettore che è sempre o simmetrico od antisimmetrico.

25.8. Gruppi spinoriali e gruppi classici

In dimensione minore o uguale a sei, i gruppi spinoriali reali e complessi sono isomorfi a gruppi classici della *lista di Killing-Cartan*⁸

NOTAZIONE 25.8.1. Denotiamo con $\mathbf{Spin}(n, \mathbb{C})$ il gruppo spinoriale di uno spazio quadratico complesso di dimensione n , con $\mathbf{Spin}(n)$ il gruppo $\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{n,0})$ e con $\mathbf{Spin}(p, q)$ il gruppo $\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{p,q})$.

PROPOSIZIONE 25.8.2. *Per i gruppi spinoriali complessi di spazi quadratici complessi di dimensione minore o uguale a sei valgono gli isomorfismi:*

$$\begin{aligned} \mathbf{Spin}(1, \mathbb{C}) &\simeq \{\pm 1\}, & \mathbf{Spin}(4, \mathbb{C}) &\simeq \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}), \\ \mathbf{Spin}(2, \mathbb{C}) &\simeq \mathbb{C}, & \mathbf{Spin}(5, \mathbb{C}) &\simeq \mathbf{Sp}(2, \mathbb{C}), \\ \mathbf{Spin}(3, \mathbb{C}) &\simeq \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}), & \mathbf{Spin}(6, \mathbb{C}) &\simeq \mathbf{SL}_4(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Ricordiamo che il gruppo simplettico complesso $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ è definito da

$$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \mid a^T \Omega_n a = \Omega_n\},$$

per una matrice antisimmetrica non degenere Ω_n , di ordine $2n$, che possiamo scegliere, ad esempio, uguale a $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$. Scelte diverse della matrice Ω_n definiscono sottogruppi di $\mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ tra loro coniugati.

DIMOSTRAZIONE. $\mathbf{Spin}(1, \mathbb{C})$, $\mathbf{Spin}(2, \mathbb{C})$ I primi due isomorfismi si dimostrano facilmente usando la definizione.

$\mathbf{Spin}(3, \mathbb{C})$ Il determinante definisce su $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ una forma quadratica non degenere. L'azione aggiunta di $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ su $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ è per isometrie su $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), \det)$. La corrispondente mappa $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$ è un rivestimento connesso a due fogli e ci dà quindi un isomorfo di $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ con il gruppo spinoriale di $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), \det)$.

$\mathbf{Spin}(4, \mathbb{C})$ In modo analogo, possiamo considerare lo spazio quadratico complesso di dimensione quattro $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}), \det)$. Si verifica allora che l'azione

$$\mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}) \ni (a, b, Z) \rightarrow a \cdot Z \cdot b^{-1} \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$$

definisce un'applicazione $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{SO}_{\det}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})) \simeq \mathbf{SO}(4, \mathbb{C})$ che è un rivestimento a due fogli e ci permette quindi di identificare $\mathbf{Spin}(4, \mathbb{C})$ con il prodotto diretto di due copie di $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$.

⁸Wilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923) fu un matematico tedesco che ha lasciato contributi importanti nella teoria delle algebre e dei gruppi di Lie ed in geometria non euclidea. Fra il 1888 ed il 1890, Killing affrontò il problema di classificare le algebre di Lie complesse semplici di dimensione finita, come costruzione preliminare per la classificazione dei gruppi di Lie semplici. A lui si devono le nozioni di algebra e matrice di Cartan. Egli arrivò alla conclusione che, a parte un numero finito di eccezioni, le algebre semplici sono associate ai gruppi lineari speciali, ortogonali e simplettici.

Il matematico francese Èlie Cartan (1869-1951) introdusse la nozione di *sistema di radici* e riprese in modo sistematico, nella sua dissertazione del 1894, il lavoro di Killing. Scopri nel 1887 l'algebra eccezionale \mathfrak{g}_2 ed, utilizzando i sistemi di radici anche le $\mathfrak{f}_4, \mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8$, anche se la loro costruzione esplicita e la loro interpretazione geometrica sarebbe stato lavoro successivo di molti matematici.

Spin(6, ℂ) Lo spazio $\mathfrak{o}(4, \mathbb{C})$ delle matrici complesse antisimmetriche ha dimensione complessa 6. Lo *pfaffiano*⁹

$$pf(Z) = z_{1,2}z_{3,4} - z_{1,3}z_{2,4} + z_{1,4}z_{2,3}.$$

definisce sullo spazio $\mathfrak{o}(4, \mathbb{C})$ delle matrici 4×4 antisimmetriche

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & z_{1,2} & z_{1,3} & z_{1,4} \\ -z_{1,2} & 0 & z_{2,3} & z_{2,4} \\ -z_{1,3} & -z_{2,3} & 0 & z_{3,4} \\ -z_{1,4} & -z_{2,4} & -z_{3,4} & 0 \end{pmatrix}$$

una forma quadratica non degenera. Poiché

$$pf(XZX^T) = \det(X) \cdot pf(Z), \quad \forall X \in \mathfrak{gl}_4(\mathbb{C}), \quad \forall Z \in \mathfrak{o}(4, \mathbb{C}),$$

l'azione

$$\mathbf{SL}_4(\mathbb{C}) \times \mathfrak{o}(4, \mathbb{C}) \ni (a, Z) \rightarrow a \cdot Z \cdot a^T \in \mathfrak{o}(4, \mathbb{C})$$

è una rappresentazione di $\mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$ nel gruppo $\mathbf{SO}_{pf}(\mathfrak{o}(4, \mathbb{C})) \simeq \mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$. Si verifica che questo è un rivestimento a due fogli e quindi $\mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$ è isomorfo a **Spin(6, ℂ)**.

Spin(5, ℂ) Sia Ω una matrice 4×4 , complessa, antisimmetrica, non degenera. La restrizione all'iperpiano $V = \{Z \in \mathfrak{o}(4, \mathbb{C}) \mid \text{trac}(\Omega \cdot Z) = 0\}$ dello *pfaffiano* è una forma quadratica non degenera e quindi (V, pf) è uno spazio quadratico complesso di dimensione 5. Abbiamo

$$\{a \in \mathbf{SL}_4(\mathbb{C}) \mid a \cdot V \cdot a^T = V\} = \{a \in \mathbb{C}^{4 \times 4} \mid a^T \cdot \Omega \cdot a = \Omega\} = \mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$$

e quindi $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$ è il sottogruppo di $\mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$ che stabilizza Ω . Poiché la fibrazione $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$ è la restrizione della $\mathbf{SL}_4(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$, essa è ancora un rivestimento connesso a due fogli, e dunque $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$ è isomorfa a **Spin(5, ℂ)**. \square

PROPOSIZIONE 25.8.3. *I gruppi di Lie Spin(n) sono compatti e di dimensione $\frac{1}{2}n(n-1)$ per ogni intero $n \geq 1$, connessi se $n \geq 2$, semplicemente connessi se $n \geq 3$. Per $1 \leq n \leq 6$ valgono gli isomorfismi:*

$$\begin{aligned} \mathbf{Spin}(1) &\simeq \mathbf{O}(1) \simeq \{\pm 1\}, & \mathbf{Spin}(2) &\simeq \mathbf{U}(1) \simeq \mathbf{SO}(2), & \mathbf{Spin}(3) &\simeq \mathbf{SU}(2) \simeq \mathbf{Sp}(1), \\ \mathbf{Spin}(4) &\simeq \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2), & \mathbf{Spin}(5) &\simeq \mathbf{Sp}(2), & \mathbf{Spin}(6) &\simeq \mathbf{SU}(4). \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Tutte le proprietà si ricavano facilmente dal fatto che (25.23) è un rivestimento a due fogli, connesso se $n > 1$, e dalle proprietà topologiche dei gruppi speciali ortogonali.

Gli isomorfismi di **Spin(n)** dell'enunciato sono conseguenza della Proposizione 25.8.2 e del fatto che $\mathbf{SO}(n)$ e **Spin(n)** sono le forme compatte di $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ e **Spin(n, ℂ)**, rispettivamente. \square

⁹vedi il Cap.??.

PROPOSIZIONE 25.8.4. *Valgono i seguenti isomorfismi:*

$$\begin{aligned} \mathbf{Spin}(1, 1) &\simeq \mathbb{R}, \\ \mathbf{Spin}(1, 2) &\simeq \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}), & \mathbf{Spin}(2, 2) &\simeq \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}), \\ \mathbf{Spin}(1, 3) &\simeq \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}), & \mathbf{Spin}(2, 3) &\simeq \mathbf{Sp}(4, \mathbb{R}), & \mathbf{Spin}(3, 3) &\simeq \mathbf{SL}_4(\mathbb{R}). \\ \mathbf{Spin}(1, 4) &\simeq \mathbf{Sp}(1, 1), \\ \mathbf{Spin}(1, 5) &\simeq \mathbf{SL}_2(\mathbb{H}), \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. I gruppi $\mathbf{Spin}(1, 1)$, $\mathbf{Spin}(1, 2)$, $\mathbf{Spin}(2, 2)$, $\mathbf{Spin}(2, 3)$ e $\mathbf{Spin}(3, 3)$ sono le forme split di $\mathbf{Spin}(2, \mathbb{C})$, $\mathbf{Spin}(3, \mathbb{C})$, $\mathbf{Spin}(4, \mathbb{C})$, $\mathbf{Spin}(5, \mathbb{C})$, e $\mathbf{Spin}(6, \mathbb{C})$, rispettivamente. Gli isomorfismi dell'enunciato sono quindi conseguenza della Proposizione 25.8.2. Rimangono da verificare le affermazioni per i gruppi rimanenti.

Spin(1, 3) Consideriamo lo spazio $\mathfrak{p}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ \bar{z} & y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{R}^4$ delle matrici hermitiane simmetriche a coefficienti complessi. Il determinante definisce su $\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$ una forma quadratica non degenera di segnatura (1, 3). Abbiamo un'azione

$$\mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{p}_2(\mathbb{C}) \ni (a, P) \rightarrow a \cdot P \cdot a^* \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$$

di $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ mediante isometrie di $(\mathfrak{p}_2(\mathbb{C}), \det)$. Si verifica che la corrispondente applicazione $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{SO}^+(1, 3)$ è un rivestimento a due fogli e quindi $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ si identifica con $\mathbf{Spin}(1, 3)$.

Spin(1, 5) Possiamo ragionare in modo analogo, considerando le matrici di

$$\mathfrak{p}_2(\mathbb{H}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & q \\ \bar{q} & y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{H} \right\} \simeq \mathbb{R}^6.$$

Il determinante (che è ben definito su $\mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$) è una forma quadratica non degenera di segnatura (1, 5). Abbiamo un'azione

$$\mathbf{SL}_2(\mathbb{H}) \times \mathfrak{p}_2(\mathbb{H}) \ni (a, P) \rightarrow a \cdot P \cdot a^* \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$$

di $\mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$ mediante isometrie di $(\mathfrak{p}_2(\mathbb{H}), \det)$. Si verifica che la corrispondente applicazione $\mathbf{SL}_2(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbf{SO}^+(1, 5)$ è un rivestimento a due fogli e quindi $\mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$ si identifica con $\mathbf{Spin}(1, 5)$.

Spin(1, 4) Fissiamo la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e consideriamo lo spazio

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & q \\ -\bar{q} & -x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{H} \right\}$$

delle matrici M a coefficienti quaternioni per cui $M \cdot B$ è hermitiana simmetrica, vale cioè $M^* B = B M$, e che hanno traccia nulla. Il determinante definisce su V una forma quadratica non degenera, di segnatura (4, 1).

Possiamo identificare $\mathbf{Sp}(1, 1)$ con lo spazio delle matrici a di $\mathbb{H}^{2 \times 2}$ per cui $a^* B a = B$. Allora, per ogni $a \in \mathbf{Sp}(1, 1)$ l'applicazione r_a definita da

$$M \longrightarrow r_a(M) = a \cdot M \cdot a^{-1}$$

è un'isometria di (V, \det) . Infatti, se $M \in V$ ed $a \in \mathbf{Sp}(1, 1)$, otteniamo

$$\begin{aligned} [r_a(M)]^* \cdot B &= [a^*]^{-1} \cdot M^* \cdot a^* \cdot B = [a^*]^{-1} \cdot M^* \cdot B \cdot a^{-1} = [a^*]^{-1} \cdot B \cdot M \cdot a^{-1} \\ &= B \cdot a \cdot M \cdot a^{-1} = M \cdot r_a(M) \end{aligned}$$

e l'aggiunzione preserva sia il determinante che la traccia. Abbiamo così un omomorfismo $\mathbf{Sp}(1, 1) \rightarrow \mathbf{SO}^+(1, 4)$, che si verifica essere un rivestimento connesso a due fogli, che ci dà quindi l'isomorfismo $\mathbf{Spin}(1, 4) \simeq \mathbf{Sp}(1, 1)$.

Spin(2, 4) Siano $B = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{SU}(2, 2) = \{a \in \mathbf{SL}_4(\mathbb{C}) \mid a^* B a = B\}$. Consideriamo lo spazio vettoriale reale

$$V = \{X \in \mathfrak{o}(4, \mathbb{C}) \mid X^* = B \cdot X \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z & w & x \\ -z & 0 & y & \bar{w} \\ -w & -y & 0 & \bar{z} \\ -x & -\bar{w} & -\bar{z} & 0 \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}^6.$$

Se $a \in \mathbf{SU}(2, 2)$ ed $X \in V$, allora

$$B \cdot (a \cdot X \cdot a^{-1}) \cdot B = a^{*-1} \cdot B \cdot X \cdot B \cdot a^* = (a \cdot X \cdot a^{-1})^*.$$

Questo ci mostra che la rappresentazione aggiunta di $\mathbf{SU}(2, 2)$ trasforma V in V . La forma quadratica

$$\mathfrak{q}(X) = \text{trac}(X^2) = -2(x^2 + y^2) - 4\Re(z^2) - 4\Re(w^2), \quad \forall X = \begin{pmatrix} 0 & z & w & x \\ -z & 0 & y & \bar{w} \\ -w & -y & 0 & \bar{z} \\ -x & -\bar{w} & -\bar{z} & 0 \end{pmatrix} \in V$$

ha segnatura $(2, 4)$ e quindi $(V, \mathfrak{q}) \simeq \mathbb{R}^{2,4}$. L'applicazione

$$\mathbf{SU}(2, 2) \times V \ni (a, X) \rightarrow r_a(X) = a \cdot X \cdot a^{-1} \in V$$

definisce un'azione di $\mathbf{SU}(2, 2)$ su (V, \mathfrak{q}) mediante isometrie. La corrispondente applicazione $r : \mathbf{SU}(2, 2) \ni a \rightarrow r_a \in \mathbf{SO}^+(2, 4)$ è un rivestimento connesso a due fogli e quindi $\mathbf{SU}(2, 2)$ è isomorfo a $\mathbf{Spin}(2, 4)$. \square

PROPOSIZIONE 25.8.5. *Il sottogruppo compatto massimale di $\mathbf{Spin}(p, q)$, per $p, q \geq 1$, è isomorfo al quoziente di $\mathbf{Spin}(p) \times \mathbf{Spin}(q)$ per il sottogruppo $\{\pm(I_p, I_q)\}$, isomorfo a \mathbb{Z}_2 .* \square

OSSERVAZIONE 25.8.6. Per una trattazione dettagliata di alcuni gruppi spinoriali con segnatura $(1, n)$ rimandiamo al §31.4.

Spinori reali e complessi

Gli *spinori* di uno spazio quadratico (V, \mathfrak{q}) sono gli elementi di una rappresentazione lineare irriducibile S di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$. Mostriamo che, nei casi complesso e reale, possiamo sempre ricondurci ai due casi:

- La rappresentazione è di spin intero e lo spazio S degli spinori è il supporto di una rappresentazione pinoriale, cioè di una rappresentazione irriducibile di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$.
- Ci sono due rappresentazioni spinoriali S_{\pm} di spin $(1/2)$ che decompongono una rappresentazione pinoriale (irriducibile) $S = S_+ \oplus S_-$ di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$.

Vedremo che nel caso reale l'isomorfismo $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V) \simeq \mathcal{C}\ell_{-\mathfrak{q}}^0(V)$ è cruciale per ottenere un'inclusione nell'algebra di Clifford che ci permetta di definire in modo corretto i morfismi tra rappresentazioni spinoriali e vettoriali.

NOTAZIONE Per evitare inutili ripetizioni, fissiamo alcune notazioni che useremo in modo consistente nel seguito.

In tutto questo capitolo, indicheremo con n l'indice di Witt di uno spazio quadratico (V, \mathfrak{q}) di dimensione m , con U, W due suoi sottospazi totalmente isotropi massimali trasversali tra loro, cioè con $U \cap W = \{0\}$. La loro somma diretta $E = U \oplus W$ è un sottospazio iperbolico di (V, \mathfrak{q}) . L'ortogonale $Z = E^{\perp}$ è un *nucleo anisotropo* di (V, \mathfrak{q}) . Fissiamo basi u_1, \dots, u_n di U e w_1, \dots, w_n di W con

$$u_i \cdot w_j + w_j \cdot u_i = \delta_{i,j}, \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq n.$$

In $\Lambda U, \Lambda W \subset \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ consideriamo le basi $(u_I), (w_I)$ indicizzate dai sottoinsiemi I di $n = \{1, \dots, n\}$, definite dai monomi

$$u_I = \begin{cases} 1, & \text{se } I = \emptyset, \\ u_i, & \text{se } I = \{i\}, \text{ con } 1 \leq i \leq n, \\ u_{i_1} \cdots u_{i_h}, & \begin{cases} \text{se } I = \{i_1, \dots, i_h\} \text{ con} \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq n, \end{cases} \end{cases} \quad w_I = \begin{cases} 1, & \text{se } I = \emptyset, \\ w_i, & \text{se } I = \{i\}, \text{ con } 1 \leq i \leq n, \\ w_{i_1} \cdots w_{i_h}, & \begin{cases} \text{se } I = \{i_1, \dots, i_h\} \text{ con} \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq n, \end{cases} \end{cases}$$

I vettori $e_i = (u_i - w_i)$ ed $e_{n+i} = (u_i + w_i)$, per $1 \leq i \leq n$, formano una base ortonormale di E , con $e_i^2 = -1, e_{n+i}^2 = 1$ per $1 \leq i \leq n$. L'operatore di chiralità di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(E)$ è

$$\chi = e_1 \cdot e_{n+1} \cdots e_n \cdot e_{2n} = [u_1, w_1] \cdots [u_n, w_n], \quad \text{con } \chi^2 = 1.$$

Vale la formula

$$u_n \cdot \beta(w_n) = 2^{-n} \prod_{i=1}^n (1 - e_i \cdot e_{n+i}) \implies \text{trac}(u_n \cdot \beta(w_n)) = 2^{m-n}.$$

Se $d = \dim_{\mathbb{K}} Z > 0$, indicheremo con $\theta_1, \dots, \theta_d$ una base ortogonale di Z e con

$$\theta_I = \begin{cases} 1, & \text{se } I = \emptyset, \\ \theta_i, & \text{se } I = \{i\}, \text{ con } 1 \leq i \leq d, \\ \theta_{i_1} \cdots \theta_{i_h}, & \text{se } I = \{i_1, \dots, i_h\} \text{ con } 1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq d \end{cases}$$

la corrispondente base di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(Z) \subseteq \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$. Poniamo $c_d = \theta_{1, \dots, d} = \theta_1 \cdots \theta_d$.

26.1. Spinori degli spazi split

Nel §24.4 abbiamo descritto l'algebra di Clifford di uno spazio split (V, \mathfrak{q}) . Abbiamo ottenuto in particolare le sue rappresentazioni spinoriali. Ricordando che tutti gli spazi quadratici su un campo algebricamente chiuso sono split, questo esaurisce il caso degli spinori complessi. Ricordiamo ancora una volta (Corollario 25.2.6) che le rappresentazioni spinoriali irriducibili di $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ ed $\mathfrak{o}_{\mathfrak{q}}(V)$ coincidono con le rappresentazioni irriducibili di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$.

Dimensione dispari

Se (V, \mathfrak{q}) è split di dimensione dispari $2n+1$, allora Z ha dimensione 1 ed ha una base θ con $\theta^2=1$. Lo pseudoscalare $\eta = \theta \cdot \chi$ appartiene al centro, $\eta^2=1$ e l'algebra di Clifford di (V, \mathfrak{q}) è somma diretta dei suoi ideali bilateri (vedi §24.4.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_+ &= (1+\eta) \cdot \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) = \{\xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \mid \eta \cdot \xi = \xi\}, \\ \mathcal{I}_- &= (1-\eta) \cdot \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) = \{\xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \mid \eta \cdot \xi = -\xi\}. \end{aligned}$$

Ricordiamo (vedi il §24.4.2) che gli ideali sinistri P_+ ed P_- di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$, generati da

$$s_0^+ = (1+\eta) \cdot u_n \quad \text{ed} \quad s_0^- = (1-\eta) \cdot u_n,$$

rispettivamente, sono minimali e descrivono, modulo equivalenza, le due rappresentazioni irriducibili non equivalenti di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$.

La sottoalgebra $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$ e quindi il gruppo $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ hanno, modulo equivalenza, un'unica rappresentazione irriducibile, che si può descrivere con uno qualsiasi degli ideali P_{\pm} .

Il commutante di P_{\pm} , come modulo sia su $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ che su $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$, è il campo \mathbb{K} degli scalari.

Indichiamo con S la rappresentazione P_+ e scriviamo per semplicità s_0 invece di s_0^+ per il suo generatore. Poiché $m=2n+1$ è dispari,

$$\beta(\eta) = (-1)^n \eta = -\gamma(\eta), \quad \text{perché } \gamma(\eta) = (-1)^{n+1} \eta.$$

In particolare, se n è dispari, γ trasforma in sé gli ideali \mathcal{I}_+ ed \mathcal{I}_- , mentre β li scambia. Viceversa, se n è pari, β trasforma in sé gli ideali \mathcal{I}_+ ed \mathcal{I}_- , mentre γ li scambia. Per definire la forma canonica utilizzeremo perciò l'antinvolutione

$$\tau = \begin{cases} \beta, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \gamma, & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

dimodochè, da $\eta^2=1$, otteniamo che $(1+\eta) \cdot \tau(1+\eta) = (1+\eta)^2 = 2(1+\eta)$.

Posto $\mathbf{s}_0^* = (1 + \eta) \cdot u_n$, è

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}'_{\tau}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0^*) &= \text{trac}((1 + \eta)^2 \cdot \tau(w_n) \cdot u_n) = (-1)^n \text{trac}((1 + \eta)^2 \cdot \beta(w_n) \cdot u_n) \\ &= (-1)^n 2^{1-n} (-1)^n \text{trac}((1 + e_1 \cdot e_{n+1}) \cdots (1 + e_n \cdot e_{2n})) = -(-2)^{1+n} \neq 0. \end{aligned}$$

La forma \mathfrak{q}'_{τ} definisce perciò un accoppiamento di dualità tra \mathbf{S} e l'ideale sinistro \mathbf{S}^* generato da \mathbf{s}_0^* . Possiamo utilizzare l'isomorfismo di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ -moduli

$$(26.1) \quad \mathbf{S} \ni \mathbf{s} \longrightarrow \mathbf{s} \cdot u_n \in \mathbf{S}^*.$$

per definire la forma canonica (vedi §25.6.3).

PROPOSIZIONE 26.1.1. *La*

$$(26.2) \quad \mathbf{b}_{\tau}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \mathfrak{q}'_{\tau}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \cdot u_n), \quad \forall \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in \mathbf{S}.$$

è una forma canonica¹ su \mathbf{S} . Essa è invariante per $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ ed è

- simmetrica se $m \equiv 1, 7 \pmod{8}$,
- antisimmetrica se $m \equiv 3, 5 \pmod{8}$.

DIMOSTRAZIONE. Per la scelta di τ , la \mathbf{b}_{τ} è non degenera e quindi conforme alla forma canonica. L'invarianza rispetto al gruppo spinoriale segue dal fatto che τ è una delle antinvoluzioni canoniche.

Resta da verificare l'affermazione riguardo alla simmetria ed antisimmetria.

Gli elementi $(\mathbf{s}_I = u_I \cdot \mathbf{s}_0)_{I \subseteq \mathbb{N}}$ formano una base di \mathbf{S} . Abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\tau}(\mathbf{s}_I, \mathbf{s}_J) &= \text{trac}(\tau(w_n) \tau(u_I) (1 + \eta)^2 u_J \cdot w_n \cdot u_n) \\ &= 2 \cdot \text{trac}((1 + \eta) \cdot \tau(u_I) \cdot u_J \cdot w_n \cdot u_n \cdot \tau(w_n)) \\ &= 2 \cdot \text{trac}(\tau(u_I) \cdot u_J \cdot w_n \cdot u_n \cdot \tau(w_n)) \end{aligned}$$

perché $\xi = \eta \cdot \tau(u_I) \cdot u_J \cdot w_n \cdot u_n \cdot \tau(w_n) \in e_0 \cdot \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(E)$ ed ha quindi traccia nulla, in quanto la moltiplicazione a sinistra per ξ trasforma elementi di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(E)$ in elementi di $e_0 \cdot \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(E)$ e viceversa; commutando poi $u_i \cdot w_i$ con u_j e w_j se $i \neq j$ ed essendo $w_i \cdot u_i \cdot w_i = w_i$, $\tau(w_n) = (-1)^n w_n \cdots w_1$, otteniamo

$$w_n \cdot u_n \cdot \tau(w_n) = (-1)^n w_n$$

e quindi

$$\mathbf{b}_{\tau}(u_I \cdot \mathbf{s}_0, u_J \cdot \mathbf{s}_0) = 2 (-1)^n \text{trac}(\tau(u_I) \cdot u_J \cdot w_n)$$

Sia $\xi_{I,J} = \tau(u_I) \cdot u_J \cdot w_n$. È $\tau(u_I) = \pm u_I$. Perciò, se I e J non sono complementari in \mathbb{N} , allora $\xi_{I,J}^2 = 0$ e quindi la traslazione a sinistra per ξ è nilpotente ed ha traccia nulla. Se invece I e J sono complementari in $\{1, \dots, n\}$, allora $\tau(u_I) \cdot u_J = \pm u_n \cdots u_1$ e, da $e_i \cdot e_{n+i} = (u_i + w_i) \cdot (u_i - w_i) = 1 - 2u_i \cdot w_i$, ricaviamo

$$u_n \cdots u_1 \cdot w_1 \cdots w_n = (w_1 \cdot u_1) \cdots (w_n \cdot u_n) = 2^{-n} (1 - e_1 \cdot e_{n+1}) \cdots (1 - e_n \cdot e_{2n}),$$

che ha traccia 2^{n+1} . È dunque $\mathbf{b}_{\tau}(u_I \cdot \mathbf{s}_0, u_J \cdot \mathbf{s}_0) \neq 0$ se e soltanto se $J = I' = \mathbb{N} \setminus I$. Infine,

$$\tau(u_{I'}) \cdot u_I = \tau(\tau(u_I) \cdot u_{I'}) = \begin{cases} (-1)^{n(n-1)/2} \tau(u_I) \cdot u_{I'}, & \text{se } n \text{ è pari e } \tau = \beta, \\ (-1)^{n(n+1)/2} \tau(u_I) \cdot u_{I'}, & \text{se } n \text{ è dispari e } \tau = \gamma. \end{cases}$$

¹La \mathbf{b}_{τ} è invariante per l'azione $\mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}^+(V)$ se n è dispari e di $\mathbf{Pin}_{\mathfrak{q}}^-(V)$ se n è pari.

La b_τ è quindi simmetrica se $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$, cioè $m \equiv 1, 7 \pmod{8}$, antisimmetrica se $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$, cioè $m \equiv 3, 5 \pmod{8}$. \square

Poiché S è un ideale sinistro di $\mathcal{Cl}_q(V)$, è definito in particolare il prodotto

$$(26.3) \quad V \times S \ni (v, s) \longrightarrow v \cdot s \in S$$

di un vettore per uno spinore, che è un morfismo di rappresentazioni di $\mathbf{Spin}_q(V)$, perché

$$(a \cdot v) \cdot a \cdot s = (a \cdot v \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot s) = a \cdot (v \cdot s), \quad \forall a \in \mathbf{Spin}_q(V), \forall v \in V, \forall s \in S.$$

Una volta definito il prodotto per vettore, il *prodotto vettore* di due spinori è il morfismo

$$(26.4) \quad S \times S \ni (s_1, s_2) \longrightarrow s_1 \otimes s_2 \in V,$$

caratterizzato da

$$(26.5) \quad q'(s_1 \otimes s_2, v) = b_\tau(v \cdot s_1, s_2), \quad \forall s_1, s_2 \in S, \forall v \in V.$$

Poiché

$$\begin{aligned} b_\tau(v \cdot s_1, s_2) &= b_\tau(s_1, v \cdot s_2) && \text{se } n \text{ è pari,} \\ b_\tau(v \cdot s_1, s_2) &= -b_\tau(s_1, v \cdot s_2) && \text{se } n \text{ è dispari,} \end{aligned}$$

il prodotto (26.4), e la forma b_τ sono entrambi simmetrici se $m \equiv 1 \pmod{8}$, od antisimmetrici se $m \equiv 5 \pmod{8}$, mentre sono il primo simmetrico, la seconda antisimmetrica se $m \equiv 3 \pmod{8}$, il primo antisimmetrico e la seconda simmetrica se $m \equiv 7 \pmod{8}$.

Raccogliamo i risultati sulle forme split in dimensione dispari nella seguente tabella, in cui i *pinori* sono le rappresentazioni irriducibili di $\mathcal{Cl}_q(V)$.

Rappresentazioni spinoriali split in dimensione dispari

m mod 8	pinori	tipo	spinori	tipo	τ	b_τ	\otimes
1	P_+, P_-	\mathbb{K}	$S = P_\pm$	\mathbb{K}	β	simmm	simmm
3	P_+, P_-	\mathbb{K}	$S = P_\pm$	\mathbb{K}	γ	antisimm	simmm
5	P_+, P_-	\mathbb{K}	$S = P_\pm$	\mathbb{K}	β	antisimm	antisimm
7	P_+, P_-	\mathbb{K}	$S = P_\pm$	\mathbb{K}	γ	simmm	antisimm

Algebra di Cartan e pesi delle rappresentazioni. Gli elementi $h_i = \frac{1}{2}[u_i, w_i]$ sono la base di una sottoalgebra di Lie commutativa massimale \mathfrak{h} , cioè di una sottoalgebra di Cartan, di $\mathfrak{o}_q(V)$. Se $h(\lambda) = \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_n h_n$, con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, è un qualsiasi elemento di \mathfrak{h} , allora ogni rappresentazione lineare di dimensione finita di $\mathfrak{o}_q(V)$ ammette una base i cui elementi sono autovettori di tutti gli endomorfismi corrispondenti agli $h(\lambda)$. Gli autovalori sono funzioni lineari di $\lambda \in \mathbb{K}^n$ e si possono quindi descrivere come covettori (k_1, \dots, k_n) , che si dicono *pesi* della rappresentazione. I pesi di tutte le possibili rappresentazioni lineari di dimensione finita di $\mathfrak{o}_q(V)$ formano un reticolo in \mathbb{Q}^n . In questo caso, il reticolo è generato da \mathbb{Z}^n e dalle stringhe $(\pm \frac{1}{2}, \dots, \pm \frac{1}{2})$.

Indichiamo con $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ i covettori della base canonica.

Si verifica facilmente che

$$(26.6) \quad [h_i, u_j] = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq i, \\ u_i, & \text{se } j = i, \end{cases} \quad [h_i, w_j] = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq i, \\ -w_i, & \text{se } j = i, \end{cases} \quad [h_i, e_0] = 0.$$

Questo ci dice che $w_n, \dots, w_1, e_0, u_1, \dots, u_n$ sono autovettori ed $-\epsilon_n, \dots, -\epsilon_1, 0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ i pesi della rappresentazione vettoriale V .

Abbiamo scritto una base degli spinori nella forma $s_I = u_I \cdot (1 + \eta) w_n$. Poiché

$$h_i \cdot s_I = \begin{cases} \frac{+1}{2} s_I, & \text{se } i \in I, \\ \frac{-1}{2} s_I, & \text{se } i \notin I, \end{cases}$$

i pesi della rappresentazione spinoriale sono $\{\frac{1}{2}(\pm\epsilon_1 + \dots \pm \epsilon_n)\}$.

I pesi non nulli della rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{o}_q(V)$ sono le sue radici. Una base di autovettori è formata da

$[u_i, u_j], [w_i, w_j]$, per $1 \leq i < j \leq n$, $[u_i, w_j]$ per $1 \leq i, j \leq n$, $[e_0, u_i], [e_0, w_i]$, per $1 \leq i \leq n$.

$$\text{Abbiamo} \quad \begin{cases} [h(\lambda), [u_i, u_j]] = (\lambda_i + \lambda_j) \cdot [u_i, u_j] & \text{per } 1 \leq i < j \leq n, \\ [h(\lambda), [w_i, w_j]] = -(\lambda_i + \lambda_j) \cdot [w_i, w_j] & \text{per } 1 \leq i < j \leq n, \\ [h(\lambda), [u_i, w_j]] = (\lambda_i - \lambda_j) \cdot [u_i, w_j] & \text{per } 1 \leq i, j \leq n, \\ [h(\lambda), [e_0, u_j]] = \lambda_i \cdot [e_0, u_i] & \text{per } 1 \leq i \leq n, \\ [h(\lambda), [e_0, w_j]] = -\lambda_i \cdot [e_0, w_i] & \text{per } 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

e quindi le radici sono $\mathcal{R} = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. L'algebra split $\mathfrak{o}_q(V)$ di dimensione dispari si rappresenta con il *diagramma di Dynkin*² (vedi e.g. [12])



in cui i nodi corrispondono alle radici $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ per $1 \leq i < n$ ed $\alpha_n = \epsilon_n$. Nota che $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ formano una base dello spazio vettoriale su \mathbb{Q} generato dalle radici e che ogni altra radice in \mathcal{R} è una loro combinazione lineare, con coefficienti o tutti non negativi, o tutti non positivi.

I possibili pesi delle rappresentazioni lineari finite di $\mathfrak{o}_q(V)$ sono i covettori ω di \mathbb{R}^n per cui $(\alpha^\vee | \omega) = 2(\alpha | \omega) / \|\alpha\|^2 \in \mathbb{Z}$ per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$, ove $(\cdot | \cdot)$ e $\|\cdot\|$ sono il prodotto scalare e la norma standard in \mathbb{R}^n . Ciascuno dei pesi ω_i , definiti da $(\alpha_j^\vee | \omega_i) = \delta_{i,j}$ per $1 \leq j \leq n$, caratterizza una rappresentazione semplice *fondamentale* di $\mathfrak{o}_q(V)$. Il peso $\omega_1 = \epsilon_1$ corrisponde alla rappresentazione vettoriale, il peso $\omega_n = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n)$ alla rappresentazioni spinoriale S . Gli altri pesi fondamentali sono gli $\omega_j = (\epsilon_1 + \dots + \epsilon_j)$, per $2 \leq j < n$, che corrispondono alle rappresentazioni su $\Lambda^j(V)$. Osserviamo che anche $\Lambda^n(V)$ è una rappresentazione irriducibile, che corrisponde al quadrato simmetrico della rappresentazione spinoriale.

²Eugene Borisovich Dynkin (1924-2014), matematico russo, ha lasciato importanti contributi allo studio dei gruppi e delle algebre di Lie, oltre che al calcolo delle probabilità ed alla teoria dei processi di Markov.

Dimensione pari

Supponiamo che (V, \mathfrak{q}) sia iperbolico, con $\dim(V)=2n \geq 2$. Nel §24.4.1 abbiamo mostrato che, a meno di isomorfismi, c'è un'unica rappresentazione fedele irriducibile di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$, che (Teorema 24.4.5) può essere definita dal suo ideale sinistro minimale \mathbf{S} , generato da $w_{\mathfrak{h}}$. Poiché $w_{\mathfrak{h}}$ è omogeneo, l'ideale \mathbf{S} è \mathbb{Z}_2 -graduato e ciascuna delle componenti

$$\mathbf{S}^+ = \mathbf{S} \cap \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V), \quad \mathbf{S}^- = \mathbf{S} \cap \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^1(V)$$

è un $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$ -modulo. In particolare, \mathbf{S} non è irriducibile come rappresentazione di $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$.

ESEMPIO 26.1.2. L'algebra di Clifford del piano iperbolico (V, \mathfrak{q}) su \mathbb{K} è $\mathbb{K}(2)$. I vettori si identificano al sottospazio

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{K} \right\} = \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^1(V), \quad \text{mentre} \quad \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{K} \right\}.$$

Il vettore isotropo $w = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ genera l'ideale sinistro minimale

$$\mathbf{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{K} \right\}, \quad \text{con} \quad \mathbf{S}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{K} \right\}, \quad \mathbf{S}^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{K} \right\}.$$

L'elemento $\xi = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ appartiene a $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$ e $\xi \cdot \mathbf{S}^+ = \mathbf{S}^+$, $\xi \cdot \mathbf{S}^- = \{0\}$ ci dice che \mathbf{S}^+ ed \mathbf{S}^- non sono equivalenti come $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$ -moduli.

PROPOSIZIONE 26.1.3. *Le \mathbf{S}^+ ed \mathbf{S}^- sono due rappresentazioni lineari irriducibili non equivalenti di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$, di $\mathfrak{v}_{\mathfrak{q}}(V)$ e di $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$, con commutante \mathbb{K} .*

DIMOSTRAZIONE. Le due rappresentazioni sono irriducibili e di tipo \mathbb{K} perché $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$ è isomorfa all'algebra di Clifford di uno spazio quadratico split di dimensione $2n-1$. Per il Lemma 24.4.13, le sue rappresentazioni non nulle hanno dimensione maggiore o uguale a 2^{n-1} e quindi \mathbf{S}^+ ed \mathbf{S}^- , essendo rappresentazioni non banali di dimensione 2^{n-1} , sono irriducibili e di tipo \mathbb{K} .

Le due rappresentazioni di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$ non possono essere equivalenti perché $u_{\mathfrak{h}} \cdot w_{\mathfrak{h}}$ ha grado pari ed $u_{\mathfrak{h}} \cdot w_{\mathfrak{h}} \cdot \mathbf{S}^+ \neq \{0\}$, mentre $u_{\mathfrak{h}} \cdot w_{\mathfrak{h}} \cdot \mathbf{S}^- = \{0\}$. \square

La moltiplicazione a sinistra per vettori di V definisce un'applicazione di \mathbf{S} in sé che scambia tra loro \mathbf{S}^+ ed \mathbf{S}^- . Abbiamo cioè applicazioni bilineari

$$(26.7) \quad V \times \mathbf{S}^+ \ni (v, \mathfrak{s}) \rightarrow v \cdot \mathfrak{s} \in \mathbf{S}^-, \quad V \times \mathbf{S}^- \ni (v, \mathfrak{s}) \rightarrow v \cdot \mathfrak{s} \in \mathbf{S}^+.$$

Per definire una forma canonica su \mathbf{S} , possiamo utilizzare una qualsiasi delle antinvoluzioni β, γ . Osservando che

$$\mathfrak{q}'_{\beta}(w_{\mathfrak{h}}, u_{\mathfrak{h}}) = \text{trac}(\beta(w_{\mathfrak{h}}) \cdot u_{\mathfrak{h}}) = 2^n \neq 0,$$

ed utilizzando l'isomorfismo di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ -moduli

$$\mathbf{S} \ni \mathfrak{s} \longrightarrow \mathfrak{s} \cdot u_{\mathfrak{h}} \in \mathbf{S}^*,$$

possiamo definire la forma canonica nel modo seguente.

PROPOSIZIONE 26.1.4. *La*

$$b_\beta(s_1, s_2) = q'_\beta(s_1, s_2 \cdot u_n), \quad \forall s_1, s_2 \in S$$

è una forma canonica su S , invariante rispetto a $\mathbf{Pin}_q^-(V)$ e $\mathbf{Spin}_q(V)$. A seconda della classe di resto di m modulo 8, essa è

- [$m \equiv 0 \pmod{8}$] : simmetrica con $S^+ \perp S^-$;
- [$m \equiv 2 \pmod{8}$] : simmetrica, con S^+ ed S^- totalmente isotropi;
- [$m \equiv 4 \pmod{8}$] : simplettica con $S^+ \perp S^-$;
- [$m \equiv 6 \pmod{8}$] : simplettica con S^+ ed S^- lagrangiani.

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che b_β sia non degenera ed invariante rispetto a $\mathbf{Pin}_q^-(V)$ ed a $\mathbf{Spin}_q(V)$ è conseguenza delle proprietà di q_β e del fatto che essa stabilisce un accoppiamento di dualità tra S ed S^* .

Ci resta da verificare che le sue caratteristiche dipendono nel modo specificato dall'enunciato dalla classe di resto di m modulo 8. La discussione è analoga a quella svolta per la dimensione dispari nella dimostrazione della Proposizione 26.1.1.

I monomi $s_I = u_I \cdot w_n$, con $I \subseteq n$, formano una base di S . Siano $I, J \subseteq n$. Poiché $w_n \cdot u_n \cdot \beta(w_n) = w_n$, abbiamo:

$$\begin{aligned} b_\beta(s_I, s_J) &= \text{trac}(\beta(w_n) \cdot \beta(u_I) \cdot u_J \cdot w_n \cdot u_n) \\ &= \text{trac}(\beta(u_I) \cdot u_J \cdot w_n \cdot u_n \cdot \beta(w_n)) = \text{trac}(\beta(u_I) \cdot u_J \cdot w_n). \end{aligned}$$

Se i multiindici I, J non sono complementari in n , allora $\xi = \beta(u_I) \cdot u_J \cdot w_n$ ha quadrato nullo e la traccia della traslazione a sinistra per ξ è nulla. Questo dimostra che, se utilizziamo per la base $(s_I)_{I \subseteq n}$ l'ordinamento lessicografico degli indici I , la matrice $(b_\beta(s_I, s_J))_{I, J \in \mathbb{I}}$ è antidiagonale. Poiché per $I' = n \setminus I$ è $\beta(u_I) \cdot u_{I'} = \pm \beta(u_n)$ e $\text{trac}(\beta(u_n) \cdot w_n) = 2^n \neq 0$, tutti e soli i termini sull'antidiagonale di $(b_\beta(s_I, s_J))_{I, J \in \mathbb{I}}$ sono diversi da zero. In questo modo verificiamo ancora una volta che b_β è non degenera e che, se n è pari, S^+ ed S^- sono perpendicolari rispetto a b_β , mentre, se n è dispari, le restrizioni di b_β ad S^+ ed S^- sono identicamente nulle. Infine, se $I \subseteq n$ ed $I' = n \setminus I$, otteniamo

$$\beta(u_{I'}) \cdot u_I = \beta(\beta(u_I) \cdot u_{I'}) = (-1)^{n(n-1)/2} \beta(u_I) \cdot u_{I'}.$$

Da questa ricaviamo che $b_\beta(s_2, s_1) = (-1)^{n(n-1)/2} b_\beta(s_1, s_2)$ per ogni $s_1, s_2 \in S$, cioè b_β è simmetrica se $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ ed antisimmetrica se $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$. \square

OSSERVAZIONE 26.1.5. Costruendo in modo analogo la b_γ , troviamo che anch'essa è una forma canonica su S , invariante rispetto all'azione di $\mathbf{Pin}_q^+(V)$. La b_γ è antisimmetrica per $m \equiv 2 \pmod{8}$ e simmetrica per $m \equiv 6 \pmod{8}$, mentre ha lo stesso tipo di simmetria/antisimmetria di b_β se $m \equiv 0, 4 \pmod{8}$. Quindi, simmetria ed antisimmetria sono *intrinseche* per le forme canoniche su S se $m \equiv 0, 4 \pmod{8}$, non lo sono se $m \equiv 2, 6 \pmod{8}$. In questi ultimi due casi, come potremo osservare nel seguito, diventano intrinseche simmetria/antisimmetria del prodotto \otimes . Per questo, quando le classi di resto di m rispetto a 8 sono 2 e 6, diremo che la caratteristica della forma canonica è di definire una *dualità* tra S^+ ed S^- .

PROPOSIZIONE 26.1.6. *Il prodotto vettore $S \times S \rightarrow V$ è³*

- nullo su S^+ ed S^- e non degenera su $S^+ \times S^-$ ed $S^- \times S^+$ se $m \equiv 0, 4 \pmod 8$,
- nullo su $S^\pm \times S^\mp$ e simmetrico su $S^+ \times S^+$ e su $S^- \times S^-$ se $m \equiv 2 \pmod 8$,
- nullo su $S^\pm \times S^\mp$ ed antisimmetrico su $S^+ \times S^+$ e su $S^- \times S^-$ se $m \equiv 6 \pmod 8$.

□

Rappresentazioni spinoriali split in dimensione pari

m mod 8	pinori	tipo	spinori	tipo	τ	b_τ	\otimes
0	S	\mathbb{K}	$S^+ \oplus S^-$	\mathbb{K}	β	sim	$S^+ \times S^-$
2	S	\mathbb{K}	$S^+ \oplus S^-$	\mathbb{K}	β	dualità	sim
4	S	\mathbb{K}	$S^+ \oplus S^-$	\mathbb{K}	β	antisim	$S^+ \times S^-$
6	S	\mathbb{K}	$S^+ \oplus S^-$	\mathbb{K}	β	dualità	antisim

Algebra di Cartan e pesi delle rappresentazioni. Gli elementi $h_i = \frac{1}{2}[u_i, w_i]$ sono la base di una sottoalgebra di Lie commutativa massimale \mathfrak{h} di $\mathfrak{o}_q(V)$, cioè di una sua sottoalgebra di Cartan. Se $h(\lambda) = \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_n h_n$, con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, è un qualsiasi elemento di \mathfrak{h} , allora ogni rappresentazione lineare di dimensione finita di $\mathfrak{o}_q(V)$ ammette una base i cui elementi sono autovettori di tutti gli endomorfismi corrispondenti agli $h(\lambda)$. Gli autovalori sono funzioni lineari di $\lambda \in \mathbb{K}^n$ e si possono quindi descrivere come covettori (k_1, \dots, k_n) , che sono detti *pesi* della rappresentazione. I pesi di tutte le possibili rappresentazioni lineari di dimensione finita formano un reticolo in \mathbb{Q}^n . In questo caso, il reticolo è generato da \mathbb{Z}^n e dalle stringhe $(\pm \frac{1}{2}, \dots, \pm \frac{1}{2})$.

Indichiamo con $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ i covettori della base canonica.

Si verifica facilmente che

$$(26.8) \quad [h_i, u_j] = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq i, \\ u_i, & \text{se } j = i, \end{cases} \quad [h_i, w_j] = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq i, \\ -w_i, & \text{se } j = i. \end{cases}$$

Questo ci dice che $w_n, \dots, w_1, u_1, \dots, u_n$ sono gli autovettori e $-\epsilon_n, \dots, -\epsilon_1, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ i pesi della rappresentazione vettoriale V .

Abbiamo scritto una base degli spinori nella forma $s_I = u_I \cdot w_n$. Poiché

$$h_i \cdot s_I = \begin{cases} \frac{+1}{2} s_I, & \text{se } i \in I, \\ \frac{-1}{2} s_I, & \text{se } i \notin I, \end{cases}$$

gli s_I sono gli autovettori e $\{\frac{1}{2}(\pm \epsilon_1 + \dots \pm \epsilon_n)\}$ i pesi delle rappresentazioni spinoriali. Poiché il numero di autovalori positivi è la lunghezza di I , gli autovettori in S^+ hanno un numero di autovalori positivi pari se n è pari, dispari se n è dispari e quelli di S^- un numero di autovalori positivi pari se n è dispari, dispari se n è pari.

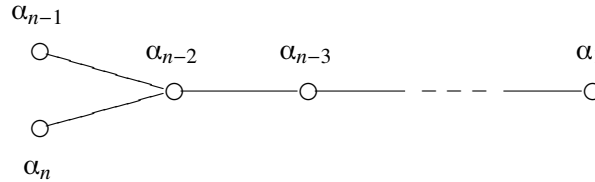
³Nel caso in cui m è nelle classi di resto 2 e 6, interagiscono tra loro spinori con uguale chiralità e simmetria ed antisimmetria del loro prodotto non cambia se definiamo la forma canonica utilizzando l'antinvolutione γ invece della β . Per le classi di resto 0 e 4, interagiscono tra loro solo spinori con la stessa chiralità e il prodotto definito utilizzando la γ è simmetrico quando quello definito con la β è antisimmetrico, e viceversa.

I pesi non nulli della rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{o}_q(V)$ sono le sue *radici*. Possiamo scegliere come base degli autovettori

$$[u_i, u_j], [w_i, w_j], \text{ per } 1 \leq i < j \leq n, [u_i, w_j] \text{ per } 1 \leq i, j \leq n.$$

Abbiamo
$$\begin{cases} [\mathfrak{h}(\lambda), [u_i, u_j]] = (\lambda_i + \lambda_j) \cdot [u_i, u_j] & \text{per } 1 \leq i < j \leq n, \\ [\mathfrak{h}(\lambda), [w_i, w_j]] = -(\lambda_i + \lambda_j) \cdot [w_i, w_j] & \text{per } 1 \leq i < j \leq n, \\ [\mathfrak{h}(\lambda), [u_i, w_j]] = (\lambda_i - \lambda_j) \cdot [u_i, w_j] & \text{per } 1 \leq i, j \leq n, \end{cases}$$

e quindi le radici sono $\mathcal{R} = \{\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. L'algebra ortogonale split $\mathfrak{o}_q(V)$ di dimensione pari si rappresenta con il diagramma di Dynkin (vedi e.g. [12])



con $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ for $1 \leq i < n$ and $\alpha_n = \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$.

I possibili pesi delle rappresentazioni lineari finite di $\mathfrak{o}_q(V)$ sono i covettori ω di \mathbb{R}^n per cui $(\alpha^\vee | \omega) = 2(\alpha | \omega) / \|\alpha\|^2 \in \mathbb{Z}$ per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$, ove $(\cdot | \cdot)$ e $\|\cdot\|$ sono il prodotto scalare e la norma standard in \mathbb{R}^n . Ciascuno dei pesi ω_i , definiti da $(\alpha_j^\vee | \omega_i) = \delta_{i,j}$ per $1 \leq j \leq n$, caratterizza una rappresentazione semplice *fondamentale* di $\mathfrak{o}_q(V)$. Il peso $\omega_1 = \epsilon_1$ corrisponde alla rappresentazione vettoriale, i pesi $\omega_{n-1} = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{n-1} - \epsilon_n)$ ed $\omega_n = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n)$ alle rappresentazioni spinoriali S^\pm . Gli altri pesi fondamentali sono gli $\omega_j = (\epsilon_1 + \dots + \epsilon_j)$, per $2 \leq j \leq n-2$, che corrispondono alle rappresentazioni su $\Lambda^j(V)$. La $\Lambda^{n-1}(V)$ è una componente irriducibile di $S^+ \otimes S^-$, mentre $\Lambda^n(V)$ ha due componenti irriducibili.

Tabella riassuntiva delle rappresentazioni spinoriali split

Possiamo raccogliere le caratteristiche delle rappresentazioni spinoriali delle algebre ortogonali degli spazi split (V, \mathfrak{q}) nella tabella seguente, da cui si può verificare che le caratteristiche della forma canonica e del prodotto vettore determinano univocamente la dimensione modulo 8 dello spazio quadratico (V, \mathfrak{q}) .

Rappresentazioni spinoriali split

m mod 8	pinori	tipo	spinori	tipo	τ	b_τ	\otimes
0	S	\mathbb{K}	$S^+ \oplus S^-$	\mathbb{K}	β	simm	$S^+ \times S^-$
1	P_+, P_-	\mathbb{K}	$S = P_\pm$	\mathbb{K}	β	simm	simm
2	S	\mathbb{K}	$S^+ \oplus S^-$	\mathbb{K}	β	dualità	simm
3	P_+, P_-	\mathbb{K}	$S = P_\pm$	\mathbb{K}	γ	antisimm	simm
4	S	\mathbb{K}	$S^+ \oplus S^-$	\mathbb{K}	β	antisimm	$S^+ \times S^-$
5	P_+, P_-	\mathbb{K}	$S = P_\pm$	\mathbb{K}	β	antisimm	antisimm
6	S	\mathbb{K}	$S^+ \oplus S^-$	\mathbb{K}	β	dualità	antisimm
7	P_+, P_-	\mathbb{K}	$S = P_\pm$	\mathbb{K}	γ	simm	antisimm

26.1.1. Un esempio. Il determinante delle matrici 2×2 è una forma quadratica per cui $(\mathbb{K}(2), \det)$ è uno spazio iperbolico di dimensione 4 su \mathbb{K} . Indichiamo con $X^\#$ l'aggiunta (classica) di X , cioè la trasposta della matrice dei cofattori:

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix}^\# = \begin{pmatrix} x_{2,2} & -x_{1,2} \\ -x_{2,1} & x_{1,1} \end{pmatrix}$$

L'aggiunta è un'antinvoluzione che verifica

$$X^\# \cdot X = X \cdot X^\# = \det(X) \cdot I_2.$$

Possiamo identificare l'algebra di Clifford dello spazio iperbolico di dimensione quattro a $\mathbb{K}(4)$ identificando \mathbb{K}^4 al sottospazio

$$V = \left\{ v_X := \begin{pmatrix} 0 & -X^\# \\ X & 0 \end{pmatrix} \middle| X \in \mathbb{K}(2) \right\}.$$

La struttura di superalgebra è definita dalla gradazione

$$(26.9) \quad \mathbb{K}^0(4) = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \middle| X, Y \in \mathbb{K}(2) \right\}, \quad \mathbb{K}^1(4) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{pmatrix} \middle| X, Y \in \mathbb{K}(2) \right\}.$$

Le antinvoluzioni canoniche sono date da

$$\beta \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^\# & -X_3^\# \\ -X_2^\# & X_4^\# \end{pmatrix}, \quad \gamma \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^\# & X_3^\# \\ X_2^\# & X_4^\# \end{pmatrix}$$

[Per provarlo basta verificare che β e γ sono antinvoluzioni e che β lascia fissi gli elementi di V , mentre γ ne cambia il segno.]

Per definire gli spinori possiamo fissare i sottospazi totalmente isotropi complementari di V

$$U = \left\{ v_X \middle| X = \begin{pmatrix} 0 & x_{1,2} \\ 0 & x_{2,2} \end{pmatrix}, x_{1,2}, x_{2,2} \in \mathbb{K} \right\}, \quad W = \left\{ v_X \middle| X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & 0 \\ x_{2,1} & 0 \end{pmatrix}, x_{2,1}, x_{2,2} \in \mathbb{K} \right\}.$$

Le loro basi

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono in dualità. Abbiamo

$$w_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad w_{\{1,2\}} \cdot u_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u_1 \cdot w_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 \cdot w_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_1 \cdot u_2 \cdot w_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

La matrice della forma b_β nella base

$$\mathbf{s}_0 = w_{\{1,2\}}, \quad \mathbf{s}_1 = u_1 \cdot w_{\{1,2\}}, \quad \mathbf{s}_2 = u_2 \cdot w_{\{1,2\}}, \quad \mathbf{s}_{\{1,2\}} = u_{\{1,2\}} \cdot w_{\{1,2\}},$$

è la matrice antisimmetrica non degenera

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $w_1 \cdot \mathbf{s}_{1,2} = \mathbf{s}_2$, $w_2 \cdot \mathbf{s}_{1,2} = -\mathbf{s}_1$, ricaviamo la tabella di moltiplicazione per il prodotto vettore $\mathbf{S}^+ \times \mathbf{S}^- \rightarrow V$ degli spinori (è $\mathbf{S}^+ = \langle \mathbf{s}_0, \mathbf{s}_{1,2} \rangle$, $\mathbf{S}^- = \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle$):

\otimes	\mathbf{s}_1	\mathbf{s}_2
\mathbf{s}_0	w_2	$-w_1$
$\mathbf{s}_{1,2}$	$-u_2$	u_1

26.2. Spinori degli spazi quadratici reali

Studiamo in questo paragrafo gli spinori degli spazi quadratici reali. Saremo in particolare interessati a discutere forma canonica e prodotto vettore. Nel §24.5 abbiamo dimostrato gli isomorfismi di superalgebre:

$$\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq \begin{cases} \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{n,n}), & \text{se } p-q \equiv 0 \pmod{8} \text{ ed } n=(p+q)/2, \\ \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{n+1,n}), & \text{se } p-q \equiv 1 \pmod{8} \text{ ed } n=(p+q-1)/2, \\ \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{n+2,n}), & \text{se } p-q \equiv 2 \pmod{8} \text{ ed } n=(p+q-2)/2, \\ \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{n+3,n}), & \text{se } p-q \equiv 3 \pmod{8} \text{ ed } n=(p+q-3)/2, \\ \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{n+4,n}), & \text{se } p-q \equiv 4 \pmod{8} \text{ ed } n=(p+q-4)/2, \\ \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{n,n+3}), & \text{se } p-q \equiv 5 \pmod{8} \text{ ed } n=(p+q-3)/2, \\ \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{n,n+2}), & \text{se } p-q \equiv 6 \pmod{8} \text{ ed } n=(p+q-2)/2, \\ \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{n,n+1}), & \text{se } p-q \equiv 7 \pmod{8} \text{ ed } n=(p+q-1)/2. \end{cases}$$

Per studiare le rappresentazioni spinoriali di $\mathbf{Spin}(p, q)$, utilizzeremo l'isomorfismo $\mathcal{Cl}^0(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq \mathcal{Cl}^0(\mathbb{R}^{q,p})$, che ci consente di realizzare $\mathbf{Spin}(p, q)$ come un sottogruppo del gruppo degli elementi invertibili di $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p,q})$ o di $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{q,p})$.

Come detto nell'introduzione al capitolo, questa inclusione è cruciale per definire i morfismi tra rappresentazioni spinoriali e vettoriali. In particolare richiediamo, nel caso di spin intero, che la rappresentazione spinoriale sia anche pinoriale e, nel caso di spin (1/2), che la somma diretta delle due rappresentazioni spinoriali sia una rappresentazione pinoriale. Come vedremo, questo si verifica quando le classi di resto di $p-q$ modulo otto siano 0, 3, 4, 5, 6, 7. Naturalmente 3 e 5 danno due descrizioni equivalenti, mentre nei casi 1 e 2 la rappresentazione pinoriale è somma diretta di due rappresentazioni spinoriali equivalenti.

Raccogliamo insieme nella seguente tabella i *tipi* delle rappresentazioni *pinoriali* P e *spinoriali* S, indicando con un asterisco quelle utili per discutere i morfismi di rappresentazioni.

Tipo delle rappresentazioni pinoriali e spinoriali reali

$p-q \pmod{8}$	0*	1	2	3*	4*	5	6*	7*
P	\mathbb{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	\mathbb{H}	\mathbb{C}	\mathbb{R}	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$
S	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	\mathbb{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	\mathbb{H}	\mathbb{C}	\mathbb{R}

Per descrivere in modo più sintetico gli ideali sinistri con cui rappresentiamo pinori e spinori, è conveniente aggiungere qualche ulteriore notazione a quelle all'inizio del capitolo. Fissato un elemento ξ di $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p,q})$ indichiamo con

- (ξ) l'ideale sinistro di $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p,q})$ generato da ξ ,
- $(\xi)_0$ il $\mathcal{Cl}^0(\mathbb{R}^{p,q})$ -modulo (a sinistra) generato da ξ ,
- $(\xi)^+ = (\xi) \cap \mathcal{Cl}^0(\mathbb{R}^{p,q})$, $(\xi)^- = (\xi) \cap \mathcal{Cl}^1(\mathbb{R}^{p,q})$,
- $\tilde{w}_\eta = (1+\eta) \cdot w_\eta$, $\tilde{w}_\eta^\vee = (1-\eta) \cdot w_\eta$,
- θ un vettore di Z con $\theta^2 = \pm 1$,
- η uno pseudoscalare con $\eta^2 = \pm 1$.

Gli isomorfismi di superalgebre descritti all'inizio del paragrafo ci consentono di ricondurci allo studio delle rappresentazioni di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ e $\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^{p,q})$ con $|p-q|\leq 4$.

TEOREMA 26.2.1. *Spinori e spinori degli spazi vettoriali reali si possono descrivere mediante la tabella*

$\frac{p-q}{\text{mod } 8}$	η^2	modello	P	tipo	S	tipo
0	+1	$\mathbb{R}^{n,n}$	(w_n)	\mathbb{R}	$(w_n)^+ \oplus (w_n)^-$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$
1	-1	$\mathbb{R}^{n+1,n}$	(w_n)	\mathbb{C}	$(w_n)^+$	\mathbb{R}
2	-1	$\mathbb{R}^{n+2,n}$	(w_n)	\mathbb{H}	$(w_n)^+$	\mathbb{C}
3	+1	$\mathbb{R}^{n+3,n}$	$(\tilde{w}_n) \oplus (\tilde{w}_n^\vee)$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	(\tilde{w}_n)	\mathbb{H}
4	+1	$\mathbb{R}^{n+4,n}$	(\tilde{w}_n)	\mathbb{H}	$(\tilde{w}_n)^+ \oplus (\tilde{w}_n)^-$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$
5	-1	$\mathbb{R}^{n,n+3}$	$[(1+\theta)w_n]$	\mathbb{C}	$[(1+\theta)w_n]$	\mathbb{H}
6	-1	$\mathbb{R}^{n,n+2}$	$[(1+\theta)w_n]$	\mathbb{R}	$[(1+\theta)w_n]$	\mathbb{C}
7	+1	$\mathbb{R}^{n,n+1}$	$(\tilde{w}_n) \oplus (\tilde{w}_n^\vee)$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	(\tilde{w}_n)	\mathbb{R}

DIMOSTRAZIONE. Si possono verificare gli isomorfismi della tabella utilizzando argomenti simili a quelli della discussione degli spazi split. \square

26.3. Forma bilineare canonica sugli spinori reali

Nel §25.6 abbiamo introdotto le forme bilineari invarianti per le rappresentazioni irriducibili delle algebre di Clifford. Consideriamo qui specificamente il caso reale. Possiamo ricavare le proprietà o in modo diretto, come abbiamo fatto in precedenza per il caso split, o ricavarle dalle proprietà della complessificazione, riconducendoci in questo modo al caso split. Seguiamo qui questa seconda strada. Distinguiamo tra spinori di tipo reale, complesso e quaternionico.

26.3.1. Tipo reale. Gli spinori sono di tipo reale quando $p-q \equiv 0, 1, 7$ modulo 8. Scambiando tra loro p e q , possiamo ricondurci ai soli casi in cui $p-q \equiv 0, 7$ modulo 8, cioè al caso split che abbiamo già discusso in precedenza.

26.3.2. Tipo complesso. Guardando la tabella, gli spinori sono di tipo complesso quando $p-q \equiv 2, 6$ modulo 8 e, scambiando tra loro p e q se necessario, ci riconduciamo al caso in cui $p-q \equiv 6$ modulo 8. Utilizziamo l'inversione β che fissa il vettore θ e trasforma in sé l'ideale $S = ((1+\theta) \cdot w_n)$. La complessificazione $S^{\mathbb{C}}$ si spezza nella somma diretta di due $\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{C}^{2n+2})$ -moduli irriducibili non equivalenti $S_+^{\mathbb{C}}$ ed $S_-^{\mathbb{C}}$ e la b_β si rialza alla parte reale della forma normale \tilde{b}_β su $S^{\mathbb{C}}$. Utilizzando la discussione generale in §26.5.1, possiamo concludere dalle proprietà della forma normale nel caso split, che

- b_β è (la parte reale di) una forma ortogonale per la struttura complessa di S se $m \equiv 0$ modulo 8;
- b_β è (la parte reale di) una forma hermitiana per la struttura complessa di S se $m \equiv 2, 6$ modulo 8;
- b_β è (la parte reale di) una forma simplettica per la struttura complessa di S se $m \equiv 4$ modulo 8.

26.3.3. Tipo quaternionico. La rappresentazione spinoriale è quaternionica per $p-q \equiv 3, 4, 5$ modulo 8. I casi 3 e 5 sono equivalenti e corrispondono allo spin intero, mentre il caso 4 è quello di spin (1/2).

Consideriamo prima il caso di spin intero. Per lasciare invariante l'ideale S , per definire la forma bilineare canonica utilizziamo l'antinvolutione τ che fissa gli pseudovettori, cioè β se n è pari e γ se n è dispari.

Il complessificato $S^{\mathbb{C}}$ si spezza nella somma diretta di due rappresentazioni equivalenti $S_{\pm}^{\mathbb{C}}$ di $\mathcal{E}^0(\mathbb{C}^{2n+3})$. Possiamo dedurre le proprietà di b_{τ} da quelle della $\tilde{b}_{\tau, \mathbb{P}}^{\mathbb{C}}$ (cf. §26.5.2), che è la forma bilineare canonica sul $\mathcal{E}^0(\mathbb{C}^{2n+3})$ -modulo irriducibile $S_{\pm}^{\mathbb{C}}$. Utilizzando i risultati sugli spazi split otteniamo allora:

- b_{τ} è \mathbb{H} -ortogonale se $m \equiv 1, 7$ modulo 8;
- b_{τ} è \mathbb{H} -hermitiana se $m \equiv 3, 5$ modulo 8;

Consideriamo ora il caso di spin (1/2). La rappresentazione pinoriale $P=(\tilde{u}_n)$ è irriducibile e la sua complessificazione è somma diretta $P^{\mathbb{C}}=P_{+}^{\mathbb{C}} \oplus P_{-}^{\mathbb{C}}$ di due rappresentazioni irriducibili equivalenti di $\mathcal{E}(\mathbb{C}^{2n+4})$. Ciascuna di esse si decompone nella somma diretta di due rappresentazioni non equivalenti $(S^{+})_{\pm}^{\mathbb{C}}$ ed $(S^{-})_{\pm}^{\mathbb{C}}$ di $\mathcal{E}^0(\mathbb{C}^{2n+4})$.

Possiamo definire la forma bilineare canonica su $S=P$ utilizzando l'inversione β . La corrispondente $\tilde{b}_{\beta, \mathbb{P}}^{\mathbb{C}}$ (cf. §26.5.2) è la forma canonica complessa su $S^{\mathbb{C}}=P_{+}^{\mathbb{C}}$ rispetto a $\mathcal{E}^0(\mathbb{C}^{2n+4})$. Questo ci permette di dedurre le proprietà della forma canonica b_{β} utilizzando i risultati per gli spazi iperbolici. Otteniamo:

- b_{β} è \mathbb{H} -ortogonale se $m \equiv 0$ modulo 8;
- b_{β} definisce una dualità tra S^{+} ed S^{-} se $m \equiv 2, 6$ modulo 8;
- b_{β} è \mathbb{H} -hermitiana se $m \equiv 4$ modulo 8.

26.4. Prodotto vettore di spinori reali

Ricordiamo che, nel caso di spin 1 in cui la rappresentazione spinoriale e pinoriale coincidano, oppure nel caso di spin (1/2) in cui la rappresentazione pinoriale sia somma diretta di due rappresentazioni spinoriali di opposta chiralità, risulta definito il prodotto di un vettore per uno spinore

$$(26.10) \quad V \times S \ni (v, s) \longrightarrow v \cdot s \in S.$$

Questo è un morfismo di rappresentazioni di $\mathbf{Spin}(p, q)$, perché⁴

$$(26.11) \quad a \cdot (v \cdot s) = (a * v) \cdot (a \cdot s), \quad \forall a \in \mathbf{Spin}(p, q), \quad \forall v \in V, \quad \forall s \in S.$$

Poiché la forma bilineare simmetrica q' su $\mathbb{R}^{p,q}$ è non degenera, il prodotto per vettore definisce un prodotto di spinori a valori vettoriali

$$(26.12) \quad S \times S \ni (s_1, s_2) \longrightarrow s_1 \otimes s_2 \in V$$

mediante

$$(26.13) \quad q'(s_1 \otimes s_2, v) = b_{\tau}(v \cdot s_1, s_2), \quad \forall v \in V.$$

⁴Ricordiamo che la rappresentazione V è definita da $a * v = a \cdot v \cdot a^{-1}$ per ogni $a \in \mathbf{Spin}(p, q)$ e $v \in V$.

Poiché

$$b_{\tau}(v \cdot s_1, s_2) = b(s_1, \tau(v) \cdot s_2)$$

la simmetria/antisimmetria del prodotto vettore e della forma bilineare canonica sono le stesse se $\tau=\beta$ ed opposte se $\tau=\gamma$.

Per definire la forma bilineare canonica, possiamo scegliere indifferentemente per τ l'inversione β o il coniugio γ quando $m=p+q$ sia pari; per m dispari, scegliamo $\tau=\beta$ quando $(m-1)/2$ è pari e $\tau=\gamma$ quando $(m-1)/2$ è dispari. Nel caso di spin $(1/2)$, in cui abbiamo utilizzato $\tau=\beta$ (cf. Proposizione 26.1.4) nei casi in cui la b_{β} definisce una dualità tra S^+ ed S^- la forma è simmetrica per la classe di resto 2 ed alternata per la classe di resto 6, otteniamo la tabella seguente.

$\frac{p-q}{\text{mod } 8}$	$\frac{p+q}{\text{mod } 8}$	tipo	spin	b_{τ}	\otimes
0	0	\mathbb{R}	1/2	ortogonale	$S^+ \times S^-$
0	2	\mathbb{R}	1/2	dualità	simmetrica
0	4	\mathbb{R}	1/2	simplettica	$S^+ \times S^-$
0	2	\mathbb{R}	1/2	dualità	antisimmetrica
1, 7	1	\mathbb{R}	1	ortogonale	simmetrica
1, 7	3	\mathbb{R}	1	ortogonale	antisimmetrica
1, 7	5	\mathbb{R}	1	simplettica	antisimmetrica
1, 7	7	\mathbb{R}	1	simplettica	simmetrica
2, 6	0	\mathbb{C}	1	ortogonale	simmetrica
2, 6	2	\mathbb{C}	1	hermitiana	simmetrica
2, 6	4	\mathbb{C}	1	simplettica	antisimmetrica
2, 6	6	\mathbb{C}	1	hermitiana	antisimmetrica
3, 5	1	\mathbb{H}	1	\mathbb{H} -ortogonale	simmetrica
3, 5	3	\mathbb{H}	1	\mathbb{H} -hermitina	simmetrica
3, 5	5	\mathbb{H}	1	\mathbb{H} -hermitiana	antisimmetrica
3, 5	7	\mathbb{H}	1	\mathbb{H} -ortogonale	antisimmetrica
4	0	\mathbb{H}	1/2	\mathbb{H} -ortogonale	$S^+ \times S^-$
4	2	\mathbb{H}	1/2	\mathbb{H} -dualità	simmetrica
4	4	\mathbb{H}	1/2	\mathbb{H} -hermitiana	$S^+ \times S^-$
4	6	\mathbb{H}	1/2	\mathbb{H} -dualità	antisimmetrica

26.5. Appendice: Forme bilineari su \mathbb{C} e su \mathbb{H}

Le forme canoniche sulle rappresentazioni spinoriali di tipo complesso e quaternionico sono parti reali o immaginarie di forme bilineari o sesquilineari complesse oppure sesquilineari quaternioniche.

DEFINIZIONE 26.5.1. Sia S uno spazio vettoriale a destra su un'algebra di divisione \mathbb{A} su un campo \mathbb{K} . Fissata un'antinvolutione σ di \mathbb{A} , chiamiamo σ -sesquilineare un'applicazione \mathbb{K} -bilineare $b : S \times S \rightarrow \mathbb{A}$ che soddisfi

$$b(s_1 \cdot a_1, s_2 \cdot a_2) = \sigma(a_1) \cdot b(s_1, s_2) \cdot a_2, \quad \forall s_1, s_2 \in S, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{A}.$$

Nel caso dei numeri complessi, possiamo scegliere σ uguale all'identità (forme \mathbb{C} -bilineari) oppure al coniugio (\mathbb{C} -hermitiane).

Poiché l'algebra dei quaternioni non è commutativa, l'identità non è un'antinvolutione su \mathbb{H} e non c'è quindi una buona nozione di forma bilineare, mentre possiamo considerare le forme sesquilineari associate al coniugio.

OSSERVAZIONE 26.5.2. Definiamo sui quaternioni una struttura di superalgebra ponendo $\mathbb{H}^0 = \langle 1, i \rangle$ ed $\mathbb{H}^1 = \langle j, k \rangle$. L'inversione β che lascia fissi $1, j, k$ e cambia segno ad i definisce un antiautomorfismo di \mathbb{H} distinto dal coniugio.

26.5.1. Tipo complesso. Una *struttura complessa* su S è il dato di un'antinvolutione i su S , cioè di una $i \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(S)$ con $i^2 = -\text{id}$. Indichiamo con \mathbb{C} la sottoalgebra di $\text{End}_{\mathbb{R}}(S)$ generata da id ed i , isomorfa al campo \mathbb{C} dei numeri complessi. Le applicazioni \mathbb{C} -lineari su S sono le \mathbb{R} -lineari che commutano con i . Definiamo l'azione (a destra) di \mathbb{C} su S mediante

$$s \cdot (a + b \cdot i) = a \cdot s + b \cdot i(s), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Fissata la struttura complessa i su S , possiamo associare ad ogni forma b , \mathbb{R} -bilineare su S , una forma \mathbb{R} -bilineare $\tilde{b} : S \times S \rightarrow \mathbb{C}$, che sia \mathbb{C} -lineare nella seconda variabile, ponendo

$$(26.14) \quad \tilde{b}(s_1, s_2) = b(s_1, s_2) - b(s_1, i(s_2)) \cdot i.$$

LEMMA 26.5.3. La forma \tilde{b} è

- bilineare su \mathbb{C} se e soltanto se

$$b(s_1 \cdot a, s_2) = b(s_1, s_2 \cdot a), \quad \forall s_1, s_2 \in S, \forall a \in \mathbb{C}.$$

- La forma \tilde{b} è sesquilineare su \mathbb{C} , cioè \mathbb{C} -lineare rispetto alla seconda ed anti- \mathbb{C} -lineare rispetto alla prima variabile, se

$$b(s_1 \cdot a, s_2) = b(s_1, s_2 \cdot \bar{a}), \quad \forall s_1, s_2 \in S, \forall a \in \mathbb{C}. \quad \square$$

Queste osservazioni giustificano la seguente definizione.

DEFINIZIONE 26.5.4. Sia S di tipo complesso. Diciamo che una forma bilineare reale $b : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ è *bilineare su \mathbb{C}* se

$$b(s_1 \cdot a, s_2) = b(s_1, s_2 \cdot a), \quad \text{per ogni } s_1, s_2 \in S \text{ ed } a \in \mathbb{C}.$$

La chiamiamo

- \mathbb{C} -simmetrica se b è simmetrica,
- \mathbb{C} -ortogonale se b è simmetrica e non degenere,
- \mathbb{C} -alternata se b è alternata,
- \mathbb{C} -simplettica se b è alternata e non degenere.

Se vale b è \mathbb{R} -bilineare e vale

$$b(s_1 \cdot a, s_2) = b(s_1, s_2 \cdot \bar{a}), \quad \text{per ogni } s_1, s_2 \in S \text{ ed } a \in \mathbb{C},$$

diciamo che b è \mathbb{C} -sesquilineare. La chiamiamo

- \mathbb{C} -hermitiana se b è o simmetrica o antisimmetrica.

Se b è \mathbb{C} -hermitiana e simmetrica, allora è la parte reale di una forma hermitiana simmetrica, se antisimmetrica, la parte immaginaria di una forma hermitiana simmetrica.

Consideriamo la complessificazione $S^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} S$. La \mathbf{i} si estende ad un'antivoluzione \mathbb{C} -lineare \mathcal{I} su $S^{\mathbb{C}}$ ed $S^{\mathbb{C}}$ si decompone nella somma diretta $S^+ \oplus S^-$ dei sottospazi

$$S^+ = \{s \in S^{\mathbb{C}} \mid \mathcal{I}(s) = i \cdot s\} \text{ ed } S^- = \{s \in S^{\mathbb{C}} \mid \mathcal{I}(s) = -i \cdot s\}.$$

LEMMA 26.5.5. *Indichiamo con $b^{\mathbb{C}}$ l'estensione bilineare su \mathbb{C} ad $S^{\mathbb{C}}$ della forma b . Allora*

- b è \mathbb{C} -bilineare se e soltanto se S^+ ed S^- sono $b^{\mathbb{C}}$ -ortogonali;
- b è \mathbb{C} -sesquilineare se e soltanto se S^+ ed S^- sono totalmente isotropi rispetto a $b^{\mathbb{C}}$.

DIMOSTRAZIONE. Ogni elemento s di S si decompone in modo unico nella somma

$$s = s_+ + s_- \text{ di } s_+ = \frac{1}{2}(s - i \cdot \mathcal{I}(s)) \text{ ed } s_- = \frac{1}{2}(s + i \cdot \mathcal{I}(s)).$$

Abbiamo allora, per ogni $s', s'' \in S$,

$$\begin{aligned} 4b^{\mathbb{C}}(s'_+, s''_+) &= b^{\mathbb{C}}(s' - i \cdot \mathcal{I}(s'), s'' - i \cdot \mathcal{I}(s'')) \\ &= b(s', s'') - b(\mathcal{I}(s'), \mathcal{I}(s'')) - i(b(s', \mathcal{I}(s'')) + b(\mathcal{I}(s'), s'')), \\ 4b^{\mathbb{C}}(s'_-, s''_-) &= b^{\mathbb{C}}(s' + i \cdot \mathcal{I}(s'), s'' + i \cdot \mathcal{I}(s'')) \\ &= b(s', s'') - b(\mathcal{I}(s'), \mathcal{I}(s'')) + i(b(s', \mathcal{I}(s'')) + b(\mathcal{I}(s'), s'')), \\ 4b^{\mathbb{C}}(s'_+, s''_-) &= b^{\mathbb{C}}(s' - i \cdot \mathcal{I}(s'), s'' + i \cdot \mathcal{I}(s'')) \\ &= b(s', s'') + b(\mathcal{I}(s'), \mathcal{I}(s'')) + i(b(s', \mathcal{I}(s'')) - b(\mathcal{I}(s'), s'')), \\ 4b^{\mathbb{C}}(s'_-, s''_+) &= b^{\mathbb{C}}(s' + i \cdot \mathcal{I}(s'), s'' - i \cdot \mathcal{I}(s'')) \\ &= b(s', s'') + b(\mathcal{I}(s'), \mathcal{I}(s'')) - i(b(s', \mathcal{I}(s'')) - b(\mathcal{I}(s'), s'')). \end{aligned}$$

Dalle queste identità segue la tesi. \square

Le forme hermitiane ed antihermitiane complesse su $S^{\mathbb{C}}$ sono i punti fissi e quelli riflessi dell'involutione $b \leftrightarrow b^*$ dello spazio $\mathcal{H}(S^{\mathbb{C}})$ delle forme sesquilineari su $S^{\mathbb{C}}$, definita dalla

$$b^*(s_1, s_2) = \overline{b(s_2, s_1)}, \quad \forall s_1, s_2 \in S^{\mathbb{C}}.$$

La moltiplicazione per l'immaginario i trasforma le hermitiane nelle antihermitiane. In particolare, se la classe conforme $[b] = \{\lambda \cdot b \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ contiene una forma antihermitiana, ne contiene anche una hermitiana e le hermitiane in $[b]$ si ottengono l'una dall'altra moltiplicandole per scalari reali non nulli. Sarà quindi naturale associare ad una classe $[b]$, che contenga forme hermitiane o antihermitiane, la classe conforme $\{t \cdot b \mid t \in \mathbb{R}\}$ delle forme reali simmetriche che sono parti reali degli elementi hermitiani di $[b]$.

Lo spazio $\mathcal{B}(S^{\mathbb{C}})$ delle forme bilineari complesse su $S^{\mathbb{C}}$ ha l'involutione naturale $b \leftrightarrow b^{\vee}$, con

$$b^{\vee}(s_1, s_2) = b(s_2, s_1), \quad \forall s_1, s_2 \in S^{\mathbb{C}}.$$

I suoi punti fissi sono le forme simmetriche, mentre le antisimmetriche sono quelli riflessi. Se un elemento della classe conforme $[b] = \{\lambda \cdot b \mid \lambda \in \dot{\mathbb{C}}\}$ di una forma b di $\mathcal{B}(\mathbb{S}^{\mathbb{C}})$ è simmetrico (o antisimmetrico), sono tali tutti gli elementi della classe e sono simmetriche od antisimmetriche tutte le forme reali di $\mathcal{R}_\ell([b]) = \{\mathcal{R}_\ell(\lambda \cdot b) \mid \lambda \in \dot{\mathbb{C}}\}$, che è, per $b \neq 0$, una famiglia a due parametri di forme reali congruenti.

26.5.2. Tipo quaternionico. Una struttura quaternionica su uno spazio vettoriale reale \mathbb{S} è il dato di tre antinvoluzioni \mathbb{R} -lineari di \mathbb{S} che anticommutano tra loro. Definiamo l'azione a destra di \mathbb{H} su \mathbb{S} ponendo⁵

$$s \cdot i = \mathcal{I}(s), \quad s \cdot j = \mathcal{J}(s), \quad s \cdot k = \mathcal{K}(s), \quad \forall s \in \mathbb{S}.$$

Consideriamo una forma bilineare su \mathbb{S} a valori nell'algebra \mathbb{H} dei quaternioni

$$(26.15) \quad b : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \ni (s_1, s_2) \longrightarrow b(s_1, s_2) \in \mathbb{H}.$$

DEFINIZIONE 26.5.6. Diciamo che b è *sesquilineare* su \mathbb{H} se

$$(26.16) \quad b(s_1 \cdot \zeta_1, s_2 \cdot \zeta_2) = \bar{\zeta}_1 \cdot b(s_1, s_2) \cdot \zeta_2, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{S}, \quad \forall \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{H}.$$

Le forme \mathbb{H} sesquilineari su \mathbb{S} formano uno spazio vettoriale reale $\mathfrak{S}(\mathbb{S})$ (di dimensione $4n^2$ se \mathbb{S} ha dimensione n) e l'applicazione

$$b \rightarrow b^*, \quad \text{con } b^*(s_1, s_2) = \overline{b(s_2, s_1)}$$

è un'involuzione di $\mathfrak{S}(\mathbb{S})$.

DEFINIZIONE 26.5.7. Una forma b sesquilineare su \mathbb{H} si dice

- \mathbb{H} -ortogonale se $b(s_2, s_1) = -\overline{b(s_1, s_2)}$, per ogni $s_1, s_2 \in \mathbb{S}$,
- \mathbb{H} -hermitiana se $b(s_2, s_1) = \overline{b(s_1, s_2)}$, per ogni $s_1, s_2 \in \mathbb{S}$.

PROPOSIZIONE 26.5.8. Ogni forma \mathbb{H} -sesquilineare su \mathbb{S} si decompone in modo unico nella somma di una \mathbb{H} -hermitiana e di una \mathbb{H} -ortogonale.

Fissata una forma \mathbb{H} -sesquilineare b su \mathbb{S} ed una base e_1, \dots, e_n di \mathbb{S} risulta univocamente determinata una matrice $B \in \mathbb{H}(n)$ tale che

$$(26.17) \quad b(s_1, s_2) = \theta_1^* \cdot B \cdot \theta_2, \quad \text{se } s_i = (e_1, \dots, e_n) \cdot \theta_i \text{ con } \theta_i \in \mathbb{H}^n, \text{ per } i=1, 2.$$

- b è \mathbb{H} -hermitiana se e soltanto se $B \in \mathfrak{p}_{\mathbb{H}}(n)$, cioè se $B^* = B$;
- b è \mathbb{H} -ortogonale se e soltanto se $B \in \mathfrak{u}_{\mathbb{H}}(n)$, cioè se $B^* = -B$.

DIMOSTRAZIONE. Le forme \mathbb{H} -hermitiane ed \mathbb{H} -ortogonali sono, rispettivamente, i punti fissi e quelli riflessi dell'involuzione $b \rightarrow b^*$ di $\mathfrak{S}(\mathbb{S})$. La decomposizione $b = b_h + b_o$ nella somma della forma \mathbb{H} -hermitiana

$$b_h(s_1, s_2) = \frac{1}{2}(b(s_1, s_2) + \overline{b(s_2, s_1)})$$

e della \mathbb{H} -ortogonale

$$b_o(s_1, s_2) = \frac{1}{2}(b(s_1, s_2) - \overline{b(s_2, s_1)})$$

corrisponde allora alla decomposizione spettrale rispetto all'involuzione.

⁵Denoteremo le unità immaginarie di \mathbb{H} con i simboli i, j, k per distinguerli dall'unità immaginaria i dell'azione di \mathbb{C} sulla complessificazione di \mathbb{S} .

Nell'ultima parte della dimostrazione, possiamo supporre per semplicità che siano $S = \mathbb{H}^n$ ed e_1, \dots, e_n la base canonica. Si verifica allora facilmente che

$$b(\theta_1, \theta_2) = \theta_1^* \cdot B \cdot \theta_2, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{H}^n, \quad \text{con } B = (b(e_h, e_k))_{h,k=1,\dots,n}.$$

La condizione di essere hermitiana equivale a $B^* = B$, quella di essere ortogonale a $B^* = -B$. \square

OSSERVAZIONE 26.5.9. Le matrici di $p_{\mathbb{H}}(n)$ hanno diagonale principale reale e formano uno spazio vettoriale di dimensione $4n^2 - n$. Quelle di $v_{\mathbb{H}}(n)$ hanno invece diagonale immaginaria e formano un'algebra di Lie di dimensione $4n^2 + n$.

Decomponiamo la forma \mathbb{H} -sesquilineare b su S , nella somma

$$(*) \quad b(s_1, s_2) = b_0(s_1, s_2) + i \cdot b_i(s_1, s_2) + j \cdot b_j(s_1, s_2) + \mathfrak{k} \cdot b_{\mathfrak{k}}(s_1, s_2)$$

con $b_0, b_i, b_j, b_{\mathfrak{k}}$ forme reali. Abbiamo

$$(**) \quad b_{\tau}(s_1, s_2) = b_0(s_1 \cdot \tau, s_2), \quad \forall s_1, s_2 \in S, \quad \forall \tau \in \{i, j, \mathfrak{k}\}.$$

DEFINIZIONE 26.5.10. Chiamiamo b_0 *parte reale* della forma \mathbb{H} -sesquilineare b .

LEMMA 26.5.11. *Una forma \mathbb{H} -sesquilineare è univocamente determinata dalla sua parte reale.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché una forma bilineare reale b_0 su S sia la parte reale di una forma \mathbb{H} -sesquilineare è che risulti

$$(26.18) \quad b_0(s_1 \cdot \zeta, s_2) = b_0(s_1, s_2 \cdot \bar{\zeta}), \quad \forall s_1, s_2 \in S, \quad \forall \zeta \in \mathbb{H}.$$

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue dalla (**). Dimostriamo la seconda. Si verifica facilmente che (26.18) è una condizione necessaria. Dimostriamo la sufficienza. Se b_0 è una forma bilineare reale che verifica (26.18), definiamo b utilizzando la (*) con $b_{\tau}(s_1, s_2) = b_0(s_1 \cdot \tau, s_2)$ per $\tau = i, j, \mathfrak{k}$. Questa definizione ci garantisce che $b(s_1 \cdot \zeta, s_2) = \bar{\zeta} \cdot b(s_1, s_2)$. Resta da verificare che b è \mathbb{H} -lineare a destra rispetto alla seconda variabile e, a questo scopo, è sufficiente provare che $b(s_1, s_2 \cdot \zeta) = b(s_1, s_2) \cdot \zeta$ nel caso in cui ζ sia una delle unità immaginarie i, j, \mathfrak{k} . Verifichiamolo per $\zeta = i$ (gli altri casi si discutono allo stesso modo). Allora

$$\begin{aligned} b(s_1, s_2 \cdot i) &= b_0(s_1, s_2 \cdot i) + i \cdot b_0(s_1 \cdot i, s_2 \cdot i) + j \cdot b_0(s_1 \cdot j, s_2 \cdot i) + \mathfrak{k} \cdot b_0(s_1 \cdot \mathfrak{k}, s_2 \cdot i) \\ &= -b_0(s_1 \cdot i, s_2) + i \cdot b_0(s_1, s_2) + j \cdot b(s_1 \cdot \mathfrak{k}, s_2) - \mathfrak{k} \cdot b(s_1 \cdot j, s_2), \\ b(s_1, s_2) \cdot i &= (b_0(s_1, s_2) + i \cdot b_0(s_1 \cdot i, s_2) + j \cdot b_0(s_1 \cdot j, s_2) + \mathfrak{k} \cdot b_0(s_1 \cdot \mathfrak{k}, s_2)) \cdot i \\ &= i \cdot b_0(s_1, s_2) - b_0(s_1 \cdot i, s_2) - \mathfrak{k} \cdot b(s_1 \cdot j, s_2) + j \cdot b(s_1 \cdot \mathfrak{k}, s_2). \end{aligned}$$

La dimostrazione è completa. \square

PROPOSIZIONE 26.5.12. *Sia b_0 una forma bilineare reale su S .*

- (1) *Condizione necessaria e sufficiente affinché b_0 sia la parte reale di una forma \mathbb{H} -hermitiana su S è che valga (26.18) e che b_0 sia simmetrica.*
- (2) *Condizione necessaria e sufficiente affinché b_0 sia la parte reale di una forma \mathbb{H} -ortogonale su S è che valga (26.18) e che b_0 sia antisimmetrica.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 26.5.11 la (26.18) ci garantisce che la

$$b(s_1, s_2) = b_0(s_1, s_2) + i \cdot b_0(s_1 \cdot i, s_2) + j \cdot b_0(s_1 \cdot j, s_2) + k \cdot b_0(s_1 \cdot k, s_2)$$

sia \mathbb{H} -sesquilineare.

Se $b_0(s_2, s_1) = \epsilon \cdot b_0(s_1, s_2)$ per ogni $s_1, s_2 \in S$, con $\epsilon = \pm 1$, allora

$$\begin{aligned} b(s_2, s_1) &= b_0(s_2, s_1) + i \cdot b_0(s_2 \cdot i, s_1) + j \cdot b_0(s_2 \cdot j, s_1) + k \cdot b_0(s_2 \cdot k, s_1) \\ &= \epsilon \cdot (b_0(s_1, s_2) + i \cdot b_0(s_1, s_2 \cdot i) + j \cdot b_0(s_1, s_2 \cdot j) + k \cdot b_0(s_1, s_2 \cdot k)) \\ &= \epsilon \cdot (b_0(s_1, s_2) - i \cdot b_0(s_1 \cdot i, s_2) - j \cdot b_0(s_1 \cdot j, s_2) - k \cdot b_0(s_1 \cdot k, s_2)) = \epsilon \cdot \overline{b(s_1, s_2)}. \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione. \square

La Proposizione 26.5.12 motiva la seguente definizione.

DEFINIZIONE 26.5.13. Fissata una struttura quaternionica su S , diciamo che una forma bilineare reale b su S è \mathbb{H} -sesquilineare se

$$(26.19) \quad b(s_1 \cdot \zeta, s_2) = b(s_1, s_2 \cdot \bar{\zeta}), \quad \forall s_1, s_2 \in S, \quad \forall \zeta \in \mathbb{H}.$$

Ciò equivale al fatto che gli antiautomorfismi $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ preservino la forma b .

Diciamo che b è

- \mathbb{H} -ortogonale se è \mathbb{H} -sesquilineare ed antisimmetrica,
- \mathbb{H} -hermitiana se è \mathbb{H} -sesquilineare e simmetrica.

Indichiamo con $S^{\mathbb{C}}$ la complessificazione $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} S$ di S ed utilizziamo gli stessi simboli $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ per indicare le estensioni \mathbb{C} -lineari di $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ ad $S^{\mathbb{C}}$. Utilizzando uno degli antiautomorfismi, ad esempio \mathcal{I} , possiamo decomporre $S^{\mathbb{C}}$ nella somma diretta dei suoi autospazi:

$$S_+^{\mathbb{C}} = \{s \in S^{\mathbb{C}} \mid \mathcal{I}(s) = i \cdot s\} \quad \text{ed} \quad S_-^{\mathbb{C}} = \{s \in S^{\mathbb{C}} \mid \mathcal{I}(s) = -i \cdot s\}$$

e, come nel caso complesso, possiamo decomporre $s \in S^{\mathbb{C}}$ nella somma

$$s = s_+ + s_-, \quad \text{con} \quad s_+ = \frac{1}{2}(s - i \cdot \mathcal{I}(s)) \in S_+^{\mathbb{C}}, \quad s_- = \frac{1}{2}(s + i \cdot \mathcal{I}(s)) \in S_-^{\mathbb{C}}.$$

LEMMA 26.5.14. Le antinvoluzioni \mathbb{C} -lineari \mathcal{J} e \mathcal{K} di $S^{\mathbb{C}}$ scambiano tra loro $S_+^{\mathbb{C}}$ ed $S_-^{\mathbb{C}}$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\mathcal{J}(s_+) = \mathcal{J}(s - i \cdot \mathcal{I}(s)) = \mathcal{J}(s) - i \cdot \mathcal{J} \circ \mathcal{I}(s) = \mathcal{J}(s) + i \cdot \mathcal{I}(\mathcal{J}(s)) = (\mathcal{J}(s))_-$$

ed in modo analogo si verifica che $\mathcal{J}(s_-) = (\mathcal{J}(s))_+$, $\mathcal{K}(s_{\pm}) = (\mathcal{K}(s))_{\mp}$. \square

Supponiamo che b sia la parte reale di una forma sesquilineare quaternionica su S . Per la sua complessificazione $b^{\mathbb{C}}$ i sottospazi $S_{\pm}^{\mathbb{C}}$ sono totalmente isotropi: abbiamo infatti

$$\begin{aligned} b^{\mathbb{C}}(s_1 - i \cdot \mathcal{I}(s_1), s_2 - i \cdot \mathcal{I}(s_2)) &= (b(s_1, s_2) - b(\mathcal{I}(s_1), \mathcal{I}(s_2))) \\ &\quad - i(b(s_1, \mathcal{I}(s_2)) + b(\mathcal{I}(s_1), s_2)) = 0. \end{aligned}$$

È allora conveniente considerare la forma

$$(26.20) \quad b_{\mathbb{F}}^{\mathbb{C}}(s_1, s_2) = b^{\mathbb{C}}(s_1, s_2 \cdot \mathbb{F}), \quad \forall s_1, s_2 \in S^{\mathbb{C}}.$$

per cui S_+ ed S_- sono tra loro perpendicolari Poiché

$$b^{\mathbb{C}}(s_1, s_2 \cdot \mathfrak{k}) = -b^{\mathbb{C}}(s_1 \cdot \mathfrak{k}, s_2), \quad \forall s_1, s_2 \in S^{\mathbb{C}},$$

otteniamo

PROPOSIZIONE 26.5.15. *Con la notazione introdotta sopra*

- b è \mathbb{H} -ortogonale se e soltanto se $b_{\mathfrak{k}}^{\mathbb{C}}$ è simmetrica;
- b è \mathbb{H} -hermitiana se e soltanto se $b_{\mathfrak{k}}^{\mathbb{C}}$ è antisimmetrica. □

26.6. Rappresentazione mediante diagrammi di Satake

Alcune proprietà delle rappresentazioni spinoriali si possono ricavare dalla descrizione delle algebre ortogonali e delle loro rappresentazioni reali mediante radici e pesi.

Abbiamo visto come nel caso split si possano usare i diagrammi di Dynkin. Per discutere in generale le algebre reali, si possono usare i *diagrammi di Satake*. Questi si ottengono considerando l'algebra reale come luogo di punti fissi di un coniugio dell'algebra complessa.

26.6.1. Algebre ortogonali di tipo B. Le algebre di tipo B corrispondono agli spazi quadratici reali di dimensione dispari. Supponiamo sia $p < q$ e poniamo $m = p + q$, $\ell = (m-1)/2$. Supporremo⁶ $m \geq 5$. Per rappresentare le matrici dell'algebra di Lie $\mathfrak{o}(p, q)$ utilizziamo una base $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ di \mathbb{R}^m per cui la matrice $(\mathfrak{q}'(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))$ della forma quadratica sia

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & J_p \\ 0 & -I_{q-p} & 0 \\ J_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(m), \quad \text{con } J_p = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(p).$$

In questo modo i primi e gli ultimi p vettori della base formano due sottospazi totalmente isotropi massimali U, W in dualità tra loro, con

$$\mathfrak{q}'(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{m+1-j}) = \delta_{i,j} \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq p.$$

I vettori \mathbf{e}_i con $p < i \leq q$ formano una base ortonormale del nucleo anisotropo Z , l'ortogonale di $E = U \oplus W$.

La complessificazione di $\mathfrak{o}(p, q)$ è split e possiamo ricavare dalla base assegnata una nuova base e_1, \dots, e_m per cui la matrice associata è la J_m della forma split ponendo

$$e_i = \begin{cases} \mathbf{e}_i, & \text{se } i = \ell + 1, \text{ oppure } i \leq p, \text{ oppure } i > q, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_i + i\mathbf{e}_{m+1-i}) & \text{se } p < i \leq \ell, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{m+1-i} - i\mathbf{e}_i), & \text{se } \ell + 2 \leq i \leq q. \end{cases}$$

⁶Per $m=1$ il gruppo ortogonale consiste in ± 1 e la corrispondente algebra di Lie è $\{0\}$. Per $m=3$, il gruppo $\mathbf{Spin}(3)$ è uguale ad $\mathbf{SU}(2)$ e la sua complessificazione è $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$. In generale, i gruppi $\mathbf{Spin}(p, q)$ con $p+q \leq 6$ sono stati discussi nel §25.8.

Con questo cambiamento di base gli elementi di $\mathfrak{o}(p, q)$ si scrivono come matrici a coefficienti complessi che sono lasciate fisse da un coniugio, che possiamo esplicitare facilmente osservando che

$$\bar{e}_i = \begin{cases} e_i, & \text{se } 1 \leq p, \text{ oppure } i > q, \\ e_{m+1-i}, & \text{se } p < i \leq q. \end{cases}$$

[Nota che $m+1-(\ell+1) = (\ell+1)$.]

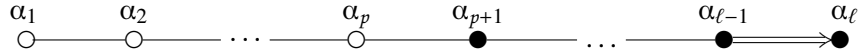
Ricordiamo la descrizione dei pesi delle rappresentazioni come covettori in \mathbb{Q}^ℓ che avevamo fatto in §26.1 nel caso dell'algebra split. Lo 0 ed i $\pm \epsilon_i$, per $1 \leq i \leq \ell$, corrispondono alla rappresentazione vettoriale. Il coniugio sui vettori definisce per dualità il coniugio

$$(26.21) \quad \bar{\epsilon}_i = \begin{cases} +\epsilon_i, & \text{se } 1 \leq i \leq p, \\ -\epsilon_i & \text{se } p < i \leq \ell. \end{cases}$$

sul reticolo dei pesi. Sulle radici fondamentali $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$, con $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ per $1 \leq i < \ell$, $\alpha_\ell = \epsilon_\ell$, otteniamo

$$(26.22) \quad \bar{\alpha}_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{se } 1 \leq i < p, \\ \alpha_p + 2(\alpha_{p+1} + \dots + \alpha_\ell), & \text{se } i = p, \\ -\alpha_i, & \text{se } p < i \leq \ell. \end{cases}$$

Nel caso split, il diagramma di Satake coincide con il diagramma di Dynkin. Se invece $p < \ell$, il diagramma di Satake si ottiene, per il tipo B , da quello di Dynkin semplicemente annerendo le radici fondamentali che, coniugate, cambiano di segno. È quindi



Il fatto che la rappresentazione spinoriale sia reale o simplettica e quella vettoriale reale si può dedurre dal fatto che lo spazio dei pesi della complessificata è invariante rispetto al coniugio.

26.6.2. Algebre ortogonali di tipo D . Le algebre di tipo D corrispondono agli spazi quadratici reali di dimensione pari. Supponiamo sia $p \leq q$ e poniamo $m = p + q$. Supporremo⁷ $m \geq 8$. Per rappresentare le matrici dell'algebra di Lie $\mathfrak{o}(p, q)$ utilizziamo una base e_1, \dots, e_m per cui la matrice $(q'(e_i, e_j))$ della forma quadratica sia

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & J_p \\ 0 & -I_{q-p} & 0 \\ J_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(m), \quad \text{con } J_p = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(p).$$

⁷Per $m=2$ il gruppo speciale ortogonale è il gruppo commutativo delle rotazioni piane intorno all'origine; tutti i gruppi $\mathbf{Spin}(p, q)$ con $p+q \leq 6$ sono stati discussi nel §25.8.

In questo modo i primi e gli ultimi p vettori della base formano due sottospazi totalmente isotropi massimali U, W in dualità tra loro, con

$$q'(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{m+1-j}) = \delta_{i,j} \text{ per } i, j \notin \{p+1, \dots, q\}.$$

I vettori \mathbf{e}_i con $p < i \leq q$ formano una base ortonormale del nucleo anisotropo Z ortogonale di $E = U \oplus W$.

La complessificazione di $\mathfrak{o}(p, q)$ è l'algebra di Lie di uno spazio iperbolico e possiamo ricavare dalla base assegnata una nuova base e_1, \dots, e_m per cui la matrice associata sia la J_m della forma split ponendo

$$e_i = \begin{cases} \mathbf{e}_i, & i \leq p, \text{ oppure } i > q, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_i + i\mathbf{e}_{m+1-i}) & \text{se } p < i \leq \ell, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{m+1-i} - i\mathbf{e}_i), & \text{se } \ell + 2 \leq i \leq q. \end{cases}$$

Con questo cambiamento di base gli elementi di $\mathfrak{o}(p, q)$ si scrivono come matrici a coefficienti complessi che sono lasciate fisse da un coniugio, che possiamo ricavare facilmente osservando che

$$\bar{e}_i = \begin{cases} e_i, & \text{se } 1 \leq i \leq p \text{ o } q < i \leq m, \\ e_{m+1-i} & \text{se } p < i \leq q. \end{cases}$$

I vettori e_i sono gli autovettori della rappresentazione vettoriale, con e_i corrispondente ad ϵ_i se $1 \leq i \leq \ell$ e a $-\epsilon_{m+1-i}$ se $\ell < i \leq m$. Trasferiamo (per dualità) il coniugio sui vettori ad un coniugio sui pesi, ponendo

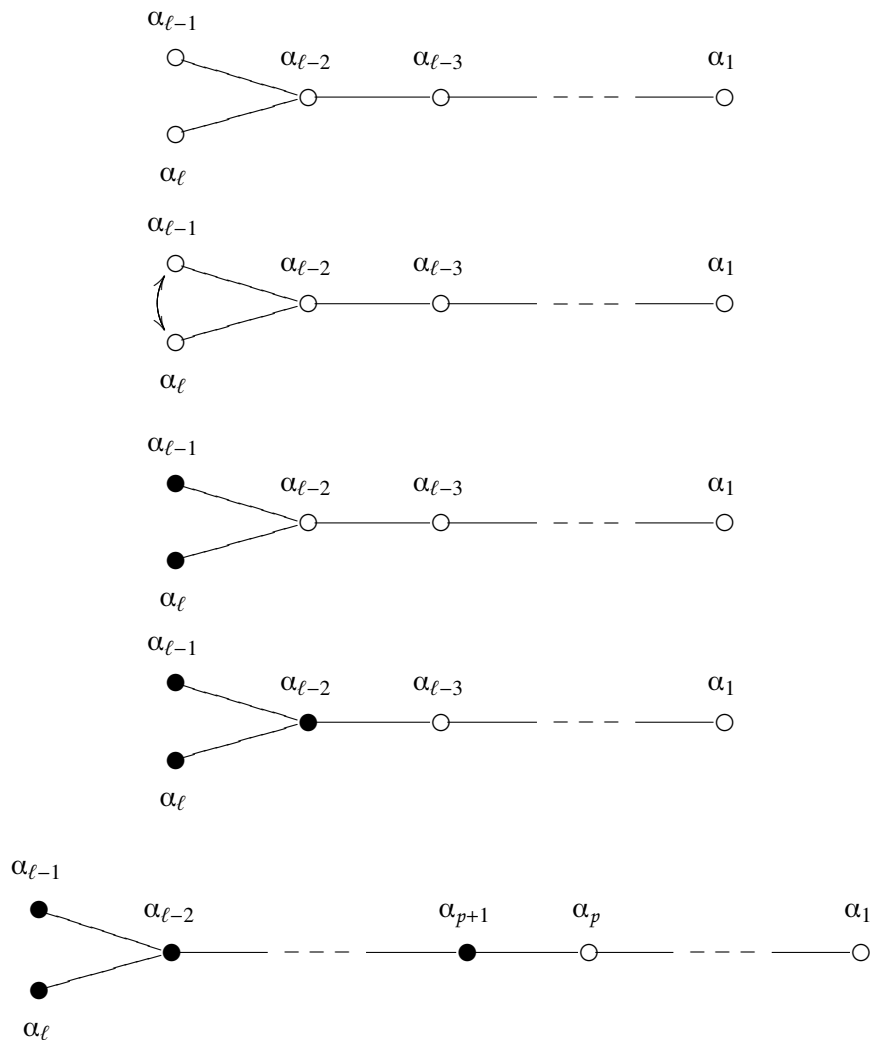
$$(26.23) \quad \bar{\epsilon}_i = \begin{cases} +\epsilon_i, & \text{se } 1 \leq i \leq p, \\ -\epsilon_i & \text{se } p < i \leq \ell. \end{cases}$$

Per descrivere il coniugio sulle radici fondamentali, che ricordiamo sono $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ per $1 \leq i < \ell$, $\alpha_\ell = \epsilon_{\ell-1} + \epsilon_\ell$, distinguiamo diversi casi. Se $p = q$ abbiamo la forma split, in cui $\bar{\alpha}_i = \alpha_i$ per ogni i . Altrimenti abbiamo

$$\begin{aligned} q-p=1, \quad \text{allora} \quad \bar{\alpha}_i &= \begin{cases} \alpha_i, & \text{se } 1 \leq i \leq \ell-2, \\ \alpha_\ell, & \text{se } i = \ell-1, \\ \alpha_{\ell-1}, & \text{se } i = \ell, \end{cases} \\ q-p=2, \quad \text{allora} \quad \bar{\alpha}_i &= \begin{cases} \alpha_i, & \text{se } 1 \leq i \leq \ell-3, \\ -\alpha_{\ell-1}, & \text{se } i = \ell-1, \\ -\alpha_\ell, & \text{se } i = \ell, \end{cases} \\ q-p > 2, \quad \text{allora} \quad \bar{\alpha}_i &= \begin{cases} \alpha_i & \text{se } 1 \leq i < p, \\ \alpha_p + 2(\alpha_{p+1} + \dots + \alpha_{\ell-2}) + \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell, & \text{se } i = p, \\ -\alpha_i, & \text{se } p < i \leq \ell. \end{cases} \end{aligned}$$

Quando due radici fondamentali sono l'una coniugata dell'altra, questo si indica collegando i due nodi corrispondenti con un arco a doppia freccia. Ai quattro casi

considerati ($q=p$, $q-p=2$, $q-p=4$, $q-p>4$) corrispondono così diversi diagrammi di Satake, che disegniamo nell'ordine.



Abbiamo osservato che ci sono due rappresentazioni spinoriali dell'algebra split, con radici $\frac{1}{2}(\pm\epsilon_1 \pm \dots \pm \epsilon_l)$, che si distinguono per avere l'una un numero pari, l'altra un numero dispari di segni positivi e negativi. Quando $(q-p)/2$ è un numero pari, il coniugio trasforma in sé ciascuna delle due rappresentazioni. Abbiamo quindi rappresentazioni spinoriali reali ($1/2$). Questo corrisponde a $p-q$ nelle classi di resto 0, 4 modulo 8. Invece, quando $(q-p)/2$ è un numero dispari, le due trasformazioni spinoriali sono scambiate tra loro dal coniugio e la corrispondente rappresentazione reale è di tipo complesso con spin intero. Questo corrisponde a $p-q$ nelle classi di resto 2, 6 modulo 8.

CAPITOLO XXVII

Ottonioni

27.1. Richiami sulle algebre

Ricordiamo che un'algebra è uno spazio vettoriale \mathbb{A} su un campo \mathbb{K} , su cui è definita un'applicazione bilineare

$$(27.1) \quad \mathbb{A} \times \mathbb{A} \ni (a, b) \longrightarrow a \cdot b \in \mathbb{A}.$$

Diciamo che \mathbb{A} è *unitaria* se contiene un elemento 1 con la proprietà che

$$(27.2) \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \quad \forall a \in \mathbb{A}.$$

Ogni algebra \mathbb{A} è sottoalgebra di un'algebra unitaria $\mathbb{A}' = \mathbb{A} \oplus \mathbb{K}$, in cui il prodotto è definito da

$$(\lambda + a)(\mu + b) = \lambda\mu + \lambda b + \mu a + ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

NOTAZIONE 27.1.1. Se a_1, \dots, a_k sono elementi di un'algebra reale unitaria \mathbb{A} su \mathbb{K} , indichiamo con $\mathbb{K}[a_1, \dots, a_k]$ la sottoalgebra unitaria di \mathbb{A} generata da a_1, \dots, a_k , cioè la più piccola sottoalgebra unitaria di \mathbb{A} che li contiene.

Algebre di divisione.

DEFINIZIONE 27.1.2. Chiamiamo *di divisione* un'algebra unitaria \mathbb{A} in cui gli endomorfismi lineari di \mathbb{A} definiti dalle moltiplicazioni a destra e a sinistra per elementi diversi da zero siano invertibili.

LEMMA 27.1.3. *Un'algebra unitaria \mathbb{A} di dimensione finita è di divisione se e soltanto se*

$$a, b \in \mathbb{A}, \quad ab = 0, \quad a \neq 0 \implies b = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Le traslazioni a sinistra $L_a : \mathbb{A} \ni x \rightarrow a \cdot x \in \mathbb{A}$ e a destra $R_a : \mathbb{A} \ni x \rightarrow x \cdot a \in \mathbb{A}$ sono morfismi \mathbb{K} -lineari di \mathbb{A} . Se \mathbb{A} ha dimensione finita, L_a ed R_a sono isomorfismi lineari se e soltanto se sono iniettive. La condizione che non vi siano divisori sinistri o destri di zero non banali ci dice che sia L_a che R_a sono iniettive, e quindi isomorfismi, quando $a \neq 0$. \square

OSSERVAZIONE 27.1.4. In un'algebra di divisione ogni elemento non nullo ha inversi destro e sinistro, ma questi possono essere distinti se l'algebra non è né associativa né commutativa. Inoltre, ci sono esempi di algebre unitarie non associative in cui per ogni elemento non nullo a si possono trovare elementi b, c con $ab = 1, ca = 1$, ma a è un divisore di 0.

Algebre normate.

DEFINIZIONE 27.1.5. Chiamiamo *normata* un'algebra reale unitaria \mathbb{A} su cui sia definita una norma $\mathbb{A} \ni a \rightarrow \|a\| \in \mathbb{R}$ per cui valgano:

$$\|1\| = 1 \quad \text{e} \quad \|a \cdot b\| \leq \|a\| \|b\|, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

Algebre commutative, associative, alternative. Su un'algebra \mathbb{A} possiamo definire

$$\begin{aligned} [a, b] &= a \cdot b - b \cdot a && \text{(il COMMUTATORE),} \\ [a, b, c] &= (a \cdot b) \cdot c - a \cdot (b \cdot c) && \text{(l'ALTERNATORE).} \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 27.1.6. Un'algebra \mathbb{A} si dice

- *commutativa*, se il commutatore è identicamente nullo;
- *associativa*, se l'alternatore è identicamente nullo;
- *alternativa* se l'alternatore è una 3-forma alternata.

L'alternatività¹ equivale cioè alla validità delle identità

$$(a \cdot a) \cdot b = a \cdot (a \cdot b), \quad (a \cdot b) \cdot a = a \cdot (b \cdot a), \quad a \cdot (b \cdot b) = (a \cdot b) \cdot b, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

LEMMA 27.1.7 (Identità di Moufang²). *In un'algebra alternativa \mathbb{A} valgono, per ogni $a, b, x, y \in \mathbb{A}$, le identità³*

$$(27.3) \quad (xax)y = x(a(xy)),$$

$$(27.4) \quad y(xax) = ((yx)a)x,$$

$$(27.5) \quad (xy)(ax) = x(ya)x$$

$$(27.6) \quad [y, xa, x] = -[y, x, a]x.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned} (xax)y - x(a(xy)) &= ((xa)x)y - (xa)(xy) + (xa)(xy) - x(a(xy)) = [xa, x, y] + [x, a, xy] \\ &= -[x, xa, y] - [x, xy, a] = -(x(xa))y + x((xa)y) - (x(xy))a + x((xy)a) \\ &= -(x^2a)y - (x^2y)a + x((xa)y + (xy)a) \\ &= -[x^2, a, y] - [x^2, y, a] - x^2(ay + ya) + x((xa)y + (xy)a) \\ &= x(-x(ay) - x(ya) + (xa)y + (xy)a) \\ &= x([x, y, a] + [x, a, y]) = 0. \end{aligned}$$

¹Per le algebre alternative vedi:

E. Artin: *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, New York, 1957,

R.D. Schafer, *On the algebras formed by the Cayley-Dickson process*. Amer. J. Math. **76** (1954), pp. 435-446.

²Ruth Moufang (1905-1977), prima matematica tedesca ad ottenere una cattedra di professore ordinario (nel 1957). Ha dimostrato nel 1933 che nel piano proiettivo di Cayley non vale il teorema di Desargues. (*Alternativkörper und der Satz von vollständigen Vierseit*, Abh. Math. Sem. Hamburg **9** (1933), pp.207-222.) Nel 1935 (*Zur Struktur von Alternativkörpern*, Math. Ann. **110** (1935), pp. 416-430) introdusse e studiò una nozione di *quasi-gruppo (Moufang loops)*, in cui all'associatività sono sostituite le identità di Moufang (27.3), (27.4), (27.5).

³Possiamo scrivere senza ambiguità xax perché $(xa)x = x(ax)$ in quanto \mathbb{A} è alternativa.

Questo dimostra la (27.3). La (27.4) si dimostra in modo del tutto analogo. Utilizzando la (27.3) otteniamo poi

$$\begin{aligned} (xy)(ax) - x(ya)x &= [x, y, ax] + x((y(ax)) - x(ya)x) = -[x, ax, y] - x[y, a, x] \\ &= -(xax)y + x((ax)y - [y, a, x]) = -x(a(xy)) + x((ax)y - [y, a, x]) \\ &= x([a, x, y] - [y, a, x]) = 0. \end{aligned}$$

Questo dimostra (27.5). Per concludere, mostriamo che la (27.4) e la (27.6) sono equivalenti. È infatti

$[y, xa, x] + [y, x, a]x = (y(xa))x - y((xa)x) + ((yx)a - y(xa))x = (yx)a x - y((xa)x)$
e nell'ultimo membro dell'uguaglianza possiamo scrivere $(xa)x = xax$ perché abbiamo supposto che \mathbb{A} fosse alternativa. \square

Dati degli elementi a_1, \dots, a_k di un'algebra A , definiamo per ricorrenza i monomi di grado minore o uguale ad m di a_1, \dots, a_k mediante

$$\begin{cases} \mathcal{M}on_0(a_1, \dots, a_k) = \mathbb{K}, \\ \mathcal{M}on_m(a_1, \dots, a_k) = \bigcup_{i=1}^k a_i \cdot \mathcal{M}on_{m-1}(a_1, \dots, a_k) \cup \bigcup_{i=1}^k \mathcal{M}on_{m-1}(a_1, \dots, a_k) \cdot a_i \\ \quad \cup \mathcal{M}on_{m-1}(a_1, \dots, a_k), \text{ se } m > 0, \\ \text{e poniamo } \mathcal{M}on(a_1, \dots, a_k) = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{M}on_m(a_1, \dots, a_k). \end{cases}$$

Osserviamo che, se \mathbb{A} non è associativa, $(a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$ potrebbe non essere un monomio di a, b .

LEMMA 27.1.8. *Siano a_1, \dots, a_k elementi di un'algebra alternativa \mathbb{A} . Allora, per ogni coppia di interi non negativi m_1, m_2 ,*

$$c \in \mathcal{M}on_{m_1}(a_1, \dots, a_k), d \in \mathcal{M}on_{m_2}(a_1, \dots, a_k) \implies c \cdot d \in \langle \mathcal{M}on_{m_1+m_2}(a_1, \dots, a_k) \rangle.$$

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per ricorrenza su $\mu = \inf\{m_1, m_2\}$. Se $\mu \leq 1$, l'affermazione si riduce alla definizione dei monomi di grado minore o uguale ad $m_1 + m_2$. Supponiamo $\mu > 1$ e l'affermazione vera per prodotti di monomi di cui uno almeno abbia grado minore di μ . Supponiamo che $m_1 \leq m_2$. Se $c = a_i \cdot a$, con $a \in \mathcal{M}on_{\mu-1}(a_1, \dots, a_k)$, allora

$$\begin{aligned} c \cdot d &= (a_i \cdot a) \cdot d = a_i \cdot (a \cdot d) + [a_i, a, d] = a_i \cdot (a \cdot d) - [a_i, d, a] \\ &= a_i \cdot (a \cdot d) - (a_i \cdot d) \cdot a + a_i \cdot (d \cdot a) \\ d \cdot c &= d \cdot (a_i \cdot a) = (d \cdot a_i) \cdot a - [d, a_i, a] = (d \cdot a_i) \cdot a + [a_i, d, a] \\ &= (d \cdot a_i) \cdot a + (a_i \cdot d) \cdot a - a_i \cdot (d \cdot a). \end{aligned}$$

Per l'ipotesi di ricorrenza, otteniamo che sia $(c \cdot d)$ che $(d \cdot c)$ sono combinazioni lineari di elementi di $\mathcal{M}on_{m_1+m_2}(a_1, \dots, a_k)$. Infatti $a \cdot d \in \langle \mathcal{M}on_{m_1+m_2-1}(a_1, \dots, a_k) \rangle$ per l'ipotesi induttiva perché $a \in \mathcal{M}on_{\mu-1}(a_1, \dots, a_k)$ e $d \in \mathcal{M}on_{m_2}(a_1, \dots, a_k)$ e quindi $a_i \cdot (a \cdot d) \in \langle \mathcal{M}on_{m_1+m_2}(a_1, \dots, a_k) \rangle$. Si ragiona in modo analogo per gli altri addendi nelle uguaglianze finali.

Supponiamo ora sia $c = a \cdot a_i$. Allora

$$c \cdot d = (a \cdot a_i) \cdot d = a \cdot (a_i \cdot d) + [a, a_i, d] = a \cdot (a_i \cdot d) + [a_i, d, a]$$

$$\begin{aligned}
&= a \cdot (a_i \cdot d) + (a_i \cdot d) \cdot a - a_i \cdot (d \cdot a), \\
d \cdot c &= d \cdot (a \cdot a_i) = (d \cdot a) \cdot a_i - [d, a, a_i] = (d \cdot a) \cdot a_i - [a_i, d, a] \\
&= (d \cdot a) \cdot a_i - (a_i \cdot d) \cdot a + a_i \cdot (d \cdot a),
\end{aligned}$$

e ancora si vede che tutti gli addendi delle ultime uguaglianze appartengono allo spazio vettoriale $\langle \text{Mon}_{m_1+m_2}(a_1, \dots, a_k) \rangle$ generato dai monomi di grado minore o uguale ad m_1+m_2 . \square

TEOREMA 27.1.9 (Artin). *L'algebra \mathbb{A} è alternativa se e soltanto se, per ogni coppia di elementi $a, b \in \mathbb{A}$, la sua sottoalgebra $\mathbb{K}[a, b]$ è associativa.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre senz'altro che \mathbb{A} sia unitaria.

Se $\mathbb{K}[a, b]$ è associativa per ogni $a, b \in \mathbb{A}$, allora l'alternatore si annulla quando due dei suoi argomenti sono uguali ed è perciò una forma alternata. Quindi l'algebra \mathbb{A} è alternativa.

Dimostriamo ora l'implicazione opposta.

Fissiamo due elementi a, b di \mathbb{A} . Per il Lemma 27.1.8, sarà sufficiente dimostrare che l'alternatore si annulla sui monomi di a, b .

Siano $p = p(a, b), q = q(a, b), r = r(a, b) \in \text{Mon}(a, b)$, di gradi, rispettivamente, minori o uguali a d_p, d_q, d_r . Sarà sufficiente dimostrare che l'alternatore $[p, q, r]$ è nullo per ogni scelta di monomi p, q, r , con gradi d_p, d_q, d_r maggiori o uguali ad uno. Ragioniamo per ricorrenza sulla somma $d = d_p + d_q + d_r \geq 3$. Due dei tre monomi p, q, r hanno l'ultimo fattore uguale. Possiamo supporre che questo sia a . Esaminiamo dapprima il caso in cui per uno il fattore sia a sinistra e per l'altro a destra. Poiché l'alternatore è una forma alternata, possiamo supporre che i monomi col fattore uguale siano il primo e l'ultimo. Utilizzando l'ipotesi induttiva (e ponendo uguale ad 1 il monomio di grado 0), possiamo scrivere $p = ap'$ ed $r = r'a$, con p' ed r' monomi in a, b , di gradi $\leq d_p - 1$ e $\leq d_r - 1$ rispettivamente. Allora, utilizzando (27.5) ed evitando di scrivere le parentesi per prodotti di monomi la somma dei cui gradi sia strettamente inferiore a d , otteniamo, per la (27.5),

$$[p, q, r] = [ap', q, r'a] = (ap'q')(r'a) - (ap')(q'r'a) = a(p'q'r'a) - a(p'q'r')a = 0.$$

Mostriamo che possiamo sempre ricondurci a questo caso. Se fosse $p = a \cdot p', r = a \cdot r'$, allora

$$\begin{aligned}
[ap', q, ar'] &= (ap'q) \cdot (ar') - (ap')(qar') = -[ap'q, a, r'] + (ap'qa)r' - (ap')(qar') \\
&= -[ap'q, a, r'] + [ap', qa, r'].
\end{aligned}$$

Analogamente, se fosse $p = p'a, r = r'a$, allora

$$\begin{aligned}
[p'a, q, r'a] &= (p'aq)(r'a) - (p'a)(q'r'a) = [p', aq, r'a] + p'(aqr'a) - (p'a)(q'r'a) \\
&= [p', aq, r'a] - [p', a, q'r'a].
\end{aligned}$$

Possiamo dunque ricondurci al caso in cui due monomi abbiamo lo stesso ultimo fattore, uno a sinistra, l'altro a destra. Come abbiamo visto in questo caso l'alternatore è nullo. La dimostrazione è completa. \square

★-algebre.

DEFINIZIONE 27.1.10. Un *coniugio* su un'algebra \mathbb{A} su \mathbb{K} è un'involuzione

$$\mathbb{A} \ni a \rightarrow a^* \in \mathbb{A}$$

che gode delle proprietà

$$(27.7) \quad a^{**} = a, \quad (\lambda a + \mu b)^* = \lambda a^* + \mu b^*, \quad (ab)^* = b^* a^*, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Chiamiamo *★-algebra* un'algebra \mathbb{A} su cui sia fissato un *coniugio*.

Diciamo che una *★-algebra reale* \mathbb{A} ammette una *norma compatibile* (con il coniugio) se

$$a + a^*, a \cdot a^* \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in \mathbb{A} \quad \text{ed} \quad a \cdot a^* > 0, \quad \text{se} \quad a \neq 0.$$

In questo caso definiamo⁴

$$\Re(a) = \frac{1}{2}(a + a^*), \quad \Im(a) = \frac{1}{2}(a - a^*), \quad \|a\| = \sqrt{a \cdot a^*} \geq 0, \quad \forall a \in \mathbb{A}.$$

OSSERVAZIONE 27.1.11. In una *★-algebra di divisione* con una *norma compatibile* il *reciproco* di un elemento non nullo a è $a^{-1} = a^* / \|a\|^2$.

LEMMA 27.1.12. In una *★-algebra reale alternativa* \mathbb{A} con *norma compatibile* vale l'*uguaglianza*

$$\|a \cdot b\| = \|a\| \|b\|, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

Se, inoltre, \mathbb{A} ha *dimensione finita*, allora \mathbb{A} è un'algebra di divisione.

DIMOSTRAZIONE. Se $a, b \in \mathbb{A}$, allora a, a^*, b, b^* appartengono alla sottoalgebra unitaria di \mathbb{A} generata da $\Im(a)$ ed $\Im(b)$. Per ipotesi $\mathbb{R}[\Im(a), \Im(b)]$ è associativa. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \|a \cdot b\|^2 &= (a \cdot b)(a \cdot b)^* = (a \cdot b) \cdot (b^* \cdot a^*) \\ &= a \cdot (b \cdot b^*) \cdot a^* = a \cdot \|b\|^2 \cdot a^* = (a \cdot a^*) \|b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2. \end{aligned}$$

Questo dimostra che in \mathbb{A} non ci sono divisori destri o sinistri di 0 non banali, e quindi, se \mathbb{A} ha *dimensione finita*, è un'algebra di divisione. \square

Ad una *norma compatibile* sulla *★-algebra* \mathbb{A} è associato il *prodotto scalare*

$$(27.8) \quad (a|b) = \frac{1}{2}(ab^* + ba^*), \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

Se \mathbb{A} è *alternativa*, abbiamo anche

$$(27.9) \quad \|a^*\| = \|a\|, \quad (a|b) = \frac{1}{2}(a^* b + b^* a), \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

⁴Richiamiamo l'attenzione sul fatto che questa notazione differisce dalla convenzione usuale per i numeri complessi di definire *parte immaginaria* il coefficiente *reale* y nella decomposizione $x + iy$ di un numero complesso nella somma di un numero reale x e di un immaginario puro iy .

27.2. La costruzione di Cayley-Dickson

In questo paragrafo consideriamo soltanto algebre *reali*.

La costruzione di Cayley-Dickson⁵ consiste nell'*estendere* una \star -algebra agiungendole un'*unità immaginaria*.

Data una \star -algebra \mathbb{A} , definiamo la sua estensione \mathbb{A}' nel modo seguente.

Sia j un elemento che non appartiene ad \mathbb{A} . Poniamo

$$(27.10) \quad \mathbb{A}' = \{a + jb \mid a, b \in \mathbb{A}\} \simeq \mathbb{A} \oplus \mathbb{A},$$

e definiamo su \mathbb{A}' una struttura di \star -algebra mediante le

$$(27.11) \quad (a + jb)(c + jd) = (ac - db^*) + j(a^*d + cb), \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{A},$$

$$(27.12) \quad (a + jb)^* = a^* - jb, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

LEMMA 27.2.1. *Le (27.11) e (27.12) definiscono una struttura di \star -algebra su \mathbb{A}' , che estende quella di \mathbb{A} .*

DIMOSTRAZIONE. Le prime due relazioni nella (27.7) sono facilmente verificate. Basta verificare che vale la terza, cioè che \star è un'anti-isomorfismo dell'algebra \mathbb{A}' . Siano $a, b, c, d \in \mathbb{A}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} [(a + jb)(c + jd)]^* &= [(ac - db^*) - j(a^*d + cb)]^* = (c^*a^* - b^*d^*) - j(a^*d + cb), \\ (c + jd)^*(a + jb)^* &= (c^* - jd)(a^* - jb) = (c^*a^* - b^*d^*) + j(-cb - a^*d). \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione. \square

Osserviamo che la struttura di \star -algebra di \mathbb{A}' si può anche riassumere nella tabella di moltiplicazione e coniugazione:

$$(27.13) \quad a(jb) = j(a^*b), \quad (ja)b = j(ba), \quad (ja)(jb) = -ba^*, \quad j^2 = -1, \quad j^* = -j.$$

L'ultima relazione ci dice che j non è né divisore destro né sinistro di zero, perché

$$\begin{aligned} 0 = (x + jy)j &= jx^* - y^* \implies x^* = 0, y^* = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0, \\ 0 = j(x + jy) &= jx - y \implies x = 0, y = 0. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 27.2.2. Per dare un'altra interpretazione della costruzione di \mathbb{A}' , introduciamo le traslazioni a sinistra e a destra rispetto agli elementi di \mathbb{A}'

$$L_a : \mathbb{A}' \ni x \rightarrow ax \in \mathbb{A}', \quad R_a : \mathbb{A}' \ni x \rightarrow xa \in \mathbb{A}', \quad \forall a \in \mathbb{A}'.$$

Nel caso in cui \mathbb{A} sia associativa, allora

$$(27.14) \quad L_a \circ L_{jb} = L_{jb} \circ L_{a^*}, \quad R_a \circ R_{jb} = R_{jb} \circ R_{a^*}, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

e le regole che definiscono il prodotto in \mathbb{A}' sono conseguenza delle (27.14).

LEMMA 27.2.3. *Se valgono le (27.14), allora \mathbb{A}' si ottiene da \mathbb{A} per mezzo della costruzione di Cayley-Dickson.*

⁵Leonard E. Dickson, *On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem*, Ann. Math, **20** (1919), pp. 155-171.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $j^2 = -1$ e valgano le (27.14). Allora, per ogni $a, b \in \mathbb{A}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} aj &= L_a \circ L_j(1) = L_j \circ L_{a^*}(1) = ja^*, \\ a(jb) &= L_a \circ L_j(b) = L_j \circ L_{a^*}(b) = j(a^*b), \\ (ja)b &= (a^*j)b = R_b \circ R_j(a^*) = R_j \circ R_{b^*}(a^*) = (a^*b^*)j = j(ba), \\ (ja)(jb) &= (ja)(b^*j) = L_{ja} \circ L_{b^*j} = L_b \circ L_{ja}(j) = b((ja)j) \\ &= b(R_j \circ R_a(j)) = b(R_{a^*} \circ R_j(j)) = -ba^*. \end{aligned}$$

□

Consideriamo su una \star -algebra la proprietà seguente:

$$(P) \quad (a + a^*)b = b(a + a^*), \quad \forall a, b \in \mathbb{A}, \quad aa^* = a^*a, \quad \forall a \in \mathbb{A}.$$

PROPOSIZIONE 27.2.4. *Supponiamo che il campo \mathbb{K} abbia caratteristica zero⁶.*

Siano \mathbb{A} una \star -algebra ed \mathbb{A}' la \star -algebra da essa ottenuta con la costruzione di Cayley-Dickson. Allora:

- (1) *Condizione necessaria e sufficiente affinché \mathbb{A}' sia commutativa è che $x^* = x$ per ogni $x \in \mathbb{A}$.*
- (2) *Condizione necessaria e sufficiente affinché \mathbb{A}' sia associativa è che \mathbb{A} sia associativa e commutativa.*
- (3) *Se \mathbb{A} ha la proprietà (P), allora anche \mathbb{A}' ha la proprietà (P), e viceversa.*
- (4) *Se \mathbb{A} ed \mathbb{A}' hanno la proprietà (P), allora condizione necessaria e sufficiente affinché \mathbb{A}' sia alternativa è che \mathbb{A} sia associativa.*

DIMOSTRAZIONE. (1). Se \mathbb{A}' è commutativa, allora $xj = jx^* = x^*j$ per ogni $x \in \mathbb{A}$ e quindi $x = x^*$ per ogni $x \in \mathbb{A}$.

(2). Supponiamo che \mathbb{A}' sia associativa. Allora, per ogni $a, b \in \mathbb{A}$,

$$j \cdot (ab) = (ja) \cdot b = j \cdot (ba) \Rightarrow ab = ba, \quad \text{perché } j \text{ non è divisore di zero,}$$

e quindi \mathbb{A} è commutativa.

Viceversa, se \mathbb{A} è associativa e commutativa, allora, essendo

$$\begin{aligned} (a_1 + jb_1)[(a_2 + jb_2)(a_3 + jb_3)] &= (a_1 + jb_1)[(a_2a_3 - b_3b_2^*) + j(a_2^*b_3 + a_3b_2)] \\ &= a_1a_2a_3 - a_1b_3b_2^* - a_2^*b_3b_1^* - a_3b_2b_1^* \\ &\quad + j(a_1^*a_2^*b_3 + a_1^*a_3b_2 + a_2a_3b_1 - b_3b_2^*b_1), \\ [(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2)](a_3 + jb_3) &= [a_1a_2 - b_2b_1^* + j(a_1^*b_2 + a_2b_1)](a_3 + jb_3) \\ &= a_1a_2a_3 - b_2b_1^*a_3 - b_3b_2^*a_1 - b_3b_1^*a_2^* \\ &\quad + j(a_2^*a_1^*b_3 - b_1b_2^*b_3 + a_3a_1^*b_2 + a_3a_2b_1), \end{aligned}$$

ne segue che \mathbb{A}' è associativa.

(3). Poiché il coniugio su \mathbb{A}' estende quello su \mathbb{A} , è chiaro che, se vale (P) su \mathbb{A}' , allora vale a maggior ragione su \mathbb{A} .

⁶basterebbe richiedere che la caratteristica sia diversa da 2, 3.

Per verificare l'implicazione opposta, basta osservare che, se vale la proprietà (P) per \mathbb{A} , allora, utilizzando le (27.13), abbiamo, per ogni $a, b \in \mathbb{A}$,

$$\begin{aligned}(a + a^*)(jb) &= j[(a + a^*)b] = (jb)(a + a^*), \\ (a + jb)(a + jb)^* &= (a + jb)(a^* - jb) = a \cdot a^* + b \cdot b^* + j(a^* \cdot b - a^* \cdot b) = a \cdot a^* + b \cdot b^*, \\ (a + jb)^*(a + jb) &= (a^* - jb) \cdot (a^* - jb)^* = a^* \cdot a + b \cdot b^*.\end{aligned}$$

Se $a \cdot a^* = a^* \cdot a$, i prodotti nelle ultime due righe sono uguali. Questo completa la dimostrazione della (3).

(4). Supponiamo che \mathbb{A}' sia alternativa. Allora

$$\begin{aligned}0 &= [a, b + jc, b + jc] = (a \cdot b + j(a^* \cdot c)) \cdot (b + jc) - a \cdot (b^2 - c \cdot c^* + j((b^* + b) \cdot c)) \\ &= ((a \cdot b) \cdot b - c \cdot (c^* \cdot a) - a \cdot b^2 + a(c \cdot c^*)) \\ &\quad + j((a \cdot b)^* \cdot c + b \cdot (a^* \cdot c) - (a^* \cdot ((b + b^*) \cdot c))) \\ &= ([a, b, b] + [c, c^*, a]) \\ &\quad + j((b^* \cdot a^*) \cdot c + b \cdot (a^* \cdot c) + [a^*, b + b^*, c] - ((b + b^*) \cdot a^*) \cdot c)\end{aligned}$$

perché $a \cdot (c \cdot c^*) = (c \cdot c^*) \cdot a$ ed $a^* \cdot (b + b^*) = (b + b^*) \cdot a^*$ per la proprietà (P)

$$= [c, c^*, a] + j([a^*, b + b^*, c] - [b, a^*, c]) = [c, c^*, a] + j[a^*, 2b + b^*, c]$$

ove abbiamo utilizzato il fatto che \mathbb{A} , essendo una sottoalgebra di \mathbb{A} , è alternativa,

$$\Rightarrow [a^*, 2b + b^*, c] = 0, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{A}.$$

Se siamo su un campo \mathbb{K} di caratteristica diversa da tre, l'equazione

$$2b + b^* = x \text{ ha soluzione } b = \frac{1}{3}(2x - x^*).$$

Vale quindi $[a, b, c] = 0$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{A}$ e quindi \mathbb{A} è associativa.

Mostriamo che, viceversa, se \mathbb{A} è associativa e vale la proprietà (P), allora \mathbb{A}' è alternativa. Dobbiamo verificare che l'alternatore si annulla quando due dei suoi argomenti sono uguali. Possiamo limitarci a considerare elementi in $\mathbb{A} \cup (j \cdot \mathbb{A})$. Abbiamo

$$\begin{aligned}[a, a, jb] &= a^2 \cdot jb - a \cdot (a \cdot jb) = j \cdot (a^{*2} \cdot b - a^* \cdot (a^* \cdot b)), \\ [a, jb, a] &= (a \cdot jb) \cdot a - a \cdot (jb \cdot a) = j(a \cdot (a^* \cdot b - a^* \cdot (a \cdot b))) \\ [jb, a, a] &= [j(a \cdot b)] \cdot a - (jb) \cdot a^2 = j(a \cdot (a \cdot b) - a^2 \cdot b), \\ [a, jb, jb] &= (j(a^* \cdot b)) \cdot jb + a \cdot (b \cdot b^*) = -b(b^* \cdot a) + a \cdot (b \cdot b^*), \\ [jb, a, jb] &= (j(ab)) \cdot (jb) - (jb) \cdot (j(a^*b)) = -b \cdot (b^*a) - (a^*b) \cdot b^*, \\ [jb, jb, a] &= -(b \cdot b^*) \cdot a - (jb) \cdot (j(ab)) = -(b \cdot b^*)a + (ab) \cdot b^*, \\ [ja, jb, jc] &= j((c \cdot b^*) \cdot a - (a \cdot b^*) \cdot c).\end{aligned}$$

Il primo ed il terzo si annullano per l'associatività; per il secondo, quarto, quinto e sesto dobbiamo utilizzare anche la proprietà (P); infine, per l'associatività

$$(27.15) \quad [ja, jb, jc] = j(c \cdot b^* \cdot a - a \cdot b^* \cdot c),$$

che si annulla senz'altro per $a = c$, mentre per $a = b$ o $b = c$ dobbiamo utilizzare la proprietà (P). \square

I numeri reali \mathbb{R} costituiscono una \star -algebra di divisione normata *reale*, in cui cioè $a^* = a$ per ogni elemento a . Osserviamo che, per le \star -algebre \mathbb{A} che si costruiscono successivamente a partire da \mathbb{R} ed iterando la costruzione di Cayley-Dickson, xx^* è un numero reale ed è il quadrato della norma, associata al prodotto scalare reale $(x|y) = \frac{1}{2}(xy^* + yx^*)$, e la proprietà (P) è equivalente al fatto che

$$x + x^* \in \mathbb{R}, \quad xx^* = \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{A}.$$

Al primo passo, otteniamo il campo \mathbb{C} dei numeri complessi: come \star -algebra di divisione normata è commutativa e associativa, ma non reale. Il passo successivo dà $\mathbb{C}' = \mathbb{H}$, il corpo non commutativo dei quaternioni. Abbiamo ottenuto una \star -algebra di divisione normata associativa, ma non commutativa. A partire dai quaternioni, otteniamo $\mathbb{C}' = \mathbb{O}$, l'algebra di divisione degli ottonioni (o ottave di Cayley), che è una \star -algebra normata che non è né associativa, né commutativa, ma alternata.

OSSERVAZIONE 27.2.5. Iterando il processo di Cayley-Dickson otteniamo una sequenza di \star -algebre normate, di dimensioni 16, 32, 64, \dots , che non sono né reali, né commutative, né alternative e non sono più algebre di divisione, sebbene ogni elemento non nullo abbia un inverso moltiplicativo. L'algebra di dimensione 16, dei *sedenioni* (e quindi a maggior ragione anche le successive) ha degli elementi che sono divisori di zero⁷. Quelli di norma uno formano un sottospazio omeomorfo al gruppo speciale compatto \mathbf{G}_2 .

27.3. Un teorema di Hurwitz

La classificazione delle algebre di divisione reali normate è dovuta ad Hurwitz⁸. Le algebre di divisione reali normate coincidono con quelle *alternate*.

Ci sono esempi di algebre di divisione reali che non sono né normate, né alternative. Nei lavori di Kervaire, Bott, e Milnor citati nella nota si dimostra comunque che tutte le algebre di divisione reali hanno dimensioni 1, 2, 4, 8.

Diamo qui una dimostrazione del teorema di classificazione per algebre reali alternate, che utilizza le algebre di Clifford ed alcune considerazioni elementari di algebra lineare.

⁷G. Moreno, *The zero divisors of the Cayley-Dickson algebras over the real numbers*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 4 (1998), pp.13-28.

⁸Adlof Hurwitz *Über die Composition der quadratischen formen von beliebig vielen Variablen*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1898), 309-316, per il caso delle algebre *normate*.

Michel Kervaire, *Non-parallelizability of the n sphere for $n > 7$* , Proc. Nat. Acad. Sci. USA **44** (1958), pp. 280-283 e

Raoul Bott, John Milnor, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), pp. 87-89,

hanno dimostrato indipendentemente il teorema generale, utilizzando tecniche di topologia algebrica.

Se \mathbb{A} è un'algebra reale, possiamo associare ad ogni $a \in \mathbb{A}$ le applicazioni lineari

$$L_a : \mathbb{A} \ni x \longrightarrow ax \in \mathbb{A}, \quad R_a : \mathbb{A} \ni x \longrightarrow xa \in \mathbb{A}.$$

Otteniamo in questo modo due applicazioni lineari

$$L : \mathbb{A} \ni a \longrightarrow L_a \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{R}}(\mathbb{A}), \quad R : \mathbb{A} \ni a \longrightarrow R_a \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{R}}(\mathbb{A}).$$

LEMMA 27.3.1. *Sia \mathbb{A} un'algebra di divisione reale, di dimensione finita n . Per ogni elemento a che non sia multiplo dell'identità sono univocamente determinati due numeri reali λ_0, λ_1 ed un elemento j_a di \mathbb{A} tali che*

$$(27.16) \quad a = \lambda_0 1 + \lambda_1 j_a, \quad j_a^2 = -1, \quad \text{ove} \quad \lambda_0 = \frac{1}{n} \text{trac}(L_a).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia a un elemento di \mathbb{A} . Se L_a ha un autovalore reale λ_0 , allora c'è in \mathbb{A} un elemento $x \neq 0$ per cui $ax = \lambda_0 x$. Da $(a - \lambda_0)x = 0$ segue che $a = \lambda_0$, perché abbiamo supposto che \mathbb{A} fosse di divisione. Quindi, se a non è un numero reale, l'endomorfismo L_a ha solo autovalori non reali. Sia $\lambda_0 + i\lambda_1$, con $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq 0$, un autovalore di L_a . Allora $-\lambda_1^2$ è un autovalore di $L_{a-\lambda_0}^2$. Possiamo quindi trovare un $x \neq 0$ in A per cui

$$(a - \lambda_0)[(a - \lambda_0)x] = -\lambda_1^2 x \implies \left[\left(\frac{a - \lambda_0}{\lambda_1} \right) + \left(\frac{a - \lambda_0}{\lambda_1} \right)^{-1} \right] x = 0.$$

Poiché abbiamo supposto che \mathbb{A} sia di divisione,

$$j_a = \left(\frac{a - \lambda_0}{\lambda_1} \right) \text{ soddisfa } j_a + j_a^{-1} = 0 \text{ e quindi } j_a^2 = -1.$$

È dunque $a = \lambda_0 + \lambda_1 j_a$. Osserviamo che L_{j_a} ha autovalori $\pm i$ ed è un endomorfismo reale. Ha quindi traccia nulla. La traccia di L_a è allora uguale a $n\lambda_0$, ove n è la dimensione di \mathbb{A} come spazio vettoriale reale. La dimostrazione è completa. \square

COROLLARIO 27.3.2. *Sia \mathbb{A} un'algebra di divisione reale di dimensione n . Allora*

$$(27.17) \quad V = \text{Im}(\mathbb{A}) = \{a \in \mathbb{A} \mid \text{trac}(L_a) = 0\}.$$

è un'ipersuperficie in \mathbb{A} , trasversale ad \mathbb{R} e

$$(27.18) \quad (\lambda + v \mid \mu + w) = \lambda\mu - \frac{1}{2n} \text{trac}(L_{(vw+vw)}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V$$

è un prodotto scalare su \mathbb{A} , con la proprietà che

$$(27.19) \quad L_v^2 = -\|v\|^2 I_{\mathbb{A}}, \quad \forall v \in V.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 27.3.1, il quadrato di un elemento di V è un numero reale negativo. Quindi la forma bilineare simmetrica (27.18) è un prodotto scalare su \mathbb{A} . Anche la (27.19) segue subito dal Lemma, perché $v^2 = -\|v\|^2$ per ogni $v \in V$. \square

LEMMA 27.3.3. *Sia \mathbb{A} un'algebra di divisione reale alternata e V il sottospazio dei suoi elementi immaginari, definito dalla (27.17). Allora l'applicazione*

$$(27.20) \quad \star : \mathbb{A} = \mathbb{R} \oplus V \ni (\lambda + v) \longrightarrow \lambda - v \in \mathbb{A}$$

è un'anti-involuzione dell'algebra \mathbb{A} .

DIMOSTRAZIONE. Per la (27.19), la $V \ni v \rightarrow L_v \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$ si estende ad una rappresentazione su \mathbb{A} dell'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell(V)$ (il prodotto scalare è la restrizione a V del prodotto scalare (27.18)).

In particolare, se $e_1, e_2 \in V$ sono ortogonali tra loro, con $e_1^2 = -1, e_2^2 = -1$, da $L_{e_1} \circ L_{e_2} + L_{e_2} \circ L_{e_1} = 0$ ricaviamo che $e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0$. Infatti $e_1 e_2 + e_2 e_1$ è il valore in 1 dell'endomorfismo $(L_{e_1} \circ L_{e_2} + L_{e_2} \circ L_{e_1})$ di \mathbb{A} . Dico che $e_1 e_2 \in V$. Infatti, poiché $\mathbb{R}[e_1, e_2]$ è associativa per il Teorema di Artin, $(e_1 e_2)^{-1} = e_2 e_1 = -e_1 e_2$ ci dice che $(e_1 e_2)^2 = -1$ e quindi che $L_{e_1 e_2}$ non ha autovalori reali.

Per dimostrare che $(xy)^* = y^* x^*$ per ogni $x, y \in \mathbb{A}$, è sufficiente considerare il caso in cui x e y siano due elementi linearmente indipendenti di V . Fissiamo allora una base ortonormale e_1, e_2 del sottospazio generato da x, y con $x = \lambda_1 e_1$ ed $y = \lambda_2 e_1 + \lambda_3 e_2$, con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Abbiamo

$$xy = \lambda_1 e_1 (\lambda_2 e_1 + \lambda_3 e_2) = -\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 (e_1 e_2).$$

Poiché abbiamo verificato che $e_1 e_2 \in V$ ed $e_2 e_1 = -e_1 e_2$, troviamo che

$$(xy)^* = -\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 (e_1 e_2) = -\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 (e_2 e_1) = y^* x^*.$$

La dimostrazione è completa. \square

Vale il

TEOREMA 27.3.4 (Hurwitz, Kervaire, Bott, Milnor). *Esistono, a meno di isomorfismi, esattamente quattro algebre reali di divisione alternate, di dimensioni 1, 2, 4, 8 rispettivamente.*

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathbb{A} un'algebra di divisione alternata.

Poiché per la (27.19) la $V \ni v \rightarrow L_v \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$ si estende ad una rappresentazione su \mathbb{A} dell'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell(V)$, la dimensione n dev'essere tale che $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n-1})$ abbia una rappresentazione non banale di dimensione n . Considerando la prima tabella in §26.2, si vede che questo è possibile solo se $n = 1, 2, 4, 8$.

Resta da verificare l'unicità. A questo fine mostreremo che le algebre di divisione normate formano una catena in cui ciascuna si ottiene dalla precedente mediante la costruzione di Cayley-Dickson.

Sia \mathbb{A} sia un'algebra di divisione e \mathbb{B} una sua sottoalgebra unitaria. La \mathbb{B} è anch'essa di divisione. Infatti, se x è un elemento non nullo di \mathbb{B} , è $L_{x^{-1}} = (L_x)^{-1}$. Infatti,

$$y = (L_x)^{-1}(z) \Leftrightarrow z = L_x(y) = xy \Leftrightarrow y = x^{-1}z = L_{x^{-1}}(z).$$

Quindi $L_{x^{-1}} \in \mathbb{R}[L_x]$. Se $f(\lambda)$ è un polinomio tale che $f(L_x) = L_{x^{-1}}$, abbiamo

$$x^{-1} = L_{x^{-1}}(1) = f(L_x)(1) = f(x),$$

e perciò $x^{-1} \in \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{B}$.

Se $\mathbb{B} \neq \mathbb{A}$, allora gli elementi dell'ortogonale \mathbb{B}^\perp di \mathbb{B} in \mathbb{A} sono immaginari e possiamo fissare $j \in \mathbb{B}^\perp$ con $j^2 = -1$. Poiché $L : V \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$ si estende ad un omomorfismo di $\mathcal{C}\ell(V)$ in $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$, abbiamo $L_j \circ L_w + L_w \circ L_j = 0$ se $w \in \text{Im}(\mathbb{B}) = \mathbb{B} \cap \text{Im}(\mathbb{A})$ e quindi, più in generale, che $L_j \circ L_x = L_{x^*} \circ L_j$ per ogni $x \in \mathbb{B}$. Applicando questi endomorfismi ad 1 otteniamo la formula di commutazione

$$jx = x^*j, \quad \forall x \in \mathbb{B}.$$

Questo ci permette di calcolare il prodotto in $\mathbb{B}[j]$ a partire dal prodotto in \mathbb{B} . Infatti, se $x, y \in \mathbb{B}$, otteniamo le formule:

$$\begin{aligned} x(jy) &= L_x \circ L_j(y) = L_j \circ L_{x^*}(y) = j(x^*y), \\ (jx)y &= (x^*j)y = R_y \circ R_j(x^*) = R_j \circ R_{y^*}(x^*) = (x^*y^*)j = j(yx), \\ (jx)(jy) &= (jx)(y^*j) = L_{jx} \circ L_{y^*}(j) = L_y \circ L_{jx}(j) \\ &= y((jx)j) = y((x^*j)j) = y(R_j^2(x^*)) = -yx^*. \end{aligned}$$

Nel derivare la seconda formula abbiamo utilizzato il fatto che anche la traslazione a destra definisce un'applicazione lineare $V \ni v \rightarrow R_v \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$ che verifica la condizione $R_v^2 = -\|v\|^2 I_{\mathbb{A}}$ e si estende quindi ad un omomorfismo $\mathcal{L}(V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$.

Nel derivare la terza, abbiamo utilizzato il fatto che, se $x \in \mathbb{B}$, allora jx è ortogonale a \mathbb{B} e verifica quindi $(jx)y = y^*(jx)$ per ogni y di \mathbb{B} .

Da queste otteniamo

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - db^*) + j(a^*d + cb), \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{B},$$

formula che dimostra che $\mathbb{B}[j]$ si ottiene a partire da \mathbb{B} per mezzo della costruzione di Cayley-Dickson.

Poiché la sola algebra di divisione reale di dimensione uno è \mathbb{R} , l'esistenza e unicità è conseguenza della costruzione di Cayley-Dickson. \square

27.4. Gli ottonioni

Abbiamo esaminato in precedenza la struttura del corpo non commutativo dei quaternioni. In questo paragrafo discutiamo quella dell'algebra di divisione reale di dimensione otto, alternativa ma non associativa, che abbiamo costruito in precedenza con il metodo di Cayley-Dickson.

DEFINIZIONE 27.4.1. L'algebra di divisione normata di dimensione otto si indica con \mathbb{O} e si dice *degli ottonioni, od ottave di Cayley*.

La costruzione di Cayley-Dickson ci dà:

LEMMA 27.4.2. (1) Se e_1 è un qualsiasi ottonione immaginario, la sottoalgebra unitaria $\mathbb{R}[e_1]$ di \mathbb{O} è isomorfa a \mathbb{C} .

(2) Fissati due ottonioni immaginari e_1, e_2 ortogonali tra loro la sottoalgebra $\mathbb{R}[e_1, e_2]$ è isomorfa ad \mathbb{H} .

(3) Possiamo trovare tre ottonioni immaginari e_1, e_2, e_3 , ortogonali tra loro, tali che $e_2 \notin \mathbb{R}[e_1] \simeq \mathbb{C}$, $e_3 \notin \mathbb{R}[e_1, e_2] \simeq \mathbb{H}$, $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3] = \mathbb{O}$.

(4) Per ogni tripletta e_1, e_2, e_3 di ottonioni immaginari ortogonali tra loro, tali che $e_2 \notin \mathbb{R}[e_1] \simeq \mathbb{C}$, $e_3 \notin \mathbb{R}[e_1, e_2] \simeq \mathbb{H}$, risulta $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3] = \mathbb{O}$. \square

DEFINIZIONE 27.4.3. Una tripletta e_1, e_2, e_3 di ottonioni immaginari, con

$$(27.21) \quad e_i^2 = -1, \quad i = 1, 2, 3, \quad e_i e_j + e_j e_i = 0, \quad \forall 1 \leq i < j \leq 3, \quad e_3 \notin \mathbb{R}[e_1, e_2]$$

si dice *generatrice*.

Il Lemma 27.4.2 ci dice che *esistono triplette generatrici*. Si può completare la tripletta generatrice aggiungendo le quattro radici di -1 :

$$(27.22) \quad e_4 = e_1e_2, \quad e_5 = e_2e_3, \quad e_6 = e_3e_4, \quad e_7 = e_4e_5.$$

Per calcolare la tabella di moltiplicazione di queste unità immaginarie possiamo pensare che \mathbb{O} è stata ottenuta da $\mathbb{H} = \mathbb{R}[e_1, e_2] = \langle 1, e_1, e_2, e_4 \rangle$ con il procedimento di Cayley-Dickson per la scelta $j = e_3$. Dobbiamo quindi esprimere e_5, e_6, e_7 come prodotto di e_3 per un quaternioni. Ricordiamo che, se $q \in \mathbb{H} = \mathbb{R}[e_1, e_2]$, allora $qe_3 = e_3q^*$. Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} e_5 &= e_2e_3 = -e_3e_2, & e_6 &= e_3e_4, \\ e_7 &= e_4e_5 = -e_4(e_3e_2) = e_3(e_4e_2) = -e_3e_1. \end{aligned}$$

Possiamo quindi ricavare la tabella di moltiplicazione delle unità immaginarie e_1, \dots, e_7 dalle

$$\begin{cases} e_1e_2 = -e_2e_1 = e_4, \\ e_2e_4 = -e_4e_2 = e_1, \\ e_4e_1 = -e_1e_4 = e_2, \end{cases} \quad \begin{cases} e_5 = -e_3e_2 = -e_2e_3, \\ e_6 = e_3e_4 = -e_4e_3, \\ e_7 = -e_3e_1 = e_1e_3. \end{cases}$$

La seguente tabella riporta alla i -esima riga e j -esima colonna il prodotto dell'elemento che sta nella i -esima riga per quello che sta nella j -esima colonna.

1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Ciascun prodotto si può calcolare a partire dalle identità stabilite sopra. Ad esempio,

$$e_5e_4 = (-e_3e_2)e_4 = (j(-e_2))e_4 = j[(e_4)(-e_2)] = je_1 = e_3e_1 = -e_7.$$

OSSERVAZIONE 27.4.4. L'insieme $\{\pm 1\} \cup \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq 7\}$, con la restrizione del prodotto in \mathbb{O} , costituisce un esempio di *Moufang loop* finito, di ordine 16.

27.5. G_2

Élie Cartan⁹ osservò, nel 1914, che il più piccolo dei gruppi semplici eccezionali scoperti da Killing¹⁰ si può identificare col gruppo degli automorfismi di \mathbb{O} . Utilizziamo questo risultato di Cartan come una definizione.

⁹Les groupes réels simples et continus, Ann. Sci. École Norm. Sup. **31** (1914), pp. 255-262.

¹⁰Wilhelm Killing, Die Zusammensetzung der stetigen/endllichen Transformationsgruppen, Mathematische Annalen, vol. **31**, 2, (1888) pp. 252-290, vol. **33**, 1 (1888), pp.1-48 vol. **34**, 1, (1889), pp. 57-122, vol. **36**, 2 (1890), pp. 161-189.

DEFINIZIONE 27.5.1. Indichiamo con \mathbf{G}_2 il gruppo degli automorfismi di \mathbb{O} :

$$(27.23) \quad \mathbf{G}_2 = \{\phi \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}) \mid \phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \forall a, b \in \mathbb{O}\}.$$

PROPOSIZIONE 27.5.2. \mathbf{G}_2 è un gruppo di Lie compatto, connesso e semplicemente connesso, di dimensione 14. La sua algebra di Lie

$$(27.24) \quad \mathfrak{g}_2 = \text{der}(\mathbb{O}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}) \mid X(ab) = (X(a))b + a(X(b)), \forall a, b \in \mathbb{O}\}$$

è l'algebra delle derivazioni di \mathbb{O} .

DIMOSTRAZIONE. \mathbf{G}_2 è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$ e quindi un gruppo di Lie. La sua algebra di Lie è quella delle derivazioni¹¹ di \mathbb{O} .

Gli elementi di \mathbf{G}_2 operano in modo semplicemente transitivo sulle triplette generatrici. Fissata come punto base una tripletta generatrice (e_1, e_2, e_3) , possiamo identificare un elemento $\phi \in \mathbf{G}_2$ con la tripletta generatrice $(\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3))$. La $\mathbf{G}_2 \ni \phi \rightarrow \phi(e_1)$ è una fibrazione di \mathbf{G}_2 sulla sfera unitaria S^6 dello spazio \mathbb{R}^7 degli ottonioni immaginari. Sia $F_1 = \{\phi \in \mathbf{G}_2 \mid \phi(e_1) = e_1\}$ la fibra su e_1 . Abbiamo allora una fibrazione $F_1 \ni \phi \rightarrow \phi(e_2) \in S^5$ di F_1 sulla sfera unitaria S^5 dello spazio \mathbb{R}^6 degli ottonioni immaginari perpendicolari ad e_1 .

La fibra $F_2 = \{\phi \in F_1 \mid \phi(e_2) = e_2\}$ è diffeomorfa alla sfera S^3 nello spazio \mathbb{R}^4 degli ottonioni immaginari ortogonali ad $\mathbb{H} = \mathbb{R}[e_1, e_2]$. Questo mostra che \mathbf{G}_2 è connesso, semplicemente connesso, compatto, di dimensione $6 + 5 + 3 = 14$. La semplice connessione segue dalle successioni esatte di Serre:

$$0 = \pi_2(S^5) \longrightarrow \pi_1(F_2) \longrightarrow \pi_1(F_1) \longrightarrow \pi_1(S^5) = 0,$$

$$0 = \pi_2(S^6) \longrightarrow \pi_1(F_1) \longrightarrow \pi_1(\mathbf{G}_2) \longrightarrow \pi_1(S^6) = 0,$$

perché $\pi_1(F_2) = \pi_1(S^3) = 0$. □

27.5.1. Trialità. Siano dati tre spazi vettoriali reali V_1, V_2, V_3 di dimensione finita ed un'applicazione trilineare

$$(27.25) \quad t : V_1 \times V_2 \times V_3 \ni (v_1, v_2, v_3) \longrightarrow t(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}.$$

Per ogni permutazione $(i, j, k) \in \mathbf{S}_3$ consideriamo l'applicazione bilineare

$$m_{i,j} : V_i \times V_j \ni (v_i, v_j) \longrightarrow m_{i,j}(v_i, v_j) = \{V_k \ni v_k \rightarrow t(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}\} \in V_k^*.$$

DEFINIZIONE 27.5.3. Diciamo che la (27.25) è una *trialità* se, per ogni coppia (i, j) con $1 \leq i < j \leq 3$ ed ogni scelta di $v_i \in V_i \setminus \{0\}$, $v_j \in V_j \setminus \{0\}$, il funzionale lineare $m_{i,j}(v_i, v_j)$ è diverso da zero.

Consideriamo il prodotto $m = m_{1,2}$. Per ogni $v_1 \neq 0$ fissato, l'applicazione

$$V_2 \ni v_2 \longrightarrow m(v_1, v_2) \in V_3^*$$

è un isomorfismo lineare. Analogamente, per ogni $v_2 \neq 0$ fissato, la

$$V_1 \ni v_1 \longrightarrow m(v_1, v_2) \in V_3^*$$

¹¹L'algebra di Lie del gruppo degli automorfismi di un'algebra reale è quella delle sue derivazioni.

è un isomorfismo lineare. Quindi, se fissiamo due elementi non nulli $\epsilon_1 \in V_1$ ed $\epsilon_2 \in V_2$, otteniamo delle identificazioni di V_1 e V_2 con il duale $V = V_3^*$ di V_3 . In particolare, se i tre spazi hanno dimensione finita, alla trialità ed alla scelta di ϵ_1, ϵ_2 risulta associato un prodotto

$$(27.26) \quad m : V \times V \ni (v, w) \longrightarrow v \times w \in V.$$

Osserviamo che ϵ_1, ϵ_2 ed $\epsilon_1 \times \epsilon_2$ definiscono lo stesso elemento e di V . Poiché la moltiplicazione a destra e a sinistra per un elemento di V è un'applicazione invertibile, la V , con la moltiplicazione (27.26), è un'algebra di divisione. Viceversa, il prodotto in un'algebra di divisione definisce una trialità.

L'applicazione

$$(27.27) \quad V_8 \times S_8^+ \ni (v, s) \longrightarrow v \times s \in S_8^-$$

definisce una trialità, il cui gruppo degli automorfismi è $\mathbf{Spin}(8)$. Per ottenere il gruppo G_2 , dobbiamo fissare in ciascuno degli spazi V_8 ed S_8^+ un vettore unitario. Il sottogruppo di $\mathbf{Spin}(8)$ che fissa un vettore unitario di V_8 è $\mathbf{Spin}(7)$. Quando restringiamo la rappresentazione S_8^+ a $\mathbf{Spin}(7)$, otteniamo una rappresentazione $S_7 \simeq \mathbb{R}^8$. Quindi G_2 è il sottogruppo di $\mathbf{Spin}(7)$ che fissa un vettore unitario della sfera unitaria S^7 di S_7 . Poiché $\mathbf{Spin}(7)$ opera transitivamente su $S^7 \subset S_7$, otteniamo che

$$(27.28) \quad S^7 \simeq \mathbf{Spin}(7)/G_2.$$

Quindi: $\mathbf{Spin}(7)$ è il sottogruppo di $\mathbf{Spin}(8)$ che fissa 1 nella rappresentazione vettoriale \mathbb{O} e G_2 è il sottogruppo che fissa 1 nella rappresentazione spinoriale S_8^+ (e quindi anche in S_8^-).

In particolare abbiamo la successione esatta di Serre

$$\cdots \longrightarrow \pi_{h+1}(S^7) \longrightarrow \pi_h(G_2) \longrightarrow \pi_h(\mathbf{Spin}(7)) \longrightarrow \cdots$$

In particolare, poiché

$$\pi_h(\mathbf{Spin}(7)) = \begin{cases} 0 & \text{per } h = 0, 1, 2, 4, \\ \mathbb{Z} & \text{per } h = 3, \end{cases}$$

e $\pi_h(S^7) = 0$ se $h < 7$, otteniamo

$$\text{PROPOSIZIONE 27.5.4. } \pi_h(G_2) = 0 \text{ se } h = 0, 1, 2, 4 \text{ e } \pi_3(G_2) = \mathbb{Z}. \quad \square$$

La rappresentazione vettoriale \mathbb{O} di $\mathbf{Spin}(8)$ definisce un monomorfismo di gruppi di Lie

$$G_2 \hookrightarrow \mathbf{Spin}(8)$$

e quindi, a livello di algebre di Lie, un monomorfismo

$$\mathfrak{g}_2 \hookrightarrow \mathfrak{o}(8).$$

La dimensione del gruppo ortogonale, e quindi dell'algebra $\mathfrak{o}(8)$, è 28, doppia di quella di \mathfrak{g}_2 .

Caratterizziamo un complemento vettoriale di \mathfrak{g}_2 in $\mathfrak{o}(8)$. Ricordiamo che il prodotto scalare su \mathbb{O} è definito da

$$(x|y) = \Re e(x^*y), \quad \forall x, y \in \mathbb{O}.$$

LEMMA 27.5.5. Per ogni $a \in \text{Im}(\mathbb{O})$, gli endomorfismi L_a ed R_a appartengono all'algebra di Lie del gruppo ortogonale di \mathbb{O} . Vale la decomposizione in somma diretta:

$$(27.29) \quad \mathfrak{o}(8) = \mathfrak{g}_2 \oplus L_{\text{Im}(\mathbb{O})} \oplus R_{\text{Im}(\mathbb{O})}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $x \in \mathbb{O}$, il coniugato x^* appartiene alla sottoalgebra $\mathbb{R}[x] = \mathbb{R}[\text{Im}(x)]$. Quindi, poiché \mathbb{O} è alternativa, se $a, x \in \mathbb{O}$, allora la sottoalgebra generata da a ed x contiene anche a^* ed x^* ed è associativa per il teorema di Artin. Abbiamo allora, se $x \in \mathbb{O}$ ed $a \in \text{Im}(\mathbb{O})$,

$$2(x|ax) = x^*(ax) + (ax)^*x = x^*ax + x^*a^*x = x^*ax - x^*ax = 0, \quad (a^* = -a),$$

$$2(x|xa) = x^*(xa) + (xa)^*x = x^*xa + a^*x^*x = (x^*x)a - a(x^*x) = 0, \quad (x^*x \in \mathbb{R}).$$

Questo dimostra che $L_a, R_a \in \mathfrak{o}(8)$. Abbiamo poi $L_{\text{Im}(\mathbb{O})} \cap R_{\text{Im}(\mathbb{O})} = \{0\}$, perché, se $L_a = R_b$, allora $a = L_a(1) = R_b(1) = b$ ed $L_a = R_a$ significa che a sta nel centro di \mathbb{O} e quindi è uno scalare.

Infine, se $L_a + R_b$ è una derivazione, deve essere $b = -a$ perché le derivazioni si annullano sul centro \mathbb{R} di \mathbb{O} . Se $L_a - R_a$ fosse una derivazione di \mathbb{O} , avremmo

$$\begin{aligned} 0 &= (L_a - R_a)(xy) - ((L_a - R_a)x)y - x((L_a - R_a)y) \\ &= a(xy) - (xy)a - (ax)y + (xa)y - x(ay) + x(ya) \\ &= -[a, x, y] - [x, y, a] + [x, a, y] = -3[a, x, y], \quad \forall x, y \in \mathbb{O}. \end{aligned}$$

Dimostriamo che a non può essere un immaginario non nullo. Infatti, se lo fosse, potremmo, a meno di sostituirlo con un suo multiplo reale, supporre che a sia il primo elemento e_1 di una terna generatrice e_1, e_2, e_3 . Ma

$$[e_1, e_2, e_3] = e_4e_3 - e_1(e_2e_3) = -e_3e_4 + e_1(e_3e_2) = -e_3(e_4 + e_1e_2) = -2e_3e_4 \neq 0$$

ci darebbe allora una contraddizione. Quindi

$$\mathfrak{g}_2 \cap (L_{\text{Im}(\mathbb{O})} \oplus R_{\text{Im}(\mathbb{O})}) = \{0\}.$$

La dimostrazione è completa. \square

Poniamo

$$\text{ad}_{\text{Im}(\mathbb{O})} = \{(L_a - R_a) = \text{ad}_a \mid a \in \text{Im}(\mathbb{O})\}.$$

PROPOSIZIONE 27.5.6. Abbiamo le inclusioni di algebre di Lie

$$(27.30) \quad \mathfrak{g}_2 \hookrightarrow \mathfrak{o}(\text{Im}(\mathbb{O})) = \mathfrak{g}_2 \oplus \text{ad}_{\text{Im}(\mathbb{O})} \hookrightarrow \mathfrak{o}(\mathbb{O}) = \mathfrak{g}_2 \oplus L_{\text{Im}(\mathbb{O})} \oplus R_{\text{Im}(\mathbb{O})}. \quad \square$$

Indichiamo con V_7 lo spazio vettoriale di dimensione sette $\text{Im}(\mathbb{O})$ degli ottonioni immaginari. Il gruppo \mathbf{G}_2 opera su V_7 : questa è la rappresentazione irriducibile non banale di dimensione minima di \mathbf{G}_2 .

Come nel caso dei quaternioni, la restrizione del prodotto agli ottonioni immaginari definisce, da un lato, il prodotto scalare in V_7 come l'opposto della sua parte reale

$$(v_1|v_2) = \Re(v_1^* \cdot v_2) = -\Re(v_1 \cdot v_2) = -\frac{1}{2}(v_1 \cdot v_2 + v_2 \cdot v_1), \quad \forall v_1, v_2 \in \text{Im}(\mathbb{O}) = V_7,$$

mentre la sua parte immaginaria il prodotto vettoriale

$$v_1 \times v_2 = \text{Im}(v_1 \cdot v_2) = \frac{1}{2}(v_1 \cdot v_2 - v_2 \cdot v_1).$$

Osserviamo che il prodotto vettoriale si riduce nei fatti a quello dei quaternioni: se i due vettori v_1 e v_2 sono proporzionali, $v_1 \times v_2 = 0$. Altrimenti, la sottoalgebra di \mathbb{O} da essi generata è isomorfa ad un'algebra di quaternioni, ed il risultato del prodotto vettore $v_1 \times v_2$ appartiene a $\mathbb{R}[v_1, v_2] \simeq \mathbb{H}$.

Poiché $\|v_1 \cdot v_2\| = \|v_1\| \cdot \|v_2\|$ e $V_7 \perp \mathbb{R}$, abbiamo

$$\|v_1 \times v_2\|^2 + |(v_1|v_2)|^2 = \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2.$$

Poiché $(v_1|v_2) = \cos \widehat{v_1 v_2} \cdot \|v_1\| \cdot \|v_2\|$, Questa formula equivale a

$$\|v_1 \times v_2\| = |\sin \widehat{v_1 v_2}| \cdot \|v_1\| \cdot \|v_2\|.$$

Abbiamo poi

$$(v_1|v_2) = -\frac{1}{6} \text{trac}(v_1 \times (v_2 \times \cdot))$$

e quindi dal prodotto vettoriale possiamo ottenere la formula per il prodotto degli ottonioni immaginari e quindi degli ottonioni. Da questo segue che

PROPOSIZIONE 27.5.7. *Il gruppo G_2 ha una rappresentazione fedele come il gruppo delle trasformazioni lineari di V_7 che preservano il prodotto vettore.* \square

Enunciamo infine, senza darne la dimostrazione completa, la rappresentazione esplicita degli elementi di \mathfrak{g}_2 come algebra di endomorfismi di \mathbb{O} e di V_7 .

PROPOSIZIONE 27.5.8. *Per ogni coppia di elementi $v_1, v_2 \in V_7$,*

$$\mathbb{O} \ni a \longrightarrow D_{v_1, v_2}(a) = [[v_1, v_2], a] - 3[v_1, v_2, a] \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$$

è una derivazione.

L'algebra \mathfrak{g}_2 delle derivazioni di \mathbb{O} è il sottospazio vettoriale di $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$ generato dalle D_{v_1, v_2} al variare di v_1, v_2 in V_7 . \square

27.6. Algebre di Jordan, geometria proiettiva ed F_4

Le algebre di Jordan¹² furono introdotte nel 1932 per formalizzare la struttura dei possibili *osservabili* della meccanica quantistica.

DEFINIZIONE 27.6.1. Chiamiamo *di Jordan* un'algebra commutativa e unitaria \mathbb{A} , il cui prodotto $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \ni (a, b) \rightarrow a \circ b \in \mathbb{A}$ soddisfi l'IDENTITÀ DI JORDAN

$$(27.31) \quad a \circ (b \circ a^2) = (a \circ b) \circ a^2.$$

Un'algebra di Jordan è con potenza associativa¹³ e, più in generale, soddisfa le identità

$$(27.32) \quad a^m \circ (b \circ a^n) = (a^m \circ b) \circ a^n, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

DEFINIZIONE 27.6.2. Un'algebra di Jordan \mathbb{A} si dice *formalmente reale* se

$$(27.33) \quad a_1, \dots, a_m \in \mathbb{A}, \quad a_1^2 + \dots + a_m^2 = 0 \implies a_1 = 0, \dots, a_m = 0.$$

¹²Ernst Pascual Jordan (1902-1980) fu un matematico e fisico teorico tedesco, che ha dato contributi significativi alla meccanica quantistica e alla teoria quantistica dei campi.

¹³Questo significa che tutte le sue sottoalgebre generate da un singolo elemento sono associative.

OSSERVAZIONE 27.6.3. Un'algebra commutativa e con potenza associativa che soddisfi (27.33) è necessariamente di Jordan. La (27.31) è cioè una conseguenza di (27.33) e della $a^m \circ a^n = a^{m+n}$, per ogni $a \in \mathbb{A}$ ed $m, n \in \mathbb{N}$.

TEOREMA 27.6.4. *La algebre di Jordan formalmente reali semplici sono le seguenti:*

- (1) $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^\top = X\}$, con $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$,
- (2) $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^* = X\}$, con $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$,
- (3) $\mathcal{H}_n(\mathbb{H}) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^* = X\}$, con $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$,
- (4) $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ con il prodotto

$$(v_1, \lambda_1) \circ (v_2, \lambda_2) = (\lambda_2 v_1 + \lambda_1 v_2, (v_1 | v_2) + \lambda_1 \lambda_2),$$

- (5) $\mathcal{H}_3(\mathbb{O}) = \{X \in \mathbb{O}^{3 \times 3} \mid X^* = X\}$ con $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$.

Ogni algebra di Jordan formalmente reale si decompone nella somma diretta delle algebre di Jordan formalmente reali semplici di questa lista. \square

Le algebre del tipo (4) si dicono anche *fattori di Spin* o *di tipo Clifford* (sono infatti le *abelianizzate* delle corrispondenti algebre di Clifford).

L'algebra (5) è l'*algebra di Jordan eccezionale*, o *algebra di Albert*¹⁴. Il fatto che $\mathcal{H}_n(\mathbb{O})$ sia un'algebra di Jordan per $n = 1, 2, 3$ è conseguenza del fatto che \mathbb{O} è alternata¹⁵.

OSSERVAZIONE 27.6.5. Le algebre $\mathcal{H}_2(\mathbb{K})$ sono isomorfe a fattori di Spin. Valgono infatti gli isomorfismi

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2(\mathbb{R}) &\simeq \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}, & \mathcal{H}_2(\mathbb{C}) &\simeq \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}, \\ \mathcal{H}_2(\mathbb{H}) &\simeq \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}, & \mathcal{H}_2(\mathbb{O}) &\simeq \mathbb{R}^9 \oplus \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sia \mathbb{A} un'algebra di Jordan formalmente reale.

DEFINIZIONE 27.6.6. Chiamiamo *positivi* gli elementi di \mathbb{A} che sono somme di quadrati. Definiamo su \mathbb{A} la relazione di ordinamento parziale

$$a < b \iff b - a \text{ è positivo.}$$

Chiamiamo *proiezione* un elemento p di \mathbb{A} tale che $p^2 = p$.

Le proiezioni non nulle sono elementi positivi. Poniamo

$$\mathcal{Pr}(\mathbb{A}) = \{p \in \mathbb{A} \mid p^2 = p\}.$$

Il *rango* di una proiezione $p \in \mathcal{Pr}(\mathbb{A})$ è l'estremo superiore degli interi r per cui si possa trovare una sequenza di proiezioni distinte p_1, \dots, p_r tali che

$$0 = p_0 < p_1 < \dots < p_{r-1} < p_r = p.$$

Conveniamo che 0 abbia rango 0. Indichiamo con $\mathcal{Pr}^h(\mathbb{A})$ l'insieme delle proiezioni di rango h di \mathbb{A} .

¹⁴A. Adrian Albert, "A structure theory for Jordan algebras", Annals of Mathematics. Second Series 48 (3) (1947), pp. 546-567.

¹⁵vedi: Nathan Jacobson, *Structure and Representations of Jordan Algebras*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol.39, (1968).

LEMMA 27.6.7. *Abbiamo isomorfismi naturali*

$$\mathcal{P}r^1(\mathcal{H}_{n+1}(\mathbb{K})) \simeq \mathbb{K}\mathbb{P}^n, \quad \text{per } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}.$$

DIMOSTRAZIONE. Associamo ad $X = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{1 \times (n+1)}$ la matrice

$$(27.34) \quad X^* \cdot X = (x_i^* x_j)_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{H}_{n+1}(\mathbb{K}).$$

Se $\|X\| = 1$, allora X^*X è una proiezione di rango uno e tutti gli elementi di $\mathcal{P}r^1(\mathcal{H}_{n+1}(\mathbb{K}))$ hanno questa forma. L'applicazione $X \rightarrow X^*X$ definisce per passaggio al quoziente un diffeomorfismo tra $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ e $\mathcal{P}r^1(\mathcal{H}_{n+1}(\mathbb{K}))$. \square

OSSERVAZIONE 27.6.8. Abbiamo $\mathcal{P}r^1(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}) = \{(v, \lambda) \mid \|v\|^2 + \lambda^2 = 1\} = \mathbb{S}^n$.

Possiamo ispirarci alla caratterizzazione degli spazi proiettivi del Lemma 27.6.7 per definire la retta ed il piano proiettivo associati ad una qualsiasi \star -algebra di divisione alternativa \mathbb{K} , utilizzando il fatto che gli $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ sono in questo caso algebre di Jordan per $n = 1, 2, 3$ (cf. ad esempio N.Jacobson, op.cit.).

DEFINIZIONE 27.6.9. Chiamiamo *retta proiettiva su \mathbb{K}* , ed indichiamo con $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$, lo spazio $\mathcal{P}r^1(\mathcal{H}_2(\mathbb{K}))$ e *piano proiettivo su \mathbb{K}* lo spazio $\mathcal{P}r^1(\mathcal{H}_3(\mathbb{K}))$.

È in particolare

$$\mathcal{P}r^1(\mathcal{H}_2(\mathbb{K})) = \left\{ \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} (x \ y) = \begin{pmatrix} x^*x & x^*y \\ y^*x & y^*y \end{pmatrix} \mid \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1 \right\}.$$

Ad un elemento non nullo $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ possiamo far corrispondere il punto

$$[(x, y)] = \frac{1}{\|x\|^2 + \|y\|^2} \begin{pmatrix} x^*x & x^*y \\ y^*x & y^*y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}\mathbb{P}^1.$$

Otteniamo così una proiezione $\mathbb{K}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^1$. Le fibre di questa proiezione sono le *rette* di \mathbb{K}^2 . Se $y \neq 0$, allora (x, y) ed $(y^{-1}x, 1)$ rappresentano lo stesso punto. Infatti

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \|y^{-1}x\|^2} \begin{pmatrix} (y^{-1}x)^* \cdot (y^{-1}x) & (y^{-1}x)^* \\ (y^{-1}x) & 1 \end{pmatrix} &= \frac{\|y\|^2}{\|x\|^2 + \|y\|^2} \begin{pmatrix} \|x\|^2/\|y\|^2 & x^*[y^*]^{-1} \\ y^{-1}x & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|x\|^2 + \|y\|^2} \begin{pmatrix} x^*x & x^*y \\ y^*x & y^*y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

in quanto la sottoalgebra generata da x ed y è associativa. Analogamente, se $x \neq 0$, è $[(x, y)] = [(1, x^{-1}y)]$. Abbiamo perciò

$$\pi^{-1}([(x, y)]) = \begin{cases} \{(a \cdot (x^{-1}y), a) \mid a \in \mathbb{K}^*\} & \text{se } x \neq 0, \\ \{(a, a \cdot (y^{-1}x)) \mid a \in \mathbb{K}^*\} & \text{se } y \neq 0. \end{cases}$$

Consideriamo il caso in cui \mathbb{K} sia la \star -algebra di divisione alternata \mathbb{O} degli ottonioni.

PROPOSIZIONE 27.6.10. *Abbiamo l'isomorfismo $\mathbb{O}\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{S}^8$.* \square

DEFINIZIONE 27.6.11. Indichiamo con \mathbf{F}_4 il gruppo degli automorfismi dell'algebra di Jordan eccezionale $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ e con \mathfrak{f}_4 la sua corrispondente algebra di Lie, che consiste delle derivazioni di $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$.

Poiché, in particolare, \mathbf{F}_4 opera transitivamente su $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$, identificato alle proiezioni di rango uno in $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$, possiamo identificare $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ ad uno spazio omogeneo di \mathbf{F}_4 . Il sottogruppo di \mathbf{F}_4 che fissa la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è $\mathbf{Spin}(9)$. Da questo ricaviamo che

$$(27.35) \quad \mathbb{O}\mathbb{P}^2 \simeq \mathbf{F}_4/\mathbf{Spin}(9) \implies \dim(\mathbf{F}_4) = 16 + \binom{9}{2} = 16 + 36 = 52.$$

Abbiamo poi le successioni esatte di omotopia di Serre:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_h(\mathbf{S}^{23}) &\longrightarrow \pi_h(\mathbb{O}\mathbb{P}^2) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{S}^7) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{S}^{23}) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_h(\mathbf{Spin}(9)) &\longrightarrow \pi_h(\mathbf{F}_4) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{O}\mathbb{P}^2) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{Spin}(9)) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Dalla prima ricaviamo che

$$h \leq 22 \implies \pi_h(\mathbb{O}\mathbb{P}^2) \simeq \pi_{h-1}(\mathbf{S}^7) = \begin{cases} 0, & \text{per } 0 \leq h \leq 7, h = 12, 13 \\ \mathbb{Z}, & \text{per } h = 8, \\ \mathbb{Z}_2, & \text{per } h = 9, 10, 14, \\ \mathbb{Z}_{24}, & \text{per } h = 11, \\ \mathbb{Z}_{120}, & \text{per } h = 15, \\ \mathbb{Z}_2^3, & \text{per } h = 16, \end{cases}$$

I gruppi di omotopia di $\mathbf{Spin}(9)$ sono:

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbf{Spin}(9)) &= 0, & \pi_2(\mathbf{Spin}(9)) &= 0, & \pi_3(\mathbf{Spin}(9)) &= \mathbb{Z}, \\ \pi_4(\mathbf{Spin}(9)) &= 0, & \pi_5(\mathbf{Spin}(9)) &= 0, & \pi_6(\mathbf{Spin}(9)) &= 0, \\ \pi_7(\mathbf{Spin}(9)) &= \mathbb{Z}^2, & \pi_8(\mathbf{Spin}(9)) &= \mathbb{Z}_2^3, & \pi_9(\mathbf{Spin}(9)) &= \mathbb{Z}_2^3, \\ \pi_{10}(\mathbf{Spin}(9)) &= \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_8, & \pi_{11}(\mathbf{Spin}(9)) &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & \pi_{12}(\mathbf{Spin}(9)) &= 0. \end{aligned}$$

In particolare

PROPOSIZIONE 27.6.12. *Il gruppo di Lie \mathbf{F}_4 è 2-connesso e $\pi_3(\mathbf{F}_4) \simeq \mathbb{Z}$.* \square

Parte 4

Appendice Gruppi ed algebre di Lie

CAPITOLO XXVIII

Algebre di Lie

Raccogliamo in questo capitolo alcune delle definizioni generali e delle proprietà più importanti delle algebre di Lie astratte.

28.1. Nozioni fondamentali

Sia \mathbb{K} un campo. Un'algebra di Lie su \mathbb{K} è uno spazio vettoriale \mathfrak{g} su \mathbb{K} su cui è assegnata un'operazione binaria (*commutatore*):

$$(28.1) \quad \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \longrightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$$

che gode delle seguenti proprietà:

$$(28.2) \quad \text{l'operazione } (X, Y) \rightarrow [X, Y] \text{ è } \mathbb{K}\text{-bilineare,}$$

$$(28.3) \quad [X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

$$(28.4) \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

(IDENTITÀ DI JACOBI).

OSSERVAZIONE 28.1.1. Osserviamo che (28.3) implica che

$$(28.5) \quad [X, Y] = -[Y, X] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

e le due condizioni sono equivalenti se \mathbb{K} ha caratteristica $\neq 2$.

ESEMPIO 28.1.2. Sia V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} . Se poniamo $[v, w] = 0$ per ogni $v, w \in V$, questo prodotto definisce su V una struttura di algebra di Lie.

In generale

DEFINIZIONE 28.1.3. Chiamiamo algebra di Lie *abeliana* o *commutativa* un'algebra di Lie \mathfrak{g} in cui il commutatore di due qualsiasi elementi sia nullo.

Dati due sottospazi vettoriali $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ di un'algebra di Lie \mathfrak{g} , indichiamo con $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ il sottospazio vettoriale di \mathfrak{g} generato dai vettori della forma $[X, Y]$ con $X \in \mathfrak{A}$, $Y \in \mathfrak{B}$.

Per la (28.5), abbiamo $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = [\mathfrak{B}, \mathfrak{A}]$.

DEFINIZIONE 28.1.4. Un sottoinsieme \mathfrak{a} di \mathfrak{g} si dice una *sottoalgebra di Lie* di \mathfrak{g} se è un sottospazio vettoriale di \mathfrak{g} e $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$; un *ideale* di \mathfrak{g} se è una sottoalgebra ed inoltre $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$.

Osserviamo che $\{0\}$ e \mathfrak{g} sono ideali (banali) di \mathfrak{g} .

LEMMA 28.1.5. Se $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sono ideali di \mathfrak{g} , anche $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ e $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ sono ideali di \mathfrak{g} .

LEMMA 28.1.6. Sono ideali di \mathfrak{g} sono il suo centro $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ e il suo derivato $\mathfrak{g}^{(1)}$, definiti da

$$(28.6) \quad Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\},$$

$$(28.7) \quad \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

LEMMA 28.1.7. Se α è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} , il suo normalizzatore in \mathfrak{g}

$$(28.8) \quad N_{\mathfrak{g}}(\alpha) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] \in \alpha \quad \forall Y \in \alpha\}$$

è ancora una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} : essa contiene α ed è la più grande sottoalgebra di \mathfrak{g} che contiene α come ideale.

Analogamente il centralizzatore di α in \mathfrak{g}

$$(28.9) \quad C_{\mathfrak{g}}(\alpha) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \alpha\}$$

è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} .

DEFINIZIONE 28.1.8. Siano $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ due algebre di Lie sullo stesso campo \mathbb{K} . Un'applicazione $\phi : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$ si dice un omomorfismo di algebre di Lie se è \mathbb{K} -lineare e soddisfa inoltre:

$$(28.10) \quad \phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{f}.$$

LEMMA 28.1.9. Sia $\phi : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$ un omomorfismo di algebre di Lie su \mathbb{K} . Allora $\phi(\mathfrak{f})$ è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} e $\ker \phi$ è un ideale di \mathfrak{f} .

LEMMA 28.1.10. Se α è un ideale dell'algebra di Lie \mathfrak{g} , allora vi è un'unica struttura di algebra di Lie sul quoziente \mathfrak{g}/α che renda la proiezione naturale $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\alpha$ un omomorfismo di algebre di Lie.

DEFINIZIONE 28.1.11. Con questa struttura \mathfrak{g}/α si dice l'algebra di Lie quoziente di \mathfrak{g} rispetto all'ideale α .

DEFINIZIONE 28.1.12. Un'algebra di Lie \mathfrak{g} si dice *semplice* se non è commutativa e non contiene ideali non banali.

28.2. Algebre di Lie lineari, derivazioni, rappresentazione aggiunta

Sia V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} . Lo spazio vettoriale $\mathcal{E}nd_{\mathbb{K}}(V)$ di tutti gli endomorfismi \mathbb{K} -lineari di V è un'algebra di Lie con il prodotto definito da

$$(28.11) \quad [A, B] = A \circ B - B \circ A \quad \forall A, B \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{K}}(V).$$

Con la struttura di algebra di Lie, esso si indica con $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$. Se $V = \mathbb{K}^n$, scriviamo $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ invece di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)$. Ogni sottoalgebra di un'algebra di Lie $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ si dice un'algebra di Lie lineare.

Un teorema di Ado-Iwasawa dice che ogni algebra di Lie di dimensione finita è isomorfa a un'algebra di Lie lineare.

Esempi importanti di algebre di Lie lineari sono i seguenti, ove $V = \mathbb{K}^n$, $1 \leq n < \infty$:

$$(A_{\ell}) \quad \mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(\ell + 1, \mathbb{K}) \mid \text{tr}(X) = 0\};$$

(B_ℓ) $\mathfrak{so}(\ell, \ell + 1; \mathbb{K})$: trasformazioni antisimmetriche rispetto a una forma bilineare simmetrica con indice di Witt ℓ in uno spazio vettoriale di dimensione dispari $n = 2\ell + 1$; qui dobbiamo supporre che \mathbb{K} abbia caratteristica $\neq 2$;

(C_ℓ) $\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{K})$: trasformazioni simplettiche, cioè che soddisfano

$$a(X(v), w) + a(v, X(w)) = 0 \quad \forall v, w \in V$$

per una forma alternata non degenera a su uno spazio vettoriale V di dimensione pari $n = 2\ell$ su un campo \mathbb{K} di caratteristica $\neq 2$;

(D_ℓ) $\mathfrak{so}(\ell, \ell; \mathbb{K})$: trasformazioni antisimmetriche rispetto a una forma bilineare simmetrica con indice di Witt ℓ in uno spazio vettoriale di dimensione pari $n = 2\ell$; anche qui dobbiamo supporre che caratteristica(\mathbb{K}) $\neq 2$;

- l'algebra $\mathfrak{t}_+(n, \mathbb{K})$ delle matrici triangolari superiori a coefficienti in \mathbb{K} ;
- l'algebra $\mathfrak{n}_+(n, \mathbb{K})$ delle matrici triangolari superiori a coefficienti in \mathbb{K} con diagonale principale nulla;
- l'algebra $\mathfrak{t}_-(n, \mathbb{K})$ delle matrici triangolari inferiori a coefficienti in \mathbb{K} ;
- l'algebra $\mathfrak{n}_-(n, \mathbb{K})$ delle matrici triangolari inferiori a coefficienti in \mathbb{K} con diagonale principale nulla;
- l'algebra $\mathfrak{d}(n, \mathbb{K})$ delle matrici diagonali a coefficienti in \mathbb{K} .

Notiamo che

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_+(n, \mathbb{K}) &= \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{K}) \oplus \mathfrak{d}(n, \mathbb{K}), \\ \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{K}) &= [\mathfrak{t}_+(n, \mathbb{K}), \mathfrak{t}_+(n, \mathbb{K})], \\ \mathfrak{t}_-(n, \mathbb{K}) &= \mathfrak{n}_-(n, \mathbb{K}) \oplus \mathfrak{d}(n, \mathbb{K}), \\ \mathfrak{n}_-(n, \mathbb{K}) &= [\mathfrak{t}_-(n, \mathbb{K}), \mathfrak{t}_-(n, \mathbb{K})]. \end{aligned}$$

Sia \mathfrak{A} un'algebra su \mathbb{K} , con prodotto $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (a, b) \rightarrow a \cdot b \in \mathfrak{A}$.

DEFINIZIONE 28.2.1. Una *derivazione* di \mathfrak{A} è un'applicazione \mathbb{K} -lineare $D : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ che soddisfa l'*identità di Leibniz*:

$$(28.12) \quad D(a \cdot b) = (D(a)) \cdot b + a \cdot (D(b)) \quad \forall a, b \in \mathfrak{A}.$$

Indichiamo con $\text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{A})$ l'insieme delle derivazioni di \mathfrak{A} .

Si verifica facilmente che

LEMMA 28.2.2. $\text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{A})$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{A})$ e quindi un'algebra di Lie lineare.

Consideriamo in particolare l'algebra di Lie delle derivazioni di una \mathbb{K} -algebra di Lie \mathfrak{g} .

LEMMA 28.2.3. Fissato $X \in \mathfrak{g}$, l'applicazione

$$(28.13) \quad \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X) : \mathfrak{g} \ni Y \longrightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$$

è \mathbb{K} -lineare ed è una derivazione.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo l'identità di Jacobi:

$$\begin{aligned} \text{ad}_g(X)([Y, Z]) &= [X, [Y, Z]] = -[Y, [Z, X]] - [Z, [X, Y]] \\ &= [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \\ &= [\text{ad}_g(X)(Y), Z] + [Y, \text{ad}_g(X)(Z)] \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

□

DEFINIZIONE 28.2.4. Le derivazioni della forma $\text{ad}_g(X)$, al variare di X in \mathfrak{g} , si dicono *derivazioni interne* di \mathfrak{g} .

LEMMA 28.2.5. *L'applicazione*

$$(28.14) \quad \text{ad}_g : \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \text{ad}_g(X) \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$$

è un omomorfismo di algebre di Lie. Le derivazioni interne formano un ideale dell'algebra di Lie $\text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $D \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ e $X \in \mathfrak{g}$ abbiamo, per ogni $Y \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} [D, \text{ad}_g(X)](Y) &= D([X, Y]) - [X, D(Y)] \\ &= [D(X), Y] + [X, D(Y)] - [X, D(Y)] \\ &= \text{ad}_g(D(X))(Y). \end{aligned}$$

Quindi

$$(28.15) \quad [D, \text{ad}_g(X)] = \text{ad}_g(D(X)) \quad \forall D \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}), \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

dimostra che $[\text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}), \text{ad}_g(\mathfrak{g})] \subset \text{ad}_g(\mathfrak{g})$.

□

DEFINIZIONE 28.2.6. La (28.14) si dice *rappresentazione aggiunta* di \mathfrak{g} .

LEMMA 28.2.7. *Il nucleo della rappresentazione aggiunta è il centro $Z_g(\mathfrak{g})$ di \mathfrak{g} .*

DEFINIZIONE 28.2.8. Gli elementi di $\text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ che non appartengono ad $\text{ad}_g(\mathfrak{g})$ si dicono *derivazioni esterne* di \mathfrak{g} .

L'ideale delle derivazioni interne di \mathfrak{g} si indica anche con $\text{int}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$.

Un ideale di \mathfrak{g} è un suo sottospazio vettoriale che è trasformato in sé da tutte le derivazioni interne.

DEFINIZIONE 28.2.9. Un ideale \mathfrak{a} di \mathfrak{g} si dice *caratteristico* se è trasformato in sé da tutte le derivazioni di \mathfrak{g} .

LEMMA 28.2.10. *Il centro $Z_g(\mathfrak{g})$ e il derivato $\mathfrak{g}^{(1)}$ sono ideali caratteristici di \mathfrak{g} .*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $D \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$, abbiamo

$$\begin{aligned} [D(X), Y] &= D([X, Y]) - [X, D(Y)] = 0, \quad \forall X \in Z_g(\mathfrak{g}), \quad \forall Y \in \mathfrak{g} \\ &\implies D(Z_g(\mathfrak{g})) \subset Z_g(\mathfrak{g}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D([X, Y]) &= [D(X), Y] + [X, D(Y)] \in \mathfrak{g}^{(1)}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \\ &\implies D(\mathfrak{g}^{(1)}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}. \end{aligned}$$

□

Osserviamo che, se \mathfrak{g} è semplice, allora il omomorfismo $\text{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{int}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ è un isomorfismo: quindi

PROPOSIZIONE 28.2.11. *Ogni algebra di Lie semplice è isomorfa in modo naturale ad un'algebra di Lie lineare.*

ESEMPIO 28.2.12. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Lo spazio $\mathcal{E}(M; \mathbb{R})$ delle funzioni differenziabili di classe \mathcal{C}^{∞} , a valori reali, definite su M è un'algebra reale per il prodotto di funzioni. L'algebra di Lie reale $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}(M, \mathbb{R}))$ è l'algebra $\mathfrak{X}(M)$ dei campi di vettori (di classe \mathcal{C}^{∞}) su M .

28.3. Rappresentazioni lineari

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie sul campo \mathbb{K} .

DEFINIZIONE 28.3.1. Una *rappresentazione lineare* di \mathfrak{g} è il dato di uno spazio vettoriale V sul campo \mathbb{K} e di un omomorfismo di algebre di Lie

$$(28.16) \quad \rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V).$$

In questo caso diciamo anche che V , con la struttura data dall'operazione:

$$(28.17) \quad \mathfrak{g} \times V \ni (X, v) \longrightarrow \rho(X)(v) \in V$$

è un \mathfrak{g} -modulo.

Quando ciò non provochi confusione, scriveremo anche $X \cdot v$ oppure Xv invece di $\rho(X)(v)$.

La rappresentazione aggiunta, discussa nel paragrafo precedente, è un esempio di rappresentazione.

Un altro esempio di rappresentazione lineare è la *rappresentazione banale*: dato un qualsiasi spazio vettoriale V su \mathbb{K} si fa corrispondere ad ogni X di \mathfrak{g} l'endomorfismo nullo di V .

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{K} e (28.16) una sua rappresentazione lineare di dimensione finita.

DEFINIZIONE 28.3.2. Diciamo che ρ (o il corrispondente \mathfrak{g} -modulo V) è *riducibile* se esiste un sotto- \mathfrak{g} -modulo proprio non banale W di V ; altrimenti la ρ si dice *irriducibile* o *semplice*.

Diciamo che ρ (o il corrispondente \mathfrak{g} -modulo V) è *decomponibile* se V è somma diretta di due sotto- \mathfrak{g} -moduli W_1, W_2 non banali: $V = W_1 \oplus W_2$ con $W_1, W_2 \neq \{0\}$. È *indecomponibile* se non è decomponibile.

Infine, diciamo che ρ (o il \mathfrak{g} -modulo V) è *completamente riducibile* o *completamente decomponibile* o *semisemplice* se V è somma diretta di sotto- \mathfrak{g} -moduli semplici.

Vale il:

TEOREMA 28.3.3 (Lemma di Schur). *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita n su \mathbb{K} e $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ una sua rappresentazione lineare di dimensione finita irriducibile. Se $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ è diversa da 0 e soddisfa:*

$$(28.18) \quad [A, \rho(X)] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

allora è un endomorfismo semisemplice invertibile.

Se \mathbb{K} è algebricamente chiuso, allora A è un multiplo dell'identità.

In generale, il commutatore di $\rho(\mathfrak{g})$ in $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$

$$(28.19) \quad \mathbb{K}_\rho = \{A \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid [A, \rho(\mathfrak{g})] = 0\}$$

è un corpo (non necessariamente commutativo) ed è un'estensione di dimensione finita di \mathbb{K} .

DIMOSTRAZIONE. Poiché $A \neq 0$, lo spazio vettoriale V ha dimensione positiva. Sia p un fattore primo del polinomio minimo di A e poniamo

$$V_p = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \ker p(A)^h, \quad W = \ker p(A).$$

Allora W e V_p sono sottospazi \mathfrak{g} -invarianti di V , di dimensione positiva, con $W \subset V_p$. Per l'irriducibilità di ρ , deve essere $W = V_p = V$ e questo dimostra che A è semisemplice e il suo spettro contiene un solo ideale primo di $\mathbb{K}[x]$.

Per la prima parte della dimostrazione ogni elemento diverso da 0 di \mathbb{K}_ρ è invertibile e quindi \mathbb{K}_ρ è un corpo. \square

OSSERVAZIONE 28.3.4. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ è il campo dei numeri complessi e (28.16) una rappresentazione irriducibile di \mathfrak{g} , allora $\mathbb{K}_\mathfrak{g} \simeq \mathbb{C}$.

OSSERVAZIONE 28.3.5. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ è il campo dei numeri reali, il commutatore \mathbb{K}_ρ per una rappresentazione irriducibile $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ di \mathfrak{g} può essere \mathbb{R} , \mathbb{C} , oppure \mathbb{H} . Le rappresentazioni irriducibili di un'algebra di Lie reale si dividono quindi nei tipi *reale, complesso, quaternionico*.

Ad esempio, le rappresentazioni naturali di

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}(n) &\subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \\ \mathfrak{u}(n) &\subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}), \\ \mathfrak{sp}(n) &\subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(4n, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

sono rispettivamente di tipo reale, complesso e quaternionico.

Per distinguere i diversi casi, si considera la *complessificazione* $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ di \mathfrak{g} e la corrispondente rappresentazione complessa $\tilde{\rho} : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\tilde{V})$, dove $\tilde{V} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ è la complessificazione dello spazio vettoriale reale V .

La ρ è reale se $\tilde{\rho}$ è irriducibile.

Altrimenti la $\tilde{\rho}$ si decompone nella somma diretta di due rappresentazioni complesse irriducibili: se esse sono isomorfe, allora la ρ è di tipo quaternionico; se esse non sono isomorfe, allora la ρ è di tipo complesso.

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita \mathbb{K} e $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ una rappresentazione lineare di dimensione finita. Allora anche la

$$(28.20) \quad \rho^* : \mathfrak{g} \ni X \rightarrow -{}^t\rho(X) \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V^*),$$

ove $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ è il duale dello spazio vettoriale V , è una rappresentazione lineare di dimensione finita.

DEFINIZIONE 28.3.6. La (28.20) si dice la rappresentazione *controgradiente*, o *duale*, di ρ .

A due rappresentazioni lineari di dimensione finita $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$, $\rho_W : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(W)$ possiamo associare il loro *prodotto tensoriale*

$$(28.21) \quad \rho_V \otimes \rho_W : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V \otimes_{\mathbb{K}} W),$$

definito da

$$\begin{aligned} \rho_V \otimes \rho_W(X)(v \otimes w) &= \rho_V(X)(v) \otimes w + v \otimes \rho_W(X)(w) \\ &\quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall v \in V, \quad \forall w \in W. \end{aligned}$$

Utilizzando la rappresentazione controgradiente e l'identificazione dello spazio $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ con il prodotto tensoriale $W \otimes V^*$, si ottiene la rappresentazione

$$(28.22) \quad \rho_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))$$

definita da

$$(28.23) \quad \begin{aligned} \rho_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)}(X) &= \rho_W(X) \circ A - A \circ \rho_V(X) \\ &\quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall A \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W). \end{aligned}$$

In particolare la ρ_V induce una rappresentazione $\rho_{\text{End}_{\mathbb{K}}(V)}$ su $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ definita da

$$(28.24) \quad \begin{aligned} \rho_{\text{End}_{\mathbb{K}}(V)}(X)(A) &= \rho_V(X) \circ A - A \circ \rho_V(X) \\ &\quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall A \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V). \end{aligned}$$

28.4. Forme invarianti

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su \mathbb{K} .

DEFINIZIONE 28.4.1. Una forma bilineare $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ si dice *invariante* se soddisfa

$$(28.25) \quad \beta([X, Y], Z) + \beta(Y, [X, Z]) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Una forma bilineare $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ si dice *completamente invariante* se soddisfa

$$(28.26) \quad \beta(D(X), Y) + \beta(X, D(Y)) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad \forall D \in \text{Der}(\mathfrak{g}).$$

ESEMPIO 28.4.2. L'applicazione

$$(28.27) \quad \beta(X, Y) = \text{traccia}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$$

è una forma bilineare simmetrica, invariante su $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \text{traccia}([X, Y]Z) &= \text{traccia}(XYZ) - \text{traccia}(YXZ) \\ &= \text{traccia}(YZX) - \text{traccia}(YXZ) = -\text{traccia}(Y[X, Z]). \end{aligned}$$

Dalla discussione dell'Esempio 28.4.2 otteniamo subito:

PROPOSIZIONE 28.4.3. Se $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ è una rappresentazione lineare di dimensione finita di \mathfrak{g} , allora

$$(28.28) \quad \kappa_V(X, Y) = \text{traccia}(\rho(X)\rho(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

è una forma bilineare invariante su \mathfrak{g} . □

DEFINIZIONE 28.4.4. Se \mathfrak{g} ha dimensione finita, la forma invariante

$$(28.29) \quad \kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{traccia}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

si dice la *forma di Killing* di \mathfrak{g} .

LEMMA 28.4.5. *Supponiamo che \mathfrak{g} abbia dimensione finita. Se α è un ideale di \mathfrak{g} , allora la forma di Killing κ_{α} di α è la restrizione ad α della forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ di \mathfrak{g} .*

DIMOSTRAZIONE. Se infatti scegliamo una base E_1, \dots, E_n di \mathfrak{g} per cui E_1, \dots, E_m sia una base di α , le trasformazioni $\text{ad}(X)$, con $X \in \alpha$, hanno matrici associate

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con A matrice $m \times m$, e matrici nulle 0 di tipi $m \times (n - m)$, $(n - m) \times m$ ed $(n - m) \times (n - m)$. Poiché la A è la matrice di $\text{ad}_{\alpha}(X)$ nella base E_1, \dots, E_m , la tesi segue facilmente. \square

PROPOSIZIONE 28.4.6. *Supponiamo che \mathfrak{g} abbia dimensione finita. La sua forma di Killing è completamente invariante.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \text{Der}(\mathfrak{g})$. Possiamo definire su $\tilde{\mathfrak{g}}$ una struttura di algebra di Lie con il prodotto definito dalle:

$$\begin{cases} \llbracket X, Y \rrbracket = [X, Y] & \text{se } X, Y \in \mathfrak{g}, \\ \llbracket D, X \rrbracket = D(X) & \text{se } X \in \mathfrak{g}, D \in \text{Der}(\mathfrak{g}), \\ \llbracket D_1, D_2 \rrbracket = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 & \text{se } D_1, D_2 \in \text{Der}(\mathfrak{g}). \end{cases}$$

Poiché \mathfrak{g} è allora un ideale di $\tilde{\mathfrak{g}}$, la tesi segue dalla Proposizione 28.4.3 e dal Lemma 28.4.5. \square

28.5. Automorfismi

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su \mathbb{K} .

DEFINIZIONE 28.5.1. Un automorfismo α di \mathfrak{g} è un isomorfismo dell'algebra di Lie \mathfrak{g} con se stessa. Con il prodotto di composizione, gli automorfismi dell'algebra di Lie \mathfrak{g} formano un gruppo, che indicheremo con $\text{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$.

DEFINIZIONE 28.5.2. Un elemento X dell'algebra di Lie \mathfrak{g} si dice *ad-nilpotente* se $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ è nilpotente.

Se il campo \mathbb{K} ha caratteristica 0 , ed $X \in \mathfrak{g}$ è ad-nilpotente possiamo definire l'*esponenziale* di $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ mediante:

$$(28.30) \quad \exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X))^h}{h!}.$$

Poiché abbiamo supposto X ad-nilpotente, la somma a secondo membro della (28.30) contiene solo un numero finito di termini non nulli. Essa definisce quindi un'applicazione \mathbb{K} -lineare su \mathfrak{g} , che è un automorfismo di \mathfrak{g} .

Più in generale vale il:

LEMMA 28.5.3. Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie sul campo \mathbb{K} di caratteristica 0 e D una derivazione nilpotente di \mathfrak{g} . Allora

$$(28.31) \quad \exp(D) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{D^h}{h!}$$

è un automorfismo di \mathfrak{g} .

DIMOSTRAZIONE. Vale la formula di Leibnitz:

$$D^n([X, Y]) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} [D^m(X), D^{n-m}(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \exp(D)([X, Y]) &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{D^h([X, Y])}{h!} \\ &= \sum_{h', h''=0}^{\infty} \frac{1}{h'! h''!} [D^{h'}(X), D^{h''}(Y)] \\ &= [\exp(D)(X), \exp(D)(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

ove tutte le sommatorie hanno significato perché contengono soltanto un numero finito di termini non nulli.

Infine $\exp(D)$ è invertibile ed $\exp(D)^{-1} = \exp(-D)$ mostra che anche l'inversa è un omomorfismo dell'algebra di Lie \mathfrak{g} in sé. \square

DEFINIZIONE 28.5.4. Gli automorfismi che sono composizione di un numero finito di automorfismi della forma $\exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X))$, con X elemento ad-nilpotente di \mathfrak{g} , si dicono *elementari*.

Indicheremo con $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$ il gruppo degli automorfismi elementari di \mathfrak{g} .

LEMMA 28.5.5. Il gruppo $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$ degli automorfismi elementari di \mathfrak{g} è un sottogruppo normale di $\text{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $X \in \mathfrak{g}$ è un elemento ad-nilpotente ed $\alpha \in \text{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$, allora $\alpha(X)$ è ancora un elemento ad-nilpotente di \mathfrak{g} e

$$\alpha \circ \exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)) \circ \alpha^{-1} = \exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\alpha(X))).$$

\square

28.6. Algebre di Lie risolubili

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{K} .

DEFINIZIONE 28.6.1. La sequenza decrescente di ideali

$$(28.32) \quad \mathfrak{g} = D^0\mathfrak{g} \supset D^1\mathfrak{g} \supset \cdots \supset D^h\mathfrak{g} \supset D^{h+1}\mathfrak{g} \supset \cdots$$

definita da

$$(28.33) \quad \begin{cases} D^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \\ D^{m+1}\mathfrak{g} = [D^m\mathfrak{g}, D^m\mathfrak{g}] \quad \forall m \geq 0. \end{cases}$$

si dice *serie derivata* di \mathfrak{g} .

DEFINIZIONE 28.6.2. Diciamo che \mathfrak{g} è *risolubile* se $D^n \mathfrak{g} = \{0\}$ per qualche intero non negativo n .

Ad esempio, l'algebra $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ delle matrici triangolari superiori con coefficienti nel campo \mathbb{K} è un'algebra di Lie risolubile.

TEOREMA 28.6.3. Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{K} .

- (1) Se \mathfrak{g} è risolubile, allora ogni sottoalgebra \mathfrak{a} di \mathfrak{g} è risolubile ed ogni immagine di \mathfrak{g} mediante un omomorfismo di algebre di Lie è un'algebra di Lie risolubile.
- (2) Se \mathfrak{a} è un ideale risolubile di \mathfrak{g} e l'algebra quoziente $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ è risolubile, allora \mathfrak{g} è risolubile.
- (3) Se $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sono ideali risolubili di \mathfrak{g} , allora $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ è un ideale risolubile di \mathfrak{g} .

DEFINIZIONE 28.6.4. In particolare, ogni algebra di Lie \mathfrak{g} di dimensione finita contiene un ideale risolubile massimale rispetto all'inclusione. Esso si dice il *radicale* di \mathfrak{g} e si indica con $\text{rad}(\mathfrak{g})$.

28.7. Algebre di Lie semisemplici

DEFINIZIONE 28.7.1. Un'algebra di Lie di dimensione finita \mathfrak{g} per cui sia $\text{rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ si dice *semisemplice*.

Osserviamo che l'algebra quoziente $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$ è semisemplice.

Vale il fondamentale risultato:

TEOREMA 28.7.2 (Decomposizione di Levi-Malcev). Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita. Allora \mathfrak{g} contiene una sottoalgebra semisemplice \mathfrak{l} tale che

$$(28.34) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \text{rad}(\mathfrak{g})$$

DEFINIZIONE 28.7.3. Una sottoalgebra semisemplice \mathfrak{l} di \mathfrak{g} per cui valga la (28.34) si dice una *sottoalgebra di Levi* di \mathfrak{g} .

28.8. Algebre di Lie nilpotenti

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo \mathbb{K} . Si dice *serie centrale discendente* di \mathfrak{g} la sequenza di ideali di \mathfrak{g}

$$(28.35) \quad \mathfrak{g} = C^0 \mathfrak{g} \supset C^1 \mathfrak{g} \supset \cdots \supset C^h \mathfrak{g} \supset C^{h+1} \mathfrak{g} \supset \cdots$$

definiti per ricorrenza da:

$$(28.36) \quad \begin{cases} C^0 \mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \\ C^{h+1} \mathfrak{g} = [C^h \mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \end{cases} \quad \text{per } h \geq 0.$$

Diciamo che \mathfrak{g} è *nilpotente* se $C^n \mathfrak{g} = \{0\}$ per qualche intero non negativo n . Poiché $D^m \mathfrak{g} \subset C^m \mathfrak{g}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, un'algebra di Lie nilpotente è anche risolubile.

L'algebra di Lie lineare $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ è un esempio di algebra di Lie nilpotente.

TEOREMA 28.8.1. Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{K} .

- (1) Se \mathfrak{g} è nilpotente, allora ogni sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} ed ogni immagine di \mathfrak{g} mediante un omomorfismo di algebre di Lie è nilpotente.

(2) \mathfrak{g} è nilpotente se e soltanto se $\mathfrak{g}/Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ è nilpotente.

(3) Se $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ ed è nilpotente, allora $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.

DIMOSTRAZIONE. La (1) e la (2) sono immediate. Per la (3) osserviamo che se \mathfrak{g} è nilpotente ed h è il più grande intero non negativo per cui $C^h \mathfrak{g} \neq \{0\}$, allora $C^h \mathfrak{g} \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. \square

28.9. Il teorema di Engel

LEMMA 28.9.1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{K} . Se $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ è nilpotente, allora anche $\text{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)}(A)$ è nilpotente.

DIMOSTRAZIONE. Siano L_A e R_A gli endomorfismi di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ definiti rispettivamente da:

$$\begin{cases} L_A(X) = A \circ X & \forall X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V) \\ R_A(X) = X \circ A & \forall X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V). \end{cases}$$

Chiaramente L_A ed R_A sono nilpotenti e commutano tra loro. Quindi anche

$$\text{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)}(A) = L_A - R_A$$

è nilpotente. \square

TEOREMA 28.9.2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 1$ su \mathbb{K} . Sia \mathfrak{a} una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ formata da elementi nilpotenti. Allora esiste un vettore $v \in V \setminus \{0\}$ tale che $A(v) = 0$ per ogni $A \in \mathfrak{a}$.

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per induzione su $m = \dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{a})$. Se $m \leq 1$, la tesi è banalmente vera. Supponiamo quindi $m > 1$ e il teorema valido per algebre di Lie di dimensione $< m$ di endomorfismi nilpotenti di uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Sia \mathfrak{b} , con $\{0\} \subsetneq \mathfrak{b} \subsetneq \mathfrak{a}$, una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{a} . Per il Lemma 28.9.1, $\text{ad}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b})$ è un'algebra di Lie di endomorfismi nilpotenti di \mathfrak{a} . Per passaggio al quoziente, gli elementi di \mathfrak{b} definiscono un'algebra di Lie di endomorfismi nilpotenti di $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$. Per l'ipotesi induttiva esiste allora $A \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b}$ tale che $[\mathfrak{b}, A] \subset \mathfrak{b}$. In particolare $N_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) \supseteq \mathfrak{b}$.

Scegliamo ora la sottoalgebra \mathfrak{b} massimale tra le sottoalgebre di Lie propriamente contenute in \mathfrak{a} . Per le considerazioni precedenti deve essere $N_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$ e quindi \mathfrak{b} è un ideale di \mathfrak{a} . Consideriamo l'omomorfismo di algebre di Lie $\pi : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{b}$. Se $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ avesse dimensione maggiore di 1, l'immagine inversa $\pi^{-1}(I)$ di una retta I di $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ sarebbe una sottoalgebra di \mathfrak{a} con $\mathfrak{b} \subsetneq \pi^{-1}I \subsetneq \mathfrak{a}$. Questo è assurdo per la massimalità di \mathfrak{b} e quindi $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{a}/\mathfrak{b} = 1$.

Dunque, se $A \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b}$, abbiamo

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathbb{K}A.$$

Sia $W = \{v \in V \mid B(v) = 0, \forall B \in \mathfrak{b}\}$. Per l'ipotesi induttiva $\dim_{\mathbb{K}} W > 0$. Inoltre, poiché \mathfrak{b} è un ideale di \mathfrak{a} , abbiamo $A(W) \subset W$. Infatti $B(A(w)) = A(B(w)) + [B, A](w) = 0$ per ogni $w \in W$ e $B \in \mathfrak{b}$. La restrizione di A a W è ancora nilpotente e quindi esiste $v \in W \setminus \{0\}$ tale che $A(v) = 0$. Questo implica che $X(v) = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{a}$. La dimostrazione è completa. \square

Dal Teorema 28.9.2 si ottiene il

TEOREMA 28.9.3 (Engel). *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{K} . Condizione necessaria e sufficiente affinché \mathfrak{g} sia nilpotente è che tutti i suoi elementi siano ad-nilpotenti.*

DIMOSTRAZIONE. La necessità è ovvia. Per dimostrare la sufficienza ragioniamo per ricorrenza su $m = \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}$. Se $m \leq 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo $m > 1$. Per il teorema precedente esiste $X \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ tale che $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)(X) = 0$ per ogni $Y \in \mathfrak{g}$. In particolare $X \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$. Osserviamo a questo punto che $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}/Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ ha dimensione $< m$ ed ogni elemento di \mathfrak{a} è ad-nilpotente. Per l'ipotesi induttiva \mathfrak{a} è nilpotente e questo implica che \mathfrak{g} è nilpotente. \square

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su \mathbb{K} . Una *bandiera completa* in V è una successione di sottospazi vettoriali di V :

$$(28.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n \\ \text{con } \dim_{\mathbb{K}} V_i = i \text{ per } 0 \leq i \leq n. \end{array} \right.$$

Vale il seguente:

TEOREMA 28.9.4. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{K} e sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di endomorfismi nilpotenti di V . Allora esiste una bandiera completa $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$ tale che $X(V_i) \subset V_{i-1}$ per ogni $1 \leq i \leq n$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\dim_{\mathbb{K}} V = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n > 0$ e il teorema vero per algebre di Lie nilpotenti di endomorfismi di uno spazio vettoriale di dimensione $< n$ su \mathbb{K} . Per il Teorema 28.9.2, esiste $v_1 \in V \setminus \{0\}$ tale che $X(v_1) = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Sia $V_1 = \mathbb{K} \cdot v_1$ e consideriamo la rappresentazione ρ di \mathfrak{g} su $W = V/V_1$ ottenuta per passaggio al quoziente. Sia $\pi : V \rightarrow W$ la proiezione nel quoziente. Poiché $\rho(\mathfrak{g})$ consiste di endomorfismi nilpotenti di W , esiste per l'ipotesi induttiva una bandiera completa $\{W_i\}_{0 \leq i \leq n-1}$ di W tale che $\rho(X)(W_i) \subset W_{i-1}$. Otteniamo allora la bandiera completa $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$ desiderata aggiungendo a $\{0\} = V_0$ e a $V_1 = \mathbb{K} \cdot v_1$ i sottospazi $V_i = \pi^{-1}(W_{i-1})$ per $2 \leq i \leq n$. \square

Applicando questo risultato alla rappresentazione aggiunta otteniamo:

TEOREMA 28.9.5. *Se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie nilpotente, allora esiste una successione di ideali di \mathfrak{g} :*

$$\mathfrak{a}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{m-1} \subset \mathfrak{a}_m = \mathfrak{g}$$

tale che, per ogni $1 \leq h \leq m$, l'algebra di Lie $\mathfrak{a}_h/\mathfrak{a}_{h-1}$ sia abeliana e di dimensione uno.

TEOREMA 28.9.6. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo \mathbb{K} e sia \mathfrak{g} una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ formata da endomorfismi nilpotenti. Allora \mathfrak{g} è un'algebra di Lie nilpotente.*

DIMOSTRAZIONE. Sia infatti $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$ una bandiera completa tale che $X(V_i) \subset V_{i-1}$ per $1 \leq i \leq n$, per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Scegliamo una base e_1, \dots, e_n di V tale che $e_i \in V_i \setminus V_{i-1}$. In tale base ogni elemento di \mathfrak{g} si rappresenta con una matrice di $n(n, \mathbb{K})$. Da questa osservazione segue la tesi. \square

LEMMA 28.9.7. *Se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie nilpotente di dimensione finita ed α un ideale di \mathfrak{g} , allora $\alpha \cap Z_{\mathfrak{g}} \neq \{0\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Facciamo operare \mathfrak{g} su α mediante la rappresentazione aggiunta. Tutti gli $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)|_{\alpha}$, per $X \in \mathfrak{g}$, sono nilpotenti e quindi esiste $A \in \alpha$ tale che $[\mathfrak{g}, A] = \{0\}$. È quindi $A \in \alpha \cap Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. \square

28.10. Il Teorema di Lie

TEOREMA 28.10.1. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita $n > 0$ su un campo \mathbb{K} , di caratteristica 0 e algebricamente chiuso. Sia \mathfrak{g} una sottoalgebra di Lie risolubile di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$. Esiste allora un vettore $v \in V \setminus \{0\}$ tale che*

$$(28.38) \quad \forall A \in \mathfrak{g} \quad \exists \lambda(A) \in \mathbb{K} \quad \text{tale che} \quad A(v) = \lambda(A)v.$$

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per induzione su $m = \dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$. La tesi è banale se $m \leq 1$. Supponiamo quindi $m > 1$ ed il teorema vero per algebre risolubili, di dimensione minore di m , di endomorfismi lineari di uno spazio di dimensione finita positiva sul campo \mathbb{K} .

Osserviamo che \mathfrak{g} contiene un ideale α di codimensione 1: a questo scopo basta scegliere α uguale a un qualsiasi iperpiano di \mathfrak{g} contenente $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Per l'ipotesi induttiva, esiste una forma lineare $\lambda : \alpha \rightarrow \mathbb{K}$ tale che il sottospazio

$$W = \{v \in V \mid \forall A \in \alpha, \exists \lambda_v(A) \in \mathbb{K} \text{ tale che } A(v) = \lambda_v(A)v\}$$

abbia dimensione positiva.

Dimostriamo ora che $X(W) \subset W$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Siano $w \in W$ ed $X \in \mathfrak{g}$. Se $Y \in \alpha$ abbiamo:

$$Y(X(w)) = X(Y(w)) + [Y, X](w) = \lambda_w(Y)(X(w)) + \lambda_w([Y, X])(w).$$

Basterà quindi dimostrare che $\lambda_w([X, Y]) = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$ ed $Y \in \alpha$. Fissiamo $X \in \mathfrak{g}$ e $w \in W$. Sia k il più grande intero non negativo tale che

$$(28.39) \quad w, X(w), \dots, X^k(w)$$

siano linearmente indipendenti. Indichiamo con W_i il sottospazio vettoriale di dimensione i generato da $w, X(w), \dots, X^{i-1}(w)$, per $1 \leq i \leq k+1$ e poniamo $W_0 = \{0\}$. Ogni $Y \in \alpha$ lascia i sottospazi W_i invarianti e quindi la sua restrizione a W_{k+1} si scrive come una matrice triangolare superiore nella base (28.39). Verifichiamo, per ricorrenza su $i = 0, \dots, k$ che

$$(28.40) \quad w_{i,Y} = Y(X^i(w)) - \lambda_w(Y)X^i(w) \in W_i \quad \forall Y \in \alpha,$$

per $i = 0, \dots, k$.

Per $i = 0$ questo è conseguenza della definizione di W . Supponiamo ora che la (28.40) valga per $i = h$, con $0 \leq h < k$ e dimostriamo che vale per $i = h + 1$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
 Y(X^{h+1}(w)) &= Y(X(X^h(w))) \\
 &= XY(X^h(w)) - [X, Y](X^h(w)) \\
 &= X(\lambda_w(Y)X^h(w) + w_{h,Y}) - \lambda_w([X, Y])X^h(w) - w_{h,[X,Y]} \\
 &= \lambda_w(Y)X^{h+1}(w) + X(w_{h,Y}) - \lambda_w([X, Y])X^h(w) - w_{h,[X,Y]} \\
 &= \lambda_w(Y)X^{h+1}(w) + w_{h+1,Y}
 \end{aligned}$$

e $w_{h+1,Y} \in W_{h+1}$ perché $X(w_{h,Y}) \in X(W_h) \subset W_{h+1}$, $X^h(w) \in W_{h+1}$ e $w_{h,[X,Y]} \in W_h \subset W_{h+1}$. In particolare, per ogni Y possiamo considerare la traccia $\text{tr}_{W_{k+1}}(Y)$ della restrizione di Y a W_{k+1} e

$$\text{tr}_{W_{k+1}}(Y) = (k+1)\lambda_w(Y).$$

Ora, anche X opera su W_{k+1} e la traccia della restrizione a W_{k+1} del commutatore $[X, Y]$ è nulla. Da

$$0 = \text{tr}_{W_{k+1}}([X, Y]) = (k+1)\lambda_w([X, Y])$$

segue che $\lambda_w([X, Y]) = 0$ perché \mathbb{K} ha caratteristica zero.

Quindi W è \mathfrak{g} -invariante. Se $A \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{a}$, abbiamo $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathbb{K}A$. Osserviamo che, essendo \mathbb{K} algebricamente chiuso, $W \ni w \rightarrow A(w) \in W$ ha un autovettore $v \in W \setminus \{0\}$. Tale $v \neq 0$ soddisfa la tesi del teorema. \square

Come corollario del Teorema 28.10.1, otteniamo il TEOREMA DI LIE:

TEOREMA 28.10.2 (Lie). *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo algebricamente chiuso \mathbb{K} di caratteristica 0. Sia \mathfrak{g} un'algebra risolubile di endomorfismi di V . Allora esiste una bandiera completa $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$ di V tale che $A(V_i) \subset V_i$ per ogni $A \in \mathfrak{g}$.*

Se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie risolubile (di dimensione finita su un campo \mathbb{K} algebricamente chiuso di caratteristica zero) e $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ una sua rappresentazione lineare di dimensione finita, $\rho(\mathfrak{g})$ è risolubile e quindi stabilizza una bandiera completa di V . Applicando questa osservazione alla rappresentazione aggiunta di \mathfrak{g} otteniamo:

TEOREMA 28.10.3. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie risolubile di dimensione finita n su un campo \mathbb{K} algebricamente chiuso di caratteristica zero. Allora esiste una catena di ideali*

$$(28.41) \quad \{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{n-1} \subset \mathfrak{a}_n = \mathfrak{g}$$

di \mathfrak{g} con $\dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{a}_i) = i$ per $i = 0, 1, \dots, n-1, n$.

Vale il seguente risultato relativo al cambiamento del campo di base:

LEMMA 28.10.4. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo \mathbb{K} . Sia $\tilde{\mathbb{K}}$ un'estensione del campo \mathbb{K} . Sia $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di dimensione finita su $\tilde{\mathbb{K}}$ ottenuta per estensione $\tilde{\mathbb{K}}$ -bilineare del commutatore di \mathfrak{g} . Allora*

- (1) $\tilde{\mathfrak{g}}$ è risolubile se e soltanto se \mathfrak{g} è risolubile.
- (2) $\tilde{\mathfrak{g}}$ è nilpotente se e soltanto se \mathfrak{g} è nilpotente.

Utilizzando il lemma, dimostriamo il seguente:

TEOREMA 28.10.5. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo \mathbb{K} di caratteristica zero. L'algebra \mathfrak{g} è risolubile se e soltanto se il suo ideale derivato $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è nilpotente.*

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente, se $\mathfrak{g}^{(1)}$ è nilpotente, \mathfrak{g} è risolubile. Dimostriamo il viceversa.

Per il lemma precedente, possiamo supporre che il campo \mathbb{K} sia algebricamente chiuso: infatti, detta $\tilde{\mathbb{K}}$ la chiusura algebrica di \mathbb{K} e posto $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}$, abbiamo $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)} = \tilde{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}^{(1)}$.

Sia dunque \mathbb{K} algebricamente chiuso; sia $\{\alpha_i\}_{0 \leq i \leq n}$ una catena crescente di ideali di \mathfrak{g} con $\dim_{\mathbb{K}} \alpha_i = i$. Fissiamo una base X_1, \dots, X_n di \mathfrak{g} con $X_i \in \alpha_i \setminus \alpha_{i-1}$ per $1 \leq i \leq n$. Per ogni $X \in \mathfrak{g}$, l'endomorfismo $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ si rappresenta nella base X_1, \dots, X_n mediante una matrice di $t(n, \mathbb{K})$. Poiché $\text{ad}_{\mathfrak{g}}([X, Y]) = [\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X), \text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)]$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$, gli elementi di $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{(1)})$ si rappresentano nella base X_1, \dots, X_n come matrici di $n(n, \mathbb{K})$ e sono quindi nilpotenti. Ne segue che $\mathfrak{g}^{(1)}$ è nilpotente per il teorema di Engel. \square

Come corollario deduciamo il seguente:

TEOREMA 28.10.6. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie risolubile su un campo \mathbb{K} di caratteristica zero. Allora possiamo costruire una successione crescente di sottoalgebre di \mathfrak{g}*

$$\{0\} = \alpha_0 \subset \alpha_1 \subset \dots \subset \alpha_{m-1} \subset \alpha_m = \mathfrak{g},$$

tali che, per ogni h con $1 \leq h \leq m$, α_{h-1} sia un'ideale in α_h ed il quoziente α_h/α_{h-1} sia un'algebra di Lie abeliana di dimensione uno.

DIMOSTRAZIONE. Siano $m = \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}$, $m' = \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}^{(1)}$ e $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ la proiezione nel quoziente. Poiché $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ è abeliana, se

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{m-m'} = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$$

è una qualsiasi bandiera completa, le $\alpha_h = \pi^{-1}(V_{h-m'})$, per $h = m', \dots, m$ sono sottoalgebre di \mathfrak{g} di dimensione h . Ciascuna è un'ideale di codimensione uno nella successiva e α_h/α_{h-1} è abeliana di dimensione uno per $h = m' + 1, \dots, m$.

Per concludere la dimostrazione basta osservare che $\alpha_{m'} = \mathfrak{g}^{(1)}$ è un'algebra di Lie nilpotente e quindi per il teorema di Engel contiene una sequenza di ideali

$$\{0\} = \alpha_0 \subset \alpha_1 \subset \dots \subset \alpha_{m'-1} \subset \alpha_{m'} = \mathfrak{g}^{(1)},$$

tali che α_h/α_{h-1} sia un'algebra di Lie abeliana di dimensione uno, per $h = 1, \dots, m'$. \square

Osserviamo che, a differenza del caso in cui avevamo supposto che \mathbb{K} fosse algebricamente chiuso, qui non possiamo in generale ottenere che gli α_h siano ideali in \mathfrak{g} , ma soltanto ciascuno un ideale nella successiva sottoalgebra α_{h+1} di \mathfrak{g} .

28.11. Il più grande ideale di nilpotenza di una rappresentazione

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su un campo \mathbb{K} .

LEMMA 28.11.1. *Sia α un ideale di \mathfrak{g} e $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ una rappresentazione lineare irriducibile, di dimensione finita, di \mathfrak{g} , tale che, per ogni $X \in \alpha$, $\rho_V(X)$ sia nilpotente su V . Allora $\rho_V(\alpha) = \{0\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $W = \{v \in V \mid \rho_V(X)(v) = 0, \forall X \in \alpha\}$. Per il teorema di Engel, $W \neq \{0\}$. D'altra parte, poiché α è un ideale, W è un sottospazio $\rho_V(\mathfrak{g})$ -invariante di V . Per l'irriducibilità, $W = V$. \square

LEMMA 28.11.2. *Sia $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ una rappresentazione lineare di \mathfrak{g} , e sia*

$$(28.42) \quad \{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_\nu = V$$

una sua serie di Jordan-Hölder¹. Per un ideale α di \mathfrak{g} sono equivalenti

- (1) *per ogni $X \in \alpha$, $\rho_V(X)$ è un endomorfismo nilpotente di V ;*
- (2) *$\rho(X)(W_h) \subset W_{h-1}$ per ogni $X \in \alpha$ ed ogni $h = 1, \dots, \nu$.*

DIMOSTRAZIONE. L'implicazione (2) \Rightarrow (1) è ovvia. Mostriamo che vale anche l'implicazione opposta.

Sia α un ideale di \mathfrak{g} tale che $\rho_V(\alpha)$ sia un'algebra di endomorfismi nilpotenti di V .

Per tutte le rappresentazioni $\rho_{W_h/W_{h-1}}$ indotte dalla ρ_V per passaggio al quoziente gli endomorfismi di $\rho_{W_h/W_{h-1}}(\alpha)$ sono nilpotenti su W/W_{h-1} . Poiché le rappresentazioni $\rho_{W_h/W_{h-1}}$ sono irriducibili, per il lemma precedente $\rho_{W_h/W_{h-1}}(X) = 0$ per ogni $X \in \alpha$, e ciò equivale alla (2). \square

Sia $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ una rappresentazione lineare di \mathfrak{g} , e sia (28.42) una sua serie di Jordan-Hölder. L'insieme

$$(28.43) \quad \mathfrak{n}_V = \{X \in \mathfrak{g} \mid \rho_V(X)(W_h) \subset W_{h-1}, \forall h = 1, \dots, \nu\}$$

è un ideale di \mathfrak{g} , che non dipende dalla particolare scelta della serie di Jordan-Hölder utilizzata nella sua definizione.

DEFINIZIONE 28.11.3. L'ideale \mathfrak{n}_V definito dalla (28.43) si dice il *più grande ideale di nilpotenza* della rappresentazione ρ_V .

¹Ogni sottospazio W_h è $\rho_V(\mathfrak{g})$ -invariante e le rappresentazioni indotte sui quozienti W_h/W_{h-1} sono irriducibili.

28.12. Il radicale nilpotente e il nilradicale

In tutto questo paragrafo supporremo che il campo \mathbb{K} abbia caratteristica zero. Tutte le algebre di Lie considerate saranno algebre di Lie su \mathbb{K} di dimensione finita.

DEFINIZIONE 28.12.1. Si dice *radicale nilpotente* dell'algebra di Lie \mathfrak{g} l'intersezione $\text{nil}(\mathfrak{g})$ dei nuclei delle sue rappresentazioni lineari irriducibili di dimensione finita.

LEMMA 28.12.2. Sia $V \neq \{0\}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{K} e \mathfrak{g} una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$. Supponiamo che V sia un \mathfrak{g} -modulo irriducibile. Se α è un ideale abeliano di \mathfrak{g} , allora $\alpha \cap \mathfrak{g}^{(1)} = \{0\}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathcal{A} la sottoalgebra unitaria (commutativa) di $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ generata da 1_V ed α . Dimostriamo che

se \mathfrak{b} è un ideale di \mathfrak{g} contenuto in α e $\text{tr}_V(AB) = 0$ per ogni $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathfrak{b}$, allora $\mathfrak{b} = \{0\}$.

Abbiamo infatti, se $B \in \mathfrak{b}$,

$$\text{tr}_V(B^n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > 0,$$

e quindi ogni elemento $B \in \mathfrak{b}$ è nilpotente. Per il teorema di Engel,

$$W = \bigcap_{B \in \mathfrak{b}} \ker B \neq \{0\}.$$

Poiché \mathfrak{b} è un ideale di \mathfrak{g} abbiamo

$$B(X(v)) = X(B(v)) - [X, B](v) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall B \in \mathfrak{b}, \quad \forall v \in W.$$

Quindi W è \mathfrak{g} -invariante e perciò $W = V$ in quanto avevamo supposto che V fosse un \mathfrak{g} -modulo irriducibile. Ciò implica che $\mathfrak{b} = \{0\}$.

Possiamo applicare questo risultato a $\mathfrak{b} = [\mathfrak{g}, \alpha]$. Infatti: se $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \alpha$ ed $A \in \mathcal{A}$, otteniamo:

$$\text{tr}_V([X, Y]A) = \text{tr}_V(XYA - YXA) = \text{tr}_V(XYA - XAY) = \text{tr}_V(X[Y, A]) = 0$$

perché \mathcal{A} è una sottoalgebra commutativa di $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Quindi $[\mathfrak{g}, \alpha] = 0$. Da ciò segue che gli endomorfismi di \mathfrak{g} commutano con quelli di \mathcal{A} . Fissiamo quindi $X, Y \in \mathfrak{g}$ ed $A \in \mathcal{A}$. Abbiamo:

$$\text{tr}_V([X, Y]A) = \text{tr}_V(X[Y, A]) = 0$$

perché $[Y, A] = 0$. Quindi $\text{tr}_V(ZA) = 0$ per ogni $Z \in \mathfrak{g}^{(1)}$, $A \in \mathcal{A}$. Applicando quindi le considerazioni svolte all'inizio della dimostrazione all'ideale $\mathfrak{g}^{(1)} \cap \alpha \subset \alpha$, otteniamo che $\mathfrak{g}^{(1)} \cap \alpha = \{0\}$. \square

Dal Lemma 28.12.2 otteniamo la seguente caratterizzazione del radicale nilpotente:

TEOREMA 28.12.3. Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo \mathbb{K} di caratteristica zero. Allora

$$(28.44) \quad \text{nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g}).$$

DIMOSTRAZIONE. Ogni funzionale lineare $\lambda: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ che si annulli su $\mathfrak{g}^{(1)}$ definisce una rappresentazione unidimensionale, e quindi irriducibile, di \mathfrak{g} . Quindi $\text{nil}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}$.

Consideriamo la rappresentazione aggiunta di \mathfrak{g} . Possiamo determinare una sequenza di sottospazi vettoriali $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ -invarianti di \mathfrak{g} :

$$\mathfrak{g}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_m = \mathfrak{g}$$

tali che la rappresentazione indotta su ciascuno dei quozienti $\mathfrak{g}_h/\mathfrak{g}_{h-1}$, per $1 \leq h \leq m$, sia irriducibile. In particolare $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ è nilpotente per ogni $X \in \text{nil}(\mathfrak{g})$, in quanto $[X, \mathfrak{g}_h] \subset \mathfrak{g}_{h-1}$ per ogni $h = 1, \dots, m$ se $X \in \text{nil}(\mathfrak{g})$. Per il teorema di Engel $\text{nil}(\mathfrak{g})$ è un ideale nilpotente di \mathfrak{g} e quindi è contenuto in $\text{rad}(\mathfrak{g})$.

Abbiamo quindi ottenuto l'inclusione

$$\text{nil}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g}).$$

Per dimostrare l'inclusione opposta, consideriamo una qualsiasi rappresentazione lineare irriducibile di dimensione finita $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$.

Sia $k \geq 0$ il più piccolo numero naturale tale che $\rho(D^{k+1}\text{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$. Poniamo $\mathfrak{g}' = \rho(\mathfrak{g})$ ed $\alpha = \rho(D^k\text{rad}(\mathfrak{g}))$. Allora V è un \mathfrak{g}' -modulo irriducibile ed α un ideale abeliano di \mathfrak{g}' . Per il Lemma 28.12.2,

$$\rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap D^k\text{rad}(\mathfrak{g})) \subset D\mathfrak{g}' \cap \alpha = \{0\}.$$

Se fosse $k > 0$, avremmo $D^k\text{rad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}$ e quindi $\rho(D^k\text{rad}(\mathfrak{g})) = \rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap D^k\text{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$ contraddirebbe la scelta di k . Deve essere perciò $k = 0$ e quindi $\rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$. Dunque $\ker \rho \supset \mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g})$ per ogni rappresentazione ρ irriducibile di dimensione finita: la dimostrazione è completa. \square

COROLLARIO 28.12.4. *Il radicale nilpotente $\text{nil}(\mathfrak{g})$ è un ideale caratteristico di \mathfrak{g} .*

COROLLARIO 28.12.5. *Se \mathfrak{g} è risolubile, allora:*

- (i) *il suo radicale nilpotente coincide con il suo ideale derivato $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$;*
- (ii) *Per ogni rappresentazione semplice di dimensione finita V di \mathfrak{g} , la sottoalgebra $\rho(\mathfrak{g}) = \{X_V \mid X \in \mathfrak{g}\}$ è commutativa e genera come sottoalgebra unitaria di $\mathcal{E}nd_{\mathbb{K}}(V)$ un'estensione algebrica di \mathbb{K} .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché \mathfrak{g} coincide con il proprio radicale \mathfrak{r} , abbiamo $\text{nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{g}^{(1)}$. Quindi $[\rho(\mathfrak{g}), \rho(\mathfrak{g})] = \rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \{0\}$ e $\rho(\mathfrak{g})$ è commutativa. La sottoalgebra associativa \mathbb{K}_{ρ} di $\mathcal{E}nd_{\mathbb{K}}(V)$ generata da $\rho(\mathfrak{g})$ e da I_V è quindi un'algebra commutativa in cui ogni elemento diverso da zero è invertibile per il lemma di Schur. Quindi \mathbb{K}_{ρ} è un campo. Poiché è uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{K} , esso ne è un'estensione algebrica. \square

COROLLARIO 28.12.6. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su \mathbb{K} , con radicale \mathfrak{r} . Allora i seguenti insiemi sono uguali:*

- (1) *il più grande ideale nilpotente di \mathfrak{g} ;*
- (2) *il più grande ideale nilpotente di \mathfrak{r} ;*
- (3) *l'insieme degli $X \in \mathfrak{r}$ tali che $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ sia nilpotente;*
- (4) *l'insieme degli $X \in \mathfrak{r}$ tali che $\text{ad}_{\mathfrak{r}}(X)$ sia nilpotente.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con a, b, c, d gli ideali descritti rispettivamente nei punti (1), (2), (3) (4). Abbiamo chiaramente $a \subset b \subset c \subset d$. Poiché $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{r}$ per ogni $X \in \mathfrak{r}$, vale anche l'inclusione $d \subset c$ e quindi $c = d$. Per dimostrare che i quattro ideali sono uguali basterà quindi verificare che $c \subset a$. Consideriamo la rappresentazione aggiunta di \mathfrak{r} in \mathfrak{g} e sia

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{m-1} \subset V_m = \mathfrak{g}$$

una serie di Jordan-Hölder per $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$, cioè una catena massimale di sottospazi vettoriali $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ -invarianti di \mathfrak{g} . Indichiamo con ρ_h la rappresentazione indotta sul quoziente V_h/V_{h-1} dalla restrizione a \mathfrak{r} della rappresentazione aggiunta. Poiché essa è irriducibile, abbiamo $\rho_h(X) = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{r}$ per cui $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ è nilpotente. Quindi $d = \bigcap_h \ker \rho_h$ è un ideale nilpotente di \mathfrak{g} e quindi è contenuto in a . \square

DEFINIZIONE 28.12.7. L'ideale \mathfrak{n} formato dagli elementi $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -nilpotenti del radicale \mathfrak{r} di \mathfrak{g} si dice il *nilradicale* o il *più grande ideale nilpotente* di \mathfrak{g} .

Lo indicheremo nel seguito con $\text{nilrad}(\mathfrak{g})$.

COROLLARIO 28.12.8. Il nilradicale di \mathfrak{g} è un suo ideale caratteristico. Abbiamo la successione di inclusioni² di ideali caratteristici di \mathfrak{g} :

$$(28.45) \quad \text{nil}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{nilrad}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{rad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}.$$

PROPOSIZIONE 28.12.9. (1) Se \mathfrak{h} è un ideale dell'algebra di Lie \mathfrak{g} , allora

$$\text{nilrad}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \cap \text{nilrad}(\mathfrak{g}).$$

(2) Se $D \in \mathfrak{D}er(\text{rad}(\mathfrak{g}), \text{rad}(\mathfrak{g}))$, allora

$$D(\text{rad}(\mathfrak{g})) \subseteq \text{nilrad}(\mathfrak{g}).$$

DIMOSTRAZIONE. (1) Poiché $\text{nilrad}(\mathfrak{h})$ è un ideale nilpotente di \mathfrak{g} , abbiamo $\text{nilrad}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h} \cap \text{nilrad}(\mathfrak{g})$. Viceversa, $\mathfrak{h} \cap \text{nilrad}(\mathfrak{g})$ è un ideale nilpotente di \mathfrak{h} e quindi è contenuto in $\text{nilrad}(\mathfrak{h})$, da cui l'uguaglianza.

(2) Consideriamo l'algebra di Lie \mathfrak{a} ottenuta considerando su $\text{rad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{K}$ il prodotto

$$[(X, a), (Y, b)] = ([X, Y] + a \cdot D(Y) - b \cdot D(X), 0), \quad \forall X, Y \in \text{rad}(\mathfrak{g}), \quad \forall a, b \in \mathbb{K}.$$

Allora $\mathfrak{h} = \text{rad}(\mathfrak{g}) \oplus \{0\}$ è un ideale di \mathfrak{a} . Quindi, per il punto (1),

$$\text{nilrad}(\mathfrak{g}) \oplus \{0\} = \text{nilrad}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \cap \text{nilrad}(\mathfrak{a}).$$

Osserviamo che $(0, 1) \in \text{nilrad}(\mathfrak{a})$ perché $\text{nilrad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{K}$ è un ideale nilpotente contenuto in \mathfrak{a} . In particolare,

$$[(\text{rad}(\mathfrak{g}), \{0\}), (0, 1)] = (D(\text{rad}(\mathfrak{g})), \{0\}) \subset \mathfrak{h} \cap \text{nilrad}(\mathfrak{a}) = (\text{nilrad}(\mathfrak{g}), \{0\})$$

ci dice che $D(\text{rad}(\mathfrak{g})) \subseteq \text{nilrad}(\mathfrak{g})$. \square

² Anche l'inclusione $\mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}$ può essere propria. Ad esempio, se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie abeliana, abbiamo $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ e $\text{nil}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

28.13. Automorfismi speciali

PROPOSIZIONE 28.13.1. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su un campo \mathbb{K} di caratteristica zero e siano \mathfrak{n} il suo ideale nilpotente massimale ed \mathfrak{n}_0 il suo radicale nilpotente. Allora*

$$\text{Aut}_{\mathfrak{n}} = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{n}\} \quad \text{ed} \quad \text{Aut}_{\mathfrak{n}_0} = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{n}_0\}$$

sono sottogruppi normali di $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ contenuti in $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che sia \mathfrak{n} che \mathfrak{n}_0 sono ideali caratteristici di \mathfrak{g} , cioè invarianti per automorfismi di \mathfrak{g} . \square

DEFINIZIONE 28.13.2. Gli elementi di $\text{Aut}_{\mathfrak{n}_0}(\mathfrak{g})$ si dicono *automorfismi speciali* di \mathfrak{g} .

Vale la seguente precisazione del Teorema 28.7.2:

TEOREMA 28.13.3. *Se \mathfrak{l} , \mathfrak{l}' sono due sottoalgebre di Levi di un'algebra di Lie \mathfrak{g} su un campo \mathbb{K} di caratteristica zero, allora esiste un automorfismo speciale $a \in \text{Aut}_{\mathfrak{n}_0}(\mathfrak{g})$ tale che $\mathfrak{l}' = a(\mathfrak{l})$.*

Gruppi di Lie

29.1. Gruppi di Lie e loro algebre di Lie

DEFINIZIONE 29.1.1. Un *gruppo di Lie* è un gruppo \mathbf{G} su cui sia fissata una struttura differenziabile per cui l'operazione di gruppo $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (a, b) \rightarrow ab^{-1} \in \mathbf{G}$ sia differenziabile.

Poiché \mathbf{G} è localmente connesso, la componente connessa dell'identità \mathbf{G}^0 di \mathbf{G} è connessa per archi ed è un sottogruppo normale aperto e chiuso in \mathbf{G} .

\mathbf{G}^0 è numerabile all'infinito e quindi condizione necessaria e sufficiente affinché lo sia anche \mathbf{G} è che il quoziente \mathbf{G}/\mathbf{G}^0 sia al più numerabile.

Per ogni elemento a di \mathbf{G} ,

$$\begin{aligned} \text{le traslazioni a sinistra :} & \quad L_a : \mathbf{G} \ni \mathbf{x} \rightarrow a \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{G}, \\ \text{le traslazioni a destra :} & \quad R_a : \mathbf{G} \ni \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} \cdot a \in \mathbf{G}, \\ \text{gli automorfismi interni :} & \quad \text{ad}_a : \mathbf{G} \ni \mathbf{x} \rightarrow a \cdot \mathbf{x} \cdot a^{-1} \in \mathbf{G}, \end{aligned}$$

sono diffeomorfismi di \mathbf{G} in sé.

A volte scriveremo per semplicità

$$a \cdot X \text{ per } L_{a*}(X) \text{ ed } X \cdot a \text{ per } R_{a*}(X), \text{ se } a \in \mathbf{G}, X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G}).$$

DEFINIZIONE 29.1.2. Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$ si dice *invariante a sinistra* se $a \cdot X = L_{a*}(X) = X$, per ogni $a \in \mathbf{G}$.

PROPOSIZIONE 29.1.3. *I campi di vettori invarianti a sinistra formano una sottoalgebra di Lie reale $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$ di $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$ e l'applicazione*

$$(29.1) \quad \mathfrak{L}(\mathbf{G}) \ni X \longrightarrow X_e \in T_e \mathbf{G}$$

è un isomorfismo lineare. □

DEFINIZIONE 29.1.4. Chiamiamo *algebra di Lie* di \mathbf{G} , lo spazio vettoriale $T_e \mathbf{G}$, con la struttura di algebra di Lie reale che rende (29.1) un isomorfismo di algebre di Lie.

Lo indicheremo in generale con \mathfrak{g} , la lettera gotica minuscola corrispondente alla lettera maiuscola in grassetto che denota il gruppo.

Scriveremo X^* per il campo di vettori in $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$ con $X_e^* = X \in \mathfrak{g}$.

PROPOSIZIONE 29.1.5. *Ogni campo $X^* \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$ è completo e genera un gruppo a un parametro $\phi_X(t)$ di diffeomorfismi di \mathbf{G} .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $X \in \mathfrak{g}$. Le curve integrali $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{G})$ sono soluzioni di $\dot{\gamma} = \gamma \cdot X$. Il flusso $\phi_X(a, t)$ di X^* soddisfa quindi la

$$\phi_X(a, t) = a \cdot b^{-1} \phi_X(b, t) \quad \forall a, b \in \mathbf{G},$$

ed, a priori, per $|t|$ sufficientemente piccolo. Questa formula ci permette di estendere la definizione di $\phi_X(a, t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se infatti $\phi_X(e, t)$ è definita per $|t| < \epsilon$, dalla

$$\phi_X(a, t + s) = \phi_X(\phi_X(a, t), s) = \phi_X(a, t) \phi_X(e, s)$$

ricaviamo che la $\phi_X(a, t)$ definita su un intervallo $(t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$, si può estendere all'intervallo $(t_1 - \epsilon, t_2 + \epsilon)$ ponendo

$$\phi_X(a, t) = \phi_X(a, t') \phi_X(e, t''), \quad \text{se } t' \in (t_1, t_2), \quad |t''| < \epsilon, \quad t = t' + t''. \quad \square$$

DEFINIZIONE 29.1.6. L'applicazione

$$(29.2) \quad \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \exp(X) = \phi_X(e, 1) \in \mathbf{G}$$

si dice l'*applicazione esponenziale* di \mathbf{G} .

Poiché

$$(29.3) \quad \exp((t_1 + t_2)X) = \exp(t_1X) \exp(t_2X) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

l'insieme $\{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo abeliano di \mathbf{G} .

DEFINIZIONE 29.1.7. $\{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}$ si dice *il sottogruppo a un parametro* di \mathbf{G} generato da $X \in \mathfrak{g}$.

PROPOSIZIONE 29.1.8. Sia $X \in \mathfrak{g}$. Il gruppo a un parametro di diffeomorfismi di \mathbf{G} generato da X^* è descritto dalla

$$(29.4) \quad \mathbf{G} \times \mathbb{R} \ni (a, t) \longrightarrow \phi_X(a, t) = a \cdot \exp(tX) \in \mathbf{G}. \quad \square$$

PROPOSIZIONE 29.1.9 (coordinate di prima specie). L'applicazione esponenziale definisce un diffeomorfismo di un intorno aperto di 0 in \mathfrak{g} su un intorno aperto di e in \mathbf{G} .

DIMOSTRAZIONE. Infatti, il differenziale in 0 dell'applicazione esponenziale è l'identità e quindi la tesi è conseguenza del teorema dell'applicazione inversa. \square

ESEMPIO 29.1.10. Il gruppo lineare reale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ è formato dalle matrici reali $n \times n$ invertibili. È un gruppo di Lie di dimensione n^2 . La sua algebra di Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ consiste delle matrici reali $n \times n$, con il prodotto di commutazione. L'esponenziale coincide con quello definito per le matrici:

$$(29.5) \quad \exp(X) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} X^h.$$

Il gruppo lineare reale speciale $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ è il sottogruppo delle matrici con determinante 1 di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. È un gruppo di Lie di dimensione $(n^2 - 1)$ e la sua algebra di Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ è formata dalle matrici di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ con traccia nulla.

ESEMPIO 29.1.11. Il *gruppo lineare complesso* $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ è formato dalle matrici complesse $n \times n$ invertibili. È un gruppo di Lie di dimensione $2n^2$. La sua algebra di Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ consiste di tutte le matrici $n \times n$ complesse. Anche in questo caso l'esponenziale coincide con l'esponenziale di matrici.

Il *gruppo lineare speciale complesso*

$$(29.6) \quad \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det a = 1\}$$

è un suo sottogruppo normale ed è un gruppo di Lie di dimensione $2n^2 - 1$, con algebra di Lie

$$(29.7) \quad \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \text{trac}(A) = 0\}.$$

ESEMPIO 29.1.12. Il *gruppo ortogonale*

$$(29.8) \quad \mathbf{O}(n) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid a^\top = a^{-1}\}$$

è un gruppo di Lie compatto di dimensione $n(n-1)/2$. La sua algebra di Lie

$$(29.9) \quad \mathfrak{o}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top + A = 0\}$$

consiste delle matrici reali antisimmetriche.

Il *gruppo ortogonale speciale o delle rotazioni*

$$(29.10) \quad \mathbf{SO}(n) = \{a \in \mathbf{O}(n) \mid \det(a) = 1\}$$

è un suo sottogruppo normale di indice due ed ha la stessa algebra di Lie $\mathfrak{o}(n)$.

Se $n \geq 3$, il gruppo fondamentale di $\mathbf{SO}(n)$ è isomorfo a \mathbb{Z}_2 . Il suo rivestimento fondamentale, a due fogli, è un gruppo di Lie compatto, che si indica con $\mathbf{Spin}(n)$ e si dice *gruppo di spin*.

ESEMPIO 29.1.13. Il *gruppo unitario*

$$(29.11) \quad \mathbf{U}(n) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid a^* = a^{-1}\}$$

è un gruppo di Lie compatto di dimensione n^2 , con algebra di Lie

$$(29.12) \quad \mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid A + A^* = 0\}.$$

Il *gruppo unitario speciale*

$$(29.13) \quad \mathbf{SU}(n) = \{a \in \mathbf{U}(n) \mid \det(a) = 1\}$$

è un suo sottogruppo di Lie normale, di dimensione $n^2 - 1$, con algebra di Lie

$$(29.14) \quad \mathfrak{su}(n) = \{A \in \mathfrak{u}(n) \mid \text{trac}(A) = 0\}.$$

Abbiamo un isomorfismo di gruppi di Lie $\mathbf{SU}(2) \simeq \mathbf{Spin}(3)$.

ESEMPIO 29.1.14. Consideriamo la matrice antisimmetrica non degenera

$$(29.15) \quad \Omega_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Il *gruppo simplettico compatto*, o *simplettico unitario*, o *simplettico ortogonale*

$$(29.16) \quad \mathbf{Sp}(n) = \{a \in \mathbf{U}(2n) \mid a^\top \cdot \Omega_n \cdot a = \Omega_n\}$$

è un gruppo di Lie compatto di dimensione $n(2n+1)$, con algebra di Lie

$$(29.17) \quad \mathfrak{sp}(n) = \{A \in \mathfrak{u}(2n) \mid A\Omega_n + \Omega_n \bar{A} = 0\}.$$

29.1.1. La rappresentazione aggiunta. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} .

Per ogni $a \in \mathbf{G}$ l'automorfismo ad_a è un diffeomorfismo di \mathbf{G} che lascia fissa l'identità e . Il suo differenziale è quindi un isomorfismo lineare

$$(29.18) \quad \text{Ad}_a = \text{d}_e(\text{ad}_a) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}.$$

PROPOSIZIONE 29.1.15. Per ogni $a \in \mathbf{G}$, Ad_a è un automorfismo di \mathfrak{g} .

L'applicazione $\text{ad} : \mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{ad}_a \in \mathcal{A}ut_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ è un omomorfismo di gruppi di Lie¹.

DIMOSTRAZIONE. Siano $X \in \mathfrak{g}$ ed $a \in \mathbf{G}$. Abbiamo, con le notazioni introdotte in precedenza per i differenziali delle traslazioni a destra ed a sinistra,

$$[\text{ad}_a]_*(X_X^*) = a \cdot \mathbf{x} \cdot X \cdot a^{-1} = a \cdot \mathbf{x} \cdot a^{-1} (a \cdot X \cdot a^{-1}) = [\text{ad}_a(X)]_{\text{ad}_a(x)}^*.$$

Questo dimostra che i campi X^* ed $(\text{Ad}_a(X))^*$ sono ad_a -correlati e perciò

$$[(\text{ad}_a)_* X^*, (\text{ad}_a)_* Y^*] = (\text{ad}_a)_*([X^*, Y^*]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Quindi il diffeomorfismo $(\text{ad}_a)_*$ definisce un automorfismo dell'algebra di Lie $\mathcal{L}(\mathbf{G})$ e la prima affermazione è conseguenza del fatto che, per definizione, $[X^*, Y^*] = [X, Y]^*$. Si verifica facilmente che la corrispondenza $a \rightarrow \text{ad}_a$ è un omomorfismo di gruppi. \square

DEFINIZIONE 29.1.16. L'omomorfismo $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{Ad}_a \in \mathcal{A}ut_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ si dice la *rappresentazione aggiunta di \mathbf{G}* .

29.1.2. Campi di vettori invarianti a destra. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie.

DEFINIZIONE 29.1.17. Un campo di vettori $X_* \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$ si dice *invariante a destra* se $\text{d}R_a(X_*) = X_*$ per ogni $a \in \mathbf{G}$.

Ad ogni elemento X dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} associamo l'unico campo di vettori invariante a destra X_* che assume il valore X in e : $X_{*a} = \text{d}R_a(X) = X \cdot a$. In questo modo abbiamo definito una corrispondenza lineare biunivoca

$$(29.19) \quad \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow X_* = \{a \rightarrow \text{d}R_a(X)\} \in \mathfrak{R}(\mathbf{G})$$

di \mathfrak{g} con lo spazio $\mathfrak{R}(\mathbf{G})$ dei campi di vettori invarianti a destra su \mathbf{G} . Abbiamo

PROPOSIZIONE 29.1.18. $\mathfrak{R}(\mathbf{G})$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$ e l'applicazione (29.19) è un antiisomorfismo di algebre di Lie.

DIMOSTRAZIONE. Poiché le traslazioni a destra sono diffeomorfismi di \mathbf{G} , è

$$[R_a(x), R_a(y)] = R_a([x, y]), \text{ per ogni } a \in \mathbf{G} \text{ ed } x, y \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$$

e quindi $\mathfrak{R}(\mathbf{G})$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$.

L'involutione $\sigma : \mathbf{G} \ni a \rightarrow a^{-1} \in \mathbf{G}$ di \mathbf{G} è un diffeomorfismo che trasforma campi di vettori invarianti a sinistra in campi di vettori invarianti a destra, con $\text{d}\sigma : \mathcal{L}(\mathbf{G}) \ni X^* \longrightarrow -X_* \in \mathfrak{R}(\mathbf{G})$, se X^* ed X_* sono i campi di vettori, rispettivamente

¹Ricordiamo che il gruppo degli automorfismi di \mathfrak{g} è

$$\mathcal{A}ut_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{\lambda \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \mid [\lambda(X), \lambda(Y)] = \lambda([X, Y]), \forall X, Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Per la nozione di omomorfismo di gruppi di Lie vedi il §29.3.

invariante a sinistra e a destra, associati allo stesso elemento X di \mathfrak{g} . In particolare, abbiamo

$$[X_*, Y_*] = -[X, Y]_*, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad \square$$

29.2. Alcune osservazioni sull'applicazione esponenziale

Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} . L'immagine dell'applicazione esponenziale è contenuta nella componente connessa \mathbf{G}^0 dell'identità di \mathbf{G} , ma può non coincidere con essa.

ESEMPIO 29.2.1. *L'immagine di $\exp : \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ non è surgettiva sulla sua componente connessa dell'identità $\mathbf{G}^0 = \{a \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det(a) > 0\}$.*

Sia $a \in \mathbf{G}^0$. Consideriamo dapprima il caso in cui a sia diagonalizzabile. A meno di coniugio possiamo supporre che $a = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ con $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Il polinomio caratteristico di una matrice X di $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ ha grado due. È quindi

$$(29.20) \quad \exp(X) = k_1 X + k_2 I_2, \quad \text{con } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

In particolare, se $a = \exp(X)$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora $k_1 \neq 0$ e la matrice X è anch'essa diagonale. Poiché gli autovalori dell'esponenziale di una matrice X diagonalizzabile sono gli esponenziali degli autovalori di X , ne segue che $a \in \exp(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}))$ se e soltanto se λ_1 e λ_2 sono entrambi positivi. Analogamente, se a ha un autovalore reale con molteplicità algebrica due e geometrica uno, possiamo supporre a meno di coniugio che

$$a = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Allora per la (29.20) anche X deve essere triangolare superiore e, ripetendo il ragionamento precedente, troviamo che a appartiene all'immagine dell'esponenziale se e soltanto se $\lambda > 0$.

Resta da considerare il caso in cui x abbia due autovalori complessi coniugati $\lambda, \bar{\lambda}$, oppure sia diagonalizzabile con un autovalore λ reale e negativo con molteplicità due. Se scriviamo $\lambda = e^{t+i\theta}$, con $t, \theta \in \mathbb{R}$, allora la a è coniugata ad una matrice della forma

$$a = e^t \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} t & -\theta \\ \theta & t \end{pmatrix}.$$

In conclusione: $\exp(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}))$ è l'insieme delle matrici reali 2×2 con determinante positivo che non hanno un autovalore reale negativo con molteplicità geometrica uno.

Questo esempio mostra tra l'altro che, in generale, l'immagine dell'applicazione esponenziale può non essere né aperta, né chiusa, né densa in \mathbf{G}^0 .

Sulle proprietà dell'immagine dell'applicazione esponenziale vedi ad esempio [29, Ch.4, §5]. Ci sono due classi importanti di gruppi di Lie per cui l'esponenziale è surgettivo. Abbiamo:

TEOREMA 29.2.2. *Se \mathbf{G} è un gruppo di Lie connesso e compatto, con algebra di Lie \mathfrak{g} , allora $\exp(\mathfrak{g}) = \mathbf{G}$.* □

DEFINIZIONE 29.2.3. Chiamiamo *unipotente* un sottogruppo di Lie \mathbf{G} del gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ i cui elementi siano tutti unipotenti. Gli elementi x di \mathbf{G} hanno cioè tutti polinomio caratteristico $(\lambda - 1)^n$.

TEOREMA 29.2.4. Se \mathbf{G} è unipotente, allora $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{G}$ è un diffeomorfismo. \square

OSSERVAZIONE 29.2.5. I gruppi unipotenti sono particolari gruppi *nilpotenti*. Ricordiamo che un gruppo \mathbf{G} si dice nilpotente se, per ogni $a \in \mathbf{G}$ l'applicazione di commutazione $c_a : \mathbf{G} \ni x \rightarrow [a, x] = a \cdot x \cdot a^{-1} \cdot x^{-1}$ ha un'iterata banale. Se esiste cioè un intero k tale che $c_a^k(x) = e$ per ogni $a, x \in \mathbf{G}$. Si verifica che questa condizione equivale al fatto che \mathbf{G} ammetta una serie di composizione

$$\mathbf{1} = \mathbf{G}_0 < \mathbf{G}_1 < \cdots < \mathbf{G}_n = \mathbf{G}, \quad \text{con} \quad [\mathbf{G}, \mathbf{G}_k] \subset \mathbf{G}_{k-1}, \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

29.3. Sottogruppi di Lie

DEFINIZIONE 29.3.1. Un sottogruppo \mathbf{H} di \mathbf{G} si dice un suo *sottogruppo di Lie* se è anche una sua sottovarietà differenziabile e, con tale struttura differenziabile, è un gruppo di Lie.

In questo caso, l'algebra di Lie \mathfrak{h} di \mathbf{H} è una sottoalgebra dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} , ed i campi di vettori invarianti a sinistra su \mathbf{H} sono restrizioni di campi di vettori invarianti a sinistra di \mathbf{G} .

Viceversa, per ogni sottoalgebra di Lie \mathfrak{h} di \mathfrak{g} , il sottogruppo \mathbf{H} di \mathbf{G} generato da $\exp(\mathfrak{h})$ è un sottogruppo di Lie connesso di \mathbf{G} . Questo è conseguenza del fatto che i campi di vettori invarianti a sinistra corrispondenti agli elementi di \mathfrak{h} generano una distribuzione vettoriale di rango costante formalmente (e quindi totalmente) integrabile in \mathbf{G} .

Ogni omorfismo differenziabile $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ di gruppi di Lie determina un omomorfismo $d\phi_e : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ delle loro algebre di Lie. Il viceversa non è sempre vero; lo è quando \mathbf{G}_1 è semplicemente connesso.

In particolare, la $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{ad}_a \in \mathcal{A}ut(\mathfrak{g})$ definisce un'applicazione

$$\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{Ad}(a) \in \mathcal{A}ut(\mathfrak{g}),$$

che si dice la *rappresentazione lineare aggiunta* di \mathbf{G} . Vale il

TEOREMA 29.3.2. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie, con algebra di Lie \mathfrak{g} .

(1) Se \mathbf{H} è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} , la sua algebra di Lie è

$$(29.21) \quad \mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp(tX) \in \mathbf{H}, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

(2) Ogni sottogruppo chiuso \mathbf{H} di \mathbf{G} è un suo sottogruppo di Lie. \square

ESEMPIO 29.3.3 (Gruppi lineari). Un *gruppo lineare* è un sottogruppo chiuso di un gruppo $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Per il *teorema di Ado* (vedi il Cap. XXXVI), ogni algebra di Lie su un campo \mathbb{K} è isomorfa ad una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.

Utilizzando questo risultato, possiamo realizzare ogni algebra di Lie reale come l'algebra di Lie di una sottoalgebra di Lie di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ per qualche intero $n > 0$.

Un teorema di Djokovic ([21]) ogni algebra di Lie reale è l'algebra di Lie di un sottogruppo *chiuso* di un $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, cioè di un gruppo lineare.

Tutti i gruppi di Lie compatti sono isomorfi a gruppi lineari.

Si può definire sul rivestimento universale $\tilde{\mathbf{G}}$ di un gruppo di Lie connesso una struttura di gruppo di Lie per cui la proiezione canonica $\tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ sia un omomorfismo di gruppi di Lie.

I rivestimenti universali $\widetilde{\mathbf{SL}}(n, \mathbb{R})$ dei gruppi di Lie $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ sono esempi di gruppi di Lie che non sono isomorfi a gruppi lineari.

29.4. La forma di Maurer-Cartan

29.4.1. Forme differenziali a valori vettoriali. Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita ed M una varietà differenziabile. Indichiamo con $\Omega^h(M, V)$ lo spazio delle forme differenziali alternate di grado h su M a valori in V . Esse sono le applicazioni $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineari alternate

$$\phi: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{h \text{ volte}} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, V).$$

Ad esse si estende in modo naturale la definizione del differenziale esterno. Naturalmente, se V non ha una struttura di algebra reale, non ha senso considerare il prodotto esterno di due forme a valori in V . Nel caso in cui V sia un'algebra, possiamo estendere la definizione del prodotto esterno in modo che, sulle forme di grado zero, coincida puntualmente con il prodotto definito in V . In particolare, nel caso delle algebre di Lie, possiamo dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE 29.4.1. Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie reale. Il *prodotto esterno* di due forme differenziali $\phi \in \Omega^p(M, \mathfrak{g})$, $\psi \in \Omega^q(M, \mathfrak{g})$, è la forma $[\phi \wedge \psi] \in \Omega^{p+q}(M, \mathfrak{g})$ definita da:

$$[\phi \wedge \psi](X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q} \\ 1 \leq \sigma_1 < \cdots < \sigma_p \leq p+q \\ 1 \leq \sigma_{p+1} < \cdots < \sigma_{p+q} \leq p+q}} \varepsilon(\sigma) [\phi(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_p}), \psi(X_{\sigma_{p+1}}, \dots, X_{\sigma_{p+q}})].$$

Il prodotto si estende poi per bilinearità a tutto $\Omega^*(M, \mathfrak{g})$.

In particolare, se ϕ e ψ sono 1-forme a valori in \mathfrak{g} , abbiamo:

$$\begin{aligned} [\phi \wedge \psi](X, Y) &= [\phi(X), \psi(Y)] - [\phi(Y), \psi(X)], \\ [\phi \wedge \phi](X, Y) &= 2[\phi(X), \phi(Y)], \end{aligned} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

29.4.2. Forme differenziali invarianti. Siano \mathbf{G} un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} e V uno spazio vettoriale reale.

DEFINIZIONE 29.4.2. Una forma differenziale $\omega \in \Omega^*(\mathbf{G}, V)$ si dice *invariante a sinistra* se $L_a^* \omega = \omega$ per ogni $a \in \mathbf{G}$.

Per una forma di grado uno $\omega \in \Omega^1(\mathbf{G}, V)$ essere invariante a sinistra è equivalente al fatto che, per ogni campo di vettori $X \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$ (cioè invariante a sinistra su \mathbf{G}) la $\omega(X)$ sia una funzione costante a valori in V . Analogamente, una forma

omogenea $\phi \in \mathcal{Q}^q(\mathbf{G}, V)$ è invariante a sinistra se, e soltanto se, per ogni scelta di $X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$, la funzione $\phi(X_1, \dots, X_q)$ è costante.

29.4.3. La forma di Maurer-Cartan. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} .

TEOREMA 29.4.3. *L'applicazione*

$$(29.22) \quad \mathbf{G} \times \mathfrak{g} \ni (a, X) \longrightarrow a \cdot X \in T\mathbf{G}$$

è un diffeomorfismo.

In particolare, i gruppi di Lie sono parallelizzabili ed $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$ è il $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{G})$ -modulo generato da $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$.

DIMOSTRAZIONE. La $T\mathbf{G} \ni v \rightarrow (\pi(v), \pi(v)^{-1} \cdot v) \in \mathbf{G} \times \mathfrak{g}$, ove $\pi : T\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ è la proiezione canonica sulla base, è differenziabile ed inverte la (29.22). \square

PROPOSIZIONE 29.4.4. *L'applicazione*

$$(29.23) \quad \omega_{\mathbf{G}} : T\mathbf{G} \ni v \longrightarrow \pi(v)^{-1} \cdot v \in \mathfrak{g}$$

è una forma differenziale invariante a sinistra a valori in \mathfrak{g} . \square

Essa è caratterizzata dall'equazione

$$(29.24) \quad \omega_{\mathbf{G}}(X_a^*) = X, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall a \in \mathbf{G}.$$

DEFINIZIONE 29.4.5. Chiamiamo la $\omega_{\mathbf{G}}$ *forma di Maurer²-Cartan* di \mathbf{G} .

PROPOSIZIONE 29.4.6. *La forma di Maurer-Cartan $\omega_{\mathbf{G}} \in \mathcal{Q}^1(\mathbf{G}, \mathfrak{g})$ è invariante a sinistra e soddisfa l'equazione di Maurer-Cartan*

$$(29.25) \quad d\omega_{\mathbf{G}} + \frac{1}{2} [\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}] = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $X, Y \in \mathfrak{g}$. Allora

$$\begin{aligned} d\omega_{\mathbf{G}}(X^*, Y^*) &= X^* \omega_{\mathbf{G}}(Y^*) - Y^* \omega_{\mathbf{G}}(X^*) - \omega_{\mathbf{G}}([X^*, Y^*]) \\ &= -[\omega_{\mathbf{G}}(X^*), \omega_{\mathbf{G}}(Y^*)] = -\frac{1}{2} [\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}](X^*, Y^*). \end{aligned}$$

Poiché $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$ genera $\mathfrak{X}(M)$ come $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{G})$ -modulo, otteniamo la tesi. \square

LEMMA 29.4.7. *La forma di Maurer-Cartan $\omega_{\mathbf{G}}$ di \mathbf{G} soddisfa:*

$$(29.26) \quad R_a^* \omega_{\mathbf{G}} = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega_{\mathbf{G}}.$$

Ogni forma differenziale $\phi \in \mathcal{Q}^1(\mathbf{G}, V)$, invariante a sinistra su \mathbf{G} è della forma $\phi = \lambda \circ \omega_{\mathbf{G}}$, per un'applicazione lineare $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow V$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché le traslazioni a destra e a sinistra commutano, il traslato a destra di un campo di vettori invariante a sinistra è ancora invariante a sinistra. Quindi, se $X \in \mathfrak{g}$ ed $a \in \mathbf{G}$, il campo $X^* \cdot a$ è ancora invariante a sinistra. Esso è il campo Y^* corrispondente ad

$$Y = a^{-1} \cdot X \cdot a = \text{Ad}_{a^{-1}}(X).$$

²Ludwig Maurer (1859-1927) matematico tedesco, professore all'Università di Tübingen, ha contribuito allo studio dei gruppi di matrici.

Questo dimostra la (29.26).

Se $\phi \in \Omega^1(\mathbf{G}, \mathbf{V})$ è invariante a sinistra, abbiamo $\phi = \lambda \circ \omega_{\mathbf{G}}$ con

$$\lambda = \phi_e : \mathfrak{g} = \mathbf{T}_e \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{V}. \quad \square$$

ESEMPIO 29.4.8. Consideriamo $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ come un aperto dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^{n \times n}$ delle matrici reali $n \times n$, che possiamo ancora identificare con la sua algebra di Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. Poiché $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ è un aperto di $\mathbb{R}^{n \times n}$, possiamo identificare il suo spazio tangente al prodotto cartesiano $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n \times n}$. In particolare, abbiamo l'identificazione $\mathfrak{X}(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})) \simeq \mathcal{C}^\infty(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}^{n \times n})$. I campi di vettori invarianti a sinistra sono allora gli X^* con $X_a^* = a \cdot X$, per $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, $a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Quindi, con questa notazione, la forma di Maurer Cartan di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ è

$$(29.27) \quad \omega_{\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})} = a^{-1} da,$$

ove al solito da indica l'identità, in questo caso su $\mathbb{R}^{n \times n}$.

In modo analogo, i campi di vettori invarianti a destra su $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ si scrivono nella forma

$$\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \ni a \longrightarrow X_{*a} = X \cdot a \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

al variare di X in $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

La forma che associa ad ogni vettore v tangente in a a $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ il valore X in e del campo di vettori invariante a destra X_* che assume in a il valore v è data da

$$(da) \circ a^{-1} = \text{ad}_a \circ \omega_{\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})}.$$

La discussione nell'Esempio 29.4.8 giustifica la

NOTAZIONE 29.4.9. Se $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{G})$ è un arco differenziabile in \mathbf{G} , poniamo

$$\sigma^{-1}(t) \cdot \dot{\sigma}(t) = \omega_{\mathbf{G}}(\dot{\sigma}(t)), \quad \dot{\sigma}(t) \cdot \sigma^{-1}(t) = \text{ad}_{\sigma(t)} \circ \omega_{\mathbf{G}}(\dot{\sigma}(t)).$$

Concludiamo questo paragrafo con una costruzione che generalizza l'esponenziale.

PROPOSIZIONE 29.4.10. Siano \mathbf{G} un gruppo di Lie, con algebra di Lie \mathfrak{g} .

Sia I un intervallo reale, $t_0 \in I$, $a_0 \in \mathbf{G}$ ed $X \in \mathcal{C}^k(I, \mathfrak{g})$, con $k \geq 0$. Allora sono univocamente determinati $a, b \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbf{G})$ tali che

$$(29.28) \quad \begin{cases} a^{-1}(t) \cdot \dot{a}(t) = X(t) & \forall t \in I, \\ a(t_0) = a_0, \end{cases}$$

$$(29.29) \quad \begin{cases} \dot{b}(t) \cdot b^{-1}(t) = X(t), & \forall t \in I, \\ b(t_0) = a_0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che, se $a(t)$ è una soluzione di (29.28) e $b \in \mathbf{G}$, allora $b \cdot a(t)$ risolve lo stesso sistema differenziale, con valore iniziale $b \cdot a_0$. Possiamo quindi limitarci a risolvere (29.28) nel caso in cui $a_0 = e_{\mathbf{G}}$ sia l'identità del gruppo. Possiamo quindi supporre che \mathbf{G} sia connesso. Consideriamo innanzitutto il caso in cui \mathbf{G} sia un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. L'equazione

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = a(t)X(t), \\ a(t_0) = I_n \end{cases} \quad \text{con } a, X \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^{n \times n}),$$

è lineare ed ammette quindi una ed una sola soluzione, definita e di classe \mathcal{C}^{k+1} su tutto l'intervallo I . Analogamente, anche il sistema

$$\begin{cases} \dot{b}(t) = -X(t)b(t), & \forall t \in I, \\ b(t_0) = I_n, \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione, di classe \mathcal{C}^{k+1} , definita sull'intervallo I . Abbiamo allora

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(a(t)b(t)) = \dot{a}(t) \cdot b(t) + a(t) \cdot \dot{b}(t) = a(t)X(t)b(t) - a(t)X(t)b(t) = 0, \\ a(t_0) \cdot b(t_0) = I_n. \end{cases}$$

Questo implica che $a(t) \cdot b(t) = I_n$ per ogni t e quindi che $a \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}))$. Resta da dimostrare che a è a valori in \mathbf{G} se $a_0 \in \mathbf{G}$. Questo si ottiene perché, se ad esempio $t \in I$ con $t > t_0$, allora $a(t)$ è il limite dei prodotti

$$\exp((t-t_0)X(t_0)) \exp((t_1-t_0)X(t_1)) \cdots \exp((t_m-t_{m-1})X(t_{m-1})) \exp((t-t_m)X(t_m)),$$

con $t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t = t_{m+1}$ e $\sup |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$. Questi prodotti sono elementi di \mathbf{G} e quindi il limite appartiene a \mathbf{G} perché abbiamo supposto che fosse chiuso in $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Ci riconduciamo al caso generale osservando che ogni gruppo di Lie \mathbf{G} è localmente diffeomorfo ad un sottogruppo chiuso \mathbf{G}' di un gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Come abbiamo osservato possiamo limitarci a considerare il caso in cui \mathbf{G} , e quindi anche \mathbf{G}' , siano connessi. I gruppi \mathbf{G} e \mathbf{G}' hanno lo stesso rivestimento universale $\tilde{\mathbf{G}}$. Indichiamo con $\pi : \tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ e con $\pi' : \tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}'$ le funzioni di rivestimento. Per la prima parte della dimostrazione, vi è un unico cammino $a' \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbf{G}')$ per cui

$$\begin{cases} \dot{a}'(t) = a'(t)X(t), & \forall t \in I, \\ a'(t_0) = I_n. \end{cases}$$

Esso si rialza ad un unico cammino $\tilde{a} \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \tilde{\mathbf{G}})$ con

$$\pi'(\tilde{a}(t)) = a(t), \quad \forall t \in I, \quad \tilde{a}(t_0) = e_{\tilde{\mathbf{G}}}.$$

Allora $a = \pi \circ \tilde{a} \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbf{G})$ è la soluzione di (29.28). L'unicità segue dal teorema di unicità della soluzione dei sistemi di equazioni differenziali.

In modo analogo possiamo discutere l'equazione (29.29). \square

29.5. Applicazioni a valori in un gruppo di Lie

Siano \mathbf{G} un gruppo di Lie, \mathfrak{g} la sua algebra di Lie, M una varietà differenziabile ed f una funzione di classe \mathcal{C}^∞ definita su M ed a valori in \mathbf{G} .

DEFINIZIONE 29.5.1. Chiamiamo *derivata di Darboux* di f il pullback mediante f della forma di Maurer-Cartan di \mathbf{G} :

$$(29.30) \quad \omega_f = \text{derivata di Darboux di } f = f^*(\omega_{\mathbf{G}}).$$

La f si dice un *integrale*, o una *primitiva* o *mappa dei periodi* di ω_f .

PROPOSIZIONE 29.5.2. Se $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$ e $\omega_{f_1} = \omega_{f_2}$, allora esiste un elemento $a \in \mathbf{G}$ tale che $f_1(p) = a \cdot f_2(p)$ per ogni $p \in M$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'applicazione $\phi : M \ni p \rightarrow f_1(p)[f_2(p)]^{-1} \in \mathbf{G}$. Poiché

$$0 = d(f_2 \cdot f_2^{-1}) = df_2 \cdot f_2^{-1} + f_2 \cdot d(f_2^{-1}),$$

è $d(f_2^{-1}) = -f_2^{-1} \cdot df_2 \cdot f_2^{-1}$. Abbiamo allora

$$d\phi = df_1 \cdot f_2^{-1} - f_1 \cdot f_2^{-1} \cdot df_2 \cdot f_2^{-1} = df_1 \cdot f_2^{-1} - \phi \cdot df_2 \cdot f_2^{-1},$$

da cui si ricava

$$\omega_\phi = \phi^{-1}d\phi = f_2 \cdot (f_1^{-1} \cdot df_1) \cdot f_2^{-1} - f_2 \cdot (f_2^{-1} \cdot df_2) \cdot f_2^{-1} = f_2 \cdot (\omega_{f_1} - \omega_{f_2}) \cdot f_2^{-1}.$$

Questo dimostra che, se f_1 ed f_2 hanno la stessa derivata di Darboux, allora $d\phi = 0$ e quindi $f_1[f_2]^{-1} = \text{costante} = \mathbf{a} \in \mathbf{G}$. \square

La derivata di Darboux $\omega = \omega_f$ di una $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$ soddisfa l'equazione di struttura

$$(29.31) \quad d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] = 0.$$

Viceversa, abbiamo

TEOREMA 29.5.3. *Supponiamo M connessa e semplicemente connessa. Fissiamo un punto $p_0 \in M$ ed un elemento \mathbf{a}_0 di \mathbf{G} . Se $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ soddisfa (29.31), allora esiste una ed una sola $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$ tale che*

$$(29.32) \quad \omega_f = \omega \quad \text{ed} \quad f(p_0) = \mathbf{a}_0.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la varietà prodotto $M \times \mathbf{G}$ ed indichiamo con

$$\pi_M : M \times \mathbf{G} \rightarrow M \quad \text{e} \quad \pi_G : M \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$$

le proiezioni sui singoli fattori. Consideriamo su $M \times \mathbf{G}$ la forma

$$\theta = \pi_M^* \omega - \pi_G^* \omega_G \in \Omega^1(M \times \mathbf{G}, \mathfrak{g}).$$

Dico che $\ker \theta$ è una distribuzione di rango $m = \dim(M)$ totalmente integrabile. Infatti, se $p \in M$ ed $x \in \mathbf{G}$, l'applicazione che fa corrispondere a $v \in T_p M$ il vettore $(v, x \cdot \omega(v)) \in T_{(p,x)}(M \times \mathbf{G}) = T_p M \oplus T_x \mathbf{G}$ è lineare e bigettiva da $T_p M$ a $\ker \theta_{(p,x)}$. Se poi X, Y sono campi di vettori su $M \times \mathbf{G}$ con coefficienti in $\ker \theta$, allora

$$\begin{aligned} \theta([X, Y]) &= -d\theta(X, Y) = -d(\pi_M^* \omega - \pi_G^* \omega_G)(X, Y) = \pi_G^*(d\omega_G) - \pi_M^*(d\omega)(X, Y) \\ &= [\omega_G(d\pi_G(X)), \omega_G(d\pi_G(Y))] - [\omega(d\pi_M(X)), \omega(d\pi_M(Y))] = 0 \end{aligned}$$

perché $\omega_G(d\pi_G(X)) = \omega(d\pi_M(X))$ ed $\omega_G(d\pi_G(Y)) = \omega(d\pi_M(Y))$, in quanto X ed Y hanno valori in $\ker \theta$.

Per il teorema di Frobenius vi è una ed una sola varietà integrale N di $\ker \theta$ che passi per il punto (p_0, \mathbf{a}_0) . La restrizione ad N della π_M è un diffeomorfismo locale. Esso è surgettivo per la Proposizione 29.4.10: infatti essa ci dice che ogni cammino in M , di punto iniziale p_0 , si rialza ad un cammino in N di punto iniziale (p_0, \mathbf{a}_0) . Poiché abbiamo supposto che M fosse connessa, la $N \ni (p, x) \rightarrow p \in M$ è surgettiva e quindi un rivestimento. Se M è anche semplicemente connessa, il rivestimento è ad un solo foglio e quindi il grafico di un'applicazione $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$. Per costruzione abbiamo allora $\omega_f = \omega$. \square

29.6. Omomorfismi di gruppi di Lie

Siano \mathbf{G}_1 e \mathbf{G}_2 due gruppi di Lie, con algebre di Lie \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 , rispettivamente.

DEFINIZIONE 29.6.1. Una $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ si dice un *omomorfismo di gruppi di Lie* se è differenziabile di classe \mathcal{C}^ω e verifica

$$\phi(\mathbf{a}_1^{-1}\mathbf{a}_2) = [\phi(\mathbf{a}_1)]^{-1}\phi(\mathbf{a}_2), \quad \forall \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbf{G}.$$

PROPOSIZIONE 29.6.2. (1) Se $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ è un omomorfismo di gruppi di Lie, allora il suo differenziale nell'identità $\Phi = d\phi_{e_{\mathbf{G}_1}} : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ è un omomorfismo di algebre di Lie reali.

(2) Due omomorfismi di gruppi di Lie $\phi, \psi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ che abbiano lo stesso differenziale nell'identità coincidono sulla componente connessa dell'identità di \mathbf{G}_1 .

(3) Se \mathbf{G}_1 è connesso e semplicemente connesso, ad ogni omomorfismo di algebre di Lie $\Phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ corrisponde uno ed un solo omomorfismo di gruppi di Lie $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ con $d\phi_{e_{\mathbf{G}_1}} = \Phi$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Per ogni $X \in \mathfrak{g}_1$, i campi di vettori invarianti a sinistra X^* su \mathbf{G}_1 e $[\Phi(X)]^*$ su \mathbf{G}_2 sono ϕ -correlati. Da questo segue che

$$[[\Phi(X_1)]^*, [\Phi(X_2)]^*] = [\Phi([X_1, X_2])]^*, \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1,$$

perché $[[\Phi(X_1)]^*, [\Phi(X_2)]^*]$ e $[\Phi([X_1, X_2])]^*$ sono ϕ -correlati ad $[X_1^*, X_2^*]$ ed $[X_1, X_2]^*$, rispettivamente. Ne segue che Φ è un omomorfismo di algebre di Lie.

(2) Sia $\Phi = d\phi_{e_{\mathbf{G}_1}} = d\psi_{e_{\mathbf{G}_1}}$. Per (1) è $\phi(\exp(X)) = \exp(\Phi(X)) = \psi(\exp(X))$ per ogni $X \in \mathfrak{g}_1$. In particolare, ϕ e ψ coincidono su un intorno aperto di $e_{\mathbf{G}_1}$ in \mathbf{G}_1 . Quindi l'insieme degli \mathbf{a} di \mathbf{G}_1 in cui $\phi(\mathbf{a}) = \psi(\mathbf{a})$ è un sottogruppo di \mathbf{G}_1 che contiene un intorno dell'identità e quindi la componente connessa dell'identità di \mathbf{G}_1 .

(3) Consideriamo il gruppo di Lie prodotto diretto $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$, con algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Il sottospazio $\mathfrak{h} = \{(X, \Phi(X)) \mid X \in \mathfrak{g}_1\}$ è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} e quindi genera un sottogruppo di Lie analitico \mathbf{H} di \mathbf{G} . La restrizione ad \mathbf{H} della proiezione canonica $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}_1$ è un omomorfismo di gruppi di Lie il cui nucleo ha algebra di Lie $\{0\}$. È quindi un rivestimento, e perciò un diffeomorfismo, in quanto avevamo supposto che \mathbf{G}_1 fosse semplicemente connesso. \square

29.7. Rappresentazioni lineari

Siano \mathbf{G} un gruppo di Lie, e V uno spazio vettoriale reale³.

DEFINIZIONE 29.7.1. Una *rappresentazione lineare* di \mathbf{G} su V è un omomorfismo di gruppi di Lie $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$.

³Possiamo considerare spazi vettoriali complessi o quaternionici come spazi vettoriali reali per restrizione del campo degli scalari. Chiameremo una rappresentazioni di \mathbf{G} di tipo reale, complesso o quaternionico a seconda che gli isomorfismi lineari di V corrispondenti agli elementi di \mathbf{G} siano lineari rispetto ad $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

Una rappresentazione lineare (ρ, V) è quindi un'applicazione $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V))$ tale che

$$\rho_{(a_1^{-1} \cdot a_2)} = \rho_{a_1}^{-1} \cdot \rho_{a_2}, \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbf{G}.$$

Quando ciò non generi confusione, scriveremo $a \cdot v$ invece di $\rho_a(v)$ (per $a \in \mathbf{G}$ e $v \in V$). Dalla Proposizione 29.6.2 abbiamo:

PROPOSIZIONE 29.7.2. *Se (ρ, V) è una rappresentazione lineare reale di dimensione finita di \mathbf{G} , allora $\rho_* = d\rho_{e_{\mathbf{G}}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ è una rappresentazione lineare di \mathfrak{g} .*

Se \mathbf{G} è connesso e semplicemente connesso, allora ogni rappresentazione lineare ρ_ della sua algebra di Lie su uno spazio vettoriale reale V è il differenziale di una sua rappresentazione lineare ρ su V . \square*

29.8. Spazi omogenei

Gli spazi omogenei separati di un gruppo di Lie sono varietà analitiche.

TEOREMA 29.8.1. *Siano \mathbf{G} un gruppo di Lie ed \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso. Vi è allora sul quoziente $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ un'unica struttura di varietà differenziabile \mathcal{C}^∞ per cui $\xi = (\mathbf{G}, \pi, M)$, ove π è la proiezione sul quoziente, sia un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{H} . Inoltre, \mathbf{G} opera su M mediante diffeomorfismi.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario 2.2.19, M è uno spazio di Hausdorff e la proiezione $\pi : \mathbf{G} \rightarrow M$ aperta. Per il Teorema 29.3.2, \mathbf{H} è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} . Siano \mathfrak{g} l'algebra di Lie di \mathbf{G} ed $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ quella di \mathbf{H} .

Scegliamo un complemento lineare \mathfrak{m} di \mathfrak{h} in \mathfrak{g} , di modo che

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}.$$

L'applicazione

$$f : \mathfrak{m} \times \mathbf{H} \ni (X, h) \longrightarrow \exp(X) \cdot h \in \mathbf{G}$$

è analitica. Lo spazio tangente di $\mathfrak{m} \times \mathbf{H}$ in $(0, e_{\mathbf{H}})$ è $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ ed il differenziale $df(0, e_{\mathbf{H}})$ è l'identità su \mathfrak{g} .

Per il teorema delle funzioni implicite esistono allora intorno aperti N'_0 di 0 in \mathfrak{m} , V' di $e_{\mathbf{H}}$ in \mathbf{H} tali che la restrizione di f ad $N'_0 \times V'$ sia un diffeomorfismo su un intorno aperto U' di $e_{\mathbf{G}}$ in \mathbf{G} .

Poiché \mathbf{H} è chiuso, possiamo scegliere gli intorno V', N'_0 sufficientemente piccoli in modo che risulti

$$V' = U' \cap \mathbf{H}, \quad \exp(N'_0) \cap \mathbf{H} = f(N'_0 \times \{e_{\mathbf{H}}\}) \cap \mathbf{H} = \{e_{\mathbf{G}}\}.$$

A questo punto scegliamo intorno $N_0 \subset N'_0$ di 0 in \mathfrak{m} e $V \subset V'$ di e in \mathbf{H} in modo che, con $U = f(N_0 \times V)$, sia $U^2 \cup U^{-2} \subset U'$ e poniamo $W = \pi(U) \subset M$.

Dico che allora

$$f_0 : N_0 \times \mathbf{H} \ni (X, h) \longrightarrow f(X, h) = \exp(X) \cdot h \in \pi^{-1}(W) \quad \text{è un diffeomorfismo.}$$

Infatti, poiché le traslazioni a destra mediante elementi di \mathbf{H} sono diffeomorfismi, e la f_0 commuta con le traslazioni a destra mediante elementi di \mathbf{H} , essendo per costruzione un diffeomorfismo locale su $N_0 \times V$, lo è anche in tutti i punti di $N_0 \times \mathbf{H}$.

Basta quindi verificare che sia bigettiva. Poiché $\pi^{-1}(W) = \bigcup_{h \in \mathbf{H}} U \cdot h$, la f è senz'altro surgettiva. Mostriamo che è anche iniettiva. Siano $X_1, X_2 \in N_0$ ed $h_1, h_2 \in \mathbf{H}$ tali che $\exp(X_1) \cdot h_1 = \exp(X_2) \cdot h_2$. Da $\exp(-X_2) \cdot \exp(X_1) = h_2 \cdot h_1^{-1}$, poiché abbiamo supposto che $U^2 \cup U^{-2} \subset U'$, ricaviamo che

$$h = h_2 \cdot h_1^{-1} = \exp(-X_2) \cdot \exp(X_1) \in U' \cap \mathbf{H} = V',$$

perché $\exp(X_1), \exp(X_2) \in U$ ed $h_1 \cdot h_2^{-1} \in \mathbf{H}$. Quindi $\exp(X_1) = \exp(X_2) \cdot h$ con $X_1, X_2 \in N_0, h \in V'$. Poiché $f : N'_0 \times V' \rightarrow U'$ è un diffeomorfismo, ricaviamo che $X_1 = X_2$ ed $h = h_2 \cdot h_1^{-1} = e_{\mathbf{H}}$, cioè $h_1 = h_2$.

Per ogni $a \in \mathbf{G}$ l'applicazione

$$\gamma_a : N_0 \ni X \longrightarrow \pi(a \cdot \exp(X)) \in \mathfrak{a}(W) = W_a$$

è un omeomorfismo di N_0 su un aperto W_a di M . Le $\zeta_a = \gamma_a^{-1}$ sono le carte locali di un atlante di classe \mathcal{C}^ω su M . Infatti

$$\begin{aligned} \zeta_a \circ \zeta_b^{-1}(X) &= \zeta_a \circ \gamma_b(X) = \text{pr}_m \circ f_0^{-1}(a^{-1} \cdot b \exp(X)), \\ \forall X \in \zeta_a(W_a \cap W_b) &= \{X \mid a^{-1} \cdot b \exp(X) \in U\}. \end{aligned}$$

Osserviamo infine che le

$$W_a \times \mathbf{H} \ni (p, h) \rightarrow a \cdot \exp(\zeta_a(p)) \cdot h \in \pi^{-1}(W_a), \quad a \in \mathbf{G},$$

definiscono un atlante di trivializzazione differenziabile del fibrato $\xi = (\mathbf{G}, \pi, M)$. \square

DEFINIZIONE 29.8.2. Con la struttura differenziale descritta dal Teorema 29.8.1, chiamiamo \mathbf{G}/\mathbf{H} lo spazio omogeneo del gruppo di Lie \mathbf{G} con stabilizzatore \mathbf{H} .

29.9. Gruppi di Lie di trasformazioni

Per generalità sulle azioni di gruppo insiemistiche e topologiche rimandiamo al §2.1. Specializziamo qui quelle nozioni al caso differenziabile.

Siano \mathbf{G} un gruppo di Lie ed M una varietà differenziabile.

DEFINIZIONE 29.9.1. Un'azione differenziabile a sinistra di \mathbf{G} su M è un'applicazione differenziabile

$$(29.33) \quad \mathbf{G} \times M \ni (a, p) \longrightarrow a \cdot p \in M \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} e_{\mathbf{G}} p = p, \\ a_1 \cdot (a_2 p) = (a_1 \cdot a_2) \cdot p, \\ \forall a_1, a_2 \in \mathbf{G}, \forall p \in M. \end{cases}$$

Gli elementi a di \mathbf{G} definiscono diffeomorfismi di M in sé

$$\ell_a : M \ni p \longrightarrow a \cdot p \in M \quad (\text{TRASLAZIONI A SINISTRA}).$$

DEFINIZIONE 29.9.2. L'azione (29.33) si dice

- *effettiva* se $\ell_a = \text{id}_M \iff a = e_{\mathbf{G}}$;
- *libera* se le ℓ_a con $a \neq e_{\mathbf{G}}$ non hanno punti fissi;
- *transitiva* se per ogni coppia di punti p_1, p_2 di M esiste un $a \in \mathbf{G}$ tale che $a \cdot p_1 = p_2$.

DEFINIZIONE 29.9.3. Sia $p_0 \in M$.

Il sottogruppo $G_{p_0} = \{a \in G \mid a \cdot p_0 = p_0\}$ si dice lo *stabilizzatore* di p_0 in G .

Il sottoinsieme $G(p_0) = \{a \cdot p_0 \mid a \in G\}$ si dice l'*orbita* in M di G per p_0 .

Lo stabilizzatore G_{p_0} è un sottogruppo chiuso e quindi un sottogruppo di Lie di G . Indichiamo con \mathfrak{g}_{p_0} la sua algebra di Lie.

Ad ogni elemento X dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di G associamo il gruppo a un parametro

$$\mathbb{R} \times M \ni (t, p) \longrightarrow \exp(tX) \cdot p \in M$$

di diffeomorfismi di M . Indichiamo con X_\star il suo generatore infinitesimale. La curva $\sigma(t) = \exp(tX) \cdot p$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = X_{\star\sigma(t)}, \\ \sigma(0) = p. \end{cases}$$

LEMMA 29.9.4. È $X_{\star p} = 0$ se e soltanto se X appartiene all'algebra di Lie \mathfrak{g}_p dello stabilizzatore G_p di p in G .

DIMOSTRAZIONE. Infatti $X_{\star p} = 0$ se e soltanto se $\exp(tX) \in G_p$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e l'affermazione è quindi conseguenza della caratterizzazione dell'algebra di Lie di un sottogruppo di Lie, che abbiamo descritto col Teorema 29.3.2. \square

PROPOSIZIONE 29.9.5. I campi di vettori X_\star formano una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(M)$. L'applicazione $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_\star \in \mathfrak{X}(M)$ è un anti-omomorfismo di algebre di Lie. Abbiamo cioè

$$[X, Y]_\star = -[X_\star, Y_\star], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Per ogni $p_0 \in M$, il differenziale nell'identità dell'applicazione

$$r_{p_0} : G \ni a \longrightarrow a \cdot p_0 \in M$$

associa ad $X \in \mathfrak{g}$ il valore in p_0 del campo X_\star .

Il campo X_\star è r_{p_0} -correlato al campo di vettori invariante a destra X_\star associato all'elemento X di \mathfrak{g} .

L'algebra di Lie \mathfrak{g}_{p_0} di G_{p_0} è il nucleo del differenziale $(dr_{p_0})_{e_G} : \mathfrak{g} \rightarrow T_{p_0}M$.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione r_{p_0} trasforma il gruppo a un parametro

$$\mathbb{R} \times G \ni (t, a) \rightarrow \exp(tX) \cdot a \in G$$

nel gruppo a un parametro

$$\mathbb{R} \times M \ni (t, p) \rightarrow \exp(tX) \cdot p \in M$$

e quindi il generatore infinitesimale X_\star del primo, nel generatore infinitesimale X_\star del secondo. In particolare, i campi di vettori X_\star ed X_\star sono r_{p_0} -correlati. Da questa osservazione seguono tutte le affermazioni della proposizione. \square

OSSERVAZIONE 29.9.6. Se $M = G$ e (29.33) è la moltiplicazione del gruppo, allora X_\star è il campo di vettori invariante a destra associato ad $X \in \mathfrak{g}$.

COROLLARIO 29.9.7. Se (29.33) è effettiva, allora l'applicazione

$$\mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_\star \in \mathfrak{X}(M) \text{ è iniettiva.}$$

Se (29.33) è libera, allora l'applicazione $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_{\star p} \in T_pM$ è iniettiva per ogni $p \in M$. \square

DEFINIZIONE 29.9.8. I campi X_\star si dicono *trasformazioni \mathbf{G} -infinitesime* di M .

TEOREMA 29.9.9. Sia (29.33) un'azione differenziabile a sinistra di \mathbf{G} su M . Fissiamo un punto ρ_0 di M e siano \mathbf{G}_{ρ_0} lo stabilizzatore di ρ_0 in \mathbf{G} e $\mathbf{G}(\rho_0)$ l'orbita di \mathbf{G} per il punto ρ_0 . Allora $\mathbf{G}(\rho_0)$ una sottovarietà analitica di M , e l'applicazione f , definita dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \xrightarrow{r_{\rho_0}} & \mathbf{G}(\rho_0) \\ \pi \downarrow & \nearrow f & \\ \mathbf{G}/\mathbf{G}_{\rho_0} & & \end{array}$$

un diffeomorfismo \mathbf{G} -equivariante (commuta cioè con le traslazioni a sinistra per elementi di \mathbf{G}) di classe \mathcal{C}^ω dello spazio omogeneo $\mathbf{G}/\mathbf{G}_{\rho_0}$ su $\mathbf{G}(\rho_0)$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla Proposizione 29.9.5 e dalla descrizione della struttura differenziale di $\mathbf{G}/\mathbf{G}_{\rho_0}$ data dal Teorema 29.8.1, segue che il quoziente iniettivo di r_{ρ_0} è un'immersione differenziabile \mathbf{G} -equivariante di classe \mathcal{C}^ω . Da questo fatto, seguono le affermazioni del Teorema. \square

COROLLARIO 29.9.10. Se l'azione (29.33) è transitiva, M è diffeomorfa, in modo \mathbf{G} -equivariante, a uno spazio omogeneo di \mathbf{G} . \square

ESEMPIO 29.9.11. L'applicazione $\pi: \mathbf{SO}(n+1) \ni \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_0 \in S^n$, ove \mathbf{e}_0 è un vettore di lunghezza unitaria in \mathbb{R}^{n+1} , definisce un diffeomorfismo $\mathbf{SO}(n+1)$ -equivariante tra la sfera S^n e lo spazio omogeneo $\mathbf{SO}(n+1)/\mathbf{SO}(n)$.

ESEMPIO 29.9.12. Sia n un intero positivo. Il gruppo $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{R})$ delle matrici diagonali superiori con determinante diverso da zero è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Lo spazio omogeneo $F = \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})/\mathbf{T}_n^+(\mathbb{R})$ è una varietà differenziabile compatta di dimensione $n(n-1)/2$, che si dice *varietà bandiera reale completa* e che è diffeomorfo al sottospazio di $\mathbb{G}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathbb{G}_{n,n-1}(\mathbb{R})$ che consiste delle $(n-1)$ -uple $(\ell_1, \dots, \ell_m, \dots, \ell_{n-1})$ di sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n con $\{0\} \subsetneq \ell_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \ell_m \subsetneq \cdots \subsetneq \ell_{n-1} \subsetneq \mathbb{R}^n$.

OSSERVAZIONE 29.9.13. In generale, se un gruppo di Lie \mathbf{G} opera transitivamente su un insieme M , possiamo definire su M un'unica struttura di varietà \mathcal{C}^ω per cui l'azione di \mathbf{G} su M sia differenziabile.

ESEMPIO 29.9.14. Fissiamo una forma bilineare alternata non degenera ω su \mathbb{C}^{2n} e sia M il sottoinsieme della Grassmanniana $\mathbb{G}_{2n,n}(\mathbb{C})$ formato dai sottospazi Lagrangiani di \mathbb{C}^{2n} , cioè dai $\mathfrak{p} \in \mathbb{G}_{2n,n}(\mathbb{C})$ tali che $\omega(v, w) = 0$ per ogni $v, w \in \mathfrak{p}$. Dico che M è una varietà connessa e compatta.

Identifichiamo \mathbb{C}^{2n} con lo spazio \mathbb{H}^n delle n -uple di quaternioni, facendo corrispondere a $(\zeta, \xi)^T \in \mathbb{C}^{2n}$ l'elemento $\mathfrak{q} = \zeta + j \cdot \xi$. Ricordiamo che il coniugio dei quaternioni è $\overline{\zeta + j \cdot \xi} = \bar{\zeta} - j \cdot \bar{\xi}$. Possiamo scegliere le coordinate in modo che il prodotto scalare standard su \mathbb{H}^n sia definito da

$$(\mathfrak{q}_1 | \mathfrak{q}_2)_{\mathbb{H}} = \bar{\mathfrak{q}}_2^T \cdot \mathfrak{q}_1 = (\bar{\zeta}_2 - j \cdot \bar{\xi}_2)^T \cdot (\zeta_1 + j \cdot \xi_1) = (\bar{\zeta}_2^T \cdot \zeta_1 + \bar{\xi}_2^T \cdot \xi_1) + j \cdot (\bar{\xi}_2^T \cdot \zeta_1 - \bar{\zeta}_2^T \cdot \xi_1)$$

$$= (\mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2)_{\mathbb{C}^{2n}} + j \cdot \omega(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2),$$

per ogni $\mathbf{q}_1 = \zeta_1 + j \cdot \xi_1, \mathbf{q}_2 = \zeta_2 + j \cdot \xi_2$, con $\zeta_1, \zeta_2, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}^n$.

Ragionando come nell'esempio precedente, possiamo identificare gli n -piani Lagrangiani agli n -piani complessi generati da una base ortonormale di \mathbb{H}^n . Quindi il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ opera transitivamente su M . Lo stabilizzatore di $\mathbf{p}_0 = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{C}}$ in $\mathbf{Sp}(n)$ è il gruppo unitario $\mathbf{U}(n)$. Quindi $M \simeq \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{U}(n)$ è una varietà connessa e compatta di dimensione $n(2n+1) - n^2 = n(n+1)$. Osserviamo che M ha dimensione pari ed in effetti è una varietà complessa compatta di dimensione $n(n+1)/2$.

In modo del tutto analogo possiamo definire e discutere il concetto di azione differenziabile a destra. Siano P è una varietà differenziabile e \mathbf{G} un gruppo di Lie.

DEFINIZIONE 29.9.15. Un'azione differenziabile a destra di \mathbf{G} su P è un'applicazione differenziabile

$$(29.34) \quad P \times \mathbf{G} \ni (\sigma, \mathbf{a}) \longrightarrow \sigma \cdot \mathbf{a} \in P \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} \sigma e_{\mathbf{G}} = \sigma, \\ (\sigma \cdot \mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{a}_2 = \sigma \cdot (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2), \\ \forall \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbf{G}, \forall \sigma \in P. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 29.9.16. Se (29.33) è un'azione differenziabile a sinistra, la $M \times \mathbf{G} \ni (\mathbf{p}, \mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{p} \in M$ è un'azione differenziabile a destra su M e, viceversa, se (29.34) è un'azione differenziabile a destra, la $\mathbf{G} \times P \ni (\mathbf{a}, \sigma) \rightarrow \sigma \cdot \mathbf{a}^{-1} \in P$ è un'azione differenziabile a sinistra su P .

Sarà comunque conveniente nel seguito considerare i due tipi di azione in modo distinto. L'azione a sinistra sarà spesso transitiva ed effettiva e coinciderà con le traslazioni a sinistra su uno spazio omogeneo. L'azione a destra sarà di solito libera ed effettiva, ed agirà tipicamente in modo transitivo sulle fibre di un fibrato differenziabile. L'esempio tipico è quello degli spazi omogenei $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ e dell'azione a sinistra di \mathbf{G} come gruppo di traslazioni sulla base M del fibrato principale $\xi = (\mathbf{G}, \pi, M)$ e del suo gruppo strutturale \mathbf{H} a destra su \mathbf{G} , pensato come spazio totale di ξ .

Fissata un'azione a destra (29.34), ad ogni elemento X dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} associamo il generatore infinitesimale X^* del gruppo a un parametro di trasformazioni

$$(29.35) \quad P \times \mathbb{R} \ni (\sigma, t) \longrightarrow \sigma \cdot \exp(tX) \in P.$$

La curva $\sigma(t) = \sigma \cdot \exp(tX)$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$(29.36) \quad \begin{cases} \dot{\sigma}(t) = X_{\sigma(t)}^*, & t \in \mathbb{R}, \\ \sigma(0) = \sigma. \end{cases}$$

In particolare, X^* si annulla in un punto $\sigma \in P$ se e soltanto se X appartiene all'algebra di Lie dello stabilizzatore \mathbf{G}_{σ} di σ in \mathbf{G} .

OSSERVAZIONE 29.9.17. Se $P = \mathbf{G}$ e (29.34) la moltiplicazione del gruppo, allora $X^* = X^*$ è il campo di vettori invariane a sinistra associato ad $X \in \mathfrak{g}$.

Fissata $\sigma \in P$, consideriamo l'applicazione differenziabile

$$(29.37) \quad \ell_\sigma : \mathbf{G} \ni \mathbf{a} \longrightarrow \sigma \cdot \mathbf{a} \in P.$$

Come nel caso delle azioni a sinistra, abbiamo

PROPOSIZIONE 29.9.18. *Sia (29.34) un'azione differenziabile a destra. Allora*

- (1) $X_\sigma^* = (d\ell_\sigma)_e(X)$, $\forall \sigma \in P$, $\forall X \in \mathfrak{g}$;
- (2) $\ker((d\ell_\sigma)_e)$ è l'algebra di Lie dello stabilizzatore di σ in \mathbf{G} . □

Gli elementi \mathbf{a} di \mathbf{G} definiscono diffeomorfismi di P in sé

$$r_{\mathbf{a}} : P \ni \sigma \longrightarrow \sigma \cdot \mathbf{a} \in P \quad (\text{TRASLAZIONI A DESTRA}).$$

DEFINIZIONE 29.9.19. L'azione (29.34) si dice

- *effettiva* se $r_{\mathbf{a}} = \text{id}_P \iff \mathbf{a} = e_{\mathbf{G}}$;
- *libera* se le $r_{\mathbf{a}}$ con $\mathbf{a} \neq e_{\mathbf{G}}$ non hanno punti fissi;
- *transitiva* se per ogni coppia di punti σ_1, σ_2 di P esiste un $\mathbf{a} \in \mathbf{G}$ tale che $\sigma_1 \cdot \mathbf{a} = \sigma_2$.

Dalla Proposizione 29.9.18 otteniamo immediatamente

COROLLARIO 29.9.20. *Se l'azione (29.34) è libera, allora, per ogni $\sigma \in P$, l'applicazione $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_\sigma^* \in T_\sigma P$ è iniettiva.* □

Gruppi di Lie di matrici

In questo capitolo descriviamo la trasformata di Cayley e la decomposizione di Cartan, che sono strumenti utili per lo studio della struttura differenziale e topologica di gruppi di Lie di matrici.

30.1. La trasformata di Cayley

Sia $\mathbb{C}(n)$ lo spazio delle matrici complesse $n \times n$. Indichiamo con

$$(30.1) \quad \mathcal{U}_e = \{X \in \mathbb{C}(n) \mid P\mathfrak{t}(\mathbf{I}_n + X) \neq 0\}$$

l'aperto di $\mathbb{C}(n) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$ delle matrici complesse che non hanno autovalore -1 .

DEFINIZIONE 30.1.1. La *trasformata di Cayley* di $X \in \mathcal{U}_e$ è la matrice

$$(30.2) \quad \mathfrak{c}(X) = (\mathbf{I}_n + X)^{-1}(\mathbf{I}_n - X).$$

Vale il

TEOREMA 30.1.2. *La trasformata di Cayley (30.2) definisce un'involuzione differenziabile di classe \mathcal{C}^ω di \mathcal{U}_e in sé.*

La trasformata di Cayley di una matrice di \mathcal{U}_e è reale se e soltanto se la matrice è reale.

DIMOSTRAZIONE. La \mathfrak{c} è una funzione razionale, e quindi differenziabile di classe \mathcal{C}^ω , sul suo dominio di definizione. Verifichiamo che l'immagine di \mathfrak{c} è ancora contenuta in \mathcal{U}_e . Abbiamo¹ infatti, se $v \in \mathbb{C}^n$,

$$v + \mathfrak{c}(X)v = 0 \iff (\mathbf{I}_n + X)v + (\mathbf{I}_n - X)v = 2v = 0 \iff v = 0.$$

Possiamo quindi definire l'iterata \mathfrak{c}^2 di \mathfrak{c} , ed abbiamo

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}^2(X) &= (\mathbf{I}_n + (\mathbf{I}_n + X)^{-1}(\mathbf{I}_n - X))^{-1}(\mathbf{I}_n - (\mathbf{I}_n + X)^{-1}(\mathbf{I}_n - X)) \\ &= ((\mathbf{I}_n + X) + (\mathbf{I}_n - X))^{-1}((\mathbf{I}_n + X) - (\mathbf{I}_n - X)) = X, \quad \forall X \in \mathcal{U}_e. \end{aligned}$$

Chiaramente \mathfrak{c} si restringe ad un'involuzione di $\mathcal{U}_e \cap \mathbb{R}(n)$. □

La trasformata di Cayley ci permette, in molti casi, di definire la struttura differenziabile di gruppi di Lie di matrici mediante atlanti *razionali*.

Definiamo alcuni gruppi di matrici.

¹Possiamo anche osservare che $\mathfrak{c}(X)$ ha autovalori $\mu = (1 + \lambda)^{-1}(1 - \lambda)$, al variare di λ tra gli autovalori di X e $(1 + \lambda)^{-1}(1 - \lambda) \neq -1$ se λ è un numero complesso $\neq -1$. La $\lambda \mapsto (1 + \lambda)^{-1}(1 - \lambda)$ è l'involuzione di Moebius di $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ che scambia -1 ed ∞ .

Sia B una matrice complessa $n \times n$ non singolare. Poniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_B(\mathbb{C}) &= \{a \in \mathbb{C}(n) \mid a^\top B a = B\}, & \mathfrak{o}_B(\mathbb{C}) &= \{X \in \mathbb{C}(n) \mid X^\top B + B X = 0\}, \\ \mathbf{O}_B(\mathbb{R}) &= \{a \in \mathbb{R}(n) \mid a^\top B a = B\}, & \mathfrak{o}_B(\mathbb{R}) &= \{X \in \mathbb{R}(n) \mid X^\top B + B X = 0\}, \\ \mathbf{U}_B &= \{a \in \mathbb{C}(n) \mid a^* B a = B\}, & \mathfrak{u}_B &= \{X \in \mathbb{C}(n) \mid X^* B + B X = 0\}. \end{aligned}$$

Essendo sottogruppi chiusi del gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, i gruppi $\mathbf{O}_B(\mathbb{C})$, $\mathbf{O}_B(\mathbb{R})$ ed \mathbf{U}_B sono gruppi di Lie e si verifica facilmente che $\mathfrak{o}_B(\mathbb{C})$, $\mathfrak{o}_B(\mathbb{R})$ ed \mathfrak{u}_B sono le loro algebre di Lie.

PROPOSIZIONE 30.1.3. *La trasformata di Cayley definisce omeomorfismi*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_e \cap \mathbf{O}_B(\mathbb{C}) &\xrightarrow{\mathfrak{c}} \mathcal{U}_e \cap \mathfrak{o}_B(\mathbb{C}), \\ \mathcal{U}_e \cap \mathbf{O}_B(\mathbb{R}) &\xrightarrow{\mathfrak{c}} \mathcal{U}_e \cap \mathfrak{o}_B(\mathbb{R}), \\ \mathcal{U}_e \cap \mathbf{U}_B &\xrightarrow{\mathfrak{c}} \mathcal{U}_e \cap \mathfrak{u}_B. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $a \in \mathcal{U}_e$ ed $X = \mathfrak{c}(a)$, abbiamo

$$\begin{aligned} X^\top B + B X = 0 &\iff (I_n - a^\top)B(I_n + a) + (I_n + a^\top)B(I_n - a) = 0 \\ &\iff (B - a^\top B + B a - a^\top B a) + (B + a^\top B - B a - a^\top B a) = 0 \\ &\iff B - a^\top B a = 0 \end{aligned}$$

Da queste equivalenze ricaviamo il primo isomorfismo. Il secondo segue dal fatto che la trasformata di Cayley trasforma matrici reali in matrici reali.

Analogamente se $a \in \mathcal{U}_e$ ed $X = \mathfrak{c}(a)$, abbiamo

$$\begin{aligned} X^* B + B X = 0 &\iff (I_n - a^*)B(I_n + a) + (I_n + a^*)B(I_n - a) = 0 \\ &\iff (B - a^* B + B a - a^* B a) + (B + a^* B - B a - a^* B a) = 0 \\ &\iff B - a^* B a = 0, \end{aligned}$$

e quindi $a \in \mathbf{U}_B$ se e soltanto se $X \in \mathfrak{u}_B$. \square

Le algebre di Lie $\mathfrak{o}_B(\mathbb{C})$, $\mathfrak{o}_B(\mathbb{R})$ ed \mathfrak{u}_B sono spazi vettoriali di dimensione finita. La trasformata di Cayley ci permette quindi di definire diffeomorfismi *razionali* tra intorni dell'identità nei gruppi $\mathbf{O}_B(\mathbb{C})$, $\mathbf{O}_B(\mathbb{R})$, \mathbf{U}_B ed aperti di spazi vettoriali reali.

TEOREMA 30.1.4. *Siano $B \in \mathbb{C}(n)$ una matrice invertibile e \mathbf{G} uno dei gruppi $\mathbf{O}_B(\mathbb{C})$, $\mathbf{O}_B(\mathbb{R})$, \mathbf{U}_B . Indichiamo con \mathfrak{g} la corrispondente algebra di Lie $\mathfrak{o}_B(\mathbb{C})$, $\mathfrak{o}_B(\mathbb{R})$, \mathfrak{u}_B , rispettivamente. Con la topologia di sottospazio di $\mathbb{C}(n)$, il gruppo \mathbf{G} è una varietà topologica ed ammette un'unica struttura differenziale di classe \mathcal{C}^ω per cui:*

- (1) $\mathfrak{c} : \mathcal{U}_e \cap \mathbf{G} \rightarrow \mathcal{U}_e \cap \mathfrak{g}$ è una carta locale con centro in I_n ;
- (2) per ogni $a \in \mathbf{G}$ la traslazione a sinistra $\mathbf{G} \ni x \rightarrow a \cdot x \in \mathbf{G}$ è un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^ω .

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 30.1.3 l'insieme $\mathcal{U}_e \cap \mathbf{G}$, che è un intorno aperto di I_n in \mathbf{G} per la topologia di sottospazio, è omeomorfo ad un aperto dello spazio vettoriale reale \mathfrak{g} . Poiché le traslazioni a sinistra $L_a : \mathbb{C}(n) \ni x \rightarrow a \cdot x \in \mathbb{C}(n)$ mediante gli elementi a di \mathbf{G} sono omeomorfismi, ogni punto a di \mathbf{G} ha un intorno

$U_a = \mathbf{a} \cdot (U_e \cap \mathbf{G})$ omeomorfo ad un aperto di \mathfrak{g} . Consideriamo il corrispondente atlante $\mathcal{A} = \{(U_a, X_a) \mid \mathbf{a} \in \mathbf{G}\}$, con $X_a(x) = \mathfrak{c}(\mathbf{a}^{-1}x)$ per $x \in U_a$. Esso definisce su \mathbf{G} una struttura differenziale di classe \mathcal{C}^ω per cui valgono le condizioni (1) e (2). Infatti le funzioni di transizione

$$\psi_{a,b} : \mathfrak{c}(U_a \cap U_b) \ni X \rightarrow \mathfrak{c}(b^{-1}a \cdot \mathfrak{c}(X)) \in \mathfrak{c}(U_a \cap U_b)$$

sono analitiche reali. \square

OSSERVAZIONE 30.1.5. Le $\psi_{a,b}$ sono funzioni *razionali*: si possono esprimere cioè come rapporti di polinomi nei coefficienti delle matrici X .

30.2. Alcuni gruppi lineari

Diamo qui la lista di alcuni gruppi di Lie riduttivi di matrici reali e complesse, con le relative algebre di Lie. È conveniente introdurre le notazioni

$$\begin{aligned} I_{p,q} &= \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{(p+q) \times (p+q)}, & J_n &= \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n \times n}, \\ \Omega_n &= \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2n \times 2n}, & \check{\Omega}_n &= \begin{pmatrix} & J_n \\ -J_n & \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2n \times 2n}. \end{aligned}$$

Le Ω_n e $\check{\Omega}_n$ sono matrici $(2n) \times (2n)$ antisimmetriche non degeneri, mentre le $I_{p,q}$, J_n , sono Hermitiane simmetriche non degeneri. Useremo le notazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}(n) &= \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}(n) \mid \mathbf{a}^T \mathbf{a} = I_n\} && \text{(gruppo ortogonale),} \\ \mathbf{SO}(n) &= \{\mathbf{a} \in \mathbf{O}(n) \mid \text{Pt}(\mathbf{a}) = 1\} && \text{(gruppo speciale ortogonale),} \\ \mathfrak{o}(n) &= \{X \in \mathbb{R}(n) \mid X^T + X = 0\} && \text{(algebra delle matrici antisimmetriche reali),} \\ \mathbf{O}(n, \mathbb{C}) &= \{\mathbf{a} \in \mathbb{C}(n) \mid \mathbf{a}^T \mathbf{a} = I_n\} && \text{(gruppo ortogonale complesso),} \\ \mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) &= \{\mathbf{a} \in \mathbf{O}(n, \mathbb{C}) \mid \text{Pt}(\mathbf{a}) = 1\} && \text{(gruppo speciale ortogonale complesso),} \\ \mathfrak{o}(n, \mathbb{C}) &= \{X \in \mathbb{C}(n) \mid X^T + X = 0\} && \text{(algebra delle matrici antisimmetriche complesse)} \\ \mathbf{U}(n) &= \{\mathbf{a} \in \mathbb{C}(n) \mid \mathbf{a}^* \mathbf{a} = I_n\} && \text{(gruppo unitario),} \\ \mathfrak{u}(n) &= \{X \in \mathbb{C}(n) \mid X^* + X = 0\} && \text{(algebra delle matrici anti-hermitiane),} \\ \mathbf{SU}(n) &= \{\mathbf{a} \in \mathbf{U}(n) \mid \text{Pt}(\mathbf{a}) = 1\} && \text{(gruppo speciale unitario)} \\ \mathfrak{su}(n) &= \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \text{traccia}(X) = 0\} && \text{(algebra delle matrici anti-hermitiane a traccia nulla)} \\ \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) &= \{\mathbf{a} \in \mathbb{C}(2n) \mid \mathbf{a}^T \Omega_n \mathbf{a} = \Omega_n\}, && \text{(gruppo simplettico complesso),} \\ \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) &= \{X \in \mathbb{C}(2n) \mid X^T J_n + \Omega_n X = 0\}, && \text{(algebra simplettica complessa)} \\ \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) &= \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}(2n) \mid \mathbf{a}^T \Omega_n \mathbf{a} = \Omega_n\}, && \text{(gruppo simplettico reale),} \\ \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathbb{R}(2n) \mid X^T \Omega_n + \Omega_n X = 0\}, && \text{(algebra simplettica reale)} \\ \mathbf{Sp}(n) &= \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n) && \text{(gruppo unitario quaternionico)} \\ \mathfrak{sp}(n) &= \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(2n) && \text{(algebra anti-hermitiana quaternionica).} \end{aligned}$$

Il gruppo unitario quaternionico si chiama anche *iper-unitario*. Si ottengono definizioni equivalenti dei gruppi simplettici se si sostituisce la matrice $\check{\Omega}_n$ alla Ω_n .

Dal Teorema 30.1.4 ricaviamo immediatamente

TEOREMA 30.2.1.

$\mathbf{SO}(n)$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $n(n-1)/2$.

$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $n(n-1)$.

$\mathbf{U}(n)$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione n^2 .

$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $2n(2n+1)$.

$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $n(2n+1)$.

$\mathbf{Sp}(n)$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $n(2n+1)$. \square

OSSERVAZIONE 30.2.2. Tutti i gruppi nel Teorema 30.2.1 sono connessi. I gruppi $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{O}(n, \mathbb{C})$ sono formati ciascuno da due componenti connesse, omeomorfe ad $\mathbf{SO}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$, rispettivamente. I gruppi $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{O}(n)$, $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$ sono compatti. I gruppi $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{O}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ non sono compatti.

OSSERVAZIONE 30.2.3. Le matrici antisimmetriche reali e le matrici anti-hermitiane hanno autovalori puramente immaginari. Quindi la trasformata di Cayley è definita su tutte le algebre di Lie $\mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{sp}(n)$.

Oltre ai gruppi di Lie reali e complessi descritti sopra, ricordiamo le definizioni di alcuni gruppi reali non compatti. Poniamo:

$$\mathbf{O}(p, q) = \{\mathbf{a} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{I}_{p,q} \mathbf{a} = \mathbf{I}_{p,q}\} \quad (\text{gruppo ortogonale di segnatura } (p, q)),$$

$$\mathbf{SO}(p, q) = \mathbf{O}(p, q) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \quad (\text{gruppo speciale ortogonale di segnatura } (p, q)),$$

$$\mathbf{U}(p, q) = \{\mathbf{a} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \mathbf{a}^* \mathbf{I}_{p,q} \mathbf{a} = \mathbf{I}_{p,q}\} \quad (\text{gruppo unitario di segnatura } (p, q)),$$

$$\mathbf{SU}(p, q) = \mathbf{U}(p, q) \cap \mathbf{SL}_{p+q}(\mathbb{C}) \quad (\text{gruppo speciale unitario di segnatura } (p, q)).$$

30.3. Decomposizione di Cartan

30.3.1. Esponenziale di matrici hermitiane simmetriche. Indichiamo con

$$\mathfrak{p}(n) = \{X \in \mathbb{C}(n) \mid X^* = X\}$$

lo spazio vettoriale reale delle matrici hermitiane simmetriche di ordine n e con

$$\mathcal{P}(n) = \{x \in \mathfrak{p}(n) \mid x > 0\}$$

il cono convesso delle hermitiane simmetriche definite positive. Poniamo ancora

$$\mathfrak{p}_0(n) = \mathfrak{p}(n) \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}), \quad \mathcal{P}_0(n) = \mathcal{P}(n) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}),$$

$$\mathfrak{p}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{p}(n) \cap \mathbb{R}(n), \quad \mathcal{P}(n, \mathbb{R}) = \mathcal{P}(n) \cap \mathbb{R}(n),$$

$$\mathfrak{p}_0(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{p}(n, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}), \quad \mathcal{P}_0(n, \mathbb{R}) = \mathcal{P}(n, \mathbb{R}) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}).$$

PROPOSIZIONE 30.3.1. *L'esponenziale di matrici definisce un diffeomorfismo*

$$(30.3) \quad \exp : \mathfrak{p}(n) \longrightarrow \mathcal{P}(n)$$

che si restringe a diffeomorfismi di $\mathfrak{p}_0(n)$ su $\mathcal{P}_0(n)$, di $\mathfrak{p}(n, \mathbb{R})$ su $\mathcal{P}(n, \mathbb{R})$ e di $\mathfrak{p}_0(n, \mathbb{R})$ su $\mathcal{P}_0(n, \mathbb{R})$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\mathcal{P}(n)$ è un cono convesso, possiamo definire il *logaritmo* di una matrice Hermitiana definita positiva p mediante la fomula

$$(30.4) \quad \log(p) = \int_0^1 [(1-t) \cdot I_n + t \cdot p]^{-1} (p - I_n) dt.$$

Per verificare che questa sia l'inversa di (30.3), osserviamo che ogni $p \in \mathcal{P}(n)$ si può diagonalizzare in una base ortonormale: vi è quindi una matrice $u \in \mathbf{U}(n)$ tale che

$$(*) \quad u^{-1} p u = u^* p u = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \text{con } \lambda_i > 0 \text{ per } 1 \leq i \leq n.$$

Per la linearità dell'integrale,

$$\begin{aligned} u^* \log(p) u &= \int_0^1 \text{diag} \left(\frac{\lambda_1 - 1}{(1+t)(\lambda_1 - 1)}, \dots, \frac{\lambda_n - 1}{1+t(\lambda_n - 1)} \right) dt \\ &= \text{diag}(\log \lambda_1, \dots, \log \lambda_n) \end{aligned}$$

e quindi $\exp(\log(p)) = p$ per ogni $p \in \mathcal{P}(n)$. Viceversa, una $X \in \mathfrak{p}(n)$, si diagonalizza in una base ortonormale: possiamo cioè trovare $u \in \mathbf{U}(n)$ tale che

$$u^{-1} X u = u^* X u = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n), \quad \text{con } \mu_i \in \mathbb{R}, \text{ per } 1 \leq i \leq n.$$

Abbiamo allora

$$u^* \log(\exp(X)) u = \int_0^1 \text{diag} \left(\frac{e^{\mu_1} - 1}{1+t(e^{\mu_1} - 1)}, \dots, \frac{e^{\mu_n} - 1}{1+t(e^{\mu_n} - 1)} \right) dt = u^* X u,$$

e quindi $\log(\exp(X)) = X$ per ogni $X \in \mathfrak{p}(n)$. Le ultime affermazioni seguono dal fatto che $Pt(\exp(X)) = e^{\text{trac}(X)}$ e che l'esponenziale trasforma matrici reali in matrici reali. \square

30.3.2. Gruppo lineare e gruppo lineare speciale.

TEOREMA 30.3.2. *Le applicazioni*

$$(30.5) \quad \begin{cases} \mathbf{U}(n) \times \mathfrak{p}(n) \ni (u, X) & \longrightarrow u \cdot \exp(X) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}), \\ \mathbf{SU}(n) \times \mathfrak{p}_0(n) \ni (u, X) & \longrightarrow u \cdot \exp(X) \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}), \\ \mathbf{O}(n) \times \mathfrak{p}(n, \mathbb{R}) \ni (u, X) & \longrightarrow u \cdot \exp(X) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \\ \mathbf{SO}(n) \times \mathfrak{p}_0(n, \mathbb{R}) \ni (u, X) & \longrightarrow u \cdot \exp(X) \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}), \end{cases}$$

sono diffeomorfismi di classe \mathcal{C}^ω .

DIMOSTRAZIONE. Sia $a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Allora $a^* a \in \mathcal{P}(n)$. Sia $\sqrt{a^* a} = \exp(\frac{1}{2} \log(a))$ la sua unica radice quadrata in $\mathcal{P}(n)$. La $u = a \cdot [\sqrt{a^* a}]^{-1/2}$ soddisfa

$$u^* u = [\sqrt{a^* a}]^{-1/2} \cdot a^* a \cdot [\sqrt{a^* a}]^{-1/2} = I_n$$

ed è quindi un elemento di $\mathbf{U}(n)$. Abbiamo allora

$$a = u \cdot \exp(X) \quad \text{con } u = a \cdot [\sqrt{a^* a}]^{-1/2} \quad \text{ed } X = \frac{1}{2} \log(a^* a) \quad \text{e la}$$

$$(*) \quad \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \ni a \longrightarrow (a \cdot [\sqrt{a^* a}]^{-1/2}, \frac{1}{2} \log(a)) \in \mathbf{U}(n) \times \mathfrak{p}(n)$$

è differenziabile di classe \mathcal{C}^ω ed inverte la prima delle (30.5). Le inverse delle altre si ottengono da (*) per restrizione. \square

30.3.3. Gruppi autoaggiunti pseudoalgebrici.

DEFINIZIONE 30.3.3. Un sottogruppo \mathbf{G} di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ si dice *pseudoalgebrico* se può essere definito mediante un sistema di equazioni:

$$(*) \quad f_1(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*) = \dots = f_N(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*) = 0$$

dove f_1, \dots, f_N sono polinomi a coefficienti reali delle parti reali e immaginarie dei coefficienti di $\mathbf{a} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. I sottogruppi pseudoalgebrici sono ovviamente chiusi.

I gruppi classici della lista di Killing-Cartan² sono tutti pseudoalgebrici.

Il seguente teorema ci dà un metodo per calcolare la loro decomposizione di Cartan come prodotto del sottogruppo compatto $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ e di uno spazio euclideo \mathbb{R}^k .

TEOREMA 30.3.4. *Se \mathbf{G} un sottogruppo pseudoalgebrico di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, con algebra di Lie \mathfrak{g} , tale che*

$$(30.6) \quad \mathbf{a} \in \mathbf{G} \implies \mathbf{a}^* \in \mathbf{G},$$

allora l'applicazione

$$(30.7) \quad (\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)) \ni (u, X) \longrightarrow u \cdot \exp(X) \in \mathbf{G}$$

è un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^ω .

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 30.3.2, ogni elemento \mathbf{a} di $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ si decompone in modo unico nel prodotto

$$\mathbf{a} = u \cdot \mathfrak{p} \quad \text{con} \quad u \in \mathbf{U}(n), \mathfrak{p} \in \mathcal{P}(n).$$

Poiché per ipotesi anche

$$\mathbf{a}^* = \mathfrak{p} \cdot u^* = \mathfrak{p} \cdot u^{-1} \in \mathbf{G},$$

il gruppo \mathbf{G} contiene l'elemento $\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a} = \mathfrak{p}^2$.

Per la Proposizione 30.3.1, vi è un unico elemento $X \in \mathfrak{p}(n)$ per cui $\mathfrak{p} = \exp(X)$. Dobbiamo dimostrare che $X \in \mathfrak{g}$.

Sia $\mathbf{w} \in \mathbf{U}(n)$ tale che $\mathbf{w} \cdot X \cdot \mathbf{w}^*$ sia in forma diagonale:

$$\text{Ad}_{\mathbf{w}}(X) = \mathbf{w} \cdot X \cdot \mathbf{w}^* = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n),$$

con $\theta_j \in \mathbb{R}$ per $j = 1, \dots, n$. Il sottogruppo $\text{ad}_{\mathbf{w}}(\mathbf{G})$ di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ è ancora pseudoalgebrico. Le sue matrici diagonali reali formano un sottogruppo pseudoalgebrico \mathbf{Q} di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Possiamo perciò trovare un insieme finito di polinomi f_1, \dots, f_N di $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ tali che una matrice diagonale reale $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ appartenga a \mathbf{Q} se e soltanto se

$$f_j(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0, \quad \text{per } 1 \leq j \leq N.$$

Poiché $\mathfrak{p}^{\pm 2}, \mathfrak{p}^{\pm 4}, \dots, \mathfrak{p}^{\pm 2k}, \dots$ appartengono ancora a \mathbf{G} , abbiamo

$$f_j(e^{2k\theta_1}, e^{2k\theta_2}, \dots, e^{2k\theta_n}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j = 1, \dots, N.$$

²Vedi §30.2, Cap.XXXIII, Cap.XXXIV.

Per concludere la dimostrazione utilizziamo il seguente

LEMMA 30.3.5. *Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione esponenziale-polinomiale, della forma*

$$f(t) = \sum_{j=1}^N c_j e^{b_j t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

con $c_j, b_j \in \mathbb{R}$ e $b_i \neq b_j$ se $i \neq j$. Se f si annulla per ogni $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, allora f si annulla per ogni $t \in \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $\exp(b_j) = \zeta_j$ e consideriamo la matrice

$$M(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = \begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \dots & \zeta_N \\ \zeta_1^2 & \zeta_2^2 & \zeta_3^2 & \dots & \zeta_N^2 \\ \zeta_1^3 & \zeta_2^3 & \zeta_3^3 & \dots & \zeta_N^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^N & \zeta_2^N & \zeta_3^N & \dots & \zeta_N^N \end{pmatrix}.$$

Dico che

$$\det M(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = \zeta_1 \cdots \zeta_N \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\zeta_j - \zeta_i).$$

Per dimostrare questa formula osserviamo che

$$\det M(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = \zeta_1 \cdots \zeta_N \cdot \det V(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$$

dove $V(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ è la matrice di Vandermonde di ordine N :

$$V(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \dots & \zeta_N \\ \zeta_1^2 & \zeta_2^2 & \zeta_3^2 & \dots & \zeta_N^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^{N-1} & \zeta_2^{N-1} & \zeta_3^{N-1} & \dots & \zeta_N^{N-1} \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$(\dagger) \quad \det V(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\zeta_j - \zeta_i).$$

Per verificare la (\dagger) , ragioniamo per ricorrenza su N . La formula del determinante di Vandermonde è facilmente verificata nel caso $N = 2$. Supponiamo quindi $N > 2$ e la formula vera per determinanti di Vandermonde di ordine $N - 1$. Sottraendo alla $j + 1$ -esima riga ζ_1 volte la j -esima, per $j = 1, \dots, N - 1$, otteniamo:

$$\det(V(\zeta_1, \dots, \zeta_N)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \zeta_2 - \zeta_1 & \zeta_3 - \zeta_1 & \dots & \zeta_N - \zeta_1 \\ 0 & \zeta_2(\zeta_2 - \zeta_1) & \zeta_3(\zeta_3 - \zeta_1) & \dots & \zeta_N(\zeta_N - \zeta_1) \\ 0 & \zeta_2^2(\zeta_2 - \zeta_1) & \zeta_3^2(\zeta_3 - \zeta_1) & \dots & \zeta_N^2(\zeta_N - \zeta_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \zeta_2^{N-2}(\zeta_2 - \zeta_1) & \zeta_3^{N-2}(\zeta_3 - \zeta_1) & \dots & \zeta_N^{N-2}(\zeta_N - \zeta_1) \end{pmatrix}$$

Raccogliendo il fattore $(\zeta_j - \zeta_1)$ nella j -esima colonna, per $j = 2, \dots, N$, si ottiene

$$\det V(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = (\zeta_2 - \zeta_1) \cdots (\zeta_N - \zeta_1) \cdot \det V(\zeta_2, \dots, \zeta_N).$$

La formula segue allora dall'ipotesi di ricorrenza.

In particolare, $M(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ è una matrice invertibile e la relazione

$$(c_1, \dots, c_N)M(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = 0,$$

che equivale all'annullarsi di $f(t)$ per $t = 1, \dots, N$, implica che tutti i coefficienti c_1, \dots, c_N , e quindi $f(t)$, siano uguali a 0. \square

Concludiamo la dimostrazione del teorema. Per il lemma appena dimostrato,

$$f_j(e^{t\theta_1}, \dots, e^{t\theta_n}) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, N.$$

Quindi $\exp(2t(w \cdot X \cdot w^*)) \in \mathbf{Q}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e ciò mostra che

$$X \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n).$$

Allora $\mathfrak{p} \in \mathbf{G}$ e perciò $u = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{p}^{-1} \in \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$. L'applicazione

$$(\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)) \ni (u, X) \rightarrow u \cdot \exp(X) \in \mathbf{G}$$

è quindi surgettiva e di classe \mathcal{C}^ω . Anche la sua inversa

$$\mathbf{G} \ni \mathfrak{a} \rightarrow (\mathfrak{a} \circ (\mathfrak{a}^* \cdot \mathfrak{a})^{-1/2}, \frac{1}{2} \log(\mathfrak{a}^* \cdot \mathfrak{a})) \in (\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n))$$

è di classe \mathcal{C}^ω e quindi la (30.7) è un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^ω . \square

Nella ricerca di una decomposizione di Cartan di un sottogruppo chiuso \mathbf{G} di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, con algebra di Lie \mathfrak{g} , potremo quindi seguire il seguente procedimento:

- (1) Verificheremo che esso contenga l'aggiunto di ogni suo elemento;
- (2) Calcoleremo $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)$;
- (3) Studieremo il sottogruppo compatto $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$.

Osserviamo ancora che l'algebra di Lie di $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ è $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n)$ e che l'applicazione esponenziale

$$\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$$

ha come immagine la componente connessa dell'identità in $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$. Abbiamo infatti (vedi ad esempio [34])

TEOREMA 30.3.6 (Cartan-Weyl-Hopf). *Se \mathbf{G} è un sottogruppo compatto e connesso con algebra di Lie \mathfrak{g} , allora l'applicazione esponenziale $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{G}$ è surgettiva.* \square

Non diamo qui la dimostrazione di questo teorema³, la cui validità si può verificare in modo diretto per ciascuno dei gruppi classici compatti $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{SU}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$.

³Possiamo introdurre su \mathbf{G} una metrica Riemanniana invariante per le traslazioni a destra e a sinistra; allora le geodetiche per l'origine sono tutti e soli i sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} . La tesi segue allora dal fatto che l'identità \mathfrak{e} di \mathbf{G} si può congiungere a un qualsiasi punto $\mathfrak{a} \in \mathbf{G}$ mediante una geodetica $\gamma : [0, 1] \ni t \rightarrow \exp(tX) \in \mathbf{G}$ di lunghezza minima per cui $\gamma(0) = \mathfrak{e}$ e $\gamma(1) = \mathfrak{a}$.

Alcuni gruppi classici di piccola dimensione

In dimensione bassa ci sono vari omomorfismi ed isomorfismi canonici tra gruppi lineari, ortogonali, unitari e simplettici.

31.1. I gruppi $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(1, \mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$, $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$, $\mathbf{SO}(1, 2)$

Sia e_1, e_2 la base canonica di \mathbb{C}^2 . Definiamo una forma alternata non degenere ω su \mathbb{C}^2 ponendo

$$(31.1) \quad v \wedge w = \omega(v, w) \cdot e_1 \wedge e_2, \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^2.$$

Il gruppo $\mathbf{Sp}(1, \mathbb{C})$ consiste delle trasformazioni lineari di \mathbb{C}^2 che lasciano invariata la forma ω e dunque coincide con $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$.

La traccia del prodotto

$$(31.2) \quad \kappa(X, Y) := \text{trac}(XY) = \sum_{i,j=1}^n x_{i,j}y_{j,i}, \quad X = (x_{i,j}), Y = (y_{i,j}) \in \mathbb{C}(n),$$

è una forma bilineare e simmetrica non degenere sullo spazio vettoriale $\mathbb{C}(n)$ delle matrici complesse $n \times n$.

La restrizione della forma κ all'iperpiano $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ di $\mathbb{C}(2)$ delle matrici di con traccia nulla è rappresentata, nella base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

che è simmetrica non degenere. Il gruppo delle trasformazioni lineari di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ che lasciano κ invariante si può perciò identificare al gruppo ortogonale complesso $\mathbf{O}(3, \mathbb{C})$. Per ogni $\mathfrak{a} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$, l'applicazione¹

$$\text{Ad}_{\mathfrak{a}} : \mathbb{C}(2) \ni X \rightarrow \mathfrak{a} \cdot X \cdot \mathfrak{a}^{-1} \in \mathbb{C}(2)$$

è un isomorfismo dell'anello degli endomorfismi lineari di \mathbb{C}^2 che preserva le tracce. Trasforma quindi $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ in sé e preserva la forma κ .

¹La corrispondenza che associa ad ogni $\mathfrak{a} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ la trasformazione lineare $\text{Ad}_{\mathfrak{a}} \in \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$ definita da $\text{Ad}_{\mathfrak{a}}(X) = \mathfrak{a} \cdot X \cdot \mathfrak{a}^{-1}$ è la *rappresentazione aggiunta* di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ sulla sua algebra di Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Il nucleo della rappresentazione aggiunta è costituito dai multipli dell'identità e il luogo dei punti fissi di Ad dai multipli dell'identità in $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

PROPOSIZIONE 31.1.1. *L'applicazione*

$$(31.3) \quad \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \ni \mathbf{a} \longrightarrow \text{Ad}_{\mathbf{a}} \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$$

è un epimorfismo di gruppi di Lie con nucleo $\{\pm I_2\}$.

DIMOSTRAZIONE. È $\kappa(X^2) = -2 \det(X)$, per ogni $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Infatti, se $a, b, c \in \mathbb{C}$, allora

$$\kappa\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\right) = \text{trac}\begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = 2(a^2 + bc) = -2 \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Quindi una trasformazione \mathbb{C} -lineare T di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ che preservi la forma κ preserva sia la traccia che il determinante delle matrici di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e quindi i loro autovalori. A meno di comporre la T con un'opportuna $\text{Ad}_{\mathbf{a}}$, con $\mathbf{a} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, possiamo supporre che T lasci fissa la matrice $I_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e quindi il suo κ -ortogonale

$$H = I_{1,1}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Inoltre, poiché H è un piano iperbolico, la τ o lascia invariati o scambia tra loro le sue due rette isotrope

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Se $T \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$ allora lascia invariati ciascuna delle due rette isotrope ed è quindi, per opportuni $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, della forma

$$T \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \mu b & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{per ogni } a, b \in \mathbb{C}.$$

Da

$$2ab = \kappa\left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\right) = \kappa\left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \mu b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \lambda b & 0 \end{pmatrix}\right) = 2\lambda\mu ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

segue che $0 \neq \mu = \lambda^{-1}$. Se τ è un numero complesso con $\tau^2 = \lambda$, abbiamo allora

$$T = \text{Ad}_{\mathbf{t}}, \quad \text{con } \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \tau^{-1} \end{pmatrix}.$$

Questo dimostra che la (31.3) è un omomorfismo surgettivo e, considerando il caso in cui $\lambda = \mu = 1$, si verifica facilmente che il suo nucleo è $\pm I_2$. \square

Restringendoci alle matrici a coefficienti reali, otteniamo analogamente

PROPOSIZIONE 31.1.2. *L'applicazione*

$$(31.4) \quad \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \ni \mathbf{a} \longrightarrow \text{Ad}_{\mathbf{a}} \in \mathbf{SO}^+(1, 2)$$

è un omomorfismo surgettivo di $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ sulla componente connessa dell'identità di $\mathbf{SO}(1, 2)$, con nucleo $\{\pm I_2\}$. \square

OSSERVAZIONE 31.1.3. Sia $B \in \mathbb{R}(3)$ reale simmetrica di segnatura $(1, 2)$. Allora $\mathbf{SO}(1, 2) \simeq \mathbf{SO}_B(\mathbb{R})$. Gli elementi di $\mathbf{SO}_B(\mathbb{R})$ trasformano in sé il cono

$$C = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v^T \cdot B \cdot v > 0\}.$$

Esso è formato da due componenti connesse, che possiamo indicare con C_+ e C_- . La componente connessa dell'identità di $\mathbf{SO}_B(\mathbb{R})$ consiste delle trasformazioni a per cui $a(C_+) = C_+$ ed $a(C_-) = C_-$.

Le due componenti connesse si possono evidenziare anche utilizzando la decomposizione di Cartan (Teor.30.3.4). Infatti, posto $B = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}$, il sottogruppo $\mathbf{SO}(1, 2) \cap \mathbf{U}(3)$ di $\mathbf{SO}(1, 2)$, è un suo sottogruppo compatto massimale, e quindi un suo retratto di deformazione, e consiste delle matrici

$$\begin{pmatrix} \epsilon & \\ & b \end{pmatrix} \quad \text{con } \epsilon = \pm 1, b \in \mathbf{O}(2) \text{ e } \det(b) = \epsilon.$$

OSSERVAZIONE 31.1.4. Se $n > 2$, possiamo ancora considerare $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ come uno spazio ortogonale complesso di dimensione $n^2 - 1$, con la forma bilineare simmetrica κ definita dalla traccia del prodotto di matrici. L'applicazione aggiunta

$$\text{Ad} : \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{SO}_\kappa(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})) \simeq \mathbf{SO}_{n^2-1}(\mathbb{C})$$

è ancora un omomorfismo di gruppi di Lie, che induce un isomorfismo di $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ (se n è dispari), o di $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\{\pm I\}$ (se n è pari), con un sottogruppo di $\mathbf{SO}_\kappa(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$.

31.2. La quadrica di $\mathbb{C}\mathbb{P}^5$ ed alcuni omomorfismi di gruppi ($\mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$, $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$, $\mathbf{SO}^+(3, 3)$, $\mathbf{SU}(4)$, $\mathbf{SO}(6)$)

Lo spazio vettoriale complesso $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ dei due-vettori complessi alternati ha dimensione sei. Siano e_1, e_2, e_3, e_4 i vettori della base canonica di \mathbb{C}^4 e definiamo una forma *bilineare simmetrica* b su $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ ponendo

$$(31.5) \quad \alpha \wedge \beta = b(\alpha, \beta) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4),$$

La b è non degenera. Infatti la matrice ad essa associata nella base canonica Nella base canonica

$$(31.6) \quad e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_4 \wedge e_2, e_3 \wedge e_4$$

di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La b ci permette di rappresentare la grassmanniana $Gr_{2,4}(\mathbb{C})$ dei piani per l'origine di \mathbb{C}^4 come i punti di una quadrica proiettiva. Ricordiamo che ogni elemento di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ ha rango pari. L'elemento nullo ha rango 0, gli elementi di rango due

sono tutti e soli quelli che si possono scrivere nella forma $v_1 \wedge v_2$ con v_1 e v_2 linearmente indipendenti, mentre quelli di rango quattro si possono scrivere nella forma $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$ per una base v_1, v_2, v_3, v_4 di \mathbb{C}^4 .

LEMMA 31.2.1. *Sia $0 \neq \alpha \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. Allora*

- (1) α è isotropo, cioè $b(\alpha, \alpha) = 0$ se e soltanto se α ha rango due;
- (2) α è anisotropo, cioè $b(\alpha, \alpha) \neq 0$ se e soltanto se α ha rango quattro;
- (3) se $\alpha = v_1 \wedge v_2$ e $\beta = w_1 \wedge w_2$ sono due elementi di rango due linearmente indipendenti in $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, allora $b(\alpha, \beta) = 0$ se e soltanto se i due piani $\langle v_1, v_2 \rangle$ e $\langle w_1, w_2 \rangle$ hanno una retta in comune. \square

Un due-piano di \mathbb{C}^4 si identifica, a meno di un fattore complesso, ad un elemento di rango due di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. Quindi, come conseguenza del Lemma 31.2.1, possiamo enunciare il

COROLLARIO 31.2.2. *La Grassmanniana $Gr_{2,4}(\mathbb{C})$ dei due-piani di \mathbb{C}^4 si può identificare alla quadrica proiettiva complessa non degenere di $\mathbb{C}P^5$. \square*

OSSERVAZIONE 31.2.3. In particolare $Gr_{2,4}(\mathbb{C})$ è una sottovarietà analitica compatta di dimensione reale otto. È anche una *varietà complessa compatta liscia di dimensione quattro*.

Il gruppo delle trasformazioni \mathbb{C} -lineari di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4) \simeq \mathbb{C}^6$ che preservano la forma bilineare simmetrica b è il gruppo ortogonale complesso $\mathbf{O}(6, \mathbb{C})$. Le matrici di $\mathbf{O}(6, \mathbb{C})$ hanno determinante ± 1 . Quelle di determinante 1 formano il sottogruppo normale di indice due $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$. Più in generale, possiamo considerare il gruppo $\mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$ delle matrici *conformi*, quelle cioè che trasformano la forma b in un suo multiplo per uno scalare diverso da zero.

PROPOSIZIONE 31.2.4. *Per ogni $a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$, l'applicazione \mathbb{C} -lineare*

$$(31.7) \quad \lambda_a : \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{C}^4), \text{ t.c. } \lambda_a(v_1 \wedge v_2) = a(v_1) \wedge a(v_2), \forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}^4$$

soddisfa la condizione

$$(31.8) \quad b(\lambda_a(\alpha), \lambda_a(\beta)) = \det(a) b(\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$$

ed è quindi conforme per b . L'applicazione

$$(31.9) \quad \lambda : \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$$

è un epimorfismo di gruppi con nucleo $\{\pm I_4\}$. Per restrizione otteniamo epimorfismi di gruppi, entrambi con nucleo $\{\pm I_4\}$,

$$(31.10) \quad \{a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \mid \det a = \pm 1\} \xrightarrow{\lambda} \mathbf{O}(6, \mathbb{C}),$$

$$(31.11) \quad \mathbf{SL}_4(\mathbb{C}) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{SO}(6, \mathbb{C}).$$

DIMOSTRAZIONE. La (31.8) ed il fatto che $\lambda : \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$ sia un omomorfismo di gruppi seguono dalle proprietà del determinante. Dimostriamo ora che tale omomorfismo è surgettivo. Sia $\tau \in \mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$. Poiché la τ trasforma elementi isotropi di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ in elementi isotropi di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, possiamo pensarla come

una trasformazione che manda piani di \mathbb{C}^4 in piani di \mathbb{C}^4 . Inoltre, poiché due piani che si intersecano in una retta sono elementi isotropi non nulli distinti di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ tra loro ortogonali rispetto alla forma b , la τ definisce una trasformazione dello spazio proiettivo $\mathbb{C}P^3$ delle rette per l'origine di \mathbb{C}^4 che preserva le collineazioni. Per il teorema fondamentale della geometria proiettiva l'applicazione è un'omografia, che si ottiene per passaggio al quoziente da un'applicazione $b \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$. Riscalando, otteniamo una $a = k \cdot b$, con $0 \neq k \in \mathbb{C}$, tale che $\lambda_a = \tau$.

Una trasformazione $a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$ per cui $\lambda_a = I_6$ definisce l'omografia proiettiva identica ed è quindi un multiplo dell'identità. Da questa osservazione seguono tutte le altre affermazioni della proposizione. \square

OSSERVAZIONE 31.2.5. $\mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$ e $\mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$ sono varietà analitiche reali di dimensione 32 (e varietà analitiche complesse di dimensione 16) e la (31.9) un rivestimento differenziabile a due fogli.

$\mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$ ed $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$ sono varietà analitiche di dimensione reale 30 (e varietà analitiche complesse di dimensione 15) e la (31.11) un rivestimento differenziabile a due fogli. Essendo semplicemente connesso, $\mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$ è il rivestimento universale di $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$, che ha quindi gruppo fondamentale \mathbb{Z}_2 .

La restrizione di b al sottospazio reale $\Lambda^2(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{R}^6$ è non degenera di segnatura (3, 3). Il gruppo delle trasformazioni \mathbb{R} -lineari che la lasciano invariante è quindi il gruppo ortogonale reale di segnatura (3, 3) ed otteniamo perciò

PROPOSIZIONE 31.2.6. *L'applicazione*

$$(31.12) \quad \mathbf{SL}_4(\mathbb{R}) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{SO}(3, 3)$$

è un epimorfismo di $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$ sulla componente connessa dell'identità $\mathbf{SO}^+(3, 3)$ di $\mathbf{SO}(3, 3)$, con nucleo $\{\pm I_4\}$. \square

OSSERVAZIONE 31.2.7. Il gruppo $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$ è connesso, ma non semplicemente connesso (ha gruppo fondamentale \mathbb{Z}_2). Il gruppo $\mathbf{SO}(3, 3)$ ha due componenti connesse. $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$ ed $\mathbf{SO}(3, 3)$ sono varietà analitiche reali di dimensione 15 e la (31.12) un rivestimento differenziabile a due fogli della componente connessa dell'identità $\mathbf{SO}^+(3, 3)$ di $\mathbf{SO}(3, 3)$. Il gruppo fondamentale di $\mathbf{SO}^+(3, 3)$ è $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Consideriamo su $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ l'involuzione anti- \mathbb{C} -lineare \star , definita sugli elementi della base (31.6) mediante

$$\begin{aligned} \star e_1 \wedge e_2 &= e_3 \wedge e_4, \quad \star e_1 \wedge e_3 = e_4 \wedge e_2, \quad \star e_1 \wedge e_4 = e_2 \wedge e_3, \\ \star e_2 \wedge e_3 &= e_1 \wedge e_4, \quad \star e_4 \wedge e_2 = e_1 \wedge e_3, \quad \star e_3 \wedge e_4 = e_1 \wedge e_2. \end{aligned}$$

Sugli elementi della base (31.6) la matrice associata alla forma Hermitiana simmetrica

$$(31.13) \quad \mathfrak{g}(\alpha, \beta) = b(\alpha, \star\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$$

è l'identità.

LEMMA 31.2.8. *Il gruppo delle trasformazioni \mathbb{C} -lineari di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ che preservano sia la forma simmetrica b che la forma Hermitiana simmetrica \mathfrak{g} è isomorfo al gruppo ortogonale reale $\mathbf{O}(6)$.*

DIMOSTRAZIONE. Il sottospazio

$$V = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \mid \star\alpha = \alpha\}$$

è una forma reale² di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. Le restrizioni a V di b e \mathfrak{g} coincidono e definiscono su V un prodotto scalare. Una trasformazione \mathbb{C} -lineare τ di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ che preservi sia b che \mathfrak{g} verifica

$$\begin{aligned} b(\tau(\alpha), \tau(\star\beta)) &= b(\alpha, \star\beta) = \mathfrak{g}(\alpha, \beta) = \mathfrak{g}(\tau(\alpha), \tau(\beta)) \\ &= \mathfrak{g}(\tau(\alpha), \star\tau(\beta)), \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4). \end{aligned}$$

Questo implica che $\star\tau = \tau\star$ e quindi che $\tau(V) = V$, e la restrizione di τ a V definisce un elemento di $\mathbf{O}(6)$. Viceversa, una trasformazione ortogonale su V si estende in modo unico ad una trasformazione \mathbb{C} -lineare su $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, che preserva sia b che \mathfrak{g} . \square

PROPOSIZIONE 31.2.9. *Per restrizione, la trasformazione λ in (31.9), definisce epimorfismi di gruppi di Lie*

$$(31.14) \quad \{a \in \mathbf{U}(4) \mid \det(a) = \pm 1\} \xrightarrow{\lambda} \mathbf{O}(6),$$

$$(31.15) \quad \mathbf{SU}(4) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{SO}(6),$$

con nucleo $\{\pm I_4\}$.

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente verificare che, se $a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$ e λ_a preserva sia b che \mathfrak{g} , allora $a \in \mathbf{U}(4)$ e ha determinante ± 1 . Il fatto che $\det(a) = \pm 1$ segue dalla (31.8). Inoltre, poiché λ_a commuta con l'operatore \star , la a trasforma due-piani ortogonali in due-piani ortogonali di \mathbb{C}^4 . Da questo ricaviamo che è una trasformazione \mathbb{C} -lineare di \mathbb{C}^4 che preserva l'ortogonalità e quindi conforme per il prodotto scalare Hermitiano di \mathbb{C}^4 . Avendo determinante ± 1 è allora unitaria. \square

OSSERVAZIONE 31.2.10. $\mathbf{SU}(4)$ ed $\mathbf{SO}(6)$ sono varietà differenziabili analitiche reali connesse e compatte di dimensione 15. Il gruppo $\mathbf{SU}(4)$ è semplicemente connesso e la (31.15) il rivestimento universale, a due fogli, di $\mathbf{SO}(6)$.

31.3. I gruppi $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(5)$

Fissiamo una forma alternata non degenera ω su $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. Possiamo scegliere ad esempio Possiamo ad esempio scegliere la forma a coefficienti reali

$$(31.16) \quad \omega = \epsilon^1 \wedge \epsilon^3 + \epsilon^2 \wedge \epsilon^4,$$

ove $\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3, \epsilon^4$ è la duale della base canonica e_1, e_2, e_3, e_4 di \mathbb{C}^4 .

Possiamo definire il gruppo simplettico complesso $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$ come quello delle trasformazioni \mathbb{C} -lineari di \mathbb{C}^4 che preservano ω :

$$\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \mid \omega(a(v_1), a(v_2)) = \omega(v_1, v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}^4\}.$$

La ω è una forma lineare su $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. In particolare,

$$(31.17) \quad \mathbf{W} = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \mid \omega(\alpha) = 0\}$$

²Una forma reale V di uno spazio complesso W è un suo sottospazio vettoriale reale tale che $V \cap iV = \{0\}$ e $W = V \oplus iV$.

è un sottospazio vettoriale complesso, di dimensione cinque, di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, ed

$$(31.18) \quad e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4$$

ne definiscono una base. La restrizione a W della forma simmetrica b definita dalla (31.5) ha in questa base la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ed è quindi non degenera. Osserviamo che W è l'ortogonale di $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$ rispetto a b .

Quindi, le trasformazioni \mathbb{C} -lineari di W che preservano b formano il gruppo ortogonale complesso $\mathbf{O}(5, \mathbb{C})$. Ogni $\tau \in \mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$ si estende in modo unico ad una $\tilde{\tau} \in \mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$, che coincide con τ su W e lascia fisso l'elemento $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$. D'altra parte, una $a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$ la cui λ_a lasci fisso $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$ appartiene al sottogruppo $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$. Otteniamo perciò

LEMMA 31.3.1. *L'applicazione*

$$(31.19) \quad \mathbf{Sp}(2, \mathbb{C}) \ni a \longrightarrow \lambda_a|_W \in \mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$$

è un epimorfismo con nucleo $\{\pm I_4\}$. □

OSSERVAZIONE 31.3.2. $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$ ed $\mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$ sono varietà analitiche reali connesse di dimensione 20; $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$ è semplicemente connesso e la (31.19) un rivestimento universale, differenziabile e a due fogli, di $\mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$, che ha gruppo fondamentale \mathbb{Z}_2 .

La restrizione della forma bilineare simmetrica b al sottospazio reale

$$W_{\mathbb{R}} = W \cap \Lambda^2(\mathbb{R}^4) = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4) \mid \omega(\alpha) = 0\} \simeq \mathbb{R}^5$$

è non degenera ed ha segnatura $(3, 2)$. Poiché il gruppo delle trasformazioni che preservano una forma bilineare simmetrica di segnatura $(3, 2)$ è il gruppo ortogonale $\mathbf{O}(2, 3)$, otteniamo

PROPOSIZIONE 31.3.3. *La restrizione dell'applicazione λ in (31.19) definisce un omomorfismo di gruppi*

$$(31.20) \quad \mathbf{Sp}(2, \mathbb{R}) \ni a \longrightarrow \lambda_a|_{W_{\mathbb{R}}} \in \mathbf{SO}^+(2, 3),$$

la cui immagine è la componente connessa dell'identità $\mathbf{SO}^+(2, 3)$ di $\mathbf{SO}(2, 3)$, con nucleo $\{\pm I_4\}$. □

OSSERVAZIONE 31.3.4. $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{R})$ ed $\mathbf{SO}(2, 3)$ sono varietà analitiche reali di dimensione 10. Il gruppo $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{R})$ è connesso ed $\mathbf{SO}(2, 3)$ consiste di due componenti connesse. La (31.20) è un rivestimento differenziabile a due fogli della sua componente connessa dell'identità. Il gruppo fondamentale di $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{R})$ è \mathbb{Z} e quello di $\mathbf{SO}(2, 3)$ è $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

L'involutione anti- \mathbb{C} -lineare \star lascia invariante il sottospazio W e trasforma l'elemento $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$ nel suo opposto. In particolare, gli elementi di W che sono lasciati fissi da \star formano un sottospazio vettoriale reale $L_{\mathbb{R}}$ di dimensione cinque su cui la b definisce un prodotto scalare Euclideo. Otteniamo perciò:

PROPOSIZIONE 31.3.5. *La restrizione dell'applicazione λ in (31.9) definisce un epimorfismo di gruppi*

$$(31.21) \quad \mathbf{Sp}(2) \ni a \longrightarrow \lambda_a|_{L_{\mathbb{R}}} \in \mathbf{SO}(5),$$

con nucleo $\{\pm I_4\}$. □

OSSERVAZIONE 31.3.6. I gruppi di Lie $\mathbf{Sp}(2)$ e $\mathbf{SO}(5)$ sono varietà analitiche reali connesse e compatte di dimensione 10; $\mathbf{Sp}(2)$ è semplicemente connesso e la (31.21) è il rivestimento universale, differenziabile e a due fogli, di $\mathbf{SO}(5)$, che ha gruppo fondamentale \mathbb{Z}_2 .

OSSERVAZIONE 31.3.7. In questo e nei precedenti paragrafi abbiamo dimostrato i seguenti rivestimenti a due fogli:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{SL}_4(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{SO}(6, \mathbb{C}), & \mathbf{SL}_4(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SO}^+(3, 3), & \mathbf{SU}(4) \longrightarrow \mathbf{SO}(6), \\ \mathbf{Sp}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{SO}(5, \mathbb{C}), & \mathbf{Sp}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SO}^+(2, 3), & \mathbf{Sp}(2) \longrightarrow \mathbf{SO}(5). \end{array}$$

In ciascuna delle due righe, il primo è la *forma complessa*, il secondo la *forma split* ed il terzo la *forma compatta* dell'omomorfismo.

31.4. Rappresentazione spinoriale di alcuni gruppi di Lorentz

Le rappresentazioni spinoriali di $\mathbf{SO}^+(1, 2)$, $\mathbf{SO}^+(1, 3)$, $\mathbf{SO}^+(1, 5)$, $\mathbf{SO}^+(1, 9)$ si ottengono, al variare dell'algebra di divisione normata \mathbb{K} , facendo agire il gruppo $\mathbf{SL}_2(\mathbb{K})$ sullo spazio $\mathfrak{p}_2(\mathbb{K})$ delle matrici Hermitiane simmetriche di ordine due con coefficienti in \mathbb{K} . I quattro casi possibili³ per \mathbb{K} sono \mathbb{R} (reali), \mathbb{C} (complessi), \mathbb{H} (quaternioni di Hamilton), \mathbb{O} (ottonioni o ottave di Cayley) e ciascuno corrisponde ad uno dei gruppi sopra elencati. Il punto centrale è osservare che, nonostante \mathbb{H} ed \mathbb{O} non siano commutative ed \mathbb{O} nemmeno associativa, i determinanti delle matrici 2×2 Hermitiane simmetriche con coefficienti in \mathbb{K} sono ben definiti, e descrivono una forma quadratica reale di segnatura Lorentziana. Per il teorema di Binet, le azioni aggiunte Hermitiane dei gruppi lineari $\mathbf{SL}_2(\mathbb{K})$ su $\mathfrak{p}_2(\mathbb{K})$ definiscono rivestimenti a due fogli dei gruppi di Lorentz, che ci permettono di identificare i *gruppi spinoriali*, definiti come rivestimenti dei corrispondenti gruppi di Lorentz, ai corrispondenti gruppi lineari speciali:

$$\begin{array}{l} \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SO}^+(1, 2), \\ \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{SO}^+(1, 3), \\ \mathbf{SL}_2(\mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{SO}^+(1, 6), \\ \mathbf{SL}_2(\mathbb{O}) \longrightarrow \mathbf{SO}^+(1, 9). \end{array}$$

³La classificazione delle algebre di divisione normate fu ottenuta da Adolph Hurwitz, *Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen*, Nachr. Ges. Wiss., Göttingen (1898), pp. 309-316.

31.4.1. Il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia $\mathfrak{p}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche reali di ordine due. Il determinante

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = ac - b^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

è su $\mathfrak{p}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$ una forma quadratica di segnatura $(1, 2)$, che definisce su di esso la struttura di uno spazio di Minkowski di dimensione tre. I suoi vettori di tipo tempo sono le matrici simmetriche con determinante positivo, unione dei due coni convessi

$$C^+ = \{X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{R}) \mid \det(X) > 0, \operatorname{trac}(X) > 0\}, \quad C^- = \{X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{R}) \mid \det(X) > 0, \operatorname{trac}(X) < 0\},$$

ed il gruppo $\mathbf{O}(1, 2)$ delle trasformazioni lineari di $\mathfrak{p}_2(\mathbb{R})$ che lasciano invariante la forma del determinante ha i sottogruppi normali

$$\begin{aligned} \mathbf{SO}(1, 2) &= \{\psi \in \mathbf{O}(1, 2) \mid \det(\psi) = 1\} && \text{di indice 2,} \\ \mathbf{O}^+(1, 2) &= \{\psi \in \mathbf{O}(1, 2) \mid \psi(C^+) = C^+\} && \text{di indice 2,} \\ \mathbf{SO}^+(1, 2) &= \mathbf{SO}(1, 2) \cap \mathbf{O}^+(1, 2) && \text{di indice 4.} \end{aligned}$$

Il gruppo $\mathbf{O}(1, 2)$ ha quattro componenti connesse ed $\mathbf{SO}^+(1, 2)$ è la componente connessa dell'identità.

Il sottospazio $\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{R})$ delle matrici reali simmetriche 2×2 con traccia nulla ha dimensione due e su di esso il determinante definisce una forma definita negativa e quindi una struttura Euclidea. Ogni trasformazione lineare ortogonale di $\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{R})$ si estende in modo unico ad una trasformazione di $\mathbf{O}^+(1, 2)$ che lascia fissa la matrice $\sigma_0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le trasformazioni $\psi \in \mathbf{O}(1, 2)$ che lasciano fissa σ_0 sono quelle che preservano la traccia. È allora:

$$\mathbf{O}(2) \simeq \{\psi \in \mathbf{O}^+(1, 2) \mid \operatorname{trac}(\psi(X)) = \operatorname{trac}(X), \forall X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{R})\}.$$

PROPOSIZIONE 31.4.1. Per ogni $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$,

$$(31.22) \quad \{\phi_a : \mathfrak{p}_2(\mathbb{R}) \ni X \longrightarrow aXa^* \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{R})\} \in \mathbf{SO}^+(1, 2).$$

La

$$(31.23) \quad \phi : \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \ni a \longrightarrow \phi_a \in \mathbf{SO}^+(1, 2),$$

è un epimorfismo di gruppi di Lie ed un rivestimento differenziabile a due fogli.

DIMOSTRAZIONE. La aXa^* è simmetrica per ogni $X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{R})$ ed $a \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$. Quindi $\phi_a \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{p}_2(\mathbb{R}))$. Per il teorema di Binet, $\phi_a \in \mathbf{O}(1, 2)$ se $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ e ϕ è a valori in $\mathbf{SO}^+(1, 2)$ perché ϕ è continua ed $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ connesso.

Verifichiamo che $\phi(\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})) = \mathbf{SO}^+(1, 2)$. Fissiamo la base ortonormale

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{di } \mathfrak{p}_2(\mathbb{R}).$$

Sia $\psi \in \mathbf{SO}^+(1, 2)$. La $\sigma'_0 = \psi(\sigma_0)$ è una matrice simmetrica di determinante uno e traccia positiva. Ha quindi due autovalori positivi, uno reciproco dell'altro, ed

esiste quindi una matrice $u_0 \in \mathbf{SO}(2)$ tale che

$$\phi_{u_0}(\sigma'_0) = u_0 \sigma'_0 u_0^* = u_0 \sigma'_0 u_0^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \text{ con } \lambda > 0.$$

Allora

$$a_0 = \begin{pmatrix} \lambda^{-1/2} & \\ & \lambda^{1/2} \end{pmatrix} u_0 \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \text{ e } \phi_{a_0}(\sigma'_0) = \sigma_0$$

e $\psi_0 = \phi_{a_0} \circ \psi \in \mathbf{SO}^+(1, 2)$. Abbiamo $\psi_0(\sigma_i) = \sigma''_i$, per $i = 0, 1, 2$, con $\sigma''_0 = \sigma_0$. La ψ_0 lascia fissa σ_0 e quindi conserva le tracce. In particolare σ''_1 ha traccia nulla e determinante -1 e σ''_2 si ottiene ruotando σ''_1 , sul piano $\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{R})$, di un angolo $\pi/2$. Risulta quindi determinata una $a_1 \in \mathbf{SO}(2)$ tale che

$$\phi_{a_1}(\sigma''_1) = a_1 \sigma''_1 a_1^* = a_1 \sigma''_1 a_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \phi_{a_1}(\sigma''_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

È perciò $\text{Id}_{\mathfrak{p}_2(\mathbb{R})} = \phi_{a_1} \circ \phi_{a_0} \circ \psi = \phi_{a_1 a_0} \circ \psi$. Quindi $\psi = \phi_{a_0^{-1} a_1^{-1}}$ e ciò prova che ϕ è surgettiva su $\mathbf{SO}^+(1, 2)$. Se $\phi_a = \text{Id}_{\mathfrak{p}_2(\mathbb{R})}$, allora da $\phi_a(\sigma_0) = \sigma_0$ ricaviamo che $a \in \mathbf{SO}(2)$. Poi, da $\phi_a(\sigma_1) = a \sigma_1 a^* = a \sigma_1 a^{-1}$ deduciamo che a è diagonale e quindi uguale a $\pm \text{Id}_2$. \square

OSSERVAZIONE 31.4.2. La restrizione della (31.23) ad $\mathbf{SO}(2)$ dà un epimorfismo

$$\mathbf{SO}_2 \ni a \longrightarrow \{\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{R}) \ni X \rightarrow a X a^* \in \mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{R})\} \in \mathbf{SO}(2)$$

che è un rivestimento differenziabile a due fogli di $\mathbf{SO}(2) \simeq S^1$.

31.4.2. Il caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Indichiamo con $\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici complesse 2×2 Hermitiane simmetriche: è uno spazio vettoriale reale di dimensione quattro, su cui il determinante

$$\det \begin{pmatrix} x & z \\ \bar{z} & y \end{pmatrix} = xy - |z|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C},$$

definisce una forma quadratica di segnatura $(1, 3)$. Possiamo quindi identificare lo spazio di Minkowski di dimensione quattro con lo spazio vettoriale $\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$, in cui la forma quadratica fondamentale è data dal determinante. Il gruppo $\mathbf{O}(1, 3)$ delle trasformazioni reali ortogonali rispetto a una forma simmetrica di segnatura $(1, 3)$ si identifica così al gruppo delle $\phi \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{p}_2(\mathbb{C}))$ tali che $\det(\phi(X)) = \det(X)$ per ogni $X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$.

Ricordiamo che il determinante di un elemento di $\mathbf{O}(1, 3)$ è uguale a ± 1 . I suoi elementi di determinante uno formano il sottogruppo normale di indice due $\mathbf{SO}(1, 3)$. Denotiamo con

$$C = \{X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{C}) \mid \det X > 0\}$$

il cono aperto dei vettori di tipo tempo. Gli X di C hanno le componenti sulla diagonale reali, non nulle e dello stesso segno. Il cono C è unione di due componenti connesse e convesse

$$C = C^+ \cup C^-, \quad \text{con } C^+ = \{X \in C \mid \text{trac}(X) > 0\}, \quad C^- = \{X \in C \mid \text{trac}(X) < 0\}$$

ed un elemento ϕ di $\mathbf{O}(1, 3)$ o preserva o scambia tra loro C^+ e C^- . Abbiamo quindi un altro sottogruppo di indice due

$$\mathbf{O}^+(1, 3) = \{\phi \in \mathbf{O}(1, 3) \mid \phi(C^+) = C^+, \phi(C^-) = C^-\}.$$

L'intersezione

$$\mathbf{SO}^+(1, 3) = \mathbf{SO}(1, 3) \cap \mathbf{O}^+(1, 3)$$

è la componente connessa dell'identità di $\mathbf{O}(1, 3)$ ed è un sottogruppo normale di $\mathbf{O}(1, 3)$ di indice quattro. Il gruppo $\mathbf{SO}^+(1, 3)$ è il gruppo di Lorentz che definisce la simmetria della relatività ristretta.

Possiamo identificare lo spazio Euclideo \mathbb{R}^3 al sottospazio $\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{C})$ delle matrici Hermitiane simmetriche a traccia nulla. La restrizione a $\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{C})$ della forma fondamentale è l'opposto della norma Euclidea usuale. Questo ci permette di identificare il gruppo $\mathbf{O}(3)$ delle trasformazioni ortogonali di \mathbb{R}^3 al sottogruppo di $\mathbf{O}(1, 3)$ delle trasformazioni che conservano al tempo stesso il determinante e la traccia:

$$\mathbf{O}(3) = \{\phi \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})) \mid \det(\phi(X)) = \det(X), \text{trac}(\phi(X)) = \text{trac}(X), \forall X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{C})\}.$$

PROPOSIZIONE 31.4.3. *Ogni $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ definisce un'applicazione*

$$(31.24) \quad \phi_a : \mathfrak{p}_2(\mathbb{C}) \ni X \longrightarrow \phi_a(X) = aXa^* \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{C}) \quad \text{con} \quad \phi_a \in \mathbf{SO}^+(1, 3).$$

La corrispondenza

$$(31.25) \quad \phi : \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \ni a \longrightarrow \phi_a \in \mathbf{SO}^+(1, 3)$$

è un epimorfismo di gruppi con nucleo $\{\pm I\}$ ed un rivestimento differenziabile a due fogli.

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di Binet, $\phi_a \in \mathbf{O}(1, 3)$ se $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$. Poiché $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ è connesso ed $a \mapsto \phi_a$ continua, l'immagine $\phi(\mathbf{SL}_2(\mathbb{C}))$ è contenuta nella componente connessa dell'identità $\mathbf{SO}^+(1, 3)$ di $\mathbf{O}(1, 3)$.

Dimostriamo ora che (31.25) è surgettiva. A questo scopo fissiamo la base ortonormale di $\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$ formata dalle matrici

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $\psi \in \mathbf{SO}^+(1, 3)$ e poniamo $\sigma'_i = \psi(\sigma_i)$, per $i = 0, 1, 2, 3$. Basterà dimostrare che possiamo trovare $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ tale che $\phi_a(\sigma'_i) = \sigma_i$ per $i = 0, 1, 2, 3$. La matrice σ'_0 ha determinante uno e traccia positiva ed è diagonalizzabile in una base ortonormale di \mathbb{C}^2 . Possiamo quindi trovare un numero reale positivo λ ed un $u_0 \in \mathbf{SU}(2)$ tale che

$$u_0 \sigma'_0 u_0^* = u_0 \sigma'_0 u_0^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\sigma_0 = \phi_{a_0}(\sigma'_0) \quad \text{con} \quad a_0 = \begin{pmatrix} \lambda^{-1/2} & \\ & \lambda^{1/2} \end{pmatrix} u_0 \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}).$$

I $\phi_{a_0}(\sigma'_i) = \sigma''_i$ formano una nuova base ortonormale di $\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$, con $\sigma''_0 = \sigma_0$. In particolare, σ''_1 ha determinante -1 e traccia nulla: è quindi Hermitiana simmetrica con autovalori $1, -1$ e perciò possiamo trovare una $a_1 \in \mathbf{SU}(2)$ tale che

$$\phi_{a_1}(\sigma''_1) = a_1 \sigma''_1 a_1^* = a_1 \sigma''_1 a_1^{-1} = \sigma_1.$$

I $\sigma'''_i = \phi_{a_1} \circ \phi_{a_0}(\sigma'_i) = \phi_{a_1 a_0}(\sigma'_i)$, per $i = 0, 1, 2, 3$ formano una base ortonormale di $\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$ con $\sigma'''_0 = \sigma_0$ e $\sigma'''_1 = \sigma_1$. Poiché $\phi_{a_1 a_0} \circ \psi \in \mathbf{SO}^+(1, 3)$ e lascia fissi σ_0 e σ_1 , è una rotazione di $\pi/2$ nel piano euclideo formato dalle matrici Hermitiane simmetriche con diagonale principale nulla. Abbiamo allora

$$\sigma'''_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \bar{\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma'''_3 = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha \\ -i\bar{\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1.$$

Se β è una radice quadrata di α , allora

$$a_2 = \begin{pmatrix} \bar{\beta} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \phi_{a_2}(\sigma_0) &= \sigma_0, & \phi_{a_2}(\sigma_1) &= \sigma_1, \\ \phi_{a_2}(\sigma'''_2) &= \sigma_2, & \phi_{a_2}(\sigma'''_3) &= \sigma_3. \end{aligned}$$

Otteniamo così che $\phi_a(\sigma'_i) = \sigma_i$ per $i = 0, 1, 2, 3$ se $a = a_2 a_1 a_0$; quindi $\psi = \phi_{a^{-1}}$ e ciò completa la dimostrazione del fatto che (31.25) sia surgettiva.

Sia ora $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ tale che ϕ_a sia l'identità. Da $\phi_a(\sigma_0) = \sigma_0$ abbiamo che $aa^* = \sigma_0 \text{Id}$ e quindi $a \in \mathbf{SU}(2)$. Da $\phi_a(\sigma_1) = \sigma_1$ ricaviamo allora che a commuta con σ_1 ed è quindi diagonale. Da $\phi_a(\sigma_2) = \sigma_2$ otteniamo infine che gli elementi sulla diagonale di a hanno quadrato uguale ad 1 e perciò $a = \pm \text{Id}$. \square

Per la caratterizzazione di $\mathbf{SO}(3)$ come il sottogruppo di $\mathbf{SO}^+(1, 3)$ delle trasformazioni che preservano la traccia (con la notazione introdotta nella dimostrazione della Proposizione 31.4.3 sono le $\psi \in \mathbf{SO}^+(1, 3)$ che lasciano fissa σ_0), otteniamo (vedi le Proposizioni 32.1.5, 32.1.6) il

COROLLARIO 31.4.4. *L'applicazione*

$$\phi : \mathbf{SU}(2) \ni a \longrightarrow \phi_a \in \mathbf{SO}(3), \quad \text{definita da} \quad \phi(X) = aXa^*, \quad \forall X \in \mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{C}),$$

è un epimorfismo di gruppi, con nucleo $\{\pm \text{Id}\}$ ed un rivestimento differenziabile a due fogli. \square

31.4.3. Il caso $\mathbb{K} = \mathbb{H}$. Sia $\mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$ lo spazio delle matrici Hermitiane 2×2 a coefficienti quaternioni. È

$$\mathfrak{p}_2(\mathbb{H}) = \left\{ X = \begin{pmatrix} \lambda_X & q_X \\ \bar{q}_X & \mu_X \end{pmatrix} \middle| \lambda_X, \mu_X \in \mathbb{R}, q_X \in \mathbb{H} \right\} \simeq \mathbb{R}^6.$$

Data una matrice $X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$, il suo *determinante quaternionico*

$$\det_{\mathbb{H}}(X) = \lambda_X \mu_X - q_X \bar{q}_X \in \mathbb{R}$$

definisce una forma quadratica reale di segnatura $(1, 5)$ su $\mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$. Indichiamo con $\mathbf{SO}(1, 5)$ il gruppo delle trasformazioni lineari di $\mathbf{SL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{p}_2(\mathbb{H}))$ che preservano il determinante quaternionico e con $\mathbf{SO}^+(1, 5)$ la sua componente connessa dell'identità.

PROPOSIZIONE 31.4.5. *Ogni $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$ definisce un'applicazione lineare*

$$(31.26) \quad T_a : \mathfrak{p}_2(\mathbb{H}) \ni X \rightarrow aXa^* \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$$

che preserva il determinante quaternionico ed appartiene ad $\mathbf{SO}^+(1, 5)$.

L'applicazione

$$(31.27) \quad \mathbf{SL}_2(\mathbb{H}) \ni a \rightarrow T_a \in \mathbf{SO}^+(1, 5)$$

è un epimorfismo di gruppi di Lie con nucleo $\{\pm I\}$ ed un rivestimento a due fogli.

Poiché $\mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$ è semplicemente connesso, la (31.27) è il rivestimento universale di $\mathbf{SO}^+(1, 5)$.

DIMOSTRAZIONE. Utilizziamo la rappresentazione matriciale complessa dei quaternioni:

$$\mathbb{H} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Per ogni $X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{H})$, indichiamo con \hat{X} la matrice di $\mathfrak{gl}_4(\mathbb{C})$ ottenuta sostituendo a ciascun coefficiente quaternionico la matrice complessa 2×2 che lo rappresenta. La corrispondenza $X \leftrightarrow \hat{X}$ è un isomorfismo dei corrispondenti anelli associativi. Abbiamo inoltre

$$\det_{\mathbb{C}}(X) = \det(\hat{X}) = \det_{\mathbb{H}}^2(X), \quad \forall X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H}),$$

$$\widehat{aXa^*} = \hat{a}\hat{X}\hat{a}^*, \quad \forall a, X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{H}).$$

Poiché $\hat{a} \in \mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$ se $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$, otteniamo allora che

$$\det_{\mathbb{C}}(aXa^*) = \det_{\mathbb{C}}(X), \quad \forall X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H}), \quad \forall a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H}).$$

Per verificare che

$$(*) \quad \det_{\mathbb{H}}(aXa^*) = \det_{\mathbb{H}}(X), \quad \forall X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H}), \quad \forall a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H}),$$

osserviamo in primo luogo che dall'identità precedente segue che i due membri di quest'uguaglianza sono o uguali od opposti. Sull'aperto delle coppie (a, X) con $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$ ed X definita positiva, deve valere l'uguaglianza perché vale per $X = \text{Id}$ e le matrici definite positive di $\mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$ formano un aperto convesso su cui $\det_{\mathbb{H}}$ è sempre positivo. Poiché (*) è algebrica ed è verificata su un aperto, è valida per tutte le coppie $(a, X) \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H}) \times \mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$.

Questo dimostra che $T_a \in \mathbf{O}(1, 5)$ se $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$. Poiché $\mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$ è connesso e $a \mapsto T_a$ continua, le T_a appartengono ad $\mathbf{SO}^+(1, 5)$.

Per dimostrare la surgettività, osserviamo che una $X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$ si può diagonalizzare utilizzando una matrice di $\mathbf{Sp}(2)$. Esiste cioè una $a_1 \in \mathbf{Sp}(2) \subset \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$ tale che

$$a_1 X a_1^* = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$$

con λ, μ autovalori reali. A questo punto si dimostra che, se $\phi \in \mathbf{SO}^+(1, 5)$, fissata la base

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} & i \\ -i & \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} & j \\ -j & \end{pmatrix},$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} & \kappa \\ -\kappa & \end{pmatrix},$$

e posto $\sigma'_i = \phi(\sigma_i)$, è possibile trovare $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$ tale che $T_a(\sigma'_i) = \sigma_i$ per $i = 0, \dots, 5$. Allora $\phi = T_{a^{-1}}$ mostra che $a \mapsto T_a$ è surgettiva. Si verifica poi facilmente che il nucleo di T è $\{\pm I\}$. \square

31.4.4. Il caso $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Nel caso degli ottonioni, poiché l'algebra di divisione \mathbb{O} non è associativa, ci sono delle difficoltà supplementari nel definire i gruppi $\mathbf{SL}_n(\mathbb{O})$. Si può procedere considerando dapprima le matrici $n \times n$ a coefficienti ottonioni e somma degli elementi della diagonale nulli. Esse definiscono delle applicazioni \mathbb{R} -lineari di \mathbb{O}^n in sé e quindi delle trasformazioni lineari di \mathbb{R}^{8n} in sé, fissato un isomorfismo \mathbb{R} -lineare $\mathbb{O} \simeq \mathbb{R}^8$. Allora le trasformazioni che possono essere descritte da matrici di ottonioni a traccia nulla formano un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{sl}_{8n}(\mathbb{R})$, che genera una sua sottoalgebra di Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{O})$. Si definisce quindi $\mathbf{SL}_n(\mathbb{O})$ come il corrispondente sottogruppo di Lie di $\mathbf{SL}_{8n}(\mathbb{R})$.

Si verifica che, nel caso $n = 2$, è ancora possibile definire una nozione di *determinante* sullo spazio $\mathfrak{p}_2(\mathbb{O})$ delle matrici hermitiane simmetriche a coefficienti ottonioni: esso è una forma quadratica reale non degenera di segnatura $(1, 9)$.

In modo analogo a quanto fatto nei punti precedenti, possiamo allora utilizzare l'applicazione

$$\mathbf{SL}_2(\mathbb{O}) \ni a \longrightarrow \{X \rightarrow \phi_a(X) = aXa^*\} \in \mathbf{SO}^+(1, 9)$$

per definire un rivestimento a due fogli di $\mathbf{SO}^+(1, 9)$ mediante il gruppo lineare speciale $\mathbf{SL}_2(\mathbb{O})$. Per i dettagli si consiglia la lettura dell'articolo [52] o di [51, §9.3].

Gruppi ed algebre di matrici quaternioniche

Introduciamo in questo paragrafo alcuni gruppi ed algebre di Lie di matrici di quaternioni e le loro rappresentazioni complesse.

32.1. I quaternioni e la struttura differenziale di $SU(2)$, $SO(3)$, $SO(4)$

I *quaternioni* formano un'algebra di divisione reale, di dimensione quattro, associativa e normata, che denoteremo con \mathbb{H} . Indichiamo con "1" l'identità del prodotto e con i, j, κ le sue *unità immaginarie standard*. Gli elementi $1, i, j, \kappa$ formano una base di \mathbb{H} come spazio vettoriale reale. Una qualsiasi coppia di unità immaginarie, ad esempio i, j , generano \mathbb{H} come algebra reale. Il prodotto dei quaternioni si può rappresentare mediante:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & i & \\
 \curvearrowright & & \curvearrowleft \\
 \kappa & & j \\
 \curvearrowleft & & \curvearrowright
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \text{cioè} \quad
 \begin{cases}
 i \cdot j = -j \cdot i = \kappa, \\
 j \cdot \kappa = -\kappa \cdot j = i, \\
 \kappa \cdot i = -i \cdot \kappa = j.
 \end{cases}$$

La $a \rightarrow a \cdot 1$ identifica i reali ad una sottoalgebra di \mathbb{H} . Il prodotto di quaternioni non è commutativo ed i numeri reali sono tutti e soli gli elementi del centro di \mathbb{H} .

Il *coniugio* è l'involuzione \mathbb{R} -lineare

$$\mathbb{H} \ni q \longrightarrow \bar{q} \in \mathbb{H} \quad \text{tale che} \quad \bar{1} = 1, \bar{i} = -i, \bar{j} = -j, \bar{\kappa} = -\kappa.$$

I quaternioni lasciati fissi dal coniugio sono i reali, mentre un quaternionione q con $\bar{q} = -q$ si dice *immaginario*. I quaternioni immaginari formano un sottospazio reale V di dimensione tre (i *vettori* secondo Hamilton). Valgono le proprietà

$$\begin{aligned}
 \overline{q_1 \cdot q_2} &= \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1, & q \cdot \bar{q} &= \|q\|^2 \in \mathbb{R}_+ \text{ e } \|q\| = 0 \Leftrightarrow q = 0, \\
 \|q_1 \cdot q_2\| &= \|q_1\| \cdot \|q_2\|, & (q_1 | q_2) &= \Re(q_1 \cdot \bar{q}_2) \text{ è il prodotto scalare su } \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4.
 \end{aligned}$$

in particolare:

LEMMA 32.1.1. *Con la restrizione del prodotto di quaternioni la sfera di dimensione tre*

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$$

è un gruppo di Lie compatto. □

Un quaternionione q si scrive in modo unico come una somma $q = a + v$ di un numero reale a e di un quaternionione immaginario $v \in \mathbf{V}$. Otteniamo

$$\Re(q_1 \cdot q_2) = \Re(q_2 \cdot q_1) = a_1 a_2 - v_1 \cdot v_2, \quad \text{Im}(q_1 \cdot q_2) = a_1 v_2 + a_2 v_1 + v_1 \times v_2$$

e quindi la parte reale del prodotto di due quaternioni è un prodotto di Minkowski (di segnatura $(1, 3)$) su $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$, mentre l'ultimo addendo della parte immaginaria è il prodotto vettore delle parti vettoriali.

Ogni quaternionione non reale genera una sottoalgebra commutativa di dimensione due, isomorfa a quella dei numeri complessi. Identificheremo, in modo canonico, i numeri complessi alla sottoalgebra $\mathbb{C} \simeq \{a \cdot 1 + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, generata dall'unità immaginaria i .

La moltiplicazione a sinistra o a destra di un quaternionione non appartenente a \mathbb{C} per i dà risultati differenti. Perciò, quando considereremo \mathbb{H} come uno spazio vettoriale complesso di dimensione due sarà necessario distinguere lo spazio vettoriale *a destra* (possiamo moltiplicare a destra per uno scalare complesso) dallo spazio vettoriale *a sinistra* (possiamo moltiplicare a sinistra per uno scalare complesso). Fissato un quaternionione a , la $\mathbb{H} \ni q \rightarrow a \cdot q \in \mathbb{H}$ è \mathbb{C} -lineare a destra, mentre la $\mathbb{H} \ni q \rightarrow q \cdot a \in \mathbb{H}$ è \mathbb{C} -lineare a sinistra.

NOTAZIONE 32.1.2. Associamo a una coppia a, b di quaternioni l'applicazione

$$(32.1) \quad \rho_{a,b} : \mathbb{H} \ni q \longrightarrow a \cdot q \cdot b \in \mathbb{H}.$$

LEMMA 32.1.3. Se $a \in \mathbf{S}^3$, allora $\sigma_a(q) = -a \cdot \bar{q} \cdot a$ è la simmetria ortogonale in $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$ di vettore a .

DIMOSTRAZIONE. La σ_a è \mathbb{R} -lineare. È $\sigma_a(a) = -a \cdot \bar{a} \cdot a = -a$ e, se $\Re(a \cdot \bar{q}) = 0$, allora $a \cdot \bar{q}$ è un quaternionione immaginario e perciò

$$\Re(a \cdot \bar{q}) = 0 \implies a \cdot \bar{q} = -\overline{a \cdot \bar{q}} = -q \cdot \bar{a} \implies -a \cdot \bar{q} \cdot a = q \cdot \bar{a} \cdot a = q.$$

Quindi σ_a lascia fisso l'iperpiano dei quaternioni ortogonali ad a e trasforma a nel suo opposto: è perciò la simmetria euclidea di vettore a in $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$. \square

PROPOSIZIONE 32.1.4. L'applicazione

$$\pi : \mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3 \ni (a, b) \longrightarrow \rho_{a, \bar{b}} \in \mathbf{SO}(4)$$

è un omomorfismo surgettivo di gruppi di Lie ed un rivestimento a due fogli.

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che π sia un omomorfismo di gruppi segue subito dal fatto che $\rho_{a_1, b_1} \circ \rho_{a_2, b_2} = \rho_{a_1 \cdot a_2, b_2 \cdot b_1}$, per ogni $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{H}$. Poiché \mathbb{H} è un'algebra normata, se $a, b \in \mathbf{S}^3$, allora è $\|\rho_{a, \bar{b}}(q)\| = \|q\|$ per ogni $q \in \mathbb{H}$.

Quindi $\pi(\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3) \subseteq \mathbf{O}(4)$ ed in effetti $\pi(\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3) \subseteq \mathbf{SO}(4)$ perché $\pi(\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3)$ è connesso. Poiché ogni elemento di $\mathbf{SO}(4)$ è prodotto di un numero pari di simmetrie vettoriali, per il Lemma 32.1.3 la π è surgettiva. Infine, se $\rho_{a, \bar{b}} = \text{id}$, allora $a \cdot q = q \cdot b$ per ogni quaternionione q . Perciò $a=b \in \mathbf{S}^3$ ed a è un quaternionione che commuta con ogni altro quaternionione ed è perciò un numero reale di norma 1, cioè ± 1 . \square

PROPOSIZIONE 32.1.5. *L'applicazione*

$$\pi : S^3 \ni a \longrightarrow \rho_{a,\bar{a}} \in \mathbf{SO}(3)$$

è un omomorfismo surgettivo di gruppi di Lie ed un rivestimento a due fogli.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo identificare $\mathbf{SO}(3)$ al sottogruppo di $\mathbf{SO}(4)$ delle trasformazioni che fissano tutti i quaternioni reali. Osserviamo che, se $a, b \in S^3$, allora

$$\rho_{a,\bar{b}}(1) = 1 \iff a \cdot \bar{b} = 1 \iff a = b.$$

La tesi è quindi conseguenza della Proposizione 32.1.4. \square

Consideriamo su \mathbb{H} la struttura di spazio vettoriale complesso a destra. Poiché la norma soddisfa $\|q \cdot \tau\| = |\tau| \cdot \|q\|$ per ogni $q \in \mathbb{H}$ ed ogni $\tau \in \mathbb{C}$, è associata ad un prodotto scalare Hermitiano. Il gruppo $\mathbf{U}(2)$ delle trasformazioni unitarie di $\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^2$ si identifica allora al gruppo delle trasformazioni \mathbb{C} -lineari di $\mathbf{SO}(4)$.

PROPOSIZIONE 32.1.6. *L'applicazione*

$$\pi : S^3 \times S^1 \ni (a, \tau) \longrightarrow \rho_{a,\tau} \in \mathbf{U}(2)$$

è un omomorfismo surgettivo di gruppi di Lie ed un rivestimento a due fogli. Essa definisce per restrizione un isomorfismo di gruppi di Lie

$$S^3 \ni a \longleftarrow \rho_{a,1} \in \mathbf{SU}(2).$$

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue dal fatto che $\rho_{a,b}$ è \mathbb{C} -lineare a destra se e soltanto se τ è un numero complesso. Se indichiamo con $R_{a,\tau}$ l'applicazione \mathbb{C} -lineare corrispondente a $\rho_{a,\tau}$, si verifica facilmente che $\det(R_{a,\tau}) = \|a\|^2 \cdot \tau^2 = \tau^2$ se $(a, \tau) \in S^3 \times S^1$. Da questa osservazione segue la seconda affermazione della proposizione. \square

COROLLARIO 32.1.7. *Abbiamo i seguenti diffeomorfismi di classe \mathcal{C}^ω :*

$$\mathbf{SO}(3) \simeq \mathbb{RP}^3, \quad \mathbf{SO}(4) \simeq S^3 \times \mathbb{RP}^3, \quad \mathbf{SU}(2) \simeq S^3, \quad \mathbf{U}(2) \simeq S^1 \times S^3. \quad \square$$

32.2. Matrici di quaternioni e matrici complesse di tipo quaternionico

LEMMA 32.2.1. *Siano m, n interi positivi. Le applicazioni \mathbb{H} -lineari a destra $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^m$ sono tutte e sole quelle che si possono rappresentare nella forma*

$$(*) \quad f(v) = Z \cdot v \quad (\text{prodotto righe per colonne di matrici}).$$

La matrice $Z \in \mathbb{H}^{m \times n}$ è univocamente determinata dalla f .

DIMOSTRAZIONE. Siano e_1, \dots, e_n i vettori della base canonica di \mathbb{H}^n . Data f , la Z è univocamente determinata come la matrice di colonne $(f(e_1), \dots, f(e_n))$. Viceversa, fissata una matrice $Z \in \mathbb{H}^{m \times n}$, la (*) definisce un'applicazione \mathbb{H} -lineare a destra f di \mathbb{H}^n in \mathbb{H}^m . \square

OSSERVAZIONE 32.2.2. In modo analogo, anche le trasformazioni \mathbb{H} -lineari a sinistra si rappresentano come prodotti righe per colonne di matrici. Per tener conto della non commutatività dei quaternioni, conviene considerare i vettori colonna come elementi di uno spazio vettoriale a destra e quelli riga (covettori) di uno spazio

vettoriale a sinistra su \mathbb{H} . Le descrizioni dei gruppi classici di matrici di quaternioni che si ottengono considerando le trasformazioni lineari a destra o a sinistra ad esse associate sono equivalenti.

Identifichiamo il campo \mathbb{C} dei numeri complessi alla sottoalgebra unitaria di \mathbb{H} generata dall'unità immaginaria i . Per restrizione degli scalari, possiamo allora considerare \mathbb{H}^n come uno spazio vettoriale (a destra) di dimensione $2n$ su \mathbb{C} . Ogni vettore v di \mathbb{H}^n si scrive in modo unico come una somma

$$v = u + j \cdot w, \quad \text{con } u, w \in \mathbb{C}^n (= (\mathbb{R}[i])^n).$$

Questa decomposizione definisce un isomorfismo

$$(32.2) \quad \phi_n : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{C}^{2n}, \quad \text{con } \phi_n(u+j \cdot w) = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, \quad \text{se } u, w \in \mathbb{C}^n.$$

Utilizziamo questo isomorfismo per costruire un'applicazione lineare iniettiva

$$(32.3) \quad \Phi_{m,n} : \mathbb{H}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{2m \times 2n}, \quad \text{mediante } L_{\Phi_{m,n}(Z)} = \phi_m \circ L_Z \circ \phi_n^{-1},$$

ove $L_Z : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^m$ ed $L_{\Phi_{m,n}(Z)} : \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{2m}$ sono le applicazioni lineari a destra definite dalle matrici $Z \in \mathbb{H}^{m \times n}$ e $\Phi_{m,n}(Z) \in \mathbb{C}^{(2m) \times (2n)}$.

Una $Z \in \mathbb{H}^{m \times n}$ si decompone in modo unico in una somma $Z = X + j \cdot Y$, con $X, Y \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Poiché

$$(X+j \cdot Y) \cdot (u+j \cdot w) = (X \cdot u - \bar{Y} \cdot w) + j \cdot (Y \cdot u + \bar{X} \cdot w), \quad \forall u, w \in \mathbb{C}^n,$$

la corrispondenza per le matrici è

$$(32.4) \quad \Phi_{m,n}(X+j \cdot Y) = \begin{pmatrix} X & -\bar{Y} \\ Y & \bar{X} \end{pmatrix}, \quad \forall X, Y \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

DEFINIZIONE 32.2.3. Chiamiamo di tipo *quaternionico* le matrici complesse in $\Phi_{m,n}(\mathbb{H}^{m \times n})$, cioè della forma (32.4).

La moltiplicazione a sinistra per j è una trasformazione lineare a destra di \mathbb{H}^n in sé, cui corrisponde in $\mathbb{C}(2n)$ la matrice

$$(32.5) \quad \Omega_n = \begin{pmatrix} & -I_n \\ I_n & \end{pmatrix}.$$

PROPOSIZIONE 32.2.4 (caratterizzazione delle matrici di tipo quaternionico). *Una matrice $A \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$ è di tipo quaternionico se e soltanto se*

$$(32.6) \quad A \cdot \Omega_n = \Omega_m \cdot \bar{A}.$$

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo una $A \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$ come una matrice a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \text{con } A_{r,s} \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

Da

$$A \cdot \Omega_n = \begin{pmatrix} A_{1,2} & -A_{1,1} \\ A_{2,2} & -A_{2,1} \end{pmatrix}, \quad \Omega_m \cdot \bar{A} = \begin{pmatrix} -\bar{A}_{2,1} & -\bar{A}_{2,2} \\ \bar{A}_{1,1} & \bar{A}_{1,2} \end{pmatrix}$$

ricaviamo che vale la (32.6) se e soltanto se $A = \Phi_{m,n}(A_{1,1} + j \cdot A_{2,1})$. \square

Poiché le Ω_p sono matrici reali antisimmetriche con $\Omega_p^2 = -I_{2p}$, dalla caratterizzazione si ottiene facilmente la seguente proposizione.

- PROPOSIZIONE 32.2.5. (1) Una $A \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$ è di tipo quaternionico se, e soltanto se, lo sono una qualunque delle \bar{A}, A^\top, A^* .
 (2) Se $A \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$ e $B \in \mathbb{C}^{2n \times 2k}$ sono di tipo quaternionico, anche il loro prodotto righe per colonne $AB \in \mathbb{C}^{2m \times 2k}$ è di tipo quaternionico.
 (3) Una $\mathfrak{a} \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ è di tipo quaternionico se e soltanto se lo è \mathfrak{a}^{-1} . \square

PROPOSIZIONE 32.2.6. Il sottospazio $\Phi_{m,n}(\mathbb{H}^{m \times n})$ di $\mathbb{C}^{2m \times 2n}$ è il luogo dei punti fissi dell'involuzione anti- \mathbb{C} -lineare

$$(32.7) \quad \vartheta_{m,n} : \mathbb{C}^{2m \times 2n} \ni A \longrightarrow -\Omega_m \cdot \bar{A} \cdot \Omega_n \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}.$$

La

$$(32.8) \quad \vartheta_n : \mathbb{C}(2n) \ni A \longrightarrow -\Omega_n \cdot \bar{A} \cdot \Omega_n \in \mathbb{C}(2n)$$

è un'involuzione anti- \mathbb{C} -lineare dell'algebra associativa unitaria $\mathbb{C}(2n)$, che ha come luogo di punti fissi una sottoalgebra associativa unitaria reale, isomorfa mediante $\Phi_{n,n}$ ad $\mathbb{H}(n)$. \square

OSSERVAZIONE 32.2.7. L'ultima affermazione della proposizione ci dice che $\mathbb{H}(n)$ è una forma reale di $\mathbb{C}(2n)$.

32.2.1. Autovalori ed autovettori di matrici complesse di tipo quaternionico. Consideriamo gli endomorfismi di \mathbb{C}^{2n} definiti da matrici di tipo quaternionico.

LEMMA 32.2.8. Se $v \in \mathbb{C}^{2n}$ è diverso da zero, allora v ed $\Omega_n \cdot \bar{v}$ sono linearmente indipendenti.

Inoltre, se v è autovettore di una matrice $A \in \mathbb{C}(2n)$ di tipo quaternionico, relativo all'autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$, allora anche $\bar{\lambda}$ è autovalore di A , con autovettore $\Omega_n \cdot \bar{v}$.

DIMOSTRAZIONE. Se v ed $\Omega_n \cdot \bar{v}$ fossero linearmente dipendenti, avremmo

$$0 = v^\top \cdot \Omega_n \cdot (\Omega_n \cdot \bar{v}) = -v^\top \cdot \bar{v} = -\|v\|^2$$

perché Ω_n è antisimmetrica. Infine, se $A \cdot v = \lambda \cdot v$ ed $A \cdot \Omega_n = \Omega_n \cdot \bar{A}$, otteniamo

$$A \cdot (\Omega_n \cdot \bar{v}) = \Omega_n \cdot \overline{A \cdot v} = \Omega_n \cdot \overline{\lambda \cdot v} = \bar{\lambda} (\Omega_n \cdot \bar{v}). \quad \square$$

32.2.2. Autovalori ed autovettori di matrici di quaternioni. Decomponiamo la matrice quaternionica $Z \in \mathbb{H}(n)$ nella somma $Z = X + j \cdot Y$, con $X, Y \in \mathbb{C}(n)$. Se $v = (u, w)^\top$, con $u, w \in \mathbb{C}^n$ è un autovettore di $\Phi_{n,n}(Z)$ relativo ad un suo autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$, allora, posto $\mathfrak{v} = u + j \cdot w$, è

$$\begin{cases} X \cdot u - \bar{Y} \cdot w = \lambda \cdot u, \\ Y \cdot u + \bar{X} \cdot w = \lambda \cdot w \end{cases} \iff Z \cdot \mathfrak{v} = \mathfrak{v} \cdot \lambda.$$

Se $Z \in \mathbb{H}(n)$, la matrice complessa $\Phi_{n,n}(Z)$ ad essa associata ha autovalori ed autovettori complessi.

Sarebbe naturale definire un autovalore λ in \mathbb{H} ed un suo relativo autovettore $\mathfrak{v} \in \mathbb{H}^n$ per una matrice di quaternioni $Z \in \mathbb{H}(n)$ utilizzando l'equazione

$$(32.9) \quad Z \cdot \mathfrak{v} = \mathfrak{v} \cdot \lambda.$$

Osserviamo che, se a è un qualsiasi quaternione di modulo 1, risulta

$$Z \cdot (v \cdot a) = (v \cdot a) \cdot (\bar{a} \cdot \lambda \cdot a)$$

e quindi $\bar{a} \cdot \lambda \cdot a$ sarebbe ancora un “autovalore”, con “autovettore” $v \cdot a$. I quaternioni di modulo uno formano un gruppo di Lie $S^3 = \{\|a\|=1\} \subset \mathbb{H}$ isomorfo ad $SU(2)$ e l’azione

$$(*) \quad S^3 \times \mathbb{H} \ni (a, \lambda) \rightarrow \bar{a} \cdot \lambda \cdot a \in \mathbb{H}$$

è l’identità sui quaternioni reali e definisce un’applicazione in sé dello spazio vettoriale reale V dei quaternioni immaginari. Poiché la $a \rightarrow \rho_a$, con $\rho_a(v) = a \cdot v \cdot \bar{a}$ è un omomorfismo surgettivo di S^3 su $SO(3)$, l’orbita di un quaternione λ rispetto all’azione $(*)$ di S^3 è completamente descritta da

- la parte reale di λ ,
- il modulo della parte immaginaria di λ .

È perciò naturale, nel caso delle matrici di quaternioni, utilizzare una nozione più restrittiva della nozione di autovalore ed autovettore.

DEFINIZIONE 32.2.9. Sia Z una matrice di $\mathbb{H}(n)$. Chiamiamo *valore proprio* di Z un numero complesso λ , con parte immaginaria non negativa, per cui esista un vettore non nullo (autovettore) v in \mathbb{H}^n per cui valga (32.9).

Si verifica facilmente che i valori propri di una Z in $\mathbb{H}(n)$ sono autovalori della corrispondente $\Phi_{n,n}(Z)$ in $\mathbb{C}(2n)$ e che all’autovettore v in \mathbb{H}^n corrisponde l’autovettore $\phi_n(v)$ in \mathbb{C}^{2n} . L’esistenza e unicità dei valori propri di una matrice quaternionica si può esprimere con la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 32.2.10 (triangolarizzazione). *Data una matrice $Z \in \mathbb{H}(n)$ sono univocamente determinati numeri complessi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, con $Im(\lambda_i) \geq 0$ per $1 \leq i \leq n$, tali che, per una matrice invertibile $a \in \mathbb{H}(n)$, con $a^* \cdot a = I_n$, sia*

$$(32.10) \quad a^{-1} \cdot Z \cdot a = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\text{triangolare superiore}).$$

DIMOSTRAZIONE. Costruiamo per ricorrenza una base v_1, \dots, v_n di \mathbb{H}^n , come spazio vettoriale a destra, e numeri complessi con parte immaginaria non negativa $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che per ogni intero positivo p risulti

$$(*) \quad v_h^* \cdot v_p = \delta_{h,p}, \text{ per } 1 \leq h \leq p, \text{ ed } A \cdot v_p - v_p \cdot \lambda_p \in \langle v_1, \dots, v_{p-1} \rangle_{\mathbb{H}}$$

(ove $\langle v_1, \dots, v_{p-1} \rangle_{\mathbb{H}}$ è il sottospazio vettoriale a destra generato da v_1, \dots, v_{p-1}).

Sia $p \geq 1$ e supponiamo di aver già ottenuto i v_h e λ_h per $h < p$. Indichiamo con E il sottospazio vettoriale a destra generato dai v_h con $h < p$ (abbiamo $E = \{0\}$ se $p = 1$). Allora $E^\perp = \{v \in \mathbb{H}^n \mid v_h^* \cdot v = 0, \forall h < p\}$ è un sottospazio vettoriale a destra, complementare di E in \mathbb{H}^n . Definiamo un endomorfismo \mathbb{H} -lineare a destra f su E^\perp ponendo $f(w) = w' \in E^\perp$ se $Z \cdot w - w' \in E$. Fissata una base di E^\perp , possiamo rappresentare f come moltiplicazione righe per colonne di una matrice di $\mathbb{H}(n-p)$ per vettori di \mathbb{H}^{n-p} . Per la discussione precedente l’enunciato, possiamo trovare $v_p \in E^\perp$, che possiamo

normalizzare in modo che $v_p^* \cdot v_p = 1$, e $\lambda_p \in \mathbb{C}$, con parte immaginaria non negativa, tali che $f(v_p) = v_p \cdot \lambda_p$. Questa relazione è proprio la (*). Da queste osservazioni segue l'esistenza della triangolarizzazione di Z rispetto ad una base ortonormale. L'unicità segue dal fatto che i λ_i ed i loro coniugati $\bar{\lambda}_i$ sono tutti e soli gli autovalori di $\Phi_{n,n}(Z)$. \square

32.3. Gruppo lineare quaternionico

È conveniente nel seguito distinguere tra gruppi ed algebre di Lie di matrici di quaternioni dalle loro rappresentazioni come gruppi od algebre di matrici a coefficienti complessi mediante le $\Phi_{n,n}$.

Abbiamo osservato che per una matrice Z di $\mathbb{H}(n)$ sono invarianti per similitudine i moduli e le parti reali dei suoi valori propri. In particolare ha significato definire il *modulo del determinante* di Z come il prodotto dei moduli dei suoi valori propri e la *parte reale della traccia* di Z come la parte reale della loro somma. Questa coincide con la parte reale della somma dei coefficienti della diagonale principale di Z . Modulo del determinante e parte reale della traccia sono invarianti per similitudine.

DEFINIZIONE 32.3.1. Per ogni intero positivo n definiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{GL}_n(\mathbb{H}) &= \{\mathbf{a} \in \mathbb{H}(n) \mid |\det(\mathbf{a})| \neq 0\} && \text{(GRUPPO LINEARE QUATERNIONICO),} \\ \mathbf{SL}_n(\mathbb{H}) &= \{\mathbf{a} \in \mathbb{H}(n) \mid |\det(\mathbf{a})| = 1\} && \text{(GRUPPO LINEARE SPECIALE QUATERNIONICO),} \\ \mathfrak{gl}_n(\mathbb{H}) &= \mathbb{H}(n) && \text{(ALGEBRA DI LIE LINEARE QUATERNIONICA),} \\ \mathfrak{sl}_n(\mathbb{H}) &= \{Z \in \mathbb{H}(n) \mid \Re(\text{trac}(Z)) = 0\} && \text{(ALGEBRA DI LIE LINEARE SPECIALE} \\ &&& \text{QUATERNIONICA).} \end{aligned}$$

ESEMPIO 32.3.2. $\mathbf{GL}_1(\mathbb{H})$ è il gruppo moltiplicativo dei quaternioni non nulli ed $\mathbf{SL}_1(\mathbb{H}) \simeq \mathbf{S}^3$ il sottogruppo di quelli di modulo 1. Le rispettive algebre di Lie $\mathfrak{gl}_1(\mathbb{H})$ ed $\mathfrak{sl}_1(\mathbb{H})$ consistono, rispettivamente, di tutti i quaternioni e dei quaternioni puramente immaginari.

Il commutatore $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$ di due quaternioni a, b è un quaternione puramente immaginario. In generale, la somma dei termini della diagonale principale del commutatore $[Z_1, Z_2]$ di due matrici Z_1, Z_2 di $\mathbb{H}(n)$ è un quaternione puramente immaginario. Si può verificare che

$$[\mathfrak{gl}_n(\mathbb{H}), \mathfrak{gl}_n(\mathbb{H})] = [\mathfrak{sl}_n(\mathbb{H}), \mathfrak{sl}_n(\mathbb{H})] = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{H}),$$

ma le matrici di quaternioni con *traccia nulla* non formano un'algebra di Lie (se $n > 1$). Ad esempio, $[\text{diag}(i, -i), \text{diag}(j, -j)] = 2\text{diag}(k, k)$.

Il gruppo e l'algebra lineari quaternionici non sono semplici, ma riduttivi ed hanno un centro di dimensione uno.

PROPOSIZIONE 32.3.3. È $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H}) = \mathbb{R}_+^* \ltimes \mathbf{SL}_n(\mathbb{H})$ e $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{H}) = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}_n(\mathbb{H})$. \square

Questi gruppi ed algebre di matrici quaternioniche si possono rappresentare come gruppi ed algebre (reali) di matrici complesse. Ricordiamo la notazione

$$\Omega_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Definiamo allora i gruppi ed algebre di Lie reali di matrici complesse

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^*(2n) &= \{\mathbf{a} \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \mid \mathbf{a} \cdot \Omega_n = \Omega_n \cdot \bar{\mathbf{a}}\} && \text{(GRUPPO LINEARE DI TIPO QUATERNIONICO),} \\ \mathbf{SU}^*(2n) &= \{\mathbf{a} \in \mathbf{U}^*(2n) \mid \det(\mathbf{a})=1\} && \text{(GRUPPO LINEARE SPECIALE DI TIPO QUATERNIONICO),} \\ \mathfrak{u}^*(2n) &= \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C}) \mid X \cdot \Omega_n = \Omega_n \cdot \bar{X}\} && \text{(ALGEBRA DI LIE LINEARE DI TIPO QUATERNIONICO),} \\ \mathfrak{su}^*(2n) &= \{X \in \mathfrak{u}^*(2n) \mid \text{trac}(X) = 0\} && \text{(ALGEBRA DI LIE LINEARE SPECIALE DI TIPO QUATERNIONICO).} \end{aligned}$$

La $\Phi_{n,n}$ definisce isomorfismi di gruppi ed algebre di Lie

$$(32.11) \quad \begin{aligned} \mathbf{GL}_n(\mathbb{H}) &\simeq \mathbf{U}^*(2n), & \mathbf{SL}_n(\mathbb{H}) &\simeq \mathbf{SU}^*(2n), \\ \mathfrak{gl}_n(\mathbb{H}) &\simeq \mathfrak{u}^*(2n), & \mathfrak{sl}_n(\mathbb{H}) &\simeq \mathfrak{su}^*(2n). \end{aligned}$$

32.4. Gruppi unitari quaternionici

Le forme reali non split dei gruppi simplettici complessi si legano naturalmente a gruppi di matrici quaternioniche. In particolare, i sottogruppi compatti massimali di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$ ed $\mathbf{SL}_n(\mathbb{H})$ sono isomorfi al gruppo simplettico compatto $\mathbf{Sp}(n)$.

DEFINIZIONE 32.4.1. Definiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{SU}_{\mathbb{H}}(n) &= \{\mathbf{a} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{H}) \mid \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a} = \mathbf{I}_n\}, && \text{(gruppo unitario quaternionico),} \\ \mathfrak{su}_{\mathbb{H}}(n) &= \{Z \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{H}) \mid Z^* + Z = 0\}, && \text{(algebra unitaria quaternionica),} \\ \mathbf{Sp}(n) &= \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n), && \text{(gruppo simplettico compatto),} \\ \mathfrak{sp}(n) &= \mathfrak{su}^*(2n) \cap \mathfrak{u}(2n), && \text{(algebra simplettica compatta).} \end{aligned}$$

Poiché le matrici di $\mathbf{SU}^*(2n)$ hanno determinante uno e quelle di $\mathfrak{su}^*(2n)$ traccia nulla, abbiamo

$$(32.12) \quad \mathbf{Sp}(n) \subset \mathbf{SU}(2n), \quad \mathfrak{sp}(n) \subset \mathfrak{su}(2n).$$

A volte si usa l'aggettivo "iperunitario" come sinonimo di "unitario quaternionico".

L'applicazione $\Phi_{n,n}$ definisce un isomorfismo di gruppi tra $\mathbf{SU}_{\mathbb{H}}(n)$ ed $\mathbf{Sp}(n)$ e di algebre di Lie tra $\mathfrak{su}_{\mathbb{H}}(n)$ ed $\mathfrak{sp}(n)$.

OSSERVAZIONE 32.4.2. Il nome *simplettico* per le immagini mediante $\Phi_{n,n}$ del gruppo e dell'algebra unitari quaternionici deriva dai fatti seguenti.

- Se $\mathbf{a} \in \mathbf{U}(2n)$, allora $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}^{-1}$ e quindi $\bar{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}^T)^{-1}$. Una matrice \mathbf{a} di $\mathbf{U}(2n)$ appartiene quindi ad $\mathbf{SU}^*(2n)$ se e soltanto se

$$\Omega_n \cdot \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \Omega_n = (\mathbf{a}^T)^{-1} \cdot \Omega_n \iff \mathbf{a}^T \cdot \Omega_n \cdot \mathbf{a} = \Omega_n.$$

Questo ci dà la caratterizzazione

$$(32.13) \quad \mathbf{Sp}(n) = \mathbf{U}(2n) \cap \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) = \mathbf{SU}(2n) \cap \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$$

del gruppo simplettico compatto come sottogruppo del gruppo simplettico complesso.

- Se $X \in \mathfrak{u}(2n)$, allora $X^* + X = 0$, cioè $X^\top + \bar{X} = 0$ e quindi

$$\Omega_n \cdot X = \bar{X} \cdot \Omega_n = -X^\top \cdot \Omega_n$$

ci dice che

$$(32.14) \quad \mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{u}(2n) \cap \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2n) \cap \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$$

è una sottoalgebra reale di $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$.

DEFINIZIONE 32.4.3. Chiamiamo *hermitiane quaternioniche* od *iperhermitiane* le matrici $Z \in \mathbb{H}(n)$ tali che $Z^* = Z$ ed indichiamo con $\mathfrak{p}_n(\mathbb{H})$ lo spazio vettoriale reale delle matrici hermitiane quaternioniche $n \times n$.

PROPOSIZIONE 32.4.4. Una matrice di $\mathbb{H}(n)$ è hermitiana quaternionica se e soltanto se è simile e congiunta, rispetto ad $\mathbf{SU}_{\mathbb{H}}(n)$, ad una matrice diagonale reale.

DIMOSTRAZIONE. La condizione è senz'altro sufficiente. Infatti, se $\mathfrak{a} \in \mathbf{SU}_{\mathbb{H}}(n)$, allora $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}^{-1}$ e, se $Z = \mathfrak{a}^* \cdot D \cdot \mathfrak{a}$ con $D = \text{diag}(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}(n)$, allora $Z^* = (\mathfrak{a}^* \cdot D \cdot \mathfrak{a})^* = \mathfrak{a} \cdot D^* \cdot \mathfrak{a}^* = Z$ perché $D^* = D$.

Per dimostrare il viceversa, utilizziamo la formula

$$(32.15) \quad \overline{\mathfrak{v}_1^* \cdot Z \cdot \mathfrak{v}_2} = \mathfrak{v}_2^* \cdot Z^* \cdot \mathfrak{v}_1 = (Z \cdot \mathfrak{v}_2)^* \cdot \mathfrak{v}_1, \quad \forall \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2 \in \mathbb{H}^n, \quad \forall Z \in \mathbb{H}(n)$$

e la Proposizione 32.2.10. Per il teorema di triangolarizzazione, possiamo trovare quaternioni $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, con $\lambda_h = \mu_h + \nu_h \cdot j$, e $\mu_h, \nu_h \in \mathbb{R}$, $\nu_h \geq 0$, ed una base ortonormale $\mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_n$ di \mathbb{H}^n tale che $Z \cdot \mathfrak{v}_h - \mathfrak{v}_h \cdot \lambda_h \in \langle \mathfrak{v}_k \mid k < h \rangle_{\mathbb{H}}$ per $1 \leq h \leq n$.

Posto $Z \cdot \mathfrak{v}_h = \mathfrak{v}_h \cdot \lambda_h + \sum_{k < h} \mathfrak{v}_k \cdot a_{k,h}$ con $a_{k,h} \in \mathbb{H}$, abbiamo

$$\begin{aligned} a_{k,h} &= \mathfrak{v}_k^* \cdot Z \cdot \mathfrak{v}_h = (Z \cdot \mathfrak{v}_h)^* \cdot \mathfrak{v}_k = \left(\mathfrak{v}_k \cdot \lambda_k + \sum_{r < k} \mathfrak{v}_r \cdot a_{r,k} \right)^* \cdot \mathfrak{v}_h = 0, \\ \Rightarrow \bar{\lambda}_h &= \overline{\mathfrak{v}_h^* \cdot Z \cdot \mathfrak{v}_h} = \mathfrak{v}_h^* \cdot Z \cdot \mathfrak{v}_h = \lambda_h. \end{aligned}$$

Gli *autovalori* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono quindi reali ed i vettori $\mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_n$ formano le colonne di una matrice \mathfrak{a} di $\mathbf{SU}_{\mathbb{H}}(n)$ per cui

$$(32.16) \quad \mathfrak{a}^{-1} \cdot Z \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^* \cdot Z \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^* \cdot \mathfrak{a} \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

La dimostrazione è completa. \square

Essendo reali, i valori propri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di Z nella (32.16) sono univocamente determinati ed in particolare lo sono i loro segni.

DEFINIZIONE 32.4.5. La coppia (p, q) in cui il primo numero p è il numero di valori propri positivi e q di quelli negativi si dice la *segnatura* o *indice d'inerzia* e p l'indice d'inerzia positivo, q quello negativo di Z .

PROPOSIZIONE 32.4.6. Due matrici di $\mathfrak{p}_n(\mathbb{H})$ sono congiunte per $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$ se e soltanto se hanno la stessa segnatura.

DIMOSTRAZIONE. Data una matrice \mathbb{H} -hermitiana $Z \in \mathfrak{p}_n(\mathbb{H})$, per la Proposizione 32.4.4 possiamo trovare $\mathfrak{a} \in \mathbf{SU}_{\mathbb{H}}(n)$ tale che $\mathfrak{a}^* \cdot Z \cdot \mathfrak{a} = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ con coefficienti $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ e $k_1 \geq \dots \geq k_n$.

Se $\mu = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ è una matrice diagonale reale con $\mu_i^2 = |k_i|^{-1}$ per tutti i valori propri non nulli k_i di Z e μ_i arbitrario se $k_i = 0$, allora $\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mu \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$ e $\mathbf{b}^* \cdot Z \cdot \mathbf{b}$ è una matrice diagonale in cui i primi p elementi della diagonale principale sono uguali ad 1, gli ultimi q uguali a -1 ed i rimanenti a zero. Da questo segue la tesi. \square

OSSERVAZIONE 32.4.7. In particolare, tutte le matrici hermitiane quaternioniche con valori propri positivi sono congiunte all'identità e da questo ricaviamo che tutti i sottogruppi compatti massimali di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$ ed $\mathbf{SL}_n(\mathbb{H})$ sono isomorfi ad $\mathbf{SU}_{\mathbb{H}}(n)$.

Le matrici hermitiane quaternioniche di ordine n formano uno spazio vettoriale reale di dimensione $2n^2 - n$ e quelle con traccia nulla un suo sottospazio di dimensione $n^2 - n - 1$. Per la decomposizione di Cartan, abbiamo allora

PROPOSIZIONE 32.4.8. *Il gruppo di Lie $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$ è diffeomorfo al prodotto cartesiano $\mathbf{Sp}(n) \times \mathbb{R}^{2n^2 - n}$ ed $\mathbf{SL}_n(\mathbb{H})$ al prodotto cartesiano $\mathbf{Sp}(n) \times \mathbb{R}^{2n^2 - n - 1}$.* \square

Analogamente ai casi reali e complessi, possiamo definire gruppi di Lie di matrici quaternioniche caratterizzati dal fatto di lasciare invariante una matrice hermitiana quaternionica non degenera. Per la Proposizione 32.4.6 essi sono caratterizzati, a meno di coniugio, dalla sua segnatura.

DEFINIZIONE 32.4.9. Con $\mathbf{I}_{p,q} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & \\ & \mathbf{I}_q \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_{p,q} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{p,q} & \\ & \mathbf{I}_{p,q} \end{pmatrix}$, definiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{SU}_{\mathbb{H}}(p, q) &= \{ \mathbf{a} \in \mathbf{GL}_{p+q}(\mathbb{H}) \mid \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{I}_{p,q} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{I}_{p,q} \}, & (\text{GRUPPO IPERUNITARIO DI SEGNATURA } (p, q)), \\ \mathfrak{su}_{\mathbb{H}}(p, q) &= \{ Z \in \mathfrak{gl}_{p+q}(\mathbb{H}) \mid Z^* \cdot \mathbf{I}_{p,q} + \mathbf{I}_{p,q} \cdot Z = 0 \}, & (\text{ALGEBRA IPERUNITARIA DI SEGNATURA } (p, q)), \\ \mathbf{Sp}(p, q) &= \{ \mathbf{a} \in \mathbf{SU}^*(2n) \mid \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{K}_{p,q} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{K}_{p,q} \}, & (\text{GRUPPO SIMPLETTICO DI SEGNATURA } (p, q)), \\ \mathfrak{sp}(p, q) &= \{ X \in \mathfrak{su}^*(2n) \mid X^* \cdot \mathbf{K}_{p,q} + \mathbf{K}_{p,q} \cdot X = 0 \}, & (\text{ALGEBRA SIMPLETTICA DI SEGNATURA } (p, q)). \end{aligned}$$

La $\Phi_{n,n}$ definisce isomorfismi tra i gruppi di Lie $\mathbf{SU}_{\mathbb{H}}(p, q)$ ed $\mathbf{Sp}(p, q)$ e tra le algebre di Lie $\mathfrak{su}_{\mathbb{H}}(p, q)$ ed $\mathfrak{sp}(p, q)$.

Sia $p+q=n$. Le matrici $\mathbf{K}_{p,q}$ sono reali, simmetriche, con $\mathbb{K}_{p,q}^2 = \mathbf{I}_{2n}$ e commutano con Ω_n . In particolare, $\Omega'_{p,q} = \Omega_n \cdot \mathbf{K}_{p,q} = \mathbf{K}_{p,q} \cdot \Omega_n$ è una matrice reale antisimmetrica non degenera. Se $\mathbf{a} \in \mathbf{Sp}(p, q)$, allora

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} &= \mathbf{K}_{p,q} \cdot (\mathbf{a}^\top)^{-1} \cdot \mathbf{K}_{p,q}, \quad \Omega_n \cdot \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a} \cdot \Omega_n \Rightarrow \Omega_n \cdot \mathbf{K}_{p,q} \cdot (\mathbf{a}^\top)^{-1} \cdot \mathbf{K}_{p,q} = \mathbf{a} \cdot \Omega_n \\ &\Leftrightarrow \mathbf{a}^\top \cdot \Omega'_{p,q} \cdot \mathbf{a} = \Omega'_{p,q}. \end{aligned}$$

Poiché $\mathbf{K}_{p,q}$ ed Ω_n commutano, il prodotto $(\mathbf{K}_{p,q} \cdot \Omega_n)$ è una matrice antisimmetrica non degenera $\Omega'_{p,q}$. Il gruppo delle matrici complesse \mathbf{a} di $\mathbb{C}(2n)$ che stabilizzano per congruenza la $\Omega'_{p,q}$ è isomorfo al gruppo simplettico $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ e questo ci permette di identificare $\mathbf{Sp}(p, q)$ ad un sottogruppo del gruppo simplettico complesso.

Per discutere la struttura topologica di $\mathbf{Sp}(p, q)$ è conveniente utilizzare l'isomorfismo $\mathbf{Sp}(p, q) \simeq \mathbf{G}$, con

$$\mathbf{G} = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{C}(2n) \mid \mathbf{a}^\top \cdot \begin{pmatrix} \Omega_p & 0 \\ 0 & \Omega_q \end{pmatrix} \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \Omega_p & 0 \\ 0 & \Omega_q \end{pmatrix}, \mathbf{a}^* \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{2p} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_{2q} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{2p} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_{2q} \end{pmatrix} \right\}$$

ed algebra di Lie

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{sp}(p), D \in \mathfrak{sp}(q), B = \begin{pmatrix} X & -\bar{Y} \\ Y & \bar{X} \end{pmatrix}, X, Y \in \mathbb{C}^{p \times q} \right\}$$

Dalla decomposizione di Cartan ricaviamo allora

PROPOSIZIONE 32.4.10. *Il gruppo di Lie $\mathbf{Sp}(p, q)$ ha sottogruppo compatto massimale diffeomorfo al prodotto cartesiano $\mathbf{Sp}(p) \times \mathbf{Sp}(q)$ ed è diffeomorfo al prodotto cartesiano $\mathbf{Sp}(p) \times \mathbf{Sp}(q) \times \mathbb{R}^{4pq}$.* \square

32.5. Gruppi ortogonali quaternionici

Il gruppo $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$ agisce per *congruenza hermitiana* sull'algebra delle matrici di $\mathfrak{su}_{\mathbb{H}}(n)$. Chiamiamo *ortogonali* gli stabilizzatori di matrici non degeneri. Motreremo che tutti questi sottogruppi sono isomorfi, perché coniugati in $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$.

PROPOSIZIONE 32.5.1. *Data una matrice $Z \in \mathfrak{su}_{\mathbb{H}}(n)$ risultano univocamente determinati numeri reali k_1, \dots, k_n , con $k_1 \geq \dots \geq k_n \geq 0$ tali che, per una matrice \mathbf{a} di $\mathbf{SU}_{\mathbb{H}}(n)$, risulti*

$$(32.17) \quad \mathbf{a}^{-1} \cdot Z \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^* \cdot Z \cdot \mathbf{a} = \text{diag}(k_1 \cdot j, \dots, k_n \cdot j).$$

Possiamo inoltre trovare una matrice $\mathbf{b} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$ tale che $\mathbf{b}^ \cdot Z \cdot \mathbf{b}$ sia diagonale con coefficienti uguali o a j o a 0 .*

DIMOSTRAZIONE. La Proposizione 32.2.10 si può riformulare dicendo che ogni matrice di $\mathbb{H}(n)$ è congruente per l'azione aggiunta di $\mathbf{SU}_{\mathbb{H}}(n)$ ad una matrice triangolare superiore. Possiamo inoltre scegliere i valori propri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sulla diagonale principale nella forma $\lambda_h = \mu_h + k_h \cdot j$ con $\mu_h, k_h \in \mathbb{R}$ e $k_h \geq 0$. Se $Z \in \mathfrak{su}_{\mathbb{H}}(n)$, $\mathbf{a} \in \mathbf{SU}_{\mathbb{H}}(n)$ ed $\mathbf{a}^* \cdot Z \cdot \mathbf{a}$ è triangolare superiore, da

$$(\mathbf{a}^* \cdot Z \cdot \mathbf{a})^* = -\mathbf{a}^* \cdot Z \cdot \mathbf{a},$$

poiché l'aggiunta quaternionica di una triangolare superiore è triangolare inferiore, segue che $\mathbf{a}^* \cdot Z \cdot \mathbf{a}$ è diagonale. Essendo una matrice di $\mathfrak{su}_{\mathbb{H}}(n)$, la $\mathbf{a}^* \cdot Z \cdot \mathbf{a}$ è della forma (32.17). Componendo \mathbf{a} con una permutazione dei vettori della base canonica, possiamo inoltre soddisfare la condizione che siano $k_1 \geq \dots \geq k_n \geq 0$. Otteniamo infine la \mathbf{b} moltiplicando a destra la \mathbf{a} per un'opportuna matrice diagonale reale invertibile. \square

In particolare, tutte le matrici non degeneri di $\mathfrak{su}_{\mathbb{H}}(n)$ sono hermitianamente congruenti rispetto a $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$ ed il gruppo delle matrici che fissano, per congruenza hermitiana, una qualsiasi matrice non degenera di $\mathfrak{su}_{\mathbb{H}}(n)$ è coniugato in $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$ a quello delle matrici che fissano

$$\mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} j & & \\ & \ddots & \\ & & j \end{pmatrix}.$$

DEFINIZIONE 32.5.2. Definiamo i seguenti gruppi ed algebre di Lie di matrici quaternioniche e complesse:

$$\begin{aligned}\mathbf{SO}(n, \mathbb{H}) &= \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{H}) \mid a^* \cdot J_n \cdot a = J_n\}, & (\text{GRUPPO ORTOGONALE QUATERNIONICO}), \\ \mathfrak{so}(n, \mathbb{H}) &= \{Z \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{H}) \mid Z^* \cdot J_n + J_n \cdot Z = 0\}, & (\text{ALGEBRA ORTOGONALE QUATERNIONICA}), \\ \mathbf{SO}^*(2n) &= \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{SO}(2n, \mathbb{C}), & (\text{GRUPPO IPERORTOGONALE}), \\ \mathfrak{so}^*(2n) &= \mathfrak{su}^*(2n) \cap \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}), & (\text{ALGEBRA IPERORTOGONALE}).\end{aligned}$$

Poiché $\Phi_{n,n}(J) = \Omega_n$, le matrici a di $\mathbf{SO}_{\mathbb{H}}(n)$ sono tutte e sole le matrici b di $\mathbf{U}^*(2n)$ che verificano

$$b^* \cdot \Omega_n \cdot b = \Omega_n,$$

da cui, essendo $b^* \cdot \Omega_n = \Omega_n \cdot b^T$, ricaviamo

$$\Omega_n \cdot b^T \cdot b = \Omega_n \Leftrightarrow b^T \cdot b = I_{2n}.$$

Questo dimostra che

PROPOSIZIONE 32.5.3. *La $\Phi_{n,n}$ stabilisce un isomorfismo di gruppi di Lie tra $\mathbf{SO}(n, \mathbb{H})$ ed $\mathbf{SO}^*(2n)$.*

Possiamo caratterizzare $\mathbf{SO}^*(2n)$ come il luogo dei punti fissi di $\mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$ rispetto all' involuzione

$$(32.18) \quad \mathbf{SO}(2n, \mathbb{C}) \ni a \longrightarrow -\Omega_n \cdot \bar{a} \cdot \Omega_n \in \mathbf{SO}(2n, \mathbb{C}).$$

Il gruppo $\mathbf{SO}^*(2n)$ è quindi una *forma reale* di $\mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$.

Poiché $i \cdot \Omega_n$ è una matrice hermitiana di segnatura (n, n) , la caratterizzazione $\mathbf{SO}^*(2n) = \{a \in \mathbf{SO}(2n, \mathbb{C}) \mid a^* \cdot \Omega_n \cdot a = \Omega_n\}$ ci mostra che $\mathbf{SO}^*(2n)$ è un sottogruppo di un gruppo speciale unitario di segnatura (n, n) .

In modo del tutto analogo si verifica che la $\Phi_{n,n}$ definisce un isomorfismo di algebre di Lie tra $\mathfrak{so}(n, \mathbb{H})$ ed $\mathfrak{so}^*(2n)$.

Gruppi classici compatti

Esamineremo in questo capitolo la struttura dei principali gruppi lineari compatti. Ricordiamo la loro definizione:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(n) &= \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid a^* a = I_n\} && \text{(gruppo unitario)} \\ \mathbf{SU}(n) &= \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}) && \text{(gruppo speciale unitario)} \\ \mathbf{O}(n) &= \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t a a = I_n\} && \text{(gruppo ortogonale)} \\ \mathbf{SO}(n) &= \mathbf{O}(n) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) && \text{(gruppo speciale ortogonale)} \\ \mathbf{Sp}(n) &= \{a \in \mathbf{U}(2n) \mid {}^t a j_n a = j_n\} && \left(\begin{array}{l} \text{gruppo simplettico compatto,} \\ \text{o unitario quaternionico, o iper-unitario} \end{array} \right) \end{aligned}$$

ove I_n è la matrice unità $n \times n$, $j_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$. Ricordiamo che vale il teorema:

TEOREMA 33.0.1. *Se \mathbf{G} è un gruppo lineare compatto e \mathfrak{g} la sua algebra di Lie, l'applicazione esponenziale $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{G}$ ha come immagine la componente connessa \mathbf{G}_e dell'identità di \mathbf{G} . \square*

33.1. Il gruppo unitario $\mathbf{U}(n)$

LEMMA 33.1.1. *Ogni matrice di $\mathbf{U}(n)$ è diagonalizzabile in una base ortonormale di \mathbb{C}^n . I suoi autovalori hanno tutti modulo uguale a 1.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $u \in \mathbf{U}(n)$. Poiché il campo \mathbb{C} è algebricamente chiuso, u ha almeno un autovalore $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, con autovettore ϵ_1 che possiamo prendere di norma unitaria: $\|\epsilon_1\| = 1$. Da $1 = \|\epsilon_1\|^2 = \|u(\epsilon_1)\|^2 = \|\lambda_1 \epsilon_1\|^2 = |\lambda_1|^2$ ricaviamo che $|\lambda_1| = 1$, cioè $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1^{-1}$. Se $v \in \epsilon_1^\perp$, allora

$$(u(v)|\epsilon_1) = \lambda_1^{-1}(u(v)|u(\epsilon_1)) = \lambda_1^{-1}(v|\epsilon_1) = 0.$$

Quindi $u(\epsilon_1^\perp) = \epsilon_1^\perp$ e la restrizione di u all'iperpiano ϵ_1^\perp è ancora un'applicazione unitaria su uno spazio vettoriale complesso di dimensione $n - 1$. La tesi segue per ricorrenza sulla dimensione n . \square

TEOREMA 33.1.2. *Il gruppo $\mathbf{U}(n)$ è un sottogruppo chiuso, compatto e connesso per archi di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, con algebra di Lie*

$$(33.1) \quad \mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\}$$

di dimensione reale n^2 . L'applicazione esponenziale $\mathfrak{u}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{U}(n)$ è surgettiva.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione $\phi : \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \ni x \rightarrow x^*x \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ è continua e quindi $U(n) = \phi^{-1}(e)$ è un chiuso, contenuto nel compatto $\{x \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \|x\| = 1\}$ e perciò compatto.

È $[\exp(X)]^* = \exp(X^*)$ per ogni $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Fissata $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, la

$$\alpha_X : \mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tX^*) \exp(tX) = [\exp(tX)]^* \exp(tX) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

è differenziabile e

$$\alpha'_X(t) = \exp(tX^*) (X^* + X) \exp(tX) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Da questa si verifica facilmente che $X \in \mathfrak{u}(n)$ se e soltanto se $X + X^* = 0$.

Verifichiamo ora che $\exp : \mathfrak{u}(n) \rightarrow \mathbf{U}(n)$ è surgettiva. Fissiamo $u \in \mathbf{U}(n)$. Per il Lemma 33.1.1, possiamo trovare una base ortonormale di \mathbb{C}^n , e quindi una matrice $a \in \mathbf{U}(n)$, tale che

$$a u a^{-1} = a u a^* = \text{diag}(\exp(i\theta_1), \dots, \exp(i\theta_n)).$$

Allora $Y = \text{diag}(i\theta_1, \dots, i\theta_n) \in \mathfrak{u}(n)$ ed

$$\exp(a^* Y a) = a^* \exp(Y) a = a^* \text{diag}(\exp(i\theta_1), \dots, \exp(i\theta_n)) a = u.$$

Essendo l'immagine di $\mathfrak{u}(n)$ mediante l'applicazione esponenziale, $\mathbf{U}(n)$ è connesso per archi. \square

33.2. Il gruppo speciale unitario $\mathbf{SU}(n)$

L'applicazione $\det : \mathbf{U}(n) \rightarrow S^1$ è un omomorfismo di classe \mathcal{C}^ω di $\mathbf{U}(n)$ nel gruppo moltiplicativo S^1 . Il suo nucleo $\mathbf{SU}(n)$ è un sottogruppo chiuso normale di $\mathbf{U}(n)$.

TEOREMA 33.2.1. *L'algebra di Lie di $\mathbf{SU}(n)$ è la sottoalgebra $\mathfrak{su}(n)$ delle matrici di $\mathfrak{u}(n)$ che hanno traccia nulla:*

$$(33.2) \quad \mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \text{trac}(X) = 0\}.$$

L'applicazione esponenziale $\mathfrak{su}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{SU}(n)$ è surgettiva. $\mathbf{SU}(n)$ è un gruppo di Lie compatto e connesso per archi, di dimensione reale $(n^2 - 1)$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\det(\exp(X)) = e^{\text{trac}(X)}$, se $X \in \mathfrak{su}(n)$, da $\exp(tX) \in \mathbf{SU}(n)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ segue che

$$\begin{cases} X + X^* = 0 \\ \text{trac}(tX) = t \cdot \text{trac}(X) = 2k\pi i \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{con } k = k(t) \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La seconda relazione implica che X ha traccia nulla.

Fissata $u \in \mathbf{SU}(n)$, sia $a \in \mathbf{U}(n)$ tale che

$$a u a^{-1} = a u a^* = \text{diag}(\exp(i\theta_1), \dots, \exp(i\theta_n)), \quad \text{con } \theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}.$$

La condizione $\det(u) = 1$ dà allora

$$\exp(i(\theta_1 + \dots + \theta_n)) = 1$$

e quindi

$$\exp(-i\theta_n) = \exp(i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1})).$$

Posto

$$Y = \text{diag}(i\theta_1, \dots, i\theta_{n-1}, -i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1})) \in \mathfrak{su}(n),$$

è $X = aYa^* = aYa^{-1} \in \mathfrak{su}(n)$ ed $\exp(X) = u$. L'applicazione $X \rightarrow \text{trac}(X)$ è lineare e non identicamente nulla su $\mathfrak{u}(n)$ e quindi $\mathfrak{su}(n)$ ed $\mathbf{SU}(n)$ hanno dimensione (n^2-1) . Il gruppo $\mathbf{SU}(n)$ è compatto perché è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{U}(n)$ e connesso per archi perché immagine continua, mediante l'applicazione esponenziale, della propria algebra di Lie $\mathfrak{su}(n)$. \square

PROPOSIZIONE 33.2.2. *Il gruppo unitario $\mathbf{U}(n)$ è \mathcal{C}^ω -diffeomorfo al prodotto $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{SU}(n)$.*

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione

$$\mathbf{S}^1 \times \mathbf{SU}(n) \ni (\lambda, x) \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix} \cdot x \in \mathbf{U}(n)$$

è di classe \mathcal{C}^ω ed ha inversa

$$\mathbf{U}(n) \ni x \longrightarrow \left(\det(x), \begin{pmatrix} [\det(x)]^{-1} & \\ & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix} \cdot x \right) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{SU}(n),$$

anch'essa di classe \mathcal{C}^ω . \square

33.3. I gruppi ortogonali $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$

Il gruppo $\mathbf{O}(n)$ (*gruppo ortogonale di ordine n*) è il gruppo delle isometrie lineari ed $\mathbf{SO}(n)$ (*gruppo speciale ortogonale o gruppo delle rotazioni di ordine n*) quello delle isometrie lineari che preservano l'orientazione dello spazio euclideo \mathbb{R}^n . $\mathbf{SO}(n)$ è un sottogruppo normale di indice 2 di $\mathbf{O}(n)$. Poiché $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, anche $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$ sono sottogruppi chiusi di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Essendo

$$\mathbf{O}(n) = \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{ed} \quad \mathbf{SO}(n) = \mathbf{SU}(n) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}),$$

$\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$ sono compatti perché sottogruppi chiusi del gruppo compatto $\mathbf{U}(n)$.

TEOREMA 33.3.1. *$\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$ hanno la stessa algebra di Lie*

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia X un elemento dell'algebra di Lie $\mathfrak{o}(n)$ di $\mathbf{O}(n)$. Poiché $\exp(tX) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{U}(n)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, il determinante di $\exp(tX)$ sarà reale e di modulo 1. Poiché il determinante dell'esponenziale di una matrice reale è un numero reale positivo, è allora $\det(\exp(tX)) = 1$ e quindi

$$\exp(tX) \in \mathbf{SO}(n) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

dimostra che $\mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{SO}(n)$ hanno la stessa algebra di Lie. Poiché

$$\frac{d}{dt} \{[\exp(tX)]^T \exp(tX)\} = \exp(tX^T)(X^T + X)\exp(tX) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

la condizione ${}^tX + X = 0$ è necessaria e sufficiente affinché $X \in \mathfrak{o}(n)$. \square

TEOREMA 33.3.2. *L'applicazione esponenziale $\mathfrak{o}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{SO}(n)$ è surgettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni rotazione $a \in \mathbf{SO}(n)$, possiamo trovare una decomposizione di \mathbb{R}^n in somma diretta di sottospazi a -invarianti e due a due ortogonali

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$$

tale che ogni sottospazio V_j abbia dimensione minore o uguale a 2 e la restrizione di a ai sottospazi V_j della decomposizione che hanno dimensione 1 sia l'identità.

Su ciascuno dei sottospazi V_j di dimensione 2 la a definisce una rotazione dello spazio Euclideo \mathbb{R}^2 . Sarà quindi sufficiente dimostrare che

$$\mathfrak{o}(2) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{SO}(2)$$

è surgettiva. Basta dunque osservare che

$$\mathfrak{o}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} & -\theta \\ \theta & \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathbf{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

e che

$$\exp \begin{pmatrix} & -\theta \\ \theta & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La dimostrazione è completa. \square

TEOREMA 33.3.3. $\mathbf{SO}(n)$ è un gruppo compatto e connesso per archi di dimensione $n(n-1)/2$. Il gruppo $\mathbf{O}(n)$ è unione di due componenti connesse, omeomorfe ad $\mathbf{SO}(n)$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già osservato che $\mathbf{SO}(n)$ ed $\mathbf{O}(n)$ sono compatti, in quanto sottogruppi chiusi di $\mathbf{U}(n)$. Inoltre $\mathbf{SO}(n)$ è connesso per archi perché immagine mediante l'esponenziale della sua algebra di Lie $\mathfrak{o}(2)$. Questa ha dimensione $n(n-1)/2$, in quanto $\mathfrak{o}(n)$ consiste delle matrici reali antisimmetriche, e queste si parametrizzano con i coefficienti che sono al di sopra della diagonale principale.

In quanto immagine della sua algebra di Lie mediante l'esponenziale, $\mathbf{SO}(n)$ è la componente dell'identità di $\mathbf{O}(n)$. La moltiplicazione a sinistra per la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & \\ & I_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{O}(n)$$

è un omeomorfismo di $\mathbf{SO}(n)$ su $\mathbf{O}(n) \setminus \mathbf{SO}(n)$ e quindi $\mathbf{O}(n)$ ha esattamente due componenti connesse, omeomorfe ad $\mathbf{SO}(n)$. \square

Osserviamo che $\mathbf{SO}(1)$ è un punto, mentre l'applicazione

$$\mathbf{SO}(2) \ni x \rightarrow x(e_1) \in S^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\|^2 = 1\}$$

definisce un omeomorfismo di $\mathbf{SO}(2)$ su S^1 . Abbiamo studiato $\mathbf{SO}(3)$ ed $\mathbf{SO}(4)$ e le loro relazioni con $\mathbf{SU}(2)$ ed $\mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2)$ in §32.1.

OSSERVAZIONE 33.3.4 (Angoli di Eulero). Diamo qui una descrizione dell'omomorfismo surgettivo

$$\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$$

descritto in §32.1, a partire dalla rappresentazione di $\mathbf{SO}(3)$ mediante gli *angoli di Eulero*, utilizzati in meccanica per descrivere il movimento delle trottole. Consideriamo gli omomorfismi

$$\tau, \sigma : S^1 \rightarrow \mathbf{SO}(3)$$

definiti da

$$\tau(e^{i\phi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \sigma(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(rotazioni intorno all'asse x e rotazioni intorno all'asse y).

LEMMA 33.3.5. *L'applicazione*

$$\alpha : S^1 \times S^1 \times S^1 \ni (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) \rightarrow \tau(e^{i\theta_1}) \circ \sigma(e^{i\theta_2}) \circ \tau(e^{i\theta_3}) \in \mathbf{SO}(3)$$

è surgettiva.

DIMOSTRAZIONE. Sia e_1, e_2, e_3 la base canonica di \mathbb{R}^3 . Una $x \in \mathbf{SO}(3)$ è completamente determinata dall'immagine dei vettori e_1, e_2 . Poniamo $\epsilon_j = x(e_j)$ per $j = 1, 2$. Poiché $|\epsilon_1| = 1$, abbiamo per opportuni $\phi, \psi \in \mathbb{R}$:

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \phi \sin \psi \\ \cos \phi \sin \psi \end{pmatrix}$$

(coordinate polari in \mathbb{R}^3). Una base ortogonale di ϵ_1^\perp è data dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \sin \phi \cos \psi \\ \cos \phi \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Quindi $\epsilon_2 = v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta$ per un opportuno $\theta \in \mathbb{R}$. Chiaramente

$$x = \alpha(e^{-i\phi}, e^{i\psi}, e^{i\theta}). \quad \square$$

OSSERVAZIONE 33.3.6. In generale gli angoli di Eulero si riferiscono a una scelta di ϕ, ψ, θ con $0 \leq \psi < \pi$ e $0 \leq \phi, \theta < 2\pi$.

Definiamo ora

$$\hat{\tau}, \hat{\sigma} : S^1 \rightarrow \mathbf{SU}(2)$$

mediante

$$\hat{\tau}(e^{i\phi}) = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Sia

$$\hat{\alpha} : S^1 \times S^1 \times S^1 \ni (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) \rightarrow \hat{\tau}(e^{i\theta_1}) \circ \hat{\sigma}(e^{i\theta_2}) \circ \hat{\tau}(e^{i\theta_3}) \in \mathbf{SU}(2).$$

Otteniamo allora il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 \times S^1 & \xrightarrow{=} & S^1 \times S^1 \times S^1 \\ \hat{\alpha} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \mathbf{SU}(2) & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{SO}(3). \end{array}$$

33.4. Il gruppo unitario simplettico $\mathbf{Sp}(n)$

Abbiamo definito $\mathbf{Sp}(n)$ come il gruppo delle matrici complesse unitarie a di ordine $2n$ che soddisfano $a^\top j_n a = j_n$, ove $j_n = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$.

PROPOSIZIONE 33.4.1. *Il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ si può identificare al gruppo delle matrici $n \times n$ a coefficienti quaternioni che preservano il prodotto scalare canonico di \mathbb{H}^n .*

DIMOSTRAZIONE. Ogni vettore u di \mathbb{H}^n si decompone in modo unico in una somma $v + j \cdot w$, con $v, w \in \mathbb{C}^n$. L'applicazione $\phi : \mathbb{C}^{2n} \ni (v, w) \rightarrow v + j \cdot w \in \mathbb{H}^n$ è \mathbb{C} -lineare a destra, e quindi, se $Q \in \mathbb{H}^{n \times n}$ è una matrice a coefficienti quaternioni, risulta determinata un'unica matrice $[Q]$ a coefficienti complessi che renda commutativo il diagramma (le frecce orizzontali sono prodotti righe per colonne di matrici)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \xrightarrow{Q} & \mathbb{H}^n \\ \phi \uparrow & & \uparrow \phi \\ \mathbb{C}^{2n} & \xrightarrow{[Q]} & \mathbb{C}^{2n}. \end{array}$$

Se scriviamo $Q = A + j \cdot B$ con $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, abbiamo

$$Qu = (A + j \cdot B)(v + j \cdot w) = (Av - \bar{B}w) + j \cdot (Bv + \bar{A}w), \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^n.$$

Otteniamo perciò

$$(33.3) \quad [A + j \cdot B] = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}, \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Possiamo riassumere questa discussione con il

LEMMA 33.4.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice complessa $X \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ rappresenti una trasformazione \mathbb{H} -lineare a destra è che*

$$(33.4) \quad j_n X = \bar{X} j_n. \quad \square$$

Se $a \in \mathbf{U}(2n)$, allora $a^\top = \bar{a}^{-1}$ e la condizione $a^\top j_n a = j_n$ equivale al fatto che a rappresenti una trasformazione \mathbb{H} -lineare a destra su \mathbb{H}^n .

Siano $u_1 = v_1 + w_1 \cdot j$, $u_2 = v_2 + w_2 \cdot j \in \mathbb{H}^n$, con $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}^n$. Il loro prodotto scalare quaternionio è¹

$$\begin{aligned} \langle u_1 | u_2 \rangle_{\mathbb{H}} &= \langle \bar{u}_2 | u_1 \rangle = \langle \bar{v}_2 - j \cdot \bar{w}_2 | v_1 + j \cdot w_1 \rangle \\ &= (\langle v_2 | v_1 \rangle + \langle \bar{w}_2 | w_1 \rangle) + j \cdot (\langle w_2 | v_1 \rangle - \langle v_2 | w_1 \rangle) \\ &= \left((v_1^\top, w_1^\top) \cdot \begin{pmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{w}_2 \end{pmatrix} \right) + j \cdot \left((v_1^\top, w_1^\top) \cdot j_n \cdot \begin{pmatrix} v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Da questo segue la caratterizzazione di $\mathbf{Sp}(n)$ data dall'enunciato. □

TEOREMA 33.4.3. $\mathbf{Sp}(n)$ (per $n \geq 1$) è un gruppo di Lie compatto e connesso per archi. La sua algebra di Lie è

$$\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}) \mid X^\top j_n + j_n X = 0, X^* + X = 0\}.$$

L'esponenziale definisce un'applicazione surgettiva $\exp : \mathfrak{sp}(n) \rightarrow \mathbf{Sp}(n)$.

DIMOSTRAZIONE. $\mathbf{Sp}(n)$ è compatto perché è un sottospazio chiuso del compatto $\mathbf{U}(2n)$. La caratterizzazione della sua algebra di Lie $\mathfrak{sp}(n)$ si ottiene con argomenti simili a quelli utilizzati in precedenza: si osserva che $\mathfrak{sp}(n) \subset \mathfrak{u}(2n)$ e che, posto $\gamma(t) = \exp(X^\top) j_n \exp(tX)$, risulta:

¹Se $u_i = (u_i^h)_{1 \leq h \leq n} \in \mathbb{K}^n$, poniamo $\langle u_1 | u_2 \rangle = \sum_{h=1}^n u_1^h u_2^h$.

$$\gamma'(t) = \exp(tX^\top)(j_n X^\top + X j_n) \exp(tX).$$

Da questa si ottiene facilmente che la condizione $j_n X^\top + X j_n = 0$ è necessaria e sufficiente affinché una $X \in \mathfrak{u}(2n)$ appartenga ad $\mathfrak{sp}(n)$. Poiché $j_n^{-1} = -j_n$, moltiplicando a sinistra per $(-j_n)$ e calcolando la traccia troviamo che $\text{trac}(X) = 0$ (e quindi $X \in \mathfrak{su}(2n)$) e moltiplicando a destra e a sinistra per j_n troviamo la condizione equivalente $X^\top j_n + j_n X = 0$.

Per verificare la surgettività dell'esponenziale, osserviamo che ogni x in $\mathbf{Sp}(n)$ è coniugata ad una matrice diagonale: possiamo cioè trovare una $a \in \mathbf{Sp}(n)$ tale che

$$(*) \quad a x a^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & e^{i\theta_n} & & \\ & & & e^{-i\theta_1} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{-i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

Siano infatti λ_1 un autovalore di x e v_1 un suo corrispondente autovettore in \mathbb{C}^{2n} , con $\|v_1\| = 1$. Abbiamo allora:

$$x(j_n \bar{v}_1) = j_n \bar{x}(v_1) = j_n (\bar{\lambda}_1 \bar{v}_1) = \bar{\lambda}_1 (j_n \bar{v}_1).$$

I vettori v_1 e $j_n \bar{v}_1$ sono ortogonali in \mathbb{C}^{2n} perché $(v_1 | j_n \bar{v}_1)_{\mathbb{C}^{2n}} = v_1^\top j_n v_1 = 0$, in quanto j_n è antisimmetrica.

Ragionando per ricorrenza, troviamo una base ortonormale di \mathbb{C}^{2n} della forma:

$$v_1, \dots, v_n, j_n(\bar{v}_1), \dots, j_n(\bar{v}_n).$$

I suoi vettori formano le colonne della matrice $a \in \mathbf{Sp}(n)$ per cui $a^{-1} x a$ ha la forma diagonale (*).

La matrice $X = a^{-1} \text{diag}(i\theta_1, \dots, i\theta_n, -i\theta_1, \dots, -i\theta_n) a$ appartiene a $\mathfrak{sp}(n)$ ed $\exp(X) = x$. Ciò dimostra la surgettività dell'esponenziale, da cui segue che $\mathbf{Sp}(n)$ è connesso per archi. \square

33.5. Sfere e gruppi compatti

Sia \mathbb{K} uno dei corpi $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Indichiamo con e_1, e_2, \dots, e_n la base canonica di \mathbb{K}^n . Possiamo allora identificare $\mathbf{O}(n-1), \mathbf{SO}(n-1), \mathbf{U}(n-1), \mathbf{SU}(n-1), \mathbf{Sp}(n-1)$ ai $\mathbf{O}(n), \mathbf{SO}(n), \mathbf{U}(n), \mathbf{SU}(n), \mathbf{Sp}(n)$, delle trasformazioni delle sfere $S^{n-1}, S^{2n-1}, S^{4n-1}$, che lasciano fisso il vettore e_n . Poiché questi gruppi operano sulle sfere in modo transitivo, otteniamo:

TEOREMA 33.5.1. *Abbiamo i diffeomorfismi*

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(1) &\simeq \mathbf{SO}(2) \simeq S^1 \\ \mathbf{SU}(2) &\simeq \mathbf{Sp}(1) \simeq S^3 \\ \mathbf{O}(n)/\mathbf{O}(n-1) &\simeq \mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-1) \simeq S^{n-1} && (n > 1) \\ \mathbf{U}(n)/\mathbf{U}(n-1) &\simeq \mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-1) \simeq S^{2n-1} && (n > 1) \\ \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-1) &\simeq S^{4n-1} && (n > 1) \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. In ciascuno dei casi l'omeomorfismo cercato è il quoziente iniettivo dell'applicazione $g \rightarrow g(e_n)$. \square

Abbiamo le successioni esatte di omotopia dei fibrati:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \cdots \rightarrow \pi_2(S^n) & \longrightarrow & \\
 \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^n) & \longrightarrow \mathbf{1} \\
 & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_2(S^{2n+1}) & \longrightarrow \\
 \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SU}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SU}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^{2n+1}) & \longrightarrow \mathbf{1} \\
 & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_2(S^{4n+3}) & \longrightarrow \\
 \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{Sp}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{Sp}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^{4n+3}) & \longrightarrow \mathbf{1}
 \end{array}$$

da cui si deduce:

TEOREMA 33.5.2. *I gruppi $\mathbf{SU}(n)$ e $\mathbf{Sp}(n)$ sono semplicemente connessi.*

Il gruppo speciale ortogonale non è semplicemente connesso e $\pi_1(\mathbf{SO}(2)) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbf{SO}(n)) \simeq \mathbb{Z}_2$ per ogni $n \geq 3$.

Il rivestimento universale di $\mathbf{SO}(n)$, per $n \geq 3$, è un gruppo di Lie compatto, che si indica con $\mathbf{Spin}(n)$ e si dice il *gruppo degli spinori di ordine n* . Il rivestimento $\mathbf{Spin}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SO}(n)$ è a due fogli ed è un omomorfismo di gruppi. Nel Capitolo XXXI abbiamo dimostrato che

$\mathbf{Spin}(3) \simeq \mathbf{SU}(2)$, $\mathbf{Spin}(4) \simeq \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2)$, $\mathbf{Spin}(5) \simeq \mathbf{Sp}(2)$, $\mathbf{Spin}(6) \simeq \mathbf{SU}(4)$.

Questi isomorfismi sono detti a volte *accidentali*: i gruppi di spin di ordine superiore a sei non sono isomorfi a prodotti di gruppi compatti $\mathbf{SU}(n)$ ed $\mathbf{Sp}(n)$.

33.6. Gruppi di omotopia dei gruppi classici

I gruppi classici connessi sono prodotti topologici di fattori compatti, omeomorfi ai gruppi compatti $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{SU}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$, e di fattori non compatti, omeomorfi a spazi Euclidei. Sarà sufficiente quindi considerare i gruppi di omotopia dei gruppi compatti.

33.6.1. Gruppi di omotopia di $\mathbf{SO}(n)$. Abbiamo già osservato che valgono gli omeomorfismi:

$$\begin{cases} \mathbf{SO}(2) \simeq S^1 \\ \mathbf{SO}(3) \simeq \mathbb{RP}^3 \\ \mathbf{SO}(4) \simeq S^3 \times \mathbb{RP}^3. \end{cases}$$

Abbiamo perciò

$$\begin{aligned}
 \pi_n(\mathbf{SO}(2), e) &\simeq \pi_n(S^1, e_0), \\
 \pi_n(\mathbf{SO}(3), e) &\simeq \pi_n(\mathbb{RP}^3, p_0), \\
 \pi_n(\mathbf{SO}(4), e) &\simeq \pi_n(S^3, e_0) \times \pi_n(\mathbb{RP}^3, p_0), \\
 &\forall n = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Se $n \geq 2$ l'applicazione:

$$\mathbf{SO}(n) \ni g \rightarrow g(e_0) \in S^{n-1}$$

definisce un fibrato localmente banale con fibra omeomorfa a $\mathbf{SO}(n-1)$. Abbiamo quindi la successione esatta:

$$(33.5) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{m+1}(S^{n-1}, e_0) \\ \longrightarrow & \pi_m(\mathbf{SO}(n-1), e) & \longrightarrow & \pi_m(\mathbf{SO}(n), e) & \longrightarrow & \pi_m(S^{n-1}, e_0) \\ & \longrightarrow & & \cdots & & & \end{array}$$

In particolare, poiché $\pi_m(S^{n-1}, e_0) = 0$ se $m < n-1$ e $\pi_{n-1}(S^{n-1}, e_0) \simeq \mathbb{Z}$, otteniamo:

$$(33.6) \quad \pi_m(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_m(\mathbf{SO}(n-1), e) \quad \text{se } m < n-2$$

e un omomorfismo surgettivo:

$$(33.7) \quad \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n-1)) \rightarrow \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n)) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \geq 2.$$

Osserviamo che questo omomorfismo è banale se $n = 2, 4$, in quanto sono $\pi_0(\mathbf{SO}(2), e) \simeq \pi_0(S^1, e_0) = 0$ e $\pi_2(\mathbf{SO}(4), e) \simeq \pi_2(S^3 \times \mathbb{R}P^3 \times S^3, (p_0, e_0)) = 0$. Per $n = 3$ abbiamo un omomorfismo $\mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbf{SO}(2), e) \rightarrow \pi_1(\mathbf{SO}(3), e) = \mathbb{Z}_2$.

Abbiamo perciò

$$(33.8) \quad \pi_m(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_m(\mathbf{SO}(m+2), e) \quad \forall n \geq m+2.$$

In particolare

$$(33.9) \quad \pi_1(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_1(\mathbf{SO}(3), e) \simeq \mathbb{Z}_2 \quad \forall n \geq 3,$$

$$(33.10) \quad \pi_2(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_2(\mathbf{SO}(4), e) \simeq 0 \quad \forall n \geq 4,$$

$$(33.11) \quad \pi_3(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_3(\mathbf{SO}(5), e) \simeq \mathbb{Z} \quad \forall n \geq 5,$$

$$(33.12) \quad \pi_4(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_4(\mathbf{SO}(6), e) \simeq 0 \quad \forall n \geq 6.$$

Ad esempio nel caso $n = 5, m = 3$, abbiamo la successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z} \simeq \pi_4(S^4, e_0) \\ \longrightarrow & \pi_3(\mathbf{SO}(4), e) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_3(\mathbf{SO}(5), e) & \longrightarrow & 0 \simeq \pi_3(S^4, e_0) \\ & \longrightarrow & & \cdots & & & \end{array}$$

da cui possiamo dedurre che $\pi_3(\mathbf{SO}(n), e)$ è, per ogni $n \geq 5$, un quoziente di \mathbb{Z}^2 rispetto a un sottogruppo abeliano libero.

OSSERVAZIONE 33.6.1. Sono tutti calcolati i gruppi di omotopia stabile dei gruppi ortogonali: è

$$\begin{aligned} \Pi_k &= \pi_{n+k}(\mathbf{SO}(n), e) \quad \forall n > k+1, \\ \Pi_k &= \Pi_{k+8} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ \Pi_0 &= \mathbb{Z}_2 \quad \Pi_1 = \mathbb{Z}_2 \quad \Pi_2 = 0 \quad \Pi_3 = \mathbb{Z} \\ \Pi_4 &= 0 \quad \Pi_5 = 0 \quad \Pi_6 = 0 \quad \Pi_7 = \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

33.6.2. Gruppi di omotopia di $SU(m)$. Il gruppo $SU(2)$ è omeomorfo a S^3 . Per $m \geq 3$, l'applicazione

$$(33.13) \quad SU(m) \ni g \rightarrow g(e_0) \in S^{2m-1}$$

definisce un fibrato localmente banale con fibra omeomorfa a $SU(m-1)$. Otteniamo quindi la successione esatta:

$$(33.14) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(S^{2m-1}, e_0) \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \longrightarrow & \pi_n(SU(m-1), e) & \longrightarrow & \pi_n(SU(m), e) & \longrightarrow & \pi_n(S^{2m-1}, e_0) & \\ & \longrightarrow & & \cdots & & & \end{array}$$

da cui ricaviamo che:

$$(33.15) \quad \pi_n(SU(m), e) \simeq \pi_n(SU(m-1), e) \quad \text{se } n < 2m - 2$$

e l'omomorfismo $\pi_n(SU(m-1), e) \rightarrow \pi_n(SU(m), e)$ è surgettivo per $n = 2m - 2$.

In particolare

$$(33.16) \quad \pi_n(SU(m)) \simeq \begin{cases} \pi_n(SU([n+1]/2), e) & \text{se } n \notin 2\mathbb{N}, 2m > n+2, \\ \pi_n(SU([n+2]/2), e) & \text{se } n \in 2\mathbb{N}, 2m > n+2. \end{cases}$$

Abbiamo, per $m \geq 2$:

$$(33.17) \quad \begin{aligned} \pi_1(SU(m), e) &= 0, \\ \pi_2(SU(m), e) &= 0, \\ \pi_3(SU(m), e) &= \mathbb{Z}, \\ \pi_4(SU(2), e) &= \mathbb{Z}_2, \\ \pi_4(SU(m), e) &= 0 \quad \text{se } m \geq 3 \\ \pi_5(SU(2), e) &= \mathbb{Z}_2, \\ \pi_5(SU(m), e) &= \mathbb{Z} \quad \text{se } m \geq 3. \end{aligned}$$

Ricaviamo i gruppi di omotopia di ordine 1, 2, 3 della tabella. È

$$\pi_1(SU(m), e) \simeq \pi_1(SU(2), e) \simeq \pi_1(S^3, e_0) = 0.$$

Abbiamo poi

$$\begin{aligned} \pi_2(SU(2), e) &\simeq \pi_2(S^3, e_0) = 0 \\ \text{e } \pi_2(SU(m), e) &\simeq \pi_2(SU(3), e) \quad \text{per } m \geq 3. \end{aligned}$$

Dalla successione esatta

$$0 = \pi_2(SU(2), e) \longrightarrow \pi_2(SU(3), e) \longrightarrow \pi_2(S^5, e_0) = 0$$

ricaviamo che $\pi_2(SU(3), e) = 0$ e quindi $\pi_2(SU(m), e) = 0$ per ogni m .

Abbiamo ancora $\pi_3(SU(2), e) \simeq \pi_3(S^3, e_0) = \mathbb{Z}$ e quindi dalla successione esatta

$$\begin{aligned} \pi_4(S^5, e_0) &\longrightarrow \pi_3(SU(2), e) \longrightarrow \pi_3(SU(3), e) \longrightarrow \pi_3(S^5, e_0) \\ &= 0 \qquad \qquad \qquad = \mathbb{Z} \qquad \qquad \qquad = 0 \end{aligned}$$

ricaviamo che anche $\pi_3(SU(3), e) = \mathbb{Z}$ e quindi $\pi_3(SU(m), e) \simeq \pi_3(SU(3), e) = \mathbb{Z}$ per ogni $m \geq 3$.

33.6.3. Gruppi di omotopia di $\mathbf{Sp}(m)$. Abbiamo $\mathbf{Sp}(1) \simeq S^3$. L'applicazione:

$$(33.18) \quad \mathbf{Sp}(m) \ni g \rightarrow g(e_0) \in S^{4m-1}$$

definisce un fibrato localmente banale con fibra $\mathbf{Sp}(m-1)$. Otteniamo perciò una successione esatta:

$$(33.19) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(S^{4m-1}, e_0) \\ \longrightarrow & \pi_n(\mathbf{Sp}(m-1), e) & \longrightarrow & \pi_n(\mathbf{Sp}(m), e) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(S^{4m-1}, e_0) \\ & \longrightarrow & & \cdots & & & \end{array}$$

Quindi:

$$(33.20) \quad \pi_n(\mathbf{Sp}(m), e) \simeq \pi_n(\mathbf{Sp}(m-1), e) \quad \text{se } n \leq 4m-3.$$

Per $m=2$, poiché $\pi_n(S^7, e_0) = 0$ per $0 \leq n \leq 6$, otteniamo che

$$\pi_n(\mathbf{Sp}(2), e) \simeq \pi_n(\mathbf{Sp}(1), e) \simeq \pi_n(S^3, e_0) \quad \text{per } 0 \leq n \leq 5.$$

Per ricorrenza, abbiamo quindi

$$(33.21) \quad \pi_n(\mathbf{Sp}(m), e) \simeq \pi_n(S^3, e_0) \quad \text{se } n \leq 5.$$

In generale:

$$(33.22) \quad \pi_n(\mathbf{Sp}(m), e) \simeq \begin{cases} \pi_n(\mathbf{Sp}([n-1]/4), e) & \text{se } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \pi_n(\mathbf{Sp}(n/4), e) & \text{se } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \pi_n(\mathbf{Sp}([n+2]/4), e) & \text{se } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \pi_n(\mathbf{Sp}([n+1]/4), e) & \text{se } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Gruppi classici non compatti

Ogni gruppo di Lie \mathbf{G} con un numero finito di componenti connesse è omeomorfo al prodotto topologico $\mathbf{K} \times \mathbb{R}^k$ di un gruppo di Lie compatto \mathbf{K} e di uno spazio Euclideo \mathbb{R}^k (vedi §30.3). Il gruppo \mathbf{G} contiene un sottogruppo compatto massimale omeomorfo a \mathbf{K} , e tutti i sottogruppi compatti massimali di \mathbf{G} sono tra loro omeomorfi. La decomposizione $\mathbf{G} = \mathbf{K} \times \mathbb{R}^k$ si dice la *decomposizione di Cartan* di \mathbf{G} .

In questo capitolo descriviamo i gruppi lineari della lista di Cartan, che si dicono anche *i gruppi classici* non compatti, e per ciascuno di essi diamo la relativa *decomposizione di Cartan*.

Per un sottogruppo lineare \mathbf{G} di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ invariante rispetto all'aggiunzione, potremo scegliere come suo sottogruppo compatto massimale \mathbf{K} la sua intersezione $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ di \mathbf{G} con il gruppo delle matrici unitarie.

34.1. La lista dei gruppi classici non compatti

Nel Capitolo XXXIII abbiamo esaminato i gruppi classici compatti. Completiamo ora la *lista di Cartan* con l'elenco dei gruppi classici non compatti. Per ciascuno di essi descriveremo anche la rispettiva algebra di Lie.

$\mathbf{U}(p, q)$ (*gruppo unitario di segnatura* (p, q)) è il gruppo delle matrici complesse $a \in \mathbf{GL}(p+q, \mathbb{C})$ che soddisfano $a \mathbf{K} a^* = \mathbf{K}$ per una matrice Hermitiana simmetrica \mathbf{K} con segnatura (p, q) . Ad esempio, possiamo scegliere $\mathbf{K} = \mathbf{I}_{p,q} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & \\ & -\mathbf{I}_q \end{pmatrix}$. La sua algebra di Lie è

$$\mathfrak{u}(p, q) = \{X \in \mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{C}) \mid X^* \mathbf{K} + \mathbf{K} X = 0\}.$$

$\mathbf{SU}(p, q)$ (*gruppo speciale unitario di segnatura* (p, q)) è il gruppo $\mathbf{SU}(p, q) = \mathbf{U}(p, q) \cap \mathbf{SL}_{p+q}(\mathbb{C})$ delle matrici complesse a di $\mathbf{U}(p, q)$ con determinante 1. La sua algebra di Lie è

$$\mathfrak{su}(p, q) = \{X \in \mathfrak{u}(p, q) \mid \text{trac}(X) = 0\} = \mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{C}).$$

$\mathbf{SU}^*(2n)$, che si indica anche con $\mathbf{SL}_n(\mathbb{H})$, (*gruppo lineare speciale quaternionico*) è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{SL}_{2n}(\mathbb{C})$ tali che

$$a \mathbf{J} = \mathbf{J} \bar{a}$$

dove \bar{a} è la matrice i cui coefficienti sono i coniugati dei coefficienti di a e \mathbf{J} una matrice reale antisimmetrica di rango $2n$. Ad esempio possiamo

fissare $J = j_n = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$. La sua algebra di Lie, che si indica anche con $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{H})$, è:

$$\mathfrak{su}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C}) \mid XJ = J\bar{X}\}.$$

SO(n, \mathbb{C}) (*gruppo ortogonale complesso*) è il gruppo delle matrici a di $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ che lasciano invariata una matrice complessa simmetrica non degenera Q :

$$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}) \mid a^T Q a = Q\}.$$

La sua algebra di Lie è:

$$\mathfrak{o}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid X^T Q + QX = 0\}.$$

SO(p, q) (*gruppo ortogonale di segnatura* (p, q)) è il gruppo delle matrici reali $a \in \mathbf{SL}(p+q, \mathbb{R})$ tali che $a^T K a = K$ per una matrice $(p+q) \times (p+q)$ reale e simmetrica K , di segnatura (p, q) . La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{o}(p, q) = \{X \in \mathfrak{sl}_{p+q}(\mathbb{R}) \mid X^T K + KX = 0\}.$$

SO^{*}($2n$) (*gruppo complesso ortogonale simplettico*) è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{SL}_{2n}(\mathbb{C})$ tali che

$$a^* J a = J \quad \text{e} \quad a^T a = K$$

ove J è una matrice antihermitiana di rango $2n$ e K è una matrice simmetrica di rango $2n$ con $JK = KJ$. Possiamo ad esempio fissare $K = I_{2n}$ e $J = j_n = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$. L'algebra di Lie corrispondente è:

$$\mathfrak{o}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}) \mid X^* J + JX = 0, \quad X^T K + KX = 0\}.$$

Sp(n, \mathbb{C}) (*gruppo simplettico complesso*) è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ tali che $a^T J a = J$ per una matrice antisimmetrica $J \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ di rango $2n$. La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \mid X^T J + JX = 0\}.$$

Sp(n, \mathbb{R}) (*gruppo simplettico*) è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ con $a^T J a = J$ per una matrice antisimmetrica $J \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ di rango $2n$. La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) \mid X^T J + JX = 0\}.$$

Sp(p, q) (*gruppo unitario simplettico di segnatura* (p, q)) è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{Sp}(p+q, \mathbb{C})$ tali che $a^* K a = K$ per una matrice Hermitiana simmetrica K di segnatura $(2p, 2q)$ che commuta con J . Se $J = j_{p+q} = \begin{pmatrix} & I_{p+q} \\ -I_{p+q} & \end{pmatrix}$, possiamo fissare ad esempio

$$K = \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & \\ & & I_p & \\ & & & -I_q \end{pmatrix}.$$

La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(p, q) = \{X \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \mid X^* K + KX = 0\}.$$

Osserviamo che $\mathbf{Sp}(n) = \mathbf{Sp}(n, 0) = \mathbf{Sp}(0, n) = \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n)$.

34.2. I gruppi $U(p, q)$ e $SU(p, q)$

Fissiamo $K = I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$ e poniamo $n = p + q$.

LEMMA 34.2.1. *Se $x \in U(p, q)$, allora $x^* \in U(p, q)$. Se $x \in SU(p, q)$, allora $x^* \in SU(p, q)$.*

DIMOSTRAZIONE. Per la definizione di $U(p, q)$, abbiamo, poiché $I_{p,q}^{-1} = I_{p,q}$,

$$\begin{aligned} x \in U(p, q) &\Leftrightarrow x^* I_{p,q} = I_{p,q} x^{-1} \Leftrightarrow x I_{p,q} = I_{p,q} [x^*]^{-1} \\ &\Leftrightarrow (x^*)^* I_{p,q} (x^*) = I_{p,q} \Leftrightarrow x^* \in U(p, q). \end{aligned}$$

Inoltre, se $\det(x) = 1$, anche $\det(x^*) = \overline{\det(x)} = 1$. □

LEMMA 34.2.2. $U(p, q) \cap U(n) \cong U(p) \times U(q)$.

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo un elemento $x \in U(p, q) \cap U(n)$ nella forma

$$x = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{C}^{p \times p}$, $b \in \mathbb{C}^{q \times q}$, $c \in \mathbb{C}^{q \times p}$, $d \in \mathbb{C}^{p \times q}$. Poiché $x \in U(p, q)$, abbiamo

$$a^* a - d^* d = I_p, \quad a^* c = d^* b, \quad b^* b - c^* c = I_q.$$

Essendo $x \in U(n)$, abbiamo anche:

$$a^* a + d^* d = I_p, \quad a^* c + d^* b = 0, \quad b^* b + c^* c = I_q.$$

Da queste uguaglianze ricaviamo $c = 0$, $d = 0$, da cui segue la tesi. □

COROLLARIO 34.2.3. $SU(p, q) \cap U(n) \simeq SU(p) \times SU(q) \times S^1$.

DIMOSTRAZIONE. Ad ogni numero complesso σ ed ogni intero positivo h associamo la matrice diagonale $D_h(\sigma) = \text{diag}(\sigma, 1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^{h \times h}$.

Per il Lemma 34.2.2, l'applicazione

$$SU(p) \times SU(q) \times S^1 \ni (a, b, \sigma) \longrightarrow \begin{pmatrix} D_p(\sigma) a & 0 \\ 0 & D_q(\sigma^{-1}) b \end{pmatrix} \in SU(p, q) \cap U(n)$$

è continua e bigettiva e dunque un omeomorfismo perché i due spazi sono compatti di Hausdorff. □

TEOREMA 34.2.4. *Il gruppo $SU(p, q)$ è diffeomorfo al prodotto:*

$$SU(p, q) \simeq SU(p) \times SU(q) \times S^1 \times \mathbb{C}^{pq}.$$

Il gruppo $U(p, q)$ è diffeomorfo al prodotto topologico $SU(p, q) \times S^1$:

$$U(p, q) \simeq SU(p) \times SU(q) \times S^1 \times S^1 \times \mathbb{C}^{pq}.$$

I due gruppi sono pertanto connessi per archi, ma non compatti se $pq \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Calcoliamo l'intersezione $\mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n)$. Scriviamo un suo elemento X nella forma $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{pmatrix}$ con $X_{11} \in \mathfrak{p}(p)$, $X_{22} \in \mathfrak{p}(q)$ ed $X_{12} \in \mathbb{C}^{p \times q}$. Allora:

$$0 = X^* I_{p,q} + I_{p,q} X = X I_{p,q} + I_{p,q} X = \begin{pmatrix} 2X_{11} & 0 \\ 0 & 2X_{22} \end{pmatrix} \implies X_{1,1} = 0, X_{2,2} = 0.$$

Quindi

$$\mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n) = \mathfrak{su}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{12}^* & 0 \end{pmatrix} \mid X_{12} \in \mathbb{C}^{p \times q}(\mathbb{C}) \right\} \simeq \mathbb{C}^{pq}.$$

La tesi è perciò conseguenza dei lemmi precedenti e del Teorema 30.3.4. \square

34.3. I gruppi $\mathbf{SO}(p, q)$

TEOREMA 34.3.1. *Siano p, q due interi positivi. Il gruppo $\mathbf{SO}(p, q)$ è diffeomorfo a $\{-1, 1\} \times \mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.*

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo come nella dimostrazione dei teoremi precedenti. Si verifica facilmente che

$$\mathbf{SO}(p, q) = \{x \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \mid x^\top K x = K\}, \quad \text{con } K = I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$$

contiene l'aggiunta di ogni sua matrice. È quindi un gruppo pseudoalgebrico cui possiamo applicare il Teorema 30.3.4. Ricaviamo in primo luogo che $\mathbf{SO}(p, q) \cap \mathbf{U}(n)$ è formato dalle matrici:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

con $x_1 \in \mathbf{O}(p)$, $x_2 \in \mathbf{O}(q)$ e $\det(x_1) \cdot \det(x_2) = 1$. Quindi abbiamo l'omeomorfismo:

$$\mathbf{SO}(p, q) \cap \mathbf{U}(n) \cong \{-1, 1\} \times \mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(q).$$

D'altra parte $\mathfrak{o}(p, q) \cap \mathfrak{p}(p+q)$ è lo spazio delle matrici

$$X = \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } X_{1,2} \in \mathbb{R}^{p \times q} \simeq \mathbb{R}^{pq}.$$

La tesi segue dalla decomposizione di Cartan

$$(\mathbf{SO}(p, q) \cap \mathbf{U}(p+q)) \times (\mathfrak{o}(p, q) \cap \mathfrak{p}(p+1)) \ni (x, X) \longleftrightarrow x \cdot \exp(X) \in \mathbf{SO}(p, q).$$

\square

34.4. I gruppi $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ e $\mathbf{SU}^*(2n)$

LEMMA 34.4.1. *Se $J = \mathfrak{j}_n$, allora $x^* \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ per ogni $x \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\bar{J} = J$, abbiamo:

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) &\Leftrightarrow x^\top J x = J \Leftrightarrow J x = (x^\top)^{-1} J \Leftrightarrow x^{-1} J = J x^\top \\ &\Leftrightarrow \bar{x}^{-1} J = J x^* \Leftrightarrow \bar{x} J x^* = J \Leftrightarrow (x^*)^\top J (x^*) = J \iff x^* \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}), \end{aligned}$$

perché $\bar{x} = (x^*)^\top$. Otteniamo quindi la tesi. \square

TEOREMA 34.4.2. *Il gruppo $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ è diffeomorfo a $\mathbf{Sp}(n) \times \mathbb{R}^{n(2n+1)}$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 34.4.1 ed il Teorema 30.3.4, ogni $x \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ si decompone in modo unico nel prodotto

$$x = a \cdot \exp(X) \quad \text{con } a \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n) = \mathbf{Sp}(n) \quad \text{ed } X \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2n).$$

Scriviamo X nella forma

$$X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{1,2}^* & X_{2,2} \end{pmatrix}$$

con $X_{h,k} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ed $X_{1,1}, X_{2,2}$ hermitiane simmetriche. Da $X^\top J + JX = 0$ otteniamo le uguaglianze:

$$X_{2,2} = -X_{1,1}^\top, \quad X_{1,2} = X_{1,2}^\top.$$

La X è dunque della forma

$$(*) \quad X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{1,2}^* & -X_{1,1}^\top \end{pmatrix}$$

con $X_{1,1}$ Hermitiana simmetrica ed $X_{1,2}$ simmetrica. Quindi $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2n)$ è quindi lo spazio vettoriale reale delle matrici Hermitiane simmetriche della forma (*). Esso ha quindi dimensione reale $n^2 + n(n+1) = n(2n+1)$. La tesi segue dal Teorema 30.3.4. \square

TEOREMA 34.4.3. *Il gruppo $\mathbf{SU}^*(2n) \simeq \mathbf{SL}_n(\mathbb{H})$ è diffeomorfo a $\mathbf{Sp}(n) \times \mathbb{R}^{2n^2-n-1}$.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che $x \in \mathbf{SU}^*(2n)$ se $x \in \mathbf{SL}_{2n}(\mathbb{C})$ e $Jx = \bar{x}J$. Poiché $J^\top = -J$, per trasposizione otteniamo $\bar{x}^*J = x^\top J = Jx^*$, e quindi $x^* \in \mathbf{SU}^*(2n)$ se $x \in \mathbf{SU}^*(2n)$.

Se $x \in \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n)$, allora $x^\top Jx = x^\top \bar{x}J = J$, cioè $x \in \mathbf{Sp}(n)$. Viceversa, $\mathbf{Sp}(n) \subset \mathbf{SU}^*(2n)$, perché, se $x^*x = I_{2n}$ e $x^\top Jx = J$, abbiamo anche $x^*J\bar{x} = J$ perché J è reale e dunque $xJ = x(x^*J\bar{x}) = J\bar{x}$.

Per il Teorema 30.3.4, abbiamo la decomposizione di Cartan

$$\mathbf{Sp}(n) \times (\mathfrak{su}^*(2n) \cap \mathfrak{p}(2n)) \ni (x, X) \longleftrightarrow x \cdot \exp(X) \in \mathbf{SU}^*(2n).$$

L'intersezione $\mathfrak{su}^*(2n) \cap \mathfrak{p}(2n)$ è lo spazio vettoriale reale delle matrici della forma:

$$X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{1,2}^* & \bar{X}_{1,1} \end{pmatrix}$$

con $X_{1,1}$ matrice di $\mathfrak{p}(n)$ con traccia nulla ed $X_{1,2} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ antisimmetrica: $X_{1,2}^\top = -X_{1,2}$. Esso ha quindi dimensione reale $(n^2 - 1) + n(n-1) = 2n^2 - n - 1$. Da qui segue la tesi. \square

34.5. I gruppi $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ ed $\mathbf{SO}^*(2n)$

TEOREMA 34.5.1. *Il gruppo $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ è diffeomorfo a $\mathbf{SO}(n) \times \mathbb{R}^{(n^2-n)/2}$.*

DIMOSTRAZIONE. Gli x di $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ sono caratterizzati da:

$$\det(x) = 1, \quad x^\top x = I_n, \quad \text{cioè } g^\top = g^{-1}.$$

Se $x \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$, coniugando la $x^\top = x^{-1}$ otteniamo che $x^* = \bar{x}^{-1} = [(x^*)^\top]^{-1}$, da cui $(x^*)^\top = (x^*)^{-1}$ e possiamo utilizzare il Teorema 30.3.4 per ottenere la decomposizione di Cartan di $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$.

Un elemento x di $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n)$ soddisfa $x^\top = x^{-1} = x^*$ ed è quindi una matrice a coefficienti reali. Poiché $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n) = \mathbf{SO}(n)$, otteniamo il diffeomorfismo

$$\mathbf{SO}(n) \times (\mathfrak{o}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(n)) \ni (x, X) \longleftrightarrow x \cdot \exp(X) \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C}).$$

Lo spazio vettoriale $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(n)$ consiste delle matrici hermitiane simmetriche X con $X^\top + X = 0$, cioè delle matrici antisimmetriche puramente immaginarie. Esse formano uno spazio vettoriale reale di dimensione $n(n-1)/2$. Abbiamo allora un omeomorfismo

$$\mathbf{SO}(n) \times \mathfrak{o}(n) \ni (x, X) \longleftrightarrow x \cdot \exp(iX) \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C}). \quad \square$$

TEOREMA 34.5.2. *Il gruppo $\mathbf{SO}^*(2n)$ è omeomorfo a $\mathbf{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-n}$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mathbf{K} = \mathbf{I}_{2n} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}$ e $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \end{pmatrix}$. Poiché $\mathbf{SO}^*(2n) = \mathbf{SO}(2n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{SU}^*(2n)$, ed abbiamo già verificato che sia $\mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$ che $\mathbf{SU}^*(2n)$ sono invarianti per aggiunzione, anche $\mathbf{SO}^*(2n)$ è invariante per aggiunzione. Possiamo quindi utilizzare il Teorema 30.3.4 per ottenere la decomposizione di Cartan di $\mathbf{SO}^*(2n)$.

Verifichiamo in primo luogo che il gruppo $\mathbf{K} = \mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n)$ è isomorfo, come gruppo di Lie, ad $\mathbf{U}(n)$. Le matrici $x \in \mathbf{K}$ sono caratterizzate dalle equazioni

$$x^\top x = \mathbf{I}_{2n}, \quad x^* \mathbf{J} x = \mathbf{J}, \quad x^* x = \mathbf{I}_{2n}, \quad \det(x) = 1.$$

La prima e la terza ci dicono che x è una matrice reale di $\mathbf{SO}(2n)$. La seconda ci dice allora che x commuta con \mathbf{J} e dunque è \mathbb{C} -lineare per la struttura complessa su \mathbb{R}^{2n} definita da \mathbf{J} . Infatti, se definiamo l'isomorfismo \mathbb{R} -lineare $\sigma : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ mediante

$$\sigma(e_k) = e_k \quad \text{e} \quad \sigma(\mathbf{J}e_k) = \sigma(e_{k+n}) = i e_k, \quad \text{per } 1 \leq k \leq n,$$

l'applicazione

$$\mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n) \ni x \rightarrow \sigma \circ x \circ \sigma^{-1} \in \mathbf{U}(n)$$

è un isomorfismo di gruppi di Lie.

Calcoliamo ora l'intersezione $\mathfrak{o}^*(2n) \cap \mathfrak{p}(2n)$. Essa consiste delle matrici X della forma

$$X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ -\bar{X}_{1,2} & \bar{X}_{1,1} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad X_{1,1}, X_{1,2} \in i \cdot \mathfrak{o}(n).$$

Abbiamo allora la decomposizione di Cartan

$$\mathbf{SU}(n) \times (\mathfrak{o}^*(2n) \cap \mathfrak{p}(2n)) \ni (x, X) \longleftrightarrow x \cdot \exp(X) \in \mathbf{SO}^*(2n),$$

da cui segue l'enunciato del teorema. □

34.6. I gruppi $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$

TEOREMA 34.6.1. *Abbiamo il diffeomorfismo*

$$\mathbf{Sp}(p, q) \cong \mathbf{Sp}(p) \times \mathbf{Sp}(q) \times \mathbb{R}^{4pq}.$$

DIMOSTRAZIONE. Le matrici x di $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$ sono caratterizzate dalle equazioni:

$$x^T J x = J \quad \text{ed} \quad x^* \begin{pmatrix} I_{p,q} & \\ & I_{p,q} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} I_{p,q} & \\ & I_{p,q} \end{pmatrix}.$$

Quindi $\mathbf{Sp}(p, q) = \mathbf{Sp}(p+q, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2p, 2q)$, ove $\mathbf{U}(2p, 2q)$ è definito in questo caso come il gruppo delle matrici x per cui $x^* K x = K$, per la matrice

$$K = \begin{pmatrix} I_{p,q} & \\ & I_{p,q} \end{pmatrix}.$$

Poiché $K = K^* = K^{-1}$, otteniamo

$$x \in \mathbf{U}(2p, 2q) \Leftrightarrow K x^* K = x^{-1} \Leftrightarrow K x^{**} K = [x^*]^{-1} \Leftrightarrow x^* \in \mathbf{U}(2p, 2q).$$

Quindi, poiché sia $\mathbf{Sp}(p+q, \mathbb{C})$ che $\mathbf{U}(2p, 2q) = \{g \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \mid g^* K g = K\}$ sono invarianti rispetto all'aggiunzione, anche $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$ è invariante rispetto all'aggiunzione.

Possiamo quindi utilizzare il Teorema 30.3.4 per trovare la decomposizione di Cartan di $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$. È $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n) \subset \mathbf{Sp}(n) \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$. Indichiamo con \tilde{x} la matrice a coefficienti quaternioni corrispondente ad x . Troviamo allora: se $x \in \mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$, allora

$$\tilde{x}^* \tilde{x} = I_{p+q}, \quad \tilde{x}^* I_{p,q} \tilde{x} = I_{p,q}.$$

Si ottiene quindi

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 & \\ & \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad x_1 \in \mathbf{Sp}(p), \quad x_2 \in \mathbf{Sp}(q).$$

La decomposizione di Cartan ci dà quindi un diffeomorfismo

$$\mathbf{Sp}(p) \times \mathbf{Sp}(q) \times (\mathfrak{sp}(p, q; \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2p+2q)) \longrightarrow \mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$$

$$\text{definito da:} \quad (x_1, x_2, X) \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & \\ & x_2 \end{pmatrix} \exp(X)$$

L'intersezione $\mathfrak{sp}(p, q; \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2n)$ è lo spazio vettoriale reale di dimensione $4pq$ delle matrici Hermitiane della forma:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & X_{1,2} & 0 & X_{1,4} \\ X_{1,2}^* & 0 & {}^t X_{1,4} & 0 \\ 0 & \bar{X}_{1,4} & 0 & -\bar{X}_{1,2} \\ X_{1,4}^* & 0 & -{}^t X_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$$

con $X_{1,2}$ e $X_{1,4}$ matrici complesse di tipo $p \times q$. □



34.7. Connessione dei gruppi simplettici

Sia \mathbb{K} un campo di caratteristica diversa da due ed Ω_n una matrice antisimmetrica non degenera di ordine $2n$. Il gruppo

$$(34.1) \quad \mathbf{Sp}_{\Omega_n}(n, \mathbb{K}) = \{x \in \mathbb{K}(2n) \mid x^\top \cdot \Omega_n \cdot x = \Omega_n\}$$

si dice *gruppo simplettico di ordine $2n$* su \mathbb{K} .

OSSEVAZIONE 34.7.1. Scelte diverse della matrice Ω_n definiscono sottogruppi coniugati di $\mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{K})$. Infatti, tutte le matrici antisimmetriche non degeneri di $\mathbb{K}(2n)$ sono tra loro congruenti. Quindi, se Ω'_n è un'altra matrice antisimmetrica non degenera di rango $2n$, allora $\Omega'_n = a^\top \cdot \Omega_n \cdot a$ per una a di $\mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{K})$ ed abbiamo l'isomorfismo di gruppi

$$\mathbf{Sp}_{\Omega_n}(n, \mathbb{K}) \ni x \longrightarrow a^{-1} \cdot x \cdot a \in \mathbf{Sp}_{\Omega'_n}(n, \mathbb{K}).$$

Le scelte usuali di Ω_n sono le matrici $\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & -J_n \\ J_n & 0 \end{pmatrix}$, con $J_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$ antidiagonale. Per ognuna di queste due scelte valgono le

$$(34.2) \quad \Omega_n^2 = -I_{2n}.$$

LEMMA 34.7.2. È $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{K}) \subset \mathbf{SL}_{2n}(\mathbb{K})$.

DIMOSTRAZIONE. Se $x \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{K})$, allora $x^\top = \Omega_n \cdot x^{-1} \cdot \Omega_n^{-1}$. Poiché x^\top è coniugata ad x , questa relazione ci dice che le matrici x ed x^{-1} sono coniugate. In particolare hanno lo stesso polinomio caratteristico, che quindi è della forma

$$p(x) = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} x + a_{2n}, \quad \text{con } a_j = a_{2n-j}$$

ed in particolare $\det(x) = a_{2n} = a_0 = 1$. □

LEMMA 34.7.3. Se $x \in \mathbf{Sp}_{\Omega_n}(n, \mathbb{K})$, allora $x^\top \in \mathbf{Sp}_{\Omega_n}(n, \mathbb{K})$.

DIMOSTRAZIONE. Se $x \in \mathbf{Sp}_{\Omega_n}(n, \mathbb{K})$, trasponendo l'identità $x^\top = \Omega_n \cdot x^{-1} \cdot \Omega_n^{-1}$, otteniamo che $(x^\top)^\top = \Omega_n \cdot (x^\top)^{-1} \cdot \Omega_n^{-1}$, cioè che $x^\top \in \mathbf{Sp}_{\Omega_n}(n, \mathbb{K})$. □

In particolare, per il teorema di Cartan, i sottogruppi compatti massimali dei gruppi simplettici reale e complesso si possono ottenere intersecandoli con il gruppo unitario.

PROPOSIZIONE 34.7.4. I sottogruppi compatti massimali dei gruppi simplettici reale e complesso sono

- $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) \cap \mathbf{U}(2n) = \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) \cap \mathbf{SO}(2n) \simeq \mathbf{U}(n)$,
- $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n) \simeq \mathbf{Sp}(n)$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il gruppo spinoriale reale. Possiamo fissare $\Omega_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. La Ω_n definisce una struttura complessa su \mathbb{R}^{2n} . Identificando i vettori ζ di \mathbb{C}^n ai vettori v di \mathbb{R}^{2n} le cui prime n componenti siano le parti reali e le ultime n le

parti immaginarie di ζ , abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{i} & \mathbb{C}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{\Omega_n} & \mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

che fa corrispondere alla moltiplicazione per l'unità immaginaria l'azione della matrice Ω_n . Questa corrispondenza identifica $\mathbb{C}(n)$ alla sottosgebra delle matrici di $\mathbb{R}(2n)$ che commutano con Ω_n , mediante la

$$(*) \quad (X + iY) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}, \quad \text{per } X, Y \in \mathbb{R}(n).$$

Per una matrice ortogonale $x \in \mathbf{O}(2n)$ è $x^{-1} = x^\top$ e quindi la condizione di essere simplettica equivale ad

$$(**) \quad \Omega_n \cdot x = x \cdot \Omega_n,$$

cioè al fatto che la x sia \mathbb{C} -lineare. Nella corrispondenza (*) l'aggiunzione in $\mathbb{C}(n)$ corrisponde alla trasposizione in $\mathbb{R}(2n)$ e questo dimostra che il sottogruppo compatto massimale di $\mathbf{Sp}_{\Omega_n}(n, \mathbb{R})$ è isomorfo ad $\mathbf{U}(n)$.

Possiamo ragionare in modo simile per le matrici simplettiche complesse. Utilizziamo la matrice Ω_n per definire su \mathbb{C}^{2n} una struttura quaternionica. Utilizzando la corrispondenza

$$\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \ni \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \longleftrightarrow u + w \cdot j \in \mathbb{H}^n,$$

otteniamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \xrightarrow{\cdot j} & \mathbb{H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^{2n} & \xrightarrow{\Omega_n} & \mathbb{H} \end{array}$$

che fa corrispondere alla moltiplicazione a destra per il quaternion immaginario j l'azione a sinistra della matrice Ω_n . Le applicazioni \mathbb{H} -lineari a destra su \mathbb{H}^n sono tutte e sole quelle che si rappresentano mediante la moltiplicazione a sinistra per una matrice di $\mathbb{H}(n)$. Possiamo scrivere una $A \in \mathbb{H}(n)$ come una somma $A = A_0 + A_1 \cdot j$, con $A_0, A_1 \in \mathbb{C}(n)$. La moltiplicazione a sinistra per j di un vettore di \mathbb{H}^n si rappresenta sui vettori di \mathbb{C}^{2n} mediante l'operazione

$$j \cdot (u + w \cdot j) = -\bar{w} + \bar{u} \cdot j \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -\bar{w} \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \Omega_n \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{pmatrix}.$$

Quindi la moltiplicazione a sinistra per matrici di $\mathbb{H}(n)$ corrisponde alla moltiplicazione a sinistra per matrici $A \in \mathbb{C}(2n)$ che verificano la relazione

$$(\dagger) \quad A \cdot \Omega_n = \Omega_n \cdot \bar{A}, \quad \text{cioè } A = \begin{pmatrix} A' & -\bar{A}'' \\ A'' & \bar{A}' \end{pmatrix} \text{ con } A', A'' \in \mathbb{C}(n).$$

Per una matrice x di $\mathbf{U}(2n)$ è $x^* = x^{-1}$, cioè $x^\top = \bar{x}^{-1}$ e quindi la condizione che appartenga ad $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ è equivalente ad

$$\Omega_n \cdot x = \bar{x} \cdot \Omega_n,$$

cioè al fatto che x corrisponda ad una matrice quaternionica. Questo dimostra che il sottogruppo compatto massimale di $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ è isomorfo ad $\mathbf{Sp}(n)$. \square

In particolare, il gruppo simplettico reale è connesso, ma non semplicemente connesso. Il suo rivestimento doppio forma il *gruppo metaplettico*, che non è algebrico e non ha rappresentazioni non banali in dimensione finita.

Coomologia delle algebre di Lie e teorema di Levi-Malcev

35.1. Coomologia delle algebre di Lie

Siano \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo \mathbb{K} e V un \mathfrak{g} -modulo. Nel Cap. XXXVI introdurremo l'algebra involupante universale \mathfrak{G} di \mathfrak{g} e mostriamo che è possibile considerare V come un \mathfrak{G} -modulo. Poiché \mathfrak{G} è un anello associativo unitario, ha senso calcolare i gruppi $\text{Ext}_{\mathfrak{G}}^p(\mathbb{K}, \mathbb{A})$. Questi gruppi si indicano con $H^p(\mathfrak{g}, V)$ e si dicono i *gruppi di coomologia di \mathfrak{g} a coefficienti in V* .

Seguendo Chevalley ed Eilenberg (vedi [20, 46]), ne daremo qui una definizione intrinseca, che corrisponde alla rappresentazione che se ne otterrebbe a partire da una risoluzione del \mathfrak{G} -modulo banale \mathbb{K} , evitando così il riferimento esplicito all'algebra omologica. Daremo poi una dimostrazione del teorema di decomposizione di Levi-Malcev in cui si utilizzano queste nozioni.

Ricordiamo che un \mathfrak{g} -modulo V è il dato di uno spazio vettoriale V su \mathbb{K} e di un omomorfismo di algebre di Lie $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$. Dati $X \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$, scriveremo per semplicità $X \cdot v$ invece di $\rho(X)(v)$.

DEFINIZIONE 35.1.1. Sia $\Lambda^q(\mathfrak{g}, V)$ lo spazio vettoriale delle forme q -multilineari alternate a coefficienti in V . Poniamo

$$(35.1) \quad \left[\begin{aligned} (\delta_q f)(X_0, \dots, X_q) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i X_i f(\dots, \widehat{X}_i, \dots) \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} f([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots), \\ &\forall f \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, V), \forall X_0, \dots, X_q \in \mathfrak{g}. \end{aligned} \right.$$

Definiamo in questo modo una successione di omomorfismi di \mathfrak{g} -moduli

$$(35.2) \quad \delta_q : \Lambda^q(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow \Lambda^{q+1}(\mathfrak{g}, V).$$

Si verifica facilmente

LEMMA 35.1.2. $\delta_{q+1} \circ \delta_q = 0$ per ogni intero $q \geq 0$. □

Otteniamo perciò un complesso di spazi vettoriali ed applicazioni \mathbb{K} -lineari

$$(35.3) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda^0(\mathfrak{g}, V) & \xrightarrow{\delta_0} & \Lambda^1(\mathfrak{g}, V) & \longrightarrow & \\ & & \dots & \longrightarrow & \Lambda^q(\mathfrak{g}, V) & \xrightarrow{\delta_q} & \Lambda^{q+1}(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Poniamo $\delta_{-1} = 0 : 0 \rightarrow \Lambda^0(\mathfrak{g}, V) \simeq V$.

DEFINIZIONE 35.1.3. Definiamo, per ogni intero non negativo q , il q -esimo gruppo di coomologia di \mathfrak{g} a coefficienti in V come il quoziente

$$(35.4) \quad H^q(\mathfrak{g}, V) = \frac{\ker \delta_q}{\text{Imm } \delta_{q-1}}.$$

35.1.1. Il primo gruppo di coomologia e le derivazioni. Osserviamo che

$$(\delta_0 v)(X) = X \cdot v \quad \text{per } v \in V, X \in \mathfrak{g},$$

$$(\delta_1 f)(X, Y) = Xf(Y) - Yf(X) - f([X, Y]) \quad \text{per } f \in \Lambda^1(\mathfrak{g}, V), X, Y \in \mathfrak{g}.$$

In particolare:

$$\ker \delta_0 = H^0(\mathfrak{g}, V) = \{v \in V \mid Xv = 0, \forall X \in \mathfrak{g}\},$$

$$\ker \delta_1 = \{D \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V) \mid D([X, Y]) = XD(Y) - YD(X)\} = \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, V).$$

DEFINIZIONE 35.1.4. Chiamiamo *interne* le derivazione a valori in V della forma

$$(35.5) \quad D_v(X) = X \cdot v, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \text{per } v \in V$$

ed introduciamo la notazione

$$(35.6) \quad \mathfrak{D}\text{er}_0(\mathfrak{g}, V) = \{D_v \mid v \in V\}.$$

Ricordiamo che $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Abbiamo allora

LEMMA 35.1.5. $H^1(\mathfrak{g}, V) = \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, V) / \mathfrak{D}\text{er}_0(\mathfrak{g}, V)$.

Se V è un \mathfrak{g} -modulo banale, allora $H^1(\mathfrak{g}, V) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}, V)$.

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione è conseguenza diretta della definizione. Verifichiamo la seconda. Se $X \cdot v = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$, allora $\text{Imm}(\delta_0) = 0$ ed $H^1(\mathfrak{g}, V) \simeq \ker(\delta_1)$ consiste delle applicazioni \mathbb{K} lineari $f : \mathfrak{g} \rightarrow V$ per cui

$$(35.7) \quad f([X, Y]) = Xf(Y) - Yf(X) = 0,$$

e quindi si identifica con $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}, V)$. □

35.1.2. Derivazioni e prodotti semidiretti. Le derivazioni di un'algebra di Lie sono legate ai prodotti semidiretti, cioè alle loro estensioni *spezzabili*.

Dati un'algebra di Lie \mathfrak{g} di dimensione finita su \mathbb{K} ed un \mathfrak{g} -modulo di dimensione finita, estendiamo il prodotto di Lie di \mathfrak{g} alla somma diretta $\mathfrak{g} \oplus V$ ponendo

$$(35.8) \quad [X + v, Y + w]_0 = [X, Y] + (X \cdot w - Y \cdot v), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad \forall v, w \in V.$$

DEFINIZIONE 35.1.6. Indichiamo con $\mathfrak{g} \ltimes V$ e chiamiamo *estensione abeliana banale di \mathfrak{g} mediante V* l'algebra di Lie definita sulla somma diretta $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus V$ dal prodotto (35.8).

Le inclusioni di \mathfrak{g} e di V nella loro somma diretta ci permettono di identificare \mathfrak{g} ad una sottoalgebra e V a un ideale di $\mathfrak{g} \ltimes V$. Indichiamo con $\pi_{\mathfrak{g}}$ e π_V le proiezioni di $\mathfrak{g} \ltimes V$ sugli addendi diretti.

PROPOSIZIONE 35.1.7. *Siano \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{K} e $\mathfrak{g} \ltimes V$ la sua estensione abeliana banale mediante un \mathfrak{g} -modulo di dimensione finita V . Allora lo spazio $\mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, V)$ delle derivazioni di \mathfrak{g} a valori in V è isomorfo, in modo canonico, allo spazio degli automorfismi di $\mathfrak{g} \ltimes V$ che lasciano fissi gli elementi di \mathfrak{g} . L'isomorfismo è quello che fa corrispondere a $D \in \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, V)$, l'automorfismo*

$$(35.9) \quad \lambda_D : \mathfrak{g} \ltimes V \ni X \oplus v \longrightarrow X \oplus (v + D(X)) \in \mathfrak{g} \ltimes V.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\phi \in \mathcal{A}\text{ut}(\mathfrak{g} \ltimes V)$ lasci fissi gli elementi di \mathfrak{g} e definiamo $D_\phi : \mathfrak{g} \rightarrow V$ mediante

$$D_\phi(X) = \pi_V \circ \phi(X), \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Allora, per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} D_\phi([X, Y]) &= \pi_V(\phi([X, Y])) = \pi_V([X + D_\phi(X), Y + D_\phi(Y)]) \\ &= \pi_V([X, Y] + X \cdot D_\phi(Y) - Y \cdot D_\phi(X)) = X \cdot D_\phi(Y) - Y \cdot D_\phi(X) \end{aligned}$$

e questo dimostra che D_ϕ è una derivazione.

Viceversa, se $D \in \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, V)$, dico che la

$$\phi_D : \mathfrak{g} \ltimes V \ni X + v \rightarrow X + v + D(X) \in \mathfrak{g} \ltimes V$$

è un automorfismo di $\mathfrak{g} \ltimes V$. Abbiamo infatti, per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $v, w \in V$,

$$\begin{aligned} [\phi_D(X + v), \phi_D(Y + w)]_0 &= [X + v + D(X), Y + w + D(Y)]_0 \\ &= [X, Y] + X \cdot v + X \cdot D(Y) - Y \cdot v - Y \cdot D(X) \\ &\quad [X, Y] + X \cdot v - Y \cdot v + D([X, Y]) \\ &= \phi_D([X + v, Y + w]_0). \end{aligned}$$

Poiché $\phi_{-D} = \phi_D^{-1}$, la ϕ_D è invertibile ed è perciò un automorfismo di $\mathfrak{g} \ltimes V$. Infine, poiché $D_{\phi_D} = D$ e $\phi_{D_\phi} = \phi$, la corrispondenza è un isomorfismo lineare. \square

35.1.3. Secondo gruppo di coomologia ed estensioni. Se \mathfrak{a} è un ideale di \mathfrak{g} , il quoziente $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ è un'algebra di Lie ed abbiamo una successione esatta

$$(35.10) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{q} \longrightarrow 0$$

di algebre di Lie e di omomorfismi di algebre di Lie, in cui ι è l'inclusione e π la proiezione sul quoziente.

Ogni \mathfrak{q} -modulo V diviene un \mathfrak{g} -modulo mediante l'azione

$$(35.11) \quad X \cdot v = \pi(X) \cdot v, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall v \in V,$$

che si restringe su \mathfrak{a} all'azione banale. Considereremo i differenziali

$$\begin{aligned} \delta_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{a}} : \Lambda^q(\mathfrak{a}, V) &\longrightarrow \Lambda^{q+1}(\mathfrak{a}, V), \\ \delta_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} : \Lambda^q(\mathfrak{g}, V) &\longrightarrow \Lambda^{q+1}(\mathfrak{g}, V), \\ \delta_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{q}} : \Lambda^q(\mathfrak{q}, V) &\longrightarrow \Lambda^{q+1}(\mathfrak{q}, V). \end{aligned}$$

e le applicazioni

$$\begin{aligned} \pi^* : \Lambda^q(\mathfrak{q}, V) &\longrightarrow \Lambda^q(\mathfrak{g}, V), \\ \iota^* : \Lambda^q(\mathfrak{q}, V) &\longrightarrow \Lambda^q(\mathfrak{a}, V), \end{aligned}$$

caratterizzate da

$$\begin{aligned} \pi^* h(X_1, \dots, X_q) &= h(\pi(X_1), \dots, \pi(X_q)), & \forall h \in \Lambda^q(\mathfrak{q}, V), \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{g}, \\ \iota^* f(Z_1, \dots, Z_q) &= f(Z_1, \dots, Z_q), & \forall f \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, V), \forall Z_1, \dots, Z_q \in \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Osserviamo che le $\pi^* : \Lambda^q(\mathfrak{q}, V) \longrightarrow \Lambda^q(\mathfrak{g}, V)$ sono iniettive.

LEMMA 35.1.8. *Valgono le*

$$(35.12) \quad \pi^* \circ \delta_q^{\mathfrak{q}} = \delta_q^{\mathfrak{g}} \circ \pi^*, \quad \iota^* \circ \delta_q^{\mathfrak{g}} = \delta_q^{\mathfrak{a}} \circ \iota^*, \quad \forall q \in \mathbb{Z}_+. \quad \square$$

In particolare, risultano univocamente definiti gli omomorfismi

$$(35.13) \quad \pi^* : H^q(\mathfrak{q}, V) \ni [h] \longrightarrow [\pi^* h] \in H^q(\mathfrak{g}, V),$$

$$(35.14) \quad \iota^* : H^q(\mathfrak{g}, V) \ni [f] \longrightarrow [\iota^* f] \in H^q(\mathfrak{a}, V).$$

Indichiamo con $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, V)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari $\psi : \mathfrak{a} \rightarrow V$ che sono omomorfismi di \mathfrak{g} -moduli, per cui cioè risulti

$$(35.15) \quad \pi(X) \cdot \psi(Z) = \psi([X, Z]), \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall Z \in \mathfrak{a}.$$

LEMMA 35.1.9. *Per ogni $\psi \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, V)$ possiamo trovare*

$$(35.16) \quad \begin{cases} \tilde{\psi} \in \Lambda^1(\mathfrak{g}, V), \\ \theta \in \Lambda^2(\mathfrak{q}, V), \end{cases} \quad \text{tali che} \quad \begin{cases} \tilde{\psi}|_{\mathfrak{a}} = \psi, \\ \delta_1^{\mathfrak{q}}(\tilde{\psi}) = \pi^*(\theta), \\ \delta_2^{\mathfrak{q}}(\theta) = 0. \end{cases}$$

La corrispondenza $\psi \rightarrow \theta$ definisce per passaggio al quoziente un'applicazione lineare

$$(35.17) \quad \Delta : \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, V) \ni \psi \longrightarrow [\theta] \in H^2(\mathfrak{q}, V).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $\psi \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, V)$ e $\tilde{\psi}$ una qualsiasi sua estensione lineare in $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V) = \Lambda^1(\mathfrak{g}, V)$. Se $X \in \mathfrak{g}, Z \in \mathfrak{a}$, allora

$$\delta_1^{\mathfrak{q}}(\tilde{\psi})(X, Z) = X \cdot \psi(Z) - Z \cdot \tilde{\psi}(X) - \psi([X, Z]) = \pi(X) \cdot \psi(Z) - \psi([X, Z]) = 0$$

per la (35.15). Quindi il nucleo di $\delta_1(\tilde{\psi})$ contiene \mathfrak{a} e perciò la $\delta_1(\tilde{\psi})$ definisce una forma θ in $\Lambda^2(\mathfrak{q}, V)$ con $\pi^*(\theta) = \delta_1^{\mathfrak{q}}(\tilde{\psi})$. Da

$$\pi^*(\delta_2^{\mathfrak{q}}(\theta)) = \delta_2^{\mathfrak{g}}(\pi^*(\theta)) = \delta_2^{\mathfrak{g}} \circ \delta_1^{\mathfrak{q}}(\tilde{\psi}) = 0$$

segue che $\delta_2^{\mathfrak{q}}(\theta) = 0$ e quindi θ è un cociclo in $\Lambda^2(\mathfrak{q}, V)$.

Se $\tilde{\psi}' \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V)$ è un'altra estensione di ψ , allora $\tilde{\psi} - \tilde{\psi}'$ si annulla su \mathfrak{a} e individua perciò, per passaggio al quoziente, un elemento u di $\Lambda^1(\mathfrak{q}, V)$ per cui $\tilde{\psi} - \tilde{\psi}' = \pi^*(u)$. Indichiamo con θ' l'elemento di $\Lambda^2(\mathfrak{q}, V)$ per cui $\pi^*(\theta') = \delta_1^{\mathfrak{q}}(\tilde{\psi}')$. Abbiamo

$$\pi^*(\theta - \theta') = \delta_1^{\mathfrak{q}}(\tilde{\psi} - \tilde{\psi}') = \delta_1^{\mathfrak{q}}(\pi^*(u)) = \pi^*(\delta_1^{\mathfrak{q}}(u)) \implies \theta - \theta' = \delta_1^{\mathfrak{q}}(u).$$

Questo dimostra che la classe $[\theta]$ in $H^2(\mathfrak{q}, V)$ di un elemento $\theta \in \ker(\delta_2^{\mathfrak{q}})$ per cui $\delta_1^{\mathfrak{q}}(\tilde{\psi}) = \pi^*(\theta)$ non dipende dal prolungamento $\tilde{\psi}$ scelto. \square

Indichiamo con $r_{\mathfrak{a}}$ la restrizione ad \mathfrak{a} .

TEOREMA 35.1.10. *Dalla successione esatta (35.10) otteniamo, per ogni \mathfrak{q} -modulo V una successione esatta lunga*

$$(35.18) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{q}, V) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, V) & \xrightarrow{r_\alpha} & \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\alpha, V) \\ & & \xrightarrow{\Delta} & H^2(\mathfrak{q}, V) & \xrightarrow{\pi^*} & H^2(\mathfrak{g}, V). & \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo l'esattezza nei diversi termini della successione.

Esattezza in $\mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{q}, V)$. Poiché $\mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, V) \subseteq \Lambda^1(\mathfrak{g}, V)$ e $\mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{q}, V) \subseteq \Lambda^1(\mathfrak{q}, V)$, l'iniettività è conseguenza dell'iniettività di π^* .

Esattezza in $\mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, V)$. Se $D \in \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, V)$, allora la restrizione di D ad un'applicazione di α in V è un'applicazione in $\mathcal{H}\text{om}_{\mathfrak{g}}(\alpha, V)$. Se $D(Z) = 0$ per $Z \in \alpha$, allora la D definisce per passaggio al quoziente una derivazione D' in $\mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{q}, V)$ per cui $\pi^*(D') = D$.

Esattezza in $\mathcal{H}\text{om}_{\mathfrak{g}}(\alpha, V)$. Sia $\psi \in \mathcal{H}\text{om}_{\mathfrak{g}}(\alpha, V)$. Nel Lemma 35.1.9 abbiamo costruito l'applicazione Δ . Osserviamo innanzi tutto che, se ψ è la restrizione ad α di una derivazione $D = \tilde{\psi}$ di \mathfrak{g} a valori in V , allora $\delta_1^{\mathfrak{q}}(D) = 0$ e questo ci dice che $\Delta(\psi) = 0$.

Viceversa, se $\Delta(\psi) = 0$, allora, detta $\tilde{\psi}$ un'estensione di ψ ad un'applicazione lineare di \mathfrak{g} in V ,

$$\exists u \in \Lambda^1(\mathfrak{q}, V) \text{ tale che } \delta_1^{\mathfrak{q}}(\tilde{\psi}) = \pi^*(\delta_1^{\mathfrak{q}}u) = \delta_1^{\mathfrak{q}}(\pi^*u).$$

Allora $D = \tilde{\psi} - \pi^*(u)$ è una derivazione di \mathfrak{g} a valori in V con $r_\alpha(D) = \psi$.

Esattezza in $H^2(\mathfrak{q}, V)$. Sia $\theta \in \Lambda^2(\mathfrak{q}, V)$ con $\delta_2^{\mathfrak{q}}(\theta) = 0$ e supponiamo che vi sia una $\tilde{\psi} \in \Lambda^1(\mathfrak{g}, V)$ per cui $\pi^*(\theta) = \delta_1^{\mathfrak{q}}(\tilde{\psi})$. Se $X \in \mathfrak{g}$ e $Z \in \alpha$, abbiamo allora

$$\begin{aligned} \pi(X) \cdot \tilde{\psi}(Z) &= \delta_1^{\mathfrak{q}}(\tilde{\psi})(X, Z) + Z \cdot \tilde{\psi}(X) + \tilde{\psi}([X, Z]) \\ &= \theta(\pi(X), \pi(Z)) + \tilde{\psi}([X, Z]) = \tilde{\psi}([X, Z]), \end{aligned}$$

perché la rappresentazione V è banale per α e $\pi(Z) = 0$ per $Z \in \alpha$. Questo ci dice che $\psi = r_\alpha(\tilde{\psi})$ è un elemento di $\mathcal{H}\text{om}_{\mathfrak{g}}(\alpha, V)$ per cui $\Delta(\psi) = [\theta]$.

Ciò completa la dimostrazione. \square

DEFINIZIONE 35.1.11. Chiamiamo una successione esatta (35.10) un'estensione dell'algebra di Lie \mathfrak{q} .

35.1.4. Estensioni abeliane. Supponiamo ora che l'ideale α in (35.10) sia abeliano. Allora

$$[X_1, Z] = [X_2, Z], \quad \forall Z \in \alpha, \text{ se } X_1 - X_2 \in \alpha.$$

Possiamo quindi definire su α una struttura di \mathfrak{q} -modulo ponendo

$$\pi(X) \cdot Z = [X, Z], \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall Z \in \alpha.$$

Diciamo che la struttura di \mathfrak{q} -modulo di α è *indotta dall'estensione* (35.10).

Viceversa, dato un \mathfrak{q} -modulo V , possiamo considerare successioni esatte

$$(35.19) \quad 0 \longrightarrow V \xrightarrow{\iota} \mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{q} \longrightarrow 0$$

con le proprietà:

- (1) \mathfrak{g} sia un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{K} ,

- (2) $\iota(V)$ sia un ideale abeliano di \mathfrak{g} ,
 (3) $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{q}$ sia un omomorfismo surgettivo di algebre di Lie,
 (4) $\iota(\pi(X) \cdot v) = [X, \iota(v)]$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$.

DEFINIZIONE 35.1.12. Una successione esatta (35.19) che soddisfi (1), (2), (3), (4) si dice un'estensione abeliana di \mathfrak{q} mediante V .

Se

$$(35.20) \quad 0 \longrightarrow V \xrightarrow{\iota} \mathfrak{g}' \xrightarrow{\pi} \mathfrak{q} \longrightarrow 0$$

è un'altra estensione abeliana di \mathfrak{q} mediante V , diciamo che essa è *equivalente* alla (35.19) se esiste un isomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ di algebre di Lie che renda commutativo il diagramma

$$(35.21) \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\iota} & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{q} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \rho \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\iota} & \mathfrak{g}' & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{q} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

TEOREMA 35.1.13. C'è una corrispondenza biunivoca tra $H^2(\mathfrak{q}, V)$ e l'insieme delle classi di isomorfismo di estensioni abeliane di \mathfrak{q} mediante V .

DIMOSTRAZIONE. Nel §35.1.2 abbiamo definito su $\mathfrak{q} \oplus V$ la struttura di estensione abeliana banale, con il prodotto

$$(35.22) \quad [Y_1 + v_1, Y_2 + v_2]_0 = [Y_1, Y_2] + (Y_1 \cdot v_2 - Y_2 \cdot v_1), \quad \forall Y_1, Y_2 \in \mathfrak{q}, \forall v_1, v_2 \in V.$$

Per le condizioni (1), (3), (4), il prodotto di Lie su un'estensione abeliana $\mathfrak{q} \oplus V$ di \mathfrak{q} è della forma

$$(35.23) \quad [X_1, X_2]_\theta = [X_1, X_2]_0 + \theta(\pi(X_1), \pi(X_2)), \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{q} \oplus V,$$

per una $\theta \in \Lambda^2(\mathfrak{q}, V)$. Se $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{q} \oplus V$ ed $Y_i = \pi(X_i)$, per $i=1, 2, 3$ sono i corrispondenti elementi di \mathfrak{q} , allora

$$[[X_1, X_2], X_3]_\theta = [[X_1, X_2], X_3]_0 - Y_3 \cdot \theta(Y_1, Y_2) + \theta([Y_1, Y_2], Y_3).$$

Da questa segue subito che condizione necessaria e sufficiente affinché il prodotto definito da θ sia di Lie, verifichi cioè l'identità di Jacobi, è che $\delta_2^{\mathfrak{q}}(\theta) = 0$.

In questo modo abbiamo dimostrato che c'è una corrispondenza biunivoca tra le estensioni abeliane di \mathfrak{q} mediante V e i cocicli in $\Lambda^2(\mathfrak{q}, V)$.

Un isomorfismo lineare ρ di $\mathfrak{q} \oplus V$ in sé che renda commutativo il diagramma (35.21) è della forma

$$\rho = \tau_f : \mathfrak{q} \oplus V \ni Y + v \longrightarrow Y + (v + f(Y)) \mathfrak{q} \oplus V$$

per una $f \in \Lambda^1(\mathfrak{q}, V) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{q}, V)$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} & [Y_1 + (v_1 + f(Y_1)), Y_2 + (v_2 + f(Y_2))]_\theta \\ &= [Y_1 + (v_1 + f(Y_1)), Y_2 + (v_2 + f(Y_2))]_0 + \theta(Y_1, Y_2) \\ &= [Y_1 + v_1, Y_2 + v_2]_0 + Y_1 \cdot f(Y_2) - Y_2 \cdot f(Y_1) + \theta(Y_1, Y_2) \\ &= [Y_1 + v_1, Y_2 + v_2]_{\theta + \delta_1^{\mathfrak{q}}(f)}, \quad \forall Y_1, Y_2 \in \mathfrak{q}, \forall v_1, v_2 \in V. \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione. \square

35.2. Una successione esatta lunga

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{K} .

Siano V, W due \mathfrak{g} -moduli. Ricordiamo che un'applicazione $a: V \rightarrow W$ è un omomorfismo di \mathfrak{g} -moduli se è \mathbb{K} -lineare e

$$(35.24) \quad a(X \cdot v) = X \cdot a(v), \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall v \in V.$$

PROPOSIZIONE 35.2.1. *Sia*

$$(35.25) \quad 0 \longrightarrow U \xrightarrow{a} V \xrightarrow{b} W \longrightarrow 0$$

una successione esatta di \mathfrak{g} -moduli ed omomorfismi di \mathfrak{g} -moduli. Vi è allora una successione esatta lunga in coomologia:

$$(35.26) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\mathfrak{g}, U) & \xrightarrow{a_*} & H^0(\mathfrak{g}, V) & \xrightarrow{b_*} & H^0(\mathfrak{g}, W) \\ & & \xrightarrow{\Delta} & H^1(\mathfrak{g}, U) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow H^{q-1}(\mathfrak{g}, W) \\ & & \xrightarrow{\Delta} & H^q(\mathfrak{g}, U) & \xrightarrow{a_*} & H^q(\mathfrak{g}, V) & \xrightarrow{b_*} H^q(\mathfrak{g}, W) \\ & & \xrightarrow{\Delta} & H^{q+1}(\mathfrak{g}, U) & \longrightarrow & \dots & \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che la successione esatta (35.25) definisce, per ogni intero non negativo q , una successione esatta

$$(35.27) \quad 0 \longrightarrow \Lambda^q(\mathfrak{g}, U) \xrightarrow{a_*} \Lambda^q(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{b_*} \Lambda^q(\mathfrak{g}, W) \longrightarrow 0,$$

ove

$$\begin{aligned} (a_* \eta_q)(X_1, \dots, X_q) &= a(\eta_q(X_1, \dots, X_q)), \quad \forall \eta_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, U), \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{g}, \\ (b_* \theta_q)(X_1, \dots, X_q) &= b(\theta_q(X_1, \dots, X_q)), \quad \forall \theta_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, V), \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Definiamo innanzi tutto gli omomorfismi Δ e, contestualmente, dimostriamo l'esattezza in $H^q(\mathfrak{g}, W)$. Sia $\xi_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, W)$, con $\delta_q \xi_q = 0$. Poiché b_* è surgettiva, possiamo trovare una forma $\theta_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, V)$ tale che $b_* \theta_q = \xi_q$. Poiché b è un omomorfismo di \mathfrak{g} -moduli, commuta con il differenziale δ_* , per cui abbiamo

$$b_*(\delta_q \theta_q) = \delta_q(b_* \theta_q) = \delta_q \xi_q = 0.$$

Per l'esattezza di (35.27), vi è allora un'unica $\eta_{q+1} \in \Lambda^{q+1}(\mathfrak{g}, U)$ tale che

$$\delta_q \theta_q = a_* \eta_{q+1},$$

e da

$$a_*(\delta_{q+1} \eta_{q+1}) = \delta_{q+1}(a_* \eta_{q+1}) = \delta_{q+1} \delta_q \theta_q = 0$$

segue che $\delta_{q+1} \eta_{q+1} = 0$, per l'iniettività di a_* . Se $\theta'_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, V)$ e $b_* \theta'_q = b_* \theta_q = \xi_q$, allora, per l'esattezza di (35.27) vi è $\eta_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, U)$ tale che

$$\theta'_{q+1} = \theta_q + a_* \eta_q.$$

Definiamo allora η'_{q+1} mediante

$$a_* \eta'_{q+1} = \delta_q(\theta_q + a_* \eta_q) = \delta_q \theta_q + a_*(\delta_q \eta_q).$$

Abbiamo allora

$$\mathbf{a}_* \eta'_{q+1} = \mathbf{a}_*(\eta_{q+1} + \delta_q \eta_q) \implies \eta'_{q+1} = \eta_{q+1} + \delta_q \eta_q.$$

Questo dimostra che la catena

$$\begin{aligned} [\xi_q] \in H^q(\mathfrak{g}, \mathbf{W}) &\longrightarrow (\theta_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, \mathbf{V}), \mathbf{b}_* \theta_q = \xi_q) \\ &\longrightarrow (\eta_{q+1} \in \Lambda^{q+1}(\mathfrak{g}, \mathbf{U}), \mathbf{a}_* \eta_{q+1} = \delta \theta_q) \longrightarrow [\eta_{q+1}] \in H^{q+1}(\mathfrak{g}, \mathbf{U}) \end{aligned}$$

definisce un'applicazione $\Delta : H^q(\mathfrak{g}, \mathbf{W}) \rightarrow H^{q+1}(\mathfrak{g}, \mathbf{U})$. È chiaro altresì che la composizione $H^q(\mathfrak{g}, \mathbf{V}) \xrightarrow{\mathbf{b}_*} H^q(\mathfrak{g}, \mathbf{U}) \xrightarrow{\Delta} H^{q+1}(\mathfrak{g}, \mathbf{W})$ è nulla, (nella costruzione precedente si può prendere $\delta_q \theta' = 0$).

Se $[\eta_{q+1}] = \Delta([\xi_q]) = 0$, allora $\eta_{q+1} = \delta_q \eta_q$ per qualche $\eta_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, \mathbf{U})$ ed abbiamo perciò

$$\delta_q \theta_q = \mathbf{a}_* \delta_q \eta_q \implies \delta_q(\theta_q - \mathbf{a}_* \eta_q) = 0.$$

Poiché $\mathbf{b}_*(\theta_q - \mathbf{a}_* \eta_q) = \mathbf{b}_* \theta_q = \xi_q$, in questo caso $[\xi_q] = \mathbf{b}_*([\theta_q - \mathbf{a}_* \eta_q])$ è immagine di una classe di coomologia di $H^q(\mathfrak{g}, \mathbf{V})$. Questo dimostra l'esattezza in $H^q(\mathfrak{g}, \mathbf{W})$.

Sia ora $\theta_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, \mathbf{V})$, con $\delta_q \theta_q = 0$ e $\mathbf{b}_*([\theta_q]) = [\mathbf{b}_* \theta_q] = 0$. Esisterà allora $\xi_{q-1} \in \Lambda^{q-1}(\mathfrak{g}, \mathbf{W})$ tale che

$$\delta_{q-1} \xi_{q-1} = \mathbf{b}_* \theta_q.$$

Sia $\theta_{q-1} \in \Lambda^{q-1}(\mathfrak{g}, \mathbf{V})$ tale che $\mathbf{b}_* \theta_{q-1} = \xi_{q-1}$. Abbiamo allora

$$\mathbf{b}_*(\theta_q - \delta_{q-1} \theta_{q-1}) = \mathbf{b}_* \theta_q - \delta_{q-1} \mathbf{b}_* \theta_{q-1} = \mathbf{b}_* \theta_q - \delta_{q-1} \xi_{q-1} = 0.$$

Vi è allora un unico elemento $\eta_q \in \Lambda(\mathfrak{g}, \mathbf{U})$ tale che

$$\mathbf{a}_* \eta_q = \theta_q - \delta_{q-1} \theta_{q-1}.$$

Da

$$\mathbf{a}_*(\delta_q \eta_q) = \delta_q \mathbf{a}_* \eta_q = \delta_q(\theta_q - \delta_{q-1} \theta_{q-1}) = 0$$

segue che $\delta_q \eta_q = 0$ e dunque η_q definisce una classe $[\eta_q] \in H^q(\mathfrak{g}, \mathbf{U})$ con $\mathbf{a}_*([\eta_q]) = [\theta_q]$.

Sia infine $\eta_q \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, \mathbf{U})$, con $\delta \eta_q = 0$ e $\mathbf{a}_*([\eta_q]) = 0$. Esiste quindi $\theta_{q-1} \in \Lambda^{q-1}(\mathfrak{g}, \mathbf{V})$ tale che

$$\mathbf{a}_* \eta_q = \delta_{q-1} \theta_{q-1}.$$

Abbiamo allora

$$\delta_{q-1} \mathbf{b}_* \theta_{q-1} = \mathbf{b}_* \delta_{q-1} \theta_{q-1} = \mathbf{b}_* \mathbf{a}_* \eta_q = 0.$$

Quindi $\xi_{q-1} = \mathbf{b}_* \theta_{q-1} \in \Lambda^{q-1}(\mathfrak{g}, \mathbf{W})$ soddisfa $\delta_{q-1} \xi_{q-1} = 0$ e definisce perciò una classe di coomologia $[\xi_{q-1}] \in H^{q-1}(\mathfrak{g}, \mathbf{W})$. Abbiamo

$$(35.28) \quad \xi_{q-1} = \mathbf{b}_* \theta_{q-1}, \quad \mathbf{a}_* \eta_q = \delta_{q-1} \theta_{q-1}$$

e quindi $\Delta([\xi_{q-1}]) = [\eta_q]$. Ciò dimostra l'esattezza anche in $H^q(\mathfrak{g}, \mathbf{U})$ e completa quindi la dimostrazione. \square

35.3. Un criterio di Cartan

In questo paragrafo dimostriamo un criterio di Cartan per la risolubilità di un'algebra di Lie di trasformazioni lineari.

LEMMA 35.3.1. *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo \mathbb{K} con $\text{car}(\mathbb{K})=0$ ed $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ due sottospazi vettoriali di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$, con $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$. Poniamo*

$$(35.29) \quad \mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V) \mid \text{ad}_X(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{a}\}.$$

Se $X \in \mathfrak{q}$ e $\text{trac}(X \cdot Y) = 0$ per ogni $Y \in \mathfrak{q}$, allora X è nilpotente.

DIMOSTRAZIONE. Poiché sia la condizione (35.29) che la nilpotenza si preservano per estensione del campo di base, possiamo supporre \mathbb{K} algebricamente chiuso. In particolare, X ammette una decomposizione di Jordan nella somma $S+N$ di un endomorfismo S diagonalizzabile e di un N nilpotente. Vogliamo dimostrare che $S = 0$.

Sia e_1, \dots, e_n una base di V formata da autovettori di S e sia $S(e_i) = \lambda_i$, per $i=1, \dots, n$. Fissata una qualsiasi funzione f di \mathbb{K} in sé, $\mu=(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))$ in \mathbb{K} , sia Y_f l'endomorfismo di V rappresentato dalla matrice $\text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))$. Indichiamo con $E_{i,j}$ gli endomorfismi di V con

$$E_{i,j}(e_h) = \begin{cases} e_j, & \text{se } h=i, \\ 0, & \text{se } h \neq i. \end{cases}$$

Essi formano una base di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ ed abbiamo

$$\text{ad}_S(E_{i,j}) = \lambda_i - \lambda_j, \quad \text{ad}_Y(E_{i,j}) = f(\lambda_i) - f(\lambda_j), \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Sia $P_f(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio senza termine costante per cui¹

$$P_f(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i) - f(\lambda_j).$$

Abbiamo allora

$$\text{ad}_{Y_f} = P(\text{ad}_S).$$

Poiché ad_S è la parte semisemplice di ad_X nella sua decomposizione di Jordan, per un teorema di Wedderburn è uguale a $Q(\text{ad}_X)$ per un opportuno polinomio $Q(x) \in \mathbb{K}[x]$ privo di termine di grado zero. Da questo ricaviamo che Y_f appartiene a \mathfrak{q} per ogni $f \in \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$. Da questa ricaviamo che

$$\text{trac}(X \cdot Y_f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(\lambda_i) = 0, \quad \forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$$

e quindi $S = 0$, perché semisemplice con tutti gli autovalori nulli. \square

TEOREMA 35.3.2 (Criterio di Cartan). *Condizione necessaria e sufficiente affinché una sottoalgebra \mathfrak{g} di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ sia risolubile è che*

$$(35.30) \quad \text{trac}(X \cdot Y) = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

¹L'esistenza di un tale polinomio segue dalla formula d'interpolazione di Lagrange.

DIMOSTRAZIONE. La sottoalgebra \mathfrak{g} è risolubile se e soltanto se la sua derivata $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è nilpotente e questo, per il teorema di Engels, è verificato se ogni endomorfismo di $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è nilpotente.

Per dimostrare la sufficienza, applichiamo il Lemma 35.3.1 con $\mathfrak{a} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}$. Allora, con la notazione del Lemma, $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}$ e gli elementi di $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ sono nilpotenti perché abbiamo supposto valga (35.30).

La necessità segue immediatamente se supponiamo \mathbb{K} algebricamente chiuso ed utilizziamo il teorema di Lie sulle algebre risolubili di endomorfismi lineari. \square

TEOREMA 35.3.3. *Se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{K} e la sua forma di Killing verifica*

$$(35.31) \quad k(X, Y) = \text{trac}(\text{ad}_X \cdot \text{ad}_Y) = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],$$

allora \mathfrak{g} è risolubile.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, detto \mathfrak{z} il centro di \mathfrak{g} , segue dal criterio di Cartan del Teorema 35.3.2 che $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ è risolubile. Poiché \mathfrak{z} è abeliana e quindi risolubile, anche \mathfrak{g} è allora risolubile. \square

35.4. Elemento di Casimir di una rappresentazione

Siano \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo \mathbb{K} e V una sua rappresentazione lineare di dimensione finita n . Indichiamo con $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ l'omomorfismo di algebre di Lie della rappresentazione e definiamo la forma bilineare

$$(35.32) \quad k_V(X, Y) = \text{trac}(\rho(X) \cdot \rho(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

LEMMA 35.4.1. *La forma k_V è una forma bilineare simmetrica \mathfrak{g} -invariante. L'invarianza significa che*

$$(35.33) \quad k_p(\text{ad}_X(Y), Z) + k_p(Y, \text{ad}_X(Z)) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi segue dalla proprietà di simmetria della traccia. Se $A, B, C \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$, allora

$$\begin{aligned} \text{trac}([A, B] \cdot C) &= \text{trac}(A \cdot B \cdot C) - \text{trac}(B \cdot A \cdot C) = \text{trac}(B \cdot C \cdot A) - \text{trac}(B \cdot A \cdot C) \\ &= \text{trac}(B \cdot [C, A]) = -\text{trac}(B \cdot [A, C]). \end{aligned} \quad \square$$

COROLLARIO 35.4.2. *Il sottospazio $\ker(k_p) = \{X \in \mathfrak{g} \mid k_p(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}$ è un ideale di \mathfrak{g} .* \square

DEFINIZIONE 35.4.3. Chiamiamo k_V la forma associata alla rappresentazione V . La forma $k_{\mathfrak{g}}$ associata alla rappresentazione aggiunta si dice *forma di Killing*.

TEOREMA 35.4.4. *Sia V una rappresentazione lineare di dimensione finita di \mathfrak{g} per cui k_V sia non degenere.*

(1) *Se $Y_1, \dots, Y_n, Y'_1, \dots, Y'_n, Z_1, \dots, Z_n, Z'_1, \dots, Z'_n$, sono basi di \mathfrak{g} tali che*

$$k_V(Y_i, Z_j) = k(Y'_i, Z'_j) = \delta_{i,j} \text{ (delta di Kronecker), } \quad \forall 1 \leq i, j \leq n,$$

allora

$$\sum_{i=1}^n \rho(Y_i) \circ \rho(Z_i) = \sum_{i=1}^n \rho(Y'_i) \circ \rho(Z'_i).$$

(2) Se $Y_1, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n$, sono basi di \mathfrak{g} tali che

$$(35.34) \quad k_V(Y_i, Z_j) = \delta_{i,j}, \text{ (delta di Kronecker)} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n,$$

allora l'endomorfismo

$$(35.35) \quad c_V := \sum_{i=1}^n \rho(Y_i) \circ \rho(Z_i)$$

di V commuta con tutti gli endomorfismi di $\rho(\mathfrak{g})$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Se $Y'_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} Y_j$, $Z'_i = \sum_{j=1}^n b_{i,j} Z_j$, abbiamo

$$\delta_{i,j} = k_V(Y'_i, Z'_j) = \sum_{h,k=1}^n a_{i,h} b_{j,k} k_V(Y_h, Z_k) = \sum_{h,k=1}^n a_{i,h} b_{j,k} \delta_{h,k} = \sum_{h=1}^n a_{i,h} b_{j,h}$$

e quindi $(b_{i,j})^\top = (a_{i,j})^{-1}$. Da questa segue la

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \rho(Y'_i) \circ \rho(Z'_i) &= \sum_{i,j,h=1}^n a_{i,j} b_{i,h} \rho(Y_j) \circ \rho(Z_h) = \sum_{j,h=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} b_{i,h} \right) \rho(Y_j) \circ \rho(Z_h) \\ &= \sum_{j,h=1}^n \delta_{j,h} \rho(Y_j) \circ \rho(Z_h) = \sum_{i=1}^n \rho(Y_i) \circ \rho(Z_i). \end{aligned}$$

(2) Dato X in \mathfrak{g} , definiamo i coefficienti $\eta_{i,i}, \zeta_{i,j} \in \mathbb{K}$ mediante

$$[X, Y_i] = \sum_{j=1}^n \eta_{i,j} Y_j, \quad [X, Z_i] = \sum_{j=1}^n \zeta_{i,j} Z_j.$$

Abbiamo allora

$$(*) \quad \eta_{i,j} = k_V([X, Y_i], Z_j) = -k_V(Y_i, [X, Z_j]) = -\zeta_{j,i},$$

da cui

$$\begin{aligned} &\rho(X) \circ c_V - c_V \circ \rho(X) \\ &= \sum_{i=1}^n (\rho(X) \rho(Y_i) \rho(Z_i) - \rho(Y_i) \rho(X) \rho(Z_i) + \rho(Y_i) \rho(X) \rho(Z_i) - \rho(Y_i) \rho(Z_i) \rho(X)) \\ &= \sum_{i=1}^n (\rho([X, Y_i]) \rho(Z_i) + \rho(Y_i) \rho([X, Z_i])) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (\eta_{i,j} \rho(Y_j) \rho(Z_i) + \zeta_{i,j} \rho(Y_i) \rho(Z_j)) = 0 \end{aligned}$$

per la (*). La dimostrazione è completa. \square

DEFINIZIONE 35.4.5. Se V è un \mathfrak{g} -modulo di dimensione finita per cui la forma invariante k_V sia non degenere, allora l'elemento c_V definito da (35.35) si dice *l'emento di Casimir* della rappresentazione.

Dal Lemma di Schur segue

PROPOSIZIONE 35.4.6. Se V è una rappresentazione irriducibile per cui k_V sia non degenere, allora l'elemento di Casimir c_V è un endomorfismo invertibile di V .

DIMOSTRAZIONE. Infatti c_V appartiene al commutante della rappresentazione e quindi o è nullo o è invertibile. Non è nullo perché ha traccia uguale alla dimensione di \mathfrak{g} . \square

35.5. Coomologia delle algebre di Lie semisemplici. I

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{K} .

TEOREMA 35.5.1. *Se \mathfrak{g} è semisemplice e V è un \mathfrak{g} -modulo semplice di dimensione finita su cui \mathfrak{g} agisca in modo non banale, allora $H^q(\mathfrak{g}, V) = 0$ per ogni $q \geq 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ l'omomorfismo di rappresentazione. Poiché \mathfrak{g} è semisemplice, l'ideale $\ker \rho$ ha un ideale complementare $\mathfrak{a} = \ker \rho^\perp$ che è semisemplice e su cui ρ si restringe a una rappresentazione fedele. La forma invariante k_V della rappresentazione è non degenera su \mathfrak{a} e possiamo definire quindi il corrispondente elemento di Casimir c_V . Fissate due basi Y_1, \dots, Y_n e Z_1, \dots, Z_n di \mathfrak{a} con $k_V(Y_i, Z_j) = \delta_{i,j}$, l'elemento di Casimir di \mathfrak{a} è una trasformazione invertibile di V , con $c_V = \sum_{i=1}^n \rho(Y_i) \circ \rho(Z_i)$. Per semplicità di notazione, scriveremo nel seguito della dimostrazione $X \cdot v$ invece di $\rho(X)(v)$ per $X \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$. In particolare, $c_V = \sum_{i=1}^n Y_i \cdot Z_i$.

Definiamo, per $q \geq 0$, un'applicazione $\sigma_q : \Lambda^q(\mathfrak{g}, V) \rightarrow \Lambda^{q-1}(\mathfrak{g}, V)$ ponendo

$$(*) \quad \begin{cases} \sigma_0(v) = 0, & \forall v \in V = \Lambda^0(\mathfrak{g}, V), \\ \sigma_1 f = \sum_{i=1}^n Y_i \cdot f(Z_i), & \forall f \in \Lambda^1(\mathfrak{g}, V), \\ (\sigma_q f)(X_1, \dots, X_{q-1}) = \sum_{i=1}^{q-1} Y_i \cdot f(Z_i, X_1, \dots, X_{q-1}) & \forall f \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, V), \quad q \geq 2, \\ & \forall X_1, \dots, X_{q-1} \in \mathfrak{g}. \end{cases}$$

Poiché V è semplice e l'azione di \mathfrak{g} su V è non banale,

$$H^0(\mathfrak{g}, V) = \{v \mid X \cdot v = 0, \forall X \in \mathfrak{g}\} = 0.$$

Se $f \in \Lambda^1(\mathfrak{g}, V) = \mathcal{H}om_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V)$, allora

$$\begin{aligned} (\delta_0 \circ \sigma_1 + \sigma_2 \circ \delta_1)f(X) &= \left(\delta_0 \left(\sum_{i=1}^n Y_i \cdot f(Z_i) \right) \right)(X) + \sum_{i=1}^n Y_i \cdot (\delta_1 f)(Z_i, X) \\ &= \sum_{i=1}^n X \cdot Y_i \cdot f(Z_i) + \sum_{i=1}^n Y_i \cdot (Z_i \cdot f(X) - X \cdot f(Z_i) - f([Z_i, X])) \\ &= \sum_{i=1}^n ([X, Y_i] \cdot f(Z_i) - Y_i f([Z_i, X]) + Y_i \cdot Z_i \cdot f(X)) \end{aligned}$$

Poiché \mathfrak{a} è un ideale, i commutatori $[X, Y_i], [X, Z_i]$ appartengono ad \mathfrak{a} per ogni X in \mathfrak{g} . Se

$$(*) \quad [X, Y_i] = \sum_j \eta_{i,j}(X) Y_j, \quad [X, Z_i] = \sum_j \zeta_{i,j}(X) Z_j,$$

allora

$$(**) \quad \zeta_{i,j}(X) = -\eta_{j,i}(X), \quad \forall 1 \leq i, j \leq n, \quad \forall X \in \mathfrak{a},$$

perché $\zeta_{i,j}(X) = k_V([X, W_i], Y_j) = -k_V([X, Y_j], W_i) = -\eta_{j,i}$. Otteniamo perciò la formula

$$(\delta_0 \circ \sigma_1 + \sigma_2 \circ \delta_1)f = c_V \circ f$$

che ci dice che

$$\delta_0(c_V^{-1} \circ \sigma_1(f)) = f, \quad \text{se } f \in \Lambda^1(\mathfrak{g}, V) \text{ e } \delta_1(f) = 0.$$

Questo dimostra che anche $H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$.

Per dimostrare l'annullarsi dei gruppi di coomologia di ordine $q \geq 2$ si procede in modo analogo. Abbiamo, per ogni X_1, \dots, X_q in \mathfrak{g} ,

$$\begin{aligned}
& (\delta_{q-1}\sigma_q + \sigma_{q+1}\delta_q)(f)(X_1, \dots, X_q) \\
&= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q (-1)^j X_j Y_i f(Z_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j < h \leq q} (-1)^{j+h} Y_i f(Z_i, [X_j, X_h], \dots, \widehat{X}_j, \dots, \widehat{X}_h, \dots) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n Y_i Z_i f(X_1, \dots, X_q) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q (-1)^j Y_i f([Z_i, X_j], \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q (-1)^j Y_i X_j f(Z_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j < h \leq q} (-1)^{j+h} Y_i f(Z_i, [X_j, X_h], \dots, \widehat{X}_j, \dots, \widehat{X}_h, \dots) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q (-1)^j [Y_i, X_j] f(Z_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n Y_i Z_i f(X_1, \dots, X_q) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q (-1)^j Y_i f([Z_i, X_j], \dots, \widehat{X}_j, \dots).
\end{aligned}$$

Utilizzando nuovamente le (*) e (**), vediamo che la prima e la terza riga ad ultimo membro sono l'una l'opposta dell'altra ed otteniamo perciò la formula

$$(\delta_{q-1}\sigma_q + \sigma_{q+1}\delta_q)(f) = c_V \circ f.$$

Poiché c_V commuta con tutti gli endomorfismi di $\rho(\mathfrak{g})$, otteniamo che

$$\delta_{q-1}(c_V^{-1} \circ \sigma_q(f)) = f, \quad \text{se } f \in \Lambda^q(\mathfrak{g}, V) \text{ e } \delta_q(f) = 0.$$

Ciò dimostra che $H^q(\mathfrak{g}, V) = 0$ anche per $q \geq 2$ e completa la dimostrazione del teorema. \square

OSSERVAZIONE 35.5.2. Se \mathfrak{g} è semisemplice, ma la sua azione sul \mathfrak{g} -modulo V è banale, la coomologia può essere non zero anche in dimensione positiva. Consideriamo ad esempio \mathbb{K} come un \mathfrak{g} -modulo banale e definiamo

$$\theta_3(X, Y, Z) = \kappa_{\mathfrak{g}}([X, Y], Z), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g},$$

ove $\kappa_{\mathfrak{g}}$ è la forma di Killing. Poiché

$$\kappa_{\mathfrak{g}}([X, Y], Z) = \kappa_{\mathfrak{g}}([Y, Z], X) = \kappa_{\mathfrak{g}}([Z, X], Y),$$

abbiamo $\theta_3 \in \Lambda^3(\mathfrak{g}, \mathbb{K})$. Inoltre $\delta_3\theta_3 = 0$ per l'identità di Jacobi. Ma si può verificare che $[\theta_3] \neq 0$.

TEOREMA 35.5.3 (Primo lemma di Whitehead). *Se \mathfrak{g} è semisemplice, allora $H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$ per ogni \mathfrak{g} -modulo di dimensione finita V .*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che vi siano dei \mathfrak{g} -moduli di dimensione finita per cui il primo gruppo di coomologia sia non nullo. Tra essi ve ne sarà allora uno, diciamo V , di dimensione minima. Se V non fosse semplice, conterrebbe un \mathfrak{g} -sottomodulo non banale U , con $0 \neq U \subsetneq V$ ed avremmo quindi, con

$W = V/U$, una successione esatta corta di \mathfrak{g} -moduli (35.25). Da essa otteniamo la successione esatta

$$H^1(\mathfrak{g}, U) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, W).$$

Poiché sia U che W hanno dimensione minore di V , segue dall'ipotesi induttiva che $H^1(\mathfrak{g}, U) = 0$, $H^1(\mathfrak{g}, W) = 0$. Ma ciò implica che anche $H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$, dandoci una contraddizione. Perciò V deve essere semplice. Inoltre, per il Teorema 35.5.1, V deve essere un \mathfrak{g} -modulo banale. Ci siamo quindi ricondotti al caso in cui $V \simeq \mathbb{K}$. Un elemento $\theta_1 \in \Lambda^1(\mathfrak{g}, \mathbb{K})$ soddisfa $\delta\theta_1 = 0$ se

$$0 = (d\theta_1)(X, Y) = -\theta_1([X, Y]) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Poiché $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ perché \mathfrak{g} è semisemplice, questo implica che $\theta_1 = 0$. La dimostrazione è completa. \square

35.6. Un teorema di Weyl

Diamo in questo paragrafo un'altra dimostrazione del Teorema di Weyl sulla decomponibilità delle rappresentazioni finite delle algebre di Lie semisemplici.

Ricordiamo che, se U e V sono due \mathfrak{g} -moduli di dimensione finita, lo spazio $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ è anch'esso un \mathfrak{g} -modulo, per l'azione definita da:

$$(35.36) \quad (Xa)(v) = X(a(v)) - a(Xv), \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall a \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U), \forall v \in V.$$

Gli elementi di $H^0(\mathfrak{g}, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U))$ sono i \mathfrak{g} -omomorfismi di V in U , cioè le applicazioni lineari $a : V \rightarrow U$ tali che

$$a(Xv) = X(a(v)), \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall v \in V.$$

TEOREMA 35.6.1 (Weyl). *Se \mathfrak{g} è semisemplice, ogni \mathfrak{g} -modulo di dimensione finita è somma diretta di \mathfrak{g} -moduli semplici.*

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che, se V è un \mathfrak{g} -modulo di dimensione finita che contiene un sotto- \mathfrak{g} -modulo U , con $0 \neq U \subsetneq V$, allora esiste un sotto- \mathfrak{g} -modulo W di V tale che $V = U \oplus W$.

Dati due \mathfrak{g} -moduli U e V con $0 \neq U \subsetneq V$, poniamo $Q = V/U$. Abbiamo allora una successione esatta corta di \mathfrak{g} -moduli

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(Q, U) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, U) \longrightarrow 0,$$

da cui deduciamo una successione esatta lunga

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, U)) \longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)) \\ &\longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, U)) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(Q, U)) = 0, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è una conseguenza del primo lemma di Whitehead. Per la surgettività di $H^0(\mathfrak{g}, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)) \rightarrow H^0(\mathfrak{g}, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, U))$, esiste un \mathfrak{g} -omomorfismo $V \rightarrow U$ la cui restrizione ad U sia l'identità. Il suo nucleo definisce un sottospazio \mathfrak{g} -invariante W complementare ad U . \square

35.7. Coomologia delle algebre di Lie semisemplici. II

TEOREMA 35.7.1 (Secondo lemma di Whitehead). *Se \mathfrak{g} è semisemplice, allora $H^2(\mathfrak{g}, V) = 0$ per ogni \mathfrak{g} -modulo di dimensione finita V .*

DIMOSTRAZIONE. Ragionando come nella dimostrazione del primo lemma di Whitehead, ci possiamo ricondurre al caso in cui $V = \mathbb{K}$ e l'azione di \mathfrak{g} su \mathbb{K} sia banale.

Come abbiamo visto nel §35.1.4, ad una $\theta \in \Lambda^2(\mathfrak{g}, \mathbb{K})$, con

$$\delta_2(\theta)(Y, X, Z) = \theta([X, Y], Z) + \theta([Y, Z], X) + \theta([Z, X], Y) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g},$$

corrisponde una struttura di algebra di Lie sulla somma diretta $\mathfrak{g} \oplus \mathbb{K}$, con prodotto di Lie

$$[X_1 + k_1, X_2 + k_2]_\theta = [X_1, X_2] + \theta(X_1, X_2), \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}.$$

Indichiamo con $\tilde{\mathfrak{g}}_\theta$ l'algebra di Lie ottenuta in questo modo. Possiamo considerarla come un \mathfrak{g} -modulo e $U = \{0\} \oplus \mathbb{K}$ come un suo sotto- \mathfrak{g} -modulo. Per il teorema di Weyl, U ha un sotto- \mathfrak{g} -modulo W complementare in $\tilde{\mathfrak{g}}_\theta$, che sarà della forma

$$W = \{X - f(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$$

per una $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, \mathbb{K}) = \Lambda^1(\mathfrak{g}, \mathbb{K})$. Abbiamo allora

$$X \cdot (Y - f(Y)) = [X, Y + f(Y)]_\theta = [X, Y] + \theta(X, Y) = [X, Y] - f([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Quindi

$$(\dagger) \quad (\delta_1 f)(X, Y) = -f([X, Y]) = \theta(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

ci dice che $\theta = \delta_1(f)$. La dimostrazione è completa. \square

OSSERVAZIONE 35.7.2. Poiché $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, la (\dagger) determina completamente la f . In particolare, se \mathfrak{g} è semisemplice, allora il differenziale δ_1 definisce un isomorfismo di $\Lambda^1(\mathfrak{g}, \mathbb{K}) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, \mathbb{K}) = \mathfrak{g}^*$ con lo spazio $Z^2(\mathfrak{g}, \mathbb{K})$ delle θ in $\Lambda^2(\mathfrak{g}, \mathbb{K})$ con $\delta_2 \theta = 0$.

35.8. Il teorema di Levi-Malcev

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su un campo \mathbb{K} di caratteristica zero, \mathfrak{r} il suo radicale, \mathfrak{n} il più grande ideale nilpotente di \mathfrak{g} ed $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{n}$ il suo radicale nilpotente. Per ogni $X \in \mathfrak{n}$ la somma della serie

$$(35.37) \quad Y \longrightarrow \exp(\text{ad}_X)(Y) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \text{ad}_X^h(Y)$$

è ben definita, quale sia il campo \mathbb{K} di caratteristica 0, perché ha solo un numero finito di termini diversi da 0 e l'applicazione

$$(35.38) \quad \exp(\text{ad}_X) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

è un automorfismo dell'algebra di Lie \mathfrak{g} .

Ricordiamo che $\mathcal{A}ut_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{g})$ (rispettivamente $\mathcal{A}ut_{\mathfrak{n}_0}(\mathfrak{g})$) indica il gruppo di automorfismi di \mathfrak{g} generato dagli $\exp(\text{ad}_X)$, al variare di X in \mathfrak{n} (rispettivamente, al variare di X in \mathfrak{n}_0). Entrambi sono sottogruppi normali del gruppo $\mathcal{A}ut(\mathfrak{g})$ di tutti gli automorfismi di \mathfrak{g} .

$\text{Aut}_{\mathfrak{n}_0}(\mathfrak{g})$ si dice *il gruppo degli automorfismi speciali* di \mathfrak{g} .

DEFINIZIONE 35.8.1. Si dice *fattore di Levi* di \mathfrak{g} una sua sottoalgebra \mathfrak{s} per cui l'applicazione composta 'indexfatore! di Levi

$$(35.39) \quad \mathfrak{s} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}/\mathfrak{r},$$

in cui ι è l'inclusione e π la proiezione nel quoziente, sia un isomorfismo.

Un fattore di Levi \mathfrak{s} è semisemplice e dà luogo ad una decomposizione di \mathfrak{g} in prodotto semidiretto

$$(35.40) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r},$$

che si dice *decomposizione di Levi* di \mathfrak{g} .

TEOREMA 35.8.2 (Levi-Malcev). *Ogni algebra di Lie \mathfrak{g} su un campo \mathbb{K} di caratteristica zero ammette un fattore di Levi. Il gruppo degli automorfismi speciali opera transitivamente sui fattori di Levi di \mathfrak{g} .*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo in primo luogo l'esistenza di un fattore di Levi, ragionando per induzione sulla dimensione di \mathfrak{g} .

Un'algebra di Lie di dimensione minore o uguale ad 1 è abeliana. Quindi coincide con il suo radicale ed ha pertanto fattore di Levi banale.

Supponiamo ora che $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g} = n > 1$ e che il teorema valga per algebre di Lie di dimensione minore di n . Se \mathfrak{g} non contiene ideali abeliani non banali, allora è semisemplice e coincide con il suo fattore di Levi. Dunque, in questo caso, non c'è nulla da dimostrare.

Supponiamo allora che \mathfrak{g} contenga un ideale abeliano \mathfrak{a} di dimensione positiva. Per l'ipotesi induttiva, il quoziente $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, avendo dimensione minore di n , contiene un fattore di Levi \mathfrak{s}' . Sia $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{q}$ la proiezione nel quoziente. L'immagine inversa $\mathfrak{b} := \pi^{-1}(\mathfrak{s}')$ è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} ed, in modo naturale, un \mathfrak{s}' -modulo, per passaggio al quoziente della sua rappresentazione aggiunta. Per il teorema di Weyl (Teor.35.6.1), poiché \mathfrak{s}' è semisemplice, l'ideale \mathfrak{a} , in quanto sotto- \mathfrak{s}' -modulo di \mathfrak{g} , ammette un \mathfrak{s}' -modulo complementare \mathfrak{s} in \mathfrak{b} . La proiezione nel quoziente si restringe ad un isomorfismo di algebre di Lie di \mathfrak{s} su \mathfrak{s}' e quindi \mathfrak{s} è una sottoalgebra di Lie semisemplice di \mathfrak{g} . Poiché il radicale \mathfrak{r} di \mathfrak{g} è l'immagine inversa del radicale di \mathfrak{q} , abbiamo $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{r}$ e quindi \mathfrak{s} è un fattore di Levi di \mathfrak{g} .

Resta da verificare che il gruppo degli automorfismi speciali opera transitivamente sui fattori di Levi di \mathfrak{g} . A questo scopo, utilizziamo ancora l'induzione sulla dimensione di \mathfrak{g} e la costruzione e le notazioni della prima parte della dimostrazione, corrispondenti ad una speciale scelta di \mathfrak{a} che preciseremo nel seguito. Al solito, se $\mathfrak{r} = 0$, oppure $\mathfrak{r} = \mathfrak{g}$, non c'è nulla da dimostrare.

Supponiamo sia $0 \neq \mathfrak{r} \neq \mathfrak{g}$. Allora il centro \mathfrak{z} di \mathfrak{r} è un ideale abeliano non banale di \mathfrak{g} su cui opera in modo naturale l'algebra di Lie semisemplice $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. Sia \mathfrak{a} un sotto- \mathfrak{l} -modulo irriducibile non banale di \mathfrak{z} . Poiché \mathfrak{a} è un ideale abeliano non banale di \mathfrak{g} , ad esso possiamo applicare la costruzione della prima parte della dimostrazione.

Se \mathfrak{f} è un fattore di Levi di \mathfrak{g} , allora $\pi(\mathfrak{f})$ è un fattore di Levi di \mathfrak{q} . Il radicale nilpotente \mathfrak{n}'_0 di \mathfrak{q} è la proiezione $\pi(\mathfrak{n}_0)$ del radicale nilpotente \mathfrak{n}_0 di \mathfrak{g} . Per induzione, $\pi(\mathfrak{f})$ si trasforma in \mathfrak{s}' mediante un automorfismo speciale di \mathfrak{q} . Ciò equivale ad affermare che esiste un automorfismo speciale di \mathfrak{g} che trasforma \mathfrak{f} in un fattore di Levi \mathfrak{f}' di \mathfrak{g} contenuto in \mathfrak{b} . Basterà quindi verificare che il gruppo degli automorfismi speciali di \mathfrak{b} è transitivo sui fattori di Levi di \mathfrak{b} .

Poiché abbiamo supposto che l operi su \mathfrak{a} in modo irriducibile, possono darsi due casi. Nel primo caso, \mathfrak{a} ha dimensione uno e l'azione di l su \mathfrak{a} è banale. Allora \mathfrak{b} contiene un unico ideale semisemplice $\mathfrak{s} = \mathfrak{b}^{(1)}$, che è anche il suo unico fattore di Levi, e la tesi è dunque banalmente verificata.

Nel secondo caso, l'azione di l su \mathfrak{a} è non banale e quindi $\mathfrak{a} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}]$ coincide con il radicale nilpotente di \mathfrak{b} . I fattori di Levi di \mathfrak{b} sono tutti della forma

$$\mathfrak{s}_\phi = \{X + \phi(X) \mid X \in \mathfrak{s}\}$$

per un'applicazione lineare $\phi : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{a}$. La condizione che \mathfrak{s}_ϕ sia una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{b} ci dice che ϕ è una derivazione di \mathfrak{s} a valori in \mathfrak{a} . Per il Teorema 35.5.3 (primo lemma di Whitehead) ϕ è della forma

$$\phi(X) = [A, X], \quad \forall X \in \mathfrak{s}, \quad \text{con } A \in \mathfrak{a}.$$

Quindi

$$\mathfrak{s}_\phi = \exp(\text{ad}_A)(\mathfrak{s})$$

è immagine di \mathfrak{s} mediante un automorfismo speciale.

La dimostrazione è completa. □

Algebra involupante universale e teorema di Ado

L'algebra involupante universale è uno strumento utile per costruire rappresentazioni lineari delle algebre di Lie. La utilizzeremo in questo capitolo per dimostrare che ogni algebra di Lie di dimensione finita si può rappresentare come un'algebra di Lie di trasformazioni lineari (teorema di Ado¹).

36.1. Algebra involupante universale

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{K} .

DEFINIZIONE 36.1.1. L'algebra involupante universale di \mathfrak{g} è l'algebra associativa unitaria \mathfrak{U} che si ottiene come quoziente della sua algebra tensoriale $T^*(\mathfrak{g})$ rispetto all'ideale bilatero generato dagli elementi

$$X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y],$$

al variare di X ed Y in \mathfrak{g} .

L'inclusione naturale di \mathfrak{g} nella sua algebra tensoriale $T^*(\mathfrak{g})$ ci permette di identificarla con un sottospazio di \mathfrak{U} .

Indicheremo con $x \cdot y$, o semplicemente con xy , il prodotto in \mathfrak{U} .

L'algebra \mathfrak{U} è caratterizzata dalla *proprietà universale*:

TEOREMA 36.1.2. Ogni applicazione \mathbb{K} lineare $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{A}$ di \mathfrak{g} in un'algebra associativa unitaria \mathbb{A} per cui valga

$$(36.1) \quad \phi([X, Y]) = \phi(X)\phi(Y) - \phi(Y)\phi(X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

si estende in modo unico ad un morfismo di algebre associative unitarie $\tilde{\phi} : \mathfrak{U} \rightarrow \mathbb{A}$ che renda commutativo il diagramma

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{U} \\ \phi \searrow & & \swarrow \tilde{\phi} \\ & \mathbb{A} & \end{array}$$

¹Questo teorema fu dimostrato nel 1935 da Igor Dmitrievich Ado (1910-1983), nella sua tesi di dottorato, svolta sotto la direzione di Chebotarev. La dimostrazione utilizzava argomenti di teoria dei gruppi di Lie, ed in particolare si applicava ad algebre su \mathbb{R} e su \mathbb{C} . Lo stesso Ado ne dette un'altra dimostrazione in un lavoro ([1]) del 1947. Il teorema fu dimostrato nella massima generalità, anche per campi di caratteristica positiva, da Iwasawa ([35]) nel 1948. Per la dimostrazione del teorema di Ado-Iwasawa vedi anche [36] e la ristampa [37].

DIMOSTRAZIONE. Per la proprietà universale del prodotto tensoriale, ogni applicazione \mathbb{K} -lineare ϕ di \mathfrak{g} in un'algebra associativa unitaria \mathbb{A} si estende in modo unico ad un morfismo di algebre associative unitarie

$$\hat{\phi} : T^*(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{A}.$$

Se vale (36.1) il nucleo di $\hat{\phi}$ contiene l'ideale bilatero di $T^*(\mathfrak{g})$ generato dagli elementi $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$, al variare di X, Y in \mathfrak{g} e quindi definisce per passaggio al quoziente un morfismo di algebre associative unitarie $\tilde{\phi} : \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{A}$ che rende commutativo il diagramma (*). Si verifica facilmente che ogni algebra associativa unitaria che goda della proprietà universale è isomorfa a \mathfrak{G} . \square

COROLLARIO 36.1.3. *Ogni rappresentazione lineare $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ di \mathfrak{g} si estende in modo unico ad una rappresentazione lineare² $\tilde{\rho}_V : \mathfrak{G} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$.*

Ogni derivazione di \mathfrak{g} si estende in modo unico ad una derivazione di \mathfrak{G} . \square

TEOREMA 36.1.4 (Poincaré-Birkhoff-Witt). *Supponiamo che \mathfrak{g} abbia dimensione finita e sia X_1, \dots, X_n una base di \mathfrak{g} come spazio vettoriale su \mathbb{K} . Allora ogni elemento di \mathfrak{G} si rappresenta in modo unico come la somma di un polinomio ordinato della forma*

$$(36.2) \quad \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^d a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}, \quad \text{con } a_{i_1, \dots, i_n} \in \mathbb{K}. \quad \square$$

In particolare l'algebra invilupante universale \mathfrak{G} è isomorfa come spazio vettoriale allo spazio $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ dei polinomi in n indeterminate con coefficienti in \mathbb{K} . Non lo è come anello associativo unitario, a meno che \mathfrak{g} non sia commutativa. Possiamo definire una filtrazione di \mathfrak{G} , ponendo, per $d = 0, 1, \dots$,

$$(36.3) \quad \mathfrak{G}_d = \left\{ \sum_{h=0}^d \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_h \leq n} a_{i_1, \dots, i_h} X_{i_1} \cdots X_{i_h} \mid a_{i_1, \dots, i_h} \in \mathbb{K} \right\},$$

Il graduato associato è l'anello dei polinomi in n indeterminate a coefficienti in \mathbb{K} .

COROLLARIO 36.1.5. *Se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{K} , la sua algebra invilupante universale \mathfrak{G} è Noetheriana sia a destra che a sinistra.* \square

36.2. Ideali cofiniti e rappresentazioni ideali

Siano \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo \mathbb{K} e \mathfrak{G} la sua algebra invilupante universale.

DEFINIZIONE 36.2.1. Un ideale bilatero \mathfrak{I} di \mathfrak{G} si dice *cofinito* se il quoziente $\mathfrak{G}/\mathfrak{I}$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{K} .

PROPOSIZIONE 36.2.2. (1) *Condizione necessaria e sufficiente affinché un ideale bilatero \mathfrak{I} di \mathfrak{G} sia cofinito è che, per ogni $X \in \mathfrak{g}$, esista un polinomio non nullo $p_X \in \mathbb{K}[x]$ tale che $p_X(X) \in \mathfrak{I}$.*

(2) *Il prodotto $\mathfrak{I}_1 \cdots \mathfrak{I}_k$ di un numero finito di ideali bilateri cofiniti di \mathfrak{G} è ancora un ideale bilatero cofinito di \mathfrak{G} .*

²Indichiamo lo spazio degli endomorfismi lineari di uno spazio vettoriale V su \mathbb{K} con $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ quando vogliamo sottolineare la struttura di algebra di Lie, e con $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ quando vogliamo invece considerarne la struttura di anello commutativo unitario.

DIMOSTRAZIONE. Se $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{G}/\mathfrak{I} < \infty$, allora per ogni $X \in \mathfrak{g}$ esiste un intero positivo d per cui gli elementi $1, X, X^2, \dots, X^d$ siano linearmente dipendenti su \mathbb{K} e quindi un polinomio non nullo $p_X \in \mathbb{K}[x]$, di grado $\leq d$, per cui $p_X(X) \in \mathfrak{I}$.

Viceversa, fissata una base X_1, \dots, X_n di \mathfrak{g} come spazio vettoriale su \mathbb{K} , supponiamo vi siano polinomi non nulli $p_i \in \mathbb{K}[x]$, di gradi $d_i > 0$, per cui $p_i(X_i) \in \mathfrak{I}$.

Per il Teorema di Poincaré-Birckhoff-Witt ogni elemento x di \mathfrak{G} si scrive in modo unico come la somma di un polinomio ordinato

$$x = \sum a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}, \quad a_{i_1, \dots, i_n} \in \mathbb{K}.$$

Sostituendo a ciascuno dei polinomi

$$p_{i_2, \dots, i_n}(x_1) = \sum_{i_1} a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1}$$

il suo resto $r_{i_2, \dots, i_n}(x_1)$ nella divisione per $p_1(x_1)$, otteniamo un nuovo elemento

$$x_1 = \sum_{i_2, \dots, i_n} r_{i_2, \dots, i_n}(X_1) X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n} = \sum_{i_1 < d_1} X_1^{i_1} \sum_{i_2, \dots, i_n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(1)} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}$$

di \mathfrak{G} con $x - x_1 \in \mathfrak{I}$ ed in cui compaiono soltanto potenze di X_1 di esponente minore di d_1 . Per ricorrenza, otteniamo un polinomio

$$q_x(x_1, \dots, x_n) = \sum_{0 \leq i_h < d_h} a_{i_1, \dots, i_n}^{(n)} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$$

di grado minore di d_h rispetto a ciascuna delle variabili x_h , tale che,

$$\text{con } x_n = \sum_{0 \leq i_h < d_h} a_{i_1, \dots, i_n}^{(n)} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}, \quad \text{sia } x - x_n \in \mathfrak{I}.$$

Questo dimostra che $\mathfrak{G}/\mathfrak{I}$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} di dimensione finita minore o uguale del prodotto $d_1 \cdots d_n$.

La (2) è facile conseguenza della (1). Sia $X \in \mathfrak{g}$. Per l'ipotesi che \mathfrak{I}_i sia cofinito, per ogni $i=1, \dots, k$ possiamo trovare un polinomio non nullo $p_i \in \mathbb{K}[x]$ per cui $p_i(X) \in \mathfrak{I}_i$. Il prodotto $p = p_1 \cdots p_k$ è allora un polinomio non nullo in $\mathbb{K}[x]$, per cui $p(X) = p_1(X) \cdots p_k(X) \in \mathfrak{I}_1 \cdots \mathfrak{I}_k$. Per (1) il prodotto $\mathfrak{I}_1 \cdots \mathfrak{I}_k$ è quindi un ideale cofinito. \square

Se \mathfrak{I} è un ideale bilatero di \mathfrak{G} , detta $\pi : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}/\mathfrak{I}$ la proiezione nel quoziente, la

$$(36.4) \quad X \cdot \pi(x) = \pi(X \cdot x), \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall x \in \mathfrak{G}$$

definisce una rappresentazione lineare $V_{\mathfrak{I}} := \mathfrak{G}/\mathfrak{I}$ di \mathfrak{g} .

DEFINIZIONE 36.2.3. La $V_{\mathfrak{I}}$ definita dalla (36.4) si dice la *rappresentazione ideale associata ad \mathfrak{I}* .

OSSERVAZIONE 36.2.4. La rappresentazione ideale $V_{\mathfrak{I}}$ è di dimensione finita se e solo se \mathfrak{I} è cofinito.

36.3. Rappresentazioni di dimensione finita ed ideali cofiniti

Siano \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{K} e \mathfrak{G} la sua algebra involupante universale. Ogni rappresentazione lineare V di \mathfrak{g} definisce una rappresentazione lineare di \mathfrak{G} e viceversa (vedi il Cor. 36.1.3). Indicheremo con $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ e $\tilde{\rho}_V : \mathfrak{G} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ i corrispondenti omomorfismi e con x_V l'endomorfismo di V corrispondente ad $x \in \mathfrak{G}$.

DEFINIZIONE 36.3.1. Chiamiamo *annullatore* di una rappresentazione lineare V di \mathfrak{g} ed indichiamo con \mathfrak{N}_V il suo nucleo come rappresentazione di \mathfrak{G} :

$$(36.5) \quad \mathfrak{N}_V := \ker(\tilde{\rho}_V) = \{x \in \mathfrak{G} \mid x_V = 0\}$$

PROPOSIZIONE 36.3.2. L'annullatore di una rappresentazione lineare di \mathfrak{g} è un ideale bilatero di \mathfrak{G} .

DIMOSTRAZIONE. Sia V una rappresentazione lineare di \mathfrak{g} . Se $x \in \mathfrak{N}_V$ ed $y \in \mathfrak{G}$, allora

$$(x \cdot y)_V = x_V \circ y_V = 0, \quad (y \cdot x)_V = y_V \circ x_V = 0. \quad \square$$

ESEMPIO 36.3.3. Se $V \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{I}$ è una rappresentazione ideale, allora $\mathfrak{N}_V = \mathfrak{I}$.

DEFINIZIONE 36.3.4. Diciamo che un \mathfrak{g} -modulo V è di *tipo finito* se \mathfrak{N}_V è finitamente generato.

Se V è di tipo finito, la scelta di un sistema finito e_1, \dots, e_m di suoi generatori (come \mathfrak{G} -modulo) ci permette di *presentarlo* come il quoziente di un \mathfrak{G} -modulo libero di tipo finito, utilizzando l'epimorfismo

$$\varpi : \mathfrak{G}^m \ni (x_1, \dots, x_m) \longrightarrow (x_1, \dots, x_m) \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_m \cdot e_m \in V.$$

Poiché \mathfrak{G} è Noetheriana, il nucleo di ϖ è finitamente generato e possiamo includere l'omomorfismo ϖ in una successione esatta

$$(36.6) \quad \mathfrak{G}^{m_1} \xrightarrow{\varepsilon} \mathfrak{G}^m \xrightarrow{\varpi} V \longrightarrow 0,$$

di \mathfrak{G} -moduli sinistri e di omomorfismi, ove

$$(36.7) \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} z_{1,1} & \dots & z_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{m_1,1} & \dots & z_{m_1,m} \end{pmatrix}$$

è una matrice in $\mathfrak{G}^{m_1 \times m}$, che agisce come fattore a destra di un vettore riga di \mathfrak{G}^{m_1} .

DEFINIZIONE 36.3.5. La (36.6) si dice una *presentazione finita* di V .

ESEMPIO 36.3.6. Se $V_{\mathfrak{I}}$ è la rappresentazione lineare associata ad un ideale bilatero \mathfrak{I} di \mathfrak{G} , allora possiamo utilizzare un sistema finito di suoi generatori z_1, \dots, z_p (ricordiamo che \mathfrak{G} è noetheriano e quindi ogni suo ideale bilatero è finitamente generato) per definire la presentazione

$$\mathfrak{G}^p \xrightarrow{(z_1, \dots, z_p)^T} \mathfrak{G} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{G}/\mathfrak{I} = V_{\mathfrak{I}} \longrightarrow 0.$$

In questo caso V è generato come \mathfrak{G} -modulo dall'immagine $e = \pi(1)$ dell'unità.

LEMMA 36.3.7. Sia V una rappresentazione lineare di \mathfrak{g} . Gli elementi x di \mathfrak{G} per cui x_V è nilpotente sono tutti e soli gli elementi del radicale

$$(36.8) \quad \sqrt{\mathfrak{R}_V} = \{x \mid \exists p \in \mathbb{Z}_+ \text{ t.c. } x^p \in \mathfrak{R}_V\}. \quad \square$$

PROPOSIZIONE 36.3.8. Siano V un \mathfrak{g} -modulo di tipo finito e \mathfrak{R}_V il suo annullatore. Lo spazio vettoriale V ha dimensione finita su \mathbb{K} se e soltanto se \mathfrak{R}_V è cofinito.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo una presentazione finita (36.6) di V . Poiché $\mathfrak{R}_V^m \subseteq (\mathfrak{G}^m \cdot \mathcal{E})$, otteniamo l'omomorfismo surgettivo

$$\mathfrak{G}^m / (\mathfrak{R}_V^m) \simeq (\mathfrak{G} / \mathfrak{R}_V)^m \rightarrow \mathfrak{G}^m / (\mathfrak{G}^m \cdot \mathcal{E}) \simeq V,$$

e dunque

$$m \cdot \dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{G} / \mathfrak{R}_V) \geq \dim_{\mathbb{K}} V.$$

Questo dimostra che, se $\mathfrak{G} / \mathfrak{R}_V$ ha dimensione finita, allora anche V ha dimensione finita.

Supponiamo viceversa che V abbia dimensione finita su \mathbb{K} e sia e_1, \dots, e_m una sua base come spazio vettoriale su \mathbb{K} . Allora per ogni $x \in \mathfrak{G}$ esistono polinomi $p_i \in \mathbb{K}[x]$ tali che $p_i(x) \cdot e_i = 0$. Per il minimo comune multiplo p di p_1, \dots, p_m è $p(x) \in \mathfrak{R}_V$. Per la Proposizione 36.2.2 questo implica che $\mathfrak{G} / \mathfrak{R}_V$ ha dimensione finita su \mathbb{K} . \square

Siano V una rappresentazione lineare di dimensione finita di \mathfrak{g} e \mathfrak{R}_V il suo annullatore. Allora $W := \mathfrak{G} / \mathfrak{R}_V$ è una rappresentazione ideale di dimensione finita. Consideriamo una presentazione finita (36.6) di V ed indichiamo con e_1, \dots, e_m i generatori di V immagini degli elementi della base canonica di \mathfrak{G}^m . Sia V_i il sottomodulo di V generato da e_i . Poiché l'annullatore di V_i contiene \mathfrak{R}_V , otteniamo un'applicazione surgettiva di W su V_i per passaggio al quoziente della proiezione $\mathfrak{G} \ni x \rightarrow x \cdot e_i \in V_i$. Detta $\phi : \mathfrak{G} \rightarrow W$ la proiezione nel quoziente, otteniamo quindi un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{G}^m & \\ \phi^m \swarrow & & \searrow \pi \\ W^m & \xrightarrow{\pi} & V \end{array}$$

in cui la π è surgettiva. Abbiamo così ottenuto la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 36.3.9. Se V è una rappresentazione di dimensione finita di \mathfrak{g} , allora possiamo trovare una rappresentazione ideale di dimensione finita W di \mathfrak{g} per cui vi sia, per un intero positivo m , un omomorfismo surgettivo di \mathfrak{g} -moduli $W^m \rightarrow V$. \square

36.4. Estensioni di rappresentazioni

Se \mathfrak{g} è una sottoalgebra di un'algebra di Lie \mathfrak{g}' , ogni rappresentazione lineare di \mathfrak{g}' si restringe ad una rappresentazione di \mathfrak{g} . Sia V una rappresentazione lineare di \mathfrak{g} .

DEFINIZIONE 36.4.1. Un'estensione a \mathfrak{g}' di V è il dato di una rappresentazione lineare W di \mathfrak{g}' e di un omomorfismo surgettivo di \mathfrak{g} -moduli $W \longrightarrow V$.

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su \mathbb{K} . Possiamo definire sulla somma diretta $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ un prodotto di Lie ponendo

$$(36.9) \quad [(X_1, D_1), (X_2, D_2)] = ([X_1, X_2] + D_1(X_2) - D_2(X_1), D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1) \\ \text{per } X_1, X_2 \in \mathfrak{g} \text{ e } D_1, D_2 \in \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}).$$

DEFINIZIONE 36.4.2. Indichiamo con $\mathfrak{g} \rtimes \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ l'algebra di Lie sullo spazio vettoriale $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ definita dal prodotto (36.9).

Identifichiamo \mathfrak{g} all'ideale $\mathfrak{g} \oplus \{0\}$ e $\mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ alla sottoalgebra $\{0\} \oplus \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ di $\mathfrak{g} \rtimes \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. La successione esatta

$$0 \xrightarrow{X \rightarrow (X, 0)} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \rtimes \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \xrightarrow{(X, D) \rightarrow D} \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \longrightarrow 0$$

presenta $\mathfrak{g} \rtimes \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ come un'estensione dell'algebra delle derivazioni.

LEMMA 36.4.3 (estensione ideale). *Siano \mathfrak{g} un'algebra di Lie risolubile, \mathfrak{n} il suo nilradicale e $V = \mathfrak{G}/\mathfrak{I}$ una sua rappresentazione ideale di dimensione finita, in cui gli elementi Z di \mathfrak{n} definiscano endomorfismi Z_V nilpotenti.*

Possiamo allora costruire un'estensione di dimensione finita $W = \mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ di V a $\mathfrak{g} \rtimes \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ mediante un'ideale \mathfrak{R} di \mathfrak{G} tale che valgano le

- (1) $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{I}$,
- (2) \mathfrak{R} è cofinito;
- (3) $D(\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{R}$ per ogni $D \in \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$;
- (4) Se $D \in \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})$ è una derivazione nilpotente e $Z \in \mathfrak{n}$, allora $(Z, D)_W$ è nilpotente.

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathfrak{N} l'ideale bilatero di \mathfrak{G} generato da \mathfrak{n} . Poiché \mathfrak{n} è un ideale di \mathfrak{g} , abbiamo³ $\mathfrak{N}^h \subseteq \mathfrak{n}^h \cdot \mathfrak{G}$.

Verifichiamo in primo luogo che $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{G}$. A questo scopo basta verificare che, se $Z \in \mathfrak{n}$ ed $X_i \in \mathfrak{g}$ per $1 \leq i \leq n$, allora $X_1 \cdots X_n Z \in \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{G}$. Per $n = 1$, è

$$X_1 Z = [X_1, Z] + Z X_1 \in \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{G}.$$

Se $n > 1$ e l'affermazione vale per un prodotto di meno di n termini X_i , allora

$$\exists y_1, \dots, y_k \text{ t.c. } X_1 X_2 \cdots X_n Z = X_1 \sum_{i=1}^k Z_i y_i = \sum_{i=1}^k ([X_1, Z_i] + Z_i X_1) y_i \in \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{G}.$$

Questo prova per ricorrenza che $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{G}$ e da questa segue subito che $\mathfrak{N}^h \subseteq \mathfrak{n}^h \cdot \mathfrak{G}$.

L'ipotesi che gli Z_V siano nilpotenti per ogni Z in \mathfrak{n} implica che esista un intero positivo k per cui $\mathfrak{N}^k \subseteq \mathfrak{I}$ ed otteniamo allora che

$$\mathfrak{R} := (\mathfrak{I} + \mathfrak{N})^k \subseteq \mathfrak{I} \subseteq (\mathfrak{I} + \mathfrak{N}).$$

La \mathfrak{R} soddisfa quindi (1) e (2). Se $D \in \mathfrak{D}\text{er}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, allora $D(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{R}$ perché $D(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{n}$ (vedi Prop. 28.12.9). Da questa otteniamo che $D(\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{R}$, cioè la (3).

Resta da dimostrare la (4). Poiché $\mathfrak{n}^k \subseteq \mathfrak{R}$, è $Z_W^k = 0$ se $Z \in \mathfrak{n}$.

³Se A, B sono sottospazi vettoriali di un'algebra associativa unitaria, indichiamo con $A \cdot B$ lo spazio vettoriale formato dalle somme delle combinazioni lineari di monomi $a \cdot b$ con $a \in A$ e $b \in B$.

Dimostriamo poi che, se D è una derivazione nilpotente di \mathfrak{g} a valori in \mathfrak{n} , allora D_W è nilpotente. Utilizzando il teorema di Poincaré-Birchoff-Witt, è sufficiente dimostrare che per ogni $X \in \mathfrak{g}$ esiste un intero $r > 0$ tale che $D^r(X^s) \in \mathfrak{R}$ per ogni intero positivo s . Osserviamo che $D^r(X^s)$ è una combinazione lineare di monomi

$$x_{h_1, \dots, h_s} = D^{h_1}(X) \cdots D^{h_s}(X), \quad \text{con } 0 \leq h_i \leq r \text{ ed } h_1 + \cdots + h_s = r.$$

Poiché D è a valori in \mathfrak{n} , i fattori con $h_i > 0$ appartengono ad \mathfrak{n} . Se D^ℓ è nulla su \mathfrak{g} , allora nessuno degli h_i di un monomio x_{h_1, \dots, h_s} non nullo può superare ℓ . Se $r > k\ell$, contiene almeno k fattori $D^{h_i}(X)$ con $h_i > 0$. Poiché questi appartengono ad \mathfrak{n} , è $x_{h_1, \dots, h_s} \in \mathfrak{N}^k \subseteq \mathfrak{R}$. Questo dimostra che D_W è nilpotente.

Siano ora $D \in \mathfrak{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ una derivazione nilpotente, con $D^\ell = 0$, e $Z \in \mathfrak{n}$. Vogliamo verificare che $D_W + Z_W$ è ancora nilpotente. Indicando con Z la moltiplicazione a sinistra per Z in \mathfrak{G} , la potenza $(D+Z)^p$ è una somma di monomi $\Phi = Z^{h_1} D^{r_1} \cdots Z^{h_s} D^{r_s}$ con $h_i, r_i \geq 0$ ed $h_1 + \cdots + h_s + r_1 + \cdots + r_s = p$. Se $h_1 + \cdots + h_s \geq k$, allora $\Phi \cdot x \in \mathfrak{N}^k \subseteq \mathfrak{R}$ per ogni x in \mathfrak{G} ed il corrispondente Φ_W è nullo. Basterà quindi considerare i monomi Φ con $s \leq k$. Allora, se scegliamo $p > (k+1)\ell$, almeno uno degli r_i è maggiore o uguale ad ℓ e il corrispondente Φ è allora uguale a zero. Questo dimostra che $(D+Z)_W^{(k+1)\ell} = 0$ e completa la dimostrazione di (4). \square

PROPOSIZIONE 36.4.4. *Siano \mathfrak{g} un'algebra di Lie risolubile di dimensione finita su \mathbb{K} con nilradicale \mathfrak{n} e V una sua rappresentazione lineare di dimensione finita tale che Z_V sia nilpotente per ogni $Z \in \mathfrak{n}$. Allora possiamo trovare un'estensione di dimensione finita W di V a $\mathfrak{g} \rtimes \mathfrak{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ tale che $(Z+D)_W$ sia nilpotente per ogni Z in \mathfrak{n} ed ogni derivazione nilpotente $D \in \mathfrak{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})$.*

DIMOSTRAZIONE. Nel caso in cui V fosse una rappresentazione ideale, la tesi segue dal Lemma 36.4.3. In generale, fissato un sistema finito di generatori e_1, \dots, e_m di V , indichiamo con V_i ($1 \leq i \leq m$) il sotto- \mathfrak{G} -modulo di V generato da e_i . Posto $U = \mathfrak{G}/\mathfrak{I}$, osserviamo che Z_U è nilpotente per ogni Z in \mathfrak{n} . Sia \mathfrak{R} un ideale bilatero di \mathfrak{G} che verifichi le condizioni del Lemma 36.4.3. Allora $U' = \mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ è un $(\mathfrak{g} \rtimes \mathfrak{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}))$ -modulo di dimensione finita ed abbiamo una successione di omomorfismi surgettivi di \mathfrak{g} -moduli

$$W := U'^m \twoheadrightarrow U^m \twoheadrightarrow V_1 \oplus \cdots \oplus V_m \twoheadrightarrow V.$$

Per il Lemma 36.4.3, $(Z+D)_{U'}$ e quindi anche $(Z+D)_W$ è nilpotente per ogni $Z \in \mathfrak{n}$ e $D \in \mathfrak{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})$ nilpotente. La dimostrazione è completa. \square

TEOREMA 36.4.5 (di estensione). *Supponiamo che l'algebra di Lie \mathfrak{g} si decomponga nella somma semidiretta $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \rtimes \mathfrak{b}$ di un ideale risolubile \mathfrak{a} e di una sottoalgebra \mathfrak{b} .*

Siano \mathfrak{n} il nilradicale di \mathfrak{a} e V un \mathfrak{a} -modulo di dimensione finita tale che Z_V sia nilpotente per ogni Z in \mathfrak{n} .

Allora esiste una estensione di dimensione finita W di V a \mathfrak{g} tale che Z_W sia nilpotente per ogni Z appartenente al nilradicale di \mathfrak{g} .

DIMOSTRAZIONE. La tesi segue dalla Proposizione 36.4.4 e dal fatto che l'omomorfismo di algebre di Lie $\mathfrak{a} \rtimes \mathfrak{b} \ni (Z+Y) \rightarrow (Z+\text{ad}_Y) \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{Der}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ ci consente di

considerare ogni $\alpha \in \mathfrak{Der}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ -modulo come un \mathfrak{g} -modulo. Inoltre, gli elementi del nilradicale di \mathfrak{g} hanno per immagine in $\mathfrak{Der}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ elementi nilpotenti di $\mathfrak{Der}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$. \square

36.5. Il teorema di Ado

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo \mathbb{K} .

DEFINIZIONE 36.5.1. Una rappresentazione lineare V di \mathfrak{g} si dice *nilpotente* se X_V è nilpotente per ogni $X \in \mathfrak{g}$.

OSSERVAZIONE 36.5.2. Una rappresentazione nilpotente di dimensione finita V di \mathfrak{g} , lo è anche come rappresentazione della sua algebra invilupante universale \mathfrak{G} . Sono cioè nilpotenti tutti gli endomorfismi x_V al variare di x in \mathfrak{G} . Infatti, se

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_s = V$$

è una serie di Jordan-Hölder per \mathfrak{g} , se cioè $X_V(V_j) \subset V_{j-1}$ per $X \in \mathfrak{g}$ e $j = 1, \dots, s$, allora è anche $x_V(V_j) \subset V_{j-1}$ per $x \in \mathfrak{G}$ e $j = 1, \dots, s$.

ESEMPIO 36.5.3. Se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie abeliana di dimensione n , possiamo costruire una rappresentazione lineare nilpotente fedele di dimensione finita nel modo seguente. Indichiamo con V lo spazio vettoriale $\mathfrak{g} \oplus \mathbb{K} \cdot \mathbf{e}$, ove \mathbf{e} è un vettore linearmente indipendente da \mathfrak{g} e poniamo

$$(36.10) \quad X_V(\mathfrak{g}) = 0, \quad X_V(\mathbf{e}) = X, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

PROPOSIZIONE 36.5.4 (Caso nilpotente). *Ogni algebra di Lie nilpotente ammette una rappresentazione lineare nilpotente fedele di dimensione finita.*

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie nilpotente su \mathbb{K} .

Ragioniamo per induzione sulla dimensione di \mathfrak{g} . Se \mathfrak{g} ha dimensione 1 è abeliana ed ammette quindi una rappresentazione lineare nilpotente fedele di dimensione finita (vedi l'Esempio 36.5.3).

Se $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g} > 1$, per il Teorema di Engel \mathfrak{g} contiene un ideale \mathfrak{a} di codimensione 1. Per l'ipotesi induttiva, \mathfrak{a} ammette una rappresentazione lineare nilpotente fedele di dimensione finita. Per il teorema d'estensione (Teor.36.4.5) questa si estende ad una rappresentazione di dimensione finita V di \mathfrak{g} , che è fedele e nilpotente su \mathfrak{a} . Sia $\mathfrak{z} = \{X \in \mathfrak{g} \mid X_V = 0\}$ il suo nucleo d'infedeltà. Poiché $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a} = \{0\}$, l'ideale \mathfrak{z} ha dimensione minore o uguale ad 1. Se $\mathfrak{z} = \{0\}$, la V è nilpotente e fedele su \mathfrak{g} e non abbiamo nulla da dimostrare. Altrimenti, \mathfrak{z} ha dimensione 1 e, poiché abbiamo supposto \mathfrak{g} nilpotente, è contenuto nel centro di \mathfrak{g} . È quindi abeliana ed ammette una rappresentazione fedele U con A_U nilpotente per $A \in \mathfrak{z}$. Poiché gli elementi di \mathfrak{a} definiscono su \mathfrak{z} la derivazione nulla, la U si estende banalmente a \mathfrak{g} e la $W \oplus U$ è allora una rappresentazione nilpotente fedele di \mathfrak{g} . \square

PROPOSIZIONE 36.5.5 (Caso risolubile). *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie risolubile ed \mathfrak{n} il suo nilradicale. La \mathfrak{g} ammette una rappresentazione lineare fedele di dimensione finita V con Z_V nilpotente per ogni Z nel nilradicale \mathfrak{n} di \mathfrak{g} .*

DIMOSTRAZIONE. Se \mathfrak{g} è nilpotente, la tesi segue dalla Proposizione 36.5.4. In particolare, la tesi è verificata se \mathfrak{g} ha dimensione 1. Ragioniamo per induzione

sulla dimensione n di \mathfrak{g} , supponendo $n > 1$, che \mathfrak{g} non sia nilpotente e che la tesi sia vera per algebre di Lie risolubili di dimensione positiva minore di n .

Poiché $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{n} \subsetneq \mathfrak{g}$, possiamo fissare un ideale \mathfrak{a} di codimensione 1 in \mathfrak{g} che contenga il suo nilradicale. Il nilradicale di \mathfrak{a} contiene \mathfrak{n} e quindi, per l'ipotesi induttiva, esiste una rappresentazione lineare fedele di dimensione finita di \mathfrak{a} che faccia corrispondere a tutti gli elementi di \mathfrak{n} endomorfismi nilpotenti. Per il teorema d'estensione (Teor.36.4.5) questa si estende ad una rappresentazione di dimensione finita U di \mathfrak{g} fedele su \mathfrak{a} e con Z_U nilpotente per $Z \in \mathfrak{n}$.

Il suo nucleo d'infedeltà $\mathfrak{z} = \{X \in \mathfrak{g} \mid X_U = 0\}$ è un ideale di \mathfrak{g} di dimensione minore o uguale ad 1. Se ha dimensione 0, la U è una rappresentazione fedele di \mathfrak{g} e non c'è quindi nulla da dimostrare.

Se \mathfrak{z} ha dimensione 1, allora è abeliana ed ammette quindi una rappresentazione nilpotente di dimensione finita, che per il teorema d'estensione (Teor.36.4.5) si estende ad una rappresentazione lineare di dimensione finita W che si fattorizza mediante una rappresentazione di $\mathfrak{z} \oplus \text{Der}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z})$. Poiché le derivazioni ad_Z di \mathfrak{z} con $Z \in \mathfrak{n}$ sono nulle, abbiamo $Z_W = 0$ per $Z \in \mathfrak{n}$. Da questo segue che la $V = U \oplus W$ è una rappresentazione fedele di dimensione finita di \mathfrak{g} per cui Z_V è nilpotente per ogni Z in \mathfrak{n} . La dimostrazione è completa. \square

TEOREMA 36.5.6 (Teorema di Ado). *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita con nilradicale \mathfrak{n} . Esiste allora una rappresentazione lineare fedele di dimensione finita V di \mathfrak{g} tale che Z_V sia nilpotente per ogni $Z \in \mathfrak{n}$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano \mathfrak{r} il radicale ed \mathfrak{s} un fattore di Levi di \mathfrak{g} , dimodoché si abbia la decomposizione di Levi-Malčev $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$. Per la Proposizione 36.5.5 esiste una rappresentazione lineare fedele di dimensione finita di \mathfrak{r} per cui ad ogni elemento di \mathfrak{n} corrisponda un endomorfismo nilpotente. Il teorema d'estensione (Teor.36.4.5) ci consente di ottenere una rappresentazione U di \mathfrak{g} fedele su \mathfrak{r} per cui gli Z_U con $Z \in \mathfrak{n}$ siano nilpotenti. Se W è la rappresentazione aggiunta di \mathfrak{g} , la sua restrizione ad un qualsiasi fattore di Levi è fedele ed inoltre gli ad_Z con $Z \in \mathfrak{n}$ sono nilpotenti. La $V = U \oplus W$ verifica allora la tesi. \square

Bibliografia

1. I. D. Ado, *The representation of Lie algebras by matrices*, Uspekhi Mat. Nauk **2** (1947), 159–173.
2. W. Ambrose and I. M. Singer, *A theorem on holonomy*, Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953), 428–443.
3. John C. Baez, *The octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2002), no. 2, 145–205.
4. Marcel Berger, *Sur les groupes d'holonomie homogènes de variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes*, Bulletin de la Société Mathématique de France **83** (1955), 279–330.
5. A.L. Besse, *Einstein manifolds*, Classics in mathematics, Springer, 1987.
6. S. Bochner and D. Montgomery, *Locally compact groups of differentiable transformations*, Annals of Mathematics **47** (1946), no. 4, 639–653.
7. Salomon Bochner and Deane Montgomery, *Groups of differentiable and real or complex analytic transformations*, Annals of Mathematics **46** (1945), no. 4, 685–694.
8. Armand Borel, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, 1991.
9. Raoul Bott, *The periodicity theorem for the classical groups and some of its applications*, Advances in Mathematics **4** (1970), no. 3, 353 – 411.
10. N. Bourbaki, *Eléments de mathématique, Algèbre, Chapitre 9*, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, 1942.
11. ———, *Algebra I: Chapters 1-3*, Actualités scientifiques et industrielles, Springer, 1998.
12. ———, *Lie Groups and Lie Algebras: Chapters 4-6*, Bourbaki, Nicolas: Elements of mathematics, no. pt. 4-6, Springer Berlin Heidelberg, 2008.
13. Hermann Brauer, Richard; Weyl, *Spinors in n dimensions*, American Journal of Mathematics (1935), no. 57, 425–449.
14. É. Cartan, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, I*, Bull. Soc. Math. France **54** (1926), 214–216.
15. ———, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, II*, Bull. Soc. Math. France **55** (1927), 114–134.
16. ———, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, II ed., Vuibert, Paris, 1933.
17. E. Cartan and A. Mercier, *The theory of spinors*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 1981.
18. Shiing-Shen Chern, *Pseudo-groupes continus infinis*, Géométrie différentielle, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg, vol. 1953, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953, pp. 119–136.
19. Claude Chevalley, *Theory of spinors and clifford algebras*, Collected Works, vol. 2, Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1997.
20. Claude Chevalley and Samuel Eilenberg, *Cohomology Theory of Lie Groups and Lie Algebras*, Trans. Am. Math. Soc. **63** (1948), 85–124.
21. Dragomir Djokovic, *A closure theorem for analytic subgroups of a real lie group*, Can.Math. Bull. **19** (1976), 435–439.
22. E. Cartan and J.A. Schouten, *On Riemannian manifolds admitting an absolute parallelism*, Proc. Amsterdam **29** (1926), 933–946.

23. ———, *On the geometry of the group manifold of simple and semisimple groups*, Proc. Amsterdam **29** (1926), 803–815.
24. Charles Ehresmann, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Séminaire Bourbaki **1** (1948-1951), 153–168.
25. P. Deligne et al., *Quantum fields and strings. a course for mathematicians*, Material from the Special Year on Quantum Field Theory held at the Institute for Advanced Study (Pierre Deligne, Pavel Etingof, Daniel S. Freed, Lisa C. Jeffrey, David Kazhdan, John W. Morgan, David R. Morrison, and Edward Witten, eds.), American Mathematical Society, 1999.
26. V.V. Fedorchuk, *The fundamentals of dimension theory*, General Topology I (A.V. Arkhangel'skii and L.S. Pontryagin, eds.), Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 17, Springer-Verlag, Berlin, 1990, pp. 91–202.
27. Hans Freudenthal, *Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches Phänomen. I*, Ann. of Math. (2) **42** (1941), 1051–1074.
28. D.B. Fuks, A. Iacob, and V.A. Rokhlin, *Beginners course in topology: Geometric chapters*, Universitext, Springer Berlin Heidelberg, 2004.
29. V.V. Gorbatsevich, A.L. Onishchik, V. Minachin, and E.B. Vinberg, *Lie groups and Lie algebras III: Structure of Lie groups and Lie algebras*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer Berlin Heidelberg, 1994.
30. Bruno Harris, *On the homotopy groups of the classical groups*, Annals of Mathematics **74** (1961), no. 2, 407–413.
31. J.E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1975.
32. D. Husemöller, *Fibre bundles*, Graduate texts in mathematics, McGraw-Hill, 1966.
33. Hideki Imanishi, *Unstable homotopy groups of classical groups (odd primary components)*, J. Math. Kyoto Univ. **7** (1967), no. 3, 221–243.
34. M. Ise, M. Takeuchi, and K. Nomizu, *Lie groups I*, Lie Groups I, no. v. 1, American Mathematical Society, 1991.
35. Kenkichi Iwasawa, *On the representation of Lie algebras*, Japanese Journal of Mathematics **19** (1948), 405–426.
36. N Jacobson, *Lie algebras*, Interscience Tracts on Pure and Applied Mathematics, vol. 10, Interscience Publishers, New York, 1962.
37. N. Jacobson, *Lie algebras*, Dover books on advanced mathematics, Dover, 1979.
38. ———, *Basic Algebra I: Second edition*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2012.
39. ———, *Basic Algebra II: Second edition*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2012.
40. L. C. Jeffrey, *Flat connections on oriented 2-manifolds*, Bulletin of the London Mathematical Society **37** (2005), 1–14.
41. J.Hano and H.Ozeki, *On the holonomy group of linear connections*, Nagoya Math. J. **10** (1956), 97–100.
42. Erich Kähler, *Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **9** (1933), no. 1, 173–186.
43. Max Karoubi, *K-theory. An introduction*, Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1978.
44. K.Nomizu, *Un théorème sur les groupes d'holonomie*, Nagoya Math. J. **10** (1956), 101–103.
45. Shoshichi Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 70.
46. Jean-Louis Koszul, *Homologie et cohomologie des algèbres de lie*, Bulletin de la Société Mathématique de France **78** (1950), 65–127 (fr).
47. Jean Louis Koszul, *Lectures on fibre bundles and differential geometry*, Lectures on mathematics and physics. Mathematics, vol. 20, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.
48. Ravi S. Kulkarni, *Proper actions and pseudo-Riemannian space forms*, Adv. in Math. **40** (1981), no. 1, 10–51.
49. H. Blaine Lawson, Jr. and Marie-Louise Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton Mathematical Series, vol. 38, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

50. Tullio Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana*, Rend. Circ. Mat. Palermo **42** (1917), 173–205.
51. Corinne A. Manogue and Tevian Dray, *The geometry of the octonions*, World Scientific, Hackensack, NJ, USA, 2015.
52. Corinne A. Manogue and Jörg Schray, *Finite Lorentz transformations, automorphisms, and division algebras*, Journal of Mathematical Physics **34** (1993), no. 8, 3746–3767.
53. John Milnor, *Construction of universal bundles, I*, Annals of Mathematics **63** (1956), no. 2, 272–284.
54. John Milnor, *Construction of universal bundles. I*, Ann. of Math. (2) **63** (1956), 272–284.
55. John Milnor, *Construction of universal bundles, II*, Annals of Mathematics **63** (1956), no. 3, 430–436.
56. Sumner Byron Myers, *Riemannian manifolds in the large*, Duke Math. J. **1** (1935), no. 1, 39–49.
57. Katsumi Nomizu and Hideki Ozeki, *On the degree of differentiability of curves used in the definition of the holonomy group*, Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962), 74–75.
58. Daniel Quillen, *The Adams conjecture*, Topology **10** (1971), no. 1, 67 – 80.
59. I. Schur, *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere*, Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Berlin, 1905.
60. Norman Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1965.
61. Shlomo Sternberg, *Lectures on differential geometry*, second ed., Chelsea Publishing Co., New York, 1983, With an appendix by Sternberg and Victor W. Guillemin.
62. D. van Dantzig and B.L. van der Waerden, *Über metrisch homogene Räume*, Sem. Univ. Hanburg **6** (1928), 374–376.
63. Hsien-chung Wang, *On invariant connections over a principal fibre bundle*, Nagoya Math. J. **13** (1958), 1–19.
64. Hermann Weyl, *Reine Infinitesimalgeometrie*, Math. Z. **2** (1918), 384–411.
65. Hidehiko Yamabe, *On an arcwise connected subgroup of a Lie group*, Osaka Math. J. **2** (1950), no. 1, 13–14.