

Lezioni sui Fibrati
(a.a. 2016/17)

Mauro Nacinovich

Indice

Parte 1. Fibrati topologici	13
Capitolo I. Richiami su spazi cellulari ed omotopia	15
1.1. Spazi puntati	15
1.2. Gruppi di omotopia di uno spazio puntato	19
1.3. Cambiamento del punto di base e azione del gruppo fondamentale	23
1.4. Proprietà dell'estensione e cofibrazioni	24
1.5. CW-complexi	27
Capitolo II. Fibrati topologici	31
2.1. Prime definizioni	31
2.2. Prodotti	33
2.3. Restrizioni e fibrati indotti	34
2.4. Fibrati localmente banali	35
2.5. Un lemma di trivializzazione	36
2.6. Prolungamento di sezioni	36
2.7. Esempi	37
2.8. Fibrati di Serre	38
2.9. Condizione di Serre forte	42
2.10. Associato di Serre di un fibrato	44
2.11. Successione esatta di omotopia di un fibrato	45
2.12. Esempi	48
Capitolo III. Fibrati topologici con strutture di gruppo	55
3.1. Azioni di gruppo	55
3.2. Gruppi topologici	58
3.3. Azioni continue	68
3.4. Azioni di gruppo su un fibrato	70
3.5. Fibrati di Steenrod e fibrati principali	70
3.6. Un Lemma di trivializzazione	75
3.7. Invarianza omotopica	75
3.8. Fibrati universali	77
3.9. Fibrati di Milnor	80
Capitolo IV. Alcuni spazi omogenei	87
4.1. Varietà di Stiefel reali	87
4.2. Varietà di Grassmann reali	89

4.3.	Varietà di Stiefel e di Grassmann complesse	92
4.4.	Varietà di Stiefel e di Grassmann quaternioniche	94
4.5.	Varietà di sottospazi isotropi	97
4.6.	Classificazione omotopica dei fibrati principali	98
4.7.	Sottospazi Lagrangiani reali	100
4.8.	Sottospazi Lagrangiani complessi	101
4.9.	Sottospazi proiettivi di una quadrica proiettiva complessa	102
Capitolo V. Fibrati vettoriali		105
5.1.	Fibrati vettoriali	105
5.2.	Gruppo strutturale	106
5.3.	Fibrati vettoriali associati a rappresentazioni lineari	107
5.4.	Equivalenza di fibrati vettoriali	108
5.5.	Fibrati vettoriali sulle sfere	110
5.6.	La proprietà (S)	111
5.7.	Classificazione omotopica I: base CW	113
5.8.	Classificazione omotopica II: base compatta	114
Capitolo VI. Elementi di K -teoria		119
6.1.	Addendi banali	119
6.2.	Gruppo di K -teoria ed equivalenza stabile	120
6.3.	Caratterizzazione omotopica dell'equivalenza stabile	122
6.4.	Gruppi $si K$ -teoria relativi	124
6.5.	I gruppi $\mathcal{K}_k^{-1}(B)$	128
Parte 2. Algebre di Clifford		133
Capitolo VII. Campi di vettori sulle sfere		135
7.1.	Vettori tangenti unitarii sulle sfere	136
7.2.	Moltiplicazione ortogonale	136
Capitolo VIII. Algebre di Clifford e Spinori		139
8.1.	Algebre di Clifford reali	139
8.2.	Algebra di Clifford di uno spazio vettoriale quadratico	145
8.3.	Involuzioni, anti-involuzioni e centro dell'algebra di Clifford	149
8.4.	Gruppi ortogonali e loro algebre di Lie	151
8.5.	Rappresentazione spinoriale dell'algebra ortogonale	153
8.6.	Gruppo spinoriale e sua rappresentazione vettoriale	155
8.7.	Spinori complessi	162
8.8.	Algebre di Clifford reali di segnatura (p, q)	167
8.9.	Spinori reali	171
8.10.	Applicazione ai campi di vettori tangenti alle sfere	179
8.11.	Spinori di Dirac, Weyl, Majorana	179
Capitolo IX. Ottonioni		181
9.1.	Richiami sulle algebre	181
9.2.	La costruzione di Cayley-Dickson	186

9.3. Un teorema di Hurwitz	189
9.4. Gli ottonioni	192
9.5. \mathbf{G}_2	193
9.6. Algebre di Jordan, geometria proiettiva ed \mathbf{F}_4	197
Parte 3. Complesso di de Rham e coomologia di Čech	201
Capitolo X. Forme differenziali negli spazi Euclidei	203
10.1. Forme differenziali in \mathbb{R}^n	203
10.2. Pull-back	204
10.3. Differenziale di una forma	204
10.4. Il complesso di de Rham	205
10.5. Coomologia di de Rham a supporti compatti	208
10.6. Il grado di un'applicazione propria di \mathbb{R}^n in sé	211
10.7. Orientazione e sottovarietà di \mathbb{R}^n .	213
10.8. Integrazione sulle sottovarietà e formule di Stokes	215
Capitolo XI. Calcolo differenziale sulle varietà	221
11.1. Fibrato cotangente e tensori	221
11.2. Forme differenziali su una varietà	222
11.3. Il lemma di Poincaré-Volterra sugli intorni contrattili	224
11.4. Derivata di Lie di un tensore	224
11.5. Distribuzioni vettoriali e teorema di Frobenius	227
Capitolo XII. Calcolo differenziale sulle varietà	231
12.1. Fibrato cotangente e tensori	231
12.2. Forme differenziali su una varietà	231
12.3. Il lemma di Poincaré-Volterra sugli intorni contrattili	233
12.4. Derivata di Lie di un tensore	234
12.5. Distribuzioni vettoriali e teorema di Frobenius	236
12.6. Integrità formale e lemma di Poincaré-Volterra	241
12.7. Il teorema di Darboux sulle forme canoniche	245
Capitolo XIII. Coomologia di de Rham sulle varietà	251
13.1. Definizioni principali	251
13.2. Invarianza omotopica	252
13.3. Complessi differenziali	253
13.4. Le successioni di Mayer-Vietoris	256
13.5. Dualità di Poincaré	262
13.6. Grado di un'applicazione	264
13.7. La formula di Künnet	265
13.8. Duale di Poincaré di una sottovarietà orientata	267
13.9. La proprietà semi-locale	269
13.10. Coomologia a supporti compatti nelle fibre	273
13.11. Integrazione sulla fibra	273
13.12. Dualità di Poincaré e classe di Thom	275

13.13.	Due proprietà fondamentali della dualità di Poincaré	276
13.14.	Il complesso di deRham twistato	277
Capitolo XIV. Il complesso di Čech-de Rham		283
14.1.	Successione esatta associata ad un ricoprimento	283
14.2.	La coomologia di Čech-de Rham	284
14.3.	Una formula di omotopia	288
14.4.	La forma di Eulero di un fibrato in sfere orientate	291
14.5.	La successione di Gysin	296
14.6.	Coomologia delle varietà di Stiefel complesse e quaternioniche	301
14.7.	L'isomorfismo di Thom	302
14.8.	Fibrati in sfere associati a fibrati vettoriali	305
14.9.	Il numero di Eulero	306
14.10.	La caratteristica di Eulero	308
14.11.	Caratteristica di Eulero di un complesso	310
Capitolo XV. Fasci e coomologia di Čech		313
15.1.	Fasci d'insiemi e morfismi di fasci	313
15.2.	Prefasci d'insiemi	315
15.3.	Fascio associato ad un prefascio e prefasci canonici	316
15.4.	Il fascio immagine diretta	318
15.5.	Fasci dotati di struttura algebrica	320
15.6.	Morfismi di \mathcal{A} -moduli e fasci quozienti	321
15.7.	Coomologia di Čech con coefficienti in un fascio	323
15.8.	Il teorema di Serre	326
15.9.	Un teorema di algebra omologica	333
15.10.	Il teorema di Leray sui ricoprimenti aciclici	338
15.11.	Il Teorema di de Rham	342
15.12.	Fasci fiacchi	343
Capitolo XVI. Il complesso di Čech-de Rham		349
16.1.	Il teorema di de Rham	349
16.2.	Prolungamento di sezioni	355
16.3.	Fasci molli	356
16.4.	Fasci fini	360
16.5.	Fasci differenziali	360
16.6.	Risoluzione d'un fascio	361
16.7.	Risoluzione canonica d'un fascio	361
Parte 4. Classi caratteristiche		363
Capitolo XVII. Classi caratteristiche		365
17.1.	La classe di Chern di un fibrato in rette complesse	365
17.2.	La coomologia degli spazi proiettivi complessi	367
17.3.	Le classi di Chern	367
17.4.	Proprietà delle classi di Chern	369

17.5. Varietà bandiera e varietà di Grassmann	372
17.6. Varietà bandiera di un fibrato vettoriale	372
Appendice: Omotopia	375
Capitolo XVIII. Omotopia	377
18.1. Omotopia libera di applicazioni continue	377
18.2. Equivalenza omotopica di spazi topologici	378
18.3. Spazi topologici contrattili	379
18.4. Omotopia legata. Retratti di deformazione. Omotopia relativa	380
18.5. k -connessione	381
18.6. k -connessione relativa	383
18.7. Proprietà di omotopia delle sfere	384
18.8. Il teorema del punto fisso di Brouwer	390
Capitolo XIX. Rivestimenti ed omotopia	391
19.1. Azioni di gruppo	391
19.2. Omeomorfismi locali	393
19.3. Rivestimenti	395
19.4. Gruppo del rivestimento	398
19.5. Rivestimenti con gruppo di rivestimento assegnato	400
19.6. Rivestimenti di Galois	401
Capitolo XX. Il teorema di Van Kampen	403
20.1. Prodotto libero di gruppi	403
20.2. Teorema di Van Kampen	404
20.3. Alcuni esempi ed applicazioni	408
Capitolo XXI. CW -complessi	415
21.1. Celle e decomposizioni cellulari	415
21.2. Spazi cellulari	418
21.3. Attaccamenti	424
21.4. Applicazioni cellulari ed attaccamenti di celle	425
21.5. Prolungamenti differenziabili di funzioni continue	426
21.6. Approssimazione cellulare	427
21.7. Una proprietà di omotopia delle coppie cellulari	429
21.8. Cofibrazioni	431
21.9. Alcune proprietà di omotopia dei CW -complessi	432
21.10. Coppie cellulari k -connesse ed equivalenza omotopica	434
21.11. Gruppi di omotopia degli spazi cellulari di dimensione 1	437
21.12. Gruppo fondamentale di uno spazio cellulare	438
Capitolo XXII. Esercizi e Complementi	439
22.1. Esercizi	439
22.2. Le superfici modello	440
22.3. Gruppo fondamentale delle curve algebriche piane	443
22.4. Esempi di curve piane irriducibili (Esercizi)	447

22.5.	Curve piane riducibili (Esercizi)	447
22.6.	Altri esercizi	448
22.7.	Varietà di Stiefel e di Grassmann reali	449
22.8.	Varietà di Stiefel e di Grassmann complesse	454
Appendice: Algebre di Lie		457
Capitolo XXIII. Algebre di Lie		459
23.1.	Nozioni fondamentali	459
23.2.	Algebre di Lie lineari, derivazioni, rappresentazione aggiunta	460
23.3.	Rappresentazioni lineari	463
23.4.	Forme invarianti	465
23.5.	Automorfismi	466
23.6.	Algebre di Lie risolubili	467
23.7.	Algebre di Lie semisemplici	468
23.8.	Algebre di Lie nilpotenti	468
23.9.	Il teorema di Engel	469
23.10.	Il Teorema di Lie	471
23.11.	Il più grande ideale di nilpotenza di una rappresentazione	474
23.12.	Il radicale nilpotente e il nilradicale	475
23.13.	Automorfismi speciali	477
Parte 5. Gruppi ed algebre di Lie e spazi omogenei		479
Capitolo XXIV. Gruppi e algebre di Lie		481
24.1.	Nozioni fondamentali	481
24.2.	Alcune osservazioni sull'applicazione esponenziale	485
24.3.	Sottogruppi di Lie	486
24.4.	La forma di Maurer-Cartan	487
24.5.	Applicazioni a valori in un gruppo di Lie	491
24.6.	Omomorfismi di gruppi ed algebre di Lie	492
24.7.	Rappresentazioni lineari	493
24.8.	Spazi omogenei	493
24.9.	Gruppi di Lie di trasformazioni	494
Capitolo XXV. Studio di alcuni gruppi classici		499
25.1.	I quaternioni e la struttura differenziale di $\mathbf{SU}(2)$, $\mathbf{SO}(3)$, $\mathbf{SO}(4)$	499
25.2.	I gruppi $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(1, \mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$, $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$, $\mathbf{SO}(1, 2)$	501
25.3.	La quadrica di \mathbb{CP}^5 ed alcuni omomorfismi di gruppi ($\mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$, $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$, $\mathbf{SO}^+(3, 3)$, $\mathbf{SU}(4)$, $\mathbf{SO}(6)$)	503
25.4.	I gruppi $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(5)$	507
25.5.	Rappresentazione spinoriale di alcuni gruppi di Lorentz	508
Capitolo XXVI. Strutture differenziali di alcuni gruppi lineari		515
26.1.	La trasformata di Cayley	515
26.2.	Alcuni gruppi lineari	517

26.3.	Decomposizione di Cartan	518
26.4.	Connessione di alcuni gruppi di matrici	523
26.5.	Gruppi $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$, $\mathbf{SL}_{\mathbb{H}}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$, $\mathbf{U}^*(2n)$, $\mathbf{SU}^*(2n)$	524
Capitolo XXVII.	Gruppi classici compatti	527
27.1.	Il gruppo unitario $\mathbf{U}(n)$	527
27.2.	Il gruppo speciale unitario $\mathbf{SU}(n)$	528
27.3.	I gruppi ortogonali $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$	529
27.4.	Il gruppo unitario simplettico $\mathbf{Sp}(n)$	531
27.5.	Sfere e gruppi compatti	533
27.6.	Gruppi di omotopia dei gruppi classici	534
Capitolo XXVIII.	Gruppi classici non compatti	539
28.1.	La lista dei gruppi classici non compatti	539
28.2.	I gruppi $\mathbf{U}(p, q)$ e $\mathbf{SU}(p, q)$	541
28.3.	I gruppi $\mathbf{SO}(p, q)$	542
28.4.	I gruppi $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ e $\mathbf{SU}^*(2n)$	542
28.5.	I gruppi $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ ed $\mathbf{SO}^*(2n)$	543
28.6.	I gruppi $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$	545
Appendice: Complementi di geometria differenziale		547
Capitolo XXIX.	Il lemma di Morse-Sard	549
29.1.	Il caso degli spazi Euclidei	549
29.2.	Il teorema di Sard per varietà differenziabili	554
Capitolo XXX.	Teoremi di approssimazione e d'immersione	555
30.1.	Il teorema d'immersione di Whitney	555
30.2.	Alcuni teoremi di approssimazione per applicazioni differenziabili	555
30.3.	Il teorema d'immersione di Whitney	559
30.4.	Retratti differenziabili d'intorno	563
30.5.	Alcuni teoremi d'approssimazione	565
Capitolo XXXI.	Campi di vettori e spazio tangente	567
31.1.	Campi di vettori e curve integrali	567
31.2.	Vettori tangenti e fibrato tangente	569
31.3.	Differenziale di un'applicazione differenziabile	571
31.4.	Alcune osservazioni sul teorema d'immersione di Whitney	571
31.5.	Gruppi a un parametro di diffeomorfismi	572
31.6.	Inclusioni isotope	574
31.7.	Campi completi	575
31.8.	Isotopie dello spazio ambiente	577
31.9.	k -celle differenziabili	579
Capitolo XXXII.	Fibrati vettoriali	581
32.1.	Fibrati differenziabili	581
32.2.	Fibrati vettoriali differenziabili	584

32.3.	Morfismi e operazioni di fibrati vettoriali	585
32.4.	Fibrati vettoriali e fibrato tangente	587
32.5.	Norme differenziabili e strutture Euclidee	589
32.6.	Classi di isomorfismo di fibrati vettoriali	589
32.7.	Fibrati vettoriali sulle sfere	591
Appendice: Fibrati differenziabili		593
Capitolo XXXIII. Fibrati di Steenrod differenziabili		595
33.1.	Definizioni principali	595
33.2.	Alcuni esempi	596
33.3.	Triangolazione delle varietà differenziabili	597
Capitolo XXXIV. Fibrati principali differenziabili		607
34.1.	Prime definizioni	607
34.2.	L'esempio degli spazi omogenei	609
34.3.	Morfismi di fibrati principali	609
34.4.	Classificazione dei fibrati principali	612
34.5.	Il fibrato dei sistemi di riferimento	614
34.6.	Jacobiano di un'applicazione differenziabile	615
34.7.	Riduzione del gruppo strutturale e \mathbf{G} -strutture	616
34.8.	\mathbf{G} -strutture su una varietà differenziabile	618
34.9.	Fibrati vettoriali associati a rappresentazioni lineari	618
Appendice		
CW complessi e omotopia		623
Capitolo XXXV. CW -complessi		625
35.1.	Celle e decomposizioni cellulari	625
35.2.	Spazi cellulari	628
35.3.	Attaccamenti	634
35.4.	Applicazioni cellulari ed attaccamenti di celle	635
35.5.	Prolungamenti differenziabili di funzioni continue	636
35.6.	Approssimazione cellulare	637
35.7.	Una proprietà di omotopia delle coppie cellulari	639
35.8.	Cofibrazioni	641
35.9.	Alcune proprietà di omotopia dei CW -complessi	642
35.10.	Coppie cellulari k -connesse ed equivalenza omotopica	644
35.11.	Gruppi di omotopia degli spazi cellulari di dimensione 1	647
35.12.	Gruppo fondamentale di uno spazio cellulare	648
Capitolo XXXVI. Esercizi e Complementi		649
36.1.	Esercizi	649
36.2.	Le superfici modello	650
36.3.	Gruppo fondamentale delle curve algebriche piane	653
36.4.	Esempi di curve piane irriducibili (Esercizi)	657

36.5. Curve piane riducibili (Esercizi)	657
36.6. Altri esercizi	658
36.7. Varietà di Stiefel e di Grassmann reali	659
36.8. Varietà di Stiefel e di Grassmann complesse	664
Capitolo XXXVII. Appendice: Omologia	667
37.1. Notazione	667
37.2. Definizione assiomatica	668
37.3. Prime conseguenze degli assiomi	670
37.4. La formula di Künnet	676
37.5. Gruppi di omologia dei complessi cellulari	676
Capitolo XXXVIII. Appendice: Elementi di algebra omologica	681
38.1. Complessi	681
38.2. Complessi di catene	682
38.3. Complessi di cocatene	688
38.4. I funtori Hom e Tor	692
38.5. Relazione con l'omologia singolare	693
Appendice	
Complementi sulle connessioni	695
Capitolo XXXIX. Espressioni in coordinate	697
39.1. Espressione in coordinate delle equazioni di struttura	697
39.2. Espressioni locali	699
39.3. Forme e simboli di Christoffel	702
Indice analitico	707
Bibliografia	709

Testi consigliati

В.А. Рохлин, Д.В. Фукс Пачальный курс топологии: геометрические главы Наука, Москва, 1977 [trad. Rohlin-Fuchs, *Beginner's Course in Topology: Geometric Chapters*, (Springer series in Soviet mathematics), 1984, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg].

Dale Husemoller, *Fibre Bundles*, Graduate Texts in Mathematics, 1994, Springer Verlag, Berlin Heidelberg

J.C. Baez, *The Octonions*, Bulletin of the AMS, vol. 39, N.2, 2002, pp.145-205.

Parte 1

Fibrati topologici

CAPITOLO I

Richiami su spazi cellulari ed omotopia

1.1. Spazi puntati

DEFINIZIONE 1.1.1. Uno *spazio puntato* è uno spazio topologico non vuoto X su cui sia stato fissato un *punto base* x_0 . Lo indicheremo come la coppia (X, x_0) .

1.1.1. Bouquet. Sia $\{(X_i, \bar{x}_i)\}$ una qualsiasi famiglia di spazi puntati. Il punto (\bar{x}_i) si può considerare in modo naturale come punto base del loro prodotto $(\times X_i)$. Per ogni indice j consideriamo la copia di X_j passante per il punto base del prodotto: $X_j^\# = \{(x_i) \in (\times X_i) \mid x_i = \bar{x}_i, \forall i \neq j\}$.

DEFINIZIONE 1.1.2. Chiamiamo *bouquet* degli spazi puntati $\{(X_i, \bar{x}_i)\}$ il sotto-spazio $\vee(X_i, \bar{x}_i) = \bigcup X_i^\#$ del prodotto topologico $(\times X_i)$, con punto base (\bar{x}_i) .

OSSERVAZIONE 1.1.3. Si verifica che $\vee(X_i, \bar{x}_i)$ è omeomorfo, in modo naturale, al quoziente dell'unione disgiunta $(\sqcup X_i)$ degli X_i rispetto all'unione disgiunta $(\sqcup \{\bar{x}_i\})$ dei loro punti base.

Indichiamo con $(X_1, \bar{x}_1) \vee \cdots \vee (X_n, \bar{x}_n)$ il bouquet di un numero finito di spazi puntati.

1.1.2. Prodotto puntato o smash product.

DEFINIZIONE 1.1.4. Chiamiamo *prodotto puntato*, o *smash product*, o *prodotto tensoriale* di due spazi puntati (X, x_0) , ed (Y, y_0) il quoziente

$$(1.1) \quad (X, x_0) \wedge (Y, y_0) = (X \times Y) / ((X, x_0) \vee (Y, y_0))$$

del loro prodotto topologico rispetto al loro bouquet. È naturale fissare come punto base l'immagine del bouquet.

Quando si possano sottintendere i punti base, scriveremo per semplicità $X \wedge Y$ invece di $(X, x_0) \wedge (Y, y_0)$. Possiamo indicare i punti del prodotto puntato anche come *prodotti* $x \wedge y$, con la regola che $x \wedge y_0 = x_0 \wedge y = x_0 \wedge y_0$, mentre, se $x_1, x_2 \in X \setminus \{x_0\}$ ed $y_1, y_2 \in Y \setminus \{y_0\}$, allora $x_1 \wedge y_1 \neq x_0 \wedge y_0$ e l'uguaglianza $x_1 \wedge y_1 = x_2 \wedge y_2$ è verificata se e soltanto se $x_1 = x_2$ ed $y_1 = y_2$.

OSSERVAZIONE 1.1.5. A meno di omeomorfismi, bouquet e smash product sono operazioni associative e commutative.

ESEMPIO 1.1.6. Consideriamo la sfera S^n come sottospazio dello spazio euclideo \mathbb{R}^{n+1} , con punto base il primo vettore e_0 di una base ortonormale fissata. Se n_1, \dots, n_k sono interi non negativi, allora

$$S^{n_1} \wedge \cdots \wedge S^{n_k} \simeq S^{n_1 + \cdots + n_k}.$$

1.1.3. Coni. Sia X uno spazio topologico. Chiamiamo *cono topologico* di base X il quoziente:

$$(1.2) \quad CX = (X \times I) / (X \times \{0\}).$$

Indichiamo con tx l'immagine di (t, x) in CX . È $0x = 0y$ per ogni $x, y \in X$; indichiamo tale punto con 0 e lo diciamo *vertice*, e lo scegliamo come punto base del cono CX . Per $0 < t \leq 1$, l'applicazione

$$X \ni x \longrightarrow t \cdot x \in CX$$

è un'immersione topologica.

Per ogni $s \in [0, 1]$, l'applicazione $CX \ni t \cdot x \rightarrow (st) \cdot x \in CX$ è continua.

PROPOSIZIONE 1.1.7. *Se $f : X \rightarrow Y$ è un'applicazione continua tra due spazi topologici, allora*

$$(1.3) \quad Cf : CX \ni t \cdot x \rightarrow t \cdot f(x) \in CY$$

è ancora un'applicazione continua.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{f \times \text{id}} & Y \times I \\ \downarrow & & \downarrow \\ CX & \xrightarrow{Cf} & CY \end{array}$$

in cui le frecce verticali denotano proiezione nel quoziente. L'applicazione $f \times \text{id}$ è continua perché prodotto di applicazioni continue. Quindi Cf è continua perché ottenuta da un'applicazione continua per passaggio ai quozienti. \square

OSSERVAZIONE 1.1.8. Sia A un sottoinsieme di \mathbb{R}^n e K il sottoinsieme di \mathbb{R}^{n+1} definito da:

$$K = \{(t, tx_1, \dots, tx_n) \mid 0 \leq t \leq 1, (x_1, \dots, x_n) \in A\}.$$

L'applicazione

$$CA \ni t \cdot x \rightarrow (t, tx) \in K$$

è continua e bigettiva. La sua inversa è ovviamente continua in tutti i punti (t, tx) con $0 < t \leq 1$ e $x \in A$. Essa non è però in generale continua nel punto $(0, 0)$: lo è nel caso in cui il sottoinsieme A di \mathbb{R}^n sia chiuso e limitato. La topologia di CA è quindi in generale più fine di quella indotta dalla topologia euclidea sul corrispondente cono geometrico K .

ESEMPIO 1.1.9. Il cono CS^n è omeomorfo ad disco D^{n+1} .

L'omeomorfismo è dato da $CS^n \ni t \cdot x \rightarrow tx \in D^{n+1}$.

1.1.4. Sospensioni. Sia X uno spazio topologico. Definiamo su $X \times I$ una relazione di equivalenza ponendo:

$$(x, t) \sim (y, s) \Leftrightarrow \begin{cases} s = t = 0, \text{ oppure} \\ s = t = 1, \text{ oppure} \\ 0 < s = t < 1 \text{ ed } x = y. \end{cases}$$

Chiamiamo *sospensione* di X il quoziente topologico

$$SX = (X \times I) / \sim .$$

Detta $\pi : X \times I \rightarrow SX$ la proiezione nel quoziente, l'insieme $\pi(X \times \{1/2\})$ si dice *base* di SX . Osserviamo che per ogni $0 < t < 1$, l'applicazione

$$X \ni x \rightarrow \pi(x, t) \in SX$$

è un'immersione topologica. L'applicazione naturale $CX \rightarrow SX$ è decomponibile ed SX è omeomorfo al quoziente che si ottiene identificando a un punto la base del cono CX .

OSSERVAZIONE 1.1.10. Abbiamo gli omeomorfismi:

$$SD^n \simeq D^{n+1} \quad \text{ed} \quad SS^n \simeq S^{n+1}.$$

Gli omeomorfismi si ottengono per passaggio al quoziente dalle applicazioni:

$$\begin{aligned} D^n \times I \ni (x, t) &\rightarrow (2\sqrt{t-t^2}x, 2t-1) \in D^{n+1}, \\ S^n \times I \ni (x, t) &\rightarrow (2\sqrt{t-t^2}x, 2t-1) \in S^{n+1}. \end{aligned}$$

Possiamo definire per ricorrenza la sospensione k -esima $S^k X$ dello spazio topologico X ponendo

$$\begin{cases} S^0 X = X \\ S^k X = S(S^{k-1} X) \quad \text{se } k \geq 1. \end{cases}$$

1.1.5. Giunti. Siano X ed Y due spazi topologici. Consideriamo sul prodotto cartesiano $X \times X \times I$ la relazione di equivalenza:

$$(1.4) \quad (x_1, y_1, t_1) \sim (x_2, y_2, t_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t_1 = t_2 < 1 \text{ e } x_1 = x_2, y_1 = y_2, \text{ oppure} \\ s = t = 0 \text{ ed } x_1 = x_2, \text{ oppure} \\ s = t = 1 \text{ ed } y_1 = y_2. \end{cases}$$

Il quoziente topologico:

$$X * Y = (X \times Y \times I) / \sim$$

si dice il *giunto topologico* di X ed Y . Sia $\pi : X \times Y \times I \rightarrow X * Y$ la proiezione nel quoziente. I sottospazi $\pi(X \times Y \times \{0\}) \simeq X$ e $\pi(X \times Y \times \{1\}) \simeq Y$ si dicono *basi* del giunto.

LEMMA 1.1.11. *L'applicazione*

$$X \times Y \times I \ni (x, y, t) \rightarrow ((1-t) \cdot x, t \cdot y) \in CX \times CY$$

definisce per passaggio al quoziente un'immersione topologica

$$(1.5) \quad \alpha : X * Y \rightarrow CX \times CY.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che $\alpha(X * Y)$ è il sottospazio chiuso

$$Z = \{(tx, sy) \in CX \times CY \mid s + t = 1\} \quad \text{di} \quad CX \times CY.$$

Consideriamo le applicazioni continue:

$$\begin{aligned} \phi : X \times Y \times I &\ni (x, y, t) \rightarrow (x, 1-t, y, t) \in X \times I \times Y \times I \\ \psi : X \times I \times Y \times I &\ni (x, s, y, t) \rightarrow (x, y, t) \in X \times Y \times I. \end{aligned}$$

L'applicazione composta $\psi \circ \phi$ è l'identità su $X \times Y \times I$. Per passaggio ai quozienti otteniamo un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X \times Y \times I & \xrightarrow{\phi} & X \times I \times Y \times I & \xrightarrow{\psi} & X \times Y \times I \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X * Y & \xrightarrow{\alpha} & CX \times CY & \xrightarrow{\beta} & X * Y \end{array}$$

in cui le frecce verticali rappresentano le proiezioni nei quozienti. La β è continua e la sua restrizione all'immagine di α è l'inversa dell'abbreviazione di α . Questo dimostra che α è un'immersione topologica. \square

In modo analogo si verificano gli omeomorfismi:

LEMMA 1.1.12. *Siano X, Y, Z spazi topologici. Abbiamo allora omeomorfismi naturali:*

$$\begin{aligned} X * Y &\simeq Y * X, \\ (X * Y) * Z &\simeq X * (Y * Z). \end{aligned} \quad \square$$

Se $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$ è una m -upla di spazi topologici, possiamo definire, utilizzando l'associatività dell'operazione di giunto, lo spazio topologico $X_1 * \dots * X_m$: esso si identifica in modo canonico al sottospazio

$$\{(t_1 x_1, \dots, t_m x_m) \mid x_i \in X_i, t_i \in I, 1 \leq i \leq m; t_1 + \dots + t_m = 1\}$$

del prodotto topologico $CX_1 \times \dots \times CX_m$.

PROPOSIZIONE 1.1.13. *Sia $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$ una m -upla di spazi topologici. Allora $C(X_1 * \dots * X_m)$ è omeomorfo a $CX_1 \times \dots \times CX_m$.*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo un'applicazione continua

$$\phi : (X_1 * \dots * X_m) \times I \rightarrow CX_1 \times \dots \times CX_m$$

identificando $X_1 * \dots * X_m$ al sottospazio di $CX_1 \times \dots \times CX_m$ formato dalle m -uple $(t_1 x_1, \dots, t_m x_m)$ con $x_i \in X_i, t_i \in I$ per $i = 1, \dots, m$ e $t_1 + \dots + t_m = 1$ e ponendo

$$\phi(t_1 \cdot x_1, \dots, t_m \cdot x_m, t) = ((tt_1) \cdot x_1, \dots, (tt_m) \cdot x_m).$$

Il suo quoziente iniettivo è l'omeomorfismo cercato. \square

Le operazioni di cono e sospensione si possono ricondurre al giunto:

PROPOSIZIONE 1.1.14. *Sia X uno spazio topologico. Abbiamo i seguenti omeomorfismi:*

$$CX \simeq D^0 * X, \quad SX \simeq S^0 * X, \quad S^{k+1}X \simeq S^k * X.$$

DIMOSTRAZIONE. Il primo si ottiene per passaggio al quoziente dalla

$$D^0 \times X \times I \ni (0, x, t) \longrightarrow (x, t) \in X \times I,$$

il secondo per passaggio al quoziente e abbreviazione da (qui $\epsilon = \pm 1 \in S^0$)

$$S^0 \times X \times I \ni (\epsilon, x, t) \longrightarrow (x, (1 + \epsilon t)/2) \in X \times I.$$

Il terzo omeomorfismo si ricava dalla proprietà associativa del giunto topologico:

$$S^{k+1}X \simeq S^k(SX) \simeq S^k(S^0 * X) \simeq S^{k-1}(S^0 * S^0 * X) \simeq \dots \simeq \underbrace{S^0 * \dots * S^0}_{(k+1) \text{ volte}} * X$$

e dal fatto che $S^0 * S^j \simeq S^{j+1}$ per ogni intero $j \geq 0$. \square

ESEMPIO 1.1.15. Siano m_1, \dots, m_n interi non negativi. Abbiamo gli omeomorfismi:

- (1) $S^{m_1} * S^{m_2} * \dots * S^{m_n} \simeq S^{m_1+m_2+\dots+m_n+n-1}$
- (2) $D^{m_1} \times D^{m_2} \times \dots \times D^{m_n} \simeq D^{m_1+m_2+\dots+m_n}$
- (3) $D^{m_1} * D^{m_2} * \dots * D^{m_n} \simeq D^{m_1+m_2+\dots+m_n+n-1}$.

Basta dimostrare che gli omeomorfismi valgono per $n = 2$. Quindi la (1) è stata già verificata. La (2) è ovvia se $m_1 = 0$ od $m_2 = 0$. Se $m_1, m_2 \geq 1$, abbiamo la catena di omeomorfismi:

$$D^{m_1} \times D^{m_2} \simeq CS^{m_1-1} \times CS^{m_2-1} \simeq C(S^{m_1-1} * S^{m_2-1}) \simeq C(S^{m_1+m_2-1}) \simeq D^{m_1+m_2}.$$

Anche per la (3) possiamo limitarci a considerare il caso $m_1, m_2 \geq 1$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} D^{m_1} * D^{m_2} &\simeq (CS^{m_1-1}) * C(S^{m_2-1}) \simeq S^{m_1-1} * D^0 * S^{m_2-1} * D^0 \\ &\simeq (S^{m_1-1} * S^{m_2-1}) * D^0 * D^0 \simeq S^{m_1+m_2-1} * D^0 * D^0 \\ &\simeq CS^{m_1+m_2-1} * D^0 \simeq D^{m_1+m_2} * D^0 \simeq CD^{m_1+m_2} \simeq D^{m_1+m_2+1}. \end{aligned}$$

1.2. Gruppi di omotopia di uno spazio puntato

DEFINIZIONE 1.2.1. Chiamiamo *n-esimimo gruppo di omotopia dello spazio puntato* (X, x_0) , e indichiamo con $\pi_n(X, x_0)$, l'insieme $\pi(S^n, e_0; X, x_0)$ delle classi di e_0 -omotopia delle applicazioni continue $f : S^n \rightarrow X$ tali che $f(e_0) = x_0$.

Il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ si dice anche *gruppo fondamentale* di X con punto base x_0 .

Se $n \geq 1$, possiamo definire su $\pi_n(X, x_0)$ una struttura di *gruppo*. A questo scopo, è conveniente utilizzare l'isomorfismo tra $\pi_n(X, x_0)$ e $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ descritto dal seguente:

LEMMA 1.2.2. *Sia $n \geq 1$. Possiamo definire una $\phi : I^n \rightarrow S^n$ continua, con le proprietà:*

- (i) ϕ si restringe ad un omeomorfismo di $I^n \setminus \partial I^n$ su $S^n \setminus \{e_0\}$;
- (ii) $\phi^{-1}(e_0) = \partial I^n$;
- (iii) il quoziente iniettivo di ϕ è un omeomorfismo di $I^n / \partial I^n$ su S^n .

Sia (X, x_0) uno spazio puntato. L'applicazione

$$(1.6) \quad \phi^* : \pi(S^n, e_0; X, x_0) \rightarrow \pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$$

è bigettiva.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una mappa del disco $D^n = \{\|x\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$ sulla sfera S^n , che trasformi la frontiera S^{n-1} di D^n nel punto $e_0 = (1, 0, \dots, 0) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e definisca un omeomorfismo di $\mathring{D}^n = \{\|x\| < 1\}$ con $S^n \setminus \{e_0\}$. Possiamo considerare ad esempio

$$\psi(x) = \begin{cases} (2|x| - 1, 2x \sqrt{(1/|x|) - 1}), & \text{se } 0 < |x| \leq 1, \\ -e_0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Per passaggio al quoziente iniettivo, la ψ definisce un omeomorfismo di D^n / S^{n-1} su S^n , che trasforma S^{n-1} in e_0 .

Per ottenere la ϕ cercata sarà quindi sufficiente comporre la ψ con un omeomorfismo τ di I^n su D^n che trasformi ∂I^n in S^{n-1} .

Poiché sia la palla chiusa D^n che l'ipercubo I^n sono convessi n -dimensionali, l'omeomorfismo si può ottenere facendo corrispondere due loro punti interni (ad esempio i centri) e i corrispondenti raggi paralleli da questi punti ai punti della frontiera. Possiamo esplicitare l'omeomorfismo utilizzando in \mathbb{R}^n la norma dell'estremo superiore sulle coordinate:

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \text{ per } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

e sia $c = \frac{1}{2}(1, \dots, 1) = \frac{1}{2}(e_1 + \dots + e_n)$. Possiamo allora definire $\tau : I^n \rightarrow D^n$ mediante:

$$\tau(x) = \begin{cases} \frac{x - c}{\|x - c\|} \|x - c\|_\infty, & \text{se } x \neq c, \\ 0, & \text{se } x = c. \end{cases}$$

Allora $\phi = \psi \circ \tau : I^n \rightarrow S^n$ è l'applicazione continua cercata.

Per concludere, basta osservare che l'applicazione

$$\mathcal{C}(S^n, e_0; X, x_0) \ni f \rightarrow f \circ \phi \in \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; X, x_0)$$

è un omeomorfismo per la topologia compatta-aperta. □

DEFINIZIONE 1.2.3. Dati $f, g \in \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; X, x_0)$, con $n \geq 1$, definiamo:

$$(1.7) \quad (f \cdot g)(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n), & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2}, \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & \text{se } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1. \end{cases}$$

Indicheremo graficamente il prodotto $f \cdot g$ con

$$\boxed{f \mid g}$$

TEOREMA 1.2.4. *Sia (X, x_0) uno spazio puntato. Per ogni intero $n \geq 1$ l'applicazione*

$$(1.8) \quad \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; X, x_0) \times \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; X, x_0) \ni (f, g) \rightarrow f \cdot g \in \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; X, x_0)$$

definisce per passaggio al quoziente un'operazione interna:

$$(1.9) \quad \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \ni (\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \cdot \beta \in \pi_n(X, x_0)$$

rispetto alla quale $\pi_n(X, x_0)$ è un gruppo, il cui elemento neutro corrisponde all'applicazione costante $\hat{x}_0 : I^n \ni s \rightarrow x_0 \in X$. Se $n \geq 2$, allora $\pi_n(X, x_0)$ è abeliano.

DIMOSTRAZIONE. Se $F, G : I^n \times I \rightarrow X$ sono due ∂I^n -omotopie con $F(\partial I^n, t) = G(\partial I^n, t) = \{x_0\}$ per ogni $0 \leq t \leq 1$, allora anche

$$(F \cdot G)(s; t) = \begin{cases} F(2s_1, s_2, \dots, s_n; t), & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2}, \\ G(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n; t), & \text{se } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1, \end{cases}$$

è una ∂I^n -omotopia con $F \cdot G(\partial I^n, t) = \{x_0\}$ per ogni $0 \leq t \leq 1$. L'operazione su $\pi_n(X, x_0)$ è perciò ben definita.

Dimostriamo ora che $\pi_n(X, x_0)$ è un gruppo per $n \geq 1$.

a. $[\hat{x}_0]$ è l'elemento neutro del prodotto.

Sia $f \in \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; X, x_0)$. Definiamo

$$F_1(s; t) = \begin{cases} x_0 & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{t}{2} \\ f\left(\frac{2s_1-t}{2-t}, s_2, \dots, s_n\right) & \text{se } \frac{t}{2} \leq s_1 \leq 1, \end{cases} \quad \text{ed}$$

$$F_2(s; t) = \begin{cases} f\left(\frac{2s_1}{2-t}, s_2, \dots, s_n\right) & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{2-t}{2} \\ x_0 & \text{se } \frac{2-t}{2} \leq s_1 \leq 1. \end{cases}$$

La prima è una ∂I^n -omotopia tra f e $\hat{x}_0 \cdot f$, la seconda tra f e $f \cdot \hat{x}_0$:

$$\boxed{f} \xrightarrow{F_1} \boxed{\hat{x}_0 \quad f} \qquad \boxed{f} \xrightarrow{F_2} \boxed{f \quad \hat{x}_0}$$

b. *Esistenza dell'inversa.*

Data $f \in \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ definiamo

$$\check{f}(s) = f(1 - s_1, s_2, \dots, s_n), \quad \forall s = (s_1, \dots, s_n) \in I^n.$$

Dico che $f \cdot \check{f} \sim \check{f} \cdot f \sim \hat{x}_0$ in $\mathcal{C}(I^n, \partial I^n; X, x_0)$. Osserviamo a questo scopo che

$$F(s; t) = \begin{cases} f(2ts_1, s_2, \dots, s_n) & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ f(2t(1 - s_1), s_2, \dots, s_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

è un'omotopia tra \hat{x}_0 ed $f \cdot \check{f}$. Chiaramente la $F(1 - s_1, s_2, \dots, s_n; t)$ è allora un'omotopia tra \hat{x}_0 ed $\check{f} \cdot f$ perché $\check{\check{f}} = f$.

c. *Il prodotto è associativo.*

L'associatività segue dallo schema:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline f & g & h \\ \hline \end{array} \xrightarrow{F} \begin{array}{|c|c|c|} \hline f & g & h \\ \hline \end{array}$$

con

$$F(s; t) = \begin{cases} f(2(1+t)s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2(1+t)} \\ g\left(2s_1 - \frac{1}{2(1+t)}, s_2, \dots, s_n\right) & \text{se } \frac{1}{2(1+t)} \leq s_1 \leq \frac{3+2t}{4(1+t)} \\ h\left(\frac{4(1+t)s_1 - (3+2t)}{1+2t}, s_2, \dots, s_n\right) & \text{se } \frac{3+2t}{4(1+t)} \leq s_1 \leq 1. \end{cases}$$

d. Il prodotto è commutativo per $n \geq 2$.

La dimostrazione della commutatività del prodotto per $n \geq 2$ segue dallo schema:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline f & g \\ \hline \end{array} \xrightarrow{F_1} \begin{array}{|c|c|} \hline f & \hat{x}_0 \\ \hline \hat{x}_0 & g \\ \hline \end{array} \xrightarrow{F_2} \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline g \\ \hline \end{array} \xrightarrow{F_3} \begin{array}{|c|c|} \hline \hat{x}_0 & f \\ \hline g & \hat{x}_0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{F_4} \begin{array}{|c|c|} \hline g & f \\ \hline \end{array}$$

Le omotopie sono descritte analiticamente da:

$$F_1(s; t) = \begin{cases} x_0, & \text{se } 0 \leq s_1 \leq 1/2, \quad 0 \leq s_2 \leq t/2, \\ f(2s_1, \frac{2s_2-t}{2-t}, s_3, \dots, s_n), & \text{se } 0 \leq s_1 \leq 1/2, \quad t/2 \leq s_2 \leq 1, \\ g(2s_1 - 1, (1+t)s_2, s_3, \dots, s_n), & \text{se } 1/2 \leq s_1 \leq 1, \quad 0 \leq s_2 \leq \frac{1}{1+t}, \\ x_0, & \text{se } 1/2 \leq s_1 \leq 1, \quad \frac{1}{1+t} \leq s_2 \leq 1; \end{cases}$$

$$F_2(s, t) = \begin{cases} x_0, & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{1-t}{2}, \quad 0 \leq s_2 \leq \frac{1}{2}, \\ g(\frac{2s_1+t-1}{1+t}, 2s_2, s_3, \dots, s_n), & \text{se } \frac{1-t}{2} \leq s_1 \leq 1, \quad 0 \leq s_2 \leq \frac{1}{2}, \\ f((2-t)s_1, 2s_2 - 1, s_3, \dots, s_n), & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2-t}, \quad 1/2 \leq s_2 \leq 1, \\ x_0, & \text{se } \frac{1}{2-t} \leq s_1 \leq 1, \quad 1/2 \leq s_2 \leq 1; \end{cases}$$

$$F_3(s) = \begin{cases} g((1+t)s_1, 2s_2, s_3, \dots, s_n), & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{1+t}, \quad 0 \leq s_2 \leq \frac{1}{2}, \\ x_0, & \text{se } \frac{1}{1+t} \leq s_1 \leq 1, \quad 0 \leq s_2 \leq 1/2, \\ x_0, & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{t}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq s_2 \leq 1, \\ f(\frac{2s_1-t}{2-t}, 2s_2 - 1, s_3, \dots, s_n), & \text{se } \frac{t}{2} \leq s_1 \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq s_2 \leq 1; \end{cases}$$

$$F_4(s) = \begin{cases} g(2s_1, (2-t)s_2, s_3, \dots, s_n), & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq s_2 \leq \frac{1}{2-t}, \\ x_0, & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2-t} \leq s_2 \leq 1, \\ x_0, & \text{se } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1, \quad 0 \leq s_2 \leq \frac{1-t}{2}, \\ f(2s_1 - 1, \frac{2s_2+t-1}{1+t}, s_3, \dots, s_n), & \text{se } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1, \quad \frac{1-t}{2} \leq s_2 \leq 1. \end{cases}$$

□

Ricordiamo che un *gruppo topologico* è uno spazio topologico \mathbf{G} su cui è definita un'operazione di gruppo per cui l'applicazione

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (a, b) \longrightarrow a^{-1}b \in \mathbf{G}$$

sia continua. Quando calcoliamo i gruppi di omotopia di un gruppo topologico, è conveniente scegliere la sua identità come punto base.

TEOREMA 1.2.5. *Il gruppo fondamentale $\pi_1(\mathbf{G}, e)$ di un gruppo topologico \mathbf{G} è abeliano.*

DIMOSTRAZIONE. Dati due laccetti $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(I, \{0, 1\}; \mathbf{G}, e)$, l'applicazione

$$I \times I \ni (s, t) \longrightarrow \phi(s, t) = \alpha(s) \cdot \beta(t) \in \mathbf{G}$$

è continua. Consideriamo i due cammini che congiungono il vertice $(0, 0)$ al vertice $(1, 1)$ del quadrato $I \times I$:

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} (2t, 0), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (1, 2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \quad \gamma_2(t) = \begin{cases} (0, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (2t - 1, 0), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Poiché

$$(\alpha \cdot \beta)(s) = \phi \circ \gamma_1(s), \quad (\beta \cdot \alpha)(s) = \phi \circ \gamma_2(s),$$

l'omotopia del quadrato che sovrappone γ_1 a γ_2 ci fornisce per composizione un'omotopia tra $\alpha \cdot \beta$ e $\beta \cdot \alpha$. L'applicazione

$$I \times I \ni (s, t) \rightarrow F(s, t) = \phi(t\gamma_2(s) + (1-t)\gamma_1(s)) \in \mathbf{G}$$

è un'omotopia tra $\alpha \cdot \beta$ e $\beta \cdot \alpha$. \square

OSSERVAZIONE 1.2.6. Se X è uno spazio topologico, $x_0 \in X$ ed Y la componente connessa per archi di X contenente x_0 , allora $\pi_n(X, x_0) = \pi_n(Y, x_0)$ per ogni $n \geq 1$, mentre l'insieme $\pi_0(X, x_0)$ è in corrispondenza biunivoca con le componenti connesse per archi di X .

1.3. Cambiamento del punto di base e azione del gruppo fondamentale

In uno spazio topologico connesso per archi i gruppi di omotopia sono, a meno di isomorfismi, indipendenti dalla scelta del punto base.

Sia X uno spazio topologico ed $\alpha : I \rightarrow X$ un cammino continuo, di estremi $x_0 = \alpha(0)$ ed $x_1 = \alpha(1)$.

Ad esso assoceremo un'applicazione $\alpha_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1)$. Per definirla, è conveniente utilizzare le identificazioni:

$$\pi_n(X, x_0) \simeq \pi(D^n, S^{n-1}; X, x_0) \quad \text{e} \quad \pi_n(X, x_1) \simeq \pi(D^n, S^{n-1}; X, x_1).$$

La α_* si ottiene allora per passaggio al quoziente dall'applicazione

$$(1.10) \quad \alpha_* : \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; X, x_0) \rightarrow \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; X, x_1)$$

definita da:

$$(1.11) \quad \alpha_* f = \begin{cases} f(2x) & \text{se } |x| \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2|x| - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1. \end{cases}$$

Chiaramente possiamo definire applicazioni

$$\begin{aligned} \alpha_* : \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; X, x_0) &\rightarrow \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; X, x_1) \quad \text{ed} \\ \alpha_* : \mathcal{C}(S^n, e_0; X, x_0) &\rightarrow \mathcal{C}(S^n, e_0; X, x_1) \end{aligned}$$

utilizzando le composizioni con gli omeomorfismi canonici

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}(I^n, \partial I^n; X, x_0) & \xrightarrow{\alpha^*} & \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; X, x_1) \\
\sim \downarrow & & \uparrow \sim \\
\mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; X, x_0) & \xrightarrow{\alpha^*} & \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; X, x_1) \\
\sim \uparrow & & \downarrow \sim \\
\mathcal{C}(S^n, e_0; X, x_0) & \xrightarrow{\alpha^*} & \mathcal{C}(S^n, e_0; X, x_1).
\end{array}$$

TEOREMA 1.3.1. *L'applicazione (1.10) definisce per passaggio al quoziente un isomorfismo*

$$(1.12) \quad \alpha_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1).$$

DIMOSTRAZIONE. Si verifica infatti che $\check{\alpha}^*$, con $\check{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ cammino inverso di α , è l'applicazione inversa di α_* . \square

OSSERVAZIONE 1.3.2. In particolare, se $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(I, \{0, 1\}; X, x_0)$,

$$(\alpha * \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(4s), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{4}, \\ \beta([4s - 1]/2), & \text{se } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{3}{4}, \\ \alpha(4s - 3), & \text{se } \frac{3}{4} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Quindi $\alpha * \beta$ è omotopa ad $\alpha \cdot \beta \cdot \check{\alpha}$ (dove $\check{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ è il cammino inverso di α).

Otteniamo quindi il seguente:

TEOREMA 1.3.3. *Sia (X, x_0) uno spazio puntato. Per ogni intero $n \geq 1$ l'applicazione:*

$$(1.13) \quad \mathcal{C}(I, \{0, 1\}; X, x_0) \times \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; X, x_0) \ni (\alpha, f) \rightarrow \alpha * f \in \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; X, x_0)$$

definisce per passaggio al quoziente un'azione di gruppo:

$$(1.14) \quad \pi_1(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \ni ([\alpha], [f]) \rightarrow [\alpha * f] \in \pi_n(X, x_0)$$

del gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ sull' n -esimo gruppo di omotopia $\pi_n(X, x_0)$.

Per $n = 1$ tale azione coincide con l'inversa della rappresentazione aggiunta.

\square

DEFINIZIONE 1.3.4. Una coppia topologica (B, A) ha la *proprietà di estensione dell'omotopia* se, per ogni spazio topologico X , ogni omotopia $\tilde{f}_A \in \mathcal{C}(A \times I, X)$ della restrizione ad A di un'applicazione $f \in \mathcal{C}(B, X)$ si estende ad un'omotopia $\tilde{f} \in \mathcal{C}(B \times I, X)$ di f .

1.4. Proprietà dell'estensione e cofibrazioni

A volte è utile interpretare l'omotopia utilizzando applicazioni a valori in spazi di funzioni. Ricordiamo che, per applicazioni definite su un prodotto, vale il seguente lemma.

LEMMA 1.4.1. *Siano B, Y, X spazi topologici e $\phi : B \times Y \rightarrow X$ un'applicazione. Definiamo $\check{\phi} : B \rightarrow X^Y$ mediante*

$$\check{\phi}(b)(y) = \phi(b, y), \quad \forall b \in B, \forall y \in Y.$$

Allora:

- (1) *Se ϕ è continua, allora $\check{\phi}(b)$ è continua per ogni $b \in B$ e l'applicazione $\check{\phi} : B \rightarrow \mathcal{C}(Y, X)$ è continua per la topologia compatta-aperta di $\mathcal{C}(Y, X)$.*
- (2) *Viceversa, se Y è localmente compatto e $\check{\phi} : B \rightarrow \mathcal{C}(Y, X)$ è continua per la topologia compatta-aperta di $\mathcal{C}(Y, X)$, allora ϕ è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con pr_B e pr_Y le proiezioni del prodotto cartesiano $B \times Y$ sulle coordinate.

(1) Se U è un aperto di X e $b \in B$, allora $[\check{\phi}(b)]^{-1}(U) = \text{pr}_Y(\phi^{-1}(U) \cap \text{pr}_B^{-1}(b))$ è aperto perché pr_Y si restringe ad un omeomorfismo di $\text{pr}_B^{-1}(b)$ su Y ed, essendo $\phi^{-1}(U)$ aperto in quanto ϕ è continua, $\phi^{-1}(U) \cap \text{pr}_B^{-1}(b)$ è un aperto di $\text{pr}_B^{-1}(b)$.

Quindi $\check{\phi}$ è un'applicazione di B in $\mathcal{C}(Y, X)$. La famiglia degli insiemi $W(K, U) = \{f \in \mathcal{C}(Y, X) \mid f(K) \subset U\}$, al variare di K tra i compatti di Y e di U tra gli aperti di X è una prebase degli aperti di $\mathcal{C}(Y, X)$. È quindi sufficiente verificare che $\check{\phi}^{-1}(W(K, U))$ è aperto in B se K è un compatto di Y ed U un aperto di X . Sia $b_0 \in \check{\phi}^{-1}(W(K, U))$. Poiché abbiamo supposto che ϕ fosse continua, per ogni $y \in K$ possiamo trovare un intorno aperto ω_y di b_0 in B ed un intorno aperto V_y di y in Y tali che $\phi(\omega_y \times V_y) \subset U$. Per la compattezza di K , possiamo trovare un numero finito di punti y_1, \dots, y_n di K tali che $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$. Allora $\omega = \bigcap_{i=1}^n \omega_{y_i}$ è un intorno aperto di b_0 in B e $\check{\phi}(\omega) \subset W(K, U)$. Questo completa la verifica del punto (1).

(2) Supponiamo ora che Y sia localmente compatto e $\check{\phi}$ sia continua. Siano $b_0 \in B$, $y_0 \in Y$ ed U un qualsiasi intorno aperto di $x_0 = \phi(b_0, y_0)$ in X . Poiché $\check{\phi}(b_0)$ è continua, possiamo trovare un intorno compatto K di y_0 in Y tale che

$$\check{\phi}(b_0)(K) = \phi(\{b_0\} \times K) \subset U.$$

Poiché $\check{\phi}$ è continua per la topologica compatta-aperta di $\mathcal{C}(Y, X)$, possiamo allora trovare un intorno aperto ω di b_0 in B tale che $\check{\phi}(\omega) \subset W(K, U)$. Questo equivale a $\phi(\omega \times K) \subset U$. Quindi $\omega \times K$ è un intorno di (b_0, y_0) la cui immagine mediante ϕ è contenuta in U . Questo argomento prova che $\phi \in \mathcal{C}(B \times Y, X)$ e completa quindi la dimostrazione del Lemma. \square

COROLLARIO 1.4.2. *Se B, X sono due qualsiasi spazi topologici, allora una $f \in \mathcal{C}(B \times I, X)$ è un'omotopia di applicazioni continue di B in X se e soltanto se $\check{f} \in \mathcal{C}(B, \mathcal{C}(I, X))$ è un'applicazione continua di B nello spazio degli archi di X .*

Se B è localmente compatto, le omotopie di applicazioni continue di B in X sono gli archi dello spazio $\mathcal{C}(B, X)$. \square

DEFINIZIONE 1.4.3. Una coppia topologica (B, A) ha la *proprietà di estensione dell'omotopia* se, per ogni spazio topologico X , ogni omotopia $\tilde{f}_A \in \mathcal{C}(A \times I, X)$ della restrizione ad A di un'applicazione $f \in \mathcal{C}(B, X)$ si estende ad un'omotopia $\tilde{f} \in \mathcal{C}(B \times I, X)$ di f .

Identificando le omotopie di applicazioni a valori in X alle corrispondenti applicazioni nello spazio degli archi di X , la proprietà di estensione dell'omotopia si può sintetizzare con il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tilde{f}_A} & \mathcal{C}(I, X) \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \text{val}_0 \\ B & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

LEMMA 1.4.4. Per ogni $n \geq 1$, la coppia (D^n, S^{n-1}) ha la proprietà di estensione dell'omotopia.

DIMOSTRAZIONE. Siano X uno spazio topologico ed $f : S^{n-1} \times I \rightarrow X$ un'omotopia della restrizione ad S^{n-1} di un'applicazione continua $\phi : D^n \rightarrow X$. L'applicazione

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \phi(x), & \text{se } \|x\| \leq 1, t = 0, \\ f(x, t), & \text{se } \|x\| = 1, 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

è continua a valori in X , definita sulla superficie $\Sigma = (D^n \times 0) \cup (S^{n-1} \times I)$ del cilindro $D^n \times I$, privata dei punti interni della base superiore. Osserviamo che Σ è un retratto di $D^n \times I$. Possiamo costruire la retrazione $\rho : D^n \times I \rightarrow \Sigma$, ad esempio, considerando per ogni $(x, t) \in (D^n \times I)$, il punto $\rho(x, t)$ in cui la semiretta

$$\{(1 - \tau)(0, 2) + \tau \cdot (x, t) \mid \tau \geq 0\}$$

interseca Σ . Possiamo cioè definire

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{2-t}x, 0 \right), & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \|x\| \leq (2-t)/2, \\ \left(\frac{x}{\|x\|}, 2 - \frac{2-t}{\|x\|} \right), & \text{se } 0 \leq t \leq 1, (2-t)/2 \leq \|x\| \leq 1. \end{cases}$$

La $\Phi(\rho(x, t))$ definisce l'omotopia cercata. \square

DEFINIZIONE 1.4.5. Una $\phi \in \mathcal{C}(A, B)$ si dice una *cofibrazione* se per ogni spazio topologico X , per ogni applicazione continua $f \in \mathcal{C}(B, X)$, ed ogni omotopia $\tilde{g} \in \mathcal{C}(A \times I, X)$ di $g = f \circ \phi$, vi è un'omotopia $\tilde{f} \in \mathcal{C}(B \times I, X)$ di f per cui sia $\tilde{g}(a, t) = \tilde{f}(\phi(a), t)$, per ogni $a \in A$ e $t \in I$.

La cofibrazione $\phi : A \rightarrow B$ si può rappresentare con il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathcal{C}(I, X) \\ \phi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \text{val}_0 \\ B & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

In particolare, la proprietà di estensione dell'omotopia di una coppia (B, A) si può riformulare richiedendo che l'inclusione $A \hookrightarrow B$ sia una cofibrazione.

Siano A, B, Y spazi topologici e $\phi \in \mathcal{C}(A, B)$, $\psi \in \mathcal{C}(A, Y)$ due applicazioni continue. Possiamo *incollare* Y a B mediante ψ ponendo

$$Y \cup_{\psi} B = (Y \sqcup B) / \sim, \text{ con } \psi(a) \sim \phi(a) \text{ se } a \in A.$$

Abbiamo un'applicazione naturale, iniettiva e continua, $\hat{\phi} : Y \rightarrow Y \cup_{\psi} B$, che si ottiene componendo l'inclusione naturale di Y in $Y \sqcup B$ con la proiezione nel quoziente.

LEMMA 1.4.6. *Se $\phi \in \mathcal{C}(A, B)$ è una cofibrazione, anche $\hat{\phi} \in \mathcal{C}(Y, Y \cup_{\psi} B)$ è una cofibrazione.* \square

1.5. CW-complessi

Indichiamo con D^k la palla unitaria chiusa k -dimensionale $D^k = \{\|x\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^k$ e con $S^{k-1} = \{\|x\| = 1\}$ la sua frontiera in \mathbb{R}^k .

Sia M uno spazio topologico. Una *cella* di dimensione $k > 0$ di M è il dato di un sottoinsieme e di M e di un'applicazione continua $\phi_e : D^k \rightarrow M$ la cui restrizione alla parte interna di D^k definisca un omeomorfismo di $\overset{\circ}{D}^k$ su e con la topologia di sottospazio. La ϕ_e si dice *funzione caratteristica* della cella e . Chiamiamo \bar{e} la *cella chiusa* e $\partial e = \phi_e(S^{k-1})$ la *frontiera* di e e l'intero k *dimensione* della cella. I singoletti chiusi $\{p\}$ di M , con la funzione caratteristica $D^0 \ni 0 \rightarrow p \in \{p\}$, sono le sue *celle (aperte e chiuse) di dimensione zero*, che consideriamo con frontiera vuota. Quando ciò non comporti confusione, identificheremo la cella (e, ϕ_e) con il suo *supporto* e e scriveremo anche p invece di $\{p\}$ per una cella di dimensione zero.

Una *partizione in celle* di M è un ricoprimento \mathcal{K} di M mediante celle (aperte) tale che, per ogni $e \in \mathcal{K}$, la frontiera ∂e sia contenuta in un'unione di celle di \mathcal{K} di dimensioni più piccole.

Definiamo *CW-complesso* uno spazio di Hausdorff M su cui sia assegnata una partizione in celle \mathcal{K} con le proprietà:

- (C) ogni cella chiusa interseca un numero finito di celle;
- (W) $\bar{\mathcal{K}} = \{\bar{e} \mid e \in \mathcal{K}\}$ è un ricoprimento fondamentale¹ di M .

Indichiamo con \mathcal{K}_k ed $\mathcal{K}_{(k)}$, rispettivamente, l'insieme delle celle di dimensione k di \mathcal{K} e delle celle di dimensione $\leq k$ di \mathcal{K} . L'unione $S_k(M) = \bigcup \mathcal{K}_{(k)}$ delle celle di dimensione minore o uguale di k si dice *scheletro di dimensione k* di M . L'estremo superiore dell'insieme degli interi non negativi k per cui $\mathcal{K}_k \neq \emptyset$ si dice la *dimensione di M* .

Per semplificare la scrittura, indicheremo di norma con la sola lettera M il CW-complesso (M, \mathcal{K}) e con M_k il suo scheletro k -dimensionale $S_k(M)$.

Un CW-complesso M è *localmente finito* se ogni punto di M ha un intorno aperto che interseca un numero finito di celle. Questo equivale al fatto che ogni cella intersechi soltanto un numero finito di celle chiuse.

Un CW-complesso M è *compatto* se e soltanto se la sua partizione in celle \mathcal{K} è finita.

¹Ciò significa che un sottoinsieme A di M è chiuso se e soltanto se $A \cap \bar{e}$ è chiuso per ogni $e \in \mathcal{K}$.

Un CW -complesso M è connesso se e soltanto se il suo scheletro 1-dimensionale M_1 è connesso. Più in generale, se $p_0 \in M$ è una cella di dimensione 0, abbiamo² $\pi_q(M, p_0) = \pi_q(M_{q+1}, p_0)$ per ogni intero $q \geq 0$.

Ricordiamo che uno spazio topologico M è m -connesso³ se, per ogni intero k con $0 \leq k \leq m$, ogni $f \in \mathcal{C}(S^k, M)$ è omotopa ad un'applicazione costante. Una coppia topologica (M, A) è m -connessa se, per ogni intero k con $0 \leq k \leq m$, ogni applicazione continua $f \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; M, A)$ è omotopa ad un'applicazione costante. Vale la

PROPOSIZIONE 1.5.1. *Ogni applicazione $f \in \mathcal{C}(M, N)$ di un CW -complesso M di dimensione minore o uguale ad m in uno spazio topologico m -connesso N è omotopa ad un'applicazione costante.*

Sia A un sotto- CW -complesso di un CW -complesso M ed $f \in \mathcal{C}(M, A; N, B)$ un'applicazione a valori in una coppia m -connessa. Se tutte le celle contenute in $M \setminus A$ hanno dimensione minore o uguale ad m , allora f è A -omotopa⁴ ad un'applicazione a valori in B . \square

1.5.1. Spazi cellulari relativi. Sia (B, A) una coppia topologica⁵. Una cella (aperta) di dimensione $k > 0$ di (B, A) è un sottospazio e_ϕ di $B \setminus A$, omeomorfo a \mathring{D}^k mediante un'applicazione continua $\phi : D^k \rightarrow B$. Una cella di dimensione 0 di (B, A) è semplicemente una cella di dimensione zero di $B \setminus A$.

Chiamiamo *partizione cellulare relativa* di (B, A) una partizione in celle \mathcal{K} di $B \setminus A$, tale che, per ogni $e_\phi \in \mathcal{K}$ di dimensione $k > 0$ e funzione caratteristica $\phi \in \mathcal{C}(D^k, B)$, la frontiera $\partial e_\phi = \phi(S^{m-1})$ sia unione di $\bar{e}_\phi \cap A$ e di un numero finito di celle di \mathcal{K} di dimensione minore di k .

Sia \mathcal{K} una partizione cellulare relativa di (B, A) . Diciamo che $(B, A; \mathcal{K})$ è uno *spazio cellulare relativo*, o un *CW -complesso relativo* se:

- (H) B/A è di Hausdorff (in particolare, A è chiuso in B);
- (C) la chiusura di ogni cella di \mathcal{K} interseca solo un numero finito di celle chiuse di \mathcal{K} ;
- (W) $\{A\} \cup \{\bar{e}_\phi \mid e_\phi \in \mathcal{K}\}$ è un ricoprimento fondamentale di B .

In modo equivalente, possiamo richiedere che il quoziente B/A , ottenuto identificando ad un punto il sottoinsieme A di B , sia uno spazio cellulare, in cui l'immagine di A sia una cella di dimensione 0. Chiamiamo *dimensione* di $(B, A; \mathcal{K})$ l'estremo superiore, finito o infinito, delle dimensioni delle celle di \mathcal{K} .

Una *coppia cellulare* è in modo naturale anche una coppia cellulare relativa.

PROPOSIZIONE 1.5.2. *Sia $(B, A; \mathcal{K})$ uno spazio cellulare relativo ed X uno spazio topologico k -connesso per ogni $k \leq \dim(B, A; \mathcal{K})$. Allora ogni applicazione continua $f : A \rightarrow X$ si estende ad un'applicazione continua $\tilde{f} : B \rightarrow X$.*

²Per richiami sui gruppi di omotopia vedi il Cap. ?? di queste note.

³Conveniamo che un qualsiasi spazio topologico non vuoto sia (-1) -connesso.

⁴Esiste cioè una $\tilde{f} = \{f_t\} \in \mathcal{C}(M \times [0, 1], N)$ tale che $f_0 = f$, $f_1(M) \subset B$ ed $f_t(p) = f_0(p)$ per ogni $p \in A$ ed ogni $t \in [0, 1]$.

⁵Ciò significa che B è uno spazio ed A un suo sottospazio topologico.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $A \cup B_k$ lo scheletro di dimensione k di $(B, A; \mathcal{K})$, cioè l'unione di A e di tutte le celle di \mathcal{K} di dimensione minore o uguale a k . Costruiamo, per ogni intero $k \geq 0$, un'applicazione continua $f_k : A \cup B_k \rightarrow X$, in modo che risulti $f_k|_A = f$ ed $f_{k+1}|_{A \cup B_k} = f_k$. Questo è senz'altro possibile per $k = 0$. Infatti le celle di dimensione 0 sono punti isolati di B disgiunti da A e possiamo quindi definire su di essi la f_0 in modo arbitrario. Supponiamo ora di aver definito una f_k , per un $k \geq 0$, e dimostriamo che è possibile costruire f_{k+1} . A questo scopo ragioniamo per ricorrenza sulla famiglia dei sottoinsiemi L con $A \cup B_k \subseteq L \subseteq A \cup B_{k+1}$ ed L unione di $A \cup B_k$ e di celle di dimensione minore o uguale di $(k+1)$ in \mathcal{K} . Poiché A e le sue celle chiuse formano un ricoprimento fondamentale di L , se L è unione di una catena crescente di $\{L_i\}_{i \in I}$ e per ogni indice i è assegnato un prolungamento f_i di f con $f_i = f_j$ su L_j quando $j < i$, allora la f_L uguale ad f_i su L_i è un'applicazione continua di L in X che estende f .

Per il Lemma di Zorn vi è un L , massimale rispetto all'inclusione, per cui (L, A) è un sottospazio cellulare relativo di $(A \cup B_{k+1}, A)$, e per cui si possa definire un prolungamento $f_L : L \rightarrow X$ di f_k . Deve essere $L = A \cup B_{k+1}$. Altrimenti potremmo trovare una cella $e \in \mathcal{K}_{k+1}$ non contenuta in L . Osserviamo allora che $\partial e \subset A \cup B_k \subset L$ e quindi f_L è definita su ∂e . Per l'ipotesi che X sia k -connesso, l'applicazione composta

$$f_{\partial e} : S^k \xrightarrow{x \rightarrow \phi_e(x)} A \cup B_k \xrightarrow{f_L} X$$

si estende ad un'applicazione continua $f_e : \bar{e} \rightarrow X$. La

$$f_{L \cup e} = \begin{cases} f_L, & \text{su } L, \\ f_e \circ \phi_e^{-1}, & \text{su } e, \end{cases}$$

sarebbe allora un prolungamento di f_k ad $L \cup e$, contraddicendo la massimalità di L . Questo dimostra l'esistenza del prolungamento f_{k+1} . Infine, utilizzando il fatto che $\{A\} \cup \mathcal{K}$ è un ricoprimento fondamentale di B , otteniamo che $\tilde{f} = f_k$ su $A \cup B_k$ per ogni intero $k \geq 0$ è un prolungamento continuo di f su B . \square

Ricordiamo che uno spazio topologico X è *contrattile* se l'identità su X è omotopa ad un'applicazione costante.

COROLLARIO 1.5.3. *Uno spazio cellulare X è contrattile se e soltanto se è k -connesso per ogni k .*

DIMOSTRAZIONE. Ogni spazio contrattile è anche k -connesso per ogni intero $k \geq 0$. Basta quindi verificare che per gli spazi cellulari vale anche il viceversa.

Siano $B = X \times I$, $A = X \times \{0, 1\}$. Fissiamo un punto $x_0 \in X$ e consideriamo $f : A \rightarrow X$ definita da

$$f(x, t) = \begin{cases} x, & \text{se } t = 0, \\ x_0, & \text{se } t = 1. \end{cases}$$

Per la Proposizione , la f si estende ad una $\tilde{f} : X \times I \rightarrow X$ continua, che è un'omotopia tra l'identità su X ed un'applicazione costante. \square

Utilizzando il Lemma 1.4.4 e ripetendo gli argomenti della dimostrazione della Proposizione 1.5.2, otteniamo

PROPOSIZIONE 1.5.4. *Ogni spazio cellulare relativo ha la proprietà di estensione dell'omotopia.* \square

CAPITOLO II

Fibrati topologici

2.1. Prime definizioni

DEFINIZIONE 2.1.1. Un *fibrato* ξ è una terna (E, π, B) , in cui $E = E(\xi)$, $B = B(\xi)$ sono spazi topologici e $\pi = \pi_\xi : E \rightarrow B$ un'applicazione continua. Chiamiamo B *base*, E *spazio totale* e π *proiezione* di ξ .

Per ogni punto b di B , la $F_b = F_b(\xi) = \pi^{-1}(b)$ si dice *la fibra* di ξ su b .

Possiamo pensare un fibrato come un insieme di *fibre*, parametrizzate dai punti di B e legate tra loro dalla *topologia* di E .

ESEMPIO 2.1.2. Il *fibrato banale* con fibra tipica F e base B ha come spazio totale E il prodotto topologico $B \times F$ e come proiezione quella sul primo fattore $\pi : B \times F \ni (b, v) \rightarrow b \in B$.

DEFINIZIONE 2.1.3. Diciamo che il fibrato η è un *sottofibrato* di ξ se

$$E(\eta) \subset E(\xi), \quad B(\eta) \subset B(\xi) \quad \text{e} \quad \pi_\eta = \pi_\xi|_{E(\eta)}^{B(\eta)}.$$

DEFINIZIONE 2.1.4. Una *sezione* di ξ è un'applicazione continua $s : B(\xi) \rightarrow E(\xi)$ tale che $\pi_\xi \circ s = \text{id}_B$. Indicheremo con $\Gamma_\xi(B, E)$ l'insieme delle sezioni di ξ .

OSSERVAZIONE 2.1.5. Le *sezioni* di un fibrato banale $(B \times F, \pi, B)$ con fibra tipica F si possono identificare alle funzioni continue di B in F .

DEFINIZIONE 2.1.6. Un *morfismo* $f : \xi \rightarrow \eta$ è il dato di una coppia di applicazioni continue $(f_E, f_B) : (E(\xi), B(\xi)) \rightarrow (E(\eta), B(\eta))$ che rendano commutativo il diagramma

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{f_E} & E(\eta) \\ \pi_\xi \downarrow & & \downarrow \pi_\eta \\ B(\xi) & \xrightarrow{f_B} & B(\eta). \end{array}$$

PROPOSIZIONE 2.1.7. Se le mappe f_E, f_B di un morfismo di fibrati $f : \xi \rightarrow \eta$ sono omeomorfismi, allora la coppia $(f_E^{-1}, f_B^{-1}) : (E(\eta), B(\eta)) \rightarrow (E(\xi), B(\xi))$ definisce ancora un morfismo di fibrati $f^{-1} : \eta \rightarrow \xi$. \square

DEFINIZIONE 2.1.8. Un morfismo di fibrati $f : \xi \rightarrow \eta$ per cui f_E, f_B siano omeomorfismi si dice un *isomorfismo di fibrati* e la $f^{-1} : \eta \rightarrow \xi$ la sua *inversa*.

PROPOSIZIONE 2.1.9. La composizione di morfismi di fibrati è ancora un morfismo di fibrati. \square

Queste osservazioni si possono riassumere nella:

PROPOSIZIONE 2.1.10. *I fibrati e i loro morfismi formano gli oggetti e le frecce, o morfismi, di una categoria.* \square

Indicheremo con F (dall'inglese *bundle*) la categoria dei fibrati.

Ricordiamo che una *categoria* C consiste dei dati di una famiglia di insiemi $\text{ob}(C)$, gli *oggetti* di C , e per ogni coppia (a, b) di oggetti, di un insieme $\text{hom}_C(a, b)$ di frecce da a a b . Per ogni tripla (a, b, c) di oggetti c'è una *composizione* $\text{hom}_C(a, b) \times \text{hom}_C(b, c) \rightarrow \text{hom}_C(a, c)$ che si suppone *associativa*. Inoltre, si richiede che per ogni $a \in \text{ob}(C)$ vi sia un'identità $1_a \in \text{hom}_C(a, a)$ per cui $f \circ 1_a = f$ per ogni $f \in \text{hom}_C(a, b)$ ed $1_a \circ g = g$ per ogni $g \in \text{hom}(b, a)$.

ESEMPIO 2.1.11. Sia S^n la sfera unitaria in \mathbb{R}^{n+1} . Allora

$$TS^n = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid (x|v) = 0\}$$

è lo spazio totale di un fibrato di base S^n , sottofibrato del fibrato banale $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ e che si dice *fibrato tangente* di S^n . Le sue fibre sono spazi vettoriali reali di dimensione n .

ESEMPIO 2.1.12. Con la proiezione

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \ni x \longrightarrow \frac{x}{\|x\|} \in S^n$$

la terna $\tau = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \pi, S^n)$ è un fibrato, che si dice anche *intorno tubolare* di S^n in \mathbb{R}^{n+1} .

Si può identificare τ al fibrato banale $(S^n \times \mathbb{R}, \pi, S^n)$. mediante l'isomorfismo di fibrati descritto da $f_E : S^n \times \mathbb{R} \ni (x, t) \rightarrow e^t \cdot x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ed $f_B = \text{id}_{S^n}$.

ESEMPIO 2.1.13. Il fibrato $\xi = \tau_k(S^n)$ dei k -riferimenti ortonormali sulla sfera S^n (con $1 \leq k \leq n$) è il sottofibrato del fibrato banale $(S^n \times [S^n]^k, \pi_\xi, S^n)$ con spazio totale

$$E(\xi) = \{(v_0, v_1, \dots, v_k) \in [S^n]^{k+1} \mid (v_i|v_j) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 0, \dots, k\},$$

base $B(\xi) = S^n$ e proiezione $\pi_\xi(v_0, v_1, \dots, v_k) = v_0$.

ESEMPIO 2.1.14. Consideriamo la varietà di Grassmann $\mathcal{G}r_{n,m}(\mathbb{R})$ (vedi §4.2) dei k -piani lineari di \mathbb{R}^n . Il *fibrato tautologico* $\gamma(\mathcal{G}r_{n,m}(\mathbb{R}))$ è il fibrato vettoriale di rango m che possiamo definire come il sottofibrato di $\mathcal{G}r_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ che ha come spazio totale

$$E = \{(\alpha, v) \in \mathcal{G}r_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \mid v \in \alpha\}$$

e base $\mathcal{G}r_{n,m}(\mathbb{R})$. Possiamo considerare anche il suo *ortogonale*, con spazio totale

$$E^\perp = \{(\alpha, v) \in \mathcal{G}r_{n,m}(\mathbb{R}) \mid v \perp \alpha\}.$$

L'applicazione $(\alpha, v) \rightarrow (\alpha^\perp, v)$ definisce un isomorfismo tra il fibrato ortogonale ed il fibrato tautologico di $\mathcal{G}r_{n,n-m}(\mathbb{R})$.

Possiamo definire in modo analogo i fibrati tautologici associati alle grassmanniane di m -piani complessi o quaternionici.

Lo spazio tangente, l'intorno tubolare ed il fibrato canonico sono tutti esempi di *fibrati vettoriali*, cioè fibrati le cui fibre sono spazi vettoriali in cui le operazioni vettoriali si possono descrivere come morfismi di fibrati.

2.2. Prodotti

DEFINIZIONE 2.2.1. Il *prodotto* $\xi_1 \times \xi_2$ di due fibrati è il fibrato che ha come spazio totale $E(\xi_1 \times \xi_2)$ il prodotto $E(\xi_1) \times E(\xi_2)$ degli spazi totali, come base $B(\xi_1 \times \xi_2)$ il prodotto $B(\xi_1) \times B(\xi_2)$ delle basi, e come proiezione il prodotto delle proiezioni $\pi_{\xi_1} \times \pi_{\xi_2} : E(\xi_1) \times E(\xi_2) \ni (v_1, v_2) \rightarrow (\pi_{\xi_1}(v_1), \pi_{\xi_2}(v_2)) \in B(\xi_1) \times B(\xi_2)$.

Il prodotto di fibrati così definito è il prodotto *nella categoria* F .

Ad uno spazio topologico fissato B possiamo associare la sottocategoria F_B di F , i cui oggetti sono i fibrati sulla base B e le cui frecce sono i morfismi che inducono l'identità su B .

DEFINIZIONE 2.2.2. Un isomorfismo di due fibrati sulla stessa base, che induca l'identità sulla base, si dice un'*equivalenza*.

Scriveremo $\xi_1 \approx \xi_2$ per indicare che i due fibrati ξ_1, ξ_2 sulla stessa base B sono equivalenti.

Chiamiamo *trivializzabile* un fibrato equivalente ad un fibrato banale.

Il prodotto in F_B si dice *prodotto fibrato*. Diamone la definizione esplicita.

DEFINIZIONE 2.2.3. Se ξ_1, ξ_2 sono due fibrati di base B , chiamiamo loro *prodotto fibrato*, o *somma di Whitney*, il fibrato ξ di base B con spazio totale

$$(2.2) \quad E(\xi) = E(\xi_1) \times_B E(\xi_2) = \{(v_1, v_2) \in E(\xi_1) \times E(\xi_2) \mid \pi_{\xi_1}(v_1) = \pi_{\xi_2}(v_2)\}$$

e proiezione $\pi_{\xi}(v_1, v_2) = \pi_{\xi_1}(v_1) = \pi_{\xi_2}(v_2)$.

Useremo, per indicare il prodotto fibrato, le notazioni $\xi_1 \times_B \xi_2$, oppure $\xi_1 \oplus_B \xi_2$ (la seconda soprattutto per i fibrati vettoriali).

PROPOSIZIONE 2.2.4. Se $\xi_1, \xi_2 \in F_B$ sono fibrati banali con fibre F_1, F_2 , rispettivamente, allora $\xi_1 \times_B \xi_2$ è ancora banale con fibra $F_1 \times F_2$. \square

PROPOSIZIONE 2.2.5. Le sezioni della somma di Whitney $\xi_1 \oplus_B \xi_2$ di due fibrati di base B sono tutte e sole le sezioni della forma $b \rightarrow (s_1(b), s_2(b))$, con $s_i \in \Gamma_{\xi_i}(B(\xi_i), E(\xi_i))$. \square

ESEMPIO 2.2.6. Una somma di Whitney di fibrati non banali può essere banale. Ad esempio, questo è il caso dei fibrati tangente e normale di una sfera di dimensione $n \geq 2$.

ESEMPIO 2.2.7. Sia $\mathbb{R}P^n$ lo spazio proiettivo reale di dimensione n . Indichiamo con τ il suo *fibrato tangente*. Possiamo identificare il suo spazio totale all'insieme

$$E(\tau) = T(\mathbb{R}P^n) = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}^{n+1}, x \neq 0, (x|y) = 0\} \subset \mathbb{R}P^{2n+1}.$$

Denotiamo con γ il suo *fibrato tautologico*, di spazio totale

$$E(\gamma) = \{([x], a \cdot x) \mid x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}.$$

Il fibrato in rette banale θ^1 su $\mathbb{R}P^n$ si può anche rappresentare con lo spazio totale

$$E(\theta^1) = \{[x, a \cdot x] \mid x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, a \in \mathbb{R}\}.$$

Nel caso della retta proiettiva ($n = 1$) il fibrato tautologico è un fibrato in rette il cui spazio totale è omeomorfo al nastro di Moebius senza bordo e non è quindi isomorfo al fibrato in rette banale il cui spazio totale è il cilindro circolare retto.

La somma di Whitney $(n+1)\gamma$ di $(n+1)$ copie del fibrato tautologico è equivalente alla somma di Whitney $\tau \oplus_{\mathbb{R}P^n} \theta^1$ del fibrato tangente e del fibrato in rette banale.

Possiamo rappresentare gli spazi totali dei due fibrati nel modo seguente:

$$E((n+1)\gamma) = \{([x], a_0x, \dots, a_nx) \mid x \in \mathbb{R}^{n+1}, x \neq 0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{(n+1)^2},$$

$$E(\tau \oplus_{\mathbb{R}P^n} \theta^1) = \{[x, y, ax] \mid x, y \in \mathbb{R}^{n+1}, x \neq 0, (x|y) = 0, a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}P^{3n+2}.$$

Ad un vettore non nullo x di \mathbb{R}^{n+1} associamo le proiezioni ortogonali

$$\pi_x : \mathbb{R}^{n+1} \ni y \rightarrow \frac{(x|y)}{\|x\|^2} x \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{e} \quad \sigma_x : \mathbb{R}^{n+1} \ni y \rightarrow y - \pi_x(y) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

sulla retta di x e sull'iperpiano ad essa ortogonale. L'equivalenza si può allora descrivere, al livello degli spazi totali, mediante l'applicazione

$$f_E : ([x], a_0x, \dots, a_nx) \longrightarrow [x/\|x\|^2, \sigma_x(a_0, \dots, a_n), \pi_x(a_0, \dots, a_n)].$$

2.3. Restrizioni e fibrati indotti

DEFINIZIONE 2.3.1. Dato un fibrato ξ ed un sottospazio topologico A della sua base $B(\xi)$, la *restrizione* di ξ ad A è il fibrato $\xi|_A$ con

$$E(\xi|_A) = \pi_\xi^{-1}(A) \subset E(\xi), \quad B(\xi|_A) = A, \quad \pi_{\xi|_A} : E(\xi|_A) \ni v \rightarrow \pi_\xi(v) \in A.$$

Chiamiamo $\xi|_A$ *restrizione ad A del fibrato ξ* .

Si verifica facilmente che, se $A \subset B$, la restrizione $F_B \rightarrow F_A$ è un funtore di categorie e che per le restrizioni di fibrati vale la proprietà transitiva.

Siano A, B due spazi topologici e $\phi : A \rightarrow B$ un'applicazione continua. Dato un fibrato ξ di base B , poniamo

$$(2.3) \quad \begin{cases} E(\phi^*\xi) = \{(x, v) \in A \times E \mid \pi_\xi(v) = \phi(x)\}, \\ \pi_{\phi^*\xi}(x, v) = x, \quad \forall (x, v) \in E(\phi^*\xi). \end{cases}$$

DEFINIZIONE 2.3.2. $\phi^*\xi = (E(\phi^*\xi), \pi_{\phi^*\xi}, A)$ è un fibrato di base A , che si dice *indotto* su A da ϕ . Chiamiamo $\phi^*\xi$ il *pullback* di ξ su A , ovvero il *fibrato su A indotto dall'applicazione ϕ* .

La $f : \phi^*\xi \rightarrow \xi$ con $f_E(x, v) = v$ ed $f_B = \phi$ è il *morfismo canonico* del fibrato indotto. In questo caso si usa indicare con $\tilde{\phi}$ (sollevamento di ϕ) l'applicazione tra gli spazi totali.

Sia $f : \xi \rightarrow \eta$ un morfismo di fibrati. Il pullback $f_B^*\eta$ è un fibrato di base $B(\xi)$ e la

$$E(\xi) \ni v \longrightarrow (\pi_\xi(v), f_E(v)) \in E(\phi^*\eta)$$

definisce un morfismo $f^! : \xi \rightarrow f_B^*\eta$ di fibrati di base $B = B(\xi)$. Il morfismo assegnato f si può scrivere come la sua composizione con il morfismo canonico $f_B^*\eta \rightarrow \eta$ del fibrato indotto.

2.4. Fibrati localmente banali

DEFINIZIONE 2.4.1. Due fibrati ξ ed η sulla stessa base B si dicono *localmente equivalenti* se, per ogni punto b di B possiamo trovare un intorno aperto U_b di b in B tale che $\xi|_{U_b}$ ed $\eta|_{U_b}$ siano equivalenti.

DEFINIZIONE 2.4.2. Un fibrato ξ si dice *localmente banale con fibra tipica F* se è localmente equivalente al fibrato banale $(B(\xi) \times F, \pi_{B(\xi)}, B(\xi))$.

PROPOSIZIONE 2.4.3. *I pullback e le restrizioni di fibrati (localmente) equivalenti sono (localmente) equivalenti.* \square

Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ un fibrato localmente banale con fibra tipica F e $\{B_i\}$ un ricoprimento fondamentale della sua base $B = B(\xi)$ mediante sottospazi di trivializzazione. Per ogni indice i sia $\phi_i : B_i \times F \rightarrow E_i = \pi^{-1}(B_i)$ un omeomorfismo di trivializzazione, che renda commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} B_i \times F & \xrightarrow{\phi_i} & E_i \\ & \searrow \pi_{B_i} & \swarrow \pi \\ & & B_i \end{array}$$

Se $B_{i,j} = B_i \cap B_j \neq \emptyset$, per ogni $b \in B_{i,j}$ l'applicazione $\phi_{i,j}(b) : F \rightarrow F$ definita da

$$(2.4) \quad (b, \phi_{i,j}(b)(v)) = \phi_i^{-1} \circ \phi_j(b, v), \quad \forall v \in F.$$

è un omeomorfismo della fibra. La $\phi_i^{-1} \circ \phi_j : B_{i,j} \times F \rightarrow B_{i,j} \times F$ definisce un automorfismo del fibrato banale.

DEFINIZIONE 2.4.4. Chiamiamo $\mathcal{A} = \{(B_i, \phi_i)\}$ un *atlante di trivializzazione* del fibrato ξ e le $\{\phi_{i,j}\}$ le sue *funzioni di transizione*.

Le funzioni di transizione $\phi_{i,j}$ di un fibrato localmente banale su B , con fibra tipica F , sono caratterizzate dalle proprietà:

- (i) $\phi_{i,i} = \text{id}_{B_i}$,
- (ii) $\phi_{i,j} \circ \phi_{j,k}(b) = \phi_{i,k}(b), \quad \forall b \in B_{i,j,k} = B_i \cap B_j \cap B_k$,
- (iii) $B_i \times F \ni (b, v) \longrightarrow \phi_{i,j}(b)(v) \in F$ è continua.

Viceversa, queste proprietà caratterizzano le funzioni di transizione di un fibrato localmente banale:

PROPOSIZIONE 2.4.5. *Siano B, F spazi topologici e $\{B_i\}$ è un ricoprimento fondamentale di B . Data una famiglia $\{\phi_{i,j}\}$ di funzioni definite sulle intersezioni $B_{i,j}$, a valori negli omeomorfismi di F , che soddisfino le proprietà (i), (ii) ed (iii), vi è, a meno di equivalenza, un unico fibrato localmente banale con fibra tipica F di cui esse siano le funzioni di transizione.*

DIMOSTRAZIONE. Il fibrato ξ si costruisce incollando i fibrati localmente banali di spazio totale $B_i \times F$ mediante le funzioni di transizione. \square

2.5. Un lemma di trivializzazione

LEMMA 2.5.1. *Sia ξ un fibrato localmente banale, con fibra tipica F e siano B_1, B_2 due sottoinsiemi chiusi della sua base $B = B(\xi)$, tali che $B_1 \cup B_2 = B$ e $B_1 \cap B_2$ sia un retratto¹ di B_2 . Se i fibrati $\xi|_{B_1}$ e $\xi|_{B_2}$ sono trivializzabili, allora anche ξ è trivializzabile.*

Se $\phi_1 : B_1 \times F \rightarrow E|_{B_1}$ definisce una F -trivializzazione di ξ su B_1 , è possibile trovare una trivializzazione di ξ su B definita da una $\phi : B \times F \rightarrow E$ che estenda ϕ_1 .

DIMOSTRAZIONE. Siano $\rho \in \mathcal{C}(B_2, B_1 \cap B_2)$ una retrazione e $\phi_i : B_i \times F \rightarrow E|_{B_i}$ per $i = 1, 2$, omeomorfismi di trivializzazione.

La funzione di transizione $\phi_{1,2}$ verifica la

$$\phi_1(b, v) = \phi_2(b, \phi_{1,2}(b)(v)), \quad \forall b \in B_1 \cap B_2, \forall v \in F.$$

Dico che la $\phi : B \times F \rightarrow E$, definita da

$$\phi(b, v) = \begin{cases} \phi_1(b, v), & \text{se } b \in B_1, v \in F, \\ \phi_2(b, \phi_{1,2}(\rho(b))(v)), & \text{se } b \in B_2, v \in F, \end{cases}$$

è una trivializzazione di ξ su B . Infatti l'inversa

$$\phi^{-1}(\sigma) = \begin{cases} \phi_1^{-1}(\sigma), & \text{se } \pi(\sigma) \in B_1, \\ (\pi(\sigma), \phi_{2,1}^{-1}(\pi(\sigma))(v)), & \text{se } \pi(\sigma) \in B_2, \end{cases}$$

è ancora un morfismo di fibrati. □

Possiamo ora dimostrare

LEMMA 2.5.2. *Ogni fibrato localmente banale su $[0, 1]^n$ è trivializzabile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia ξ un fibrato localmente banale su $[0, 1]^n$, con fibra tipica F . Per un intero positivo ν sufficientemente grande possiamo suddividere $[0, 1]^n$ in ν^n ipercubi di lato $1/\nu$, su ciascuno dei quali ξ sia trivializzabile. Ordiniamo gli ν^n ipercubi Q_1, \dots, Q_{ν^n} in ordine lessicografico. In questo modo, per ogni h con $2 \leq h \leq \nu^n$ l'ipercubo Q_h si retrae per deformazione sulla sua intersezione con $\bigcup_{i < h} Q_i$. La tesi segue allora per ricorrenza, utilizzando il Lemma 2.5.1. □

2.6. Prolungamento di sezioni

TEOREMA 2.6.1. *Siano ξ un fibrato localmente banale con fibra tipica F e base $B, A = \bar{A} \subset B$ e $(B, A; \mathcal{K})$ uno spazio cellulare relativo. Ciascuna delle due seguenti condizioni è sufficiente affinché ogni sezione di $\xi|_A$ si estenda ad una sezione di ξ :*

- (1) F è m -connesso per ogni $m < \dim(B, A; \mathcal{K})$;
- (2) vi è una coppia cellulare relativa $(Y, X; \mathcal{K}')$ tale che $B = B \times I$ ed $A = (X \times I) \cup (Y \times \{0\})$.

¹Questo significa che esiste un'applicazione continua $\rho \in \mathcal{C}(B_2, B_1 \cap B_2)$ tale che $\rho(p) = p$ per ogni $p \in B_1 \cap B_2$.

DIMOSTRAZIONE. La prima è un'ipotesi sulla fibra, la seconda sulla base.

Supponiamo valga la (1) e dimostriamo per ricorrenza che, data una sezione di $\xi|_A$, si può costruire una sequenza $\{s_m\}$ di sezioni, definite su $\xi|_{A \cup B_m}$, dove $A \cup B_m$ è lo scheletro m -dimensionale di $(B, A; \mathcal{K})$ (unione di A e delle celle di dimensione minore o uguale ad m di $B \setminus A$), con $s_m|_A = s$ ed $s_m|_{A \cup B_{m-1}} = s_{m-1}$ se $m \geq 1$.

Poiché $A \cup B_0$ è unione di A e di un sottospazio discreto disgiunto da A , possiamo definire il prolungamento $s_0 \in \Gamma_\xi(A \cup B_0, E)$ di s assegnando arbitrariamente i valori di s_0 nei punti di $(A \cup B_0) \setminus A$. Proseguiamo la dimostrazione ragionando per ricorrenza. Supponiamo sia $1 \leq m \leq \dim(B, A)$ e che il teorema valga per coppie cellulari relative di dimensione minore di m ed, in particolare, di aver definito $s_{m-1} \in \Gamma_\xi(A \cup B_{m-1}, E)$. Osserviamo che, se $\{(L_i, A; \mathcal{K}_i)\}_{i \in I}$ è una catena di sottospazi cellulari relativi di $(A \cup B_m, A; \mathcal{K}_m)$, ordinati mediante inclusione e contenenti $(A \cup B_{m-1}, A; \mathcal{K}_{m-1})$, e per ogni i sia definito un prolungamento $s^{(i)}$ di s_{m-1} la cui restrizione a ciascun $L_j \subset L_i$ sia $s^{(j)}$, allora risulta definito un prolungamento \tilde{s} di s su $\bigcup L_i$, con $\tilde{s}|_{L_i} = s^{(i)}$. Per il lemma di Zorn ci sarà quindi un sottospazio massimale L , con $A \cup B_{m-1} \subseteq L \subseteq A \cup B_m$ su cui la sezione s_{m-1} si estende ad una sezione s_L . Dimostriamo che $L = A \cup B_m$. Se così non fosse, potremmo trovare una cella m -dimensionale di $(B, A; \mathcal{K})$ non contenuta in L . Possiamo supporre la cella definita da una mappa $\phi : I^m \rightarrow B$, dove abbiamo posto $I = [0, 1]$, che si restringe ad un omeomorfismo su $(0, 1)^m$. Possiamo suddividere I^m in ν^m cubi m -dimensionali di lato $1/\nu$ e considerare su $\phi(I^m)$ la struttura cellulare \mathcal{K}_ϕ , in cui le immagini degli ν^m cubi sono le celle chiuse di dimensione m . Scegliendo ν abbastanza grande, possiamo supporre che la restrizione del fibrato a ciascuna di queste ν^m celle sia banale. Per l'ipotesi di ricorrenza, applicata a $(\phi(I^m), A \cap \phi(I^m); \mathcal{K}_\phi)$, la sezione definita su L si estende ad una sezione s' definita su $A \cup L \cup \phi(I^m)_{m-1}$. Per l'ipotesi che F sia $(m-1)$ -connesso, la s' , definita sul bordo dei cubetti, si estende ad un'applicazione continua sui cubetti. Otteniamo in questo modo un prolungamento di s_L ad $A \cup L \cup \phi(I^m)$. Questo contraddice la massimalità di L . Quindi deve essere $L = A \cup B_m$. Le $\{s_m\}$, ottenute per ricorrenza, ci danno una sezione \tilde{s} che estende s su B .

La dimostrazione del teorema sotto l'ipotesi (2) si fa estendendo la sezione alle celle relative di (B, A) , dopo averle ordinate in modo che ciascuna corrisponda a un ipercubo che ha una retrazione sulla parte della sua frontiera coperta da A e dalle celle precedenti. Utilizzando la trivializzazione data dal Lemma 2.5.2, si ottiene l'estensione. \square

2.7. Esempi

ESEMPIO 2.7.1. Sulle sfere di dimensione dispari S^{2n-1} è possibile definire un campo analitico di vettori tangenti X con $\|X\| \equiv 1$.

Consideriamo S^{2n-1} come una sottovarietà analitica reale di \mathbb{C}^n e descriviamo il suo spazio tangente TS^{2n-1} come un sottofibrato del fibrato banale:

$$TS^{2n-1} = \{(z, w) \in S^{2n-1} \times \mathbb{C}^n \mid \Re(w^*z) = 0\}.$$

Allora $X(z) = iz$ è un campo analitico di vettori tangenti ad S^{2n-1} che ha in ogni punto lunghezza 1.

ESEMPIO 2.7.2. Su S^{4n-1} è possibile definire un campo analitico (X_1, X_2, X_3) di terne di vettori tangenti ortonormali in ogni punto. In particolare, TS^3 è trivialisabile.

Possiamo considerare S^{4n-1} come un sottospazio analitico dello spazio \mathbb{H}^n , dove \mathbb{H} è l'algebra associativa dei quaternioni di Hamilton. Allora

$$TS^{4n-1} = \{(q, \xi) \in S^{4n-1} \times \mathbb{H}^n \mid \Re(\xi^* q) = 0\}.$$

Se i, j, κ sono le unità immaginarie di \mathbb{H} , allora $X_1(q) = q \cdot i$, $X_2(q) = q \cdot j$ ed $X_3(q) = q \cdot \kappa$ definiscono la terna desiderata.

ESEMPIO 2.7.3. Il pullback ad S^n del fibrato tangente di S^{n+m} è equivalente alla somma di Whitney del fibrato tangente di S^n e del fibrato banale $(S^n \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\pi_{S^n}} S^n)$.

2.8. Fibrati di Serre

Indichiamo con I l'intervallo chiuso $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Per ogni coppia di interi positivi $m < n$, consideriamo I^m come il sottospazio di I^n che consiste delle n -uple (t_1, \dots, t_n) di I^n con $t_i = 0$ per $i > m$. Conveniamo che $I^0 = \{0\}$.

DEFINIZIONE 2.8.1. Chiamiamo *di Serre*² un fibrato ξ che soddisfi la condizione

(S) per ogni intero positivo n e per ogni coppia di applicazioni continue $f : I^n \rightarrow B(\xi)$ ed $\tilde{f}_0 : I^{n-1} \rightarrow E(\xi)$, con $\pi_\xi \circ \tilde{f}_0(t) = f(t)$, $\forall t \in I^{n-1} \subset I^n$, esiste un'applicazione continua $\tilde{f} : I^n \rightarrow E(\xi)$ che renda commutativo il diagramma

$$(2.5) \quad \begin{array}{ccc} I^{n-1} & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & E(\xi) \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi_\xi \\ I^n & \xrightarrow{f} & B(\xi) \end{array}$$

Una \tilde{f} che renda commutativo il diagramma (2.5) si dice un *sollevamento* o *rialzamento* di f .

OSSERVAZIONE 2.8.2. Prodotti e restrizioni di fibrati di Serre sono ancora fibrati di Serre.

ESEMPIO 2.8.3. Il fibrato ξ , con $E(\xi) = I$, $B(\xi) = I$ e $\pi_\xi(x) = x/2$ non è di Serre: le sue fibre sopra i punti $b \in (\frac{1}{2}, 1]$ sono vuote e quindi la $f : I^1 \rightarrow I = B(\xi)$ definita da $f(b) = b$, $\tilde{f}_0(0) = 0$ non ammette un sollevamento.

Il fibrato ξ , con $E(\xi) = I$, $B(\xi) = I$ e $\pi_\xi(x) = 4x(1-x)$ non è localmente banale, perché la sua fibra è $\{\frac{1}{2}\}$ sul punto 1, mentre consiste dei due punti $x_\pm =$

²Jean-Pierre Serre (n. 1926) è un matematico francese che ha dato contributi fondamentali alla topologia e alla geometria algebriche, e alla teoria algebrica dei numeri. Medaglia Fields nel 1954, ha ricevuto il premio Wolf nel 2000 ed il premio Abel nel 2003.

$(1 \pm \sqrt{1-b})/2$ se $b \neq 1$. Qui la condizione di Serre non è soddisfatta per $n = 2$: se $f(t_1, t_2) = 4t_1(1-t_1)(1-t_2)$ per $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$ ed $\tilde{f}_0(t_1) = t_1$, non ci può essere un sollevamento \tilde{f} di f ad I^2 con dato iniziale \tilde{f}_0 . Infatti, $f(0, I) = \{0\}$ e quindi dovrebbe essere $\tilde{f}(0, t) = 0$ ed $\tilde{f}(1, t) = 1$ per ogni $t \in I$. È poi $f(I, 1) = \{0\}$ e quindi $\tilde{f}(t, 1)$ sarebbe un cammino, sulla fibra di ξ su 0, che congiunge 0 a 1; questo non è possibile perché la fibra consiste dei due punti 0, 1.

LEMMA 2.8.4 (Località della condizione di Serre). *Sia ξ un fibrato. Se per ogni punto b della base $B(\xi)$ possiamo trovare un intorno aperto U_p di p in $B(\xi)$ per cui $\xi|_{U_p}$ sia di Serre, allora ξ è di Serre.*

DIMOSTRAZIONE. Sia n un intero positivo ed $(f, \tilde{f}_0) \in \mathcal{C}(I^n, I^{n-1}; B(\xi), E(\xi))$, con $\pi_\xi \circ \tilde{f}_0 = f|_{I^{n-1}}$. L'immagine $f(I^n)$ è compatta e può quindi essere ricoperta con un numero finito di aperti di $B(\xi)$ su cui la restrizione di ξ sia un fibrato di Serre. Potremo quindi trovare un intero positivo v , sufficientemente grande, tale che ciascun ipercubo Q di lato $1/v$ contenuto in I^n abbia immagine $f(Q)$ su cui la restrizione $\xi|_Q$ sia di Serre. Quadrettiamo I^n in v^n ipercubi

$$Q_{i_1, \dots, i_n} = \{i_k - 1 \leq t_k \leq i_k, 1 \leq k \leq n\}, \text{ per } 1 \leq i_1, \dots, i_n \leq v,$$

ordinati lessicograficamente rispetto agli indici. Per ogni (i_1, \dots, i_n) indichiamo con Q'_{i_1, \dots, i_n} l'unione di I^{n-1} e di tutti i Q_{j_1, \dots, j_n} con $(j_1, \dots, j_n) < (i_1, \dots, i_n)$. L'osservazione fondamentale è che tutte le coppie $(Q_{i_1, \dots, i_n}, Q_{i_1, \dots, i_n} \cap Q'_{i_1, \dots, i_n})$ sono omeomorfe alla coppia (I^n, I^{n-1}) . Infatti $Q_{i_1, \dots, i_n} \cap Q'_{i_1, \dots, i_n}$ è un connesso non vuoto, unione di facce dell'ipercubo Q_{i_1, \dots, i_n} , che si retrae in $\partial Q_{i_1, \dots, i_n}$ su una delle facce dell'ipercubo. Questo ci permette di costruire per ricorrenza la \tilde{f} , estendendo prima \tilde{f}_0 ad un sollevamento su $I^{n-1} \cup Q_{1, \dots, 1}$, utilizzando il fatto che $(Q_{1, \dots, 1}, Q_{1, \dots, 1} \cap I^{n-1})$ è omeomorfa ad (I^n, I^{n-1}) e $\xi|_{f(Q_{1, \dots, 1})}$ è di Serre. Dopo aver esteso \tilde{f}_0 ad un sollevamento su $I^{n-1} \cup Q'_{i_1, \dots, i_n}$, con $(i_1, \dots, i_n) \leq (v, \dots, v)$, si ottiene la sua estensione a un sollevamento su $I^{n-1} \cup Q'_{i_1, \dots, i_n} \cup Q_{i_1, \dots, i_n}$, utilizzando il fatto che la coppia $(Q_{i_1, \dots, i_n}, Q_{i_1, \dots, i_n} \cap Q'_{i_1, \dots, i_n})$ è omeomorfa alla coppia (I^n, I^{n-1}) e che $\xi|_{f(Q_{i_1, \dots, i_n})}$ è di Serre. \square

COROLLARIO 2.8.5. *Ogni fibrato localmente banale è di Serre.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 2.8.4, è sufficiente verificare che ogni fibrato banale è di Serre. Consideriamo un fibrato banale $(B \times F \xrightarrow{\pi} B)$ e, per un intero $n > 0$, siano $f \in \mathcal{C}(I^n, B)$ ed $\tilde{f}_0 \in \mathcal{C}(I^{n-1}, B \times F)$ due applicazioni continue con $\pi \circ \tilde{f}_0 = f|_{I^{n-1}}$. Osserviamo che si può scrivere $\tilde{f}_0(t) = (f(t), \phi(t))$, per ogni $t \in I^{n-1}$, per un'applicazione continua $\phi \in \mathcal{C}(I^{n-1}, F)$. Basterà porre

$$\tilde{f}(t_1, \dots, t_n) = (f(t_1, \dots, t_n), \phi(t_1, \dots, t_{n-1})).$$

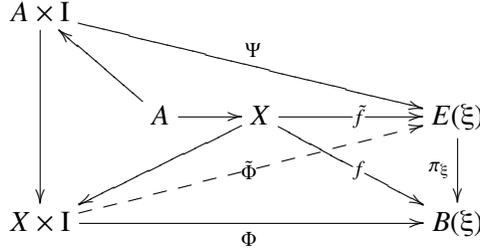
La dimostrazione è completa. \square

ESEMPIO 2.8.6. Fissiamo due funzioni continue $\phi_1 \leq \phi_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ e siano $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$, $B = I$ e $\pi(x, y) = x$. Allora $(E \xrightarrow{\pi} B)$ è sempre un fibrato di Serre, anche se non è localmente banale quando

$$\emptyset \subsetneq \{x \in I \mid \phi_1(x) = \phi_2(x)\} \subsetneq I.$$

TEOREMA 2.8.7 (di omotopia del sollevamento). *Siano ξ un fibrato di Serre ed (X, A) una coppia cellulare relativa. Allora, per ogni applicazione $\tilde{f} : X \rightarrow E(\xi)$ ed*

ogni omotopia $\Phi \in \mathcal{C}(X \times I, B(\xi))$ di $f = \pi_\xi \circ \tilde{f}$ ed ogni omotopia $\Psi \in \mathcal{C}(A \times I, E(\xi))$ di $\tilde{f}|_A$ che solleva $\Phi|_{A \times I}$, possiamo trovare un'omotopia $\tilde{\Phi} \in \mathcal{C}(X \times I, E(\xi))$ di \tilde{f} che solleva Φ ed estende Ψ .



DIMOSTRAZIONE. Per ogni intero $m \geq 0$ indichiamo con $A \cup X_m$ l'unione di A e delle celle di dimensione minore o uguale di m di $X \setminus A$. Dimostriamo per ricorrenza su m che, per ogni intero $m \geq 0$, è possibile costruire un'omotopia $\tilde{\Phi}_m \in \mathcal{C}((A \cup X_m) \times I, E(\xi))$ con $\tilde{\Phi}_m|_{A \times I} = \Psi$, $\tilde{\Phi}_m|_{(A \cup X_{m-1}) \times I} = \tilde{\Phi}_{m-1}$ se $m > 0$, $\tilde{\Phi}_m(x, 0) = \tilde{f}(x)$ su $A \cup X_m$ e $\pi_\xi \circ \tilde{\Phi}_m = \Phi|_{(A \cup X_m) \times I}$.

Per $m = 0$, le celle di dimensione zero di (X, A) formano un sottoinsieme discreto disgiunto da A . Se $\{x\}$ è una di queste celle, per la proprietà di Serre l'applicazione $I \ni t \rightarrow \Phi(x, t) \in B(\xi)$ ha un sollevamento $I \ni t \rightarrow \tilde{\Phi}_0(x, t)$ con $\tilde{\Phi}_0(x, 0) = \tilde{f}(x)$. Definendola uguale a Ψ su $A \times I$, otteniamo così la $\tilde{\Phi}_0$.

Sia ora $m > 0$ e supponiamo di aver già costruito $\tilde{\Phi}_{m-1}$. Consideriamo la famiglia delle coppie (L, Ψ_L) in cui L è unione di $A \cup X_{m-1}$ e di celle di dimensione m di $X \setminus A$ e Ψ_L un'omotopia di $\tilde{f}|_L$ che coincide con $\tilde{\Phi}_{m-1}$ su $(A \cup X_{m-1}) \times I$ e solleva $\Phi|_{L \times I}$ con valore iniziale \tilde{f} . Semiordiniamo questa famiglia mediante la relazione $(L', \Psi_{L'}) < (L, \Psi_L)$ se $L' \subset L$ e $\Psi_{L'} = \Psi_L$ su $L' \times I$. Poiché ogni catena massimale ammette un maggiorante, per il lemma di Zorn c'è un (L, Ψ_L) massimale. Basta verificare che $L = A \cup X_m$. Infatti, se (L, Ψ_L) è una coppia con $L \subsetneq A \cup X_m$, vi è una cella di dimensione m di $X \setminus A$ non contenuta in L . Possiamo descriverla come una $\psi \in \mathcal{C}(I^m, X)$ la cui restrizione ad \dot{I}^m è un omeomorfismo con $\psi(\dot{I}^m) \subset X \setminus A$. Per composizione con la Ψ_L otteniamo un'applicazione che è definita su tutte le facce dell'ipercubo I^{m+1} , tranne che sulla

$$\{(t_1, \dots, t_m, 1) \mid 0 < t_i < 1, 1 \leq i \leq m\},$$

corrispondente a $t_{m+1} = 1$. Detto $\partial_0 I^{m+1}$ tale insieme, osserviamo che la coppia $(I^{m+1}, \partial_0 I^{m+1})$ è omeomorfa alla coppia (I^{m+1}, I^m) . Per la proprietà di Serre, possiamo allora prolungare il sollevamento dell'omotopia Ψ_L ad $(L \cup \psi(I^m)) \times I$, con valore iniziale \tilde{f} su $L \cup \psi(I^m)$. Quindi, per la massimalità, deve essere $L = A \cup X_m$ e possiamo allora definire $\tilde{\Phi}_m = \Psi_L$.

Otteniamo il sollevamento dell'omotopia cercato ponendo $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_m$ su $A \cup X_m$, per ogni intero $m \geq 0$. \square

DEFINIZIONE 2.8.8. Un fibrato ξ si dice un *rivestimento generalizzato* se è localmente banale con fibre discrete. Togliamo l'aggettivo *generalizzato* se richiediamo che $E(\xi)$ e $B(\xi)$ siano connessi e non vuoti.

LEMMA 2.8.9 (unicità del sollevamento). *Siano ξ un rivestimento generalizzato, X uno spazio connesso ed $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 \in \mathcal{C}(X, E(\xi))$ due applicazioni continue, a valori nello spazio totale, che inducono una stessa applicazione a valori nella base: tali cioè che $\pi_\xi \circ f_0 = \pi_\xi \circ f_1$. Se $\tilde{f}_1(x_0) = \tilde{f}_2(x_0)$ per un punto x_0 di X , allora $\tilde{f}_0 = \tilde{f}_1$.*

DIMOSTRAZIONE. Punti distinti sulla stessa fibra di un rivestimento generalizzato hanno intorni aperti disgiunti: infatti, se $b \in B(\xi)$ ed indichiamo con F la fibra tipica di ξ in un intorno di b , possiamo trovare un intorno aperto U ed un omeomorfismo $\phi : U \times F \rightarrow \pi_\xi^{-1}(U)$ con $\pi_U = \pi_\xi \circ \phi$. Se v_1 e v_2 sono punti distinti di $\pi_\xi^{-1}(b)$, allora $\phi(U \times \{v_1\})$ e $\phi(U \times \{v_2\})$ sono intorni disgiunti di v_1 e v_2 in $E(\xi)$. Da questo segue che sia l'insieme $\{x \in X \mid f_0(x) = f_1(x)\}$ in cui f_0 ed f_1 assumono lo stesso valore, sia il suo complementare $\{x \in X \mid f_0(x) \neq f_1(x)\}$ sono aperti. Se X è connesso, uno dei due deve essere vuoto e l'altro uguale ad X . \square

PROPOSIZIONE 2.8.10. *Siano ξ un rivestimento generalizzato, X uno spazio cellulare connesso ed x_0 un punto di X corrispondente ad una sua cella di dimensione zero. Siano $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 \in \mathcal{C}(X, E(\xi))$ con $\tilde{f}_0(x_0) = \tilde{f}_1(x_0)$. Se $f_0 = \pi_\xi \circ \tilde{f}_0$ ed $f_1 = \pi_\xi \circ \tilde{f}_1$ sono $\{x_0\}$ -omotope, allora anche \tilde{f}_0 e \tilde{f}_1 lo sono.*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema sul rialzamento dell'omotopia, una $\{x_0\}$ -omotopia Φ tra f_0 ed f_1 si rialza ad una $\{x_0\}$ -omotopia $\tilde{\Phi}$ di \tilde{f}_0 . Per il Lemma 2.8.9, è $\tilde{\Phi}(x, 1) = \tilde{f}_1(x)$ perché $\tilde{\Phi}(\cdot, 1)$ è un rialzamento di f_1 che ha in x_0 lo stesso valore di \tilde{f}_1 . \square

Più in generale, per un fibrato di Serre qualsiasi diversi sollevamenti con lo stesso dato iniziale sono omotopi.

TEOREMA 2.8.11 (di omotopia del sollevamento). *Siano ξ un fibrato di Serre, (X, A) una coppia cellulare relativa, $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 \in \mathcal{C}(X, E(\xi))$ due applicazioni con $\tilde{f}_0|_A = \tilde{f}_1|_A$. Se $f_0 = \pi_\xi \circ \tilde{f}_0$ ed $f_1 = \pi_\xi \circ \tilde{f}_1$ sono A -omotope, anche \tilde{f}_0 e \tilde{f}_1 sono A -omotope.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in \mathcal{C}(X \times I, B(\xi))$ una A -omotopia tra f_0 ed f_1 . Poiché anche $(X \times I, (A \times I) \cup (X \times \{0, 1\}))$ è una coppia cellulare relativa, per il teorema di sollevamento dell'omotopia, l'omotopia costante $\Phi \in \mathcal{C}((X \times I) \times I, B(\xi))$, definita da

$$\Phi(x, t; s) = f(x, t), \quad \forall (x, t) \in X \times I, \quad \forall s \in I.$$

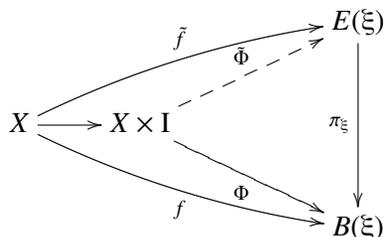
si rialza ad un'omotopia $\tilde{\Phi} \in \mathcal{C}((X \times I) \times I, E(\xi))$ con

$$\begin{cases} \pi_\xi \circ \tilde{\Phi} = \Phi, \\ \tilde{\Phi}(x, t; 0) = \tilde{f}_0(x) = \tilde{f}_1(x), & \forall x \in A, \quad \forall t \in I, \\ \tilde{\Phi}(x, 0; 0) = \tilde{f}_0(x), & \forall x \in X, \\ \tilde{\Phi}(x, 1; 0) = \tilde{f}_1(x), & \forall x \in X. \end{cases}$$

La $\tilde{f}(x, t) = \tilde{f}_i(x) = \tilde{\Phi}(x, t; 0)$ definisce allora un' A -omotopia tra \tilde{f}_0 e \tilde{f}_1 . \square

2.9. Condizione di Serre forte

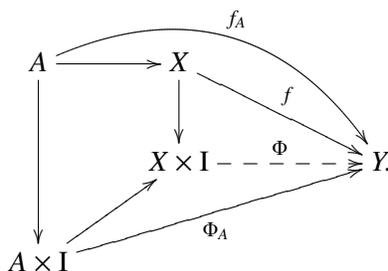
DEFINIZIONE 2.9.1. Diciamo che il fibrato ξ soddisfa la *condizione di Serre forte* se, per ogni spazio topologico X ed ogni applicazione continua $\tilde{f} \in \mathcal{C}(X, E(\xi))$ di X nel suo spazio totale, ogni omotopia Φ di $f = \pi_\xi \circ \tilde{f}$ si rialza ad un'omotopia $\tilde{\Phi}$ di \tilde{f} .



Una classe importante di fibrati che soddisfano la condizione di Serre forte è associata alla nozione topologica di *cofibrato*.

DEFINIZIONE 2.9.2. Una coppia topologica (X, A) si dice una *cofibrato*, o *coppia di Borsuk*³ se $X \times I$ ammette una retrazione su $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$.

Questa condizione è equivalente al fatto che per ogni spazio topologico Y , ogni omotopia Φ_A della restrizione ad A d'un'applicazione continua $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ si estende ad un'omotopia di f . La possiamo rappresentare con il diagramma:



Siano infatti Y uno spazio topologico, $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ e $\Phi_A \in \mathcal{C}(A \times I, Y)$ un'omotopia di $f_A = f|_A$. Se $\rho : X \times I \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ è una retrazione, la $\Phi = \Phi_A \circ \rho \in \mathcal{C}(X \times I, Y)$ è un'omotopia di f che estende la Φ_A .

Viceversa, possiamo considerare l'immersione

$$\rho_A : A \times I \ni (a, t) \rightarrow (a, t) \in ([A \times I] \cup [X \times \{0\}])$$

come un'omotopia della restrizione ad A dell'applicazione

$$f : X \ni x \rightarrow (x, 0) \in ([A \times I] \cup [X \times \{0\}]).$$

L'estensione ρ della ρ_A ad un'omotopia di f è la retrazione cercata.

³Karol Borsuk (1905-1982), topologo polacco. A lui si devono diverse nozioni sulle retrazioni e l'introduzione, insieme a Spanier, dei gruppi di *coomotopia*, da cui è derivata l'*omotopia stabile*. Introdusse inoltre una *teoria delle forme*. Il teorema di Borsuk-Ulam dice che, per ogni applicazione continua f di S^n in \mathbb{R}^n , c'è almeno un punto $x \in S^n$ per cui $f(x) = f(-x)$.

Se (X, A) è una coppia topologica ed Y uno spazio topologico, possiamo definire un fibrato $\Xi = \Xi(X, A; Y)$ ponendo

$$E(\Xi) = \mathcal{C}(X, Y), \quad B(\Xi) = \mathcal{C}(A, Y), \quad \pi_\Xi(f) = f|_A, \quad \forall f \in \mathcal{C}(X, Y).$$

PROPOSIZIONE 2.9.3. *Se (X, A) è una cofibrazione con X di Hausdorff localmente compatto ed Y un qualsiasi spazio topologico, allora Ξ soddisfa la condizione di Serre forte.*

DIMOSTRAZIONE. Sia Z uno spazio topologico, $\tilde{f} \in \mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X, Y))$ un'applicazione continua e $\Phi' \in \mathcal{C}(Z \times I, \mathcal{C}(A, Y))$ un'omotopia della $\pi_\Xi \circ \tilde{f}$. Poiché abbiamo supposto che X fosse di Hausdorff e localmente compatto, le applicazioni

$$\tilde{g} : Z \times X \ni (z, x) \longrightarrow [\tilde{f}(z)](x) \in Y,$$

$$G : Z \times A \times I \ni (z, a, t) \longrightarrow [\Phi'(z, t)](a) \in Y$$

sono continue e quindi G è un'omotopia della restrizione di \tilde{g} a $Z \times A$. La coppia $(Z \times X, Z \times A)$ è ancora una cofibrazione e quindi G si prolunga ad un'omotopia \tilde{G} di \tilde{g} . Otteniamo quindi l'omotopia cercata definendo

$$\Phi : Z \times I \ni (z, t) \rightarrow \Phi(z, t) \in \mathcal{C}(X, Y) \quad \text{mediante} \quad [\Phi(z, t)](x) = \tilde{G}(z, x, t). \quad \square$$

PROPOSIZIONE 2.9.4. *Le fibre di un fibrato ξ che abbia base connessa per archi e soddisfi la condizione di Serre forte sono omotopicamente equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $s_0 \in \mathcal{C}(I, B(\xi))$ un cammino continuo che congiunge due punti b_0 e b_1 della base. Indichiamo con s_1 il cammino inverso $s_1(t) = s_0(1-t)$, da b_1 a b_0 . Siano $F_0 = \pi_\xi^{-1}(b_0)$ ed $F_1 = \pi_\xi^{-1}(b_1)$ le fibre sopra i due punti. I cammini s_0 ed s_1 si possono considerare come omotopie delle proiezioni delle applicazioni d'inclusione $\iota_0 : F_0 \rightarrow E(\xi)$ ed $\iota_1 : F_1 \rightarrow E(\xi)$, cioè delle $F_0 \ni v \rightarrow b_0 \in B(\xi)$, $F_1 \ni v \rightarrow b_1 \in B(\xi)$. Per la condizione di Serre forte, possiamo trovare delle omotopie

$$\tilde{s}_0 : F_0 \times I \rightarrow E(\xi) \quad \text{ed} \quad \tilde{s}_1 : F_1 \times I \rightarrow E(\xi)$$

che li sollevano. Abbiamo ottenuto così due mappe

$$f_0 : F_0 \ni v \rightarrow \tilde{s}_0(v, 1) \in F_1 \quad \text{ed} \quad f_1 : F_1 \ni v \rightarrow \tilde{s}_1(v, 1) \in F_0.$$

Dico che f_0 ed f_1 sono l'una un'inversa omotopica dell'altra. Poiché possiamo scambiare tra loro, nel ragionamento, i punti b_0 e b_1 , possiamo limitarci a dimostrare che $f_1 \circ f_0 \in \mathcal{C}(F_0, F_0)$ è omotopa all'identità su F_0 . Definiamo

$$J : F_0 \times I \ni (v, t) \longrightarrow \begin{cases} \tilde{s}_0(v, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \tilde{s}_1(\tilde{s}_0(v, 1), 2t-1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Poiché $s_0 \cdot s_1(t) = s_0(1 - |1 - 2t|)$, l'applicazione

$$H(x, t; \tau) = s_0((1 - \tau)(1 - |1 - 2t|))$$

definisce un'omotopia di $\pi_\xi \circ J(v, t) = s_0 \cdot s_1(t)$. Per la proprietà di Serre forte, questa si solleva ad un'omotopia $\tilde{H} : (F_0 \times I) \times I \rightarrow E(\xi)$ di J . È $(1 - \tau)(1 - |1 - 2t|) = 0$ sui tre dei lati del quadrato $\{0 \leq t, \tau \leq 1\}$ corrispondenti a $\tau = 1$ e a $t = 0, t = 1$. Quindi, quando (t, τ) percorre questi tre lati del quadrato, la $\tilde{H}(v, t; \tau)$ assume valori

in F_0 . Possiamo quindi definire un'omotopia di applicazioni continue di F_0 in sé ponendo

$$K(v, t) = \begin{cases} \tilde{H}(v, 0; 3t), & 0 \leq t \leq 1/3, \\ \tilde{H}(v, 3t - 1; 1), & 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ \tilde{H}(v, 1; 3 - 3t), & 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Poiché $K(v, 0) = v$ e $K(v, 1) = \tilde{s}_1(\tilde{s}_0(v, 1), 1) = f_1 \circ f_0(v)$, questo completa la dimostrazione. \square

LEMMA 2.9.5. *Se X è connesso per archi ed $x_0, x_1, x'_0, x'_1 \in X$ sono quattro suoi punti, allora gli spazi $\mathcal{C}(I, 0, 1; X, x_0, x_1)$ e $\mathcal{C}(I, 0, 1; X, x'_0, x'_1)$ sono omotopicamente equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Gli spazi $\mathcal{C}(I, 0, 1; X, x_0, x_1)$ e $\mathcal{C}(I, 0, 1; X, x'_0, x'_1)$ sono le fibre del fibrato $\Xi = \Xi(I, \{0, 1\}; X)$ sui punti (x_0, x_1) ed (x'_0, x'_1) della sua base $\mathcal{C}(\{0, 1\}, X) = X \times X$. La tesi è allora conseguenza della Proposizione 2.9.4, perché, per la Proposizione 2.9.3, vale per Ξ la condizione di Serre forte. \square

2.10. Associato di Serre di un fibrato

Sia ξ un fibrato. Poniamo

$$(2.6) \quad E(\xi^*) = \{(v, s) \in E(\xi) \times \mathcal{C}(I, B(\xi)) \mid s(0) = \pi_\xi(v)\}, \quad \pi_{\xi^*}(v, s) = s(1).$$

DEFINIZIONE 2.10.1. Chiamiamo *associato di Serre* di ξ il fibrato ξ^* che ha la stessa base di ξ , mentre lo spazio totale $E(\xi^*)$ e la proiezione π_{ξ^*} sono definiti dalla (2.6).

Possiamo considerare ξ come un sottofibrato di ξ^* , facendo corrispondere a $v \in E(\xi)$ la coppia (v, s_v) formata da v e dal cammino costante $\{t \rightarrow \pi_\xi(v)\}$. Lo spazio totale $E(\xi^*)$ si retrae per deformazione su $E(\xi)$, mediante la

$$E(\xi^*) \times I \ni (v, s; \tau) \rightarrow (v, r_\tau s) \in E(\xi), \text{ definita da } r_\tau s(t) = s([1 - \tau]t).$$

PROPOSIZIONE 2.10.2. *Per ogni fibrato ξ , il suo associato di Serre ξ^* soddisfa la condizione di Serre forte.*

DIMOSTRAZIONE. Sia Z un qualsiasi spazio topologico, $\tilde{f} \in \mathcal{C}(Z, E(\xi^*))$ un'applicazione continua e $\Phi \in \mathcal{C}(Z \times I, B(\xi))$ (ricordiamo che $B(\xi^*) = B(\xi)$) un'omotopia di $f = \pi_{\xi^*} \circ \tilde{f}$. Siano g_1 e g_2 le applicazioni composte definite dal diagramma

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\tilde{f}} & E(\xi^*) \longrightarrow E(\xi) \times \mathcal{C}(I, B(\xi)) \\ \begin{array}{l} \nearrow g_1: \{z \rightarrow v_z\} \\ \searrow g_2: \{z \rightarrow s_z\} \end{array} & & \begin{array}{l} \nearrow \pi_{E(\xi)} \\ \searrow \pi_{\mathcal{C}(I, B(\xi))} \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & & E(\xi) \\ & & \mathcal{C}(I, B(\xi)) \end{array} \end{array} \end{array}$$

Per ogni $z \in Z$ è $\tilde{f}(z) = (v_z, s_z)$, ed s_z è un cammino continuo in $B(\xi)$ che congiunge $\pi_\xi(v_z)$ ad $s_z(1) = \pi_{\xi^*}(\tilde{f}(z))$, mentre l'omotopia Φ definisce un cammino continuo

$\{t \rightarrow \Phi(z, t)\}$ in $B(\xi)$, di punto iniziale $s_z(1)$. Possiamo quindi definire un'omotopia di cammini sommando i cammini s_z e quelli dati dall'omotopia Φ , mediante

$$[\Psi(z, t)](\tau) = \begin{cases} s_z(\tau(1+t)) & \text{se } \tau \leq 1/(1+t), \\ \Phi(z, \tau(1+t) - 1) & \text{se } \tau \geq 1/(1+t). \end{cases}$$

Il cammino $\tau \rightarrow [\Psi(z, t)](\tau)$ ha punto iniziale $s_z(0) = \pi_\xi(v_z)$ e punto finale $\Phi(z, 1)$. Poiché $[\Psi(z, 0)](\tau) = s_z(\tau)$, l'applicazione $\tilde{\Phi}(z, t) = (v_z, \Psi(z, t))$ definisce un'omotopia di \tilde{f} che solleva Φ . \square

2.11. Successione esatta di omotopia di un fibrato

Siano (X, x_0) ed (Y, y_0) due spazi puntati. Dall'omeomorfismo

$$\mathcal{C}(S^n, e_0; X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \mathcal{C}(S^n, e_0; X, x_0) \times \mathcal{C}(S^n, e_0; Y, y_0)$$

ricaviamo il teorema sui gruppi di omotopia del prodotto.

TEOREMA 2.11.1. *Per ogni intero $n \geq 1$ abbiamo l'isomorfismo*

$$(2.7) \quad \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0) \quad (\text{prodotto diretto}). \quad \square$$

Quindi i gruppi di omotopia dello spazio totale di un fibrato banale si possono calcolare come prodotti dei corrispondenti gruppi di omotopia della base e della fibra. Questo non vale per fibrati generali, ma, per i fibrati di Serre, e quindi in particolare per i fibrati localmente banali, vi sono delle relazioni tra i gruppi di omotopia dello spazio totale, della base e della fibra, che sono espresse da una *successione esatta*.

2.11.1. Successioni esatte. Richiamiamo la nozione di successione esatta, a livello di insiemi puntati e di gruppi.

Sia $\{A_k\}_{k=0,1,\dots}$ una successione di insiemi non vuoti, su ciascuno dei quali sia fissato un *punto base* $a_0^k \in A_k$. Consideriamo una sequenza di applicazioni:

$$(2.8) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & A_n & \xrightarrow{f_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & A_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & \cdots & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_0. \end{array}$$

DEFINIZIONE 2.11.2. La (2.8) si dice un *complesso di insiemi puntati* se

$$(2.9) \quad f_{n+2}(A_{n+2}) \subset f_{n+1}^{-1}(a_0^n), \quad \forall n \geq 0,$$

ovvero se, per ogni $n \geq 0$, la composizione $f_{n+1} \circ f_{n+2}$ è l'applicazione costante che trasforma tutti gli elementi di A_{n+2} nel punto a_0^n .

Diciamo che la (2.8) è una *successione esatta di insiemi puntati* se

$$(2.10) \quad f_n(A_n) = f_{n-1}^{-1}(a_0^{n-2}) \quad \forall n \geq 2.$$

Se gli A_k hanno ciascuno una struttura di gruppo, con identità a_0^k , e se tutte le f_n ($n \geq 1$) sono omomorfismi di gruppi, diremo che (2.8) è, rispettivamente, un *complesso*, o una *successione esatta di gruppi*.

Nei paragrafi successivi, mostreremo come ad un fibrato di Serre corrisponda una *successione esatta di omotopia* (che è una successione esatta di insiemi ed una successione esatta di gruppi se si cancellano i termini relativi all'omotopia in grado zero).

2.11.2. Definizione dell'applicazione Δ . Sia ξ un fibrato di Serre. Porremo per semplicità $E = E(\xi)$, $B = B(\xi)$. Fissato un punto base b_0 di B , sia $F = p^{-1}(b_0)$ la fibra su b_0 e v_0 un punto di F , che considereremo come punto base sia di F che di E .

Indichiamo con A la frontiera dell'ipercubo I^n , privata dei punti interni della faccia $I^n \cap \{s_n = 0\}$:

$$A = (\partial I^n \cap \{s_n > 0\}) \cup \partial I^{n-1}.$$

La coppia (I^n, A) è omeomorfa alla coppia (I^n, I^{n-1}) . Quindi, per la proprietà di Serre, ogni $f \in \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; B, b_0)$ si solleva ad una $\tilde{f} \in \mathcal{C}(I^n, A; E, v_0)$, che assume il valore v_0 in tutti i punti di A . Abbiamo cioè

$$\begin{cases} \tilde{f}(s) = v_0, & \forall s \in A, \\ \pi_\xi \circ \tilde{f} = f. \end{cases}$$

Per il Teorema 2.8.11, la classe di omotopia $[\tilde{f}]_{I^{n-1}} \in \pi_{n-1}(F, v_0)$ dipende solo dalla classe di omotopia di f in $\pi_n(B, b_0)$.

Abbiamo definito in questo modo un'applicazione

$$(2.11) \quad \Delta = \Delta_n : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, v_0), \quad n \geq 1.$$

2.11.3. La successione esatta di un fibrato di Serre.

L'inclusione $\iota : F = p^{-1}(b_0) \hookrightarrow E$ e la proiezione $\pi_\xi : E \rightarrow B$ definiscono applicazioni $\iota_* : \pi_n(F, v_0) \rightarrow \pi_n(E, v_0)$ e $\pi_{\xi_*} : \pi_n(E, v_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$. Abbiamo:

TEOREMA 2.11.3. *Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi_\xi} B)$ un fibrato di Serre. Allora la:*

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(F, v_0) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_{n+1}(E, v_0) & \xrightarrow{\pi_{\xi_*}} & \pi_{n+1}(B, b_0) \\ & \xrightarrow{\Delta} & \pi_n(F, v_0) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_n(E, v_0) & \xrightarrow{\pi_{\xi_*}} & \pi_n(B, b_0) \\ & & & & \dots & \longrightarrow & \pi_2(B, b_0) \\ & \xrightarrow{\Delta} & \pi_1(F, v_0) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_1(E, v_0) & \xrightarrow{\pi_{\xi_*}} & \pi_1(B, b_0) \\ & \xrightarrow{\Delta} & \pi_0(F, v_0) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_0(E, v_0) & \xrightarrow{\pi_{\xi_*}} & \pi_0(B, b_0) \end{array} \right.$$

è una successione esatta di insiemi puntati ed una successione esatta di gruppi, se si sopprime l'ultima riga della (2.12).

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che (2.12) sia un complesso di insiemi puntati e che π_{ξ_*} , ι_* , Δ siano omomorfismi di gruppi quando i due insiemi tra cui agiscono hanno una struttura di gruppo, sono facili conseguenze delle definizioni. Dimostriamo l'esattezza di (2.12).

Esattezza in $\pi_n(F, v_0)$. Sia $f \in \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; F, v_0)$, con $\iota_*([f]) = 0$. Ciò significa che esiste un'omotopia $F : I^n \times I \rightarrow E$ tale che

$$\begin{cases} F(s, 0) = f(s) & \forall s \in I^n, \\ F(s, t) = v_0 & \forall (s, t) \in (\partial I^n) \times I, \\ F(s, 1) = v_0 & \forall s \in I^n. \end{cases}$$

Allora $\pi_\xi \circ \Phi \in \mathcal{C}(I^{n+1}, I^n; B, b_0)$ ed $[f] = \Delta([\pi_\xi \circ \Phi])$.

Esattezza in $\pi_n(E, v_0)$. Sia $\tilde{f} \in \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; E, v_0)$, con $\pi_{\xi_*}([\tilde{f}]) = 0$. Ciò significa che esiste un'omotopia $F \in \mathcal{C}(I^n \times I, (\partial I^n) \times I; B, b_0)$ tale che

$$\begin{cases} F(s, 0) = f = \pi_\xi \circ \tilde{f}(s) & \forall s \in I^n, \\ F(s, t) = b_0 & \forall (s, t) \in (\partial I^n) \times I, \\ F(s, 1) = b_0 & \forall s \in I^n. \end{cases}$$

Per la proprietà di Serre, possiamo rialzare F ad un'omotopia $\tilde{F} : I^n \times I \rightarrow E$ con le proprietà:

$$\begin{cases} \tilde{F}(s, 0) = \tilde{f}(s) & \forall s \in I^n, \\ \tilde{F}(s, t) = v_0 & \forall (s, t) \in (\partial I^n) \times I, \\ \pi_\xi \circ \tilde{F}(s, t) = F(s, t) & \forall (s, t) \in I^n \times I. \end{cases}$$

La $g : I^n \ni s \rightarrow \tilde{F}(s, 1) \in F$ è un'applicazione in $\mathcal{C}(I^n, \partial I^n; F, v_0)$ e $\iota_*([g]) = [\tilde{f}]$.

Esattezza in $\pi_n(B, b_0)$. Siano $f \in \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; B, b_0)$ ed $\tilde{f} \in \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; E, v_0)$ un suo sollevamento, con la condizione iniziale di assumere il valore costante v_0 sulle facce in ∂I^n diverse dalla faccia $\{s_n = 0\}$. La \tilde{f} soddisfa cioè le condizioni

$$\begin{cases} \tilde{f}(s', s_n) = v_0 & \forall s = (s', s_n) \in (\partial I^{n-1}) \times I, \\ \tilde{f}(s', 1) = v_0 & \forall s' \in I^{n-1}, \\ \pi_\xi \circ \tilde{f}(s) = f(s) & \forall s \in I^n. \end{cases}$$

Supponiamo sia $\Delta([\phi]) = 0$. Allora esiste un'omotopia $\Phi : I^{n-1} \times I \rightarrow F$ con le proprietà:

$$\begin{cases} \Phi(s', 1) = \tilde{f}(s', 0) & \forall s' \in I^{n-1}, \\ \Phi(s', t) = v_0 & \forall s' \in \partial I^{n-1}, \\ \Phi(s', 0) = v_0 & \forall s' \in I^{n-1}. \end{cases}$$

Questa omotopia ci permette di *estendere* \tilde{f} ad una $\tilde{g} \in \mathcal{C}(I^n, \partial I^n; E, v_0)$, che definisce un elemento $[\tilde{g}] \in \pi_n(E, v_0)$. Definiamo infatti

$$\tilde{g}(s) = \begin{cases} \Phi(s', 2s_n) & \text{se } 0 \leq s_n \leq \frac{1}{2}, \\ f(s', 2s_n - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s_n \leq 1. \end{cases}$$

Poiché

$$g(s) = \pi_\xi \circ \tilde{g}(s) = \begin{cases} b_0 & \text{se } 0 \leq s_n \leq \frac{1}{2} \\ f(s', 2s_n - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s_n \leq 1, \end{cases}$$

la f e la g definiscono lo stesso elemento di $\pi_n(B, b_0)$. Quindi $\pi_{\xi_*}([\tilde{g}]) = [g] = [\hat{b}_0 \cdot f] = [\hat{b}_0] \cdot [f] = [f]$.

La dimostrazione è completa. \square

COROLLARIO 2.11.4. *Se $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ è un rivestimento, $v_0 \in E$ e $b_0 = p(v_0)$, allora $\pi_n(E, v_0) \simeq \pi_n(B, b_0)$ per ogni $n \geq 2$, e, per $n = 1$ abbiamo la successione esatta d'insiemi puntati:*

$$(2.13) \quad 0 \rightarrow \pi_1(E, v_0) \xrightarrow{\pi_{\xi_*}} \pi_1(B, b_0) \longrightarrow \pi_0(F, v_0).$$

Se E è connesso per archi, allora la $\pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi_0(F, v_0)$ è surgettiva. \square

Abbiamo qui indicato con 0 l'insieme (o il gruppo) che contengono un solo elemento.

2.12. Esempi

ESEMPIO 2.12.1 (SFERE). I primi n gruppi di omotopia della sfera S^n sono

$$(2.14) \quad \pi_n(S^m, e_0) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq m-1 \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Rappresentanti di $\pi_m(S^m, e_0)$ si possono descrivere in questo modo.

Sia $S^m = \{(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{m-1} \mid |z|^2 + \|x\|^2 = 1\}$. L'elemento corrispondente all'intero k è descritto, nelle coordinate polari della variabile complessa z , da

$$f_k(\rho \exp(it), x) = (\rho \exp(ikt), x).$$

S^1 ha come rivestimento universale la retta reale, che è contrattile, e quindi $\pi_n(S^1, e_0) = 0$ per ogni $n > 1$.

Se $m < n$, possiamo considerare la sfera S^m come il sottospazio

$$S^m = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in S^n \mid x_i = 0, \forall m < i \leq n\} \text{ di } S^n.$$

Ricordiamo che, dato uno spazio topologico X , possiamo definire la sua *sospensione* \hat{X} come il quoziente di $X \times [-1, 1]$ ottenuto identificando i punti di $X \times \{-1\}$ ad uno stesso punto \hat{x}_{-1} ed i punti di $X \times \{1\}$ ad un altro punto \hat{x}_1 . Indicheremo con \hat{x}_t il punto corrispondente ad (x, t) . La proiezione $X \times [-1, 1] \rightarrow \hat{X}$ dà per restrizione un omeomorfismo di $X \times (-1, 1)$ su un aperto denso di \hat{X} . Se su X abbiamo fissato un punto base \bar{x} , è conveniente considerare come punto base di \hat{X} il punto \hat{x}_0 . Per ogni $n \geq 0$, la sfera S^{n+1} è omeomorfa alla sospensione della sfera S^n .

Ad una qualsiasi applicazione $f \in \mathcal{C}(S^n, e_0; X, \bar{x})$ possiamo far corrispondere l'applicazione $\hat{f} \in \mathcal{C}(S^{n+1}, e_0; \hat{X}, \hat{x}_0)$ definita da

$$\hat{f}(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \hat{x}_{x_{n+1}}, \quad \text{se } f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \bar{x}.$$

La sospensione ci permette di definire, per passaggio ai quozienti, un'applicazione

$$(2.15) \quad \sigma : \pi_k(X, \bar{x}) \ni [f] \longrightarrow [\hat{f}] \in \pi_{k+1}(\hat{X}, \hat{x}_0).$$

Per le sfere, vale il fondamentale teorema:

TEOREMA 2.12.2. *L'omomorfismo di sospensione $\sigma : \pi_k(S^n, e_0) \rightarrow \pi_{k+1}(S^{n+1}, e_0)$ è un isomorfismo per $k = n \geq 1$ e per $k \leq 2(n-1)$; è surgettivo per $k = 2n-1$. \square*

Osserviamo che, a differenza di quanto avviene per la circonferenza, se $m > 1$, i gruppi $\pi_n(S^m, e_0)$ possono essere non banali per $n > m$.

Il problema di calcolare *tutti* i gruppi di omotopia di ordine $> m$ della sfera S^m , per un m arbitrario, non è ancora completamente risolto. Sono stati calcolati tutti i gruppi $\pi_n(S^m, e_0)$ per $n \leq m+30$.

Le sfere si sono rivelati, dal punto di vista della topologia, oggetti relativamente *complicati*. A titolo di esempio, riportiamo nel seguito alcuni risultati sull'omotopia delle sfere di dimensione piccola.

Abbiamo:

$$(2.16) \quad \pi_n(S^1, e_0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Riportiamo qui di seguito la tabella dei gruppi di omotopia superiore di ordine minore o uguale di 21 della sfera S^2 .

$\pi_2(S^2, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_3(S^2, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_4(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2$
$\pi_5(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_6(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_{12}$	$\pi_7(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2$
$\pi_8(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_9(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_3$	$\pi_{10}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_{15}$
$\pi_{11}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{12}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2^2$	$\pi_{13}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2^2$
$\pi_{14}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_{84} \times \mathbb{Z}_2^2$	$\pi_{15}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2^2$	$\pi_{16}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$
$\pi_{17}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\pi_{18}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\pi_{19}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3$
$\pi_{20}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3$	$\pi_{21}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3$	

Per $n \geq 3$ i gruppi di omotopia della sfera di dimensione tre sono gli stessi di quelli della sfera di dimensione due:

$$(2.17) \quad \pi_n(S^3, e_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq 2 \\ \pi_n(S^2, e_0) & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

L'uguaglianza segue qui dalla *fibrazione di Hopf*: infatti S^2 è omeomorfo alla retta proiettiva complessa $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Allora l'applicazione naturale:

$$S^3 \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \ni z \rightarrow [z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$$

definisce un fibrato localmente banale $S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$ con fibra S^1 . Dalla successione esatta di Serre

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_n(S^1, e_0) & \longrightarrow & \pi_n(S^3, e_0) & \longrightarrow & \pi_n(S^2, e_0) \\ & & & & & & \\ & & \longrightarrow & \pi_{n-1}(S^1, e_0) & \longrightarrow & \cdots & , \end{array}$$

poiché $\pi_n(S^1, e_0) = 0$ per $n \geq 2$, otteniamo che $\pi_n(S^3, e_0) \simeq \pi_n(S^2, e_0)$ per ogni $n \geq 3$.

Analogamente, S^4 si può identificare alla retta proiettiva quaternionica \mathbb{HP}^1 , definita da

$$\mathbb{HP}^1 = (\mathbb{H}^2 \setminus \{0\}) / \sim$$

$$\text{con } (q_1, q_2) \sim (q'_1, q'_2) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{H} \text{ tale che } q'_i = q_i \cdot q \text{ per } i = 1, 2.$$

Possiamo identificare S^7 con $\{(q_1, q_2) \in \mathbb{H}^2 \mid |q_1|^2 + |q_2|^2 = 1\}$. Otteniamo allora la *fibrazione di Hopf*

$$S^7 \ni (q_1, q_2) \rightarrow [(q_1, q_2)] \simeq S^4.$$

La sua fibra tipica è S^3 ed abbiamo perciò la successione esatta di omotopia

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow \pi_n(S^3, e_0) \longrightarrow \pi_n(S^7, e_0) \longrightarrow \pi_n(S^4, e_0) \\ &\longrightarrow \pi_{n-1}(S^3, e_0) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Per $n < 7$, abbiamo $\pi_n(S^7, e_0) = 0$ e dunque $\pi_n(S^4, e_0) \simeq \pi_{n-1}(S^3, e_0)$. Per $n = 7$, dalla successione esatta

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2 \simeq \pi_7(S^3, e_0) &\longrightarrow \mathbb{Z} \simeq \pi_7(S^7, e_0) \longrightarrow \pi_7(S^4, e_0) \\ \longrightarrow \pi_6(S^3, e_0) = \mathbb{Z}_{12} &\longrightarrow 0 = \pi_6(S^7, e_0) \end{aligned}$$

ricaviamo che $\pi_7(S^4, e_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$.

OSSERVAZIONE 2.12.3. I soli gruppi $\pi_n(S^m, e_0)$ con $n > m$ che contengano infiniti elementi sono i gruppi $\pi_{4m-1}(S^{2m}, e_0)$. Ciascuno di essi è la somma diretta di \mathbb{Z} e di un gruppo finito.

Abbiamo osservato sopra che $\pi_3(S^2, e_0) = \mathbb{Z}$ e $\pi_7(S^4, e_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$. È poi, ad esempio, $\pi_{11}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}$ e $\pi_{15}(S^8, e_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{120}$.

Si può definire un omomorfismo non banale $\pi_{4m-1}(S^{2m}, e_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ nel modo seguente.

Se $f \in \mathcal{C}(S^{4m-1}, e_0; S^{2m}, e_0)$, possiamo innanzi tutto supporre, a meno di un'omotopia, che la f sia di classe \mathcal{C}^∞ . Per il lemma di Sard, possiamo poi scegliere due valori non critici distinti $a, b \in S^{2m}$ di f . Allora $M_a = f^{-1}(a)$ ed $M_b = f^{-1}(b)$ sono due sottovarietà di dimensione $(m-1)$ di S^{4m-1} . Se \tilde{M}_b è una sottovarietà di dimensione $(2m)$ di S^{4m-1} con bordo M_b , pur di aver scelto \tilde{M}_b in modo generico, M_a intersecherà \tilde{M}_b trasversalmente in un numero finito di punti. Poiché sia M_a che \tilde{M}_b sono orientate, potremo attribuire a ciascun punto dell'intersezione un valore ± 1 a seconda che i sistemi di riferimento di S^{4m-1} che si ottengono mettendo insieme sistemi di riferimento positivamente orientati di M_a e di \tilde{M}_b siano orientati positivamente oppure negativamente. La somma algebrica di questi valori ± 1 definisce l'*indice di allacciamento* $\lambda(M_a, M_b)$ di M_a ed M_b . Si verifica che questa costruzione definisce un omomorfismo non banale $\pi_{4m-1}(S^{2m}, e_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ (*omomorfismo di Hopf*).

Abbiamo ancora una *fibrazione di Hopf*

$$S^{15} \rightarrow S^8 \quad \text{con fibra } S^7.$$

Essa si ottiene come restrizione alla sfera unitaria della proiezione di \mathbb{O}^2 sulla retta proiettiva $\mathbb{O}Pr^1$, dove \mathbb{O} è l'algebra degli *ottonioni* o *ottave di Cayley* (vedi Cap. IX). Ricordiamo che

$$\mathbb{O} \simeq \mathbb{H}^2 \quad \text{con } (q_1, q_2) \cdot (q'_1, q'_2) = (q_1 q_2 + \bar{q}'_2 q_2, q_2 \bar{q}'_1 + q'_2 q_1).$$

Gli elementi non nulli di \mathbb{O} sono invertibili e $\mathbb{O}Pr^1$ si definisce come il quoziente di $\mathbb{O}^2 \setminus \{0\}$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica (α_1, α_2) ad (α'_1, α'_2) se esiste un ottonione non nullo γ per cui $\alpha'_i = \alpha_i \cdot \gamma$ per $i = 1, 2$. Risulta $\mathbb{O}Pr^1 \simeq S^8$ e la restrizione della proiezione sul quoziente ad

$$S^{15} = \{(q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathbb{H}^4 \mid |q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2 + |q_4|^2 = 1\}$$

definisce una fibrazione con fibra S^7 . Abbiamo allora la successione esatta di omotopia

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_n(S^7, e_0) & \longrightarrow & \pi_n(S^{15}, e_0) & \longrightarrow & \pi_n(S^8, e_0) \\ & & & & & & \\ & & \longrightarrow & \pi_{n-1}(S^7, e_0) & \longrightarrow & \cdots & \end{array}$$

da cui otteniamo che $\pi_n(S^8, e_0) \simeq \pi_{n-1}(S^7, e_0)$ per $1 \leq n < 15$. Per $n = 15$ otteniamo $\pi_{15}(S^8, e_0) \simeq \mathbb{Z} \times \pi_{14}(S^7, e_0) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{120}$.

Riportiamo nella tabella seguente i gruppi di omotopia di ordine $m \leq n \leq 15$ delle sfere S^m per $4 \leq m \leq 8$.

$\pi_4(S^4, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_5(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_6(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_7(S^4, e_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$
$\pi_8(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2^2$	$\pi_9(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2^2$	$\pi_{10}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	$\pi_{11}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_{15}$
$\pi_{12}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{13}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2^3$	$\pi_{14}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_{120} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$	
$\pi_{15}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_{84} \times \mathbb{Z}_2^5$			
$\pi_5(S^5, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_6(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_7(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_8(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_{24}$
$\pi_9(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{10}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{11}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{12}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_{30}$
$\pi_{13}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{14}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2^3$	$\pi_{15}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_{72} \times \mathbb{Z}_2$	
$\pi_6(S^6, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_7(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_8(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_9(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_{24}$
$\pi_{10}(S^6, e_0) = 0$	$\pi_{11}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_{12}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{13}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_{60}$
$\pi_{14}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_2$	$\pi_{15}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_2^3$		
$\pi_7(S^7, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_8(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_9(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{10}(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_{24}$
$\pi_{11}(S^7, e_0) = 0$	$\pi_{12}(S^7, e_0) = 0$	$\pi_{13}(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{14}(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_{120}$
$\pi_{15}(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_2^3$			
$\pi_8(S^8, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_9(S^8, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{10}(S^8, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{11}(S^8, e_0) = \mathbb{Z}_{24}$
$\pi_{12}(S^8, e_0) = 0$	$\pi_{13}(S^8, e_0) = 0$	$\pi_{14}(S^8, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{15}(S^8, e_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{120}$

OSSERVAZIONE 2.12.4. La tabella sopra è organizzata rispetto ai parametri n e k di $\pi_{n+k}(S^n, e_0)$ e illustra, per valori $5 \leq n \leq 8$ un fatto generale. Fissato un intero positivo k , i gruppi di omotopia $\pi_{n+k}(S^n, e_0)$, per $n \geq k + 2$, sono tutti isomorfi tra loro. Il gruppo corrispondente si dice il k -esimo *gruppo di omotopia stabile* delle sfere. I gruppi $\pi_{n+k}(S^n, e_0)$ sono stati calcolati per $k \leq 64$. Indichiamo con Π_k il k -esimo gruppo di omotopia stabile delle sfere. Riportiamo nella seguente tabella i gruppi $\Pi_k \simeq \pi_{2k+2}(S^{k+2}, e_0)$ per $1 \leq k \leq 15$:

$\Pi_1 \simeq \pi_4(S^3) \simeq \mathbb{Z}_2$	$\Pi_2 \simeq \pi_6(S^4) \simeq \mathbb{Z}_2$	$\Pi_3 \simeq \pi_8(S^5) \simeq \mathbb{Z}_{24}$
$\Pi_4 \simeq \pi_{10}(S^6) = 0$	$\Pi_5 \simeq \pi_{12}(S^7) = 0$	$\Pi_6 \simeq \pi_{14}(S^8) \simeq \mathbb{Z}_2$
$\Pi_7 \simeq \pi_{16}(S^9) \simeq \mathbb{Z}_{240}$	$\Pi_8 \simeq \pi_{18}(S^{10}) \simeq \mathbb{Z}_2^2$	$\Pi_9 \simeq \pi_{20}(S^{11}) \simeq \mathbb{Z}_2^3$
$\Pi_{10} \simeq \pi_{22}(S^{12}) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$	$\Pi_{11} \simeq \pi_{24}(S^{13}) \simeq \mathbb{Z}_{540}$	$\Pi_{12} \simeq \pi_{26}(S^{14}) = 0$
$\Pi_{13} \simeq \pi_{28}(S^{15}) \simeq \mathbb{Z}_3$	$\Pi_{14} \simeq \pi_{30}(S^{16}) \simeq \mathbb{Z}_2^2$	$\Pi_{15} \simeq \pi_{32}(S^{17}) \simeq \mathbb{Z}_{480} \times \mathbb{Z}_2$

ESEMPIO 2.12.5 (SPAZI PROIETTIVI REALI). È $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \simeq S^1$ e, per ogni $m > 1$, la sfera S^m è il rivestimento universale, a due fogli, di $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$. Abbiamo perciò:

$$(2.18) \quad \begin{cases} \pi_n(\mathbb{R}\mathbb{P}^1, [e_0]) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } n \neq 1, \end{cases} \\ \pi_n(\mathbb{R}\mathbb{P}^m, [e_0]) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } 1 < n < m, \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n = m, \\ \pi_n(S^m, e_0), & \text{se } n \geq 2, \end{cases} \quad \text{se } m > 1. \end{cases}$$

ESEMPIO 2.12.6 (SPAZI PROIETTIVI COMPLESSI). L'applicazione $p : S^{2m+1} \ni z \rightarrow [z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^m$ è, per ogni $m \geq 1$, un fibrato topologico localmente banale con fibra S^1 . Dalla successione esatta di omotopia dei fibrati ricaviamo allora:

$$(2.19) \quad \pi_n(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, [e_0]) \simeq \pi_n(S^{2m+1}, e_0), \quad \forall n \geq 3.$$

Abbiamo poi la successione esatta:

$$(2.20) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \simeq \pi_2(S^{2m+1}, e_0) & \longrightarrow & \pi_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, [e_0]) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \simeq \pi_1(S^1, e_0) \\ \longrightarrow & 0 \simeq \pi_1(S^{2m+1}, e_0) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, [e_0]) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

e quindi:

$$(2.21) \quad \begin{cases} \pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, [e_0]) = 0 \\ \pi_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, [e_0]) \simeq \mathbb{Z}. \end{cases}$$

ESEMPIO 2.12.7 (SPAZI PROIETTIVI QUATERNIONI). Lo spazio proiettivo di dimensione m sui quaternioni $\mathbb{H}\mathbb{P}^m$ è definito come il quoziente di $\mathbb{H}^{m+1} \setminus \{0\}$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$(q_0, q_1, \dots, q_m) \sim (q'_0, q'_1, \dots, q'_m) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{H} \quad \text{tale che} \quad q'_i = q_i \cdot q \quad \text{per } 0 \leq i \leq m.$$

La restrizione alla sfera $S^{4m+3} = \{(q_0, q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{H}^{m+1} \mid \sum_{i=0}^m |q_i|^2 = 1\}$ della proiezione $pr : \mathbb{H}^{m+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{H}\mathbb{P}^m$ definisce una fibrazione localmente banale $S^{4m+3} \rightarrow \mathbb{H}\mathbb{P}^m$, con fibra S^3 . Otteniamo perciò la successione esatta di omotopia

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_n(S^3, e_0) & \longrightarrow & \pi_n(S^{4m+3}, e_0) & \longrightarrow & \pi_n(\mathbb{H}\mathbb{P}^m, [e_0]) \\ & & \longrightarrow & \pi_{n-1}(S^3, e_0) & \longrightarrow & \dots & \end{array}$$

Poiché $\pi_n(S^{4m+3}, e_0) = 0$ per $n < 4m+3$, otteniamo che $\pi_n(\mathbb{H}\mathbb{P}^m, [e_0]) \simeq \pi_{n-1}(S^3, e_0)$ se $n < 4m+3$. Abbiamo poi $\pi_{4m+3}(\mathbb{H}\mathbb{P}^m, [e_0]) \simeq \mathbb{Z} \times \pi_{4m+2}(S^3, e_0)$ se $m \geq 1$.

ESEMPIO 2.12.8 (LENTI). Fissiamo una $(n+1)$ -upla (m, m_1, \dots, m_n) , con m intero positivo ed m_1, \dots, m_n interi relativamente primi con m . Sia $S^{2n-1} = \{(z_1, \dots, z_n) \mid \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1\}$ la sfera unitaria di \mathbb{C}^n e consideriamo l'applicazione

$$\mathbb{Z} \times S^{2n-1} \ni (k, z_1, \dots, z_n) \rightarrow (z_1 e^{2k\pi i m_1/m}, \dots, z_n e^{2k\pi i m_n/m}) \in S^{2n-1}.$$

Per passaggio al quoziente essa definisce un'azione su S^{2n-1} del gruppo abeliano \mathbb{Z}_m . Il quoziente S^{2n-1}/\mathbb{Z}_m si dice una *lente* e si indica con $L(m; m_1, \dots, m_n)$. La proiezione nel quoziente $p : S^{2n-1} \rightarrow L(m; m_1, \dots, m_n)$ è un rivestimento connesso

ad m fogli. Il gruppo fondamentale di $L(m; m_1, \dots, m_n)$ è isomorfo a \mathbb{Z}_m , mentre i gruppi di omotopia d'ordine superiore sono isomorfi a quelli della sfera S^{2m-1} .

CAPITOLO III

Fibrati topologici con strutture di gruppo

I fibrati che si considerano più spesso sono dotati, oltre alla struttura topologica, di strutture naturali aggiuntive: le fibre possono essere ad esempio spazi vettoriali, euclidei o hermitiani. Si caratterizzano cioè per l'azione sullo spazio totale di un gruppo che preserva le fibre.

3.1. Azioni di gruppo

Siano \mathbf{G} un gruppo ed F un insieme.

DEFINIZIONE 3.1.1. Un'azione a sinistra di \mathbf{G} su F è un'applicazione

$$(3.1) \quad \mathbf{G} \times F \ni (x, v) \longrightarrow x \cdot v \in F$$

tale che

$$e \cdot v = v, \quad x_1 \cdot (x_2 \cdot v) = (x_1 x_2) \cdot v, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}, \quad \forall v \in F.$$

In modo analogo si definisce un'azione a destra di \mathbf{G} su F come un'applicazione

$$(3.2) \quad F \times \mathbf{G} \ni (v, x) \longrightarrow v \cdot x \in F$$

tale che

$$v \cdot e = v, \quad (v \cdot x_1) \cdot x_2 = v \cdot (x_1 x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}, \quad \forall v \in F.$$

Se (3.1) è un'azione a sinistra, la

$$(3.3) \quad F \times \mathbf{G} \ni (v, x) \longrightarrow x^{-1} \cdot v \in F$$

è un'azione a destra e, se (3.2) è un'azione a destra, la

$$(3.4) \quad \mathbf{G} \times F \ni (x, v) \longrightarrow v \cdot x^{-1} \in F$$

un'azione a sinistra. Non sarà quindi restrittivo limitarsi, in una trattazione generale delle azioni di gruppo, a considerare soltanto quelle a sinistra.

Fissata un'azione a sinistra (3.1), associamo all'elemento x di \mathbf{G} l'applicazione (*traslazione*)

$$(3.5) \quad \rho_x : F \ni v \longrightarrow x \cdot v \in F.$$

Dalle relazioni che caratterizzano l'azione di gruppo segue che

$$\rho_e = \text{id}_F, \quad \rho_{x_1 x_2} = \rho_{x_1} \circ \rho_{x_2}, \quad \rho_{x^{-1}} = \rho_x^{-1}, \quad \forall x, x_1, x_2, g \in \mathbf{G}.$$

Quindi la

$$(3.6) \quad \rho : \mathbf{G} \ni x \longrightarrow \rho_x \in \mathbf{S}(F)$$

è un omomorfismo di \mathbf{G} nel gruppo $\mathbf{S}(F)$ delle permutazioni degli elementi di F e, viceversa, ogni omomorfismo (3.6) definisce un'azione a sinistra di \mathbf{G} su F mediante

$$(3.7) \quad \mathbf{G} \times F \ni (x, v) \longrightarrow \rho_x(v) \in F.$$

DEFINIZIONE 3.1.2. L'omomorfismo ρ per cui valgano le (3.5), (3.7) si dice *associato* all'azione (3.1).

OSSERVAZIONE 3.1.3. L'applicazione $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{S}(F)$ definita da $\rho_x(v) = v \cdot x$, associata ad un'azione a destra (3.2), è un *antiomorfismo di gruppi*; soddisfa cioè la $\rho_{x_1 x_2} = \rho_{x_2} \circ \rho_{x_1}$ per ogni $x_1, x_2 \in \mathbf{G}$.

DEFINIZIONE 3.1.4. Chiamiamo $\ker(\rho)$ il *nucleo d'infedeltà dell'azione* (3.1). Se ρ è iniettivo diciamo che l'azione (3.1) è *fedele* (o *effettiva*).

DEFINIZIONE 3.1.5. L'*orbita* di un punto $v \in F$ (per l'azione di \mathbf{G}) è il sottoinsieme $\mathbf{G}v = \{x \cdot v \mid x \in \mathbf{G}\}$ di F .

Le orbite degli elementi di F definiscono una partizione di F e quindi la relazione di appartenere alla stessa orbita è una relazione di equivalenza. Il quoziente corrispondente si indica con F/\mathbf{G} e si dice *spazio delle orbite*.

Se $\mathbf{G}v = F$ per uno, e quindi per tutti gli elementi v di F , diciamo che l'azione di \mathbf{G} è *transitiva*.

Un'azione transitiva e fedele si dice *semplicemente transitiva*.

OSSERVAZIONE 3.1.6. Il nucleo d'infedeltà $\mathbf{K} = \ker(\rho)$ dell'azione (3.1) è un sottogruppo normale di \mathbf{G} . Sia $v \in F$; poiché $x_1 \cdot v = x_2 \cdot v$ se $x_1^{-1}x_2 \in \mathbf{K}$, l'elemento $x \cdot v$ dipende solo dalla classe di equivalenza di x in \mathbf{G}/\mathbf{K} . Possiamo quindi far corrispondere all'azione di \mathbf{G} su F un'azione fedele di \mathbf{G}/\mathbf{K} su F e, viceversa, ogni azione di \mathbf{G}/\mathbf{K} su F determina un'azione di \mathbf{G} su F il cui nucleo d'infedeltà contiene \mathbf{K} , dimodoché $[x] \cdot v = x \cdot v$ per ogni $x \in \mathbf{G}$ e $v \in F$ (abbiamo indicato con $[x]$ la classe laterale di x in \mathbf{G}/\mathbf{K}).

OSSERVAZIONE 3.1.7. Diciamo che l'azione di \mathbf{G} su F è *n-transitiva* se, date due *n*-uple di punti distinti (v_1, \dots, v_n) e (w_1, \dots, w_n) di F vi è un elemento x di \mathbf{G} tale che $x \cdot v_i = w_i$ per $1 \leq i \leq n$.

L'azione si dice *primitiva* se è transitiva e non preserva nessuna partizione non banale di F .

Un'azione doppiamente transitiva è necessariamente primitiva, ma non vale il viceversa. Ad esempio, il gruppo delle rotazioni piane intorno all'origine agisce sulla circonferenza in modo primitivo, ma non doppiamente transitivo.

OSSERVAZIONE 3.1.8. Sia (3.1) un'azione di gruppo. Se \mathbf{H} è un altro gruppo e $\phi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}$ un omomorfismo di gruppi, allora anche la

$$(3.8) \quad \mathbf{H} \times F \ni (h, v) \longrightarrow \phi(h) \cdot v \in F$$

è un'azione di gruppo. Se ϕ è iniettiva e (3.1) fedele, allora anche (3.8) è fedele. Se ϕ è surgettiva e (3.1) transitiva, allora anche (3.8) è transitiva.

Se \mathbf{H} è un sottogruppo di \mathbf{G} e ϕ l'inclusione, allora diciamo che la (3.8) è una *restrizione* ad \mathbf{H} di (3.1) e che (3.1) è un'*estensione* a \mathbf{G} di (3.8).

DEFINIZIONE 3.1.9. Un sottoinsieme E di F è *invariante* per l'azione di \mathbf{G} se $x \cdot v \in E$ per ogni $v \in E$. In questo caso la

$$\mathbf{G} \times E \ni (x, v) \longrightarrow x \cdot v \in E$$

è ancora un'azione di gruppo.

OSSERVAZIONE 3.1.10. Se \mathbf{G}_i sono gruppi, F_i insiemi, e

$$\mathbf{G}_i \times F_i \ni (x_i, v_i) \rightarrow x_i \cdot v_i$$

azioni di gruppi (a sinistra), per i che varia in un insieme I di indici, allora anche

$$\left(\prod_{i \in I} \mathbf{G}_i \right) \times \left(\prod_{i \in I} F_i \right) \ni ((x_i), (v_i)) \longrightarrow (x_i \cdot v_i) \in \prod_{i \in I} F_i$$

è un'azione di gruppo (a sinistra). Se tutte le azioni sono fedeli anche il loro prodotto è fedele e se tutte sono transitive anche il loro prodotto è transitivo.

DEFINIZIONE 3.1.11. Chiamiamo \mathbf{G} -insieme un insieme F su cui sia assegnata un'azione del gruppo \mathbf{G} .

Se F_1, F_2 sono due \mathbf{G} -insiemi, una \mathbf{G} -applicazione, o *applicazione \mathbf{G} -equivariante* di F_1 in F_2 , è un'applicazione $f : F_1 \rightarrow F_2$ che commuti con l'azione di \mathbf{G} , cioè tale che

$$f(x \cdot v) = x \cdot f(v), \quad \forall x \in \mathbf{G}, \forall v \in F_1.$$

Più in generale, se F_i è un \mathbf{G}_i -spazio, per $i = 1, 2$ e $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ un omomorfismo di gruppi, una ϕ -applicazione di F_1 in F_2 è una $f : F_1 \rightarrow F_2$ con

$$f(x \cdot v) = \phi(x) \cdot f(v), \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{G}_1 \text{ e } v \in F_1.$$

DEFINIZIONE 3.1.12. Due azioni dello stesso gruppo \mathbf{G} su due insiemi F_1, F_2 si dicono *equivalenti* se esiste una \mathbf{G} -applicazione bigettiva $f : F_1 \rightarrow F_2$.

DEFINIZIONE 3.1.13. Se F è uno spazio topologico e le ρ_x corrispondenti all'azione (3.1) di \mathbf{G} su F sono degli omeomorfismi, diciamo che \mathbf{G} opera su F *mediante omeomorfismi*.

Se F è una varietà differenziabile e le ρ_x corrispondenti all'azione (3.1) di \mathbf{G} su F sono dei diffeomorfismi, diciamo che \mathbf{G} opera su F *mediante diffeomorfismi*.

Se F ha una struttura algebrica (di gruppo, di anello, di algebra ...) e le ρ_x corrispondenti all'azione (3.1) di \mathbf{G} su F sono automorfismi, diciamo che \mathbf{G} opera su F *mediante automorfismi*.

Nel caso di un'azione fedele, parleremo ancora di *gruppo di omeomorfismi*, di *diffeomorfismi* o di *automorfismi*, rispettivamente.

ESEMPIO 3.1.14. Se \mathbf{G} è un gruppo, le traslazioni a destra $(x, h) \rightarrow L_x h = xh$ e l'aggiunta $(x, h) \rightarrow \text{ad}(x)h = xhx^{-1}$ sono azioni a sinistra di \mathbf{G} su \mathbf{G} , che si dicono, rispettivamente, *azione canonica a sinistra* ed *azione aggiunta, o interna*. La traslazione a destra $(h, x) \rightarrow R_x h = hx$ è un'azione a destra, che si dice *azione canonica a destra*.

ESEMPIO 3.1.15. Sia \mathbf{H} un sottogruppo del gruppo \mathbf{G} . La restrizione ad \mathbf{H} dell'azione canonica a destra definisce un'azione di \mathbf{H} su \mathbf{G} le cui orbite formano lo spazio quoziente $F = \mathbf{G}/\mathbf{H}$. Poiché l'azione canonica a sinistra di \mathbf{G} opera sulle classi laterali sinistre di \mathbf{H} , risulta definita un'azione a sinistra canonica di \mathbf{G} su F .

DEFINIZIONE 3.1.16. Fissiamo un'azione di gruppo (3.1). Se $v_0 \in F$, l'insieme

$$(3.9) \quad \mathbf{G}_{v_0} = \{x \in \mathbf{G} \mid x \cdot v_0 = v_0\}$$

è un sottogruppo di \mathbf{G} , che si dice lo *stabilizzatore* (o *sottogruppo di stabilità*) di v_0 .

Se $v_0, v_1 \in F$, $a \in \mathbf{G}$, e $v_1 = a \cdot v_0$, allora

$$x \in \mathbf{G}_{v_1} \iff x \cdot a \cdot v_0 = a \cdot v_0 \iff a^{-1}xa \cdot v_0 = v_0 \iff a^{-1}xa \in \mathbf{G}_{v_0}$$

e quindi

$$\mathbf{G}_{v_1} = \mathbf{G}_{a \cdot v_0} = a\mathbf{G}_{v_0}a^{-1} = \text{ad}(a)(\mathbf{G}_{v_0}).$$

In particolare

LEMMA 3.1.17. *Se l'azione (3.1) di \mathbf{G} su F è transitiva, allora gli stabilizzatori dei diversi punti di F sono coniugati tra loro.* \square

PROPOSIZIONE 3.1.18. *Ogni azione transitiva di un gruppo è equivalente alla sua azione canonica su un suo quoziente.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che il gruppo \mathbf{G} agisca transitivamente su un insieme F . Fissiamo un qualsiasi punto v_0 di F e sia \mathbf{G}_{v_0} il suo stabilizzatore.

L'applicazione $\mathbf{G} \ni x \rightarrow x \cdot v_0 \in F$ definisce per passaggio al quoziente un'applicazione $f : \mathbf{G}/\mathbf{G}_{v_0} \rightarrow F$. Infatti abbiamo

$$x_1^{-1}x_2 \in \mathbf{G}_{v_0} \iff x_1^{-1}x_2 \cdot v_0 = v_0 \iff x_2 \cdot v_0 = x_1 \cdot v_0.$$

Queste equivalenze dimostrano che la f è ben definita ed iniettiva. Essa è anche bigettiva perché abbiamo supposto che l'azione fosse transitiva. Poiché $f(x \cdot [h]) = f([xh]) = xh \cdot v_0 = x \cdot (h \cdot v_0) = x \cdot f([h])$ (al solito indichiamo con $[h]$ la classe di equivalenza di $h \in \mathbf{G}$ in \mathbf{G}/\mathbf{H}), la f è una \mathbf{G} -applicazione e quindi, essendo invertibile, una \mathbf{G} -equivalenza. \square

3.2. Gruppi topologici

DEFINIZIONE 3.2.1. Una topologia τ su un gruppo \mathbf{G} si dice *compatibile con la struttura di gruppo* se l'applicazione

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g_1, g_2) \rightarrow g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{G}$$

è continua (per la topologia prodotto su $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$).

Ciò equivale al fatto che siano continue le due applicazioni

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g_1, g_2) \rightarrow g_1g_2 \in \mathbf{G} \quad \text{e} \quad \mathbf{G} \ni g \rightarrow g^{-1} \in \mathbf{G}.$$

Un *gruppo topologico* è un gruppo \mathbf{G} su cui si sia fissata una topologia τ compatibile con la sua struttura di gruppo.

LEMMA 3.2.2. *Se \mathbf{G} è un gruppo topologico, allora per ogni $a \in \mathbf{G}$ le applicazioni R_a, L_a, ad_a sono omeomorfismi di \mathbf{G} in sè. Se $\{e\}$ è chiuso, allora il centro $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) = \{x \in \mathbf{G} \mid xg = gx, \forall g \in \mathbf{G}\}$ è chiuso in \mathbf{G} . Se \mathbf{H} è un sottogruppo di \mathbf{G} , esso è un gruppo topologico con la topologia di sottospazio indotta da \mathbf{G} .* \square

OSSERVAZIONE 3.2.3. La topologia discreta e la topologia indiscreta sono entrambe compatibili con la struttura di gruppo di un qualsiasi gruppo \mathbf{G} . Quindi ogni gruppo può essere considerato come gruppo topologico.

3.2.1. Gruppo degli omeomorfismi di uno spazio topologico. L'insieme $\mathbf{S}_\tau(X)$ di tutti gli omeomorfismi di uno spazio topologico $X = (X, \tau_X)$ in sè è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni. Consideriamo su $\mathbf{S}_\tau(X)$ la topologia $\tilde{\tau}_X$ che ha come prebase¹ \mathcal{U} degli aperti gli insiemi

$$U(K, A) = \{\phi \in \mathbf{S}_\tau(X) \mid \phi(K) \subset A\} \quad e$$

$$U^{-1}(K, A) = \{\phi \in \mathbf{S}_\tau(X) \mid \phi^{-1}(K) \subset A\}$$

al variare di K tra i compatti e di A tra gli aperti di X .

Si ottiene una prebase della stessa topologia di $\mathbf{S}_\tau(X)$ se si fa variare A in una prebase degli aperti di X .

TEOREMA 3.2.4. *Se X è uno spazio di Hausdorff localmente compatto, allora $\mathbf{S}_\tau(X)$, con la topologia $\tilde{\tau}_X$, è un gruppo topologico.*

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente la $\mathbf{S}_\tau(X) \ni \phi \rightarrow \phi^{-1} \in \mathbf{S}_\tau(X)$ è continua perché scambia tra loro gli aperti $U(K, A)$ e $U^{-1}(K, A)$ della prebase \mathcal{U} .

Dimostriamo che anche la

$$\lambda : \mathbf{S}_\tau(X) \times \mathbf{S}_\tau(X) \ni (\phi, \psi) \rightarrow \phi \circ \psi \in \mathbf{S}_\tau(X)$$

è continua. Siano K un compatto, A un aperto di X e ϕ_0, ψ_0 due omeomorfismi in $\mathbf{S}_\tau(X)$ tali che $\phi_0(\psi_0(K)) \subset A$.

Poiché $\psi_0(K)$ è un compatto di X contenuto in A , possiamo trovare un intorno aperto relativamente compatto V di $\psi_0(K)$ tale che

$$\psi_0(K) \subset V \subset \bar{V} \Subset A.$$

Allora, se $\psi \in U(K, V)$ e $\phi \in U(\bar{V}, A)$, abbiamo $\phi \circ \psi(K) \subset A$.

Quindi $\lambda^{-1}(U(K, A)) \supset U(\bar{V}, A) \times U(K, V) \ni (\phi_0, \psi_0)$ è un intorno aperto di ogni suo punto e quindi un aperto.

In modo analogo, se $(\phi_0 \circ \psi_0)^{-1}(K) \subset A$, scegliamo un intorno aperto V del compatto $\phi_0^{-1}(K)$ con

$$\phi_0^{-1}(K) \subset V \subset \bar{V} \Subset A.$$

Allora $\lambda^{-1}(U^{-1}(K, A)) \supset U^{-1}(K, V) \times U^{-1}(\bar{V}, A) \ni (\phi_0, \psi_0)$ dimostra che l'insieme $\lambda^{-1}(U^{-1}(K, A))$ è intorno di ogni suo punto e quindi aperto.

Pertanto λ è continua. □

TEOREMA 3.2.5. *Se $X = (X, \tau_X)$ è uno spazio di Hausdorff localmente compatto e localmente connesso, allora la topologia $\tilde{\tau}_X$ su $\mathbf{S}_\tau(X)$ coincide con la topologia compatta-aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Sarà sufficiente dimostrare che, se K è un compatto ed A un aperto di X , l'insieme $U^{-1}(K, A)$ è aperto nella topologia compatta-aperta di $\mathbf{S}_\tau(X)$. Poiché per ipotesi gli aperti relativamente compatti di X formano una base di τ_X , possiamo limitarci a considerare il caso in cui A sia relativamente compatto in X . Possiamo inoltre supporre che K abbia parte interna non vuota e connessa.

¹Data una famiglia \mathcal{U} di sottoinsiemi di un insieme Y , è univocamente determinata la topologia $\tau(\mathcal{U})$ su Y , meno fine tra tutte quelle per cui tutti i sottoinsiemi di \mathcal{U} siano aperti. Se su Y è assegnata una topologia τ , diciamo che la famiglia \mathcal{U} di sottoinsiemi di Y è una *prebase* della τ se $\tau(\mathcal{U}) = \tau$.

Infatti, fissato ϕ_0 in $U^{-1}(K, A)$, possiamo trovare un ricoprimento finito $\{U_1, \dots, U_n\}$ di K mediante aperti connessi e relativamente compatti con $\phi_0^{-1}(\bar{U}_j) \subset A$ per ogni $j = 1, \dots, n$. Allora

$$\phi_0 \in \bigcap_{j=1}^n U^{-1}(\bar{U}_j, A) \subset U^{-1}(K, A)$$

e sarà allora sufficiente verificare che ciascuno degli insiemi $U^{-1}(\bar{U}_j, A)$ sia aperto in $\mathbf{S}_\tau(X)$ per la topologia compatta-aperta.

Supponiamo quindi che A sia un aperto relativamente compatto di X e K un compatto di X con parte interna connessa.

Sia ϕ_0 un elemento di $U^{-1}(K, A)$; fissiamo un punto $x_0 \in A$ la cui immagine $\phi_0(x_0)$ sia un punto interno di K , e consideriamo l'aperto

$$W = U(\{x_0\}, \text{int } K) \cap U(\bar{A} \cap \complement A, \complement K)$$

della topologia compatta-aperta di $\mathbf{S}_\tau(X)$. L'immagine della frontiera $\partial W = \bar{A} \cap \complement A$ dell'aperto A mediante un omeomorfismo ϕ di W non interseca il compatto K ; quindi $\phi^{-1}(K) \subset A \cup \complement \bar{A}$.

Osserviamo che K è connesso perché ha parte interna connessa. Essendo connesso, $\phi^{-1}(K)$ è contenuto o in A o nel complementare $\complement \bar{A}$ della sua chiusura. Poiché $\phi \in U(\{x_0\}, \text{int } K)$, otteniamo $\phi^{-1}(x_0) \in \phi^{-1}(K) \cap A$ e dunque $\phi^{-1}(K) \subset A$. Ciò dimostra che $W \subset U^{-1}(K, A)$. Abbiamo verificato in questo modo che $U^{-1}(K, A)$ è intorno di ogni suo punto e quindi aperto nella topologia compatta-aperta di $\mathbf{S}_\tau(X)$. \square

3.2.2. Alcune proprietà generali.

TEOREMA 3.2.6. *La componente connessa \mathbf{G}_e dell'identità in un gruppo topologico \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso normale di \mathbf{G} . Analogamente, la componente connessa per archi dell'identità è un sottogruppo normale di \mathbf{G} .*

DIMOSTRAZIONE. L'immagine di $\mathbf{G}_e \times \mathbf{G}_e$ mediante l'applicazione

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g, h) \rightarrow gh^{-1} \in \mathbf{G}$$

è un connesso di \mathbf{G} che contiene e e dunque è contenuta in \mathbf{G}_e . Ciò dimostra che \mathbf{G}_e è un sottogruppo di \mathbf{G} . Se $a \in \mathbf{G}$, allora l'immagine di \mathbf{G}_e mediante $\text{ad}(a)$ è un connesso di \mathbf{G} che contiene e ed è dunque contenuta in \mathbf{G}_e . Ciò dimostra che \mathbf{G}_e è un sottogruppo normale.

La seconda affermazione del teorema si dimostra in modo analogo, in quanto immagini continue di sottoinsiemi connessi per archi sono ancora connesse per archi. \square

TEOREMA 3.2.7. *Un sottogruppo aperto \mathbf{H} di \mathbf{G} è anche chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Se \mathbf{H} è un sottogruppo aperto di \mathbf{G} , allora il suo complementare $\complement \mathbf{H}$ è aperto in \mathbf{G} perché unione di aperti:

$$\complement \mathbf{H} = \bigcup \{R_g(\mathbf{H}) \mid g \notin \mathbf{H}\}. \quad \square$$

DEFINIZIONE 3.2.8. Dato un sottogruppo \mathbf{H} di un gruppo \mathbf{G} , indichiamo con \mathbf{G}/\mathbf{H} l'insieme delle sue classi laterali sinistre ²:

$$\mathbf{G}/\mathbf{H} = \{g\mathbf{H} \mid g \in \mathbf{G}\}.$$

Esso è il quoziente di \mathbf{G} rispetto alla relazione di equivalenza

$$g_1 \sim g_2 \iff g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{H}.$$

Se \mathbf{G} è un gruppo topologico, consideriamo su \mathbf{G}/\mathbf{H} la topologia quoziente.

TEOREMA 3.2.9. *Siano \mathbf{G} un gruppo topologico ed \mathbf{H} un suo sottogruppo. La proiezione nel quoziente $\pi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}$ è un'applicazione aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Se A è un aperto di \mathbf{G} , allora

$$\pi^{-1}\pi(A) = \bigcup \{R_h(A) \mid h \in \mathbf{H}\}$$

è aperto perché unione di aperti. \square

TEOREMA 3.2.10. *Siano \mathbf{G} un gruppo topologico ed \mathbf{H} suo sottogruppo. La chiusura $\overline{\mathbf{H}}$ di \mathbf{H} è ancora un sottogruppo di \mathbf{G} . Se \mathbf{H} è normale in \mathbf{G} , anche la sua chiusura $\overline{\mathbf{H}}$ è normale in \mathbf{G} .*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con r l'applicazione $r : \mathbf{G} \ni g \rightarrow g^{-1} \in \mathbf{G}$ che ad ogni elemento di \mathbf{G} fa corrispondere il suo inverso. La r è un omeomorfismo e quindi $r(\overline{A}) = \overline{r(A)}$ per ogni sottoinsieme A di \mathbf{G} . Se \mathbf{H} è un sottogruppo di \mathbf{G} , $r(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ ed otteniamo:

$$r(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{r(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}}.$$

Analogamente, poiché per ogni $g \in \mathbf{G}$ le applicazioni L_g ed R_g sono omeomorfismi, abbiamo $L_g(\overline{A}) = \overline{L_g(A)}$ e $R_g(\overline{A}) = \overline{R_g(A)}$ per ogni sottoinsieme A di \mathbf{G} . Se $g \in \mathbf{H}$, poiché $L_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ e $R_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$, avremo:

$$L_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{L_g(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}}, \quad R_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{R_g(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}} \quad \forall g \in \mathbf{H}.$$

Queste relazioni implicano che

$$R_g(\mathbf{H}) \subset \overline{\mathbf{H}}, \quad L_g(\mathbf{H}) \subset \overline{\mathbf{H}} \quad \forall g \in \overline{\mathbf{H}},$$

e pertanto, passando alle chiusure,

$$L_g(\overline{\mathbf{H}}) = R_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{\mathbf{H}} \quad \forall g \in \overline{\mathbf{H}}.$$

Quindi $\overline{\mathbf{H}}$ è un sottogruppo di \mathbf{G} .

²Si possono in modo analogo considerare le classi laterali destre $\mathbf{H}\backslash\mathbf{G} = \{\mathbf{H}g \mid g \in \mathbf{G}\}$. Indicando con $r : \mathbf{G} \ni x \rightarrow x^{-1} \in \mathbf{G}$ l'inversione, abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \xrightarrow{r} & \mathbf{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}\backslash\mathbf{G} & \xrightarrow{\hat{r}} & \mathbf{G}/\mathbf{H} \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono le proiezioni nel quoziente. La \hat{r} è bigettiva e, nel caso in cui \mathbf{G} sia un gruppo topologico, un omeomorfismo. Potremo quindi nella discussione seguente limitarci a considerare soltanto classi laterali sinistre, poiché i risultati ottenuti si applicheranno automaticamente anche alle classi laterali destre.

Poiché ad_g è, per ogni $g \in \mathbf{G}$ un omeomorfismo di \mathbf{G} in sè, abbiamo $\text{ad}_g(\overline{A}) = \overline{\text{ad}_g(A)}$ per ogni sottoinsieme A di \mathbf{G} . Dire che \mathbf{H} è un sottogruppo normale di \mathbf{G} equivale al fatto che $\text{ad}_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ per ogni $g \in \mathbf{G}$. Se quindi \mathbf{H} è normale, risulta:

$$\text{ad}_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{\text{ad}_g(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}} \quad \forall g \in \mathbf{G}$$

e questa uguaglianza dimostra che anche $\overline{\mathbf{H}}$ è normale. \square

TEOREMA 3.2.11. *Se \mathbf{H} è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico \mathbf{G} , allora \mathbf{G}/\mathbf{H} è uno spazio regolare. In particolare, \mathbf{G} è uno spazio regolare se e soltanto se è uno spazio ³ T_1 e ciò equivale al fatto che $\{e\}$ sia chiuso in \mathbf{G} .*

DIMOSTRAZIONE. Se \mathbf{H} è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico \mathbf{G} , allora tutte le sue classi laterali sinistre sono chiusi di \mathbf{G} e quindi \mathbf{G}/\mathbf{H} è uno spazio topologico T_1 .

Siano F un chiuso di \mathbf{G}/\mathbf{H} e g un elemento di \mathbf{G} tale che $\pi(g) \notin F$. Consideriamo l'applicazione continua $\lambda : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (a, b) \rightarrow a^{-1}b \in \mathbf{G}$.

Poiché $\pi^{-1}(F)$ è un chiuso che non contiene $\lambda(e, g)$, possiamo trovare un intorno aperto U_e di e ed un intorno aperto U_g di g in \mathbf{G} tali che

$$g_1^{-1}g_2 \notin \pi^{-1}(F), \quad \text{per ogni } g_1 \in U_e, g_2 \in U_g.$$

Consideriamo gli insiemi:

$$\tilde{U}_g = \pi^{-1}(\pi(U_g)) \text{ e } \tilde{V} = \bigcup \{R_a(U_e) \mid a \in \pi^{-1}(F)\} = \bigcup \{L_a(\pi^{-1}(F)) \mid a \in U_e\}.$$

Poiché π è aperta, il primo è un aperto saturo che contiene g , il secondo un aperto saturo che contiene $\pi^{-1}(F)$. Dimostriamo che $\tilde{U}_g \cap \tilde{V} = \emptyset$. Se così non fosse, potremmo trovare $g_1 \in U_g, g_2 \in \mathbf{H}, g_3 \in U_e, g_4 \in \pi^{-1}(F)$ tali che $g_1g_2 = g_3g_4$.

Ma questa relazione implicherebbe che $g_3^{-1}g_1 = g_4g_2^{-1} \in \pi^{-1}(F)$, contraddicendo la scelta di U_e e U_g .

Ciò dimostra che \mathbf{G}/\mathbf{H} soddisfa anche l'assioma T_3 e quindi è regolare. \square

DEFINIZIONE 3.2.12. Un gruppo topologico \mathbf{G} in cui $\{e\}$ sia un sottoinsieme chiuso si dice *separato*. Per il teorema precedente, questa condizione equivale al fatto che \mathbf{G} sia uno spazio topologico regolare.

Se \mathbf{G} è un gruppo topologico, per il Teorema 3.2.10, la chiusura $\overline{\{e\}}$ di $\{e\}$ è un sottogruppo chiuso normale di \mathbf{G} e quindi $\mathbf{G}/\overline{\{e\}}$, con la topologia quoziente, è un gruppo topologico separato. Esso si dice il *separato* di \mathbf{G} e si indica con \mathbf{G}_{sep} .

TEOREMA 3.2.13. *Se \mathbf{G} è un gruppo topologico separato, allora la chiusura di un suo sottogruppo abeliano è ancora un sottogruppo abeliano.*

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathbf{A} un sottogruppo abeliano di \mathbf{G} . Fissato un elemento a di \mathbf{G} l'applicazione $f_a : \mathbf{G} \ni x \rightarrow [a, x] = axa^{-1}x^{-1} \in \mathbf{G}$ è continua. Inoltre, $f_a(\mathbf{A}) = \{e\}$, per ogni $a \in \mathbf{A}$, perché \mathbf{A} è abeliano. Per l'ipotesi che $\{e\}$ sia chiuso,

³Uno spazio topologico X soddisfa l'assioma di separazione T_1 se tutti i suoi sottoinsiemi finiti sono chiusi; soddisfa l'assioma di separazione T_3 se dati un punto a ed un chiuso A di X che non contenga a , esistono aperti disgiunti U e V con $a \in U$ e $A \subset V$; è regolare se soddisfa entrambi gli assiomi T_1 e T_3 .

$f_a^{-1}(e)$ è un chiuso che contiene \mathbf{A} . Quindi $ax = xa$ per ogni $x \in \overline{\mathbf{A}}$ ed ogni $a \in \mathbf{A}$, ma questo equivale al fatto che $f_a(x) = e$ per ogni $a \in \overline{\mathbf{A}}$ ed ogni $x \in \mathbf{A}$. Poiché $\{e\}$ è un chiuso di \mathbf{G} , per ogni $a \in \overline{\mathbf{A}}$, l'insieme $f_a^{-1}(e)$ è un chiuso che contiene \mathbf{A} : perciò $f_a^{-1}(e) \supset \overline{\mathbf{A}}$ per ogni $a \in \overline{\mathbf{A}}$, cioè $\overline{\mathbf{A}}$ è abeliano. \square

Più in generale, abbiamo:

PROPOSIZIONE 3.2.14. *Se \mathbf{G} è un gruppo separato ed E un sottoinsieme di \mathbf{G} , il centralizzatore*

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(E) = \{g \in \mathbf{G} \mid \text{ad}_g(x) = x, \forall x \in E\}$$

di E in \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di \mathbf{G} .

DIMOSTRAZIONE. Infatti, con la notazione del teorema precedente:

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(E) = \bigcap_{x \in E} f_x^{-1}(e)$$

è chiuso perché intersezione di chiusi. \square

PROPOSIZIONE 3.2.15. *Se \mathbf{H} è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico \mathbf{G} , allora il normalizzatore di \mathbf{H} in \mathbf{G}*

$$\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}) = \{g \in \mathbf{G} \mid \text{ad}_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}\}$$

è un sottogruppo chiuso di \mathbf{G} .

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $g \in \mathbf{G}$ l'applicazione $\lambda_g : \mathbf{G} \ni x \rightarrow xgx^{-1} \in \mathbf{G}$ è continua. Quindi il normalizzatore $\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}) = \bigcap_{h \in \mathbf{H}} \lambda_h^{-1}(\mathbf{H})$ è chiuso perché intersezione di chiusi. \square

PROPOSIZIONE 3.2.16. *Sia \mathbf{H} un sottogruppo di un gruppo topologico \mathbf{G} . Allora:*

- (1) \mathbf{H} è chiuso se e soltanto se è localmente chiuso in un punto;
- (2) \mathbf{H} è aperto se e soltanto se contiene un punto interno;
- (3) \mathbf{H} è discreto se e soltanto se ha un punto isolato.

Un sottogruppo discreto di un gruppo separato è chiuso.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che \mathbf{H} è localmente chiuso in un suo punto h se esiste un intorno aperto U di h in \mathbf{G} tale che $\mathbf{H} \cap U$ sia chiuso in U , cioè $\overline{\mathbf{H}} \cap U = \mathbf{H} \cap U$. Poiché le traslazioni a destra e a sinistra sono omeomorfismi, se \mathbf{H} è localmente chiuso in h è anche localmente chiuso in $e = \mathbf{R}_{h^{-1}}(h)$. Possiamo quindi trovare un intorno aperto U di e tale che $\mathbf{H} \cap U$ sia chiuso in U . Poiché anche $\mathbf{H} \cap U \cap U^{-1}$ è chiuso in $U \cap U^{-1}$, non è restrittivo supporre che $U = U^{-1}$. Sia ora $x \in \overline{\mathbf{H}}$. Allora $(xU) \cap \mathbf{H}$ non è vuoto: possiamo quindi fissare un elemento $y \in \mathbf{H}$ e un $g \in U$ tali che $xg = y$. Osserviamo che

$$y^{-1}x = L_{y^{-1}}(x) \in L_{y^{-1}}(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{L_{y^{-1}}(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}}$$

e quindi $y^{-1}x = g^{-1} \in \overline{\mathbf{H}} \cap U = \mathbf{H} \cap U$ implica che $x = yg^{-1} \in \mathbf{H}$. Abbiamo così dimostrato che $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$, cioè che \mathbf{H} è chiuso.

Poiché ogni chiuso è localmente chiuso, la (1) è completamente dimostrata. La (2) e la (3) sono immediate e l'osservazione finale segue dalla (1).

TEOREMA 3.2.17. *Ogni intorno dell'identità di un gruppo connesso è un insieme di generatori del gruppo.*

DIMOSTRAZIONE. Siano \mathbf{G} un gruppo topologico connesso ed U un intorno dell'identità e di \mathbf{G} , che possiamo prendere aperto. Se $U^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in U\}$, allora anche $V = U \cap U^{-1}$ è un intorno aperto dell'identità. L'insieme

$$\mathbf{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n, \quad \text{con } V^n = \{x_1 \cdots x_n \mid x_i \in V\},$$

è un sottogruppo aperto di \mathbf{G} . Esso è anche chiuso per il Teorema 3.2.7 e quindi coincide con \mathbf{G} perché \mathbf{G} è connesso. \square

TEOREMA 3.2.18. *Un gruppo topologico separato e localmente compatto è paracompatto, e quindi, in particolare, uno spazio topologico normale⁴.*

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathbf{G} un gruppo topologico separato localmente compatto. Se $A \subset \mathbf{G}$, poniamo

$$A^n = \{x_1 \cdots x_n \mid a_i \in A\} \quad \text{e} \quad A^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in A\}.$$

Fissiamo un intorno aperto V di e con $V = V^{-1}$ e \bar{V} compatto. Per ogni n , \bar{V}^n è compatto, perché immagine del compatto $\bar{V} \times \cdots \times \bar{V}$ (n volte) mediante l'applicazione continua $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_1 \cdots x_n$.

Osserviamo poi che $\bar{V} \subset V^2$: infatti per ogni $g \in \bar{V}$ è $gV \cap V \neq \emptyset$; otteniamo perciò $gx_1 = x_2$ con $x_1, x_2 \in V$ e quindi $g = x_1^{-1}x_2 \in V^2$ perché $V^{-1} = V$.

Da questa relazione segue che il sottogruppo

$$\mathbf{G}_0 = \bigcup_n \bar{V}^n = \bigcup_n V^n.$$

di \mathbf{G} è aperto, e perciò anche chiuso per il Teorema 3.2.7, ed è paracompatto perché localmente compatto e unione numerabile di compatti. Ne segue che \mathbf{G} , unione disgiunta delle classi laterali $g\mathbf{G}_0$ ($g \in \mathbf{G}$) di \mathbf{G}_0 , è paracompatto. \square

COROLLARIO 3.2.19. *Siano \mathbf{G} un gruppo topologico separato e localmente compatto ed \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso. Allora lo spazio omogeneo \mathbf{G}/\mathbf{H} è separato, localmente compatto, paracompatto, ed in particolare uno spazio topologico normale.*

DIMOSTRAZIONE. Lo spazio omogeneo \mathbf{G}/\mathbf{H} è regolare perché \mathbf{H} , essendo compatto in uno spazio di Hausdorff, è chiuso; inoltre è localmente compatto perché immagine di uno spazio localmente compatto mediante un'applicazione aperta. Infine, con la notazione introdotta nella dimostrazione del teorema precedente, osserviamo che le orbite $\mathbf{G}_0 \cdot p$ ($p \in \mathbf{G}/\mathbf{H}$) di \mathbf{G}_0 in \mathbf{G}/\mathbf{H} sono aperte e paracompatte (i sottoinsiemi $\bar{V}^n \cdot p$ formano una successione di compatti la cui unione è l'orbita $\mathbf{G}_0 \cdot p$) e quindi \mathbf{G}/\mathbf{H} è paracompatto perché unione disgiunta di spazi paracompatti. \square

⁴Ricordiamo che uno spazio topologico X è *paracompatto* se è di Hausdorff ed ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento chiuso localmente finito. Uno spazio di Hausdorff localmente compatto è paracompatto se e soltanto se è unione disgiunta di sottospazi che sono ciascuno un'unione numerabile di compatti. Lo spazio topologico X si dice *normale* se è di Hausdorff e chiusi disgiunti hanno intorni aperti disgiunti. Ogni spazio topologico paracompatto è normale.

3.2.3. Omomorfismi.

TEOREMA 3.2.20. *Siano \mathbf{G}_1 e \mathbf{G}_2 gruppi topologici e $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ un omomorfismo di gruppi. Condizione necessaria e sufficiente affinché ϕ sia continua è che essa sia continua nell'identità.*

DIMOSTRAZIONE. La condizione è ovviamente necessaria. Dimostriamo la sufficienza. Siano $g \in \mathbf{G}_1$ e V un intorno aperto di $\phi(g)$ in \mathbf{G}_2 . Allora $(\phi(g))^{-1}V$ è un intorno aperto dell'identità e_2 di \mathbf{G}_2 e, per l'ipotesi che ϕ fosse continua nell'identità, possiamo trovare un intorno aperto U dell'identità e_1 di \mathbf{G}_1 tale che $\phi(U) \subset V$. Il traslato gU è un intorno aperto di g in \mathbf{G}_1 e risulta

$$\phi(gh) = \phi(g)\phi(h) \in \phi(g)\left((\phi(g))^{-1}V\right) = V \quad \forall h \in U,$$

onde $\phi(gU) \subset V$. Quindi ϕ è continua in ogni punto $g \in \mathbf{G}_1$ e perciò continua. \square

DEFINIZIONE 3.2.21. Un omomorfismo di gruppi topologici è un'applicazione continua $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ che sia anche un omomorfismo di gruppi.

Se, in più, ϕ è un omeomorfismo di spazi topologici, essa è anche un isomorfismo di gruppi e si dice un *isomorfismo topologico*.

Un omomorfismo di gruppi topologici iniettivo (risp. surgettivo) si dice un *monomorfismo topologico* (risp. *epimorfismo topologico*).

Indichiamo con $\mathcal{A}ut_c(\mathbf{G})$ l'insieme degli isomorfismi topologici del gruppo topologico \mathbf{G} in sè.

Si verifica facilmente che $\mathcal{A}ut_c(\mathbf{G})$ è un gruppo per l'operazione di composizione di applicazioni. Se \mathbf{G} è localmente compatto, $\mathcal{A}ut_c(\mathbf{G})$ è un gruppo topologico con la topologia $\tau_{\mathbf{G}}$ definita nel §3.2.1; questa coincide con la topologia compatta-aperta se \mathbf{G} è anche localmente compatto. \square

TEOREMA 3.2.22. *Un epimorfismo topologico $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ è un'applicazione aperta se e soltanto se il suo quoziente iniettivo*

$$\hat{\phi} : \mathbf{G}_1/\ker \phi \rightarrow \mathbf{G}_2$$

è un isomorfismo topologico.

DIMOSTRAZIONE. Ciò è conseguenza del fatto che la proiezione nel quoziente $\mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_1/\ker \phi$ è un'applicazione aperta. \square

TEOREMA 3.2.23. *Se \mathbf{G}_1 e \mathbf{G}_2 sono gruppi topologici compatti e \mathbf{G}_2 è separato, allora ogni epimorfismo topologico $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ è un'applicazione aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ un epimorfismo topologico. Poiché \mathbf{G}_2 è separato, $\ker \phi$ è un sottogruppo normale chiuso di \mathbf{G}_1 . Ne segue, passando al quoziente iniettivo, che l'applicazione

$$\hat{\phi} : \mathbf{G}_1/\ker \phi \rightarrow \mathbf{G}_2$$

è continua e bigettiva tra spazi compatti di Hausdorff e dunque un omeomorfismo. La tesi segue allora dal teorema precedente. \square

ESEMPIO 3.2.24. Sia \mathbb{H} il corpo dei quaternioni, che possiamo identificare alla sottoalgebra dell'algebra delle matrici 2×2 a coefficienti complessi formata dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{C}.$$

Le matrici di \mathbb{H} con determinante 1 formano un gruppo moltiplicativo, che è un gruppo topologico per la topologia definita dall'identificazione standard con la sfera $S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Esso è un gruppo topologico separato e compatto, che si indica con $\mathbf{SU}(2)$. Il suo sottogruppo $\{I, -I\}$ è un sottogruppo chiuso normale e il gruppo quoziente $\mathbf{SU}(2)/\{\pm I\}$ è omeomorfo ad $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ e ad $\mathbf{SO}(3)$.

TEOREMA 3.2.25. *Se \mathbf{H} è un sottogruppo normale di un gruppo topologico \mathbf{G} , allora \mathbf{G}/\mathbf{H} è un gruppo topologico per la topologia quoziente e l'omomorfismo $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}$ è un omomorfismo di gruppi topologici. Inoltre:*

- (1) \mathbf{G}/\mathbf{H} è separato se e soltanto se \mathbf{H} è chiuso in \mathbf{G} ;
- (2) \mathbf{G}/\mathbf{H} è discreto se e soltanto se \mathbf{H} è aperto in \mathbf{G} ;
- (3) se \mathbf{H} è discreto, allora la proiezione nel quoziente $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}$ è un omeomorfismo locale. \square

3.2.4. Rivestimenti.

TEOREMA 3.2.26. *Se \mathbf{G} è un gruppo topologico connesso e localmente connesso per archi, allora il gruppo fondamentale $\pi_1(\mathbf{G})$ è commutativo.*

Sia $\hat{\mathbf{G}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}$ un rivestimento connesso di \mathbf{G} . Fissato un punto $\hat{e} \in \pi^{-1}(e)$, vi è un'unica struttura di gruppo topologico su $\hat{\mathbf{G}}$ per cui \hat{e} sia l'identità di $\hat{\mathbf{G}}$ e π sia un omomorfismo di gruppi topologici.

DIMOSTRAZIONE. Se $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbf{G}$ sono cammini continui con $\alpha(0) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(1) = e$, consideriamo l'applicazione continua:

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \ni (t, s) \rightarrow \alpha(t) \cdot \beta(s) \in \mathbf{G}.$$

Allora

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \begin{cases} F(2t, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(1, 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e

$$(\beta \cdot \alpha)(t) = \begin{cases} F(0, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(2t - 1, 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e possiamo definire un'omotetia tra $\alpha \cdot \beta$ e $\beta \cdot \alpha$ mediante:

$$G(s, t) = \begin{cases} F((1-s)2t, 2st) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F((1-s) + s(2t-1), s + (1-s)(2t-1)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ciò dimostra che $\pi_1(\mathbf{G})$ è un gruppo abeliano.

Sia ora $\pi : \hat{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ un rivestimento connesso di \mathbf{G} . Osserviamo che $\hat{\mathbf{G}}$ è connesso per archi.

Per ogni $\hat{g} \in \hat{\mathbf{G}}$ indichiamo con $\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{g})$ il gruppo fondamentale di $\hat{\mathbf{G}}$ con punto base \hat{g} . Dimostriamo innanzitutto il seguente:

LEMMA 3.2.27. Sia $g \in \mathbf{G}$ e sia $\hat{g} \in \pi^{-1}(g)$. Allora per ogni $\xi \in \pi_*(\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{e}))$ risulta $L_{g_*}(\xi) \in \pi_*(\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{g}))$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\hat{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$ un laccetto con $\hat{\alpha}(0) = \hat{\alpha}(1) = \hat{e}$ e poniamo $\alpha = \pi \circ \hat{\alpha}$. Dobbiamo dimostrare che il laccetto $L_g \circ \alpha : [0, 1] \ni t \rightarrow L_g(\alpha(t)) \in \mathbf{G}$, si rialza a un laccetto di punto iniziale \hat{g} .

Sia $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$ un cammino continuo con estremi \hat{e} e \hat{g} e sia $\gamma = \pi \circ \hat{\gamma}$. Consideriamo l'applicazione continua:

$$[0, 1] \times [0, 1] \ni (t, s) \rightarrow G(t, s) = \gamma(s) \cdot \alpha(t) \in \mathbf{G}.$$

Essa si rialza ad un'applicazione continua $\hat{G}(t, s)$ e $t \rightarrow \hat{G}(t, 1)$ rialza $L_g \circ \alpha$. Per dimostrare che questo è un laccetto, consideriamo l'insieme A degli $s \in [0, 1]$ tali che $\hat{G}(0, s) = \hat{G}(1, s)$. Esso contiene 0, è chiuso perché $\hat{\mathbf{G}}$ è uno spazio di Hausdorff, ed è aperto perché $\pi \circ \hat{G}(0, s) = \gamma(s) = \pi \circ \hat{G}(1, s)$ e $\hat{\mathbf{G}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}$ è un rivestimento. Coincide quindi con $[0, 1]$: in particolare $\hat{G}(0, 1) = \hat{G}(1, 1)$ e $t \rightarrow \hat{G}(t, 1)$ è un laccetto. \square

CONCLUSIONE DELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 7.1

Siano \hat{g}_1 e \hat{g}_2 due elementi di $\hat{\mathbf{G}}$ e siano $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$ cammini continui con $\hat{\alpha}_i(0) = \hat{\beta}_i(0) = \hat{e}$, $\hat{\alpha}_i(1) = \hat{\beta}_i(1) = \hat{g}_i$, per $i = 1, 2$. Poniamo $\alpha_i = \pi \circ \hat{\alpha}_i$, $\beta_i = \pi \circ \hat{\beta}_i$ ($i = 1, 2$). Consideriamo i cammini continui $\alpha : [0, 1] \ni t \rightarrow \alpha_1(t)\alpha_2(t) \in \mathbf{G}$ e $\beta : [0, 1] \ni t \rightarrow \beta_1(t)\beta_2(t) \in \mathbf{G}$ e siano $\hat{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$ e $\hat{\beta} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$ i loro rialzamenti con punto iniziale \hat{e} . Dimostriamo che $\hat{\alpha}(1) = \hat{\beta}(1)$. A questo scopo osserviamo che

$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha_1(t+st) \cdot \alpha_2(t-st) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_1(s+t-st) \cdot \alpha_2(t+st-s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è un'omotetia tra α e

$$\alpha' = \alpha_1 \cdot (L_{g_1} \circ \alpha_2) = \begin{cases} \alpha_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1 \cdot \alpha_2(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Se indichiamo con $\hat{\alpha}'$ il rilevamento di α' con punto iniziale \hat{e} , avremo quindi $\hat{\alpha}'(1) = \hat{\alpha}(1)$. Analogamente, posto

$$\beta' = \beta_1 \cdot (L_{g_1} \circ \beta_2) = \begin{cases} \beta_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1 \cdot \beta_2(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

i rilevamenti $\hat{\beta}$ e $\hat{\beta}'$ di β e β' con punto iniziale \hat{e} hanno lo stesso punto finale in $\hat{\mathbf{G}}$.

Osserviamo ora che i punti finali di $\hat{\alpha}$ e di $\hat{\beta}$ sono i punti finali dei rialzamenti dei cammini $L_{g_1} \circ \alpha_2$ e $L_{g_1} \circ \beta_2$ con punto iniziale \hat{g}_1 . Questi coincidono perché $(L_{g_1} \circ \alpha_2) \cdot (L_{g_1} \circ \beta_2)^{-1} = L_{g_1} \circ (\alpha_2 \cdot \beta_2^{-1})$ è l'immagine mediante la traslazione a sinistra per g_1 del laccetto $\alpha_2 \cdot \beta_2^{-1}$, che per ipotesi è immagine mediante π di un laccetto in $\hat{\mathbf{G}}$ di punto iniziale \hat{e} . Per il Lemma 3.2.27, esso è allora l'immagine di un laccetto di punto iniziale \hat{g}_1 in $\hat{\mathbf{G}}$.

Possiamo quindi definire:

$$\hat{g}_1 \hat{g}_2 = \hat{\alpha}(1)$$

in quanto la definizione non dipende dalla scelta dei cammini α_1 e β_1 che congiungono \hat{e} ai punti \hat{g}_1, \hat{g}_2 rispettivamente.

Si verifica poi senza difficoltà che con questa definizione di prodotto $\hat{\mathbf{G}}$ è un gruppo topologico con unità \hat{e} e che $\pi : \hat{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ è un omomorfismo di gruppi. \square

3.2.5. Caratteri.

DEFINIZIONE 3.2.28. Un *carattere* di un gruppo topologico \mathbf{G} è un omomorfismo continuo $\chi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{S}^1$ di \mathbf{G} nel gruppo moltiplicativo \mathbf{S}^1 dei numeri complessi di modulo 1.

L'insieme \mathbf{G}' dei caratteri di \mathbf{G} è un gruppo abeliano rispetto all'operazione di moltiplicazione di funzioni: la funzione $1_{\mathbf{G}}$, costantemente uguale ad 1 su \mathbf{G} , è l'identità di \mathbf{G}' .

Si verifica facilmente che vale il:

TEOREMA 3.2.29. *Se \mathbf{G} è un gruppo topologico, anche il gruppo \mathbf{G}' dei suoi caratteri è un gruppo topologico per la topologia compatta-aperta. Se \mathbf{G} è separato, anche \mathbf{G}' è separato.* \square

TEOREMA 3.2.30. *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico localmente compatto e separato. Allora anche \mathbf{G}' è localmente compatto e separato. Inoltre, se \mathbf{G} è a base numerabile, anche \mathbf{G}' è a base numerabile. Se \mathbf{G} è compatto e separato, allora \mathbf{G}' è discreto. Se \mathbf{G} è discreto, allora \mathbf{G}' è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Se \mathbf{G} è compatto,

$$U(\mathbf{G}, \mathbf{S}_\epsilon) = \{\chi \in \mathbf{G}' \mid \text{Arg}(\chi(g)) \in (-\epsilon, \epsilon) \quad \forall g \in \mathbf{G}\}$$

è un aperto di \mathbf{G}' . Se $\epsilon < \pi/2$, il suo unico elemento è $1_{\mathbf{G}}$. Quindi $\{1_{\mathbf{G}}\}$ è aperto e \mathbf{G}' ha la topologia discreta.

Se \mathbf{G} è discreto, allora l'applicazione $\mathbf{G}' \ni \chi \rightarrow (\chi(g))_{g \in \mathbf{G}} \in [\mathbf{S}^1]^{\mathbf{G}}$ è un'immersione di \mathbf{G}' in un sottospazio chiuso di $[\mathbf{S}^1]^{\mathbf{G}}$, e quindi \mathbf{G}' è compatto in quanto sottospazio chiuso di uno spazio compatto. \square

3.3. Azioni continue

Sia \mathbf{G} un gruppo topologico con identità e .

DEFINIZIONE 3.3.1. Un \mathbf{G} -spazio a destra è uno spazio topologico E per cui sia definita un'applicazione continua, che chiameremo *azione continua di \mathbf{G} su E* ,

$$(3.10) \quad E \times \mathbf{G} \ni (v, x) \longrightarrow v \cdot x \in E$$

con le proprietà

- (i) $(v \cdot x_1)x_2 = v \cdot (x_1x_2), \quad \forall v \in E, x_1, x_2 \in \mathbf{G},$
- (ii) $v \cdot e = v \quad \forall v \in E.$

In modo analogo si definisce un \mathbf{G} -spazio a sinistra.

Osserviamo che un \mathbf{G} spazio a sinistra E è un \mathbf{G} -spazio a destra per l'azione $E \times \mathbf{G} \ni (v, x) \rightarrow x^{-1} \cdot v \in E$ e, viceversa, un \mathbf{G} -spazio a destra E è un \mathbf{G} -spazio a sinistra per l'azione $\mathbf{G} \times E \ni (x, v) \rightarrow v \cdot x^{-1} \in E$.

Nella discussione seguente, ci limiteremo a considerare \mathbf{G} -spazi a destra: risultati analoghi varranno anche per i \mathbf{G} -spazi a sinistra.

PROPOSIZIONE 3.3.2. *Sia E un \mathbf{G} -spazio. Allora*

- (1) *per ogni $x \in \mathbf{G}$ l'applicazione $E \ni v \rightarrow v \cdot x \in E$ è un omeomorfismo;*
- (2) *la proiezione nel quoziente $\pi : E \rightarrow E/\mathbf{G}$ è un'applicazione aperta;*
- (3) *se E è di Hausdorff compatto e \mathbf{G} compatto, allora la proiezione nel quoziente $\pi : E \rightarrow E/\mathbf{G}$ è anche chiusa.*

Ricordiamo che E/\mathbf{G} è lo spazio delle orbite di \mathbf{G} in E . Il quoziente è definito dalla relazione di equivalenza $v \sim v \cdot x$ per $v \in E$ ed $x \in \mathbf{G}$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Indichiamo con $\tau_x \in \mathcal{C}(E, E)$ l'applicazione continua $v \rightarrow v \cdot x$. Per le proprietà (i) ed (ii) è $\tau_x \circ \tau_{x^{-1}} = \tau_{x^{-1}} \circ \tau_x = \text{id}_E$. Quindi τ_x ha un'inversa continua ed è perciò un omeomorfismo.

(2) Se U è un aperto di E , allora

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{x \in \mathbf{G}} \tau_x(U)$$

è aperto perché unione d'aperti. Infatti tutti i traslati $\tau_x(U)$ sono aperti, in quanto le τ_x sono, per il punto (i), degli omeomorfismi.

(3) Supponiamo ora che \mathbf{G} ed E siano compatti, e che, inoltre, E sia di Hausdorff. Allora i chiusi di E sono tutti e soli i suoi sottoinsiemi compatti. Se K è un chiuso di E , allora $\pi^{-1}(\pi(K)) = \{x \cdot v \mid x \in \mathbf{G}, v \in K\}$ è compatto perché immagine del compatto $K \times \mathbf{G}$ mediante l'applicazione continua $E \times \mathbf{G} \rightarrow E$ che definisce l'azione del gruppo e quindi chiuso perché i compatti di uno spazio di Hausdorff sono chiusi. \square

PROPOSIZIONE 3.3.3. *Se E è un \mathbf{G} -spazio, allora $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$, con B uguale allo spazio E/\mathbf{G} delle orbite di \mathbf{G} in E e π alla proiezione canonica nel quoziente, è un fibrato.* \square

Siano \mathbf{G}_1 e \mathbf{G}_2 due gruppi topologici e $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ un omomorfismo continuo.

DEFINIZIONE 3.3.4. Dati due \mathbf{G}_i -spazi E_i ($i = 1, 2$), un ϕ -omomorfismo di E_1 in E_2 è un'applicazione continua $f \in \mathcal{C}(E_1, E_2)$ che soddisfa

$$f(v \cdot x) = f(v) \cdot \phi(x), \quad \text{per ogni } v \in E_1 \text{ ed } x \in \mathbf{G}_1.$$

Se $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}$ e ϕ è l'identità, una $f \in \mathcal{C}(E_1, E_2)$ che commuti con l'azione di \mathbf{G} si dice un \mathbf{G} -omomorfismo, o applicazione \mathbf{G} -equivariante.

Se inoltre f è un omeomorfismo, anche la sua inversa è un \mathbf{G} -omomorfismo. Diremo, in questo caso, che f è un \mathbf{G} -isomorfismo.

3.4. Azioni di gruppo su un fibrato

Sia ξ un fibrato.

DEFINIZIONE 3.4.1. Una \mathbf{G} -struttura su ξ è il dato di un'azione continua di \mathbf{G} sulle fibre di ξ , cioè di un'applicazione continua

$$E(\xi) \times \mathbf{G} \ni (v, x) \longrightarrow v \cdot x \in E(\xi), \quad \text{con } \pi_{\xi}(v \cdot x) = \pi(v), \quad \forall v \in E, \forall x \in \mathbf{G}$$

tale che l'applicazione indotta sulle basi

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \pi \swarrow & & \searrow \pi_{\xi} \\ E/\mathbf{G} & \text{-----} & B(\xi) \end{array}$$

sia un omeomorfismo.

Richiediamo cioè che la topologia sulla base di ξ sia la più fine per cui la proiezione π_{ξ} sia continua.

OSSERVAZIONE 3.4.2. Sia \mathbf{H} un sottogruppo del gruppo topologico \mathbf{G} . Il quoziente \mathbf{G}/\mathbf{H} è uno spazio omogeneo, su cui \mathbf{G} opera transitivamente per traslazioni a sinistra. Possiamo considerare $\xi = (\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} (\mathbf{G}/\mathbf{H}))$ come un \mathbf{H} -fibrato per l'azione *a destra*

$$\mathbf{G} \times \mathbf{H} \ni (x, h) \longrightarrow xh \in \mathbf{G}.$$

DEFINIZIONE 3.4.3. Un \mathbf{G} -fibrato ξ si dice *principale* se è localmente banale e se l'azione di \mathbf{G} su ciascuna delle fibre è semplicemente transitiva.

I fibrati nell'Osservazione 3.4.2 sono esempi di fibrati principali.

3.5. Fibrati di Steenrod e fibrati principali

3.5.1. G-spazi a sinistra. In questo paragrafo sarà più conveniente considerare azioni a sinistra. Ricordiamo che F è un \mathbf{G} -spazio a sinistra se su di esso è definita un'azione continua

$$\mathbf{G} \times F \ni (x, v) \longrightarrow x \cdot v \in F \quad \text{con} \quad \begin{cases} e \cdot v = v, & \forall v \in F, \\ x_1(x_2 \cdot v) = (x_1 x_2) \cdot v, & \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}, \forall v \in F. \end{cases}$$

Diciamo che F è un \mathbf{G} -spazio *fedele* se l'azione di \mathbf{G} su F è fedele, se cioè

$$x \cdot v = v, \quad \forall v \in F \implies x = e.$$

Nel caso di un'azione fedele, identificheremo spesso \mathbf{G} al gruppo di omeomorfismi di F definiti dai suoi elementi.

OSSERVAZIONE 3.5.1. Sia F un \mathbf{G} -spazio su cui \mathbf{G} operi transitivamente. Fissiamo un punto $v_0 \in F$ e sia \mathbf{H} lo stabilizzatore di v_0 . Per passaggio al quoziente dalla $x \rightarrow x \cdot v_0$, otteniamo, per passaggio al quoziente iniettivo, una \mathbf{G} -applicazione bigettiva e continua $f : \mathbf{G}/\mathbf{H} \rightarrow F$. In generale, non è detto che questa sia un omeomorfismo, e quindi un \mathbf{G} -isomorfismo.

Ciò vale senz'altro nel caso in cui \mathbf{G} sia compatto ed F di Hausdorff, perché un'applicazione continua e bigettiva tra spazi di Hausdorff compatti è anche un omeomorfismo.

Siano F un \mathbf{G} -spazio a sinistra ed X uno spazio topologico. A meno di sostituire a \mathbf{G} il suo quoziente rispetto al nucleo d'infedeltà della sua rappresentazione come gruppo di omeomorfismi di F , supporremo per semplicità che l'azione sia fedele ed identificheremo \mathbf{G} ad un sottogruppo di $\mathbf{S}(F)$.

ESEMPIO 3.5.2. Lo spazio proiettivo $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ è un $\mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ -spazio per il quoziente dell'azione di $\mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Il nucleo d'infedeltà è formato dalle matrici diagonali e possiamo allora considerare $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ come un \mathbf{G} -spazio fedele per l'azione di $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{R})/\Delta_{n+1}(\mathbb{R})$.

3.5.2. F -strutture. Sia X uno spazio topologico.

DEFINIZIONE 3.5.3. Una F -struttura su X è il dato di una famiglia non vuota $\mathcal{D}(F, X)$ di omeomorfismi di F su X tali che

- (i) $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2 \in \mathbf{G}, \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{D}(F, X),$
- (ii) $\sigma \circ a \in \mathcal{D}(F, X), \quad \forall \sigma \in \mathcal{D}(F, X), \forall a \in \mathbf{G}.$

Chiamiamo gli elementi di $\mathcal{D}(F, X)$ *omeomorfismi distinti*.

ESEMPIO 3.5.4. Possiamo considerare \mathbb{R}^m come un $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ -spazio fedele per l'azione standard del gruppo lineare. Se V è uno spazio vettoriale reale di dimensione m , la

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^m, V) = \{\text{isomorfismi lineari } \mathbb{R}^m \rightarrow V\}$$

è una \mathbb{R}^m -struttura su V . Fissare un omeomorfismo distinto equivale a fissare una base di \mathbb{R}^m . Possiamo quindi considerare $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m, V)$ come l'insieme dei *sistemi di riferimento* di V .

Con l'azione standard su \mathbb{R}^m di uno dei gruppi lineari $\mathbf{GL}_m^+(\mathbb{R}), \mathbf{SL}_m(\mathbb{R}), \mathbf{O}(m), \mathbf{SO}(m)$, una \mathbb{R}^m -struttura su V corrisponde ad una scelta dell'orientazione, del volume, della struttura ortogonale, della struttura ortogonale e dell'orientazione su V , rispettivamente.

Analoghi esempi si possono fare scegliendo $F = \mathbb{C}^m$ e \mathbf{G} uguale ad uno dei gruppi $\mathbf{GL}_m(\mathbb{C}), \mathbf{SL}_m(\mathbb{C}), \mathbf{U}(m), \mathbf{SU}(m)$.

3.5.3. F -fibrati in senso debole.

DEFINIZIONE 3.5.5. Chiamiamo *F -fibrato in senso debole* un fibrato ξ in cui su ogni fibra sia assegnata, in modo continuo, una F -struttura.

Ciò significa che è assegnata una famiglia continua di *omeomorfismi distinti* $\mathcal{D}_F(\xi) \subset \mathcal{C}(F, E(\xi))$ con

- (i) $\pi_\xi(\sigma(v_1)) = \pi_\xi(\sigma(v_2)), \quad \forall \sigma \in \mathcal{D}_F(\xi), \quad \forall v_1, v_2 \in F;$
- (ii) $\mathcal{D}(F, E_b(\xi)) = \{\sigma \in \mathcal{D}_F(\xi) \mid \pi_\xi(\sigma(F)) = \{b\}\}$ è un' F -struttura su $E_b(\xi),$
 $\forall b \in B(\xi).$

Chiamiamo F la *fibra standard* e \mathbf{G} il *gruppo strutturale* di ξ . La

$$(3.11) \quad \mathcal{D}_F(\xi) \times \mathbf{G} \ni (\sigma, a) \longrightarrow \sigma \circ a \in \mathcal{D}_F(\xi)$$

è un'azione naturale a destra di \mathbf{G} su $\mathcal{D}_F(\xi)$.

Se $F = \mathbf{G}$, con \mathbf{G} che opera su se stesso per traslazioni a sinistra, chiamiamo una tale \mathbf{G} -struttura \mathbf{G} -*principale* e ξ un *fibrato \mathbf{G} -principale in senso debole*.

Ad un F -fibrato in senso debole ξ possiamo associare in modo canonico un fibrato \mathbf{G} -principale in senso debole $P(\xi)$ con

$$(3.12) \quad B(P(\xi)) = B(\xi), \quad E(P(\xi)) = \mathcal{D}_F(\xi) \quad \text{e} \quad \pi_{P(\xi)}(\sigma) = \pi_\xi(\sigma(v_0)),$$

ove v_0 è un qualsiasi punto della fibra tipica F . La (3.11) definisce un'azione canonica (a destra) di \mathbf{G} sulle fibre di $P(\xi)$. Lo spazio $\mathcal{D}_F(\xi)$ ha una topologia naturale di sottospazio di $\mathcal{C}(F, E(\xi))$, rispetto alla quale la proiezione $\pi_{P(\xi)}$ è continua.

DEFINIZIONE 3.5.6. Diciamo che $P(\xi)$ è il fibrato \mathbf{G} -principale (in senso debole) associato all' F -fibrato (in senso debole) ξ .

ESEMPIO 3.5.7. Possiamo considerare \mathbb{R}^m come uno $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ -spazio fedele per l'azione canonica del gruppo lineare. Se M è una varietà differenziabile di dimensione m , il suo fibrato tangente $\tau(M) = (\pi : TM \rightarrow M)$ ha una \mathbb{R}^m -struttura naturale, in cui, per ogni $p \in M$,

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^m, T_p M) = \{\sigma : \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M \mid \sigma \text{ è un isomorfismo lineare}\}.$$

In questo caso $P(\tau(M))$ consiste degli isomorfismi lineari σ di \mathbb{R}^m sullo spazio tangente $T_p M$ in un punto p di M . Le σ sono determinate dalle immagini dei vettori e_1, \dots, e_m della base canonica di \mathbb{R}^m . Possiamo quindi identificare $P(\tau(M))$ al fibrato gli elementi della cui fibra in p sono le basi di $T_p M$, cioè al fibrato dei *sistemi di riferimento*.

Chiaramente, se U è un aperto di B , la restrizione $\xi|_U$ di ξ ad U è ancora un F -fibrato con gruppo strutturale \mathbf{G} se tale era ξ .

DEFINIZIONE 3.5.8. Se $\xi_i = (E_i \xrightarrow{\pi_i} B_i)$, $i = 1, 2$, sono F -fibrati, un morfismo di fibrati $f : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è un F -*morfismo* se

$$(3.13) \quad f_E \circ \sigma \in \mathcal{D}_F(\xi_2), \quad \forall \sigma \in \mathcal{D}_F(\xi_1).$$

Osserviamo che un F -morfismo si restringe, su ciascuna fibra di ξ_1 , ad un omeomorfismo con la corrispondente fibra di ξ_2 .

DEFINIZIONE 3.5.9. Se $B_1 = B_2 = B$, $f_B = \text{id}_B$ ed f_E è un omeomorfismo, diciamo che f è una F -*equivalenza*.

Una F -equivalenza è invertibile e l'inversa è ancora una F -equivalenza.

3.5.4. Fibrati di Steenrod.

DEFINIZIONE 3.5.10. Se B è uno spazio topologico ed F un \mathbf{G} -spazio fedele, chiamiamo *fibrato banale* di base B , fibra F e gruppo strutturale \mathbf{G} , il fibrato

$$(3.14) \quad \pi : B \times F \ni (p, v) \rightarrow p \in B, \quad \text{con } \mathcal{D}(F, \{p\} \times F) = \mathcal{D}(F, F) = \mathbf{G}, \quad \forall p \in F.$$

DEFINIZIONE 3.5.11. Un F -fibrato ξ si dice *di Steenrod* se è localmente F -equivalente ad un fibrato banale.

OSSERVAZIONE 3.5.12. Il concetto di fibrato principale coincide con quello di \mathbf{G} -fibrato di Steenrod.

PROPOSIZIONE 3.5.13. Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ un F -fibrato in senso debole. Condizione necessaria e sufficiente affinché ξ sia di Steenrod è che lo sia $P(\xi)$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\phi : U \times F \rightarrow E|_U$ è una trivializzazione di ξ su un aperto U di B , allora $\hat{\phi} : U \times \mathbf{G} \ni (p, a) \rightarrow (p, \phi(p, a(\cdot))) \in P(E)|_U$ è una trivializzazione di $P(\xi)$ su U . La $\phi(p, a(\cdot))$ rappresenta la trasformazione

$$\{F \ni v \rightarrow \phi(p, a(v)) \in E_p\} \in \mathcal{D}(F, E_p).$$

Viceversa, se

$$\Psi : U \times \mathbf{G} \ni (p, a) \rightarrow (p, \psi(p, a)) \in P(E)|_U, \quad \text{con } \psi(p, a) \in \mathcal{D}(F, E_p)$$

è una trivializzazione di $P(\xi)$ su U , allora $\phi : U \times F \ni (p, v) \rightarrow \psi(p, e_{\mathbf{G}})(v) \in E|_U$ è una trivializzazione di ξ su U . \square

3.5.5. Atlanti di trivializzazione. Sia ξ un F -fibrato di Steenrod, di base B e spazio totale E .

Un *atlante di trivializzazione* di ξ è il dato di un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di B e, per ogni indice i , di una $\phi_i \in \mathcal{C}(U_i \times F, E|_{U_i})$ che definisca un' F -equivalenza di $\xi|_{U_i}$ con il fibrato banale.

Per ogni $p \in U_i$, la $F \ni v \rightarrow \phi_i(p, v) \in E_p$ è un elemento di $\mathcal{D}(F, E_p)$. Le funzioni di transizione sono quindi della forma

$$(3.15) \quad (p, v) \rightarrow (p, \phi_{i,j}(p)(v)), \quad \text{con } \phi_{i,j} \in \mathcal{C}(U_{i,j}, \mathbf{G}).$$

Viceversa, abbiamo

PROPOSIZIONE 3.5.14. Siano F un \mathbf{G} -spazio fedele, B uno spazio topologico ed $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un suo ricoprimento aperto. Data una famiglia $\{\phi_{i,j} \in \mathcal{C}(U_{i,j}, \mathbf{G})\}$ con

$$\phi_{i,j} \phi_{j,k} \phi_{k,i} = e_{\mathbf{G}} \quad \text{su } U_{i,j,k}, \quad \forall i, j, k,$$

esiste ed è unico, a meno di equivalenze, un F -fibrato di Steenrod su B , con gruppo strutturale \mathbf{G} , che ammetta un atlante di trivializzazione con ricoprimento aperto \mathcal{U} e funzioni di transizione $\{\phi_{i,j}\}$. \square

I fibrati ξ e $P(\xi)$ si possono quindi definire utilizzando le stesse funzioni di transizione. Ne segue la

PROPOSIZIONE 3.5.15. Se ξ è un fibrato \mathbf{G} -principale ed F un \mathbf{G} -spazio fedele, esiste unico, a meno di equivalenze, un F -fibrato di Steenrod θ con $\xi = P(\theta)$. \square

La Proposizione 3.5.15 riconduce lo studio dei fibrati di Steenrod generali a quello dei fibrati principali.

Gli F -fibrati in senso debole ed i fibrati di Steenrod formano categorie stabili rispetto alle diverse operazioni, quali il pullback, la restrizione, la somma di Whitney, etc. Useremo dunque le operazioni standard introdotte per i fibrati generali, senza formulare e svolgere le ovvie verifiche sulle proprietà di queste operazioni.

OSSERVAZIONE 3.5.16. Osserviamo ancora che, se F è un \mathbf{G} -spazio qualsiasi, possiamo associare ad ogni fibrato \mathbf{G} -principale ξ un F -fibrato ξ_F sulla base $B(\xi)$, unico a meno di equivalenza, incollando i fibrati banali con fibra F sugli aperti di un qualsiasi atlante di trivializzazione di ξ mediante le stesse funzioni di transizione di ξ . Il fibrato ξ_F è di Steenrod rispetto al quoziente \mathbf{G}/\mathbf{H} di \mathbf{G} rispetto al nucleo d'infedeltà \mathbf{H} della rappresentazione di \mathbf{G} su F .

Un vantaggio della riduzione al caso dei fibrati principali è illustrato dal seguente

TEOREMA 3.5.17. *Se $f : \xi \rightarrow \zeta$ è un morfismo di fibrati \mathbf{G} -principali, allora ξ è equivalente ad $f^*(\zeta)$.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo definire un'equivalenza $g : \xi \rightarrow f^*(\zeta)$ mediante $E(\xi) \ni v \rightarrow g(v) = (\pi_\xi(v), f_E(v)) \in E(f^*(\zeta)) = \{(b, w) \mid w \in E(\zeta), \pi_\zeta(w) = f(v)\}$. Poiché \mathbf{G} opera in modo semplicemente transitivo sulle fibre di ξ e di ζ , per ogni $b \in B(\xi)$ la f definisce un'applicazione bigettiva $f_b : E_b(\xi) \rightarrow E_{f_B(b)}(\zeta)$. La g ammette quindi un'inversa, in senso insiemistico, definita da

$$g_E^{-1}(b, w) = f_b^{-1}(w).$$

Questa è continua perché i fibrati ξ e ζ sono localmente banali. Fissato un punto $b_0 \in B(\xi)$ possiamo infatti trovare intorno di trivializzazione U di b_0 in $B(\xi)$ e W di $f_B(b_0)$ in $B(\zeta)$ con $f_B(U) \subset W$. Possiamo allora descrivere le applicazioni f e g , nelle trivializzazioni, mediante una $\psi \in \mathcal{C}(U, \mathbf{G})$, in modo che risulti

$$\begin{array}{ccc} E(\xi)|_U & \xrightarrow{f_E} & E(f^*(\zeta))|_U \\ \uparrow & & \uparrow \\ U \times \mathbf{G} & \xrightarrow{(b,x) \rightarrow (b,\psi(b)x)} & U \times \mathbf{G} \\ \searrow & & \swarrow \\ & W \times \mathbf{G} & \\ \downarrow & & \\ & E(\zeta)|_W & \end{array}$$

(b,x) → (f_B(b), ψ(b)x) (b,y) → (f(b), y)

Nella trivializzazione locale la g^{-1} è rappresentata quindi dalla

$$(b, y) \rightarrow (b, [\psi(b)]^{-1}y)$$

ed è perciò continua. □

OSSERVAZIONE 3.5.18. Una trivializzazione di un fibrato \mathbf{G} -principale ξ su un aperto U di $B(\xi)$ equivale al dato di una sezione $\sigma \in \Gamma_\xi(U, E(\xi))$. Infatti, se σ è una sezione, allora

$$U \times \mathbf{G} \ni (b, x) \longrightarrow \sigma(b) \cdot x \in E(\xi)|_U$$

è una trivializzazione e viceversa, la trivializzazione

$$\phi_E : U \times \mathbf{G} \ni (b, x) \longrightarrow \phi_E(b, x) \in E(\xi)|_U$$

è associata alla sezione $\{b \rightarrow \phi_E(b, e_{\mathbf{G}})\} \in \Gamma_\xi(U, E(\xi))$.

3.6. Un Lemma di trivializzazione

Siano fissati un gruppo topologico \mathbf{G} ed un \mathbf{G} -spazio fedele F . Poiché un F -fibrato di Steenrod ξ è trivializzabile se e soltanto se lo è il fibrato \mathbf{G} -principale $P(\xi)$ associato, utilizzando l'Osservazione 3.5.18 ed i Lemmi 2.5.1 ed 2.5.2, otteniamo:

LEMMA 3.6.1. *Siano ξ un F -fibrato di Steenrod e B_1, B_2 due chiusi di $B = B(\xi)$ tali che $B_1 \cup B_2 = B$ e $B_1 \cap B_2$ sia un retratto di B_2 su $B_1 \cap B_2$. Se i fibrati $\xi|_{B_1}$ e $\xi|_{B_2}$ sono trivializzabili, allora anche ξ è trivializzabile.*

Se $\phi_1 : B_1 \times F \rightarrow E|_{B_1}$ definisce una F -trivializzazione di ξ su B_1 , è possibile trovare una trivializzazione di ξ su B definita da una $\phi : B \times F \rightarrow E$ che estenda ϕ_1 .

□

COROLLARIO 3.6.2. *Sia F uno spazio \mathbf{G} -fedele. Ogni F -fibrato di Steenrod su $[0, 1]^n$ è trivializzabile.*

□

3.7. Invarianza omotopica

Siano \mathbf{G} un gruppo topologico, F uno spazio \mathbf{G} -fedele, ξ un F -fibrato di Steenrod, M un CW -complesso. Vogliamo mostrare in questo paragrafo che, data $f \in \mathcal{C}(M, B(\xi))$, il pullback $f^*(\xi)$ è univocamente determinato, a meno di equivalenza, dalla classe di omotopia di f .

LEMMA 3.7.1. *Siano \bar{e} una cella chiusa di uno spazio topologico M e ξ_1, ξ_2 due F -fibrati di Steenrod su $\bar{e} \times [0, 1]$. Sia $N = (\bar{e} \times \{0\}) \cup (\partial e \times [0, 1])$ il cilindro su \bar{e} , privato dei punti interni del coperchio. Se ξ_1 e ξ_2 sono F -equivalenti su N , allora ξ_1 e ξ_2 sono F -equivalenti su $\bar{e} \times [0, 1]$ ed ogni F -equivalenza $\psi_N : \xi_1|_N \rightarrow \xi_2|_N$ si estende ad una F -equivalenza $\psi : \xi_1 \rightarrow \xi_2$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché le equivalenze di fibrati inducono l'identità sulla base, useremo, per semplificare la notazione, la stessa lettera per indicare sia l'applicazione tra i fibrati che quella tra i loro spazi totali.

Sia $\phi : D^n \times [0, 1] \rightarrow \bar{e} \times I \subset M \times [0, 1]$ il prodotto della funzione caratteristica della cella e per l'identità sull'intervallo $[0, 1]$. Allora

$$\phi^{-1}(N) = (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times [0, 1]).$$

Fissiamo una retrazione $\tilde{\rho} : D^n \times [0, 1] \rightarrow \phi^{-1}(N)$. Poiché $D^n \times [0, 1]$ è omeomorfo a $[0, 1]^{n+1}$, per il Lemma 3.6.2 i fibrati di Steenrod sulla base $D^n \times [0, 1]$, sono trivializzabili. Lo sono in particolare i pullback $\phi^*(\xi_i)$ e $\rho^*(\phi^*(\xi_i))$, per $i = 1, 2$. Fissiamo omeomorfismi di trivializzazione

$\lambda_i : (D^n \times [0, 1]) \times F \rightarrow E(\phi^*(\xi_i))$ ed $\eta_i : (D^n \times [0, 1]) \times F \rightarrow E(\rho^*(\phi^*(\xi_i)))$.

Per $i = 1, 2$, la $\lambda_i \circ \eta_i^{-1} : E_{\rho^*(\phi^*(\xi_i))} \rightarrow E_{\phi^*(\xi_i)}$ definisce una F -equivalenza tra $\rho^*(\phi^*(\xi_i))$ e $\phi^*(\xi_i)$ che è l'identità su $\phi^{-1}(N)$.

Osserviamo ora che la F -equivalenza $\psi_N : E(\xi_1)|_N \rightarrow E(\xi_2)|_N$ definisce una F -equivalenza $\psi_N^* : E(\phi^*(\xi_1))|_{\phi^{-1}(N)} \rightarrow E(\phi^*(\xi_2))|_{\phi^{-1}(N)}$, mediante

$$\begin{aligned} \{(x, t; v) \in \phi^{-1}(N) \times E(\xi_1) \mid \phi(x, t) = \pi_1(v)\} &\ni (x, t; v) \rightarrow \psi_N^*(x, t; v) \\ &= (x, t; \psi_N(\phi(x, t), v)) \in \{(x, t; v) \in \phi^{-1}(N) \times E(\xi_2) \mid \phi(x, t) = \pi_2(v)\}. \end{aligned}$$

La ψ_N^* si estende in modo naturale ad un' F -equivalenza tra $\rho^*(\phi^*(\xi_1))$ e $\rho^*(\phi^*(\xi_2))$. Per composizione, otteniamo così un'equivalenza tra $\phi^*(\xi_1)$ e $\phi^*(\xi_2)$ che estende quella data tra le loro restrizioni a $\phi^{-1}(N)$. Poiché la ϕ è un omeomorfismo fuori di $\phi^{-1}(N)$, questa F -equivalenza tra $\phi^*(\xi_1)$ e $\phi^*(\xi_2)$ definisce un' F -equivalenza tra ξ_1 e ξ_2 che estende quella assegnata su N . \square

TEOREMA 3.7.2. *Siano ξ un F -fibrato di Steenrod, M un CW -complesso, (M, A) una coppia cellulare ed $f = \{f_i\} \in \mathcal{C}(M \times [0, 1], B(\xi))$ un' A -omotopia⁵. Allora i pullback $f_0^*(\xi)$ ed $f_1^*(\xi)$ sono equivalenti e possiamo trovare un'equivalenza $\phi : f_0^*(\xi) \rightarrow f_1^*(\xi)$ che sia l'identità su $f_0^*(\xi)|_A$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo fissata la struttura di CW -complesso di M ed indichiamo con $p_M : M \times [0, 1] \rightarrow M$ la proiezione sul primo fattore. Consideriamo su $M \times [0, 1]$ i due F -fibrati

$$\zeta_0 = \text{pr}_M^*(f_0^*(\xi)) \quad \text{e} \quad \zeta_1 = f_1^*(\xi).$$

Le loro restrizioni ad $(M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1])$ coincidono e l'omeomorfismo $M \ni p \rightarrow (p, 1) \in M \times \{1\}$ ci permette di identificare $\zeta_0|_{M \times \{1\}}$ con $f_0^*(\xi)$ e $\zeta_1|_{M \times \{1\}}$ con $f_1^*(\xi)$. Basterà quindi costruire una F -equivalenza tra ζ_0 e ζ_1 che sia l'identità su $(M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1])$.

Sia $N_{-1} = (M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1])$ e, per ogni intero non negativo q , poniamo

$$N_q = (M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1]) \cup (M_q \times [0, 1]),$$

ove abbiamo indicato con M_q lo scheletro q -dimensionale $S_q(M)$ di M , cioè l'unione delle sue celle di dimensione minore o uguale a q .

Dimostriamo per ricorrenza che è possibile definire una successione $\{\phi_q\}_{q \geq -1}$ di applicazioni continue $\phi_q : E(\zeta_0)|_{N_q} \rightarrow E(\zeta_1)|_{N_q}$, tali che

- (1) ϕ_{-1} sia l'identità su $E(\zeta_0)|_{N_{-1}} = E(\zeta_1)|_{N_{-1}}$;
- (2) $(\text{id}_{N_q}, \phi_q) : \zeta_0|_{N_q} \rightarrow \zeta_1|_{N_q}$ sia una F -equivalenza;
- (3) $\phi_{q+1} = \phi_q$ su $E(\zeta_0)|_{N_q}$.

La ϕ_{-1} è assegnata. Dimostriamo per ricorrenza che, fissato $q \geq 0$ ed assegnata ϕ_{q-1} , è possibile costruire ϕ_q . Utilizziamo a questo scopo il lemma di Zorn. Indichiamo con Ψ l'insieme delle coppie (Q, ψ) formate da un sotto- CW -complesso Q di M con

$$N_{q-1} \subseteq Q \subseteq N_q$$

⁵Ciò significa che $t \rightarrow f_i(p)$ è costante per $p \in A$.

e da un'applicazione continua

$\Psi_Q : E(\zeta_0)|_Q \longrightarrow E(\zeta_1)|_Q$ t.c. $(\text{id}_Q, \Psi_Q) : \zeta_1|_Q \longrightarrow \zeta_2|_Q$ sia una F -equivalenza.

Definiamo una relazione d'ordine su Ψ ponendo

$$(Q_1, \Psi_{Q_1}) < (Q_2, \Psi_{Q_2}) \iff Q_1 \subsetneq Q_2 \text{ e } \Psi_{Q_2} = \Psi_{Q_1} \text{ su } E(\zeta_0)|_{Q_1}.$$

La famiglia Ψ è non vuota, perché contiene (N_{q-1}, ϕ_{q-1}) ed è induttiva perché ogni unione di celle Q con $N_{q-1} \subset Q \subset N_q$ è ancora un sotto- CW -complesso di M . Per il Lemma di Zorn Ψ contiene un elemento massimale (Q, Ψ_Q) . Dal Lemma 3.7.1 segue che deve essere $Q = N_q$. La tesi è conseguenza del fatto che gli N_q formano un ricoprimento fondamentale di M , e quindi gli $E(\zeta_0)|_{N_q}$ un ricoprimento fondamentale di $E(\zeta_0)$. Possiamo quindi definire $\phi : E(\zeta_0) \rightarrow E(\zeta_1)$ ponendo $\phi = \phi_q$ su $E_{\zeta_0}|_{N_q}$. \square

COROLLARIO 3.7.3. *Ogni fibrato di Steenrod la cui base sia uno spazio cellulare contrattile è trivializzabile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia ξ un F -fibrato di Steenrod con base $B = B(\xi)$ cellulare. Supponiamo vi sia una retrazione di deformazione $(\rho_t) \in \mathcal{C}(B \times I, B)$ con $\rho_0 = \text{id}_B$ e $\rho_1(b) = b_0$ per ogni $b \in B$. Allora, per il Teorema 3.7.2, $\xi = \rho_0^*(\xi)$ è equivalente a $\rho_1^*(\xi)$, che è il fibrato banale $B \times E_{b_0}(\xi) \rightarrow B$. \square

3.8. Fibrati universali

Siano \mathbf{G} un gruppo topologico, F un \mathbf{G} -spazio fedele ed m un intero non negativo o $(+\infty)$.

DEFINIZIONE 3.8.1. Un F -fibrato di Steenrod ζ si dice *m -universale* se per ogni F -fibrato di Steenrod ξ la cui base $B(\xi)$ sia un CW -complesso di dimensione minore o uguale ad m esiste un'applicazione continua $f \in \mathcal{C}(B(\xi), B(\zeta))$ tale che $f^*(\zeta)$ sia equivalente a ξ .

Possiamo ricondurre il problema della costruzione di fibrati m -universali al caso dei fibrati principali.

PROPOSIZIONE 3.8.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un F -fibrato di Steenrod ζ sia m -universale è che lo sia il fibrato \mathbf{G} -principale $P(\zeta)$ ad esso associato.* \square

Ci limiteremo quindi, nel seguito di questo paragrafo, a considerare fibrati \mathbf{G} -principali.

Per il Teorema 3.5.17, un fibrato \mathbf{G} -principale ζ è m -universale se e soltanto se, per ogni fibrato \mathbf{G} -principale ξ con $B(\xi)$ spazio cellulare di dimensione minore o uguale di m , esiste un morfismo di fibrati \mathbf{G} -principali $f : \xi \rightarrow \zeta$.

TEOREMA 3.8.3. *Un fibrato \mathbf{G} -principale ζ il cui spazio totale $E(\zeta)$ sia $(m-1)$ -connesso è m -universale.* \square

Per fibrati con struttura di gruppo vale ancora il teorema di estensione che abbiamo dimostrato senza ipotesi di struttura sulle fibre (Teorema 2.6.1).

PROPOSIZIONE 3.8.4. *Siano ζ, ξ due fibrati \mathbf{G} -principali ed $A \subset B(\xi)$ un sottospazio per cui $(B(\xi), A)$ sia una coppia cellulare relativa di dimensione minore o uguale ad m . Se $E(\zeta)$ è $(m-1)$ -connesso, allora ogni \mathbf{G} -morfismo $f_A : \xi|_A \rightarrow \zeta$ si estende ad un morfismo di fibrati \mathbf{G} -principali $f : \xi \rightarrow \zeta$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo fissata la struttura di CW -complesso relativo di $(B(\xi), A)$. Poniamo $A_{-1} = A$ e, per $k \geq 0$, indichiamo con $A_k = \mathbf{S}_k(B(\xi), A)$ il suo scheletro h -dimensionale (unione di A e delle celle di dimensione minore o uguale a k di $B(\xi) \setminus A$). Dimostriamo per ricorrenza che è possibile definire, per ogni intero k con $0 \leq k \leq m$, un'estensione $f^{(k)} : \xi|_{A_k} \rightarrow \zeta$ di $f_A : \xi|_A \rightarrow \zeta$.

Indichiamo con \mathcal{K}_k l'insieme delle celle di dimensione k in $B(\xi) \setminus A$. Per l'argomento che utilizzeremo, è utile osservare che, per ogni intero $k \geq 0$ ed ogni $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}_{k+1}$, la coppia $(A_k \cup (\bigcup \mathcal{E}), A)$ è ancora un sotto- CW -complesso relativo di $(B(\xi), A)$.

Poiché $A_0 \setminus A$ è un sottospazio discreto, l'esistenza di $f^{(0)}$ è banale.

Sia $0 \leq k < m$ e supponiamo di aver già costruito l'estensione $f^{(k)}$.

Per ogni $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}_{k+1}$ poniamo $A_{\mathcal{E}} = A_k \cup (\bigcup \mathcal{E})$. Sia \mathcal{J} la famiglia delle $(\mathcal{E}, f_{\mathcal{E}})$ che consistono di un sottoinsieme \mathcal{E} di \mathcal{K}_{k+1} e di un morfismo di fibrati \mathbf{G} -principali $f_{\mathcal{E}} : \xi|_{A_{\mathcal{E}}} \rightarrow \zeta$ che coincida con $f^{(k)}$ su $A_k = A_0$. Introduciamo su \mathcal{J} l'ordinamento

$$(\mathcal{E}_1, f_{\mathcal{E}_1}) < (\mathcal{E}_2, f_{\mathcal{E}_2}) \iff \mathcal{E}_1 \subsetneq \mathcal{E}_2 \text{ ed } f_{\mathcal{E}_2}|_{A_{\mathcal{E}_1}} = f_{\mathcal{E}_1}.$$

La famiglia \mathcal{J} è non vuota perché contiene $(A_0, f^{(k)})$ ed è induttiva. Per il Lemma di Zorn ammette un elemento massimale $(\mathcal{E}_0, f_{\mathcal{E}_0})$. Supponiamo per assurdo che questo elemento massimale sia diverso da A_{k+1} . Scriviamo per semplicità di notazione $A_{\mathcal{E}_0} = A'$, $[f_{\mathcal{E}_0}]_B = g$ ed $[f_{\mathcal{E}_0}]_E = \tilde{g}$.

Dunque (A', A) è un sotto- CW -complesso relativo di $(B(\xi), A)$ che contiene (A_k, A) , per cui è definito un omomorfismo $f_{\mathcal{E}_0} = (g, \tilde{g}) : \xi|_{A'} \rightarrow \zeta$ di fibrati \mathbf{G} -principali.

Per ipotesi, vi è almeno una cella $\mathbf{e} \in \mathcal{K}_{k+1}$ non contenuta in A' .

Sia $\phi_{\mathbf{e}} \in \mathcal{C}(D^{k+1}, B(\xi))$ la sua funzione caratteristica. Poiché $\bar{\mathbf{e}}$ è contrattile, la restrizione di ξ ad $\bar{\mathbf{e}}$ è banale. Fissata una trivializzazione $\lambda_{\bar{\mathbf{e}}} : \bar{\mathbf{e}} \times \mathbf{G} \rightarrow \pi_{\xi}^{-1}(\bar{\mathbf{e}})$, consideriamo l'applicazione continua $\gamma \in \mathcal{C}(S^k, E(\zeta))$ definita dalla composizione

$$S^k \xrightarrow{\phi_{\mathbf{e}}} \partial \mathbf{e} \xrightarrow{\lambda_{\bar{\mathbf{e}}}(\cdot, e_{\mathbf{G}})} \pi_{\xi}^{-1}(\partial \mathbf{e}) \xrightarrow{\tilde{g}} E(\zeta).$$

Poiché abbiamo supposto che $E(\zeta)$ fosse k -connesso, la γ si estende ad un'applicazione continua $\tilde{\gamma} \in \mathcal{C}(D^{k+1}, E(\zeta))$. Poniamo

$$\tilde{u}(\sigma) = \begin{cases} \tilde{g}(\sigma), & \text{se } \pi_{\xi}(\sigma) \in A', \\ \tilde{\gamma}(\phi_{\bar{\mathbf{e}}}^{-1}(p)) \cdot \lambda_{\bar{\mathbf{e}}}^{-1}(\sigma), & \text{se } p = \pi_{\xi}(\sigma) \in \mathbf{e}, \end{cases}$$

ed $u = \pi_{\zeta} \circ \tilde{u}$. La coppia (u, \tilde{u}) definisce un morfismo f_u di fibrati \mathbf{G} -principali che estende $f_{\mathcal{E}_0} = (g, \tilde{g})$ a $\xi|_{A' \cup \mathbf{e}}$. Poiché $(\mathcal{E}_0 \cup \{\mathbf{e}\}, f_u) \in \mathcal{J}$ e

$$(\mathcal{E}_0, f_{\mathcal{E}_0}) < (\mathcal{E}_0 \cup \{\mathbf{e}\}, f_u),$$

questo contraddice la massimalità di $(\mathcal{E}_0, f_{\mathcal{E}_0})$. Ciò dimostra l'esistenza dell'estensione $f^{(k+1)}$ e dunque, per ricorrenza, se $m < \infty$, dell'estensione $f = f^{(m)}$.

Se $m = \infty$, osserviamo che, dal momento che gli A_k formano un ricoprimento fondamentale di $B(\xi)$ e gli $E(\xi)|_{A_k}$ un ricoprimento fondamentale di $E(\xi)$. Quindi la $f : \xi \rightarrow \zeta$, definita da $f|_{A_k} = f^{(k)}$ per ogni $k \geq 0$, è un omomorfismo di \mathbf{G} -fibrati principali che estende f_A . La dimostrazione è completa. \square

OSSERVAZIONE 3.8.5. La condizione che $E(\zeta)$ sia $(m-1)$ -connesso è necessaria perché l'enunciato della Proposizione 3.8.4 sia valido per ogni fibrato \mathbf{G} -principale ξ la cui base sia un CW -complesso di dimensione minore o uguale ad m . Infatti ogni applicazione continua $\phi \in \mathcal{C}(S^n, E(\zeta))$ definisce un \mathbf{G} -omomorfismo $(f_{S^{n-1}}, \tilde{f}_{S^{n-1}})$ del fibrato banale $S^n \times \mathbf{G} \rightarrow S^n$ in ζ , ove si ponga $\tilde{f}(x, a) = \phi(x) \cdot a$ per ogni $x \in S^n$ ed $a \in \mathbf{G}$. Un'estensione (f, \tilde{f}) di $(f_{S^{n-1}}, \tilde{f}_{S^{n-1}})$ ad un \mathbf{G} -omomorfismo del fibrato banale $D^{n+1} \times \mathbf{G} \rightarrow D^{n+1}$ in ζ definisce un'estensione $\tilde{f}(x, e_{\mathbf{G}})$ di ϕ ad un'applicazione continua da D^{n+1} in $E(\zeta)$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.8.3. Fissiamo una cella $A = \{b_0\}$ di dimensione 0 di $B(\xi)$ e consideriamo l'applicazione che fa corrispondere al punto b_0 un qualsiasi punto z_0 di $B(\zeta)$. Fissati $\sigma_0 \in \pi_{\xi}^{-1}(b_0)$ e $\tau_0 \in \pi_{\zeta}^{-1}(z_0)$, la $\sigma_0 a \rightarrow \tau_0 a$, per ogni $a \in \mathbf{G}$, definisce un morfismo di \mathbf{G} -fibrati principali $f_{b_0} : \xi|_{\{b_0\}} \rightarrow \zeta$. Per la Proposizione 3.8.4 esso si estende ad un omomorfismo di \mathbf{G} -fibrati principali $f : \xi \rightarrow \zeta$, che definisce l'equivalenza $\xi \simeq f^*(\zeta)$. \square

TEOREMA 3.8.6. *Siano ζ un fibrato \mathbf{G} -principale con $E(\zeta)$ m -connesso e B un CW -complesso di dimensione minore o uguale ad m . Se $f_0, f_1 \in \mathcal{C}(B, B(\zeta))$ ed $f_0^*(\zeta)$ ed $f_1^*(\zeta)$ sono equivalenti, allora f_0 ed f_1 sono omotope.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo i pullback $f_i^*(\zeta) = (\pi_i : E_i \rightarrow B)$, con

$$E_i = \{(b, \tau) \in B \times E_{\zeta} \mid f_i(b) = \pi_{\zeta}(\tau)\}, \quad \pi_i : E_i \ni (b, \tau) \rightarrow b \in B.$$

Gli omomorfismi standard $(f_i, \tilde{f}_i) : f_i^*(\zeta) \rightarrow \zeta$ sono definiti da $\tilde{f}_i(b, \tau) = \tau$ per ogni $(b, \tau) \in E_i$. Per ipotesi esiste un'equivalenza $\phi : f_1^*(\zeta) \rightarrow f_2^*(\zeta)$ di \mathbf{G} -fibrati principali, con $\phi_B(b) = b$ e $\phi_E(b, \tau) = (b, \hat{\phi}(b, \tau))$ per $(b, \tau) \in E_1$, ove $\hat{\phi} \in \mathcal{C}(E_1, E(\zeta))$ e $\hat{\phi}(b, \tau \cdot a) = \hat{\phi}(b, \tau) \cdot a$, per ogni $(b, \tau) \in E_1$ ed $a \in \mathbf{G}$.

Il prodotto $B \times [0, 1]$ è un CW -complesso di dimensione minore o uguale ad $(m+1)$. Sia $\text{pr}_B : B \times [0, 1] \rightarrow B$ la proiezione sul primo fattore e $\xi = \text{pr}_B^*(f_0^*(\zeta))$ l'immagine inversa su $B \times [0, 1]$ di $f_0^*(\zeta)$. Osserviamo che $A_i = B \times \{i\}$, per $i = 0, 1$, ed $A = A_0 \cup A_1$, sono sottospazi cellulari di $B \times [0, 1]$. Definiamo $\phi_A : \xi|_A \rightarrow \zeta$ ponendo

$$[\phi_A]_B(b, i) = f_i(b) \quad \text{se } b \in B, i = 0, 1, \text{ e}$$

$$[\phi_A]_E(b, i; \tau) = \begin{cases} \tilde{f}_1(p, \tau), & \text{se } (b, \tau) \in E_1, i = 0, \\ \tilde{f}_2(p, \hat{\phi}(b, \tau)), & \text{se } (b, \tau) \in E_1, i = 1. \end{cases}$$

Per la Proposizione 3.8.4 la ϕ_A si estende ad una $\phi : \xi \rightarrow \zeta$. In particolare, $\phi_B = (f_i) \in \mathcal{C}(B \times [0, 1], B(\zeta))$ definisce un'omotopia tra f_0 ed f_1 . \square

Come conseguenza dei Teoremi 3.8.3 e 3.8.6 abbiamo

TEOREMA 3.8.7. *Sia ζ un fibrato \mathbf{G} -principale, con spazio totale m -connesso. Allora, per ogni CW-complesso B di dimensione minore o uguale ad m , la corrispondenza*

$$\mathcal{C}(B, B(\zeta)) \ni f \longrightarrow f^*(\zeta)$$

definisce per passaggio ai quozienti una bigezione tra l'insieme $\pi(B, B(\zeta))$ delle classi di omotopia di applicazioni continue da B in $B(\zeta)$ e l'insieme dei fibrati \mathbf{G} -principali con base B modulo equivalenza. \square

OSSERVAZIONE 3.8.8. Osserviamo che, se il gruppo \mathbf{G} è m -connesso, allora il fibrato banale ζ con $B(\zeta) = \{\text{un punto}\}$ è $(m+1)$ -universale.

3.9. Fibrati di Milnor

J. Milnor, in [14, 15] ha dato una costruzione canonica di fibrati m -universali. Per descriverla, dobbiamo richiamare la nozione di *giunto* di spazi topologici.

Giunto di spazi topologici. Siano A, B due spazi topologici non vuoti. Consideriamo lo spazio vettoriale libero generato dall'unione disgiunta di A e B , ed indichiamo con $A * B$ l'insieme⁶

$$(3.16) \quad A * B = \{(1-t)a + tb \mid a \in A, b \in B, 0 \leq t \leq 1\}.$$

L'applicazione

$$\pi : A \times B \times [0, 1] \ni (a, b, t) \longrightarrow (1-t)a + tb \in A * B$$

è surgettiva e possiamo quindi considerare su $A * B$ la topologia quoziente: $A * B$ si ottiene dal cilindro $A \times B \times [0, 1]$ di base $A \times B$, identificando ad un punto ciascuno dei sottoinsiemi $\{a\} \times B \times 0$ ed $A \times \{b\} \times 1$.

DEFINIZIONE 3.9.1. Con questa topologia, $A * B$ si dice *il giunto* degli spazi A, B .

Il giunto $A * B$ è connesso per archi e contiene i sottospazi chiusi $\pi(A \times B \times \{0\})$, omeomorfo ad A , $\pi(A \times B \times \{1\})$ omeomorfo a B , mentre i sottospazi $\pi(A \times B \times \{t\})$, per $0 < t < 1$, sono omeomorfi ad $A \times B$. Si usano identificare, per semplicità di scrittura, A e B ai corrispondenti sottospazi di $A * B$ ed $A \times B$ a $\pi(A \times B \times \{\frac{1}{2}\})$.

Casi particolari sono il *cono di base* A , che è il giunto $A * D^0$ di A con l'insieme formato da un solo punto e la *sospensione di* A , che è il giunto $A * S^0$ di A con lo spazio formato da due punti.

La *giunzione* di spazi topologici è un'operazione *associativa*: si verifica facilmente che, se A_1, A_2, A_3 sono tre spazi topologici, allora $(A_1 * A_2) * A_3$ è omeomorfo ad $A_1 * (A_2 * A_3)$. Potremo quindi indicare senza ambiguità con $A_1 * \dots * A_n$ il giunto di n spazi topologici. Possiamo ancora scrivere

$$(3.17) \quad A_1 * \dots * A_n = \{t_1 a_1 + \dots + t_n a_n \mid a_i \in A_i, t_i \geq 0, t_1 + \dots + t_n = 1\},$$

come sottospazio dello spazio vettoriale libero generato dalla loro unione disgiunta $A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$. Identificheremo A_i al sottospazio formato dai punti con $t_i = 1$.

⁶Supponiamo per semplicità di scrittura che A e B siano disgiunti. Altrimenti, dovremmo considerare l'unione disgiunta $A \sqcup B$ come il sottoinsieme di $(A \cup B) \times \{0, 1\}$ formato dalle coppie $(a, 0)$ con $a \in A$ e $(b, 1)$ con $b \in B$ e scrivere, in (3.16), $(1-t)(a, 0) + t(b, 1)$ invece di $(1-t)a + tb$.

ESEMPIO 3.9.2. Osserviamo che $S^0 * S^0 \simeq S^1$, ed, in generale,

$$\underbrace{S^0 * \dots * S^0}_{(n+1) \text{ volte}} \simeq S^n.$$

PROPOSIZIONE 3.9.3. *Il giunto di n spazi topologici è $(n-2)$ -connesso.*

Divideremo la dimostrazione di questa proposizione in quella di una serie di lemmi.

LEMMA 3.9.4. *Se A_1 è connesso per archi ed $A_2 \neq \emptyset$, allora $A_1 * A_2$ è semplicemente connesso.*

DIMOSTRAZIONE. La proiezione $\text{pr}_I : A_1 \times A_2 \times I \rightarrow I$ sulla terza coordinata definisce per passaggio al quoziente un'applicazione continua $\hat{\text{pr}}_I : A_1 * A_2 \rightarrow I$. Data quindi una $f \in \mathcal{C}(S^1, A_1 * A_2)$, la $t(s) = \hat{\text{pr}}_I \circ f(s)$, per $s \in S^1$, definisce un'applicazione continua $t \in \mathcal{C}(S^1, I)$. Possiamo allora rappresentare f mediante

$$f(s) = (1 - t(s))a_1(s) + t(s)a_2(s),$$

$$\text{con } a_1 \in \mathcal{C}(S^1 \setminus t^{-1}(1), A_1), \quad a_2 \in \mathcal{C}(S^1 \setminus t^{-1}(0), A_2).$$

Possiamo definire una funzione continua $b_1 \in \mathcal{C}(S^1, A_1)$ che coincida con a_1 quando $t(s) \leq \frac{1}{2}$. Infatti, l'insieme $\{s \in S^1 \mid t(s) > \frac{1}{2}\}$ è unione, al più numerabile, di archi aperti $\widehat{s's''}$. Poiché A_1 è connesso per archi, possiamo trovare per ciascuno di essi un'applicazione continua $b_{\widehat{s's''}} \in \mathcal{C}(\widehat{s's''}, A_1)$ con $b_{\widehat{s's''}}(s') = a_1(s')$ e $b_{\widehat{s's''}}(s'') = a_1(s'')$. Definiamo allora

$$b_1(s) = \begin{cases} a_1(s) & \text{se } t(s) \leq \frac{1}{2}, \\ b_{\widehat{s's''}}(s) & \text{se } \widehat{s's''} \text{ è una componente connessa di } \{t(s) > \frac{1}{2}\}. \end{cases}$$

Introduciamo un nuovo parametro $\tau \in [0, 1]$ e poniamo

$$t(s, \tau) = \min\{1, (1 + \tau)t(s)\}, \quad f_\tau(s) = (1 - t(s, \tau))a_1(s) + t(s, \tau)a_2(s).$$

Poiché $t(s, \tau) = 0$ quando $t(s) = 0$ e $t(s, \tau) = 1$ quando $t(s) = 1$, la $f_\tau(s)$ è definita e continua su $S^1 \times [0, 1]$ e descrive perciò un'omotopia tra la f assegnata ed

$$f_1(s) = (1 - t_1(s))b_1(s) + t_1(s)a_2(s), \quad \text{con } t_1(s) = \min\{1, 2t(s)\}.$$

Poiché $b_1 \in \mathcal{C}(S^1, A_1)$, la

$$S^1 \times [0, 1] \ni (s, \tau) \longrightarrow (1 - \tau t_1(s))b_1(s) + \tau t_1(s)a_2(s) \in A_1 * A_2$$

è definita e continua e descrive un'omotopia di f_1 con un laccetto continuo f_2 a valori in A_1 . Fissiamo ora un punto $p_2 \in A_2$. La

$$S^1 \times [0, 1] \ni (s, \tau) \longrightarrow (1 - \tau)b_1(s) + \tau p_2 \in A_1 * A_2$$

è un'omotopia tra f_2 ed un'applicazione costante. La dimostrazione è completa. \square

Indichiamo con $\tilde{H}_q(A)$ il q -esimo gruppo di omologia *ridotta* (a coefficienti interi) di A . Ricordiamo che $H_q(A) = \tilde{H}_q(A)$ se $q > 0$, mentre $H_0(A) = \tilde{H}_0(A) \oplus \mathbb{Z}$.

LEMMA 3.9.5. *Siano A_1 ed A_2 spazi topologici non vuoti e siano $k_1, k_2 \geq -1$ due interi per cui $\tilde{H}_q(A_i) = 0$ se $0 \leq q \leq k_i$, $i = 1, 2$. Allora $\tilde{H}_q(A_1 * A_2) = 0$ per $q \leq k_1 + k_2 + 2$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la successione esatta di Mayer-Vietoris associata alla coppia di aperti $U_1 = (A_1 * A_2) \setminus A_2$ ed $U_2 = (A_1 * A_2) \setminus A_1$. È $U_1 \cup U_2 = A_1 * A_2$, mentre A_2 è un retratto di deformazione di U_1 , A_1 un retratto di deformazione di U_2 ed $A_1 \times A_2$ un retratto di deformazione di $A_1 \times A_2$. Abbiamo quindi una successione esatta di gruppi abeliani

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \tilde{H}_q(A_1 \times A_2) &\longrightarrow \tilde{H}_q(A_1) \oplus \tilde{H}_q(A_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(A_1 * A_2) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(A_1 \times A_2) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Le inclusioni $A_i \rightarrow A_1 * A_2$ sono omotope ad applicazioni costanti e quindi dalla successione di Mayer-Vietoris ricaviamo le successioni esatte corte

$$0 \rightarrow \tilde{H}_{q+1}(A_1 * A_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(A_1 \times A_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(A_1) \oplus \tilde{H}_q(A_2) \rightarrow 0.$$

Per la formula di Künnet, se $\tilde{H}_q(A_i) = 0$ per $q \leq k_i$, otteniamo che $\tilde{H}_q(A_1 \times A_2) = 0$ per $q \leq k_1 + k_2 + 1$ e quindi $\tilde{H}_q(A_1 * A_2) = 0$ se $q \leq k_1 + k_2 + 2$. \square

Per un teorema di Hurewicz⁷, uno spazio topologico semplicemente connesso A è k -connesso se e soltanto se $\tilde{H}_q(A) = 0$ per ogni $q \leq k$. Otteniamo quindi la

PROPOSIZIONE 3.9.6. *Se A_i è k_i -connesso, per $i = 1, 2$, allora $A_1 * A_2$ è $k_1 + k_2 + 2$ connesso.* \square

Da questa segue la Proposizione 3.9.3. \square

Consideriamo ora una successione $\{A_n\}_{n \geq 1}$ di spazi topologici non vuoti. Possiamo identificare il limite diretto (o induttivo)

$$J(\{A_n\}) = \operatorname{inj} \lim_{n \rightarrow \infty} A_1 * \cdots * A_n$$

con l'insieme

$$J(\{A_n\}) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1, \#\{i \mid t_i \neq 0\} < \infty, a_i \in A_i \right\}.$$

Per ogni n , l'inclusione naturale $\iota_n : A_1 * \cdots * A_n \hookrightarrow J(\{A_n\})$ ci permette di considerare ogni giunto $A_1 * \cdots * A_n$ come un sottoinsieme di $J(\{A_n\})$. La topologia di limite induttivo su $J(\{A_n\})$ è quella per cui $\{A_1 * \cdots * A_n\}_{n \geq 1}$ è un ricoprimento chiuso fondamentale. Un sottoinsieme E di $J(\{A_n\})$ è cioè chiuso se interseca ogni $A_1 * \cdots * A_n$ in un chiuso. Abbiamo

⁷Witold Hurewicz (1904 -1956), matematico polacco. Dopo la formazione a Vienna, fu assistente di Brouwer ad Amsterdam dal 1928 al 1936. Si trasferì poi negli Stati Uniti. A lui si deve la definizione dei gruppi di omotopia di ordine superiore (1935-36), la successione esatta lunga delle fibrazioni e il teorema che mette in relazione omotopia ed omologia.

Sia M è uno spazio topologico. Ad ogni applicazione $f \in \mathcal{C}(S^n, M)$ corrisponde un omomorfismo $f_* : H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z} \rightarrow H_n(M)$. L'immagine $f_*(1)$ dipende soltanto dalla classe di omotopia di f e definisce quindi un'applicazione $\lambda_n : \pi_n(M) \ni [f] \rightarrow f_*(1) \in H_n(M)$, che è un omomorfismo (l'*omotomorfismo di Hurewicz*) per ogni $n \geq 1$. Poniamo $\pi_1^*(M) = \pi_1(M)/[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ (l'*abelianizzato* del gruppo fondamentale), e $\pi_n^*(M) = \pi_n(M)$ se $n \geq 2$. Il Teorema di Hurewicz ci dice che:

Se $n \geq 1$ ed M è $(n-1)$ -connesso, allora l'applicazione $\lambda_n : \pi_n^*(M) \rightarrow H_n(M)$ è un isomorfismo.

PROPOSIZIONE 3.9.7. *Se tutti gli spazi topologici A_n sono di Hausdorff, anche $J(\{A_n\})$ è di Hausdorff ed è uno spazio topologico ∞ -connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo due punti $a = \sum \tau_i a_i$ e $b = \sum \lambda_i b_i$ di $J(\{A_n\})$. Se $\tau_{i_0} \neq \lambda_{i_0}$ per qualche indice i_0 , allora $\{t_{i_0} < \frac{1}{2}(\tau_{i_0} + \lambda_{i_0})\}$ e $\{t_{i_0} > \frac{1}{2}(\tau_{i_0} + \lambda_{i_0})\}$ sono intorni disgiunti dei due punti. Se $\tau_i = \lambda_i$ per ogni i , allora $\tau_{i_0} > 0$ ed $a_{i_0} \neq b_{i_0}$ per un indice i_0 . Fissiamo quindi intorni disgiunti U_a ed U_b di a_{i_0} e b_{i_0} in A_{i_0} . Allora gli insiemi $\{t_{i_0} > 0, x_i \in U_a\}$ e $\{t_{i_0} > 0, x_i \in U_b\}$, ove abbiamo indicato con $\sum t_i x_i$ il generico punto di $J(\{A_n\})$, sono intorni aperti disgiunti di a e b in $J(\{A_n\})$.

Osserviamo ora che ogni compatto K di $J(\{A_n\})$ è contenuto in uno dei sottospazi $A_1 * \dots * A_n$. Infatti, se così non fosse, potremmo trovare una successione $\{x^{(n)}\}$ di punti di K con $x^{(n)} \notin A_1 * \dots * A_n$ per ogni intero positivo n . Questa successione sarebbe chiusa, e discreta, perché interseca ciascun $x^{(m)} \in A_1 * \dots * A_n$ al più per un numero finito di indici m . Essendo contenuta nel compatto K , l'insieme $K_0 = \{x^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ dovrebbe essere compatto, ma questo non è possibile perché è infinito e ha la topologia discreta. Abbiamo ottenuto una contraddizione che dimostra che K è contenuto in uno dei sottospazi $A_1 * \dots * A_n$.

Sia $f \in \mathcal{C}(S^n, J(\{A_i\}))$. Essendo un compatto, $f(S^n)$ è contenuto in $A_1 * \dots * A_\nu$ per qualche intero positivo ν .

Possiamo allora estendere la F ad una $\tilde{f} : D^{n+1} \rightarrow A_1 * \dots * A_\nu * A_{\nu+1}$, fissando un punto $p_0^{(\nu+1)} \in A_{\nu+1}$ e ponendo

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} |y|f(y/|y|) + (1 - |y|)b_0^{\nu+1}, & \text{se } y \neq 0, \\ b_0^{(\nu+1)}, & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Questo completa la dimostrazione. Osserviamo che la ∞ -connessione si può anche ottenere come una conseguenza della Proposizione 3.9.3. \square

Costruzione del fibrato standard. Se \mathbf{G} è un gruppo topologico, possiamo definire un'azione di \mathbf{G} sul giunto

$$J^n(\mathbf{G}) = \underbrace{\mathbf{G} * \dots * \mathbf{G}}_{n \text{ volte}}$$

di n copie di \mathbf{G} mediante

$$g \cdot (t_1 g_1 + \dots + t_n g_n) = t_1 (g g_1) + \dots + t_n (g g_n).$$

La proiezione nel quoziente $\pi : J^n(\mathbf{G})/\mathbf{G}$ rispetto a quest'azione di gruppo definisce un \mathbf{G} -fibrato principale con spazio totale $(n - 2)$ -connesso.

DEFINIZIONE 3.9.8. Il fibrato $J^{n+2}(\mathbf{G}) \rightarrow J^{n+2}(\mathbf{G})/\mathbf{G}$ si dice *il fibrato di Milnor* con spazio totale n -connesso del gruppo topologico \mathbf{G} .

Come nel paragrafo precedente, possiamo considerare il limite diretto $J^\infty(\mathbf{G})$ dei giunti $J^n(\mathbf{G})$. Risulta definita un'azione di \mathbf{G} su $J^\infty(\mathbf{G})$, che sui sottospazi $J^n(\mathbf{G})$ coincide con quella precedentemente descritta. La proiezione nel quoziente

$$(3.18) \quad \mathfrak{M}(\mathbf{G}) = J^\infty(\mathbf{G}) \longrightarrow J^\infty(\mathbf{G})/\mathbf{G}$$

è un \mathbf{G} -fibrato principale con spazio totale ∞ -connesso.

DEFINIZIONE 3.9.9. Il fibrato (3.18) si dice il *fibrato universale* di Milnor del gruppo topologico \mathbf{G} .

Per il Teorema 3.8.7 abbiamo

TEOREMA 3.9.10. *Sia M un CW-complesso. La corrispondenza*

$$f \in \mathcal{C}(M, J^\infty(\mathbf{G})/\mathbf{G}) \longleftrightarrow f^*(\mathfrak{M}(\mathbf{G}))$$

definisce per passaggio ai quozienti una bigezione tra l'insieme $\pi(M, J^\infty(\mathbf{G})/\mathbf{G})$ delle applicazioni continue da M in $J^\infty(\mathbf{G})/\mathbf{G}$ modulo omotopia e l'insieme dei \mathbf{G} -fibrati principali con base M , modulo equivalenza. \square

ESEMPIO 3.9.11. Consideriamo il gruppo \mathbb{Z}_2 . Poiché la sfera S^n è $(n-1)$ -connessa, la proiezione naturale $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ definisce un fibrato \mathbb{Z}_2 -principale, che è n -universale per \mathbb{Z}_2 e coincide con il fibrato di Milnor.

Ogni fibrato \mathbb{Z}_2 -principale su S^1 si può ottenere, a meno di equivalenza, come il pullback di un'applicazione continua $f \in \mathcal{C}(S^1, S^1)$. Queste sono classificate da $\pi(S^1, S^1) \simeq \mathbb{Z}$. Per classificare i fibrati \mathbb{Z}_2 -principali su S^1 abbiamo però bisogno di un fibrato \mathbb{Z}_2 -principale con spazio totale semplicemente connesso, ad esempio $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$. Quindi le classi di equivalenza dei fibrati \mathbb{Z}_2 -principali su S^1 è in corrispondenza biunivoca con $\pi(S^1, \mathbb{R}P^2) \simeq \pi_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}_2$.

ESEMPIO 3.9.12. Consideriamo il gruppo abeliano \mathbb{Z}_3 . Possiamo raffigurarci $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$ facendo corrispondere alle due copie $\{a_0, a_1, a_2\}$ e $\{b_0, b_1, b_2\}$ i vertici del perimetro di un esagono regolare, nell'ordine, ad esempio, $a_0 b_3 a_1 b_0 a_2 b_1$, aggiungendovi le diagonali dei vertici opposti $a_0 b_0, a_1 b_1, a_2 b_2$ e muovendo nello spazio queste diagonali in modo che non si intersechino tra loro. Il quoziente $(\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3)/\mathbb{Z}_3$ è omeomorfo all'unione di una circonferenza con un suo diametro ed è omotopicamente equivalente al bouquet di due circonferenze. Infatti $\{a_0, a_1, a_2\}$ si identifica ad un punto e così $\{b_0, b_1, b_2\}$. Il quoziente inoltre identifica i punti dei segmenti (a_i, b_j) con $i + j \equiv k \pmod{3}$. La figura che otteniamo è quindi un'unione di tre archi con estremi in comune.

Esaminiamo la costruzione utilizzando su $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$ la struttura di complesso simpliciale. Essa può essere descritta assegnando i vertici $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ ed i lati (a_i, b_j) con $i, j \in \{0, 1, 2\}$. Abbiamo quindi 6 vertici e 9 lati. Nel passaggio al quoziente i vertici a_i si identificano tra loro e così anche i vertici b_i , mentre i tre segmenti che escono da ciascun vertice rimangono distinti. Per calcolare la struttura simpliciale del quoziente $(\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3)/\mathbb{Z}_3$ è quindi conveniente considerare la suddivisione baricentrica di $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$. Aggiungiamo ai 6 vertici i punti medi $c_{i,j} = \frac{1}{2}(a_i + b_j)$ dei 9 lati. I lati nella nuova suddivisione sono gli $(a_i, c_{i,j})$ e i $(b_i, c_{j,i})$ con $i, j \in \{0, 1, 2\}$. Abbiamo così 15 vertici e 18 lati. Osserviamo ora che nel passaggio al quoziente si identificano i vertici che appartengono allo stesso insieme della partizione $\{a_0, a_1, a_2\}, \{b_0, b_1, b_2\}, \{c_{i,j} \mid i + j \equiv k \pmod{3}\}$, per $k = 0, 1, 2$. Possiamo interpretare le loro proiezioni come i 5 vertici di una triangolazione di $(\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3)/\mathbb{Z}_3$. I lati $(a_i, c_{i,j})$ con $i + j \equiv k$, per $k = 0, 1, 2$ sono ancora identificati tra loro e così lo sono i $(b_j, c_{i,j})$. Otteniamo quindi 6 lati, che insieme ai 5 vertici definiscono una triangolazione di $(\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3)/\mathbb{Z}_3$.

Il giunto $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$ è un complesso simpliciale di dimensione due, di cui è facile descrivere una triangolazione: gli elementi $\{a_0, a_1, a_2\}$, $\{b_0, b_1, b_2\}$, $\{c_0, c_1, c_2\}$ delle tre copie di \mathbb{Z}_3 si prendono come i 9 vertici, le coppie (a_i, b_j) , (a_i, c_j) e (b_i, c_j) con $i, j \in \{0, 1, 2\}$ sono i 27 lati e le triplette (a_i, b_j, c_k) con $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$ le 27 facce. La caratteristica di Eulero $9 - 27 + 27 = 9$ è dispari (la superficie ottenuta non è orientabile).

Il quoziente $(\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3)/\mathbb{Z}_3$ si può ancora descrivere come un complesso simpliciale. Nel passaggio al quoziente, i vertici relativi ad uno stesso \mathbb{Z}_3 sono identificati dalla relazione d'equivalenza. Non si identificano però tra loro i diversi segmenti che li uniscono. Per calcolare il quoziente si può allora partire dalla suddivisione baricentrica del complesso simpliciale associato a $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$. Il numero dei vertici è uguale alla somma di quello dei vertici, di quello dei lati, e quello delle facce cioè $9 + 27 + 27 = 63$. Il numero dei lati è il doppio di quello dei lati del non suddiviso, più sei volte il numero delle facce, cioè $2 \times 27 + 6 \times 27 = 216$. Il numero delle facce è sestuplicato. Sono cioè $6 \times 27 = 162$. Osserviamo che si è conservata la caratteristica di Eulero: $63 - 216 + 162 = 9$. Passando al quoziente, $(\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3)/\mathbb{Z}_3$ ha una triangolazione che si ottiene per passaggio al quoziente, dal momento che lati e facce che abbiano un punto interno equivalente sono equivalenti. In questa triangolazione ci sono 21 vertici, 72 lati e 54 facce, per una caratteristica di Eulero $21 - 72 + 54 = 3$.

Alcuni spazi omogenei

Le varietà di Stiefel e di Grassmann reali, complesse e quaternioniche ci permettono di costruire fibrati universali per la classificazione, modulo equivalenza, dei fibrati vettoriali. In questo capitolo discutiamo alcune loro proprietà e sviluppiamo altri interessanti esempi di spazi omogenei.

4.1. Varietà di Stiefel reali

Ad una m -upla ortonormale di vettori di \mathbb{R}^n possiamo associare la matrice $X = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ di cui essi formano le colonne. La condizione di ortonormalità si può esprimere con l'equazione $X^\top X = I_m$ e quindi

$$(4.1) \quad \mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times m} \mid X^\top X = I_m\}$$

identifica le m -uple ortonormali di \mathbb{R}^n a un sottospazio dello spazio euclideo $\mathbb{R}^{n \times m}$.

DEFINIZIONE 4.1.1. Il sottospazio $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ si dice *varietà di Stiefel reale* degli m -riferimenti ortonormali di \mathbb{R}^n .

Consideriamo su $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ la topologia di sottospazio.

Osserviamo che

- $\mathcal{V}_1(\mathbb{R}^n)$ è la sfera $(n-1)$ -dimensionale $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$;
- $\mathcal{V}_{n-1}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbf{SO}(n)$;
- $\mathcal{V}_n(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbf{O}(n)$.

Le varietà di Stiefel reali generalizzano quindi, allo stesso tempo, le sfere, i gruppi ortogonali ed i gruppi speciali ortogonali.

TEOREMA 4.1.2. *La varietà di Stiefel reale $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ è una varietà analitica compatta di dimensione $m(2n-m-1)/2$. Se $1 \leq m < n$, allora $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ è diffeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-m)$ e quindi connessa per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già osservato che $\mathcal{V}_{n,n} = \mathbf{O}(n)$ e quindi, in questo caso, è una varietà compatta di dimensione $n(n-1)/2$, con due componenti connesse, ciascuna diffeomorfa ad $\mathbf{SO}(n)$.

Consideriamo il caso in cui $1 \leq m < n$. Allora $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ è l'orbita, per l'azione a sinistra di $\mathbf{SO}(n)$ su $\mathbb{R}^{n \times m}$, di (e_1, \dots, e_m) : questa affermazione equivale al fatto che ogni m -upla (v_1, \dots, v_m) di vettori ortonormali può completarsi ad una base ortonormale (v_1, \dots, v_n) di \mathbb{R}^n con $\det(v_1, \dots, v_n) = 1$. Lo stabilizzatore di (e_1, \dots, e_m) è il sottogruppo

$$\left\{ \begin{pmatrix} I_m & \\ & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{SO}(n-m) \right\} \simeq \mathbf{SO}(n-m).$$

La $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ è quindi \mathcal{C}^ω -diffeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-m)$ e perciò una varietà analitica compatta di dimensione

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{SO}(n) - \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{SO}(n-m) = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2} = \frac{m(2n-m-1)}{2}.$$

Poiché $\mathbf{SO}(n)$ è connesso per archi, anche $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ è connessa per archi. \square

Dalla rappresentazione, per $1 \leq m < n$, di $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ come lo spazio omogeneo $\mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-m)$, ricaviamo la successione esatta di omotopia¹

$$(4.2) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{SO}(n-m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{SO}(n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(n-m)) & \longrightarrow & \cdots & \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n-m)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)) \\ & & \longrightarrow & 0. & & & \end{array}$$

Per ogni coppia d'interi k, m con $1 \leq k < m < n$, l'applicazione

$$(4.3) \quad \mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow (v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{V}_k(\mathbb{R}^n)$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathcal{V}_{m-k}(\mathbb{R}^{n-k})$. Otteniamo quindi una successione esatta di omotopia

$$(4.4) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathcal{V}_k(\mathbb{R}^n)) \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}_{m-k}(\mathbb{R}^{n-k})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}_k(\mathbb{R}^n)) \\ & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathcal{V}_{m-k}(\mathbb{R}^{n-k})) & \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

Dalle (4.2) e (4.4) possiamo ricavare delle informazioni sui gruppi di omotopia delle varietà di Stiefel.

PROPOSIZIONE 4.1.3. *Sia m un intero con $1 \leq m < n$. La varietà di Stiefel reale $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$, è $(n-m-1)$ -connessa e*

$$(4.5) \quad \pi_{n-m}(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n-m \text{ è pari, o } m=1, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } n-m \text{ è dispari ed } m \geq 2. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per ricorrenza su $m \geq 1$. Poiché, come abbiamo osservato in precedenza, $\mathcal{V}_1(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$, la tesi è vera se $m=1$. Sia ora $m > 1$ e supponiamo la tesi sia vera per le varietà di Stiefel reali $\mathcal{V}_k(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq k < m$. Consideriamo la successione esatta (4.4) con $k=m-1$. Poiché $\mathcal{V}_1(\mathbb{R}^{n-m+1}) \simeq S^{n-m}$, la successione è

$$(4.6) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_h(S^{n-m}) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}_{m-1}(\mathbb{R}^n)) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(S^{n-m}) & \longrightarrow & \cdots & \end{array}$$

Se $h < n-m$, allora $\pi_h(S^{n-m}) = 0$, e $\pi_h(\mathcal{V}_{m-1}(\mathbb{R}^n)) = 0$ per l'ipotesi induttiva. Quindi anche $\pi_h(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)) = 0$.

¹Per semplicità in questa, e nelle altre successioni esatte in questo paragrafo ometteremo di indicare il punto base.

Rimane da verificare la (4.5). Sappiamo che essa vale per $m = 1$. Con $k = 1$, la (4.4) dà la successione esatta di omotopia

$$\pi_{n-m+1}(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_{n-m}(\mathcal{V}'_{n-1,m-1}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_{n-m}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow \pi_{n-m}(S^{n-1}).$$

Se $m > 2$, è $\pi_{n-m+1}(S^{n-1}) = 0$ e $\pi_{n-m}(S^{n-1}) = 0$, da cui ricaviamo l'isomorfismo $\pi_{n-m}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^n)) \simeq \pi_{n-m}(\mathcal{V}'_{m-1}(\mathbb{R}^{n-1}))$ per ogni m con $2 < m < n$.

Per completare la dimostrazione, sarà quindi sufficiente verificare che la (4.5) vale nel caso $m = 2$. Per $k = 1$ ed $m = 2$ la (4.4) ci dà la successione esatta di omotopia:

$$(4.7) \quad \mathbb{Z} = \pi_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\Delta_*} \mathbb{Z} = \pi_{n-2}(S^{n-2}) \longrightarrow \pi_{n-2}(\mathcal{V}'_2(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow 0.$$

Per semplificare le notazioni, è conveniente porre $v = (n - 1)$ e fissare in \mathbb{R}^{v+1} la base ortonormale e_0, e_1, \dots, e_v . Scegliamo, come punti base, $(e_v, e_0) \in \mathcal{V}'_2(\mathbb{R}^{v+1})$, $e_n \in S^v$, $e_0 \in S^{v-1} = S^v \cap e_v^\perp$. Posto $S^v_+ = \{x \in S^v \mid x_v = (x|e_v) \geq 0\}$, è $\pi_v(S^v, e_v) \simeq \pi(S^v_+, S^{v-1}; S^v, e_v)$. Una $f \in \mathcal{C}(S^{n-1}_+, S^{n-2}; S^{n-1}, e_v)$ si rialza ad una $\tilde{f} \in \mathcal{C}(S^{n-1}_+, e_0; \mathcal{V}'_2(\mathbb{R}^{v+1}), (e_v, e_0))$. La sua restrizione ad S^{v-1} è la classe di omotopia di $\Delta_*([f])$. Per calcolare l'immagine di Δ_* , osserviamo che la $\psi(x) = e_v - 2x_v \cdot x$ è un'applicazione in $\mathcal{C}(S^v_+, S^{v-1}; S^v, e_v)$ la cui classe di coomologia corrisponde a quella dell'identità su S^v . Quindi $\Delta_*(\pi_v(S^v))$ è generato da $\Delta_*([\psi])$. Possiamo considerare il rialzamento

$$\tilde{\psi} = \{x \longrightarrow (e_v - 2x_v \cdot x, 2x_0 \cdot x - e_0)\} \in \mathcal{C}(S^v, e_0; \mathcal{V}'_2(\mathbb{R}^{v+1}), (e_v, e_0)).$$

Allora $\Delta_*([\tilde{\psi}])$ è la classe di omotopia di $\psi_0(x) = 2x_0 \cdot x - e_0$ in $\pi_{v-1}(S^{v-1}, e_0)$.

Ricordiamo che l'intero corrispondente alla classe di ψ_0 in $\pi_{v-1}(S^{v-1}, e_0)$ è il suo *grado* (vedi §13.6), che si può calcolare sommando le segnature del suo jacobiano nelle controimmagini di un suo valore regolare. Possiamo scegliere il valore regolare e_0 , che ha come controimmagini $\pm e_0$. Abbiamo $d\psi(e_0)(v) = 2 \cdot v$ e $d\psi_0(-e_0)(v) = -2v$ per $v \in \mathbb{R}^{v-2}$. Poiché $\det(-I_{v-2}) = (-1)^v$, abbiamo $[\psi_0] = 2$ se v è pari, $[\psi_0] = 0$ se v è dispari.

Ricordando che $n = v + 1$, abbiamo ottenuto che l'immagine di $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}$ in $\pi_{n-2}(S^{n-2}) \simeq \mathbb{Z} \simeq 2\mathbb{Z}$ quando n è dispari e $\{0\}$ quando n è pari. Quindi

$$\pi_{n-2}(\mathcal{V}'_2(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Questo completa la dimostrazione. \square

4.2. Varietà di Grassmann reali

Dati due interi positivi $m < n$, indichiamo con $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$ l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione m di \mathbb{R}^n . Se $\ell_m \in \mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$, il prodotto esterno $v_1 \wedge \dots \wedge v_m$ dei vettori di una sua base è univocamente determinato a meno di moltiplicazione per uno scalare. Viceversa, un elemento α di rango uno² di $\Lambda^m(\mathbb{R}^n)$ determina univocamente l' m -piano $[\alpha] = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \wedge v = 0\}$ di \mathbb{R}^n . Possiamo quindi

²Definiamo il *rango* di un tensore alternato di $\Lambda^m(\mathbb{R}^n)$ come il numero minimo di addendi di una sua decomposizione in somma di *monomi* $v_1 \wedge \dots \wedge v_m$.

identificare l'insieme degli n -piani di \mathbb{R}^n ad un sottospazio dello spazio proiettivo associato a $\Lambda^m(\mathbb{R}^n)$:

$$(4.8) \quad \mathcal{G}_n(\mathbb{R}^n) = \{[\alpha] \mid \text{rk}(\alpha) = 1\} \subset \mathbb{P}(\Lambda^n(\mathbb{R}^n)).$$

DEFINIZIONE 4.2.1. Chiamiamo $\mathcal{G}_m(\mathbb{R}^n)$ *varietà di Grassmann* degli m -piani di \mathbb{R}^n .

PROPOSIZIONE 4.2.2. $\mathcal{G}_m(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio topologico di Hausdorff, connesso e compatto ed una varietà analitica di dimensione $m(n-m)$.

DIMOSTRAZIONE. La grassmanniana $\mathcal{G}_m(\mathbb{R}^n)$ è l'orbita di $p_0 = [e_1 \wedge \cdots \wedge e_m]$ per l'azione naturale di $\mathbf{SO}(n)$ su $\mathbb{P}(\Lambda^m \mathbb{R}^n)$. Lo stabilizzatore di p_0 è il sottogruppo

$$\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{O}(m), y \in \mathbf{O}(n-m), \det(x) \cdot \det(y) = 1 \right\} \simeq \mathbf{S}(\mathbf{O}(m) \times \mathbf{O}(n-m)).$$

Poiché $\mathbf{SO}(n)$ ed \mathbf{H} sono gruppi di Lie compatti, $\mathcal{G}_m(\mathbb{R}^n)$ è un compatto di Hausdorff e l'applicazione naturale

$$\mathbf{SO}(n)/\mathbf{S}(\mathbf{O}(m) \times \mathbf{O}(n-m)) \rightarrow \mathcal{G}_m(\mathbb{R}^n)$$

un diffeomorfismo analitico, che ne definisce la struttura di varietà analitica di dimensione

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2} = m(n-m). \quad \square$$

PROPOSIZIONE 4.2.3. Fissato un prodotto scalare su \mathbb{R}^n , l'applicazione

$$(4.9) \quad \mathcal{G}_m(\mathbb{R}^n) \ni \ell_m \rightarrow \ell_m^\perp \in \mathcal{G}_{n-m}(\mathbb{R}^n)$$

che associa ad ogni m -piano ℓ_m l' $(n-m)$ -piano ad esso ortogonale è un diffeomorfismo analitico³. \square

Nello studio delle proprietà geometriche delle varietà di Grassmann potremo quindi, nel seguito, limitarci a considerare il caso in cui $n \geq 2m$.

Consideriamo l'applicazione naturale

$$(4.10) \quad \mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow \langle v_1, \dots, v_m \rangle \in \mathcal{G}_m(\mathbb{R}^n)$$

che associa ad un sistema di m vettori ortonormali di \mathbb{R}^n il sottospazio da essi generato. L'azione a destra di $\mathbf{O}(m)$ su $\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)$ definisce per la (4.10) la struttura di fibrato $\mathbf{O}(m)$ -principale. I gruppi di omotopia delle varietà di Stiefel e di quelle di Grassmann sono quindi legati dalla successione esatta di Serre:

$$(4.11) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathcal{G}_m(\mathbb{R}^n)) \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{O}(m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{G}_m(\mathbb{R}^n)) \\ & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{O}(m)) & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathcal{V}_m(\mathbb{R}^n)) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

³Per $m = 1$, l'applicazione è una polarità proiettiva rispetto ad una quadrica senza punti reali.

LEMMA 4.2.4. *Per ogni intero non negativo h ed ogni coppia d'interi positivi m, k , con $m \leq k$, le applicazioni $\iota_* : \pi_h(\mathbf{O}(m)) \rightarrow \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^{k+m}))$ hanno immagine nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo la rappresentazione di $\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^{k+m})$ come lo spazio delle matrici $X \in \mathbb{R}^{(k+m) \times m}$ per cui $X^\top X = I_{k+m}$. Identifichiamo $\mathbf{O}(m)$ alla fibra di $\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^{k+m})$ sopra il punto base $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$ di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$ mediante l'inclusione

$$\mathbf{O}(m) \ni x \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^{k+m}).$$

L'omotopia $F : \mathbf{O}(m) \times I \rightarrow \mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^n)$ definita da

$$F(x, t) = \begin{pmatrix} x \cos^2(t\pi/2) + I_m \sin^2(t\pi/2) \\ (x^\top - I_m) \sin(t\pi/2) \cos(t\pi/2) \\ 0_{n-2m, m} \end{pmatrix}$$

definisce una retrazione di deformazione di $\mathbf{O}(m)$ sul punto base $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$ di $\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^n)$. Da questo segue la tesi. \square

In particolare, dalla successione esatta (4.11) ricaviamo, per ogni intero $h \geq 0$, le successioni esatte corte:

$$(4.12) \quad 0 \rightarrow \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{O}(m)) \rightarrow 0.$$

Abbiamo perciò, tenuto conto del diffeomorfismo (4.9),

TEOREMA 4.2.5. *Siano $1 \leq m < n$ e $v = \min\{m, n-m\}$. Allora*

$$(4.13) \quad \pi_1(\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)) = \mathbb{Z}_2, \quad \forall n \geq 3 \quad \text{ed} \quad 1 \leq m < n$$

ed inoltre

$$(4.14) \quad \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } 2 \leq h < n-v, \\ \mathbb{Z} \oplus \pi_{n-v-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } h = n-v \text{ è pari o } v = 1, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \pi_{n-v-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } h = n-v \text{ è dispari e } v \geq 3. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza della successione esatta (4.12) e del fatto che la varietà di Stiefel $\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^n)$ è $(n-m-1)$ -connessa. \square

La classica struttura di CW-complesso di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$ si definisce utilizzando le *celle di Schubert*, associate al metodo di eliminazione di Gauss. Ad una matrice $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ di rango m possiamo associare m interi $s_i(X)$ nel modo seguente: $s_1(X)$ è l'indice della prima riga non nulla di X . Moltiplicando a sinistra la X per una matrice di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$, possiamo ottenere una nuova matrice X'_1 che rappresenta lo stesso elemento di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$, ma ha un solo elemento diverso da zero sulla $s_1(X)$ -esima riga. Consideriamo allora la matrice X_1 che si ottiene cancellando la colonna di X' che contiene tale elemento. Indichiamo con $s_2(X)$ l'indice della prima riga di X_1 diversa da zero. Ripetendo il procedimento, definiamo per ricorrenza una sequenza crescente d'interi $1 \leq s_1(X) < s_2(X) < \dots < s_m(X) \leq n$. Questi numeri sono gli stessi per la matrice X e per quelle che si ottengono moltiplicando a destra

X per un elemento di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ e sono perciò degli invarianti associati al sottospazio generato dalle colonne della matrice. Le *celle di Schubert* si definiscono mediante

$$C_{k_1, \dots, k_m} = \{[X] \mid s_i(X) = k_i\},$$

ove abbiamo indicato con $[X]$ il sottospazio generato dalle colonne della matrice X , che supponiamo in $\mathbb{R}^{n \times m}$ e di rango m . La dimensione della cella C_{k_1, \dots, k_m} è

$$\sum_{i=1}^m (n - m + i - k_i) = m(n - m) + \frac{m(m-1)}{2} - \sum_{i=1}^m k_i.$$

In particolare, $C_{1,2,\dots,m}$ è l'unica cella che sia un aperto di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$.

Se $n' > n$, possiamo considerare \mathbb{R}^n come il sottospazio di $\mathbb{R}^{n'}$ formato dai vettori che hanno nulle tutte le componenti di indice minore o uguale ad $(n' - n)$. Da questa inclusione $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n'}$, otteniamo un'inclusione naturale

$$(4.15) \quad \mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^{n'}).$$

PROPOSIZIONE 4.2.6. *L'applicazione $\pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)) \rightarrow \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^{n'}))$ indotta dalla (4.15) è un isomorfismo per ogni $h < \min\{m, n-m\}$ ed ogni $n' > n$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $h < n - m$, e consideriamo la partizione cellulare di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^{n'})$ data dalle celle di Schubert, lo scheletro $(h+1)$ -dimensionale di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^{n'})$ è contenuto in $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^n)$. \square

4.3. Varietà di Stiefel e di Grassmann complesse

Introduciamo in questo paragrafo le varietà di Stiefel e di Grassmann complesse.

DEFINIZIONE 4.3.1. *La varietà di Stiefel complessa*

$$(4.16) \quad \mathcal{V}_m(\mathbb{C}^n) = \{Z \in \mathbb{C}^{n \times m} \mid Z^*Z = I_m\}.$$

è costituita dalle m -uple di vettori ortonormali di \mathbb{C}^n .

Poiché

$$\mathcal{V}_1(\mathbb{C}^n) = \mathbb{S}^{2n-1}, \quad \mathcal{V}_{n-1}(\mathbb{C}^n) \simeq \mathbf{SU}(n), \quad \mathcal{V}_n(\mathbb{C}^n) = \mathbf{U}(n),$$

le varietà di Stiefel complesse generalizzano le sfere di dimensione dispari ed i gruppi unitari. Abbiamo:

PROPOSIZIONE 4.3.2. *Per ogni $1 \leq m \leq n$, la $\mathcal{V}_m(\mathbb{C}^n)$ è una varietà analitica di dimensione reale $m(2n - m)$, compatta e connessa per archi. Se $1 \leq m < n$, essa è omeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n - m)$.*

DIMOSTRAZIONE. I gruppi di Lie $\mathbf{U}(n)$ ed $\mathbf{SU}(n)$ sono compatti e connessi per archi. Se $1 \leq m < n$, $\mathcal{V}_m(\mathbb{C}^n)$ è un'orbita dell'azione naturale a sinistra di $\mathbf{SU}(n)$ su $\mathbb{C}^{n \times m}$. Il gruppo d'isotropia è $\mathbf{SU}(n - m)$. Quindi $\mathcal{V}_m(\mathbb{C}^n)$ è \mathcal{C}^ω -diffeomorfo al quoziente $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n - m)$ e perciò compatto e connesso per archi ed è una varietà analitica di dimensione $(n^2 - 1) - ([n - m]^2 - 1) = 2mn - m^2$. \square

PROPOSIZIONE 4.3.3. *$\mathcal{V}_m(\mathbb{C}^n)$ è $(2n - 2m)$ -connessa e $\pi_{2n-2m+1}(\mathcal{V}_m(\mathbb{C}^n)) = \mathbb{Z}$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissato un intero positivo k minore di m , l'applicazione

$$(4.17) \quad \mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow (v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{V}'_k(\mathbb{C}^n)$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathcal{V}'_{m-k}(\mathbb{C}^{n-k})$. I gruppi di omotopia delle varietà di Stiefel complesse sono quindi legate dalla successione esatta

$$(4.18) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathcal{V}'_k(\mathbb{C}^n)) & & & & \\ \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_{m-k}(\mathbb{C}^{n-k})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_k(\mathbb{C}^n)) & \\ & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathcal{V}'_{m-k}(\mathbb{C}^{n-k})) & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Ragioniamo per ricorrenza su $m \geq 1$ (ed $n > m$ qualsiasi). Per $m = 1$, $\mathcal{V}'_1(\mathbb{C}^n) = \mathbb{S}^{2n-1}$. La sfera di dimensione $(2n-1)$ è $(2n-2)$ -connessa e $\pi_{2n-1}(\mathbb{S}^{2n-1}) \simeq \mathbb{Z}$. La tesi è quindi verificata per $m = 1$. Fissiamo ora $m > 1$ e supponiamo che, per ogni r con $1 \leq r < m$ la $\mathcal{V}'_r(\mathbb{C}^n)$ sia $(2n-2r)$ -connessa, con $\pi_{2n-2r-1}(\mathcal{V}'_r(\mathbb{C}^n)) \simeq \mathbb{Z}$. Per $k = 1$, la (4.18) ci dà la successione esatta

$$\cdots \rightarrow \pi_{h+1}(\mathbb{S}^{2n-1}) \longrightarrow \pi_h(\mathcal{V}'_{m-1}(\mathbb{C}^{n-1})) \longrightarrow \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{S}^{2n-1}) \rightarrow \cdots$$

Poiché per l'ipotesi induttiva $\mathcal{V}'_{m-1}(\mathbb{C}^{n-1})$ è $(2n-2m)$ -connesso e $\mathcal{V}'_1(\mathbb{C}^n) = \mathbb{S}^{2n-1}$ è $(2n-2)$ -connesso, otteniamo che anche $\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)$ è $(2n-2)$ -connesso.

Utilizziamo ancora la (4.18) con $k = (m-1)$ ed $h = 2n-2m+1$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_{2n-2m+2}(\mathcal{V}'_{m-1}(\mathbb{C}^n)) & & & & \\ \longrightarrow & \pi_{2n-2m+1}(\mathbb{S}^{2n-2m+1}) & \longrightarrow & \pi_{2n-2m+1}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)) & \longrightarrow & \pi_{2n-2m+1}(\mathcal{V}'_{m-1}(\mathbb{C}^n)) & \rightarrow \cdots \end{array}$$

Poiché $\mathcal{V}'_{m-1}(\mathbb{C}^n)$ è $(2n-2m+2)$ -connessa, otteniamo l'isomorfismo

$$\pi_{2n-2m+1}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)) \simeq \pi_{2n-2m+1}(\mathbb{S}^{2n-2m-1}) = \mathbb{Z}. \quad \square$$

DEFINIZIONE 4.3.4. Chiamiamo *varietà di Grassmann complessa* degli m -piani di \mathbb{C}^n lo spazio

$$(4.19) \quad \mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n) = \{[\alpha] \mid \alpha \in \Lambda^m(\mathbb{C}^n), \text{rk}(\alpha) = 1\} \subset \mathbb{P}(\Lambda^m(\mathbb{C}^n)).$$

La corrispondenza $\alpha \rightarrow \ell_m = \{v \in \mathbb{C}^n \mid \alpha \wedge v = 0\}$ dà l'interpretazione geometrica della (4.19).

L'applicazione

$$(4.20) \quad \mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow \langle v_1, \dots, v_m \rangle \in \mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n)$$

definisce $\mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n)$ come la base di un fibrato $\mathbf{U}(m)$ -principale, per l'azione a destra di $\mathbf{U}(m)$ sulla varietà di Stiefel $\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)$.

I gruppi di omotopia delle varietà di Grassmann e di Stiefel complesse sono perciò legati dalla successione esatta di Serre:

$$(4.21) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{U}(m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n)) \\ & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{U}(m)) & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Con una dimostrazione analoga a quella del Lemma 4.2.4 otteniamo

LEMMA 4.3.5. *Se $1 < 2m \leq n$, allora l'applicazione*

$$\pi_h(\mathbf{U}(m)) \rightarrow \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n))$$

in (4.35) ha immagine nulla. □

Questo ci dà, per ogni intero $h \geq 1$ e per $1 < 2m \leq n$, le successioni esatte corte

$$(4.22) \quad 0 \rightarrow \pi_h(\mathcal{V}_m(\mathbb{C}^n)) \longrightarrow \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n)) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{U}(m)) \rightarrow 0.$$

Otteniamo perciò il

TEOREMA 4.3.6. *Sia $\nu = \min\{m, n - m\}$. Allora, per ogni $1 \leq m < n$ ed $h \geq 1$*

$$(4.23) \quad \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n)) = \pi_{h-1}(\mathbf{U}(\nu)), \quad \forall h \leq 2\nu$$

DIMOSTRAZIONE. Se $2m \leq n$, la tesi segue dalla (4.36) e dal fatto che $\mathcal{V}_m(\mathbb{C}^n)$ è $2(n - m)$ -connessa. Per completare la dimostrazione, è sufficiente utilizzare l'omeomorfismo

$$(4.24) \quad \mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n) \ni \ell_m \rightarrow \ell_m^\perp \in \mathcal{G}r_{n-m}(\mathbb{C}^n),$$

dove ℓ_m^\perp è l' $(n - m)$ -piano ortogonale a ℓ_m , rispetto ad un prodotto scalare Hermitiano in \mathbb{C}^n . \square

In particolare, $\pi_1(\mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n)) = 0$ e $\pi_2(\mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^n)) = \mathbb{Z}$ per ogni $1 \leq m < n$.

4.4. Varietà di Stiefel e di Grassmann quaternioniche

La definizione delle varietà di Stiefel e di Grassmann su \mathbb{H} sono leggermente complicate dalla necessità di tener conto della non commutatività dei quaternioni. Consideriamo \mathbb{H}^n come uno spazio vettoriale *a destra* su \mathbb{H} . In questo modo un'applicazione \mathbb{H} -lineare $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^m$ si può rappresentare mediante la moltiplicazione righe per colonne di una matrice in $\mathbb{H}^{m \times n}$ a sinistra per un vettore colonna in \mathbb{H}^n a destra. La trasformazione \mathbb{H} -lineare a destra definita da una matrice $A \in \mathbb{H}^{n \times n}$ è in particolare \mathbb{R} -lineare ed ammette un'inversa in $\mathbb{H}^{n \times n}$ (che sarà sia destra che sinistra perché l'algebra \mathbb{H} è associativa) se e soltanto se è invertibile come applicazione \mathbb{R} -lineare. Se $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{H}^{m \times n}$, poniamo $A^* = (\bar{a}_{j,i}) \in \mathbb{H}^{n \times m}$.

Su \mathbb{H}^n introduciamo un prodotto scalare iperhermitiano mediante

$$(v|w)_{\mathbb{H}} = w^* v \quad (\text{prodotto riga per colonna}), \quad \forall v, w \in \mathbb{H}^n.$$

Esso è naturalmente additivo rispetto a ciascun fattore, mentre alla sesquilinearità si sostituisce la

$$(v \cdot q_1 | w \cdot q_2)_{\mathbb{H}} = \bar{q}_2 \cdot (v|w)_{\mathbb{H}} \cdot q_1, \quad \forall v, w \in \mathbb{H}^n, \quad \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}.$$

DEFINIZIONE 4.4.1. La varietà di Stiefel $\mathcal{V}_m(\mathbb{H}^n)$ consiste delle m -uple ortonormali di \mathbb{H}^n :

$$(4.25) \quad \mathcal{V}_m(\mathbb{H}^n) = \{X \in \mathbb{H}^{n \times m} \mid X^* X = I_m\}.$$

Il gruppo delle trasformazioni \mathbb{H} -lineari che preservano il prodotto scalare iperhermitiano è il gruppo iperunitario $\mathbf{Sp}(n)$:

$$(4.26) \quad \mathbf{Sp}(n) = \{x \in \mathbb{H}^{n \times n} \mid x^* x = I_n\}.$$

Il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ è un gruppo di Lie connesso e compatto, di dimensione reale $n(2n + 1)$, che agisce transitivamente sulla sfera S^{4n-1} di $\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{R}^{4n}$. È $\mathbf{Sp}(1) \simeq S^3$ ed, in generale, l'applicazione

$$(4.27) \quad \mathbf{Sp}(n) \ni x \rightarrow x \cdot e_n \in S^{4n-1}$$

ci permette di identificare S^{4n-1} allo spazio omogeneo $\mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-1)$. I gruppi di omotopia delle sfere e dei gruppi iperunitari sono perciò legati dalla successione esatta

$$(4.28) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(S^{4n-1}) & \\ & & & & & & \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{Sp}(n-1)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{Sp}(n)) & \longrightarrow & \pi_h(S^{4n-1}) \rightarrow \cdots \end{array}$$

I gruppi $\pi_h(S^{4n-1})$ sono banali per $h < (4n - 1)$. In particolare,

$$(4.29) \quad \pi_h(\mathbf{Sp}(n)) \simeq \pi_h(\mathbf{Sp}(n-1)) \quad \text{se } h \leq 4n - 3.$$

Per $m = 2$, poiché $\pi_h(S^7) = 0$ per $0 \leq n \leq 6$, otteniamo che

$$\pi_h(\mathbf{Sp}(2)) \simeq \pi_h(\mathbf{Sp}(1)) \simeq \pi_h(S^3, e_0) \quad \text{per } h \leq 5.$$

Per ricorrenza, abbiamo quindi, se $h \leq 5$:

$$(4.30) \quad \pi_h(\mathbf{Sp}(n)) \simeq \pi_h(S^3) = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } h = 0, 1, 2, \\ \mathbb{Z}, & \text{se } h = 3, \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } h = 4, 5. \end{cases}$$

Per ulteriori risultati sull'omotopia dei gruppi classici, vedi ad esempio [9].

La *periodicità di Bott* (vedi [2, 6, 16]) dà, nel caso del gruppo iperunitario,

$$(4.31) \quad \pi_h(\mathbf{Sp}(n)) \simeq \pi_{h+8}(\mathbf{Sp}(n+4)), \quad \text{per } h \leq 4n + 1.$$

PROPOSIZIONE 4.4.2. $\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)$ è una varietà analitica compatta e connessa per archi di dimensione reale $(m \cdot (4n - 2m + 1))$. È $(4n - 4m + 2)$ -connessa e il suo primo gruppo di omotopia non banale è $\pi_{4n-4m+3}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)) = \mathbb{Z}$.

DIMOSTRAZIONE. Compattezza e connessione seguono dalle analoghe proprietà del gruppo $\mathbf{Sp}(n)$, che agisce transitivamente su $\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)$. Per calcolare la dimensione, osserviamo che $\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n) \simeq \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-m)$ e quindi

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)) &= \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{Sp}(n)) - \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{Sp}(n-m)) \\ &= n(2n + 1) - (n-m)(2n - 2m + 1) = m(4n - 2m + 1). \end{aligned}$$

Fissato un intero k con $1 \leq k < m$, l'applicazione

$$(4.32) \quad \mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow (v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{V}'_k(\mathbb{H}^n).$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathcal{V}'_{m-k}(\mathbb{H}^{n-k})$. Otteniamo quindi una successione esatta di omotopia

$$(4.33) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathcal{V}'_k(\mathbb{H}^n)) & \\ & & & & & & \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_{m-k}(\mathbb{H}^{n-k})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}'_k(\mathbb{H}^n)) \\ & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathcal{V}'_{m-k}(\mathbb{H}^{n-k})) & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Ragioniamo per ricorrenza su $m \geq 1$. Per $m = 1$, $\mathcal{V}_1(\mathbb{H}^n) = \mathbf{S}^{4n-1}$, e sappiamo che la sfera di dimensione $(4n - 1)$ è $(4n - 2)$ -connessa e che $\pi_{4n-1}(\mathbf{S}^{4n-1}) = \mathbb{Z}$. Supponiamo ora che $m > 1$ e che, per ogni r con $1 \leq r < m$ la varietà di Stiefel $\mathcal{V}_r(\mathbb{H}^n)$ sia $(4n-4r+2)$ -connessa e $\pi_{4n-4r+3}(\mathcal{V}_r(\mathbb{H}^n)) = \mathbb{Z}$. Utilizziamo la successione esatta (4.33) con $k = 1$. Poiché $\mathcal{V}_1(\mathbb{H}^n) = \mathbf{S}^{4n-1}$, abbiamo la successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbf{S}^{4n-1}) & & & & \\ & & & & & & \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}_{m-1}(\mathbb{H}^{n-1})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}_m(\mathbb{H}^n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{S}^{4n-1}) \rightarrow \dots \end{array}$$

da cui segue che

$$\pi_h(\mathcal{V}_m(\mathbb{H}^n)) \simeq \pi_h(\mathcal{V}_{m-1}(\mathbb{H}^{n-1})) \quad \text{se } h < 4n - 2.$$

Poiché $(4n - 4m + 3) < (4n - 2)$ se $m > 1$, la tesi segue dall'ipotesi induttiva. \square

Sia $\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)$ l'insieme degli m -piani quaternionici (a destra) di \mathbb{H}^n . Una matrice (v_1, \dots, v_m) i cui vettori siano una base di $\ell_m \in \mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)$ è determinata a meno della moltiplicazione a destra per una matrice invertibile di $\mathbb{H}^{m \times m}$. Se ci limitiamo a considerare basi ortonormali di ℓ_m , le matrici (v_1, \dots, v_m) delle basi ortonormali di ℓ_m sono determinate a meno di moltiplicazione a destra per un elemento di $\mathbf{Sp}(m)$. Il gruppo $\mathbf{Sp}(m)$ opera, per moltiplicazione a destra, su $\mathcal{V}_m(\mathbb{H}^n)$. Abbiamo:

LEMMA 4.4.3. *L'applicazione*

$$(4.34) \quad \mathcal{V}_m(\mathbb{H}^n) \ni (v_1, \dots, v_m) \longrightarrow \langle v_1, \dots, v_m \rangle \in \mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)$$

è surgettiva e definisce, per passaggio al quoziente, una bigezione tra $\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)$ ed il quoziente $\mathcal{V}_m(\mathbb{H}^n)/\mathbf{Sp}(m)$. \square

DEFINIZIONE 4.4.4. La varietà di Grassmann $\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)$ consiste degli m -piani quaternionici di \mathbb{H}^n , con la struttura di varietà analitica compatta e connessa che rende (4.34) la mappa di proiezione di un fibrato $\mathbf{Sp}(m)$ -principale.

La dimensione reale di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)$ è quindi

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V}_m(\mathbb{H}^n)) - \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{Sp}(m)) = 4m(n - m).$$

I gruppi di omotopia delle varietà di Grassmann e di Stiefel quaternioniche sono legati dalla successione esatta di Serre:

$$(4.35) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{Sp}(m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{V}_m(\mathbb{H}^n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)) \\ & & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Con una dimostrazione analoga a quella del Lemma 4.2.4 otteniamo

LEMMA 4.4.5. *Se $1 < 2m \leq n$, allora, per ogni intero h , le applicazioni*

$$\pi_h(\mathbf{Sp}(m)) \rightarrow \pi_h(\mathcal{V}_m(\mathbb{H}^n))$$

in (4.35) hanno immagine nulla. \square

Questo dà, per ogni intero $h \geq 1$ e per $1 < 2m \leq n$, le successioni esatte corte

$$(4.36) \quad 0 \rightarrow \pi_h(\mathcal{V}_m(\mathbb{H}^n)) \longrightarrow \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{Sp}(m)) \rightarrow 0.$$

Otteniamo perciò il

TEOREMA 4.4.6. *Sia $v = \min\{m, n - m\}$. Allora, per ogni $1 \leq m < n$*

$$(4.37) \quad \pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)) = \pi_{h-1}(\mathbf{Sp}(v)), \quad \forall 1 \leq h \leq 4n - 4v + 2$$

DIMOSTRAZIONE. Se $2m \leq n$, la tesi segue dalla (4.36) e dal fatto che $\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^m)$ sia $(4n - 4m + 2)$ -connessa. Per completare la dimostrazione, è sufficiente utilizzare l'omeomorfismo

$$(4.38) \quad \mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n) \ni \ell_m \rightarrow \ell_m^\perp \in \mathcal{G}r_{n-m}(\mathbb{H}^n),$$

dove ℓ_m^\perp è l' $(n - m)$ -piano ortogonale a ℓ_m , rispetto ad un prodotto scalare iperhermitiano in \mathbb{H}^n . \square

In particolare, $\pi_h(\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)) = 0$ per $h = 0, 1, 2$ e $\pi_3(\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^n)) = \mathbb{Z}$ per ogni $1 \leq m < n$.

4.5. Varietà di sottospazi isotropi

Consideriamo su \mathbb{R}^{m+n} una forma bilineare simmetrica di segnatura (m, n) . Possiamo supporre che $m \leq n$ e che, nella base canonica, la matrice associata alla forma sia la

$$I_{m,n} = \begin{pmatrix} I_m & \\ & -I_n \end{pmatrix}.$$

L'intero m è l'*indice di Witt* della forma: ciò significa che \mathbb{R}^{m+n} contiene sottospazi totalmente isotropi (su cui cioè la forma si restringe alla forma nulla) massimali di dimensione m . Questi formano un sottoinsieme chiuso della grassmanniana $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^{m+n})$.

PROPOSIZIONE 4.5.1. *I sottospazi totalmente isotropi massimali rispetto ad una forma simmetrica di segnatura (m, n) su \mathbb{R}^{m+n} , con $m \leq n$, formano una sottovarietà analitica di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^{m+n})$, diffeomorfa alla varietà di Stiefel $\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^n)$.*

DIMOSTRAZIONE. Un vettore $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$, con $v \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^n$, è totalmente isotropo se e soltanto se $\|v\|_{\mathbb{R}^m} = \|w\|_{\mathbb{R}^n}$. Quindi un sottospazio ℓ_m di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^{m+n})$ totalmente isotropo definisce un'isometria L_{ℓ_m} di \mathbb{R}^m in \mathbb{R}^n , cioè un elemento di $\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^n)$. \square

In modo analogo, possiamo considerare forme hermitiane simmetriche di segnatura (m, n) su \mathbb{C}^{m+n} ed iperhermitiane simmetriche di segnatura (m, n) su \mathbb{H}^{m+n} .

PROPOSIZIONE 4.5.2. *I sottospazi totalmente isotropi massimali rispetto ad una forma hermitiana simmetrica di segnatura (m, n) su \mathbb{C}^{m+n} , con $m \leq n$, formano una sottovarietà analitica di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^{m+n})$, diffeomorfa alla varietà di Stiefel $\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^n)$.*

I sottospazi totalmente isotropi massimali rispetto ad una forma iperhermitiana simmetrica di segnatura (m, n) su \mathbb{H}^{m+n} , con $m \leq n$, formano una sottovarietà analitica di $\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^{m+n})$, diffeomorfa alla varietà di Stiefel $\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^n)$. \square

4.6. Classificazione omotopica dei fibrati principali

Il Teorema 3.8.3 è fondamentale per la classificazione dei fibrati principali la cui base B sia uno spazio cellulare di dimensione finita. Ricordiamo la nozione di fibrato universale introdotta da Milnor (vedi §3.8).

DEFINIZIONE 4.6.1. Un fibrato \mathbf{G} -principale $\zeta = (\pi_\zeta : E(\zeta) \rightarrow B(\zeta))$ si dice *m -universale* se per ogni fibrato \mathbf{G} -principale $\xi = (\pi_\xi : E(\xi) \rightarrow B(\xi))$ la cui base $B(\xi)$ sia un complesso cellulare di dimensione minore o uguale ad m esiste un'applicazione $f \in \mathcal{C}(B(\xi), B(\zeta))$, unica a meno di omotopia, tale che $f^*(\zeta)$ sia equivalente a ξ .

Per i Teoremi 3.8.3 e 3.8.6 abbiamo:

TEOREMA 4.6.2. *Ogni fibrato \mathbf{G} -principale ζ il cui spazio totale $E(\zeta)$ sia m -connesso⁴ è m -universale.* \square

Costruiamo in questo paragrafo alcuni fibrati principali m -universali che ci permetteranno di classificare omotopicamente diversi fibrati vettoriali muniti di \mathbf{G} -struttura.

4.6.1. Sottogruppi del gruppo ortogonale. Fissiamo due interi positivi m ed n e consideriamo $\mathbf{O}(m)$ ed $\mathbf{O}(n)$ come sottogruppi disgiunti di $\mathbf{O}(m+n)$, ciascuno contenuto nel commutatore dell'altro. Il quoziente $E(\zeta) = \mathbf{O}(m+n)/\mathbf{O}(n)$ è la varietà di Stiefel $\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^{m+n})$ delle m -uple ortonormali di \mathbb{R}^{m+n} . Fissiamo un sottogruppo chiuso \mathbf{G} di $\mathbf{O}(m)$ e poniamo $B(\zeta) = \mathbf{O}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{O}(n))$. L'inclusione $\{e\} \times \mathbf{O}(n) \leq \mathbf{G} \times \mathbf{O}(n)$ definisce un'applicazione $\mathbf{O}(m+n)$ -equivariante $\pi_\zeta : E(\zeta) \rightarrow B(\zeta)$ ed una struttura di \mathbf{G} -fibrato principale su ζ . Ricordiamo che la varietà di Stiefel $\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^{m+n})$ è $(n-1)$ -connessa e

$$\pi_n(\mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^{m+n})) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

DEFINIZIONE 4.6.3. Chiamiamo il fibrato ζ , con

$$(4.39) \quad \begin{cases} E(\zeta) = \mathcal{V}'_m(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathbf{O}(m+n)/\mathbf{O}(n), \\ B(\zeta) = \mathbf{O}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{O}(n)), \\ \pi_\zeta : \mathbf{O}(m+n)/\mathbf{O}(n) \longrightarrow \mathbf{O}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{O}(n)) \end{cases}$$

l' n -fibrato principale ortogonale standard con gruppo strutturale $\mathbf{G} \leq \mathbf{O}(m)$.

TEOREMA 4.6.4. *Il fibrato (4.39) è \mathbf{G} -principale ed $(n-1)$ -universale.* \square

Osserviamo che, se $\mathbf{G} = \mathbf{O}(m)$, allora $B(\zeta) = \mathcal{G}r_m(\mathbb{R}^{m+n})$ è la varietà di Grassmann reale.

⁴Ricordiamo che uno spazio topologico E è m -connesso se è connesso per archi ed i suoi gruppi di omotopia $\pi_i(E)$ sono banali per $1 \leq i \leq m$.

4.6.2. Sottogruppi del gruppo unitario. Siano m, n due interi positivi e consideriamo $\mathbf{U}(m)$ ed $\mathbf{U}(n)$ come sottogruppi disgiunti di $\mathbf{U}(m+n)$ contenuti ciascuno nel commutatore dell'altro. Il quoziente $E(\zeta) = \mathbf{U}(m+n)/\mathbf{U}(n)$ è la varietà di Stiefel $\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^{m+n})$. Ricordiamo che

$$\pi_q(\mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^{m+n})) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq q < 2n, \\ \mathbb{Z}, & \text{se } q = 2n. \end{cases}$$

Se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{U}(m)$, la proiezione naturale $\pi_\zeta : E(\zeta) \rightarrow B(\zeta)$ su $B(\zeta) = \mathbf{U}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{U}(n))$ definita dall'inclusione $\{e\} \times \mathbf{U}(n) \leq \mathbf{G} \times \mathbf{U}(n)$ definisce un fibrato \mathbf{G} -principale.

DEFINIZIONE 4.6.5. Chiamiamo

$$(4.40) \quad \begin{cases} E(\zeta) = \mathcal{V}'_m(\mathbb{C}^{m+n}) = \mathbf{U}(m+n)/\mathbf{U}(n), \\ B(\zeta) = \mathbf{U}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{U}(n)), \\ \pi_\zeta : \mathbf{U}(m+n)/\mathbf{U}(n) \rightarrow \mathbf{U}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{U}(n)), \end{cases}$$

l' n -fibrato principale unitario standard con gruppo strutturale $\mathbf{G} \leq \mathbf{U}(m)$.

TEOREMA 4.6.6. *Il fibrato (4.40) è \mathbf{G} -principale $(2n-1)$ -universale.* \square

Osserviamo che, se $\mathbf{G} = \mathbf{U}(m)$, allora $B(\zeta) = \mathcal{G}r_m(\mathbb{C}^{m+n})$ è la varietà di Grassmann complessa.

4.6.3. Sottogruppi del gruppo unitario simplettico. Il gruppo unitario simplettico, o iperunitario, $\mathbf{Sp}(n)$ è il gruppo delle trasformazioni \mathbb{H} -lineari a destra di \mathbb{H}^n che ne lasciano invariato il prodotto scalare iperunitario. Si può anche identificare al sottogruppo di $\mathbf{U}(2n)$ delle trasformazioni che lasciano invariante la forma alternata $\omega = dz^1 \wedge dz^{n+1} + \cdots + dz^{2n-1} \wedge dz^{2n}$. Dati interi positivi m, n , consideriamo $\mathbf{Sp}(m)$ ed $\mathbf{Sp}(n)$ come sottogruppi di $\mathbf{Sp}(m+n)$, ciascuno contenuto nel commutatore dell'altro. Il quoziente $E(\zeta) = \mathbf{Sp}(m+n)/\mathbf{Sp}(n)$ è la varietà di Stiefel quaternionica $\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^{m+n})$ delle m -uple ortonormali di \mathbb{H}^n . Abbiamo

$$\pi_h(\mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^{m+n})) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq h < 4n, \\ \mathbb{Z}, & \text{se } h = 4n. \end{cases}$$

Se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{Sp}(m)$, allora $(\pi_\zeta : E(\zeta) \rightarrow B(\zeta))$, con $B(\zeta) = \mathbf{Sp}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n))$, definita dall'inclusione $\{e\} \times \mathbf{Sp}(n) \leq \mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n)$, è un fibrato \mathbf{G} -principale.

DEFINIZIONE 4.6.7. Chiamiamo

$$(4.41) \quad \begin{cases} E(\zeta) = \mathbf{Sp}(m+n)/\mathbf{Sp}(n) = \mathcal{V}'_m(\mathbb{H}^{m+n}), \\ B(\zeta) = \mathbf{Sp}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n)), \\ \pi_\zeta : \mathbf{Sp}(m+n)/\mathbf{Sp}(n) \rightarrow \mathbf{Sp}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n)) \end{cases}$$

l' n -fibrato principale iperunitario standard con gruppo strutturale $\mathbf{G} \leq \mathbf{Sp}(m)$.

TEOREMA 4.6.8. *Il fibrato (4.41) è \mathbf{G} -principale $(4n-1)$ -universale.* \square

Per $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}(m)$, la $B(\zeta)$ è la grassmanniana quaternionica $\mathcal{G}r_m(\mathbb{H}^{m+n})$.

4.6.4. Sottogruppi del gruppo lineare. Siano m ed n due interi positivi. Consideriamo $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ ed $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ come due sottogruppi disgiunti di $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})$ che commutano tra loro. Le loro rappresentazioni in $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})$ sono date rispettivamente da

$$\begin{aligned} \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \ni x &\rightarrow \begin{pmatrix} x & & \\ & \text{sgn}(\det x) & \\ & & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R}) \quad \text{ed} \\ \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \ni x &\rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ & x \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Per la decomposizione di Cartan, $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ è omotopicamente equivalente al quoziente $\mathbf{O}(m+n)/\mathbf{O}(n)$, cioè alla varietà di Stiefel $\mathcal{V}_m'(\mathbb{R}^{n+n})$, ed è quindi $(n-1)$ -connesso. Ne segue che, se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$, allora

$$(4.42) \quad \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/(\mathbf{G} \times \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}))$$

è un fibrato \mathbf{G} -principale $(n-1)$ -universale.

Costruzioni analoghe ci permettono di ottenere fibrati \mathbf{G} -principali n -universali per sottogruppi chiusi di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{C})$ e $\mathbf{GL}_m(\mathbb{H})$.

4.7. Sottospazi Lagrangiani reali

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione pari $2n$. Una forma bilineare alternata non degenera ω su V ne definisce una *struttura simplettica*.

DEFINIZIONE 4.7.1. Chiamiamo *totalmente isotropo* un sottospazio W di V per cui sia $\omega(w_1, w_2) = 0$ per ogni $w_1, w_2 \in W$. Un sottospazio totalmente isotropo di dimensione massimale n si dice *lagrangiano*. Indichiamo con $\mathcal{L}(V)$, o $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(V)$, la grassmanniana dei sottospazi lagrangiani di V .

Spazi vettoriali simplettici reali della stessa dimensione sono simpletticamente isomorfi. Possiamo quindi limitarci a discutere un modello standard. Consideriamo $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ e sia ω la parte immaginaria del prodotto scalare hermitiano di \mathbb{C}^n :

$$\omega(v, w) = \text{Im}(w^* v), \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^n.$$

Lo spazio vettoriale reale generato dai vettori di una base ortonormale (v_1, \dots, v_n) di \mathbb{C}^n è un sottospazio lagrangiano di \mathbb{R}^{2n} . Viceversa, ogni sottospazio lagrangiano contiene una base ortonormale rispetto al prodotto scalare hermitiano. Quindi il gruppo unitario $\mathbf{U}(n)$ opera transitivamente su $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$. Lo stabilizzatore di $\langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ è il gruppo ortogonale $\mathbf{O}(n)$. Otteniamo quindi

PROPOSIZIONE 4.7.2. *La varietà $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ dei sottospazi lagrangiani di \mathbb{R}^{2n} è una varietà analitica, connessa e compatta, di dimensione reale $n(n+1)/2$, diffeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{U}(n)/\mathbf{O}(n)$.*

DIMOSTRAZIONE. Connessione e compattezza sono conseguenze della connessione e compattezza del gruppo unitario $\mathbf{U}(n)$. La dimensione di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ è

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{U}(n)) - \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{O}(n)) = n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2. \quad \square$$

La descrizione di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ come spazio omogeneo, ne dà una presentazione come base di un fibrato principale con spazio totale $\mathbf{U}(n)$ e gruppo strutturale $\mathbf{O}(n)$. I gruppi di omotopia della varietà dei sottospazi lagrangiani sono legati a quelli dei gruppi unitario ed ortogonale dalla successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{O}(n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{U}(n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})) \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \cdots \end{array}$$

che mette in relazione i gruppi di omotopia di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ a partire da quelli del gruppo unitario e del gruppo ortogonale. In particolare, per quanto riguarda il gruppo fondamentale, dal momento che $\mathbf{U}(n)$ ed $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ sono connessi, ed $\mathbf{O}(n)$ ha due componenti connesse, abbiamo una successione esatta di omotopia

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(\mathbf{O}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{U}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0, \\ \simeq \mathbb{Z}_2 & & \simeq \mathbb{Z} & & & & \end{array}$$

da cui ricaviamo che $\pi_1(\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})) \simeq \mathbb{Z}$. Abbiamo ottenuto

PROPOSIZIONE 4.7.3. *La varietà $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ non è semplicemente connessa, ed ha gruppo fondamentale isomorfo a \mathbb{Z} .* \square

Descriviamo alcuni altri spazi omogenei del gruppo unitario.

Il quoziente $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^{2n}) = \mathbf{U}(n)/\mathbf{SO}(n)$ si può interpretare come lo spazio dei sottospazi lagrangiani *orientati* di \mathbb{R}^{2n} ed è un rivestimento a due fogli di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$.

Una *forma reale* di \mathbb{C}^n è il sottospazio reale generato da una qualsiasi sua base. Ad una forma reale $\ell = \langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{R}}$ possiamo associare il numero complesso

$$\varepsilon(\ell) = \left(\frac{\det(v_1, \dots, v_n)}{|\det(v_1, \dots, v_n)|} \right)^2 \in S^1.$$

La grassmanniana delle forme reali ℓ per cui $\varepsilon(\ell) = 1$ è una varietà omogenea M , omeomorfa al quoziente $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SO}(n)$ e quindi compatta, connessa e semplicemente connessa di dimensione $(n^2 + n - 2)/2$.

4.8. Sottospazi Lagrangiani complessi

Uno *spazio simplettico complesso* è uno spazio vettoriale complesso V di dimensione pari su cui sia stata fissata una forma bilineare non degenera ω .

DEFINIZIONE 4.8.1. Chiamiamo *totalmente isotropo* un sottospazio W di V per cui sia $\omega(w_1, w_2) = 0$ per ogni $w_1, w_2 \in W$. Un sottospazio totalmente isotropo di dimensione massimale n si dice *lagrangiano*. Indichiamo con $\mathcal{L}(V)$, o con $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V)$, la grassmanniana dei sottospazi lagrangiani di V .

Poiché spazi simplettici complessi della stessa dimensione sono isomorfi, possiamo limitarci a considerare un caso modello.

Siano i, j, κ le unità immaginarie standard di \mathbb{H} ed identifichiamo \mathbb{C} al sottospazio reale di \mathbb{H} generato da 1 ed i . Possiamo considerare \mathbb{H}^n come uno spazio vettoriale complesso per restrizione degli scalari. Il prodotto iperunitario di \mathbb{H}^n si potrà scrivere allora nella forma

$$(v|w)_{\mathbb{H}} = w^* v = h(v, w) + j \cdot \omega(v, w), \quad \text{con } h(v, w), \omega(v, w) \in \mathbb{C}, \forall v, w \in \mathbb{H}^n.$$

Sia h che ω sono additive rispetto a ciascun argomento. Se $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, abbiamo

$$\begin{aligned} (v \cdot \lambda | w \cdot \mu)_{\mathbb{H}} &= \bar{\mu} \cdot w^* v \cdot \lambda = \bar{\mu} \cdot (h(v, w) + j \cdot \omega(v, w)) \cdot \lambda \\ &= (\lambda \cdot \bar{\mu} \cdot h(v, w)) + j \cdot (\lambda \cdot \bar{\mu} \cdot \omega(v, w)) \end{aligned}$$

perché $\bar{\mu} \cdot j = j \cdot \mu$. Quindi, la h è una forma hermitiana simmetrica, mentre la ω è bilineare ed antisimmetrica perché $\omega(v, v) = 0$ per ogni v , in quanto $(v|v)_{\mathbb{H}}$ è reale. Si verifica facilmente che h è definita positiva ed ω non degenera: infatti $h(v, v) = \|v\|^2$ ed $\omega(v, w \cdot j) = h(v, w)$.

Ragionando come nel caso reale, possiamo identificare gli n -piani Lagrangiani di $\mathbb{C}^{2n} \simeq \mathbb{H}^n$ agli n -piani complessi generati dalle basi ortonormali di \mathbb{H}^n . Quindi il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ opera transitivamente su $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{2n})$. Lo stabilizzatore in $\mathbf{Sp}(n)$ dell' n -piano complesso $\langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{C}}$ generato dai vettori della base canonica è il gruppo unitario $\mathbf{U}(n)$. Quindi $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{2n}) \simeq \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{U}(n)$ è una varietà connessa e compatta di dimensione $n(2n+1) - n^2 = n(n+1)$. Abbiamo perciò

PROPOSIZIONE 4.8.2. *La grassmanniana $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{2n})$ dei sottospazi complessi lagrangiani di $(\mathbb{C}^{2n}, \omega)$ è una varietà compatta, connessa e semplicemente connessa, di dimensione reale $n(n+1)$, \mathcal{C}^ω -diffeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{Sp}(n)/\mathbf{U}(n)$. \square*

OSSERVAZIONE 4.8.3. In effetti, M è una varietà complessa compatta di dimensione $n(n+1)/2$. Per dimostrarlo, è conveniente considerarla come il quoziente di $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ rispetto ad un suo sottogruppo parabolico (vedi [1, 8]).

4.9. Sottospazi proiettivi di una quadrica proiettiva complessa

Sia Q una quadrica non degenera di $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$. Per ogni intero positivo h con $2h \leq n$, la quadrica contiene sottospazi proiettivi di dimensione $(h-1)$. Indichiamo con $M_h(\mathbb{C}^n)$ l'insieme degli elementi di $\mathcal{G}r_h(\mathbb{C}^n)$ corrispondenti ai sottospazi proiettivi di dimensione $(h-1)$ contenuti in Q .

Per descrivere la struttura di $M_h(\mathbb{C}^n)$, è conveniente premettere un'osservazione sull'azione di gruppi unitari sulle varietà di Stiefel reali. Fissiamo un intero positivo h con $2h \leq n$. Se $(u_1, \dots, u_h, v_1, \dots, v_h) \in \mathcal{V}_{2h}(\mathbb{R}^n)$, allora i vettori $(w_i = u_i + i \cdot v_i)_{1 \leq i \leq h}$ formano una base ortogonale di \mathbb{C}^h , con $\|w_i\|^2 = 2$ per $1 \leq i \leq h$. Se $x \in \mathbf{U}(h)$, possiamo allora considerare $(w_1, \dots, w_h) \cdot x = (w'_1, \dots, w'_h)$ e porre

$$(\mathcal{R}e(w'_1), \dots, \mathcal{R}e(w'_h), \mathcal{I}m(w'_1), \dots, \mathcal{I}m(w'_h)) = (u_1, \dots, u_h, v_1, \dots, v_h) \cdot x.$$

Abbiamo definito in questo modo un'azione a destra

$$(4.43) \quad \mathcal{V}_{2h}(\mathbb{R}^n) \times \mathbf{U}(h) \ni (X, x) \longrightarrow X \cdot x \in \mathcal{V}_{2h}(\mathbb{R}^n).$$

PROPOSIZIONE 4.9.1. *Per ogni intero h con $1 < 2h \leq n$, la $M_h(\mathbb{C}^n)$ è la base di un fibrato $\mathbf{U}(h)$ -principale con spazio totale $\mathcal{V}_{2h}(\mathbb{R}^n)$ ed azione di gruppo descritta da (4.9). In particolare, M_h è una varietà analitica compatta, che è connessa se $2h < n$ ed ha due componenti connesse se $h = 2n$, di dimensione reale $h(2n-3h-1)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{w^\top w = 0\}$ l'equazione in coordinate omogenee di Q . Dato un qualsiasi h -piano ℓ in $M_h(\mathbb{C}^n)$, possiamo fissarne una base (w_1, \dots, w_h) con la proprietà che $w_j^* w_i = 2 \cdot \delta_{i,j}$ per ogni $1 \leq i, j \leq h$. Poiché $w_j^\top w_i = 0$ per $1 \leq i, j \leq h$, i vettori $\Re(w_1), \dots, \Re(w_h), \Im(w_1), \dots, \Im(w_h)$ formano un sistema ortonormale in \mathbb{R}^n . Viceversa, se $(u_1, \dots, u_h, v_1, \dots, v_h) \in \mathcal{V}_{2h}(\mathbb{R}^n)$, allora l' h -piano $\ell = \langle u_1 + i \cdot v_1, \dots, u_h + i \cdot v_h \rangle_{\mathbb{C}}$ è un punto di $M_h(\mathbb{C}^n)$. Da questo segue che i punti di $M_h(\mathbb{C}^n)$ sono in corrispondenza biunivoca con le orbite di $\mathbf{U}(h)$ per la sua azione a destra in $\mathcal{V}_{2h}(\mathbb{R}^n)$. \square

OSSERVAZIONE 4.9.2. Le varietà $M_h(\mathbb{C}^n)$ sono *varietà bandiera complesse* di dimensione $h(2n - 3h - 1)/2$. (vedi ad esempio [1, 8]).

Osserviamo che, in particolare

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{C}^{2n}) &= \mathbf{O}(2n)/\mathbf{U}(n), & \text{che ha dimensione reale } n(n-1), \\ M_n(\mathbb{C}^{2n+1}) &= \mathbf{SO}(2n+1)/\mathbf{U}(n), & \text{che ha dimensione reale } n(n+1). \end{aligned}$$

CAPITOLO V

Fibrati vettoriali

5.1. Fibrati vettoriali

Con le notazioni introdotte nel Capitolo III, uno spazio vettoriale V , di dimensione finita su un corpo \mathbb{k} , è un $\mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V)$ -spazio. Supporremo nel seguito che \mathbb{k} sia uno dei campi $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, in modo che l'azione del gruppo lineare sia continua e valgano quindi le considerazioni generali del Capitolo III.

DEFINIZIONE 5.1.1. Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{k} . Chiamiamo *fibrato vettoriale con fibra tipica V* un V -fibrato di Steenrod.

Possiamo considerare gli elementi v dello spazio totale $E(\xi)$ come *vettori applicati nel punto $b = \pi_{\xi}(v)$* della base. Poiché i vettori applicati si possono moltiplicare per uno scalare e sommare tra loro solo se hanno lo stesso punto d'applicazione, abbiamo delle mappe naturali

$$(5.1) \quad \begin{cases} E(\xi \oplus_{B(\xi)} \xi) \ni (v_1, v_2) \longrightarrow v_1 + v_2 \in E(\xi), \\ \mathbb{k} \times E(\xi) \ni (\lambda, v) \longrightarrow \lambda \cdot v \in E(\xi). \end{cases}$$

PROPOSIZIONE 5.1.2. *Su un fibrato vettoriale ξ , le operazioni (5.1) sono continue.*

DIMOSTRAZIONE. Nel caso del fibrato banale, la tesi si riduce alla continuità delle operazioni di somma e di prodotto per scalare in uno spazio vettoriale. Quindi, poiché i fibrati di Steenrod sono localmente banali, le operazioni (5.1) sono localmente continue e perciò continue. \square

PROPOSIZIONE 5.1.3. *Le (5.1) definiscono sullo spazio $\Gamma_{\xi}(B(\xi), E(\xi))$ delle sezioni una somma ed un prodotto per scalare che lo rendono uno spazio vettoriale su \mathbb{k} . Somma e prodotto per scalare sono continue per la topologia compatta-aperta.* \square

DEFINIZIONE 5.1.4. Il fibrato $\mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V)$ -principale $P(\xi)$ associato ad un fibrato vettoriale ξ si dice il fibrato dei suoi *sistemi di riferimento* e si indica con $F(\xi)$.

Per ogni punto b della base $B(\xi)$ la fibra $E_b(\xi)$ è un \mathbb{k} -spazio vettoriale isomorfo a V e gli elementi della fibra $E_b(F(\xi))$ sono gli isomorfismi \mathbb{k} -lineari $\sigma : V \rightarrow E_b(\xi)$.

Abbiamo osservato nel §3.5.5 che ξ e $F(\xi)$ hanno gli stessi atlanti di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_j, \sigma_j)\}$ in cui $\mathcal{U} = \{U_j\}$ è un ricoprimento aperto di $B(\xi)$ e le σ_j sono sezioni su $U_{i,j}$ del fibrato dei sistemi di riferimento. Le trivializzazioni locali sono definite dalle

$$U_j \times V \ni (b, v) \longrightarrow \sigma_j(b)(v) \in E(\xi)|_{U_j}$$

e le funzioni di transizione $g_{i,j} \in \mathcal{C}(U_{i,j}, \mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V))$ sono definite da

$$g_{i,j}(b) = [\sigma_j(b)]^{-1} \circ \sigma_i(b) \text{ sulle intersezioni } U_{i,j} = U_i \cap U_j.$$

Ad ogni sezione $s \in \Gamma_{\xi}(B(\xi), E(\xi))$ di un fibrato vettoriale con fibra tipica V corrisponde una *funzione* continua $\tilde{s} \in \mathcal{C}(E(F(\xi)), V)$ definita sui sistemi di riferimento ed a valori in V , mediante

$$\tilde{s}(\sigma) = \sigma^{-1}(s(\pi_{\xi}(\sigma))), \quad \forall \sigma \in E(F(\xi)).$$

DEFINIZIONE 5.1.5. Chiamiamo la \tilde{s} il *sollevamento* della sezione s .

PROPOSIZIONE 5.1.6. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f \in \mathcal{C}(E(F(\xi)), V)$ sia il sollevamento di una sezione di $\Gamma_{\xi}(B(\xi), E(\xi))$ è che*

$$f(\sigma \cdot x) = x^{-1}(f(\sigma)), \quad \forall \sigma \in E(F(\xi)), \quad \forall x \in \mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V). \quad \square$$

5.2. Gruppo strutturale

Fissiamo un sottogruppo \mathbf{G} del gruppo lineare $\mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V)$ e scriviamo $V_{\mathbf{G}}$ per indicare lo spazio vettoriale V , pensato come un \mathbf{G} -spazio. Sia ξ un fibrato vettoriale con fibra tipica V .

DEFINIZIONE 5.2.1. Chiamiamo \mathbf{G} -struttura su ξ una sua struttura di $V_{\mathbf{G}}$ -fibrato di Steenrod. Diremo in questo caso che ξ è un \mathbf{G} -fibrato¹ vettoriale, o un *fibrato vettoriale con gruppo strutturale \mathbf{G}* .

Per il Teorema 3.5.15, i fibrati vettoriali su B dotati di una \mathbf{G} -struttura sono in corrispondenza biunivoca con i \mathbf{G} -fibrati principali su B . Indicheremo con $F_{\mathbf{G}}(\xi)$ il fibrato dei sistemi di riferimento di una \mathbf{G} -struttura di ξ assegnata.

DEFINIZIONE 5.2.2. Definiamo \mathbf{G} -atlante di trivializzazione di un fibrato vettoriale ξ un suo atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i)\}$ le cui funzioni di transizione $g_{i,j} = \sigma_j^{-1} \circ \sigma_i$ siano a valori in \mathbf{G} .

Due \mathbf{G} -atlanti di trivializzazione \mathcal{A} ed \mathcal{A}' , sono *equivalenti* se $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ è ancora un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione.

L'unione di tutti i \mathbf{G} -atlanti di trivializzazione equivalenti ad un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione assegnato è un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione massimale.

PROPOSIZIONE 5.2.3. *Le \mathbf{G} -strutture su un fibrato vettoriale ξ sono in corrispondenza biunivoca con i suoi \mathbf{G} -atlanti di trivializzazione massimali. In particolare, ogni \mathbf{G} -atlante di trivializzazione di ξ definisce su di esso una \mathbf{G} -struttura.* \square

Una carta locale di trivializzazione (U, σ_U) di ξ è *compatibile* con la \mathbf{G} -struttura se appartiene al suo \mathbf{G} -atlante di trivializzazione massimale.

Se \mathbf{H} è un sottogruppo di \mathbf{G} , ogni \mathbf{H} -atlante di trivializzazione di ξ è anche un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione ed abbiamo un morfismo d'inclusione dei corrispondenti sistemi di riferimento: $F_{\mathbf{H}}(\xi) \hookrightarrow F_{\mathbf{G}}(\xi)$.

¹In fisica il *gruppo strutturale* si dice anche *gruppo di gauge*.

DEFINIZIONE 5.2.4. Diciamo in questo caso che l' \mathbf{H} -struttura su ξ è stata ottenuta dalla \mathbf{G} -struttura per *riduzione del gruppo strutturale* e che la \mathbf{G} -struttura è ottenuta dalla \mathbf{H} -struttura per *allargamento del gruppo strutturale*.

In particolare: le \mathbf{G} -strutture su un fibrato vettoriale ξ sono in corrispondenza biunivoca con le \mathbf{G} -riduzioni del fibrato $F(\xi) = F_{\mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V)}(\xi)$ di tutti i suoi sistemi di riferimento lineari.

Due \mathbf{G} -strutture su ξ sono equivalenti se i corrispondenti \mathbf{G} -fibrati principali dei loro sistemi di riferimento lo sono come fibrati \mathbf{G} -principali.

PROPOSIZIONE 5.2.5. *Siano assegnati un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di $B(\xi)$ ed una famiglia $\{g_{i,j} \in \mathcal{C}(U_{i,j}, \mathbf{G})\}$ di funzioni continue tali che*

$$g_{i,i} = \text{id}_V \text{ su } U_i, \quad g_{i,j}(b)g_{j,h}(b) = g_{i,h}(b), \quad \forall b \in U_{i,j,h} = U_i \cap U_j \cap U_h, \quad \forall i, j, h \in I.$$

Risulta allora determinata, unica a meno di equivalenze, una \mathbf{G} -struttura su ξ per cui $\{g_{i,j}\}$ sia la famiglia delle funzioni di transizione di un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione. \square

Su uno spazio vettoriale V su \mathbb{k} possiamo fissare prodotti scalari hermitiani rispetto a \mathbb{k} . Indichiamo con $\mathbf{O}_q(V)$, $\mathbf{U}_q(V)$, $\mathbf{Sp}_q(V)$ i corrispondenti gruppi di isometrie \mathbb{k} -lineari di V nel caso reale, complesso e quaternionico, rispettivamente.

PROPOSIZIONE 5.2.6. *Sia ξ un fibrato vettoriale con fibra tipica V . Se la base $B(\xi)$ è paracompatta, allora è possibile ridurre il gruppo strutturale di ξ ad $\mathbf{O}_q(V)$, $\mathbf{U}_q(V)$, $\mathbf{Sp}_q(V)$, a seconda che \mathbb{k} sia il corpo dei reali, dei complessi o dei quaternioni, rispettivamente.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una partizione dell'unità $\{\kappa_i\}$ su $B(\xi)$, subordinata al ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}$ degli aperti di un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i)\}$ di ξ . Fissata la forma quadratica q su V , definiamo una forma quadratica sulle fibre di ξ ponendo

$$\mathfrak{g}(v) = \sum_{\pi_\xi(v) \in U_i} \chi_i(\pi_\xi(b)) \cdot q(\sigma_i^{-1}(v)).$$

Il fibrato dei sistemi di riferimento consiste allora delle applicazioni \mathbb{k} -lineari di V sulle fibre $E_b(\xi)$ che sono isometrie di (V, q) su $(E_b(\xi), \mathfrak{g})$, al variare di b in $B(\xi)$. \square

COROLLARIO 5.2.7. *Se η è un sottofibrato vettoriale del fibrato vettoriale ξ , allora possiamo trovare un sottofibrato vettoriale η' di ξ tale che $\xi \approx \oplus_{B(\xi)} \eta'$.*

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 5.2.6 possiamo ridurre il gruppo strutturale di ξ ad uno dei gruppi compatti $\mathbf{O}_q(V)$, $\mathbf{U}_q(V)$, $\mathbf{Sp}_q(V)$. Possiamo allora definire il fibrato perpendicolare η^\perp le cui fibre sono le $(E_b(\eta))^\perp$ in $(E_b(\xi), \mathfrak{g})$ e ξ è equivalente alla somma di Whitney $\eta \oplus_B \eta^\perp$. \square

5.3. Fibrati vettoriali associati a rappresentazioni lineari

L'Osservazione 3.5.16 si applica al caso di fibrati \mathbf{G} -principali e di rappresentazioni lineari del loro gruppo strutturale \mathbf{G} .

Se γ è un fibrato \mathbf{G} -principale, il gruppo strutturale \mathbf{G} opera sul suo spazio totale $E(\gamma)$ per *moltiplicazione a destra*: $E(\gamma) \times \mathbf{G} \ni (\sigma, x) \rightarrow \sigma \cdot x \in E(\gamma)$.

Una *rappresentazione \mathbb{k} -lineare* V di \mathbf{G} è un'azione $\mathbf{G} \times V \ni (x, v) \rightarrow x \cdot v \in V$ a sinistra per cui la $v \rightarrow x \cdot v$ sia \mathbb{k} -lineare.

Possiamo quindi definire lo spazio totale

$$E_V = \{\sigma \cdot v \mid \sigma \in E(\gamma), v \in V\}$$

di un fibrato vettoriale γ_V indicando con $\sigma \cdot v$ l'elemento corrispondente alla coppia (σ, v) nel quoziente di $E(\gamma) \times V$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica $(\sigma \cdot v)$ con $((\sigma \cdot x) \cdot x^{-1}(v))$ per ogni $x \in \mathbf{G}$. Con $B = B(\gamma) = B(\gamma_V)$, abbiamo il diagramma commutativo

$$(5.2) \quad \begin{array}{ccc} & E(\gamma) \times V & \\ \text{pr}_{E(\gamma)} \swarrow & & \searrow (\sigma, v) \rightarrow \sigma \cdot v \\ E(\gamma) & & E_V \\ \pi_\gamma \searrow & & \swarrow \pi_{\gamma_V} \\ & B & \end{array}$$

Riassumiamo questa costruzione nell'enunciato:

PROPOSIZIONE 5.3.1. *Sia γ un fibrato \mathbf{G} -principale sulla base B . Ad ogni rappresentazione lineare V del suo gruppo strutturale \mathbf{G} risulta associato un fibrato vettoriale γ_V su B , con fibra tipica V , tale che (5.2) sia un diagramma commutativo di fibrati. \square*

Nota che le frecce che scendono verso sinistra sono proiezioni di fibrati vettoriali, quelle che scendono verso destra di fibrati \mathbf{G} -principali (\mathbf{G} agisce su $E(\gamma) \times V$ mediante $(\sigma, v) \cdot x = (\sigma \cdot x, x^{-1}(v))$.) Il fibrato $E_V \rightarrow B$ è di Stiefel rispetto al quoziente \mathbf{G}/\mathbf{H} di \mathbf{G} rispetto al nucleo d'infedeltà \mathbf{H} della rappresentazione di \mathbf{G} su V .

5.4. Equivalenza di fibrati vettoriali

Fissiamo un sottogruppo \mathbf{G} del gruppo lineare $\mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V)$. Due \mathbf{G} -fibrati vettoriali ξ, η sulla stessa base B sono *equivalenti* se è possibile definire un omeomorfismo $f \in \mathcal{C}(E(\xi), E(\eta))$ che sia \mathbb{k} -lineare sulle fibre, \mathbf{G} -equivariante, e renda commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{f} & E(\eta) \\ \pi_\xi \searrow & & \swarrow \pi_\eta \\ & B & \end{array}$$

Indichiamo con $\mathcal{V}_{\mathbf{G}}(B)$ l'insieme delle classi di equivalenza di \mathbf{G} -fibrati vettoriali con base B . Per la Proposizione 5.2.5, le funzioni di transizione $\{g_{i,j}\}$ di un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i)\}$ di ξ determinano completamente la sua classe $[\xi]$ in $\mathcal{V}_{\mathbf{G}}(B)$. Possiamo utilizzare questa osservazione per dare una caratterizzazione *coomologica* di $\mathcal{V}_{\mathbf{G}}(B)$.

Fissato un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di B , ed un intero $q \geq 0$, indichiamo con $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G}))$ l'insieme delle q -catene di Čech di \mathcal{U} , a coefficienti nel fascio $\mathcal{L}(\mathbf{G})$ dei germi di applicazioni continue su B a valori in $\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(n)$. Un elemento di $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G}))$ è una famiglia $(g_{i_0, i_1, \dots, i_q})$, indicizzata con le $(q+1)$ -uple di indici i per cui $U_{i_0, i_1, \dots, i_q} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_q} \neq \emptyset$, ciascun elemento della quale è un'applicazione continua

$$g_{i_0, i_1, \dots, i_q} : U_{i_0, i_1, \dots, i_q} \longrightarrow \mathbf{G}, \quad \text{con } g_{i_{a_0}, i_{a_1}, \dots, i_{a_q}} = [g_{i_0, i_1, \dots, i_q}]^{\varepsilon(a)}, \quad \forall a \in \mathbf{S}_{q+1}.$$

Qui $\varepsilon(a) = \pm 1$ è la segnatura della permutazione a .

Nel Capitolo XV discuteremo la *coomologia di Čech* con coefficienti in fasci di gruppi abeliani. Poiché qui non supponiamo che \mathbf{G} sia abeliano, possiamo definire soltanto il primo spazio di coomologia. Siano

$$\delta_0 : C^0(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) \ni (g_i) \longrightarrow (g_{i,j}(b) = g_i(b)[\cdot g_j(b)]^{-1}) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})),$$

$$\delta_1 : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) \ni (g_{i,j}) \longrightarrow (g_{i,j,h} = g_{i,j} \cdot g_{j,h} \cdot g_{h,i}) \in C^2(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})).$$

gli operatori di cobordo. Otteniamo una successione di applicazioni

$$(*) \quad C^0(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) \xrightarrow{\delta_0} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) \xrightarrow{\delta_1} C^2(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})).$$

In ciascuno degli spazi $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G}))$ fissiamo il punto speciale 1_q , definito dalla (g_{i_0, \dots, i_q}^0) , con $g_{i_0, \dots, i_q}^0(b) = I_n$ per ogni $b \in U_{i_0, \dots, i_q}$. Allora (*) è un *complesso di spazi puntati*: ciò significa che $\delta_0(1_0) = 1_1$, $\delta_1(1_1) = 1_2$ e che, per ogni $(g_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G}))$, è $\delta_1 \circ \delta_0(g_i) = 1_2$. Il *primo spazio di coomologia di \mathcal{U} a coefficienti in $\mathcal{L}(\mathbf{G})$* si definisce come il quoziente

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) = \delta_1^{-1}(1_2) / \text{Immagine}(\delta_0).$$

Ad un *raffinamento* $\mathcal{U}' = \{U'_j\}$ di \mathcal{U} , con $U'_j \subset U_{i_j}$, associamo applicazioni di *restrizione* $r_q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) \rightarrow C^q(\mathcal{U}', \mathcal{L}(\mathbf{G}))$ definite da

$$r_q(g_{i_0, \dots, i_q}) = (g_{i_{j_0}, \dots, i_{j_q}} |_{U'_{j_0, \dots, j_q}}).$$

Abbiamo allora un diagramma commutativo di complessi:

$$\begin{array}{ccccc} C^0(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) & \xrightarrow{\delta_0} & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) & \xrightarrow{\delta_1} & C^2(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) \\ r_0 \downarrow & & r_1 \downarrow & & r_2 \downarrow \\ C^0(\mathcal{U}', \mathcal{L}(\mathbf{G})) & \xrightarrow{\delta_0} & C^1(\mathcal{U}', \mathcal{L}(\mathbf{G})) & \xrightarrow{\delta_1} & C^2(\mathcal{U}', \mathcal{L}(\mathbf{G})), \end{array}$$

che ci permette, per passaggio al quoziente, di definire un'applicazione

$$r_* : H^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G})) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}', \mathcal{L}(\mathbf{G}))$$

tra i gruppi di coomologia. La *coomologia di Čech di B a coefficienti in $\mathcal{L}(\mathbf{G})$* si definisce come il limite induttivo, o diretto, dei gruppi $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbf{G}))$ rispetto all'ordinamento parziale per cui $\mathcal{U} < \mathcal{U}'$ se \mathcal{U}' è un raffinamento di \mathcal{U} e alle applicazioni r_* che abbiamo descritto sopra. Indichiamo questo limite con $H^1(B, \mathcal{L}(\mathbf{G}))$.

TEOREMA 5.4.1. *La corrispondenza che associa ad ogni fibrato vettoriale di rango n su B la classe di $H^1(B, \mathcal{C}(\mathbf{G}))$ di un suo qualsiasi atlante di trivializzazione definisce, per passaggio al quoziente, una corrispondenza biunivoca di $H^1(B, \mathcal{C}(\mathbf{G}))$ con $\mathcal{V}_{\mathbf{G}}(B)$. \square*

5.5. Fibrati vettoriali sulle sfere

Decomponiamo la sfera $S^m = \{(x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{h=0}^m x_h^2 = 1\}$ nell'unione $S^m = D_+^m \cup D_-^m$ delle celle chiuse $D_+^m = \{x \in S^m \mid x_m \geq 0\}$, $D_-^m = \{x \in S^m \mid x_m \leq 0\}$, con $D_+^m \cap D_-^m = S^{m-1} = \{x \in S^m \mid x_m = 0\}$.

Fissiamo un sottogruppo \mathbf{G} del gruppo lineare $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$. Ad un'applicazione continua $f : S^{m-1} \rightarrow \mathbf{G}$, possiamo associare il \mathbf{G} -fibrato vettoriale $\xi_f = (E_f \rightarrow S^m)$ che si ottiene incollando i fibrati banali $D_+^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow D_+^m$ e $D_-^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow D_-^m$ mediante la *funzione di clutching*² che associa ad $(x, v) \in S^{m-1} \times \mathbb{R}^n \subset D_+^m \times \mathbb{R}^n$ la $(x, f(x)(v)) \in S^{m-1} \times \mathbb{R}^n \subset D_-^m \times \mathbb{R}^n$. Si dimostra facilmente che

LEMMA 5.5.1. *Se le due funzioni di clutching $f_0, f_1 \in \mathcal{C}(S^{m-1}, \mathbf{G})$ sono omotopie, allora i fibrati vettoriali ξ_{f_0} e ξ_{f_1} sono equivalenti. Risulta quindi definita un'applicazione naturale*

$$(5.3) \quad \pi(S^{m-1}, \mathbf{G}) \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{G}}(S^m). \quad \square$$

Poiché D_+^m e D_-^m sono contrattili, i fibrati vettoriali con basi D_+^m e D_-^m sono banali. Osserviamo ancora che, se $a \in \mathbf{G}$ ed f una funzione di clutching, la $a \cdot f$ è la funzione di clutching rispetto ad una diversa trivializzazione. Ogni fibrato può quindi essere rappresentato da una funzione di clutching f con $f(e_0) = I_n$. Questo ci permette di sostituire, nella (5.3), all'omotopia libera $\pi(S^{m-1}, \mathbf{G})$ l'omotopia $\pi(S^{m-1}, e_0; \mathbf{G}, I_n) = \pi_{m-1}(\mathbf{G})$. Da queste osservazioni segue il

LEMMA 5.5.2. *Abbiamo un'applicazione surgettiva*

$$(5.4) \quad \pi_{m-1}(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{G}}(S^m). \quad \square$$

Lo studio dell'applicazione (5.4) è complicato dal fatto che il gruppo \mathbf{G} possa non essere connesso per archi. Possiamo tenerne conto osservando che \mathbf{G} agisce in modo naturale sulle funzioni di clutching mediante

$$\mathbf{G} \times \mathcal{C}(S^{m-1}, \mathbf{G}) \ni (a, f) \longrightarrow a \cdot f(\cdot) \cdot a^{-1} \in \mathcal{C}(S^{m-1}, \mathbf{G}).$$

Per passaggio ai quozienti, questa definisce un'azione di $\pi_0(\mathbf{G})$ su $\pi_{m-1}(\mathbf{G})$.

TEOREMA 5.5.3. *Abbiamo una bigezione*

$$(5.5) \quad \pi_{m-1}(\mathbf{G})/\pi_0(\mathbf{G}) \longleftarrow \mathcal{V}_{\mathbb{R}}^m(S^m).$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 5.5.1, l'applicazione

$$\pi_{m-1}(\mathbf{G})/\pi_0(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{R}}^m(S^m)$$

è surgettiva. Resta da verificare l'iniettività. Siano $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(S^{m-1}, e_0; \mathbf{G}, I_n)$ tali che $\xi_{f_1} \approx \xi_{f_2}$.

²“clutch” è in inglese la frizione.

L'equivalenza dei fibrati è definita da due funzioni $g_{\pm} \in \mathcal{C}(D_{\pm}^m, \mathbf{G})$ tali che (indicando ancora con g_{\pm} le restrizioni ad S^{m-1}) il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S^{m-1} \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\text{id} \times g_+} & S^{m-1} \times \mathbb{R}^n \\ \text{id} \times f_1 \downarrow & & \downarrow \text{id} \times f_2 \\ S^{m-1} \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\text{id} \times g_-} & S^{m-1} \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

sia commutativo. Abbiamo quindi $f_2(x) = [g_-(x)]^{-1} \circ f_1(x) \circ g_+(x)$, per ogni $x \in S^{m-1}$. Poiché g_+ e g_- sono definite sui dischi D_{\pm}^m che sono contrattili e, da $f_1(e_0) = f_2(e_0) = I_n$ ricaviamo che $[g_-(e_0)]^{-1} \circ g_+(e_0) = I_n$, le due funzioni g_{\pm} , ristrette ad S^{m-1} , definiscono la stessa classe di omotopia. Questo dimostra l'iniettività e completa quindi la dimostrazione del teorema. \square

Questa caratterizzazione omotopica dell'equivalenza di \mathbf{G} -fibrati vettoriali si può trovare, ad esempio, in [17]. Discutiamo brevemente le conseguenze del Teorema 5.5.3 nel caso di fibrati vettoriali su $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, il cui gruppo strutturale sia l'intero gruppo lineare.

Il gruppo lineare reale ha due componenti. La componente connessa dell'identità $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ consiste delle matrici $a \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con determinante positivo. I fibrati su cui possiamo utilizzare $\mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R})$ come gruppo strutturale sono detti *orientabili*. Poiché $\mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R})$ è connesso, abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\pi_{m-1}(\mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R})) \longleftrightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R})}(S^m).$$

Se $m > 1$, allora $\pi_{m-1}(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})) = \pi_{m-1}(\mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R}))$ e questo ci dice che *tutti i fibrati vettoriali sulle sfere di dimensione ≥ 2 sono orientabili*. Abbiamo

PROPOSIZIONE 5.5.4. *Se $m \geq 2$, ogni fibrato vettoriale reale su S^m è orientabile, ed ha esattamente due orientazioni, che dipendono dalla scelta dell'orientazione su una singola fibra. Le fibre di (5.3) contengono al più due elementi. Hanno un solo elemento quelle che corrispondono a fibrati vettoriali che ammettano un automorfismo che inverte l'orientazione delle fibre, due elementi altrimenti.* \square

Poiché $\mathbf{SO}(n)$ è un retratto di deformazione di $\mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R})$, abbiamo

$$\pi(S^{m-1}, \mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R})) \simeq \pi(S^{m-1}, \mathbf{SO}(n)) \simeq \pi_{m-1}(\mathbf{SO}(n)).$$

Si ragiona in modo analogo per fibrati vettoriali complessi o quaternionici. In questi casi i gruppi lineari sono connessi e, poiché $\mathbf{U}(n)$ ed $\mathbf{Sp}(n)$ sono retratti di deformazione di $\mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(n)$ e di $\mathbf{GL}_{\mathbb{H}}(n)$, rispettivamente, otteniamo:

PROPOSIZIONE 5.5.5. *Per ogni intero $m \geq 1$ abbiamo*

$$\mathcal{V}_{\mathbb{C}}^m(S^m) \simeq \pi_{m-1}(\mathbf{U}(n)), \quad \mathcal{V}_{\mathbb{H}}^m(S^m) \simeq \pi_{m-1}(\mathbf{Sp}(n)). \quad \square$$

5.6. La proprietà (S)

Sia B uno spazio topologico. Fissiamo il corpo \mathbb{k} ed indichiamo con θ^n il fibrato banale ($\text{pr}_B : B \times \mathbb{k}^n \rightarrow B$).

DEFINIZIONE 5.6.1. Diciamo che B gode della proprietà (S) se

$$(S) \quad \forall \xi \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B) \exists \eta \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B) \text{ tale che } \xi \oplus_B \eta \approx \theta^n, \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}.$$

PROPOSIZIONE 5.6.2. Ogni compatto di Hausdorff gode della proprietà (S).

DIMOSTRAZIONE. Sia ξ un fibrato vettoriale con fibra tipica \mathbb{k}^n sulla base B . Se B è compatta, ξ ammette atlante di trivializzazione finito $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i) \mid 1 \leq i \leq \ell\}$. Uno spazio compatto di Hausdorff è normale e possiamo perciò trovare una partizione dell'unità $\{\kappa_i \mid 1 \leq i \leq \ell\}$ su B subordinata al ricoprimento $\{U_i\}$.

Definiamo $\hat{\sigma}_i : B \times \mathbb{k}^n \rightarrow E(\xi)$ ponendo

$$\hat{\sigma}_i(b)(v) = \begin{cases} \kappa_i(b) \cdot \sigma_i(b)(v), & \text{se } b \in U_i, \\ 0, & \text{se } b \notin \text{supp}(\kappa_i). \end{cases}$$

Consideriamo il fibrato banale $\Theta \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$ con spazio totale $B \times [\mathbb{k}^n]^\ell$. L'applicazione

$$\psi : B \times [\mathbb{k}^n]^\ell \ni (b; v_1, \dots, v_\ell) \longrightarrow \sum_{i=1}^{\ell} \hat{\sigma}_i(b)(v_i) \in E(\xi)$$

definisce un epimorfismo di fibrati vettoriali su B . Il suo nucleo è un sottofibrato vettoriale $\eta \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$ di Θ . Per il Corollario 5.2.7, η ha un complemento η' in Θ , che è equivalente a ξ : infatti la restrizione di ψ ad $E(\eta')$ definisce l'isomorfismo di fibrati vettoriali $\eta' \leftrightarrow \xi$. Otteniamo quindi $\xi \oplus_B \eta \approx \Theta$. La dimostrazione è completa. \square

OSSERVAZIONE 5.6.3. Dalla Proposizione 5.6.2 e dall'invarianza omotopica, ricaviamo che ogni spazio cellulare omotopicamente equivalente ad uno spazio cellulare finito gode della proprietà (S).

Possiamo dare un criterio per la validità della proprietà (S) su spazi paracompatti utilizzando la nozione di *dimensione* di Lebesgue e Čech (vedi [5, p.107]).

DEFINIZIONE 5.6.4. La *molteplicità* di una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di B è il cardinale, finito o infinito,

$$\sup_{b \in B} \#\{i \in I \mid b \in U_i\}.$$

Dato un intero non negativo m , diciamo che lo spazio topologico B ha *dimensione finita minore o uguale ad m* , e scriviamo $\dim(B) \leq m$, se ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento di molteplicità minore o uguale ad $(m + 1)$.

Poniamo allora $\dim(B) = \inf\{m \in \mathbb{Z}_+ \mid \dim(B) \leq m\}$. Se B non ha dimensione finita, poniamo $\dim(B) = \infty$.

Per varietà differenziabili e complessi cellulari, questa nozione, puramente topologica, coincide con le usuali definizioni della dimensione.

PROPOSIZIONE 5.6.5. Ogni spazio topologico paracompatto di dimensione finita gode della proprietà (S).

DIMOSTRAZIONE. Siano B uno spazio paracompatto di dimensione finita m e ξ un fibrato vettoriale su B , con fibra tipica \mathbb{k}^n . Per ipotesi, possiamo trovare un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_i, \sigma_i) \mid i \in I\}$ tale che il ricoprimento aperto $\mathcal{U} =$

$\{U_i\}$ sia localmente finito ed abbia molteplicità minore o uguale ad $(m+1)$. Fissiamo un ordinamento totale “<” sull’insieme I degli indici. Per la paracompattezza di B possiamo trovare una successione di raffinamenti aperti $\mathcal{U}^{(h)} = \{U_{h,i} \mid i \in I\}$ tali che

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(m+1)} < \mathcal{U}^{(m)} < \dots < \mathcal{U}^{(1)} < \mathcal{U}^{(0)}, \quad \text{con } \bar{U}_{h,i} \subset U_{h+1,i}, \forall i \in I, 0 \leq h \leq m.$$

Ciascuna delle famiglie $\mathcal{U}^{(h)}$ è localmente finita ed ha molteplicità minore o uguale ad $(m+1)$. Definiamo per ricorrenza i chiusi C_h e gli aperti B_h ponendo

$$C_{m+1} = \emptyset, \quad C_h = C_{h+1} \cup \bigcup_{i_0 < \dots < i_h} \bar{U}_{h,i_0, \dots, i_h}, \quad B_h = B \setminus C_h, \quad 0 \leq h \leq m.$$

Siano poi $\mathcal{W}^{(h)} = \{W_{h,i} = U_{h,i} \setminus C_h \mid i \in I\}$. Osserviamo allora che ciascun $\mathcal{W}^{(h)}$ è un ricoprimento aperto di B_h con molteplicità minore o uguale ad h . È $\mathcal{W}^{(m+1)} = \mathcal{U}$. In questo modo le

$$\mathcal{W}^{(h,h)} = \{W_{h,i_1, \dots, i_h} = W_{h,i_1} \cap \dots \cap W_{h,i_h} \mid i_1 < \dots < i_h\}, \quad 1 \leq h \leq m+1,$$

sono famiglie di aperti disgiunti e, per costruzione, se poniamo $W_h = \bigcup \mathcal{W}^{(h,h)}$, è $B = W_1 \cup \dots \cup W_{m+1}$. Infatti il complemento di B_h contiene tutti i punti di B che appartengono a più di h elementi di $\mathcal{U}^{(h)}$.

Ogni W_h , essendo unione disgiunta di aperti di trivializzazione per ξ , è esso stesso un aperto di trivializzazione per ξ . Quindi B ammette un ricoprimento finito mediante aperti di trivializzazione. Possiamo dunque concludere la dimostrazione ripetendo gli argomenti usati nella dimostrazione della Proposizione 5.6.2 per il caso in cui B fosse compatto. \square

5.7. Classificazione omotopica I: base CW

Per classificare i fibrati vettoriali a meno di equivalenza possiamo utilizzare i risultati del §4.6. Infatti, il fibrato principale associato ad un fibrato vettoriale di rango n ammette sempre una riduzione ad un fibrato principale sul gruppo $\mathbf{O}(n)$, $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$, a secondo che il corpo \mathbb{k} sia quello dei reali, dei complessi o dei quaternioni. Indichiamo con $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^m(B)$ le classi di equivalenza di fibrati vettoriali di rango n su B .

DEFINIZIONE 5.7.1. Chiamiamo *fibrato tautologico* sulla grassmanniana $\mathcal{G}r_m(\mathbb{k}^v)$ il fibrato vettoriale $\gamma_m(\mathbb{k}^v)$, di rango m su \mathbb{k} con

$$\begin{cases} E(\gamma_m(\mathbb{k}^v)) = \{(\ell, v) \in \mathcal{G}r_m(\mathbb{k}^v) \times \mathbb{R}^v \mid v \in \ell\}, \\ B(\gamma_m(\mathbb{k}^v)) = \mathcal{G}r_m(\mathbb{k}^v), \\ \pi_{\gamma_m(\mathbb{k}^v)} : E(\gamma_m(\mathbb{k}^v)) \ni (\ell, v) \longrightarrow \ell \in B(\gamma_m(\mathbb{k}^v)). \end{cases}$$

PROPOSIZIONE 5.7.2. Se B è uno spazio cellulare di dimensione minore o uguale ad m ed n, v interi con $0 \leq n \leq v$. La corrispondenza

$$\mathcal{C}(B, \mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^v)) \ni f \longrightarrow f^*(\gamma_m(\mathbb{k}^v)) \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^m(B)$$

definisce per passaggio al quoziente un’applicazione

$$(5.6) \quad \pi(B, \mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^v)) \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^m(B)$$

che è un isomorfismo nei casi seguenti:

$$\begin{aligned} \mathbb{k} &= \mathbb{R} \quad e \quad v > n + m, \\ \mathbb{k} &= \mathbb{C} \quad e \quad 2v > 2n + m, \\ \mathbb{k} &= \mathbb{H} \quad e \quad 4v > 4n + m. \end{aligned} \quad \square$$

OSSERVAZIONE 5.7.3. Nel caso in cui la base B sia la sfera S^m , riotteniamo i risultati del §5.5. Infatti (vedi il Capitolo IV)

$$\begin{aligned} \pi(S^m, \mathcal{G}r_n(\mathbb{R}^v)) &\simeq \pi_m(\mathcal{G}r_n(\mathbb{R}^v)) \simeq \pi_{m-1}(\mathbf{SO}(n)), & \text{se } v > n + m, \\ \pi(S^m, \mathcal{G}r_n(\mathbb{C}^v)) &\simeq \pi_m(\mathcal{G}r_n(\mathbb{C}^v)) \simeq \pi_{m-1}(\mathbf{U}(n)), & \text{se } v > 2n + m, \\ \pi(S^m, \mathcal{G}r_n(\mathbb{H}^v)) &\simeq \pi_m(\mathcal{G}r_n(\mathbb{H}^v)) \simeq \pi_{m-1}(\mathbf{Sp}(n)), & \text{se } v > 4n + m. \end{aligned}$$

5.8. Classificazione omotopica II: base compatta

Consideriamo in questo paragrafo il problema della classificazione di fibrati vettoriali che abbiano basi compatte e di Hausdorff.

PROPOSIZIONE 5.8.1. *Sia B uno spazio di Hausdorff compatto ed A un suo sottospazio chiuso. Se ξ è un fibrato vettoriale su B , allora ogni sezione di ξ su A è restrizione di una sezione su B .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché gli spazi di Hausdorff compatti godono della proprietà (S), possiamo supporre che ξ^n sia un sottofibrato di un fibrato banale $\theta^v = (\text{pr}_B : B \times \mathbb{K}^v \rightarrow B)$. Consideriamo un ricoprimento aperto finito $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di B mediante aperti di trivializzazione e siano $\phi_i : U_i \times \mathbb{K}^n \rightarrow E(\xi)|_{U_i}$ le funzioni di trivializzazione. Una sezione $s \in \Gamma_\xi(A, E(\xi))$ definisce funzioni $s_i \in \mathcal{C}(A \cap U_i, \mathbb{K}^n)$ tali che $s(b) = \phi_i(b, s_i(b))$ per $b \in A \cap U_i$. Poiché i sottospazi di un compatto di Hausdorff sono spazi normali, possiamo applicare il lemma di estensione di Urysohn per trovare $\tilde{s}_i \in \mathcal{C}(U_i, \mathbb{K}^n)$ tali che $\tilde{s}_i(b) = s_i(b)$ se $b \in A \cap U_i$. Poiché i compatti di Hausdorff sono paracompatti, possiamo trovare una partizione continua $\{\kappa_i\}$ dell'unità su B con $\text{supp}(\kappa_i) \subset U_i$. Definiamo ora

$$\hat{s}_i = \begin{cases} \kappa_i(b) \cdot \phi_i(b, \tilde{s}_i(b)), & \text{se } b \in U_i, \\ 0, & \text{se } b \notin \text{supp}(\kappa_i). \end{cases}$$

Allora $\hat{s}_i \in \Gamma_\xi(B, E(\xi))$ ed $\hat{s} = \sum_i \hat{s}_i(b)$ è una sezione continua di ξ su B che estende s . \square

LEMMA 5.8.2. *Siano ξ, η due fibrati \mathbb{k} -vettoriali sullo spazio compatto di Hausdorff B ed A un sottospazio chiuso di B .*

Ogni applicazione continua $f \in \mathcal{C}(E(\xi)|_A, E(\eta)|_A)$ che renda commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E(\xi)|_A & \xrightarrow{f} & E(\eta)|_A \\ & \searrow \pi_\xi & \swarrow \pi_\eta \\ & A & \end{array}$$

si può estendere ad un'applicazione continua $\tilde{f} \in \mathcal{C}(E(\xi), E(\eta))$ che renda commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{\tilde{f}} & E(\eta) \\ \pi_\xi \searrow & & \swarrow \pi_\eta \\ & B & \end{array}$$

Se $f(b)$ è surgettiva (risp. iniettiva, un isomorfismo) in tutti i punti b di A , allora possiamo trovare un intorno aperto U di A in B tale che $\tilde{f}(b)$ sia surgettiva (risp. iniettiva, un isomorfismo) per tutti i $b \in U$.

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare la Proposizione 5.8.1 al fibrato $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(\xi, \eta)$ delle applicazioni \mathbb{k} -lineari tra le fibre di ξ e di η ed osservare poi che i punti b di B in cui $\tilde{f}(b)$ è surgettiva, (risp. iniettiva o un isomorfismo) formano un aperto di B . \square

Possiamo utilizzare il Lemma 5.8.2 per dimostrare un teorema d'invarianza omotopica. Premettiamo un lemma.

LEMMA 5.8.3. *Sia B un compatto di Hausdorff e ξ un fibrato \mathbb{k} -vettoriale su $B \times I$. Per ogni $t \in I$ sia $\text{incl}_t : B \ni b \rightarrow (b, t) \in B \times I$. Allora i fibrati $\text{incl}_t^*(\xi)$ su B sono tutti equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $B \times I$ è compatto Hausdorff, vale la proprietà (S) e quindi il fibrato ξ è un sottofibrato di un fibrato banale

$$\theta^v = (\text{pr}_{B \times I} : (B \times I) \times \mathbb{k}^v \rightarrow B \times I.$$

Scegliendo un prodotto scalare (riemanniano, hermitiano o iperhermitiano, a seconda che sia $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$), la proiezione ortogonale sulle fibre di ξ ci dà un morfismo surgettivo di fibrati vettoriali

$$\begin{array}{ccc} E(\theta^v) & \xrightarrow{\varpi} & E(\xi) \\ \text{pr}_{B \times I} \searrow & & \swarrow \pi_\xi \\ & B \times I & \end{array}$$

Fissato $t_0 \in I$, possiamo definire un omomorfismo tra la restrizione $\eta_{t_0} = \xi|_{B \times \{t_0\}}$ di ξ a $B \times t_0$ e la restrizione $\eta_t = \xi|_{B \times \{t\}}$ di ξ a $B \times \{t\}$ nel modo seguente: il pullback $\tilde{\xi}_{t_0}$ di η_{t_0} mediante la retrazione $\rho_{t_0}(b, t) = (b, t_0)$ di $B \times I$ su $B \times \{t_0\}$ è un sottofibrato \mathbb{k} -vettoriale di θ^v . Componendo con la proiezione ϖ , otteniamo un morfismo di fibrati \mathbb{k} -vettoriali

$$\begin{array}{ccc} E(\eta_{t_0}) & \xrightarrow{f_{t_0, t}} & E(\eta_t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B \times \{t_0\} & \xrightarrow{(b, t_0) \rightarrow (b, t)} & B \times \{t\} \end{array}$$

che, per il Lemma 5.8.2, è un isomorfismo di fibrati vettoriali se $|t - t_0| < \epsilon(t_0)$ per un $\epsilon(t_0) > 0$ sufficientemente piccolo. Per concludere la dimostrazione, basta considerare una partizione $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = 1$ tale che, per $0 \leq h \leq N-2$, gli η_t di ogni intervallo (τ_h, τ_{h+2}) siano tra loro isomorfi. \square

PROPOSIZIONE 5.8.4. *Siano ξ un fibrato \mathbb{k} -vettoriale, B un compatto di Hausdorff ed f_0, f_1 due applicazioni continue di B in $B(\xi)$. Se f_0 ed f_1 sono omotope, allora i fibrati $f_0^*(\xi)$ ed $f_1^*(\xi)$ sono equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in \mathcal{C}(B \times I, B(\xi))$ un'omotopia tra f_0 ed f_1 . Allora $f_0^*(\xi)$ ed $f_1^*(\xi)$ sono isomorfi alle restrizioni a $B \times \{0\}$ ed a $B \times \{1\}$ di $f^*(\xi)$ e dunque isomorfi per il Lemma 5.8.3. Questo isomorfismo definisce l'equivalenza tra $f_0^*(\xi)$ ed $f_1^*(\xi)$. \square

LEMMA 5.8.5. *Siano B un qualsiasi spazio topologico e ξ_0, ξ_1 , due fibrati \mathbb{k} -vettoriali su B . Se ξ_0 e ξ_1 sono equivalenti, allora possiamo trovare un automorfismo di $\xi_0 \oplus_M \xi_1$, isotopico all'identità, che trasformi ξ_0 in ξ_1 e ξ_1 in ξ_0 .*

DIMOSTRAZIONE. Un automorfismo di un fibrato ζ è isotopico all'identità se è l' f_1 di un'omotopia $f = (f_t) \in \mathcal{C}(E(\zeta) \times I, E(\zeta))$ che definisca, per ogni $t \in I$, un'equivalenza di ζ in sé.

Ad un'equivalenza $h : E(\xi_0) \rightarrow E(\xi_1)$ facciamo corrispondere l'equivalenza di $\xi_0 \oplus_B \xi_1$ rappresentata dalla matrice

$$\tilde{h} = \begin{pmatrix} 0 & -h^{-1} \\ h & 0 \end{pmatrix},$$

che scambia tra loro ξ_0 e ξ_1 . La

$$t \rightarrow \tilde{h}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -t \cdot h^{-1} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ t \cdot h & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -t \cdot h^{-1} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

definisce un'isotopia tra $\tilde{h}_0 = \text{id}$ ed $\tilde{h}_1 = \tilde{h}$. \square

La costruzione nella dimostrazione del Lemma 5.8.5 ci dà:

LEMMA 5.8.6. *Siano B un qualsiasi spazio topologico e ξ_0, ξ_1 , due fibrati \mathbb{k} -vettoriali su B . Se ξ_0 e ξ_1 sono equivalenti, allora possiamo trovare un fibrato \mathbb{k} -vettoriale ξ con base $B \times I$ tale che $\xi_i \approx \xi|_{B \times \{i\}}$, per $i = 0, 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Usando le notazioni della dimostrazione del Lemma 5.8.5, definiamo ξ ponendo

$$\begin{cases} E(\xi) = \{(b, t; w) \in (B \times I) \times E(\xi_0 \oplus_M \xi_1) \mid w \in \tilde{h}_t(E_b(\xi_0))\}, \\ \pi_\xi(b, t; w) = (b, t), \quad \forall (b, t; w) \in E(\xi). \end{cases}$$

Si verifica facilmente che questo fibrato sulla base $B \times I$ ha le proprietà richieste. \square

Indichiamo con \mathbb{k}^∞ lo spazio \mathbb{k} -vettoriale formato dalle successioni $(x_h)_{h \geq 1}$ di elementi di \mathbb{k} che hanno al più un numero finito di termini non nulli. Per ogni intero positivo v , possiamo identificare \mathbb{k}^v al sottospazio di \mathbb{k}^∞ formato dalle successioni (x_h) con $x_h = 0$ per $h > v$.

DEFINIZIONE 5.8.7. Indichiamo con $\mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^\infty)$ la *grassmanniana infinita* dei sottospazi di dimensione n di \mathbb{k}^∞ .

Le inclusioni $\mathbb{k}^v \hookrightarrow \mathbb{k}^\infty$ definiscono inclusioni $\mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^v) \hookrightarrow \mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^\infty)$. I sottospazi $\mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^v)$, al variare di $v \geq n$, formano un ricoprimento di $\mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^\infty)$. Consideriamo su $\mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^\infty)$ la *topologia debole del ricoprimento*, in cui sono chiusi i sottoinsiemi che intersecano ciascuno dei $\mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^v)$ in un chiuso, ovvero la più fine per cui tutte le inclusioni $\mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^v) \hookrightarrow \mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^\infty)$ siano continue. In particolare, se B è un compatto ed $f \in \mathcal{C}(B, \mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^\infty))$, allora $f(B) \subset \mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^v)$ per qualche intero positivo v .

DEFINIZIONE 5.8.8. Chiamiamo *fibrato tautologico* sulla Grassmanniana infinita $\mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^\infty)$ il fibrato vettoriale $\gamma_n(\mathbb{k}^\infty)$, di rango n su \mathbb{k} , con

$$\begin{cases} E(\gamma_n(\mathbb{k}^\infty)) = \{\ell_n, v\} \in \mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^\infty) \times \mathbb{k}^\infty \mid v \in \ell_n\}, \\ B(\gamma_n(\mathbb{k}^\infty)) = \mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^\infty), \\ \pi_{\gamma_n(\mathbb{k}^\infty)} : E(\gamma_n(\mathbb{k}^\infty)) \ni (\ell_n, v) \longrightarrow \ell_n \in \mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^\infty). \end{cases}$$

Abbiamo una corrispondenza

$$(5.7) \quad \mathcal{C}(B, \mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^\infty)) \ni f \longrightarrow f^*(\gamma_n(\mathbb{k}^\infty)) \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^n(B)$$

che ad ogni applicazione continua di uno spazio topologico B nella grassmanniana dei sottospazi vettoriali di dimensione n di \mathbb{k}^∞ fa corrispondere la classe di equivalenza di un fibrato \mathbb{k} -vettoriale di rango n su B .

Utilizzando il Lemma 5.8.6 e la Proposizione 5.8.4, otteniamo il

TEOREMA 5.8.9. *Sia B un compatto di Hausdorff. Allora la corrispondenza (5.7) definisce, per passaggio ai quozienti, una bigezione*

$$(5.8) \quad \pi(B, \mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^\infty)) \longleftrightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^n(B)$$

tra le classi di omotopia delle applicazioni continue di B nella grassmanniana infinita dei sottospazi di dimensione n e le classi di equivalenza di fibrati \mathbb{k} -vettoriali di rango n su B .

DIMOSTRAZIONE. L'iniettività è conseguenza del Lemma 5.8.6, mentre la surgettività segue dalla Proposizione 5.8.4. \square

OSSERVAZIONE 5.8.10. Per le Grassmanniane infinite possiamo ripetere la discussione svolta per quelle finite. In particolare, utilizzando il fatto che gli spazi di Stiefel infiniti $\mathcal{V}'_n(\mathbb{k}^\infty)$, essendo limiti induttivi degli spazi di Stiefel $\mathcal{V}'_n(\mathbb{k}^v)$, sono ∞ -connessi, dalla fibrazione $\mathbf{SO}(n)$ -principale

$$\mathcal{V}'_n(\mathbb{k}^\infty) \ni (v_1, \dots, v_n) \longrightarrow \langle v_1, \dots, v_n \rangle \in \mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^\infty)$$

ricaviamo che

$$\pi_h(\mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^\infty)) \simeq \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(n)), \quad \forall n \geq 1.$$

CAPITOLO VI

Elementi di K -teoria

6.1. Addendi banali

Sia B uno spazio cellulare di dimensione finita m . Indichiamo con \mathbb{k} uno dei corpi $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Considereremo in questo paragrafo fibrati \mathbb{k} -vettoriali su B e scriveremo ξ^n per indicare che le fibre di ξ hanno dimensione n . Indicheremo ancora con θ^n il fibrato vettoriale banale con fibra \mathbb{k}^n su B . Ricordiamo che (" \sim ") indica qui equivalenza omotopica)

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\sim S^{n-1} \quad \text{\textit{\textless}} \quad (n-2)\text{-connesso,} \\ \mathbb{C}^n \setminus \{0\} &\sim S^{2n-1} \quad \text{\textit{\textless}} \quad (2n-2)\text{-connesso,} \\ \mathbb{H}^n \setminus \{0\} &\sim S^{4n-1} \quad \text{\textit{\textless}} \quad (4n-2)\text{-connesso.}\end{aligned}$$

Indichiamo con k la dimensione (uguale ad 1, o 2, o 4) di \mathbb{k} come spazio vettoriale reale e poniamo¹ $\nu = \text{parte intera di } (m - k + 1)/k$.

LEMMA 6.1.1. *Ogni fibrato \mathbb{k} -vettoriale ξ^n su B , con $n > \nu$ \textit{\textless}} equivalente ad una somma di Whitney $\xi^{n-1} \oplus_B \theta^1$ di fibrati \mathbb{k} -vettoriali.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il fibrato ξ_0^n ottenuto privando ξ^n della sezione nulla. Le fibre di ξ^n si retraggono sulla sfera S^{kn-1} e sono quindi $(kn-2)$ -connesse. Se $(kn-2) \geq (m-1)$, cio\textit{\textless}} $n > \nu$, per il Teorema 2.6.1 il fibrato ξ_0^n ammette una sezione globale s . La $E(\theta^1) = B \times \mathbb{k} \ni (b, \lambda) \rightarrow \lambda \cdot s(b) \in E(\xi)$ definisce un monomorfismo in ξ^n del fibrato banale θ^1 . L'immagine \textit{\textless}} un sottofibrato banale η^1 di ξ^n . Per il Corollario 5.2.7, possiamo allora trovare un sottofibrato vettoriale ξ^{n-1} su B tale che $\xi^n = \eta^1 \oplus_B \xi^{n-1} \approx \theta^1 \oplus_B \xi^{n-1}$. □

TEOREMA 6.1.2. *Ogni fibrato \mathbb{k} -vettoriale ξ^n con $n > \nu$ \textit{\textless}} equivalente ad una somma di Whitney $\xi^\nu \oplus_B \theta^{n-\nu}$ di fibrati \mathbb{k} -vettoriali.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 6.1.1, la tesi \textit{\textless}} verificata quando $n = \nu + 1$. Se $n > \nu + 1$, utilizzando il Lemma 6.1.1, otteniamo per ricorrenza

$$\xi^n \approx \xi^{n-1} \oplus_B \theta^1 \approx \xi^{n-2} \oplus_B \theta^2 \approx \dots \approx \xi^\nu \oplus_B \theta^{n-\nu}. \quad \square$$

LEMMA 6.1.3. *Due qualsiasi monomorfismi $f_1, f_2 : \theta^1 \rightarrow \xi^n$ sono equivalenti. Se $n > (\nu + 1)$, allora anche due qualsiasi complementi di $f_1(\theta^1)$ e di $f_2(\theta^1)$ in ξ^n sono equivalenti.*

¹ $\nu = m$ se $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $\nu = \lfloor (m-1)/2 \rfloor$ se $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ e $\nu = \lfloor (m-3)/4 \rfloor$ se $\mathbb{k} = \mathbb{H}$

DIMOSTRAZIONE. I monomorfismi f_i corrispondono a sezioni $s_i(b) = f_i(b, 1)$ di ξ_0^n e la corrispondenza $\lambda \cdot s_1(b) \leftrightarrow \lambda \cdot s_2(b)$ per ogni $(b, \lambda) \in B \times \mathbb{k}$ definisce un'equivalenza tra $f_1(\theta^1)$ ed $f_2(\theta^1)$.

Supponiamo ora che sia $n > (v + 1)$. Siano $I = [0, 1]$ e $\text{pr}_B : B \times I \rightarrow B$ la proiezione sul primo fattore. Consideriamo il pullback $\text{pr}_B^*(\xi_0^n)$ di ξ_0^n (ξ^n privato della sezione nulla) su $B \times I$. Per il Teorema 2.6.1 la sezione $s^*(p, i) = s_i(p)$, definita su $B \times \{0, 1\}$, si estende ad una sezione \tilde{s}^* di $\text{pr}_B^*(\xi_0)$ su $B \times I$, perché abbiamo supposto che l'ordine di connessione $(kn - 2)$ delle fibre fosse maggiore di m , cioè la dimensione della base $B \times I$ meno uno. La \tilde{s}^* ci permette di definire un sottofibrato vettoriale banale $\tilde{\theta}^1$ di $\text{pr}_B^*(\xi)$ su $B \times I$. Fissati dei complementi ξ_i^{n-1} di $f_i(\theta^1)$ in ξ , possiamo definire un prodotto scalare \mathbb{k} -hermitiano sulle fibre di $\text{pr}_B^*(\xi^n)$ in modo che $(\text{pr}_B^*(\xi_i^{n-1}))|_{t=i}$ sia l'ortogonale di $(\text{pr}_B^*(f_i(\theta^1)))|_{t=i}$ per $i = 0, 1$. Per il Corollario 5.2.7, possiamo trovare un fibrato vettoriale $\tilde{\xi}^{n-1}$ complementare di $\tilde{\theta}^1$ in $\text{pr}_B^*(\xi)$ le cui restrizioni a $B \times \{i\}$ siano le $(\text{pr}_B^*(\xi_i^{n-1}))|_{t=i}$. Poiché le sue restrizioni a $B \times \{i\}$ sono isomorfe ai fibrati ξ_i^{n-1} su B , ne ricaviamo che ξ_1^{n-1} e ξ_2^{n-1} sono equivalenti per il Teorema 3.7.2. \square

Ragionando per ricorrenza, dal Lemma 6.1.3 otteniamo il

TEOREMA 6.1.4. *Se ξ_i^n sono due \mathbb{k} -fibrati vettoriali sullo spazio cellulare B , di dimensione minore o uguale ad m . Se $n \leq (v + 1)$ e possiamo trovare un intero non negativo ℓ per cui $\xi_1^n \oplus_B \theta^\ell$ e $\xi_2^n \oplus_B \theta^\ell$ siano equivalenti, allora anche ξ_1^n e ξ_2^n sono equivalenti.* \square

OSSERVAZIONE 6.1.5. In particolare, nel caso di fibrati vettoriali reali, ogni ξ^n su B , con $n \geq m = \dim(B)$, è equivalente ad una somma di Whitney $\xi^m \oplus_B \theta^{n-m}$ e l'equivalenza $\xi^{m+1} \oplus_B \theta^h \equiv \eta^{m+1} \oplus_B \theta^h$, per qualche $h \geq 0$, implica che $\eta^{m+1} \approx \xi^{m+1}$. Quest'ultima implicazione può non valere per fibrati vettoriali dimensione m : infatti, se τ^m è il fibrato tangente della sfera S^m , abbiamo $\tau^m \oplus_{S^m} \theta^1 \approx \theta^{m+1} \approx \theta^m \oplus_B \theta^1$, ma il fibrato tangente di S^m non è banale se $m \neq 1, 3, 7$.

6.2. Gruppo di K -teoria ed equivalenza stabile

Fissato uno spazio topologico B , indichiamo con $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$ l'insieme delle classi di equivalenza di \mathbb{k} -fibrati vettoriali su B . Per semplificare la notazione, useremo nel seguito lo stesso simbolo per indicare sia uno specifico fibrato vettoriale su B che la sua classe in $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$.

La somma di Whitney definisce su $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$ una struttura di *semigrupp*o abeliano. Indichiamo con $\mathcal{K}_{\mathbb{k}}(B)$ il gruppo abeliano generato da $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$.

Un semigrupp

o abeliano S genera un gruppo abeliano S^* , unico a meno di isomorfismi. Per definire S^* dobbiamo preoccuparci che per ogni coppia di elementi s_1, s_2 di S ci sia in S^* la loro differenza $(s_2 - s_1)$. Come nella costruzione degli interi a partire dai naturali, possiamo definire S^* come il quoziente di $S \times S$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica due coppie (s_1, s_2) , (s'_1, s'_2) di elementi di S se è possibile trovare un s in S per cui risulti $s_1 + s'_2 + s = s'_1 + s_2 + s$.

Il gruppo S^* è caratterizzato, a meno di isomorfismi, dalla PROPRIETÀ UNIVERSALE:

Per ogni gruppo abeliano \mathbf{G} ed ogni omomorfismo di semigrupp $\phi : S \rightarrow \mathbf{G}$ vi è un unico omomorfismo di gruppi $\phi^* : S^* \rightarrow \mathbf{G}$ che estende ϕ .

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\quad} & S^* \\ & \searrow \phi & \swarrow \phi^* \\ & \mathbf{G} & \end{array}$$

DEFINIZIONE 6.2.1. Chiamiamo² $\mathcal{K}_{\mathbb{k}}(B)$ il gruppo di K -teoria di B .

Identifichiamo \mathbb{Z} al sottogruppo di $\mathcal{K}_{\mathbb{k}}(B)$ generato dal fibrato in rette banale θ^1 . L'applicazione che associa ad ogni elemento di $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$ il suo rango è un omomorfismo di semigrupp e si estende quindi ad un omomorfismo di gruppi abeliani

$$\text{rk} : \mathcal{K}_{\mathbb{k}}(B) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

DEFINIZIONE 6.2.2. Il nucleo $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathbb{k}}(B) = \ker(\text{rk} : \mathcal{K}_{\mathbb{k}}(B) \rightarrow \mathbb{Z})$ di questo omomorfismo si dice *gruppo di K -teoria ridotto* di B .

La K -teoria è legata alla nozione di equivalenza stabile.

DEFINIZIONE 6.2.3. Diciamo che due fibrati ξ_1, ξ_2 in $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$ sono *stabilmente equivalenti*, o *s-equivalenti*, se $\xi_1 \oplus_B \theta^{h_1} \approx \xi_2 \oplus_B \theta^{h_2}$ per opportuni interi $h_1, h_2 \geq 0$. Indichiamo con $\xi_1 \sim \xi_2$ il fatto che due fibrati ξ_1 e ξ_2 siano s-equivalenti.

OSSERVAZIONE 6.2.4. Sia B uno spazio cellulare di dimensione m e $v = [\frac{m-k+1}{k}]$ l'intero definito nel §6.1. I Teoremi 6.1.2 e 6.1.4 ci dicono che ogni $\xi^n \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$ è s-equivalente ad un $\xi^v \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$ e che due fibrati $\xi_1^n, \xi_2^n \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$, con $n > v + 1$ sono equivalenti se e soltanto se sono s-equivalenti.

TEOREMA 6.2.5. Se B gode della proprietà³ (S), allora l'applicazione⁴

$$\alpha : \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B) \ni \xi \longrightarrow \xi - \text{rk}(\xi) \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathbb{k}}(B)$$

è surgettiva e, per $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$,

$$\xi_1 \sim \xi_2 \iff \alpha(\xi_1) = \alpha(\xi_2).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$ sono s-equivalenti, allora $\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2) = 0$ in $\mathcal{K}_{\mathbb{k}}(B)$. Infatti, se $\xi_1 \oplus_B \theta^{n_1} \approx \xi_2 \oplus_B \theta^{n_2}$, allora

$$0 = \alpha(\xi_1 \oplus_B \theta^{n_1}) - \alpha(\xi_2 \oplus_B \theta^{n_2}) = \alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2).$$

Dunque la α definisce, per passaggio al quoziente, una $\hat{\alpha} : (\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)/\sim) \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}_{\mathbb{k}}(B)$. La tesi del teorema è che $\hat{\alpha}$ sia bigettiva.

SURGETTIVITÀ. Siano $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$, con $\text{rk}(\xi_1) = \text{rk}(\xi_2)$. Per (S), possiamo trovare un fibrato $\xi'_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$ tale che $\xi_2 \oplus \xi'_2 \approx \theta^{n_2}$, per qualche intero positivo n_2 . Quindi (le uguaglianze si intendono in $\mathcal{K}_{\mathbb{k}}(B)$)

$$\xi_1 - \xi_2 = (\xi_1 \oplus_B \xi'_2) - (\xi_2 \oplus_B \xi'_2) = (\xi_1 \oplus_B \xi'_2) - \theta^{n_2} = (\xi_1 \oplus_B \xi'_2) - n_2 = \alpha(\xi_1 \oplus_B \xi'_2),$$

²In generale, il gruppo di K -teoria, o di Grothendieck, può essere definito per ogni categoria abeliana (vedi [10]).

³La proprietà (S) è stata definita nel §5.6.

⁴Identifichiamo \mathbb{Z} al sottogruppo di $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathbb{k}}(B)$ generato dalla classe di equivalenza del fibrato banale $\theta^1 \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$.

perché $\text{rk}(\xi_1 \oplus_B \xi'_2) = n_2$. Questo dimostra la surgettività.

INIETTIVITÀ. Siano $\xi_1^{n_1}, \xi_2^{n_2} \in \mathcal{V}_k(B)$ tali che $\xi_1 - n_1 = \xi_2 - n_2$ in $\mathcal{X}_k(M)$. Questo significa che possiamo trovare un $\eta \in \mathcal{V}_k(B)$ tale che $\xi_1 \oplus_B \theta^{n_2} \oplus_B \eta \approx \xi_2 \oplus \theta^{n_1} \oplus \eta$. Per la proprietà (S), possiamo trovare $\eta' \in \mathcal{V}_k(B)$ tale che $\eta \oplus_B \eta' \approx \theta^n$ per qualche intero positivo n . Allora

$$\xi_1 \oplus_B \theta^{n_2} \oplus_B \eta \oplus_B \eta' \approx \xi_2 \oplus \theta^{n_1} \oplus \eta \oplus_B \eta' \iff \xi_1 \oplus_B \theta^{n+n_2} \approx \xi_2 \oplus \theta^{n+n_1}$$

ci dice che $\xi_1 \sim \xi_2$ e questo completa la dimostrazione. \square

NOTAZIONE 6.2.6. Indichiamo con $\tilde{\mathcal{V}}_k(B)$ l'insieme delle classi di equivalenza stabile di fibrati vettoriali su B .

La somma di Whitney definisce per passaggio al quoziente un'addizione su $\tilde{\mathcal{V}}_k(B)$. La proprietà (S) si può riformulare dicendo che ogni elemento di $\tilde{\mathcal{V}}_k(B)$ ha un opposto. In particolare

TEOREMA 6.2.7. *Se B gode della proprietà (S), allora $\tilde{\mathcal{V}}_k(B)$ è un gruppo abeliano e la corrispondenza $\xi \rightarrow (\xi - \text{rk}(\xi))$ definisce, per passaggio al quoziente, un isomorfismo di gruppi abeliani tra $\tilde{\mathcal{V}}_k(B)$ e $\tilde{\mathcal{X}}_k(B)$.* \square

6.3. Caratterizzazione omotopica dell'equivalenza stabile

6.3.1. Base cellulare. Possiamo riformulare il Teorema 6.1.2 usando la nozione di equivalenza stabile.

PROPOSIZIONE 6.3.1. *Ogni fibrato \mathbb{k} -vettoriale su un CW-complesso di dimensione m è stabilmente equivalente ad un fibrato \mathbb{k} -vettoriale di rango minore o uguale a $v = \lfloor \frac{m-k+1}{k} \rfloor$, ove $k = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{k}$.* \square

Otteniamo quindi, per i CW-complessi, il

TEOREMA 6.3.2. *Ogni fibrato \mathbb{k} -vettoriale su un CW-complesso di dimensione minore o uguale ad m è stabilmente equivalente ad un sottofibrato del fibrato banale di rango $2v$, con $v = \lfloor \frac{m-k+1}{k} \rfloor$, per $k = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{k}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia B un CW-complesso di dimensione minore o uguale ad m e ξ un fibrato \mathbb{k} -vettoriale su B . Per la Proposizione 6.3.1 possiamo supporre, a meno di equivalenza stabile, che il rango n_ξ di ξ sia minore o uguale a v . Per la Proposizione 5.6.5, B ha proprietà (S) e quindi ξ è un sottofibrato vettoriale di un fibrato banale θ^μ su B , per qualche intero positivo μ . Se $\mu \leq 2v$, abbiamo finito. Altrimenti, osserviamo che $\xi \oplus \eta \simeq \theta^\mu$ per un fibrato \mathbb{k} -vettoriale η di rango $\mu - n_\xi$. Per il Teorema 6.1.2 possiamo decomporre η nella somma diretta $\eta = \eta' \oplus_B \theta^{\mu'}$, con η' di rango $n_{\eta'}$ minore o uguale a v . Otteniamo allora

$$(\xi \oplus_B \eta' \oplus_B \theta^{2v-n_\xi-n_{\eta'}}) \oplus \theta^{\mu-2v} \simeq \theta^{2v} \oplus \theta^{\mu-2v}.$$

Poiché $2v > v$, per il Teorema 6.1.4 abbiamo

$$\xi \oplus_B \eta' \oplus_B \theta^{2v-n_\xi-n_{\eta'}} \simeq \theta^{2v}.$$

La dimostrazione è completa. \square

Se ξ^n è un sottofibrato vettoriale del fibrato banale $\theta^{2v} = (\text{pr}_B : B \times \mathbb{k}^{2v} \rightarrow B)$, allora ξ^n è il pullback $f^*(\gamma_n(\mathbb{k}^{2v}))$ del fibrato tautologico $\gamma_n(\mathbb{k}^{2v})$ sulla grassmanniana $\mathcal{G}r_n(\mathbb{k}^{2v})$, per l'applicazione f che fa corrispondere al punto b di B la fibra $E_b(\xi^n)$, che è un n -piano di \mathbb{k}^{2v} . Il Teorema 6.2.7 ci permette allora di caratterizzare omotopicamente l'equivalenza stabile ed il gruppo di K -teoria ristretto su un CW-complesso di dimensione finita.

TEOREMA 6.3.3. *Fissiamo il corpo $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Sia B un CW-complesso di dimensione minore o uguale ad m e $v = \lfloor \frac{m-k+1}{k} \rfloor$, per $k = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{k}$. La corrispondenza*

$$(6.1) \quad \mathcal{C}(B, \mathcal{G}r_v(\mathbb{k}^{2v})) \ni f \longrightarrow f^*(\gamma_v(\mathbb{k}^{2v})) \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^v(B)$$

definisce per passaggio al quoziente una bigezione

$$(6.2) \quad \pi(B, \mathcal{G}r_v(\mathbb{k}^{2v})) \longleftrightarrow \tilde{\mathcal{K}}_{\mathbb{k}}^v(B) \simeq \tilde{\mathcal{V}}_{\mathbb{k}}^v(B).$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che ogni fibrato ξ^n , di rango minore o uguale di v è stabilmente equivalente al fibrato $\xi^n \oplus_B \theta^{v-n}$, che ha rango v . \square

6.3.2. Base compatta Hausdorff. Nel caso in cui la base B sia compatta e di Hausdorff, la validità della proprietà (S) ci permette di classificare ancora le classi di equivalenza stabile di fibrati \mathbb{k} -vettoriali su B mediante l'omotopia delle applicazioni continue a valori nella grassmanniana. L'impossibilità di valutare a priori un limite superiore alle dimensioni degli spazi vettoriali da utilizzare ci costringe però ad utilizzare in questo caso la grassmanniana infinita.

DEFINIZIONE 6.3.4. Indichiamo con $B_{(\mathbb{k})}$ il limite induttivo $\lim_{v \rightarrow \infty} \mathcal{G}r_v(\mathbb{k}^{2v})$, rispetto alle inclusioni

$$\mathcal{G}r_v(\mathbb{k}^{2v}) \ni \ell_v \longrightarrow (\ell_v \oplus \langle e_{2v+2} \rangle) \in \mathcal{G}r_{v+1}(\mathbb{k}^{2v+2}).$$

TEOREMA 6.3.5. *Se B è un compatto di Hausdorff, allora le corrispondenze (6.1) definiscono, per passaggio ai limiti induttivi ed al quoziente, una corrispondenza biunivoca*

$$(6.3) \quad \pi(B, B_{(\mathbb{k})}) \longleftrightarrow \tilde{\mathcal{V}}_{\mathbb{k}}^v(B) \simeq \tilde{\mathcal{K}}_{\mathbb{k}}^v(B).$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo dimostrato nella Proposizione 5.6.2 che ogni compatto di Hausdorff B gode della proprietà (S). Quindi ogni fibrato \mathbb{k} -vettoriale ξ su B è stabilmente equivalente, per qualche v che può dipendere da ξ , al pullback del fibrato tautologico per un'applicazione continua $f \in \mathcal{C}(B, \mathcal{G}r_v(\mathbb{k}^{2v})) \subset \mathcal{C}(B, B_{(\mathbb{k})})$. Questo dimostra che l'applicazione $\pi(B, B_{(\mathbb{k})}) \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}_{\mathbb{k}}^v(B)$ è surgettiva. Verifichiamo l'iniettività.

Se $\xi_0, \xi_1 \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^v(B)$ sono stabilmente equivalenti, possiamo trovare interi non negativi n_0, n_1 tali che $\xi_0 \oplus_B \theta^{n_0} \approx \xi_1 \oplus_B \theta^{n_1}$. Per il Lemma 5.8.6, possiamo definire un fibrato \mathbb{k} -vettoriale ξ sulla base $B \times I$ tale che

$$\xi_0 \oplus_B \theta^{n_0} \approx \xi|_{B \times \{0\}} \text{ e } \xi_1 \oplus_B \theta^{n_1} \approx \xi|_{B \times \{1\}}.$$

Poiché anche $B \times I$ gode della proprietà (S), possiamo considerare ξ come un sottofibrato di un fibrato banale $\tilde{\theta}^v = (\text{pr}_{B \times I} : (B \times I) \times \mathbb{k}^v \rightarrow B \times I)$. Se ξ ha rango r , allora $\xi' = \xi \oplus_{B \times I} \tilde{\theta}^{v-r}$ è un sottofibrato di rango v di $\tilde{\theta}^{2v}$ ed abbiamo perciò $\xi' = f^*(\gamma_v(\mathbb{k}^{2v}))$ per una $f = (f_t) \in \mathcal{C}(B \times I, \mathcal{G}r_v(\mathbb{k}^{2v})) \subset \mathcal{C}(B \times I, B_{(\mathbb{k})})$. Poiché

$f_0^*(\gamma_v(\mathbb{k}^{2v}))$ ed $f_1^*(\gamma_v(\mathbb{k}^{2v}))$ sono s -equivalenti a ξ_0 ed a ξ_1 , rispettivamente, questo dimostra che l'applicazione $\pi(B, B_{(\mathbb{k})}) \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}_{\mathbb{k}}(B)$ è anche iniettiva. \square

6.4. Gruppi si K -teoria relativi

Sia (B, A) una coppia topologica⁵.

Indichiamo con $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B, A)$ l'insieme delle triple (ξ, η, ϕ) in cui i primi due elementi sono fibrati \mathbb{k} -vettoriali su B e $\phi : E(\xi|_A) \rightarrow E(\eta|_A)$ un'applicazione continua che definisce un'equivalenza delle loro restrizioni ad A . Diciamo che due elementi (ξ, η, ϕ) e (ξ', η', ϕ') di $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B, A)$ sono *isomorfi*, e scriviamo $(\xi, \eta, \phi) \approx (\xi', \eta', \phi')$ se esistono equivalenze di fibrati \mathbb{k} -vettoriali, definite da applicazioni continue $f : E(\xi) \rightarrow E(\xi')$ e $g : E(\eta) \rightarrow E(\eta')$, che rendano commutativo il diagramma (dove indichiamo per semplicità con f, g le loro restrizioni alle fibre su A)

$$\begin{array}{ccc} E(\xi|_A) & \xrightarrow{f} & E(\xi'|_A) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi' \\ E(\eta|_A) & \xrightarrow{g} & E(\eta'|_A). \end{array}$$

Si dicono *elementari* le triple (ξ, ξ, ϕ) in cui ϕ sia omotopa all'identità nel gruppo degli automorfismi del fibrato $\xi|_A$.

Possiamo introdurre una *somma* tra gli elementi di $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B, A)$ ponendo

$$(6.4) \quad (\xi, \eta, \phi) + (\xi', \eta', \phi') = (\xi \oplus_B \xi', \eta \oplus_B \eta', \phi \oplus \phi').$$

Introduciamo in $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$ la relazione di equivalenza

$$(6.5) \quad \begin{aligned} & (\xi, \eta, \phi) \sim (\xi', \eta', \phi') \\ & \iff \exists (\tau, \tau, \psi), (\tau', \tau', \psi') \text{ elementari, tali che} \\ & \quad (\xi, \eta, \phi) + (\tau, \tau, \psi) \approx (\xi', \eta', \phi') + (\tau', \tau', \psi'). \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 6.4.1. Chiamiamo *gruppo di K -teoria relativo della coppia (B, A)* , ed indichiamo con $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B, A)$, il quoziente di $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B, A)$ rispetto alla relazione d'equivalenza (6.5).

PROPOSIZIONE 6.4.2. *Con la somma definita per passaggio al quoziente da (6.4), $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B, A)$ è un gruppo abeliano, che coincide con $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B)$ quando $A = \emptyset$. È*

$$(6.6) \quad (\xi, \eta, \phi) + (\eta, \xi, \phi^{-1}) \sim 0 \text{ in } \mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B, A) \text{ per ogni } (\xi, \eta, \phi) \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B, A).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $A \neq \emptyset$. Si verifica facilmente che $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B, A)$ è un monoid abeliano. Per verificare che è un gruppo basta dimostrare che vale la (6.6). Abbiamo

$$(\xi, \eta, \phi) + (\eta, \xi, \phi^{-1}) = (\xi \oplus_B \eta, \eta \oplus_B \xi, \phi \oplus \phi^{-1}) \sim (\xi \oplus_B \eta, \xi \oplus_B \eta, \psi)$$

con ψ descritta dalla matrice

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & -\phi^{-1} \\ \phi & 0 \end{pmatrix} = \psi_1 \text{ per } \psi_t = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -t \cdot \phi^{-1} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ t \cdot \phi & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -t \cdot \phi^{-1} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

⁵Ciò significa che B è uno spazio topologico ed A un suo sottospazio.

La tripletta $(\xi \oplus_B \eta, \xi \oplus_B \eta, \psi)$ è dunque elementare e questo dimostra la (6.6).

Osserviamo che ξ ed η hanno lo stesso rango, perché sono equivalenti su $A \neq \emptyset$. L'isomorfismo $\eta \oplus_B \xi \simeq \xi \oplus_B \eta$ si descrive con la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

che è omotopa all'identità. Questo spiega il segno meno davanti a ϕ^{-1} nella rappresentazione di ψ mediante una matrice.

Gli elementi di $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B, \emptyset)$ sono semplicemente coppie $(\xi, \eta) \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B) \times \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$ e possiamo definire un'applicazione di $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B, \emptyset)$ in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B)$ facendo corrispondere alla coppia (ξ, η) l'elemento $[\xi] - [\eta]$, ove abbiamo utilizzato le parentesi quadre per indicare la classe di equivalenza del fibrato in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B)$. Poiché la relazione di equivalenza che definisce $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B, \emptyset)$ identifica (ξ, η) a $(\xi \oplus_B \tau, \eta \oplus_B \tau)$ per ogni fibrato \mathbb{k} -vettoriale τ su B , la $(\xi, \eta) \rightarrow ([\xi] - [\eta])$ passa al quoziente e definisce l'isomorfismo $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B, \emptyset) \simeq \mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B)$. \square

OSSERVAZIONE 6.4.3. Intuitivamente, possiamo raffigurarci $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B, A)$ come il sottogruppo degli elementi del gruppo di K -teoria di B che si annullano su A .

LEMMA 6.4.4. *Siano (ξ, η, ϕ) e (ξ, η, ϕ') due elementi di $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B, A)$ che differiscono solo per le equivalenze ϕ, ϕ' delle restrizioni ad A dei fibrati. Se ϕ e ϕ' sono omotope, allora $(\xi, \eta, \phi) \sim (\xi, \eta, \phi')$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta verificare che

$$\begin{aligned} (\xi, \eta, \phi') - (\xi, \eta, \phi) &\sim (\xi, \eta, \phi') + (\eta, \xi, \phi^{-1}) = (\xi \oplus_B \eta, \eta \oplus_B \xi, \phi' \oplus \phi^{-1}) \\ &\sim (\xi \oplus_B \eta, \xi \oplus_B \eta, \psi) \sim 0 \end{aligned}$$

per

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & -\phi^{-1} \\ \phi' & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo è verificato se ψ è omotopa all'identità. Per l'ipotesi che ϕ' sia omotopa a ϕ , la ψ è omotopa a

$$\psi' = \begin{pmatrix} 0 & -\phi^{-1} \\ \phi & 0 \end{pmatrix},$$

che è omotopa all'identità (vedi la dimostrazione della Proposizione 6.4.2). \square

PROPOSIZIONE 6.4.5. *Siano (ξ, η, ϕ) ed (η, ζ, ψ) elementi di $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B, A)$. Allora*

$$(6.7) \quad (\xi, \eta, \phi) + (\eta, \zeta, \psi) \sim (\xi, \zeta, \psi \circ \phi) \text{ in } \mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B, A).$$

DIMOSTRAZIONE. Il primo membro della (6.7) è

$$(\xi \oplus_B \eta, \eta \oplus_B \zeta, \phi \oplus_B \psi) \sim (\xi \oplus_B \eta, \zeta \oplus_B \eta, \alpha), \quad \text{con } \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\psi \\ \phi & 0 \end{pmatrix}.$$

Per il secondo membro, abbiamo

$$(\xi, \zeta, \psi \circ \phi) \sim (\xi \oplus_B \eta, \zeta \oplus_B \eta, \psi \circ \phi \oplus I), \quad \text{con } \psi \circ \phi \oplus I = \begin{pmatrix} \psi \circ \phi & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\begin{pmatrix} 0 & -\psi \\ \psi^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \circ \phi & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\psi \\ \phi & 0 \end{pmatrix}$$

e $\begin{pmatrix} 0 & -\psi \\ \psi^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ è omotopa all'identità (vedi la dimostrazione della Proposizione 6.4.2), l'equivalenza segue dal Lemma 6.4.4. \square

Vogliamo dimostrare che per una coppia topologica (B, A) formata da un compatto di Hausdorff B ed un suo sottospazio chiuso A i gruppi di K -teoria di B e di A e quello della coppia (B, A) sono legati da una successione esatta. Questo risultato è un caso particolare di un teorema generale che riguarda morfismi di categorie. La dimostrazione utilizza le nozioni di quasi surgettività e di pienezza, che illustriamo, nei due lemmi seguenti, per il caso che ci interessa: quello delle categorie di fibrati \mathbb{k} -vettoriali e dei loro morfismi \mathbb{k} -lineari.

LEMMA 6.4.6 (quasi surgettività). *Sia B un compatto di Hausdorff ed A un suo sottospazio chiuso. Allora ogni $\xi \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(A)$ è un sottofibrato della restrizione ad A di un fibrato \mathbb{k} -vettoriale su B .*

DIMOSTRAZIONE. Questo segue dal fatto che ogni $\xi \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(A)$ è un sottofibrato di un fibrato banale su A , ed un fibrato banale su A è la restrizione del corrispondente fibrato banale su B . \square

LEMMA 6.4.7 (pienezza). *Sia B un compatto di Hausdorff ed A un suo sottospazio chiuso. Allora, per ogni coppia di fibrati \mathbb{k} -vettoriali ξ, η su B ed ogni morfismo di fibrati \mathbb{k} -vettoriali $f \in \mathcal{C}(E(\xi|_A), E(\eta|_A))$, che renda commutativo il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} E(\xi|_A) & \xrightarrow{f} & E(\eta|_A) \\ & \searrow \pi_{\xi} & \swarrow \pi_{\eta} \\ & A & \end{array}$$

esiste una $\tilde{f} \in \mathcal{C}(E(\xi), E(\eta))$, che estende f e rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{\tilde{f}} & E(\eta) \\ & \searrow \pi_{\xi} & \swarrow \pi_{\eta} \\ & B & \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti le sezioni di $\mathcal{H}om_{\mathbb{k}}(\xi, \eta)$ su A si possono estendere a sezioni globali su B , per l'ipotesi che A fosse un sottospazio chiuso del compatto di Hausdorff B . \square

TEOREMA 6.4.8. *Le applicazioni*⁶

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B, A) \ni (\xi, \eta, \phi) &\longrightarrow [\xi] - [\eta] \in \mathcal{K}_{\mathbb{k}}(B), \\ \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B) \ni \xi &\longrightarrow \xi|_A \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(A) \end{aligned}$$

definiscono, per passaggio al quoziente, un complesso di gruppi abeliani e di omomorfismi di gruppi.

$$(6.8) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{k}}(B, A) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{K}_{\mathbb{k}}(B) \xrightarrow{\beta} \mathcal{K}_{\mathbb{k}}(A) \longrightarrow 0.$$

⁶Le parentesi quadre indicano qui la classe di equivalenza in $\mathcal{K}_{\mathbb{k}}(B)$ del fibrato.

- (1) $\ker \alpha$ è formato dalle classi di equivalenza degli elementi della forma (ξ, ξ, ϕ) di $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B, A)$;
- (2) se A gode della proprietà (S) , allora (6.8) è esatta in $\mathcal{K}_{\mathbb{k}}(B)$;
- (3) Se A è un retratto di B , allora β è surgettiva.

Se B è un compatto di Hausdorff ed A un suo retratto, allora la (6.8) è esatta e split.

DIMOSTRAZIONE. La (6.8) è un complesso perché, se $(\xi, \eta, \phi) \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B, A)$, allora $[\xi|_A] = [\eta|_A]$.

(1) Sia $(\xi, \eta, \phi) \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B, A)$ il rappresentante di una classe di $\mathcal{K}_{\mathbb{k}}(B, A)$ che appartenga al nucleo di α . Esiste allora un fibrato $\zeta \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$ tale che $\xi \oplus_B \zeta \approx \eta \oplus_B \zeta$. Indichiamo con $f : E(\eta \oplus_B \zeta) \rightarrow E(\xi \oplus_B \zeta)$ l'omeomorfismo che definisce l'equivalenza. Allora

$$(\xi, \eta, \phi) \sim (\xi \oplus_B \zeta, \eta \oplus_B \zeta, \phi \oplus \text{id}) \approx (\xi \oplus_B \zeta, \xi \oplus_B \zeta, f \circ (\phi \oplus \text{id})).$$

(2) Un elemento di $\mathcal{K}(B) \simeq \mathcal{K}(B, \emptyset)$ è la classe di equivalenza di una coppia (ξ, η) di fibrati in $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$. Se la sua immagine mediante β è nulla, allora, poiché abbiamo supposto che A godesse della proprietà (S) , per il Teorema 6.2.5, le restrizioni di ξ e di η ad A sono stabilmente equivalenti e possiamo trovare un intero non negativo v tale che $\xi|_A \oplus_A \theta_A^v \approx \eta|_A \oplus_A \theta_A^v$. Se ϕ è un omeomorfismo di $E(\xi|_A \oplus_A \theta_A^v)$ su $E(\eta|_A \oplus_A \theta_A^v)$ che definisce l'equivalenza, allora la classe di (ξ, η) è l'immagine mediante α della classe di $(\xi \oplus_B \theta_B^v, \eta \oplus_B \theta_B^v, \phi)$ in $\mathcal{K}_{\mathbb{k}}(B, A)$.

(3) Se ρ è una retrazione di B su A , cioè un'applicazione continua di B su A con $\rho(a) = a$ per ogni a di A , allora, la classe di $\mathcal{K}(A) \simeq \mathcal{K}(A, \emptyset)$ definita da una coppia (ξ, η) di fibrati \mathbb{k} -vettoriali su A è l'immagine mediante β della classe di $\mathcal{K}_{\mathbb{k}}(B) \simeq \mathcal{K}(B, \emptyset)$ definita dalla coppia $(\rho^*(\xi), \rho^*(\eta))$.

Supponiamo ora che B sia un compatto di Hausdorff ed A un suo retratto. Per i punti (2) e (3), ci resta soltanto da verificare l'esattezza in $\mathcal{K}_{\mathbb{k}}(B, A)$ e, per il punto (1), ciò si riduce a verificare che gli elementi (ξ, ξ, ϕ) sono equivalenti alla classe 0. Utilizzando il fatto che B gode della proprietà (S) , sommando una tripletta elementare possiamo ricondurci a dimostrare che una tripletta $(\theta_B^v, \theta_B^v, \phi)$ di $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B, A)$ è nella classe di 0. A questo scopo osserviamo che $\theta_B^v = \rho^*(\theta_A^v)$ e che quindi la ϕ si rileva ad un automorfismo del fibrato banale:

$$\tilde{\phi}(b, v) = (b, \phi(\rho(b))(v)), \quad \forall b \in B, \quad \forall v \in \mathbb{k}^v.$$

Utilizzando $\tilde{\phi}$, otteniamo $(\theta_B^v, \theta_B^v, \phi) \sim (\theta_B^v, \theta_B^v, \text{id}) \sim 0$.

Concludiamo osservando che l'applicazione $\mathcal{K}(A) \rightarrow \mathcal{K}(B)$, ottenuta dalla $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(A) \ni \xi \rightarrow \rho^*(\xi) \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$ per passaggio al quoziente rispetto alla relazione di s -equivalenza, inverte la β e definisce quindi uno split della (6.8). \square

⁷Indichiamo qui con $\theta_A^v = (\text{pr}_A : A \times \mathbb{k}^v \rightarrow A)$ e $\theta_B^v = (\text{pr}_B : B \times \mathbb{k}^v \rightarrow B)$ i fibrati \mathbb{k} -vettoriali banali di rango v su A e B , rispettivamente.

6.5. I gruppi $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(B)$

Fissato uno spazio topologico B , consideriamo lo spazio $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{(-1)}(B)$ che consiste delle coppie (ξ, f) formate da un fibrato \mathbb{k} -vettoriale ξ e da un omeomorfismo $f : E(\xi) \rightarrow E(\xi)$ che definisca un'equivalenza di ξ in sé. Due coppie (ξ_1, f_1) e (ξ_2, f_2) si dicono *isomorfe*, relazione che indicheremo con $(\xi_1, f_1) \approx (\xi_2, f_2)$, se possiamo trovare un'equivalenza di fibrati vettoriali, definita da una $\phi : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ che renda commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E(\xi_1) & \xrightarrow{\phi} & E(\xi_2) \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ E(\xi_1) & \xrightarrow{\phi} & E(\xi_2). \end{array}$$

Introduciamo per coppie $(\xi_1, f_1), (\xi_2, f_2)$ di $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{(-1)}(B)$ una *somma* ponendo

$$(6.9) \quad (\xi_1, f_1) + (\xi_2, f_2) = (\xi_1 \oplus_B \xi_2, f_1 \oplus f_2).$$

Chiamiamo *elementari* le coppie (ξ, f) in cui f sia omotopa all'identità nello spazio delle equivalenze di fibrati vettoriali.

DEFINIZIONE 6.5.1. Diciamo che $(\xi_1, f_1), (\xi_2, f_2) \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{(-1)}(B)$ sono *equivalenti*, e scriviamo $(\xi_1, f_1) \sim (\xi_2, f_2)$, se possiamo trovare due coppie elementari (η_1, g_1) ed (η_2, g_2) in $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{(-1)}(B)$ tali che

$$(\xi_1, f_1) + (\eta_1, g_1) \approx (\xi_2, f_2) + (\eta_2, g_2).$$

Indichiamo con $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(B)$ l'insieme delle classi di equivalenza di $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{(-1)}(B)$ rispetto alla relazione \sim definita sopra.

Con dimostrazioni analoghe a quelle della Proposizione 6.4.2, del Lemma 6.4.4 e della Proposizione 6.4.5, otteniamo:

PROPOSIZIONE 6.5.2. Per passaggio al quoziente, la somma (6.9) definisce su $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(B)$ una struttura di gruppo abeliano.

Se $(\xi, f) \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{(-1)}(B)$, allora

$$(\xi, f) + (\xi, f^{-1}) \sim 0 \text{ in } \mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(B).$$

Se $\xi \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$ ed f, f' sono omotope come equivalenze di ξ , allora $(\xi, f) \sim (\xi, f')$ in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(B)$.

Vale la formula d'addizione

$$(6.10) \quad (\xi, f) + (\xi, f') \sim (\xi, f \circ f') \text{ in } \mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(B). \quad \square$$

LEMMA 6.5.3. Un elemento (ξ, f) di $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{(-1)}(B)$ definisce la classe 0 in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(B)$ se e soltanto se possiamo trovare un fibrato \mathbb{k} -vettoriale η su B tale che $f \oplus \text{id}_{E(\eta)}$ sia omotopa all'identità come equivalenza sul fibrato $\xi \oplus_B \eta$.

DIMOSTRAZIONE. Se $(\xi, f) \sim 0$ in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(B)$, possiamo trovare due coppie elementari (η, g) ed (η', g') tali che

$$(\xi, f) + (\eta, g) \approx (\eta', g').$$

L'equivalenza significa che vi è un'equivalenza di fibrati \mathbb{k} -vettoriali h che rende commutativo il diagramma

$$(6.11) \quad \begin{array}{ccc} E(\xi \oplus_B \eta) & \xrightarrow{f \oplus g} & E(\xi \oplus_B \eta) \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ E(\eta') & \xrightarrow{g'} & E(\eta'). \end{array}$$

Questo significa che $f \oplus g = h \circ g' \circ h^{-1}$ ed è quindi omotopa all'identità perché tale è g' . Il viceversa segue dalla definizione di $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(B)$. \square

Da questo lemma ricaviamo

PROPOSIZIONE 6.5.4. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due coppie $(\xi_1, f_1), (\xi_2, f_2) \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{(-1)}(B)$ definiscano lo stesso oggetto in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(B)$ è che si possa trovare un fibrato \mathbb{k} -vettoriale η tale che $f_1 \oplus \text{id}_{E(\xi_2)} \oplus \text{id}_{E(\eta)}$ ed $\text{id}_{E(\xi_1)} \oplus f_2 \oplus \text{id}_{E(\eta)}$ siano omotope come equivalenze del fibrato $\xi_1 \oplus_B \xi_2 \oplus_B \eta$.*

DIMOSTRAZIONE. La differenza delle classi di (ξ_1, f_1) e (ξ_2, f_2) è, per la Proposizione 6.5.2, la classe del fibrato

$$(\xi_1, f_1) + (\xi_2, f_2^{-1}) = (\xi_1 \oplus \xi_2, f_1 \oplus f_2^{-1}).$$

Per il Lemma 6.5.3 ciò equivale al fatto che vi sia un fibrato vettoriale η tale che $f_1 \oplus f_2^{-1} \oplus \text{id}_{E(\eta)}$ sia omotopa all'identità nella classe delle equivalenze del fibrato \mathbb{k} -vettoriale $\xi_1 \oplus_B \xi_2 \oplus_B \eta$. Componendo l'omotopia con $\text{id}_{E(\xi_1)} \oplus f_2 \oplus \text{id}_{E(\eta)}$ otteniamo la dimostrazione della necessità della condizione. La sufficienza segue subito dalla Proposizione 6.5.2. \square

PROPOSIZIONE 6.5.5. *Se B gode della proprietà (S), allora ogni elemento di $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(B)$ ha come rappresentante una coppia (θ^n, g) in cui θ^n è il fibrato \mathbb{k} -vettoriale banale ($\text{pr}_B : B \times \mathbb{k}^n \rightarrow B$) di rango n su B e g una sua equivalenza.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $(\xi, f) \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{(-1)}(B)$. Per la (S) possiamo trovare $\eta \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$ tale che $\xi \oplus \eta \approx \theta^n$. Allora $(\xi, f) \sim (\xi \oplus \eta, f \oplus \text{id}_{E(\eta)}) \sim (\theta^n, g)$ per un'equivalenza g di θ^n . \square

Se $n < v$, abbiamo le inclusioni naturali di gruppi

$$(6.12) \quad \mathbf{O}(n) \hookrightarrow \mathbf{O}(v), \quad \mathbf{U}(n) \hookrightarrow \mathbf{U}(v), \quad \mathbf{Sp}(n) \hookrightarrow \mathbf{Sp}(v)$$

che si ottengono identificando il gruppo che agisce su \mathbb{k}^n con il sottogruppo del gruppo che agisce su \mathbb{k}^v lasciando fissi i vettori e_{n+1}, \dots, e_v .

DEFINIZIONE 6.5.6. Poniamo

$$(6.13) \quad \mathbf{O} = \text{inj lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{O}(n), \quad \mathbf{U} = \text{inj lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{U}(n), \quad \mathbf{Sp} = \text{inj lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Sp}(n),$$

dove i limiti diretti sono fatti rispetto alla catena di inclusioni (6.12).

Osserviamo che \mathbf{O} , \mathbf{U} , \mathbf{Sp} sono gruppi topologici. Si possono interpretare come gruppi di trasformazioni lineari di \mathbb{k}^∞ che lasciano fissi i vettori del complementare di un sottospazio di dimensione finita.

Se \mathbf{G} è un gruppo topologico e B uno spazio topologico, le operazioni su \mathbf{G} definiscono una struttura di gruppo topologico su $\mathcal{C}(B, \mathbf{G})$, che per passaggio al quoziente definisce una struttura di gruppo su $\pi(B, \mathbf{G})$.

Dalla Proposizione 6.5.5 otteniamo

TEOREMA 6.5.7. *Se B gode della proprietà (S), abbiamo isomorfismi di gruppi*

$$(6.14) \quad \begin{cases} \pi(B, \mathbf{O}) \leftrightarrow \mathcal{X}_{\mathbb{R}}^{-1}(B), \\ \pi(B, \mathbf{U}) \leftrightarrow \mathcal{X}_{\mathbb{C}}^{-1}(B), \\ \pi(B, \mathbf{Sp}) \leftrightarrow \mathcal{X}_{\mathbb{H}}^{-1}(B). \end{cases} \quad \square$$

Indichiamo con $\mathcal{V}_{\mathbb{k}, \text{triv}}^{(-1)}(A)$ l'insieme degli elementi di $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{(-1)}(A)$ della forma (θ_A^n, ϕ) , in cui cioè il primo elemento della coppia sia un fibrato banale. Consideriamo l'applicazione

$$(6.15) \quad \mathcal{V}_{\mathbb{k}, \text{triv}}^{(-1)}(A) \ni (\theta_A^n, \phi) \longrightarrow (\theta_B^n, \theta_B^n, \phi) \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B, A).$$

LEMMA 6.5.8. *Supponiamo che A goda della proprietà (S). Allora, se $(\theta_A^n, \phi) \sim (\theta_A^v, \psi)$ in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{(-1)}(A)$, anche $(\theta_B^n, \theta_B^n, \phi) \sim (\theta_B^v, \theta_B^v, \psi)$ in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B, A)$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché abbiamo supposto che A goda della proprietà (S), tenuto conto della Proposizione 6.5.2, l'equivalenza $(\theta_A^n, \phi) \sim (\theta_A^v, \psi)$ in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{(-1)}(A)$ si può riformulare richiedendo che si possano trovare interi non negativi m_1, m_2 tali che $(\theta_A^n \oplus_A \theta_A^{m_1}, \phi \oplus \text{id}) \approx (\theta_A^v \oplus_A \theta_A^{m_2}, \psi \oplus \text{id})$ in $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}^{(-1)}(A)$. Poiché

$$e \quad \begin{aligned} & (\theta_B^n \oplus_B \theta_B^{m_1}, \theta_B^n \oplus_B \theta_B^{m_1}, \phi \oplus \text{id}) \sim (\theta_B^n, \theta_B^n, \phi) \\ & (\theta_B^v \oplus_B \theta_B^{m_1}, \theta_B^v \oplus_B \theta_B^{m_1}, \psi \oplus \text{id}) \sim (\theta_B^v, \theta_B^v, \psi), \end{aligned}$$

$(\theta_B^n, \theta_B^n, \phi)$ e $(\theta_B^v, \theta_B^v, \psi)$ definiscono la stessa classe in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B, A)$. \square

Il Lemma 6.5.8 ci permette di definire, nel caso in cui A goda della proprietà (S), un'applicazione $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(A) \rightarrow \mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B, A)$.

TEOREMA 6.5.9. *Sia (B, A) una coppia topologica e supponiamo che A e B godano della proprietà (S). Abbiamo allora una successione esatta*

$$(6.16) \quad \mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(B) \xrightarrow{\beta^{-1}} \mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(A) \xrightarrow{\delta^{-1}} \mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B, A) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B) \xrightarrow{\beta} \mathcal{X}_{\mathbb{k}}(A).$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già stabilito l'esattezza in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B)$ nel Teorema 6.4.8.

Rimane da verificare che (6.16) è un complesso ed è esatta in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(A)$ e $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B, A)$.

Una classe di $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(A)$ ha un rappresentante (θ_A^n, ϕ) che appartiene a $\mathcal{V}_{\mathbb{k}, \text{triv}}^{(-1)}(A)$. La sua immagine è la classe di $(\theta_B^n, \theta_B^n, \phi)$, la cui immagine ($[\xi] - [\xi]$) è nulla.

Consideriamo ora un rappresentante $(\theta_B^n, \phi) \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}, \text{triv}}^{(-1)}(B)$ di una classe di $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(B)$. Allora $(\theta_A^n, \phi|_{E(\theta_A^n)})$ rappresenta l'immagine della classe in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(A)$, e questa si mappa nella classe di $(\theta_B^n, \theta_B^n, \phi|_{E(\theta_A^n)})$. Questa tripletta è equivalente alla tripletta $(\theta_B^n, \theta_B^n, \text{id})$, perché ϕ è globale.

ESATTEZZA IN $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B, A)$. Nel Teorema 6.4.8 abbiamo dimostrato che una classe di equivalenza di $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B, A)$ con immagine nulla ha un rappresentante della forma (ξ, ξ, ϕ) in $\mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B, A)$. Poiché B gode della (S) , abbiamo

$$(\xi, \xi, \phi) \sim (\xi \oplus_B \eta, \xi \oplus_B \eta, \phi \oplus \text{id}) \approx (\theta_B^n, \theta_B^n, \psi)$$

per qualche $\eta \in \mathcal{V}_{\mathbb{k}}(B)$. Allora la classe di (ξ, ξ, ϕ) in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B, A)$ è l'immagine della classe di $(\theta_A^n, \psi|_A)$ in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(A)$.

ESATTEZZA IN $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(A)$. Una classe di equivalenza in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(A)$ che ha immagine nulla in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}(B, A)$ ha un rappresentante (θ_A^n, ϕ) per cui, per qualche intero non negativo v , la tripletta $(\theta_B^{n+v}, \theta_B^{n+v}, \phi \oplus \text{id})$ sia elementare. Per il Lemma 6.4.4 ciò implica che possiamo trovare equivalenze f, g del fibrato banale θ_B^{n+v} che rendano commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} A \times \mathbb{k}^{n+v} & \xrightarrow{f|_{A \times \mathbb{k}^{n+v}}} & A \times \mathbb{k}^{n+v} \\ \phi \oplus \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ A \times \mathbb{k}^{n+v} & \xrightarrow{g|_{A \times \mathbb{k}^{n+v}}} & A \times \mathbb{k}^{n+v}. \end{array}$$

La classe di (θ^n, ϕ) in $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(A)$ è l'immagine della classe $(\theta_B^{n+v}, g \circ (\phi \oplus \text{id}) \circ f^{-1})$ di $\mathcal{X}_{\mathbb{k}}^{-1}(B)$.

□

Parte 2

Algebre di Clifford

Campi di vettori sulle sfere

Le algebre di Clifford, che introdurremo nel seguito, hanno importanti applicazioni sia in matematica che in fisica.

In questo capitolo introduttivo mostreremo come esse si associno in modo naturale al problema dell'esistenza, sulle sfere euclidee S^n , di sistemi di campi di vettori indipendenti privi di punti critici.

È comunque interessante accennare anche al loro ruolo in meccanica quantistica. Tra la seconda metà degli anni '20 e l'inizio degli anni '30 del secolo scorso, il fisico inglese Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) formulò la sua teoria relativistica dell'elettrone, la cui validità fu confermata dalla scoperta successiva del *positrone*, da essa predetto. Tracciamone qui alcune idee fondamentali¹. Il problema di Dirac era di trovare un'equazione delle onde $D\psi = \lambda\psi$ che fosse invariante rispetto al gruppo di Lorentz e compatibile con l'equazione di Klein-Gordon $\square\psi = \lambda\psi$, ove $\square = (\partial/\partial x_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\partial/\partial x_i)^2$ è l'operatore delle onde in quattro variabili. Per il principio di causalità, D doveva essere un operatore del prim'ordine rispetto al tempo e, per l'invarianza rispetto al gruppo di Lorentz, del prim'ordine anche rispetto alle altre coordinate. La soluzione di questo problema fu ottenuta considerando, invece della funzione d'onda complessa ψ , un n -vettore $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ di funzioni d'onda ed introducendo un nuovo operatore $D = \sum_{i=0}^3 \gamma_i \cdot (\partial/\partial x_i)$ in cui le γ_i fossero matrici $n \times n$, con $D^2 = \text{diag}(\square, \dots, \square)$. Questa condizione si traduce per le matrici γ_i , in un sistema di equazioni algebriche $\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = \pm \delta_{i,j}$, che, come vedremo, caratterizzano, al variare dei segni e di n , le diverse algebre di Clifford reali.

Una proprietà fondamentale della costruzione di Dirac è il fatto che la trasformazione delle Ψ , associata ad una trasformazione di Lorentz, è determinata solo a meno del segno. Ciò è conseguenza del fatto che le Ψ sono gli elementi di una rappresentazione del rivestimento a due fogli del gruppo di Lorentz, cioè del gruppo spinoriale.

Ciò corrisponde ad un fatto centrale della teoria delle rappresentazioni del gruppo ortogonale, che era stato scoperto e studiato in precedenza da Cartan e Weyl: nel caso del gruppo ortogonale $\mathbf{SO}(n)$, tutte le rappresentazioni della sua algebra di Lie sono essenzialmente generate dalla rappresentazione standard su \mathbb{R}^n (e le sue potenze esterne e simmetriche) e da una seconda rappresentazione che si

¹vedi: H.Blaine Lawson, Jr, Marie-Louise Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1989.

costruisce a partire dall'algebra generata dalle γ_i , cioè dall'algebra di Clifford associata alla forma quadratica che definisce il gruppo ortogonale, e che si chiama la *rappresentazione spin*. Questa non è una rappresentazione del gruppo ortogonale, ma del suo rivestimento **Spin**(n). Oltre alle motivazioni fisiche appena descritte, la rappresentazione spin ha un ruolo centrale in molte questioni matematiche: oltre ai campi di vettori sulle sfere, di cui ci occupiamo in questo capitolo, entra in problemi di immersioni di varietà, nell'integralità di alcuni numeri caratteristici, nella triality in dimensione otto, in questioni di esistenza di strutture complesse, nell'esistenza di metriche con curvatura scalare positiva, nella teoria dell'indice degli operatori ellittici sulle varietà compatte, nell'introduzione dell'importante classe delle varietà di spin, che sono oggetto dell'opera citata in nota.

7.1. Vettori tangenti unitari sulle sfere

Sappiamo che, su $S^1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$, la derivata $\frac{\partial}{\partial \theta}$ definisce un campo di vettori unitari. Dimostriamo innanzi tutto il seguente

PROPOSIZIONE 7.1.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista un campo di vettori unitario sulla sfera S^n è che n sia un numero dispari.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo l'identificazione

$$TS^n = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid (x|v) = 0\} \subset S^n \times \mathbb{R}^{n+1}.$$

Supponiamo che $n = 2m - 1$ sia un numero dispari. Possiamo allora considerare la sfera S^n immersa nello spazio complesso $\mathbb{C}^m \simeq \mathbb{R}^{n+1}$. L'applicazione

$$S^n \ni z \rightarrow (z, i \cdot z) \in TS^n \subset S^n \times \mathbb{C}^m$$

è un campo di vettori unitario su S^n .

Supponiamo viceversa che vi sia su S^n un campo di vettori $S^n \ni x \rightarrow v(x) \in S^n$, con $(x|v(x)) = 0$ per ogni x . Allora $v(x)$ è linearmente indipendente da x per ogni $x \in S^n$ e quindi

$$S^n \times [0, 1] \ni (x, t) \rightarrow f_t(x) = (1 - 2t) \cdot x + 2\sqrt{t - t^2} \cdot v(x) \in S^n$$

è un'omotopia in $\mathcal{C}(S^n, S^n)$ dell'identità con la mappa antipodale. Questa ha grado $(-1)^{n+1}$ ed n deve quindi essere un numero dispari. \square

OSSERVAZIONE 7.1.2. Sia m un intero e consideriamo la sfera S^{4m-1} immersa nello spazio vettoriale \mathbb{H}^m . Allora, per ogni $q \in S^2 \subset \mathbb{R}^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} \mid \bar{q} = -q\}$ i campi $L_q : S^{4m-1} \ni \xi \rightarrow q \cdot \xi \in S^{4m-1}$ ed $R_q : S^{4m-1} \ni \xi \rightarrow \xi \cdot q \in S^{4m-1}$, essendo $q \cdot \xi$ e $\xi \cdot q$ ortogonali a ξ , sono campi di vettori unitari tangenti ad S^{4m-1} .

7.2. Moltiplicazione ortogonale

DEFINIZIONE 7.2.1. Chiamiamo *moltiplicazione ortogonale* un'applicazione

$$(7.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \ni (\xi, x) \rightarrow \xi \times x \in \mathbb{R}^n, \\ \text{bilineare e tale che} \\ \|\xi \times x\| = \|\xi\| \cdot \|x\|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

ESEMPIO 7.2.2. Il prodotto vettore in \mathbb{R}^3 è un esempio di moltiplicazione ortogonale, con $n = k = 3$.

LEMMA 7.2.3. Sia (7.1) una moltiplicazione ortogonale. Allora

- (1) $k \leq n$;
- (2) per ogni $\xi \in S^{k-1}$, l'applicazione $u_\xi : \mathbb{R}^n \ni x \rightarrow \xi \times x \in \mathbb{R}^n$ definisce un elemento u_ξ del gruppo ortogonale $\mathbf{O}(n)$;
- (3) per ogni $x \in S^{n-1}$, l'applicazione $\iota_x : \mathbb{R}^k \ni \xi \rightarrow \xi \times x \in \mathbb{R}^n$ è un'immersione ortogonale di \mathbb{R}^k in \mathbb{R}^n .

Ricordiamo che un'immersione ortogonale di \mathbb{R}^k in \mathbb{R}^n è un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $(\phi(\xi)|\phi(\eta))_{\mathbb{R}^n} = (\xi|\eta)_{\mathbb{R}^k}$.

DIMOSTRAZIONE. Gli enunciati (2) e (3) seguono dalle formule di polarizzazione, che ci dicono che una trasformazione lineare che preserva le lunghezze dei vettori è un'immersione ortogonale. La (1) è conseguenza della (3). \square

LEMMA 7.2.4. Se (7.1) è una moltiplicazione ortogonale e $u \in \mathbf{O}(n)$, allora anche

$$(7.2) \quad \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \ni (\xi, x) \longrightarrow \xi \times_u x = \xi \times u(x) \in \mathbb{R}^n$$

è una moltiplicazione ortogonale. \square

DEFINIZIONE 7.2.5. Le due moltiplicazioni ortogonali (7.1) e (7.2) si dicono equivalenti.

DEFINIZIONE 7.2.6. Chiamiamo *normalizzata* una moltiplicazione ortogonale (7.1) per cui

$$(7.3) \quad e_k \times x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

LEMMA 7.2.7. Ogni moltiplicazione ortogonale è equivalente ad una moltiplicazione ortogonale normalizzata. \square

PROPOSIZIONE 7.2.8. Se (7.1) è una moltiplicazione ortogonale normalizzata, allora le $u_{e_1}(x), \dots, u_{e_{k-1}}(x)$, per $x \in S^{n-1}$, sono $(k-1)$ campi di vettori unitari, due a due tra loro ortogonali, tangenti ad S^{n-1} . \square

TEOREMA 7.2.9. L'insieme delle moltiplicazioni ortogonali $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è in corrispondenza biunivoca con le $(k-1)$ -uple u_1, \dots, u_{k-1} di elementi di $\mathbf{O}(n)$ che soddisfano le condizioni

$$(7.4) \quad u_i^2 = -\text{id}, \quad u_i \circ u_j + u_j \circ u_i = 0, \quad \forall 1 \leq i \neq j < k.$$

La corrispondenza si ottiene ponendo $u_k = \text{id}$ e

$$(7.5) \quad e_i \times x = u_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \leq i \leq k.$$

DIMOSTRAZIONE. Data una moltiplicazione ortogonale normalizzata e definiti gli u_i mediante la (7.5), per ogni $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in S^{k-1}$ l'applicazione $u_{\sum_i \lambda_i u_i}$ è ortogonale. Quindi

$$\text{id} = \left(\sum_i \lambda_i u_i \right) \left(\sum_i \lambda_i u_i \right)^* = \sum_{1 \leq i, j \leq k} \lambda_i \lambda_j \cdot u_i \circ u_j^*$$

$$= \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i^2 \right) \cdot \text{id} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \lambda_i \lambda_j (u_i \circ u_j^* + u_j \circ u_i^*).$$

Da questa ricaviamo che

$$u_i \circ u_j^* + u_j \circ u_i^* = 0, \quad \forall 1 \leq i < j \leq k$$

Per $j = k$ quest'uguaglianza dà $u_i = -u_i^* = -u_i^{-1}$, e quindi $u_i^2 = -\text{id}$ per ogni $i = 1, 2, \dots, k-1$. Sostituendo $u_i^* = -u_i$ per $1 \leq i < k$, otteniamo le

$$u_i \circ u_j + u_j \circ u_i = 0, \quad \forall 1 \leq i < j < k.$$

Viceversa, supponiamo date le u_1, \dots, u_{k-1} ed usiamo le (7.5), insieme ad $e_k \times x = x$ per ogni x , per definire una forma bilineare $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \ni (\xi, x) \rightarrow \xi \times x \in \mathbb{R}^n$. Utilizzando le ipotesi (7.4) sulle u_i si verifica immediatamente che vale la $\|\xi \times x\| = \|\xi\| \cdot \|x\|$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^k$ ed $x \in \mathbb{R}^n$. \square

Le (7.4) caratterizzano le regole di moltiplicazione dei generatori di un'algebra di Clifford e la loro azione su \mathbb{R}^n come trasformazioni ortogonali è una *rappresentazione dell'algebra di Clifford*. Il problema dell'esistenza di campi di vettori unitari tangenti alle sfere sono quindi naturalmente legati alle rappresentazioni ortogonali delle algebre di Clifford.

Algebre di Clifford e Spinori

Le algebre di Clifford reali furono introdotte da William K. Clifford¹ come una generalizzazione dei quaternioni. Esse hanno un ruolo fondamentale nella descrizione delle rappresentazioni lineari delle algebre di Lie ortogonali e sono quindi importanti per la fisica teorica e la geometria differenziale.

Le algebre di Clifford servono per descrivere, accanto alla rappresentazione standard delle algebre ortogonali (che diciamo *vettoriali* e rappresentano in fisica i *bosoni di gauge*, cioè le forze nel modello standard), quelle spinoriali (in fisica rappresentano i *fermioni*, cioè quark e leptoni).

Inizieremo con una descrizione elementare delle algebre di Clifford associate agli spazi reali euclidei, e studieremo poi, seguendo l'impostazione generale di Deligne e Varadarajan, quelle associate a spazi ortogonali generali.

8.1. Algebre di Clifford reali

Sia V uno spazio vettoriale reale, su cui sia stato fissato un prodotto scalare, $V \times V \ni (v_1, v_2) \rightarrow (v_1|v_2) \in \mathbb{R}$, con norma $\|v\| = \sqrt{(v|v)} \geq 0$.

DEFINIZIONE 8.1.1. L'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell(V)$ è l'algebra associativa unitaria reale generata da V , modulo le relazioni

$$(8.1) \quad v^2 + \|v\|^2 = 0, \quad \forall v \in V.$$

In modo equivalente, possiamo definire $\mathcal{C}\ell(V)$ come il quoziente dell'algebra tensoriale $\mathbf{T}(V)$ rispetto all'ideale bilatero generato dagli elementi $v \otimes v + \|v\|^2$, al variare di v in V .

Per le formule di polarizzazione, la (8.1) è equivalente a

$$(8.2) \quad v_1 v_2 + v_2 v_1 + 2(v_1|v_2) = 0, \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

OSSERVAZIONE 8.1.2. Se sostituissimo alle (8.1) le relazioni $v^2 = 0$, otterremmo l'algebra di Grassmann dei tensori alternati. Più in generale, possiamo considerare algebre definite dalle relazioni $v^2 + b(v, v) = 0$ per una qualsiasi forma bilineare simmetrica b su V , ottenendo così una collezione di strutture che comprende sia le algebre di Grassmann che quelle di Clifford. In fisica, questa relazione si esprime dicendo che le algebre di Clifford sono una *quantizzazione* di quelle di Grassmann.

Se V ha dimensione finita n , gli elementi e_1, \dots, e_n di una sua base ortonormale verificano in $\mathcal{C}\ell(V)$ le relazioni

$$(8.3) \quad e_i^2 = -1, \quad e_i e_j = -e_j e_i \quad \text{se } 1 \leq i \neq j \leq n.$$

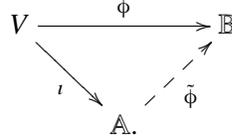
¹Applications of Grassmann's extensive algebra, Amer. Jour. Math. **1** (1878), pp. 350-358.

Quindi $\mathcal{C}\ell(V)$ è l'algebra associativa unitaria generata su \mathbb{R} da n unità immaginarie e_1, \dots, e_n che anti-commutano tra loro.

Le algebre di Clifford reali sono caratterizzate dalla *proprietà universale*:

TEOREMA 8.1.3. *Un'algebra reale associativa e unitaria \mathbb{A} è isomorfa all'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell(V)$ se e soltanto se possiamo trovare un'applicazione lineare iniettiva $\iota : V \rightarrow \mathbb{A}$ per cui valga la*

(PROPRIETÀ UNIVERSALE)



Ogni applicazione lineare $\phi : V \rightarrow \mathbb{B}$ di V in un'algebra associativa unitaria reale \mathbb{B} , che verifichi

$$[\phi(v)]^2 = -\|v\|^2 \cdot 1_{\mathbb{B}}$$

si estende in modo unico ad un omomorfismo

$$\tilde{\phi} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$$

di algebre associative unitarie reali, con

$$\tilde{\phi}(\iota(v)) = \phi(v), \quad \forall v \in V.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathbb{B} un'algebra reale, associativa e unitaria e $\phi : V \rightarrow \mathbb{B}$ un'applicazione lineare. Per la proprietà universale del prodotto tensoriale, la ϕ si estende in modo unico ad un omomorfismo di algebre associative e unitarie reali $\Phi : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathbb{B}$. Il nucleo di Φ è un ideale bilatero di $\mathbf{T}(V)$. Se $\ker \Phi$ contiene tutti gli elementi $v \otimes v + \|v\|^2$, allora la Φ definisce per passaggio al quoziente un omomorfismo di $\mathcal{C}\ell(V)$ in \mathbb{B} .

Supponiamo ora che \mathbb{A} sia un'algebra reale associativa e unitaria che goda della proprietà universale. Possiamo allora definire omomorfismi $\alpha : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{C}\ell(V)$ con $\alpha(\iota(v)) = v$ per ogni $v \in V$, utilizzando la proprietà universale, e $\beta : \mathcal{C}\ell(V) \rightarrow \mathbb{A}$ con $\beta(v) = \iota(v)$ per la prima parte della dimostrazione. Poiché $\alpha \circ \beta : \mathcal{C}\ell(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell(V)$ è l'identità, la α è inversa sinistra di β . La $\beta \circ \alpha : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ è un omomorfismo di algebre con $\beta \circ \alpha \circ \iota = \iota$ su V . Poiché l'identità ha questa proprietà, per l'unicità è $\beta \circ \alpha = \text{id}_{\mathbb{A}}$ e quindi α è anche inversa destra di β . Ciò dimostra che le due algebre sono equivalenti. \square

COROLLARIO 8.1.4. *Se W è un sottospazio di V , l'inclusione $W \subset V \subset \mathcal{C}\ell(V)$ si estende ad un monomorfismo di algebre $\mathcal{C}\ell(W) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(V)$.* \square

L'algebra tensoriale $\mathbf{T}(V)$ è \mathbb{Z} -graduata. Poiché gli elementi $v \otimes v + \|v\|^2$ che generano il nucleo della proiezione $\pi : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell(V)$ sono somme di termini di grado pari, l'algebra $\mathcal{C}\ell(V)$ è \mathbb{Z}_2 -graduata. Poniamo

$$(8.4) \quad \mathcal{C}\ell(V) = \mathcal{C}\ell^0(V) \oplus \mathcal{C}\ell^1(V), \quad \text{con} \quad \mathcal{C}\ell^i(V) = \pi \left(\bigoplus_{h=0}^{\infty} \mathbf{T}^{i+2h}(V) \right).$$

Gli elementi di grado pari formano una sottoalgebra $\mathcal{C}\ell^0(V)$ di $\mathcal{C}\ell(V)$.

PROPOSIZIONE 8.1.5. *Se lo spazio vettoriale V ha dimensione n , allora la corrispondente algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell(V)$ ha dimensione 2^n .*

Se W è un iperpiano di V , allora $\mathcal{C}\ell^0(V) \simeq \mathcal{C}\ell(W)$ e $\mathcal{C}\ell(V)$ è isomorfa, come algebra graduata, ad

$$\mathbb{M}(\mathcal{C}\ell(W)) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ -\bar{\eta} & \bar{\xi} \end{pmatrix} \mid \xi, \eta \in \mathcal{C}\ell(W) \right\},$$

con l'involuzione su $\mathcal{C}\ell(W)$ definita da

$$\overline{\xi_0 + \xi_1} = \xi_0 - \xi_1, \quad \forall \xi_0 \in \mathcal{C}\ell^0(W), \quad \forall \xi_1 \in \mathcal{C}\ell^1(W).$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una base ortonormale e_1, \dots, e_{n-1}, e_n di V con e_n ortogonale a W . Posto $\epsilon_1 = e_1 e_n, \dots, \epsilon_{n-1} = e_{n-1} e_n$, abbiamo

$$\epsilon_i^2 = -1, \quad \forall 1 \leq i < n, \quad \epsilon_i \epsilon_j = -\epsilon_j \epsilon_i, \quad \forall 1 \leq i < j < n.$$

Quindi la sottoalgebra di $\mathcal{C}\ell(V)$ generata da $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}$ è l'algebra di Clifford di uno spazio Euclideo di dimensione $n-1$. Essa coincide con $\mathcal{C}\ell^0(V)$ perché ogni monomio di grado pari $e_{i_1} \cdots e_{i_{2h}}$ di $\mathcal{C}\ell(V)$, con $1 \leq i_1, \dots, i_{2h} \leq n$, è anche un monomio in $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}$. L'isomorfismo di $\mathcal{C}\ell(W)$ su $\mathcal{C}\ell^0(V)$ è il prolungamento canonico dell'applicazione lineare

$$\psi : W \ni w \longrightarrow w \cdot e_n \in \mathcal{C}\ell(V).$$

Poiché l'applicazione $\mathcal{C}\ell(V) \ni \xi \rightarrow \xi \cdot e_n \in \mathcal{C}\ell(V)$ è un'anti-involuzione lineare che scambia $\mathcal{C}\ell^0(V)$ e $\mathcal{C}\ell^1(V)$, abbiamo $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell^1(V) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell^0(V) = \dim \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(W)$. Quindi, $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(V) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(W)$. Poiché $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^0) = \mathbb{R}$, ne segue per ricorrenza che $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(V) = 2^{\dim_{\mathbb{R}} V}$.

L'applicazione lineare (indichiamo con 1_W l'identità di $\mathcal{C}\ell(W)$)

$$\phi : V = W \oplus \mathbb{R}e_n \ni w + te_n \longrightarrow \begin{pmatrix} w + t1_W & \\ w - t1_W & \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(\mathcal{C}\ell(W))$$

soddisfa la condizione $(\phi(w + te_n))^2 = -(\|w\|^2 + t^2)I_2$ e quindi si prolunga in modo unico, per la proprietà universale, ad un omomorfismo $\tilde{\phi}$ di $\mathcal{C}\ell(V)$ in $\mathbb{M}(\mathcal{C}\ell(W))$. Si verifica facilmente che la $\tilde{\phi}$ è surgettiva², e quindi un isomorfismo di algebre perché $\mathcal{C}\ell(V)$ e $\mathbb{M}(\mathcal{C}\ell(W))$ hanno la stessa dimensione. \square

8.1.1. Classificazione delle algebre di Clifford reali. È utile introdurre preliminarmente qualche notazione. Se e_1, \dots, e_n è una base ortonormale assegnata in \mathbb{R}^n , indichiamo con

$$(8.5) \quad \eta_n = e_1 \cdots e_n \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$$

lo *pseudoscalare* corrispondente all'elemento di volume unitario. Valgono allora

$$\eta_n^2 = (-1)^{n(n+1)/2} = \begin{cases} 1, & \text{se } n \equiv 0, 3 \pmod{4}, \\ -1, & \text{se } n \equiv 1, 2 \pmod{4}, \end{cases}$$

²Infatti $\begin{pmatrix} w & \\ w & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & \\ & -w \end{pmatrix}$. Da questo segue che l'immagine di $\tilde{\phi}$ contiene tutte le matrici della forma $\begin{pmatrix} \xi & \\ & \bar{\xi} \end{pmatrix}$, e quindi anche le $\begin{pmatrix} \xi & \\ & \bar{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \xi \\ -\bar{\xi} & \end{pmatrix}$, per $\xi \in \mathcal{C}\ell(W)$

$$\begin{cases} v \cdot \eta_n + \eta_n \cdot v = 0, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ v \cdot \eta_n - \eta_n \cdot v = 0, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} \quad \forall v \in V.$$

TEOREMA 8.1.6. *Valgono i seguenti isomorfismi di algebre*

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^0) &\simeq \mathbb{R}, & \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^1) &\simeq \mathbb{C}, \\ \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^2) &\simeq \mathbb{H}, & \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^3) &\simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \\ \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4) &\simeq \mathbb{H}(2), & \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^5) &\simeq \mathbb{C}^4, \\ \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^6) &\simeq \mathbb{R}(8), & \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^7) &\simeq \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8), \\ \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^8) &\simeq \mathbb{R}(16), & \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{n+8}) &\simeq \mathbb{R}(16) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

L'ultimo isomorfismo esprime la *periodicità* delle algebre di Clifford.

DIMOSTRAZIONE. 0. Se $V = \{0\}$, l'algebra di Clifford $\mathcal{Cl}(\{0\})$ è il campo \mathbb{R} .

1. Consideriamo l'applicazione $\phi_1 : \mathbb{R} \ni x \rightarrow ix \in \mathbb{C}$.

Poiché $(\phi_1(x))^2 = -x^2$, la ϕ si estende ad un omomorfismo di algebre reali associative unitarie $\tilde{\phi}_1 : \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^1) \rightarrow \mathbb{C}$. La $\tilde{\phi}_1$ è surgettiva, perché l'immagine contiene 1 ed i , ed è quindi un isomorfismo perché $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^1)$ e \mathbb{C} hanno la stessa dimensione reale 2.

2. Sia \mathbb{H} il corpo non commutativo dei quaternioni e definiamo l'applicazione lineare

$$\phi_2 : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longrightarrow x \cdot i + y \cdot j \in \mathbb{H},$$

ove i, j, κ sono tre unità immaginarie di \mathbb{H} che anti-commutano tra loro.

Poiché $(\phi_2(x, y))^2 = -(x^2 + y^2)$, la ϕ_2 si estende ad un omomorfismo di algebre reali associative unitarie $\tilde{\phi}_2 : \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{H}$. Poiché $1, i, j, \kappa$ appartengono all'immagine di $\tilde{\phi}_2$, la $\tilde{\phi}_2$ è surgettiva e quindi un isomorfismo perché $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^2)$ ed \mathbb{H} hanno la stessa dimensione 4.

3. Identifichiamo \mathbb{R}^3 allo spazio V dei quaternioni puramente immaginari e consideriamo l'applicazione lineare

$$\phi_3 : V \ni v \longrightarrow (v, -v) \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}.$$

Poiché $(\phi_3(v))^2 = -\|v\|^2(1, 1)$, per la proprietà universale la ϕ_3 si estende ad un omomorfismo $\tilde{\phi}_3 : \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Si verifica facilmente che la $\tilde{\phi}$ è surgettiva, con $\mathcal{Cl}^0(\mathbb{R}^3) \simeq \{(q, q) \mid q \in \mathbb{H}\}$ e $\mathcal{Cl}^1(\mathbb{R}^3) \simeq \{(q, -q) \mid q \in \mathbb{H}\}$, ed è quindi un isomorfismo perché $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^3)$ ed $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ hanno entrambe dimensione 8.

4. Identifichiamo \mathbb{R}^4 ad \mathbb{H} e consideriamo l'applicazione

$$\phi_4 : \mathbb{H} \ni q \longrightarrow \begin{pmatrix} & q \\ -\bar{q} & \end{pmatrix} \in \mathbb{H}(2).$$

Poiché

$$(8.6) \quad \begin{pmatrix} & q \\ -\bar{q} & \end{pmatrix}^2 = -\|q\|^2 \cdot I_2,$$

per la proprietà universale l'applicazione lineare ϕ_4 si estende ad un omomorfismo $\tilde{\phi}_4 : \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{H}(2)$. Si verifica facilmente che $\tilde{\phi}_4$ è surgettivo e quindi un isomorfismo perché le due algebre hanno entrambe dimensione 16.

Infatti, l'immagine di $\tilde{\phi}_4$ contiene le matrici

$$\begin{pmatrix} & v \\ v & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & \\ & -v \end{pmatrix} \quad \text{per ogni quaternione immaginario } v.$$

Da questo segue, come nel punto precedente, che l'immagine di $\tilde{\phi}_4$ contiene tutte le matrici

$$\begin{pmatrix} q_1 & \\ & q_2 \end{pmatrix}, \quad \text{con } q_1, q_2 \in \mathbb{H}$$

e perciò anche le

$$\begin{pmatrix} & q_1 \\ q_2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & \\ & -q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \quad \text{con } q_1, q_2 \in \mathbb{H}.$$

5. Sia e_1, e_2, e_3, e_4 una base ortonormale di \mathbb{R}^4 . Con $\eta_4 = e_1 e_2 e_3 e_4$ definita da (8.5), consideriamo l'applicazione

$$\phi_5 : \mathbb{R}^5 = \mathbb{R}_t^1 \oplus \mathbb{R}^4 \ni (t, v) \longrightarrow (i \cdot t) \otimes \eta_4 + 1 \otimes v \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4).$$

Poiché $\eta_4^2 = 1_4$ ed anticommute coi vettori di \mathbb{R}^4 , otteniamo che

$$(\phi_5(t, v))^2 = -(t^2 + \|v\|^2)1 \otimes 1_4, \quad \forall (t, v) \in \mathbb{R}^5.$$

La ϕ_5 si prolunga quindi in modo unico ad un omomorfismo di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^5)$ nel prodotto tensoriale $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$. Si verifica facilmente che l'omomorfismo è surgettivo e quindi un isomorfismo perché le due algebre hanno la stessa dimensione 32. Osserviamo infine che, poiché $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$ è isomorfa ad $\mathbb{H}(2)$, che è una forma reale di $\mathbb{C}(4)$, è $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2) \simeq \mathbb{C}(4)$.

6. Consideriamo il prodotto tensoriale $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2)$. Poiché $\eta_4 \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$ ha quadrato 1_4 ed anticommute coi vettori, l'applicazione lineare

$$\phi_6 : \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}_v^2 \oplus \mathbb{R}_w^4 \ni (v, w) \longrightarrow v \otimes \eta_4 + 1_2 \otimes w \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$$

soddisfa

$$(\phi_6(v, w))^2 = v^2 \otimes 1_2 + v \otimes (\eta_4 w) + v \otimes (w \eta_4) + 1_2 \otimes w^2 = -(\|v\|^2 + \|w\|^2)(1_2 \otimes 1_6).$$

Per la proprietà universale la ϕ_6 si estende ad un omomorfismo $\tilde{\phi}_6$ di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6)$ in $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4)$. Poiché esso è surgettivo e le due algebre hanno la stessa dimensione $2^6 = 2^2 2^4 = 64$, la $\tilde{\phi}_6$ è un isomorfismo di algebre. Osserviamo infine che $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2) \simeq (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H})(2) \simeq (\mathbb{R}(4))(2) \simeq \mathbb{R}(8)$.

7. Sia $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ una base ortonormale di \mathbb{R}^6 ed $\eta_6 = e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6$ l'elemento di volume di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6)$. Abbiamo:

$$\eta_6^2 = -1_6, \quad \eta_6 \cdot v + v \cdot \eta_6 = 0, \quad (t\eta_6 + v)^2 = -(t^2 + \|v\|^2)1_6, \quad \forall v \in \mathbb{R}^6, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Definiamo l'omomorfismo

$$\phi_7 : \mathbb{R}^7 = \mathbb{R}^6 \oplus \mathbb{R}_t^1 \ni (v, t) \longrightarrow (v + t\eta_6, -v - t\eta_6) \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6) \oplus \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^6).$$

Poiché $[\phi_t(v, t)]^2 = -(\|v\|^2 + t^2) \cdot (1_6, 1_6)$, la ϕ_7 si estende in modo unico ad un omomorfismo $\tilde{\phi}_7 : \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^7) \rightarrow \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^6) \oplus \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^6)$. L'immagine di $\tilde{\phi}_7$ contiene

$$(v, -v) \cdot (\eta_6, -\eta_6) = (v \cdot \eta_6, v \cdot \eta_6).$$

e gli $\epsilon_i = e_i \cdot \eta_6$ generano $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^6)$, perché, se $\sigma \in \mathbf{S}_6$, allora

$$e_{\sigma_1} = \pm \epsilon_{\sigma_2} \cdot \epsilon_{\sigma_3} \cdot \epsilon_{\sigma_4} \cdot \epsilon_{\sigma_5} \cdot \epsilon_{\sigma_6}.$$

Da queste osservazioni ricaviamo che l'immagine di $\tilde{\phi}_7$ contiene tutte le coppie (α, α) con α in $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^6)$. Allora contiene anche le coppie $(\alpha \cdot \eta_6, -\alpha \cdot \eta_6)$, al variare di α in $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^6)$, cioè tutte le coppie $(\alpha, -\alpha)$ con $\alpha \in \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^6)$ perché la moltiplicazione a destra per η_6 è un'operazione invertibile in $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^6)$. Con questa identificazione,

$$\mathcal{Cl}^0(\mathbb{R}^7) = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^6)\}, \quad \mathcal{Cl}^1(\mathbb{R}^7) = \{(\alpha, -\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^6)\}.$$

La dimensione di $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^7) \simeq \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^6) \oplus \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^6) \simeq \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$ è $2^7 = 2 \cdot 2^6 = 128$.

8. Sia e_1, e_2, e_3, e_4 una base ortonormale di \mathbb{R}^4 ed $\eta_4 = e_1 e_2 e_3 e_4$ l'elemento di volume di $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4)$. Abbiamo

$$\eta_4^2 = 1_4, \quad \eta_4 v + v \eta_4 = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^4.$$

L'applicazione lineare

$$\phi_8 : \mathbb{R}^8 = \mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^4 \ni (v, w) \longrightarrow v \otimes \eta_4 + 1_4 \otimes w \in \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4)$$

soddisfa

$$\begin{aligned} (\phi_8(v, w))^2 &= (v \otimes \eta_4 + 1_4 \otimes w)^2 = v^2 \otimes \eta_4^2 + v \otimes (w \eta_4 + \eta_4 w) + 1 \otimes w^2 \\ &= -(\|v\|^2 + \|w\|^2)(1_4 \otimes 1_4). \end{aligned}$$

Per la proprietà universale, la ϕ_8 si estende ad un omomorfismo $\tilde{\phi}_8$ di $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^8)$ nel prodotto tensoriale $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4)$, che è surgettivo e quindi un isomorfismo perché le due algebre hanno la stessa dimensione $2^8 = 2^4 2^4 = 256$.

Infatti l'immagine di $\tilde{\phi}_8$ contiene gli $1_4 \otimes w$ per $w \in \mathbb{R}^4$ e quindi $1_4 \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4)$. Da questa segue che contiene anche $v \otimes_{\mathbb{R}} 1_4 = (v \otimes \eta_4) \cdot (1_4 \otimes \eta_4)$ per ogni $v \in \mathbb{R}^4$ e quindi $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4) \otimes_{\mathbb{R}} 1_4$ e dunque $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4) = \langle (\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4) \otimes_{\mathbb{R}} 1_4) \cdot (1_4 \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4)) \rangle$.

Osserviamo infine che (vedi il Lemma ??)

$$\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{H}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2) \simeq (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H})(4) \simeq (\mathbb{R}(4))(4) \simeq \mathbb{R}(16).$$

PERIODICITÀ. Sia e_1, \dots, e_8 una base ortonormale di \mathbb{R}^8 ed

$$\eta_8 = e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8 \in \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^8)$$

il corrispondente pseudoscalare, che soddisfa $\eta_8^2 = 1_8$, $\eta_8 \cdot w + w \cdot \eta_8 = 0$ per ogni $w \in \mathbb{R}^8$. Consideriamo l'applicazione lineare

$$(8.7) \quad \phi : \mathbb{R}^8 \oplus \mathbb{R}^n \ni (w, v) \longrightarrow w \otimes 1_n + \eta_8 \otimes v \in \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^n),$$

ove abbiamo indicato con 1_n l'identità di $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^n)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} (\phi(w, v))^2 &= w^2 \otimes 1_n + (w \cdot \eta_8 + \eta_8 \cdot w) \otimes v + \eta_8^2 \otimes v^2 \\ &= -(\|w\|^2 + \|v\|^2)(1_8 \otimes 1_n). \end{aligned}$$

La ϕ si estende quindi, per la proprietà universale, ad un omomorfismo

$$(8.8) \quad \tilde{\phi} : \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n+8}) \rightarrow \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}(16) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n).$$

L'immagine di $\tilde{\phi}$ è una sottoalgebra di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$ che contiene $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes 1_n$ ed $\eta_8 \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$. Poiché $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes 1_n$ ed $\eta \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$ generano l'algebra prodotto tensoriale $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$, ne segue che $\tilde{\phi}$ è surgettiva e quindi un isomorfismo, perché le due algebre hanno la stessa dimensione 2^{n+8} . \square

OSSERVAZIONE 8.1.7. L'algebra $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8)$ si può costruire utilizzando le traslazioni a sinistra dell'algebra non associativa \mathbb{O} degli ottonioni (vedi il Capitolo IX). Questi si possono definire a partire dai quaternioni, introducendo un'altra unità immaginaria ℓ . È $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus (\ell \cdot \mathbb{H})$ con la regola del prodotto:

$$(8.9) \quad (q_1 + \ell \cdot q_2) \cdot (q_3 + \ell \cdot q_4) = (q_1 q_3 - q_4 q_2) + \ell \cdot (q_1 q_4 + q_3 q_2), \quad \forall q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{H}.$$

Possiamo scegliere gli ottonioni

$$(8.10) \quad 1, i, j, k, \ell, li, lj, lk$$

come base ortonormale di $\mathbb{R}^8 \simeq \mathbb{O}$. Facciamo corrispondere al vettore x , di componenti (x_0, \dots, x_8) nella base (8.10) la matrice

$$(8.11) \quad L_x = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 & x_5 & -x_4 & x_7 & -x_6 \\ x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 & x_6 & -x_7 & -x_4 & -x_5 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 & x_7 & x_6 & -x_5 & -x_4 \\ x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_5 & x_4 & x_7 & -x_5 & -x_1 & x_0 & x_3 & -x_2 \\ x_6 & -x_7 & x_4 & -x_5 & -x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 \\ x_7 & x_6 & -x_5 & x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 & x_0 \end{pmatrix}$$

associata alla moltiplicazione a sinistra per l'ottonione corrispondente ad x . L'isomorfismo di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^8)$ con $\mathbb{R}(16)$ si ottiene dalla proprietà universale estendendo l'applicazione lineare

$$(8.12) \quad \mathbb{R}^8 \simeq \mathbb{O} \ni x \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & L_x \\ -L_x^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(16).$$

8.2. Algebra di Clifford di uno spazio vettoriale quadratico

Possiamo generalizzare la costruzione in §8.1, associando un'algebra di Clifford ad un qualsiasi spazio vettoriale *quadratico* (vedi e.g. [3]). Supporremo per semplicità che il campo \mathbb{k} degli scalari abbia caratteristica zero.

Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita m su \mathbb{k} e $\mathbf{T}(V) = \bigoplus_{h=0}^{\infty} \mathbf{T}^h(V)$ la sua algebra tensoriale. Le *potenze tensoriali* $\mathbf{T}^h(V)$ sono definite per ricorrenza ponendo $\mathbf{T}^0(V) = \mathbb{k}$, $\mathbf{T}^1(V) = V$ e $\mathbf{T}^{h+1}(V) = V \otimes \mathbf{T}^h(V)$ per $h \geq 1$. Ricordiamo che $\mathbf{T}(V)$ è \mathbb{Z}_+ -graduata e caratterizzata dalla proprietà universale:

PROPOSIZIONE 8.2.1. $\mathbf{T}(V)$ è un'algebra associativa unitaria su \mathbb{k} che contiene V come sottospazio vettoriale ed ogni applicazione lineare ϕ di V in un'algebra associativa unitaria \mathbf{A} si estende in modo unico ad un omomorfismo di algebre associative unitarie $\tilde{\phi} : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathbf{A}$. \square

Una *forma quadratica* q su V è una

(8.13) $q : V \rightarrow \mathbb{k}$ tale che $q' : V \times V \ni (v_1, v_2) \rightarrow q(v_1 + v_2) - q(v_1) - q(v_2) \in \mathbb{k}$ sia \mathbb{k} -bilinare³. Diciamo che q è *non degenera* se lo è q' , se cioè per ogni $v_1 \in V$ possiamo trovare un $v_2 \in V$ tale che $q(v_1 + v_2) \neq q(v_2)$.

DEFINIZIONE 8.2.2. Uno *spazio vettoriale quadratico* su \mathbb{k} è la coppia (V, q) di uno spazio vettoriale V su \mathbb{k} e di una forma quadratica non degenera⁴ su V .

NOTAZIONE 8.2.3. Sia \mathbf{J}_q l'ideale bilatero di $\mathbf{T}(V)$ generato dagli elementi della forma $v \otimes v + q(v)$, al variare di v in V .

DEFINIZIONE 8.2.4. L'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_q(V)$ dello spazio ortogonale (V, q) è il quoziente $\mathbf{T}(V)/\mathbf{J}_q$ dell'algebra tensoriale $\mathbf{T}(V)$, rispetto all'ideale bilatero \mathbf{J}_q .

Poiché $\mathbf{T}(V)$ è associativa e unitaria, anche $\mathcal{C}\ell_q(V)$ è associativa e unitaria. Indichiamo con

$$\pi : \mathbf{T}(V) \longrightarrow \mathcal{C}\ell_q(V) = \mathbf{T}(V)/\mathbf{J}_q$$

la proiezione nel quoziente.

La composizione

$$V \hookrightarrow \mathbf{T}(V) \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}\ell_q(V)$$

è iniettiva e ci permette di considerare V come un sottospazio di $\mathcal{C}\ell_q(V)$.

Come nel caso delle algebre di Clifford associate agli spazi euclidei, abbiamo:

PROPOSIZIONE 8.2.5 (proprietà universale). *L'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_q(V)$ è un'algebra associativa unitaria caratterizzata dalla seguente proprietà universale:*

È $V \subset \mathcal{C}\ell_q(V)$ ed ogni applicazione lineare $\phi : V \rightarrow \mathbb{A}$ di V in un'algebra associativa unitaria \mathbb{A} , tale che $[\phi(v)]^2 = -q(v) \cdot 1_{\mathbb{A}}$, si estende in modo unico ad un omomorfismo $\tilde{\phi} : \mathcal{C}\ell_q(V) \rightarrow \mathbb{A}$.

DIMOSTRAZIONE. Un'applicazione lineare $\phi : V \rightarrow \mathbb{A}$ di V in un'algebra associativa unitaria si estende in modo unico ad un omomorfismo $\hat{\phi} : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathbb{A}$. La condizione che $[\phi(v)]^2 = -q(v) \cdot 1_{\mathbb{A}}$ per ogni $v \in V$ ci dice che \mathbf{J}_q è contenuto nel nucleo di $\hat{\phi}$, che definisce quindi per passaggio al quoziente un omomorfismo $\tilde{\phi}$ di $\mathcal{C}\ell_q(V)$ in \mathbb{A} .

Supponiamo ora che \mathbb{A} sia un'algebra associativa unitaria che contenga V e goda della proprietà universale. Risultano allora definiti due omomorfismi di algebre $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{C}\ell_q(V)$ e $\psi : \mathcal{C}\ell_q(V) \rightarrow \mathbb{A}$ con $\phi(v) = v$ e $\psi(v) = v$ per ogni $v \in V$. Le composizioni $\phi \circ \psi : \mathcal{C}\ell_q(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell_q(V)$ e $\psi \circ \phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ si restringono all'identità su V e quindi per l'unicità del prolungamento dell'omomorfismo sono uguali all'identità. Perciò ϕ e ψ , essendo omomorfismi uguali l'uno all'inverso dell'altro, sono isomorfismi di algebre. \square

NOTAZIONE 8.2.6. Se $v_1, \dots, v_k \in V$, indichiamo con $v_1 \cdots v_k$ l'immagine mediante π di $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ in $\mathcal{C}\ell_q(V)$. In generale, indichiamo con $\xi \cdot \eta$, o semplicemente con $\xi\eta$, il prodotto di $\xi, \eta \in \mathcal{C}\ell_q(V)$.

³Osserviamo che, se \mathbb{k} ha caratteristica zero, è $q'(v_1, v_2) = dq(v_1)(v_2)$.

⁴Molte delle proprietà generali valgono anche senza l'ipotesi che q sia non degenera.

Utilizzando la polarizzazione, si ricava immediatamente la *formula di anticommutazione*⁵

$$(8.14) \quad v_1 \cdot v_2 + v_2 \cdot v_1 + \mathfrak{q}'(v_1, v_2) = 0, \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

In particolare, $v_1 \cdot v_2 = -v_2 \cdot v_1$ se v_1 e v_2 sono \mathfrak{q} -ortogonali.

PROPOSIZIONE 8.2.7. *L'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ è \mathbb{Z}_2 -graduata, mediante*

$$(8.15) \quad \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) = \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V) \oplus \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^1(V), \quad \text{con} \quad \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^i(V) = \pi \left(\bigoplus_{h=0}^{\infty} \mathbf{T}^{2h+i}(V) \right).$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo su $\mathbf{T}(V)$ la \mathbb{Z}_2 -gradazione indotta dalla \mathbb{Z}_+ -gradazione. L'ideale $\mathbf{J}_{\mathfrak{q}}$ è \mathbb{Z}_2 -graduato, perché ammette un sistema di generatori di grado pari. Il quoziente $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ risulta allora anch'esso \mathbb{Z}_2 -graduato. \square

Somma diretta di \mathbb{k} -spazi vettoriali ortogonali. Se (V, \mathfrak{q}_V) e (W, \mathfrak{q}_W) sono due spazi vettoriali quadratici sullo stesso campo \mathbb{k} , indichiamo con $\mathfrak{q}_{V \oplus W}$ la forma quadratica

$$\mathfrak{q}_{V \oplus W}(v + w) = \mathfrak{q}_V(v) + \mathfrak{q}_W(w), \quad \forall v \in V, w \in W.$$

La coppia $(V \oplus W, \mathfrak{q}_{V \oplus W})$ è ancora uno spazio vettoriale quadratico.

Basi e inclusioni delle algebre di Clifford.

PROPOSIZIONE 8.2.8. *Siano (V, \mathfrak{q}_V) e (W, \mathfrak{q}_W) due spazi vettoriali quadratici su \mathbb{k} . Ogni isometria $\phi : (W, \mathfrak{q}_W) \rightarrow (V, \mathfrak{q}_V)$ si prolunga in modo unico ad un monomorfismo $\tilde{\phi} : \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}_W}(W) \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}_V}(V)$.*

DIMOSTRAZIONE. Identificando W ad un sottospazio di V , otteniamo un'inclusione $\mathbf{T}(W) \hookrightarrow \mathbf{T}(V)$. Quest'inclusione defisce per passaggio ai quozienti un'inclusione $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}_W}(W) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}_V}(V)$, perché $\mathbf{J}_{\mathfrak{q}_V} \cap \mathbf{T}(W) = \mathbf{J}_{\mathfrak{q}_W}$. \square

Se V ha dimensione finita, possiamo identificare $\mathbf{T}^k(V)$ allo spazio delle forme k -multilineari sul duale V^* e $\Lambda^k V$ al sottospazio delle τ di $\mathbf{T}^k(V)$ che si annullano sulle k -uple $(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ di covettori linearmente dipendenti. Indichiamo con $\Lambda^* V = \sum_{k \geq 0} \Lambda^k V$ l'algebra di Grassmann di V . Ricordiamo che abbiamo supposto che \mathbb{k} abbia caratteristica zero.

TEOREMA 8.2.9. *La restrizione della proiezione nel quoziente definisce un isomorfismo di spazi vettoriali*

$$(8.16) \quad \pi : \Lambda^* V \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V).$$

In particolare, $\dim_{\mathbb{k}} \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) = 2^m$, con $m = \dim_{\mathbb{k}} V$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\mathbf{J}_{\mathfrak{q}} \cap \Lambda^* V = \{0\}$, la restrizione di $\pi : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ a $\Lambda^* V$ è iniettiva. Si verifica facilmente, utilizzando la formula di anticommutazione (8.14), che $\pi : \Lambda^* V \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ è anche surgettiva e quindi un isomorfismo lineare. \square

⁵Questa è infatti conseguenza della $(v_1 + v_2)(v_1 + v_2) + \mathfrak{q}(v_1 + v_2) = 0$.

Se e_1, \dots, e_m è una base di V ed $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ una k -upla di interi con $1 \leq i_h \leq m$, indicheremo con e_I l'elemento $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$ di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$. Porremo ancora $e_{\emptyset} = 1$.

PROPOSIZIONE 8.2.10. *Se e_1, \dots, e_m è una base di V , allora gli e_I con $I = \emptyset$, ed $I = (i_1, \dots, i_k)$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ formano una base di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$. \square*

Sia W un sottospazio anisotropo di V . La Proposizione 8.2.8 ci permette di identificare l'algebra di Clifford di $(W, \mathfrak{q}|_W)$, che indichiamo per semplicità con $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(W)$, ad una sottoalgebra di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$. Abbiamo in particolare

PROPOSIZIONE 8.2.11. *Se e_1 è un vettore anisotropo di (V, \mathfrak{q}) e $W = e_1^\perp$, allora*

$$(8.17) \quad \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) = \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(W) \oplus (e_1 \cdot \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(W)).$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza del Teorema 8.2.9, perché

$$\Lambda^* V = \Lambda^* W \oplus (e_1 \wedge \Lambda^* W).$$

\square

8.2.1. Pseudo-scalari. Ricordiamo che abbiamo supposto \mathbb{k} di caratteristica zero. Possiamo quindi identificare $\Lambda^* V$ col sottospazio dei tensori alternati di $\mathbf{T}(V)$, e l'*alternatore*, definito, sui tensori di rango uno, da

$$(8.18) \quad \varepsilon(v_1 \otimes \cdots \otimes v_q) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_q = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_q} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma_q},$$

è una proiezione

$$(8.19) \quad \varepsilon : \mathbf{T}(V) \longrightarrow \Lambda^*(V).$$

Sia (V, \mathfrak{q}) uno spazio vettoriale quadratico di dimensione m su \mathbb{k} .

DEFINIZIONE 8.2.12. Chiamiamo *pseudo-scalari* le immagini, mediante la proiezione $\pi : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$, degli elementi di $\Lambda^m V$.

LEMMA 8.2.13. *Gli pseudoscalari di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ sono tutti e soli i prodotti $v_1 \cdots v_m$ di m -uple di vettori due a due ortogonali di V .*

DIMOSTRAZIONE. Se e_1, \dots, e_m è una base ortogonale di (V, \mathfrak{q}) e σ una permutazione in \mathbf{S}_m , allora

$$e_{\sigma_1} \cdots e_{\sigma_m} = \text{sgn}(\sigma) \cdot e_1 \cdots e_m.$$

Infatti, poiché le trasposizioni $(1, 2), (2, 3), \dots, (m-1, m)$ generano \mathbf{S}_m , è sufficiente verificare la formula quando si scambino due fattori successivi: in questo caso l'uguaglianza segue immediatamente dalle formule di anticommutazione. Abbiamo allora

$$\pi(e_1 \wedge \cdots \wedge e_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_m} \text{sgn}(\sigma) e_{\sigma_1} \cdots e_{\sigma_m} = e_1 \cdots e_m.$$

Per completare la dimostrazione, basta verificare che gli pseudo-scalari sono tutti e soli i multipli di $e_1 \cdots e_m$. Ciò è conseguenza della formula del determinante:

se v_1, \dots, v_m sono vettori di V ed $A \in \mathbb{k}^{m \times m}$ la matrice delle loro componenti nella base e_1, \dots, e_m , cioè se $(v_1, \dots, v_m) = (e_1, \dots, e_m)A$, allora

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_m = (\det(A)) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_m \quad \text{e quindi} \quad \pi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_m) = \det(A) \cdot e_1 \cdots e_m.$$

\square

Per la proprietà universale, ogni $a \in \mathbf{O}_q(V)$ si estende ad un isomorfismo \tilde{a} di $\mathcal{C}\ell_q(V)$, che lascia fissi gli scalari e trasforma in sé il sottospazio V . Per quanto abbiamo visto nella dimostrazione del Lemma 8.2.13, la \tilde{a} lascia invariati o cambia di segno gli pseudo-scalari, a seconda che il suo determinante sia uguale ad uno o a meno uno. Gli *pseudo-scalari* devono la loro denominazione a questa proprietà: come gli scalari formano un sottospazio di dimensione uno di $\mathcal{C}\ell_q(V)$, e quindi si parametrizzano con gli elementi di \mathbb{k} , ma non sono *scalari* perché possono cambiare di segno per un cambio di riferimento ortogonale.

LEMMA 8.2.14. (1) Se e_1, \dots, e_m è una base ortogonale di (V, q) , allora

$$(8.20) \quad (e_1 \cdots e_m)^2 = (-1)^{m(m-1)/2} q(e_1) \cdots q(e_m) \in \mathbb{k}^*.$$

(2) Gli pseudoscalari appartengono al centro di $\mathcal{C}\ell_q(V)$ se e soltanto se V ha dimensione dispari. \square

8.3. Involuzioni, anti-involuzioni e centro dell'algebra di Clifford

Sulle algebre di Clifford sono definite alcune involuzioni canoniche.

Per la proprietà universale, ogni simmetria q -ortogonale di V si estende in modo unico ad un'involuzione di $\mathcal{C}\ell_q(V)$. In particolare, indicheremo con α l'involuzione corrispondente alla simmetria rispetto all'origine $v \rightarrow (-v)$ di V .

DEFINIZIONE 8.3.1. L'involuzione α di $\mathcal{C}\ell_q(V)$ è definita da

$$(8.21) \quad \alpha(\xi) = (-1)^i \xi, \quad \forall \xi \in \mathcal{C}\ell_q^i(V), \quad i = 0, 1.$$

LEMMA 8.3.2. Per ogni $v \in V$ anisotropo, abbiamo

$$(8.22) \quad v \cdot \xi = \alpha(\xi) \cdot v, \quad \forall v \in V, \forall \xi \in \mathcal{C}\ell_q(v^\perp). \quad \square$$

Utilizzando la (8.22), otteniamo

TEOREMA 8.3.3. Il centro di $\mathcal{C}\ell_q(V)$ è

- \mathbb{k} se V ha dimensione pari,
- la somma diretta dei sottospazi degli scalari e degli pseudo-scalari se V ha dimensione dispari.

DIMOSTRAZIONE. Un elemento ξ appartiene al centro di $\mathcal{C}\ell_q(V)$ se e soltanto se commuta con tutti i vettori e_1, \dots, e_m di una base ortogonale di (V, q) . Fissato un indice i , scriviamo $\xi = \xi'_i + e_i \cdot \xi''_i$ con $\xi'_i, \xi''_i \in \mathcal{C}\ell_q(e_i^\perp)$. Abbiamo allora

$$e_i \cdot \xi = e_i \cdot \xi'_i - q(e_i) \cdot \xi''_i, \quad \xi \cdot e_i = e_i \cdot \alpha(\xi'_i) - q(e_i) \cdot \alpha(\xi''_i).$$

Per l'unicità della decomposizione (8.17), ricaviamo che $\alpha(\xi'_i) = \xi'_i$ ed $\alpha(\xi''_i) = \xi''_i$. Dunque $\xi'_i, \xi''_i \in \mathcal{C}\ell_q^0(e_i^\perp) \subset \mathcal{C}\ell_q^0(V)$. Questo dice che il numero di fattori e_j con indice diverso da un qualsiasi indice i assegnato in ogni monomio $k_I e_I$ non nullo nella decomposizione $\xi = \sum k_I e_I$ deve essere pari. Ciò è possibile solo se ξ è uno scalare, oppure la somma di uno scalare e di uno pseudoscalare quando la dimensione di V sia dispari. \square

LEMMA 8.3.4. *Condizione necessaria e sufficiente affinché $\xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}(V)$ soddisfi*

$$(8.23) \quad v \cdot \xi = \alpha(\xi) \cdot v, \quad \forall v \in V,$$

è che ξ sia uno scalare.

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo come nella dimostrazione del Teorema 8.3.3. A partire da una base ortogonale e_1, \dots, e_n di V , scriviamo un elemento ξ che soddisfi (8.23) nella forma $\xi = \xi'_i + e_i \cdot \xi''_i$, con $\xi'_i, \xi''_i \in \mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}(e_i^\perp)$.

Poiché $\alpha(\xi) = \alpha(\xi'_i) - e_i \cdot \alpha(\xi''_i)$, abbiamo

$$e_i \cdot \xi = e_i \cdot \xi'_i - q(e_i) \cdot \xi''_i, \quad \alpha(\xi) \cdot e_i = e_i \cdot \xi'_i + q(e_i) \xi''_i.$$

Quindi $\xi''_i = 0$ per ogni i e questo implica che, nell'espressione di ξ come somma $\xi = \sum k_I e_I$ di una combinazione lineare degli elementi della base canonica associata ad e_1, \dots, e_m , si annullino tutti i coefficienti k_I con $I \neq \emptyset$, cioè che $\xi \in \mathbb{k}$. \square

L'applicazione lineare $\tilde{\beta} : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathbf{T}(V)$, definita sui tensori di rango uno da

$$\tilde{\beta}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = v_k \otimes \dots \otimes v_1, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall v_1, \dots, v_k \in V,$$

è un'anti-involuzione di $\mathbf{T}(V)$, che trasforma in sé l'ideale $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$. Quindi definisce, per passaggio al quoziente, un'anti-involuzione dell'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}(V)$.

DEFINIZIONE 8.3.5. Indichiamo con $\beta : \mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}(V)$ l'anti-involuzione di $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}(V)$ ottenuta da $\tilde{\beta}$ per passaggio al quoziente e con γ la composizione $\gamma = \alpha \circ \beta$.

LEMMA 8.3.6. *Abbiamo*

$$\beta(\pi(v_1 \wedge \dots \wedge v_h)) = \pi(v_h \wedge \dots \wedge v_1), \quad \forall v_1, \dots, v_h \in V. \quad \square$$

LEMMA 8.3.7. *L'involuzione α e le anti-involuzioni β e γ commutano tra loro ed $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha = \gamma$, $\alpha \circ \gamma = \gamma \circ \alpha = \beta$, $\beta \circ \gamma = \gamma \circ \beta = \alpha$.* \square

L'involuzione α e le anti-involuzioni β, γ ci permettono di decomporre $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}(V)$ nella somma diretta dei sottospazi formati dagli elementi che sono lasciati fissi e di quelli che sono trasformati nei loro opposti.

La \mathbb{Z}_2 -gradazione $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}^0(V) \oplus \mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}^1(V) = \mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}(V)$ è la decomposizione associata ad α . La permutazione che scambia i con $k+1-i$, per $1 \leq i \leq k$, è prodotto di $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ permutazioni ed ha perciò segnatura $(-1)^{k(k-1)/2}$. Otteniamo perciò, per β e γ ,

LEMMA 8.3.8. *Abbiamo*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}^{\beta,+}(V) &= \{\xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}(V) \mid \beta(\xi) = \xi\} = \pi \left(\sum_{h \geq 0} (\Lambda^{4h} V \oplus \Lambda^{4h+1} V) \right), \\ \mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}^{\beta,-}(V) &= \{\xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}(V) \mid \beta(\xi) = -\xi\} = \pi \left(\sum_{h \geq 0} (\Lambda^{4h+2} V \oplus \Lambda^{4h+3} V) \right), \\ \mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}^{\gamma,+}(V) &= \{\xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}(V) \mid \gamma(\xi) = \xi\} = \pi \left(\sum_{h \geq 0} (\Lambda^{4h} V \oplus \Lambda^{4h+3} V) \right), \\ \mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}^{\gamma,-}(V) &= \{\xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathbf{q}}(V) \mid \gamma(\xi) = -\xi\} = \pi \left(\sum_{h \geq 0} (\Lambda^{4h+1} V \oplus \Lambda^{4h+2} V) \right). \quad \square \end{aligned}$$

Se e_1, \dots, e_m è una base ortogonale di V , ed $\{e_I\}$ la corrispondente base di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$, abbiamo

$$(8.24) \quad \begin{cases} \beta(1) = 1, & \gamma(1) = 1, & \beta(e_i) = e_i, & \gamma(e_i) = -e_i, & \forall i, \\ \beta(e_I) = (-1)^{\binom{h}{2}} e_I, & \gamma(e_I) = (-1)^{\binom{h+1}{2}} e_I, & \forall I = (i_1, \dots, i_h), & h \geq 2. \end{cases}$$

ESEMPIO 8.3.9. Le α, β e γ sono descritte, per $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2)$, dalle tabelle

$$\begin{array}{c|c|c} & 1 & i \\ \hline \alpha & 1 & -i \\ \hline \beta & 1 & i \\ \hline \gamma & 1 & -i \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & i & j & k \\ \hline \alpha & 1 & -i & -j & k \\ \hline \beta & 1 & i & j & -k \\ \hline \gamma & 1 & -i & -j & -k \end{array} .$$

Osserviamo quindi che, sia nel caso dei numeri complessi che in quello dei quaternioni, la γ coincide con il coniugio.

8.4. Gruppi ortogonali e loro algebre di Lie

Dato uno spazio ortogonale (V, \mathfrak{q}) di dimensione finita m su \mathbb{k} , indichiamo con

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V) &= \{x \in \mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V) \mid \mathfrak{q}(x(v)) = \mathfrak{q}(v), \forall v \in V\}, \\ \mathbf{SO}_{\mathfrak{q}}(V) &= \{x \in \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V) \mid \det(x) = 1\}, \\ \mathfrak{so}_{\mathfrak{q}}(V) &= \{X \in \mathfrak{sl}_{\mathbb{k}}(V) \mid \mathfrak{q}'(Xv, v) = 0, \forall v \in V\} \end{aligned}$$

i relativi gruppi ortogonale e speciale ortogonale e la loro algebra di Lie, formata dalle matrici \mathfrak{q} -antisimmetriche.

Se $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ e la forma \mathfrak{q}' è indefinita, $\mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V)$ ha quattro componenti connesse. Supponiamo \mathfrak{q}' abbia segnatura (p, q) , con $pq > 0$. Distinguiamo i vettori non nulli V di V in *positivi*, *negativi*, *isotropi* a seconda che $\mathfrak{q}(v)$ sia positivo, negativo, nullo.

Scegliamo una base ortonormale e_1, \dots, e_m di V , con \mathfrak{q} definita positiva su $V_+ = \langle e_1, \dots, e_p \rangle$ e definita negativa su $V_- = \langle e_{p+1}, \dots, e_m \rangle$. Se $a \in \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V)$, allora \mathfrak{q}' è definita positiva su $a(V_+)$ e definita negativa su $a(V_-)$. In particolare, $V_- \cap a(V_+) = \{0\}$ e $V_+ \cap a(V_-) = \{0\}$ e quindi

$$a(e_1) \wedge \dots \wedge a(e_p) \wedge e_{p+1} \wedge \dots \wedge e_m \neq 0, \quad \text{ed} \quad e_1 \wedge \dots \wedge e_p \wedge a(e_{p+1}) \wedge \dots \wedge a(e_m) \neq 0.$$

Questa osservazione ci permette di definire i due sottogruppi normali

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}^+(V) &= \{a \in \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V) \mid (a(e_1) \wedge \dots \wedge a(e_p) \wedge e_{p+1} \wedge \dots \wedge e_m) / (e_1 \wedge \dots \wedge e_m) > 0\}, \\ \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}^-(V) &= \{a \in \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V) \mid (e_1 \wedge \dots \wedge e_p \wedge a(e_{p+1}) \wedge \dots \wedge a(e_m)) / (e_1 \wedge \dots \wedge e_m) > 0\}, \end{aligned}$$

Se rappresentiamo l'elemento a di $\mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V)$ come una matrice nella base ortonormale e_1, \dots, e_m , i minori $D_+(a)$ formati dalle prime p righe e colonne e $D_-(a)$ dalle ultime q righe e colonne hanno entrambi determinate diverso da zero. Le a di $\mathbf{O}_{\mathfrak{q}}^+(V)$ hanno $D_+(a) > 0$, quelle di $\mathbf{O}_{\mathfrak{q}}^-(V)$ hanno $D_-(a) > 0$.

Quindi $\mathbf{O}_{\mathfrak{q}}^+(V)$ è il gruppo delle trasformazioni ortogonali che *preservano l'orientazione dei sottospazi positivi massimali*, $\mathbf{O}_{\mathfrak{q}}^-(V)$ quello delle trasformazioni ortogonali che *preservano l'orientazione dei sottospazi negativi massimali*.

Ciascuno dei sottogruppi $\mathbf{SO}_{\mathfrak{q}}(V)$, $\mathbf{O}_{\mathfrak{q}}^+(V)$, $\mathbf{O}_{\mathfrak{q}}^-(V)$ ha indice due in $\mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V)$ e ne è un sottogruppo normale.

La componente connessa $\mathbf{SO}_q^+(V)$ dell'identità di $\mathbf{O}_q(V)$ è l'intersezione di una coppia qualsiasi di questi sottogruppi:

$$\mathbf{SO}_q^+(V) = \mathbf{O}_q^+(V) \cap \mathbf{SO}_q(V) = \mathbf{SO}_q^-(V) = \mathbf{O}_q^-(V) \cap \mathbf{SO}_q(V) = \mathbf{O}_q^+(V) \cap \mathbf{O}_q^-(V).$$

DEFINIZIONE 8.4.1. Se $v_0 \in V$ è un vettore anisotropo, l'applicazione

$$s_{v_0} : V \ni v \longrightarrow v - \frac{q'(v, v_0)}{q(v_0)} v_0 \in V$$

appartiene ad $\mathbf{O}_q(V) \setminus \mathbf{SO}_q(V)$ e si dice *simmetria q-ortogonale di vettore v_0* .

OSSERVAZIONE 8.4.2. Se q' è reale indefinita e v_0 positivo (risp. negativo), allora $s_{v_0} \in \mathbf{O}_q^-(V) \setminus \mathbf{SO}_q(V)$ (risp. $s_{v_0} \in \mathbf{O}_q^+(V) \setminus \mathbf{SO}_q(V)$).

PROPOSIZIONE 8.4.3 (Cartan). *Ogni trasformazione ortogonale è prodotto di al più m simmetrie rispetto a vettori anisotropi. (L'identità si considera, convenzionalmente, prodotto di 0 simmetrie vettoriali.)*

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per ricorrenza sulla dimensione m di V . Se $m = 1$ il gruppo $\mathbf{O}_q(V)$ contiene soltanto l'identità e la simmetria rispetto ad un vettore non nullo e quindi la tesi è banalmente verificata. Supponiamo $m > 1$ e la tesi vera per spazi quadratici di dimensione minore di m . Sia $a \in \mathbf{O}_q(V)$. Se a fissa un vettore anisotropo v_0 , si restringe ad una trasformazione ortogonale di v_0^\perp , che per l'ipotesi induttiva è prodotto di al più $m-1$ simmetrie rispetto a vettori anisotropi di v_0^\perp . Queste si estendono a simmetrie vettoriali di V che lasciano fisso il vettore v_0 e la cui composizione dà a .

Se a non fissa nessun vettore anisotropo, ma vi è un vettore anisotropo v_0 tale che $w_0 = v_0 - a(v_0)$ sia ancora anisotropo, allora s_{w_0} , lasciando fisso $v_0 + a(v_0)$ e trasformando w_0 in $-w_0$, scambia tra loro v_0 ed $a(v_0)$. Quindi $s_{w_0} \circ a$ lascia fisso il vettore anisotropo v_0 ed è, per la discussione precedente, prodotto di al più $m-1$ simmetrie rispetto a vettori anisotropi. Quindi $a = s_{w_0} \circ (s_{w_0} \circ a)$ è prodotto di al più m simmetrie rispetto a vettori anisotropi.

Rimane da considerare il caso in cui a non lasci fisso nessun vettore anisotropo e $v - a(v)$ sia isotropo per ogni vettore anisotropo v . Poiché i vettori anisotropi sono un aperto di Zariski di V , ne segue che $v - a(v)$ è isotropo per ogni $v \in V$ e quindi $W = \{v - a(v) \mid v \in V\}$ è un sottospazio totalmente isotropo di V . Per ipotesi anche $W' = \{v \in W \mid a(v) = v\}$ è totalmente isotropo. Poiché W è l'immagine e W' il nucleo di $(\text{id}_V - a)$, le dimensioni di W e di W' sono complementari. Dal momento che la dimensione di ciascun sottospazio isotropo non può eccedere la metà della dimensione di V , lo spazio V ha dimensione pari $2n$ e ciascuno dei W, W' , dimensione n e $W = W^\perp, W' = W'^\perp$.

Abbiamo poi $W \subset W'^\perp = W'$, perché, se $a(w) = w$,

$$\begin{aligned} q'(a(v) - v, w) &= q'(a(v), w) - q'(v, w) = q'(a(v), w) - q'(a(v), a(w)) \\ &= q'(a(v), w - a(w)) = 0. \end{aligned}$$

Quindi W e W' , avendo la stessa dimensione ed essendo contenuti l'uno nell'altro, coincidono. Essendo diversa dall'identità, a ha polinomio minimo $(\lambda - 1)^2$ e quindi, in particolare, determinante 1.

Se v_0 è un qualsiasi vettore anisotropo, $s_{v_0} \circ a$ ha allora determinante (-1) e, per la discussione precedente, deve essere prodotto di al più $2n$ simmetrie rispetto a vettori anisotropi. Le simmetrie non possono essere $2n$, ma al più $(2n - 1)$, perché il prodotto di un numero pari di simmetrie avrebbe determinante $(+1)$. Da questo segue che a è prodotto di al più $m = 2n$ simmetrie vettoriali. \square

ESEMPIO 8.4.4. Consideriamo su \mathbb{k}^{2n} la forma quadratica q associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} & I_n \\ I_n & \end{pmatrix}.$$

Allora tutte le matrici

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \\ & [\alpha^\top]^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{con } \alpha \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{k}),$$

appartengono ad $\mathbf{SO}_q(\mathbb{k}^{2n})$. Se α è unipotente, lo è anche a . In particolare, se $n \geq 2$, possiamo trovare $a \in \mathbf{SO}_q(\mathbb{k}^{2n})$ con polinomio minimo $(\lambda - 1)^2$.

PROPOSIZIONE 8.4.5. *Sia v un vettore anisotropo di (V, q) . Allora*

$$(8.25) \quad \tilde{s}_v : \mathcal{C}l_q(V) \ni \xi \rightarrow v \cdot \xi \cdot v \in \mathcal{C}l_q(V)$$

è un'applicazione lineare invertibile di $\mathcal{C}l_q(V)$ in sé tale che

$$(8.26) \quad \text{se } w \in V, \text{ allora } \tilde{s}_v(w) = \begin{cases} q(v) \cdot w, & \forall w \in v^\perp, \\ -q(v) \cdot w, & \forall w \in \langle v \rangle. \end{cases}$$

In particolare, $\tilde{s}_v(V) = V$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo $\tilde{s}_v^2(\xi) = q^2(v)\xi$ per ogni $\xi \in \mathcal{C}l_q(V)$ e quindi \tilde{s}_v è invertibile. La (8.26) è immediata. \square

In particolare, se $q(v) = \pm 1$, la \tilde{s}_v è o la simmetria rispetto al vettore v , quando v sia positivo, o la simmetria rispetto all'origine nel piano ortogonale a v , quando v sia negativo.

8.5. Rappresentazione spinoriale dell'algebra ortogonale

Ricordiamo che una derivazione di una \mathbb{k} -algebra \mathbb{A} è un endomorfismo \mathbb{k} -lineare $D : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ che soddisfa l'identità di Leibnitz:

$$(8.27) \quad D(\xi_1 \cdot \xi_2) = D(\xi_1) \cdot \xi_2 + \xi_1 \cdot D(\xi_2), \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{A}.$$

Se \mathbb{A} è associativa, allora per ogni $\xi_0 \in \mathbb{A}$ l'applicazione lineare $D_{\xi_0} \in \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{A})$ definita da

$$D_{\xi_0}(\xi) = [\xi_0, \xi] = \xi_0 \cdot \xi - \xi \cdot \xi_0, \quad \forall \xi \in \mathbb{A},$$

è una derivazione di \mathbb{A} .

Le derivazioni D_ξ , al variare di ξ in \mathbb{A} , si dicono *interne*; l'applicazione

$$D : \mathbb{A} \ni \xi \longrightarrow D_\xi \in \text{Der}(\mathbb{A})$$

è un omomorfismo dell'algebra di Lie $\mathfrak{L}(\mathbb{A})$ associata⁶ ad \mathbb{A} nell'algebra di Lie $\mathcal{D}er(\mathbb{A})$ delle derivazioni di \mathbb{A} . Il suo nucleo è il centro di \mathbb{A} e l'immagine $\text{Int}(\mathbb{A})$ è un ideale di $\mathcal{D}er(\mathbb{A})$.

Sia (V, \mathfrak{q}) uno spazio vettoriale quadratico di dimensione finita m sul campo \mathbb{k} , che supponiamo di caratteristica zero.

Indichiamo con $\mathfrak{L}(\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V))$ l'algebra di Lie associata all'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$, con il prodotto di commutazione

$$(8.28) \quad [\xi_1, \xi_2] = \xi_1 \cdot \xi_2 - \xi_2 \cdot \xi_1, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V).$$

Abbiamo un omomorfismo naturale di algebre di Lie

$$(8.29) \quad \mathfrak{L}(\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)) \ni \xi \longrightarrow D_{\xi} \in \text{Int}(\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)) \subset \mathcal{D}er(\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)),$$

che ha come nucleo il centro $\mathcal{Z}(\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V))$ di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$.

LEMMA 8.5.1. *L'immagine $\mathfrak{g}_{\mathfrak{q}} = \pi(\Lambda^2 V)$ dello spazio dei tensori alternati di grado due è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{L}(\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V))$ tale che*

$$(8.30) \quad [\mathfrak{g}_{\mathfrak{q}}, V] \subset V.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $v_1, v_2 \in V$, allora

$$\pi(v_1 \wedge v_2) = [v_1, v_2] = v_1 \cdot v_2 - v_2 \cdot v_1 = 2v_1 \cdot v_2 + \mathfrak{q}'(v_1, v_2) = -2v_2 \cdot v_1 - \mathfrak{q}'(v_1, v_2).$$

Quindi, se $v \in V$, abbiamo

$$\begin{aligned} [v_1, v_2] \cdot v &= v_1 \cdot v_2 \cdot v - v_2 \cdot v_1 \cdot v = -v_1 \cdot (\mathfrak{q}'(v, v_2) + v \cdot v_2) + v_2 \cdot (\mathfrak{q}'(v, v_1) + v \cdot v_1) \\ &= -\mathfrak{q}'(v, v_2) v_1 + \mathfrak{q}'(v, v_1) v_2 + v_2 \cdot v \cdot v_1 - v_1 \cdot v \cdot v_2, \\ v \cdot [v_1, v_2] &= v \cdot v_1 \cdot v_2 - v \cdot v_2 \cdot v_1 = (\mathfrak{q}'(v, v_2) + v_2 \cdot v) \cdot v_1 - (\mathfrak{q}'(v, v_1) + v_1 \cdot v) \cdot v_2 \\ &= \mathfrak{q}'(v, v_2) v_1 - \mathfrak{q}'(v, v_1) v_2 + v_2 \cdot v \cdot v_1 - v_1 \cdot v \cdot v_2, \quad \text{e dunque} \\ [[v_1, v_2], v] &= 2\mathfrak{q}'(v, v_1) v_2 - 2\mathfrak{q}'(v, v_2) v_1 \in V. \end{aligned}$$

Per ogni $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$

$$[[v_1, v_2], [v_3, v_4]] = [[[v_1, v_2], v_3], v_4] + [v_3, [[v_1, v_2], v_4]] \in \mathfrak{g}_{\mathfrak{q}}$$

perché, per la prima parte della dimostrazione, $[[v_1, v_2], v_3], [[v_1, v_2], v_4] \in V$. Ne segue che $\mathfrak{g}_{\mathfrak{q}}$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{L}(\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V))$, i cui elementi si restringono ad endomorfismi di V . \square

PROPOSIZIONE 8.5.2. *Supponiamo che $m = \dim_{\mathbb{k}} V \geq 2$. Allora la rappresentazione di $\mathfrak{g}_{\mathfrak{q}}$ su V definita dalla (8.30) è fedele e definisce un isomorfismo di $\mathfrak{g}_{\mathfrak{q}}$ con l'algebra di Lie $\mathfrak{so}_{\mathfrak{q}}(V)$ degli isomorfismi infinitesimi di (V, \mathfrak{q}) .*

DIMOSTRAZIONE. La restrizione a $\mathfrak{g}_{\mathfrak{q}}$ di $D : \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \rightarrow \mathcal{D}er(\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V))$ è iniettiva, perché, per l'ipotesi che $m \geq 2$, è $\mathfrak{g}_{\mathfrak{q}} \cap \mathcal{Z}(\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)) = \{0\}$ e, poiché V genera $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$, una derivazione D_{ξ} di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ è nulla se e soltanto se si annulla su V .

⁶ $\mathfrak{L}(\mathbb{A})$ è lo spazio vettoriale \mathbb{A} con l'operazione $[\xi_1, \xi_2] = \xi_1 \cdot \xi_2 - \xi_2 \cdot \xi_1$.

Poiché sia $\mathfrak{so}_q(V)$ che \mathfrak{g}_q hanno la stessa dimensione $m(m-1)/2$, sarà sufficiente dimostrare che gli elementi di \mathfrak{g}_q definiscono isometrie infinitesime di V . Se $v_1, v_2, v \in V$, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathfrak{q}'([v_1, v_2], v) &= \mathfrak{q}'([\mathfrak{q}'(v, v_1)v_2 - \mathfrak{q}'(v, v_2)v_1, v]) \\ &= \mathfrak{q}'(v, v_1)\mathfrak{q}'(v, v_2) - \mathfrak{q}'(v, v_2)\mathfrak{q}'(v, v_1) = 0. \end{aligned}$$

Poiché gli elementi della forma $[v_1, v_2]$, al variare di v_1, v_2 in V , generano \mathfrak{g}_q come spazio vettoriale, la verifica del fatto che $D_{[v_1, v_2]}|_V \in \mathfrak{so}_q(V)$ completa la dimostrazione. \square

L'isomorfismo di $\mathfrak{so}_q(V)$ con \mathfrak{g}_q permette di restringere una qualsiasi rappresentazione lineare dell'algebra $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$ ad una rappresentazione lineare di $\mathfrak{so}_q(V)$. Chiamiamo queste *rappresentazioni spinoriali di $\mathfrak{so}_q(V)$* .

LEMMA 8.5.3. È $\{\xi \in \mathcal{C}\ell_q(V) \mid D_\xi(V) \subset V\} = \mathfrak{g}_q + \mathcal{Z}(\mathcal{C}\ell_q(V))$.

DIMOSTRAZIONE. Sia ξ un elemento di $\mathcal{C}\ell_q(V)$ con $D_\xi(V) = [\xi, V] \subset V$. Abbiamo allora, per ogni $v \in V$,

$$-\mathfrak{q}'(D_\xi(v), v) = [\xi, v] \cdot v + v \cdot [\xi, v] = \xi \cdot v^2 - v \cdot \xi \cdot v + v \cdot \xi \cdot v - v^2 \cdot \xi = 0,$$

perché $v^2 = -\mathfrak{q}(v) \in \mathbb{K}$ commuta con ξ . Questo dimostra che la restrizione di D_ξ a V è un elemento di $\mathfrak{so}_q(V)$ e quindi, per la Proposizione 8.5.2, possiamo trovare $\xi_0 \in \mathfrak{g}_q$ tale che D_ξ e D_{ξ_0} coincidano su V . Allora la differenza $\xi - \xi_0$ appartiene al centro di $\mathcal{C}\ell_q(V)$. \square

Poiché il centro di $\mathcal{C}\ell_q(V)$ è formato dai soli scalari se la dimensione di V è pari, e dagli scalari e gli pseudoscalari quando la dimensione di V è dispari, otteniamo la seguente caratterizzazione:

PROPOSIZIONE 8.5.4. L'algebra di Lie \mathfrak{g}_q è caratterizzata da

$$(8.31) \quad \mathfrak{g}_q = \{\xi \in \mathcal{C}\ell_q^0(V) \mid [\xi, V] \subset V, \quad \xi + \gamma(\xi) = 0\}. \quad \square$$

8.6. Gruppo spinoriale e sua rappresentazione vettoriale

Gli elementi invertibili di un'algebra associativa unitaria \mathbb{A} formano il suo *gruppo moltiplicativo* $\mathcal{U}(\mathbb{A})$.

Se \mathbb{A} ha dimensione finita, tutti i suoi elementi che non siano divisori di zero sono invertibili. Infatti, dire che ξ non è un divisore (sinistro) di zero equivale al fatto che $\ker\{L_\xi : \mathbb{A} \ni \zeta \rightarrow \xi \cdot \zeta \in \mathbb{A}\} = \{0\}$, e quindi che L_ξ sia un isomorfismo lineare di \mathbb{A} . In particolare, vi è un elemento $\eta \in \mathbb{A}$ per cui $\xi \cdot \eta = 1$. Allora $\xi \cdot (\eta \cdot \xi - 1) = 0$ e quindi anche $\eta \cdot \xi = 1$ ed η è sia inversa destra che sinistra di ξ .

NOTAZIONE 8.6.1. Definiamo il gruppo

$$(8.32) \quad \mathbf{G}_q = \{\xi \in \mathcal{U}(\mathcal{C}\ell_q(V)) \mid \alpha(\xi) \cdot V \cdot \xi^{-1} = V\}.$$

PROPOSIZIONE 8.6.2. Per ogni $\xi \in \mathbf{G}_q$, l'applicazione

$$(8.33) \quad \rho_\xi : V \ni v \longrightarrow \alpha(\xi) \cdot v \cdot \xi^{-1} \in V$$

è q -ortogonale. La

$$(8.34) \quad \rho : \mathbf{G}_q \ni \xi \longrightarrow \rho_\xi \in \mathbf{O}_q(V)$$

è un omomorfismo surgettivo di gruppi, con nucleo $\mathbb{k}^* = \{k \in \mathbb{k} \mid k \neq 0\}$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché α è un automorfismo involutivo di $\mathcal{C}\ell_q(V)$, abbiamo, per ogni $\xi \in \mathbf{G}_q$ ed ogni $v \in V$,

$$\rho_\xi(v) = -\alpha(\rho_\xi(v)) = -\alpha(\alpha(\xi) \cdot v \cdot \xi^{-1}) = -\xi \cdot \alpha(v) \cdot \alpha(\xi^{-1}) = \xi \cdot v \cdot \alpha(\xi^{-1}),$$

e quindi

$$\begin{aligned} q(\rho_\xi(v)) &= q(\alpha(\xi) \cdot v \cdot \xi^{-1}) = -(\alpha(\xi) \cdot v \cdot \xi^{-1})(\alpha(\xi) \cdot v \cdot \xi^{-1}) \\ &= -(\alpha(\xi) \cdot v \cdot \xi^{-1})(\xi \cdot v \cdot \alpha(\xi^{-1})) = -\alpha(\xi) \cdot v^2 \cdot \alpha(\xi^{-1}) \\ &= q(v) \cdot \alpha(\xi) \cdot \alpha(\xi^{-1}) = q(v). \end{aligned}$$

Questo dimostra che $\rho_\xi \in \mathbf{O}_q(V)$ per ogni $\xi \in \mathbf{G}_q$.

La ρ è chiaramente un omomorfismo di gruppi. Se $\xi \in \ker \rho$, abbiamo

$$\alpha(\xi) \cdot v \cdot \xi^{-1} = v \implies \alpha(\xi) \cdot v = v \cdot \xi, \quad \forall v \in V,$$

e questo, per il Lemma 8.3.4, implica che ξ sia uno scalare. Quindi $\ker \rho = \mathbb{k}^*$.

Infine, osserviamo che ogni vettore anisotropo v di V è un elemento invertibile di $\mathcal{C}\ell_q(V)$, con inversa $(-v/q(v))$ e

$$\begin{aligned} \rho_v(w) &= \alpha(v) \cdot w \cdot v^{-1} = -v \cdot w \cdot v^{-1} = (w \cdot v + q'(w, v)) \cdot v^{-1} \\ &= w - \frac{q'(w, v)}{q(v)} v = s_v(w), \quad \forall w \in V. \end{aligned}$$

Questo ci dice che $v \in \mathbf{G}_q$ e che ρ_v è la simmetria di vettore v di (V, q) . Poiché le simmetrie rispetto a vettori anisotropi generano $\mathbf{O}_q(V)$ (vedi la Proposizione 8.4.3), l'omomorfismo ρ è surgettivo. \square

Abbiamo osservato, nella dimostrazione della Proposizione 8.6.2, che le simmetrie vettoriali sono le immagini mediante la rappresentazione ρ dei vettori anisotropi di $V \subset \mathcal{C}\ell_q(V)$. Da questo ricaviamo:

- COROLLARIO 8.6.3. (1) Ogni elemento di \mathbf{G}_q si può decomporre in un prodotto $v_1 \cdots v_k$ di vettori anisotropi di (V, q) .
(2) È $\mathbf{G}_q = \mathbf{G}_q^0 \cup \mathbf{G}_q^1$, con $\mathbf{G}_q^i = \mathbf{G}_q \cap \mathcal{C}\ell_q^i(V)$, per $i = 0, 1$.
(3) Gli elementi di grado pari formano un sottogruppo normale \mathbf{G}_q^0 di indice due di \mathbf{G}_q , con $\rho(\mathbf{G}_q^0) = \mathbf{SO}_q(V)$, ed abbiamo le due successioni esatte

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{k}^* & \longrightarrow & \mathbf{G}_q & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{O}_q(V) \longrightarrow 0, \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{k}^* & \longrightarrow & \mathbf{G}_q^0 & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{SO}_q(V) \longrightarrow 0. \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\xi \in \mathbf{G}_q$, per la Proposizione 8.4.3 possiamo trovare vettori anisotropi v_1, \dots, v_ℓ (con $\ell \leq m$) tali che $\rho(\xi) = \rho(v_1 \cdots v_\ell)$. Dalla Proposizione 8.6.2 segue che $\xi = (k \cdot v_1) \cdots v_\ell$, con $k \in \mathbb{k}^*$. Questo dimostra la (1). Le altre affermazioni seguono facilmente. \square

LEMMA 8.6.4. È

$$(8.35) \quad \xi \cdot \beta(\xi) = \pm \xi \cdot \gamma(\xi) \in \mathbb{k}^*, \quad \forall \xi \in \mathbf{G}_q.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la (1) del Corollario 8.6.3, ogni $\xi \in \mathbf{G}_q$ si scrive come un prodotto $\xi = v_1 \cdots v_k$ di vettori anisotropi di (V, q) . Allora:

$$\begin{aligned} \xi \cdot \beta(\xi) &= v_1 \cdots v_k v_k \cdots v_1 = (-1)^k q(v_1) \cdots q(v_k), \\ \xi \cdot \gamma(\xi) &= (-1)^k v_1 \cdots v_k v_k \cdots v_1 = q(v_1) \cdots q(v_k). \end{aligned} \quad \square$$

OSSERVAZIONE 8.6.5. In particolare, i vettori v positivi (cioè con $q(v) > 0$) hanno $v \cdot \gamma(v) > 0$, i v negativi ($q(v) < 0$) hanno $v \cdot \beta(v) > 0$.

Poiché

$$\rho(k \cdot \xi) = \rho(\xi) \text{ e } (k \cdot \xi) \cdot \beta(k \cdot \xi) = k^2 \cdot \xi \cdot \beta(\xi), \quad (k \cdot \xi) \cdot \gamma(k \cdot \xi) = k^2 \cdot \xi \cdot \gamma(\xi), \quad \forall k \in \mathbb{k}^*, \quad \forall \xi \in \mathbf{G}_q,$$

i valori di $\xi \cdot \beta(\xi)$ e di $\xi \cdot \gamma(\xi)$, per un elemento $\xi \in \mathbf{G}_q$, sono determinati da $\rho(\xi)$, modulo il prodotto per un elemento di $(\mathbb{k}^2)^*$. Se $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, possiamo senz'altro scegliere ξ in modo che $\xi \cdot \gamma(\xi) = 1$, e quando $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ in modo che $\xi \cdot \beta(\xi), \xi \cdot \gamma(\xi) \in \{\pm 1\}$.

Utilizziamo le involuzioni β e γ per definire, normalizzando gli elementi di \mathbf{G}_q , i gruppi spinoriali e pinoriali reali e complessi.

DEFINIZIONE 8.6.6. Chiamiamo⁷

$$(8.36) \quad \mathbf{Spin}(V, q) = \{\xi \in \mathbf{G}_q^0 \mid \xi \cdot \gamma(\xi) = 1\}$$

il *gruppo spinoriale* dello spazio vettoriale quadratico (V, q) .

Per definire i *gruppi pinoriali* distinguiamo il caso complesso dai casi reali.

Se (V, q) è complesso, poniamo

$$(8.37) \quad \mathbf{Pin}(V, q) = \{\xi \in \mathbf{G}_q \mid \xi \cdot \gamma(\xi) = 1\}.$$

Nel caso in cui $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, oltre al gruppo pinoriale introduciamo due suoi sottogruppi, che distinguiamo⁸ con gli indici $+$ e $-$.

$$(8.38) \quad \mathbf{Pin}(V, q) = \{\xi \in \mathbf{G}_q \mid |\xi \cdot \gamma(\xi)| = 1\},$$

$$(8.39) \quad \mathbf{Pin}^+(V, q) = \{\xi \in \mathbf{G}_q \mid \xi \cdot \gamma(\xi) = 1\},$$

$$(8.40) \quad \mathbf{Pin}^-(V, q) = \{\xi \in \mathbf{G}_q \mid \xi \cdot \beta(\xi) = 1\}.$$

La scelta dei diversi gruppi è giustificata da:

⁷In [C.CHEVALLEY, *The Algebraic Theory of Spinors and Clifford Algebras*, Springer 1997, New York] questi gruppi sono chiamati *gruppi di Clifford*.

⁸Gli anti-automorfismi β e γ coincidono su $\mathcal{C}\ell_q^0(V)$ e sono l'uno l'opposto dell'altro su $\mathcal{C}\ell_q^1(V)$.

PROPOSIZIONE 8.6.7. *Se (V, \mathfrak{q}) è uno spazio quadratico complesso, allora gli omomorfismi*

$$(8.41) \quad \rho : \mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q}) \longrightarrow \mathbf{SO}_{\mathfrak{q}}(V),$$

$$(8.42) \quad \rho : \mathbf{Pin}(V, \mathfrak{q}) \longrightarrow \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V)$$

sono surgettivi ed hanno nucleo $\{\pm 1\}$. Essi sono quindi rivestimenti a due fogli. \square

PROPOSIZIONE 8.6.8. *Se (V, \mathfrak{q}) è uno spazio quadratico reale, allora gli omomorfismi*

$$(8.43) \quad \rho : \mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q}) \longrightarrow \mathbf{SO}_{\mathfrak{q}}^+(V),$$

$$(8.44) \quad \rho : \mathbf{Pin}^+(V, \mathfrak{q}) \longrightarrow \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}^+(V),$$

$$(8.45) \quad \rho : \mathbf{Pin}^-(V, \mathfrak{q}) \longrightarrow \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}^-(V),$$

$$(8.46) \quad \rho : \mathbf{Pin}(V, \mathfrak{q}) \longrightarrow \mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V),$$

sono surgettivi ed hanno nucleo $\{\pm 1\}$. Essi sono quindi rivestimenti a due fogli. \square

PROPOSIZIONE 8.6.9. (1) *Se (V, \mathfrak{q}) è uno spazio ortogonale complesso di dimensione maggiore o uguale a due, oppure uno spazio ortogonale reale per una \mathfrak{q} che ha almeno due valori propri dello stesso segno, allora $\mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})$ è connesso.*

(2) *Se V è uno spazio ortogonale complesso di dimensione maggiore o uguale a tre, oppure uno spazio ortogonale reale per una \mathfrak{q} che ha almeno tre valori propri dello stesso segno e indice di Witt⁹ minore o uguale ad uno, allora $\mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})$ è semplicemente connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Sotto le ipotesi di (1), $\mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})$ è un rivestimento a due fogli di un gruppo di Lie connesso. Basta quindi dimostrare che i due elementi ± 1 di $\ker \rho$ possono essere congiunti con un cammino continuo in $\mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})$. Per l'ipotesi fatta, possiamo scegliere in V due vettori v_0, v_1 , tra loro ortogonali, con $\mathfrak{q}(v_0) = \mathfrak{q}(v_1) \in \{\pm 1\}$. Allora

$$[0, \pi] \ni t \rightarrow \xi_t = v_0 \cdot (v_0 \cos t + v_1 \sin t) \in \mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})$$

è un cammino di classe \mathcal{C}^∞ con $\xi_0 = 1$ e $\xi_\pi = -1$.

La (2) è conseguenza di (1). Infatti, sotto le ipotesi di (2), $\mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})$ è un rivestimento connesso a due fogli di un gruppo di Lie con gruppo fondamentale \mathbb{Z}_2 . Dalla successione esatta di omotopia del rivestimento

$$0 \longrightarrow \pi_1(\mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})) \longrightarrow \pi_1(\rho(\mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q}))) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0,$$

otteniamo che $\mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})$ è semplicemente connesso quando la sua immagine in $\mathbf{O}_{\mathfrak{q}}(V)$ sia connessa ed abbia gruppo fondamentale \mathbb{Z}_2 . \square

Da questo segue

⁹Se \mathfrak{q} ha segnatura (p, q) , l'indice di Witt è $\min\{p, q\}$.

TEOREMA 8.6.10. *Sia (V, \mathfrak{q}) uno spazio quadratico reale o complesso. Se V ha dimensione maggiore o uguale a tre, ogni rappresentazione lineare di dimensione finita dell'algebra ortogonale $\mathfrak{so}_{\mathfrak{q}}(V)$ si rialza in modo unico ad una rappresentazione lineare di $\mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})$.*

DIMOSTRAZIONE. Se V è complesso, ciò è conseguenza del fatto che $\mathbf{Spin}_{\mathfrak{q}}(V)$ è connesso e semplicemente connesso.

Supponiamo che V sia reale. Possiamo estendere \mathfrak{q} ad una forma quadratica $\mathfrak{q}^{\mathbb{C}}$ sullo spazio complesso $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$. Ogni rappresentazione lineare reale W di $\mathfrak{so}_{\mathfrak{q}}(V)$ si estende ad una rappresentazione lineare complessa $W^{\mathbb{C}}$ di $\mathfrak{so}_{\mathfrak{q}^{\mathbb{C}}}(V^{\mathbb{C}})$. Questa si rialza ad una rappresentazione lineare complessa di $\mathbf{Spin}(V^{\mathbb{C}}, \mathfrak{q}^{\mathbb{C}})$. Poiché $\mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})$ è una forma reale connessa di $\mathbf{Spin}(V^{\mathbb{C}}, \mathfrak{q}^{\mathbb{C}})$, la restrizione a $\mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})$ lascia $W \subset W^{\mathbb{C}}$ invariante e definisce quindi una rappresentazione reale di $\mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})$ su W . \square

DEFINIZIONE 8.6.11. Lo spazio vettoriale V , con l'azione

$$(8.47) \quad \xi * v = \alpha(\xi) \cdot v \cdot \xi^{-1},$$

si dice la *rappresentazione vettoriale* di $\mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})$ (o di $\mathbf{Pin}(V, \mathfrak{q})$, $\mathbf{Pin}^{\pm}(V, \mathfrak{q})$).

8.6.1. Spazi quadratici di dimensione minore o uguale a due. Descriviamo i gruppi spinoriali e pinoriali di spazi quadratici reali e complessi di dimensione minore o uguale a due. Nel caso complesso possiamo scegliere

$$\mathfrak{q}_1(z) = -z^2 \quad \text{e} \quad \mathfrak{q}_2(z_1, z_2) = -z_1 z_2$$

come forme quadratiche canoniche su \mathbb{C}^1 e \mathbb{C}^2 . Elenchiamo le relative rappresentazioni matriciali dell'algebra di Clifford, dello spazio $V = \mathbb{C}^i$ come sottospazio di $\mathcal{Cl}_{\mathfrak{q}_i}(\mathbb{C}^i)$, dei gruppi spinoriale e pinoriale e la γ . Per semplicità di notazione eviteremo di esprimere la dipendenza dalla forma, scrivendo $\mathcal{Cl}(\mathbb{C}^i)$ invece di $\mathcal{Cl}_{\mathfrak{q}_i}(\mathbb{C}^i)$.

$$\mathcal{Cl}(\mathbb{C}^1) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} w & z \\ z & w \end{pmatrix} \middle| z, w \in \mathbb{C} \right\}, \quad \mathbb{C}^1 = V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z \\ z & 0 \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{C} \right\},$$

$$\gamma \begin{pmatrix} w & z \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & -z \\ -z & w \end{pmatrix}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C},$$

$$\mathbf{Spin}(\mathbb{C}^1) = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \middle| \epsilon = \pm 1 \right\}, \quad \mathbf{Pin}(\mathbb{C}^1) = \mathbf{Spin}(\mathbb{C}^1) \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} \middle| \epsilon = \pm i \right\},$$

$$\mathcal{Cl}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}(2), \quad \mathbb{C}^2 = V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z_1 \\ z_2 & 0 \end{pmatrix} \middle| z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\},$$

$$\gamma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

$$\mathbf{Spin}(\mathbb{C}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{C}^* \right\}, \quad \mathbf{Pin}(\mathbb{C}^2) = \mathbf{Spin}(\mathbb{C}^2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z \\ z^{-1} & 0 \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Consideriamo ora i gruppi pinoriali e spinoriali associati a spazi ortogonali reali di dimensione uno e due. Indicheremo con $\mathbb{R}^{p,q}$ uno spazio vettoriale reale di

dimensione $p+q$ su cui è assegnata una forma quadratica $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{p,q}$ di segnatura (p, q) . Specificamente, per descrivere i diversi oggetti in forma matriciale, fisseremo le forme

$$\mathfrak{q}_{1,0}(x) = x^2, \quad \mathfrak{q}_{0,1}(x) = -x^2,$$

$$\mathfrak{q}_{2,0}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad \mathfrak{q}_{1,1}(x_1, x_2) = -x_1 x_2, \quad \mathfrak{q}_{0,2} = -x_1^2 - x_2^2$$

e per semplicità di notazione eviteremo di menzionare esplicitamente la forma quadratica, scrivendo ad esempio $\mathcal{E}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ invece di $\mathcal{E}\ell_{\mathfrak{q}_{p,q}}(\mathbb{R}^{p+q})$.

Abbiamo (si veda la classificazione in §8.8):

$$\mathcal{E}\ell(\mathbb{R}^{1,0}) \simeq \mathbb{C} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathbb{R}^{1,0} = V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\beta = \text{Id}, \quad \gamma \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{1,0}) = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & \\ & \epsilon \end{pmatrix}, \middle| \epsilon = \pm 1, \right\} = \mathbf{Pin}^-(\mathbb{R}^{1,0}),$$

$$\mathbf{Pin}^+(\mathbb{R}^{1,0}) = \mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{1,0}) \cup \left\{ \begin{pmatrix} & \epsilon \\ -\epsilon & \end{pmatrix} \middle| \epsilon = \pm 1 \right\} = \mathbf{Pin}(\mathbb{R}^{1,0}),$$

$$\mathcal{E}\ell(\mathbb{R}^{0,1}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathbb{R}^{0,1} = V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\beta = \text{Id}, \quad \gamma \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{0,1}) = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & \\ & \epsilon \end{pmatrix}, \middle| \epsilon = \pm 1, \right\} = \mathbf{Pin}^+(\mathbb{R}^{0,1}),$$

$$\mathbf{Pin}^-(\mathbb{R}^{0,1}) = \mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{0,1}) \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix} \middle| \epsilon = \pm 1 \right\} = \mathbf{Pin}(\mathbb{R}^{0,1}),$$

$$\mathcal{E}\ell(\mathbb{R}^{2,0}) = \mathbb{H} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \middle| z, w \in \mathbb{C} \right\}, \quad \mathbb{R}^{2,0} = V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & w \\ -\bar{w} & 0 \end{pmatrix} \middle| w \in \mathbb{C} \right\},$$

$$\beta \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z} & w \\ -\bar{w} & z \end{pmatrix}, \quad \gamma \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{2,0}) = \left\{ \begin{pmatrix} z & \\ & \bar{z} \end{pmatrix}, \middle| |z| = 1 \right\} = \mathbf{Pin}^-(\mathbb{R}^{2,0}),$$

$$\mathbf{Pin}^+(\mathbb{R}^{2,0}) = \mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{2,0}) \cup \left\{ \begin{pmatrix} & z \\ -\bar{z} & \end{pmatrix} \middle| |z| = 1 \right\} = \mathbf{Pin}(\mathbb{R}^{2,0}),$$

$$\mathcal{E}\ell(\mathbb{R}^{1,1}) \simeq \mathbb{R}(2), \quad \mathbb{R}^{1,1} = V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\beta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}, \quad \gamma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{1,1}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix}, \left| a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right. \right\},$$

$$\mathbf{Pin}^+(\mathbb{R}^{1,1}) = \mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{1,1}) \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \left| a \in \mathbb{R}^* \right. \right\},$$

$$\mathbf{Pin}^-(\mathbb{R}^{1,1}) = \mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{1,1}) \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \left| a \in \mathbb{R}^* \right. \right\},$$

$$\mathbf{Pin}(\mathbb{R}^{1,1}) = \mathbf{Pin}^+(\mathbb{R}^{1,1}) \cup \mathbf{Pin}^-(\mathbb{R}^{1,1}) \cup \left\{ \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \left| a \in \mathbb{R}^* \right. \right\}.$$

$$\mathcal{E}\ell(\mathbb{R}^{0,2}) \simeq \mathbb{R}(2), \quad \mathbb{R}^{0,2} = V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \left| x, y \in \mathbb{R} \right. \right\},$$

$$\beta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \gamma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{0,2}) = \mathbf{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \left| a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right. \right\} = \mathbf{Pin}^+(\mathbb{R}^{0,2}),$$

$$\mathbf{Pin}^-(\mathbb{R}^{0,2}) = \mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{0,2}) \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \left| a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right. \right\} = \mathbf{Pin}(\mathbb{R}^{0,2}).$$

8.6.2. Alcune proprietà dei gruppi spinoriali reali.

NOTAZIONE 8.6.12. Denotiamo con $\mathbf{Spin}(n)$ il gruppo $\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{n,0})$ e con $\mathbf{Spin}(p, q)$ il gruppo $\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{p,q})$.

PROPOSIZIONE 8.6.13. *Il gruppo di Lie $\mathbf{Spin}(n)$ è compatto e di dimensione $\frac{1}{2}n(n-1)$ per ogni intero $n \geq 1$, connesso se $n \geq 2$, semplicemente connesso se $n \geq 3$. Per $1 \leq n \leq 6$ valgono gli isomorfismi:*

$$\begin{aligned} \mathbf{Spin}(1) &\simeq \mathbf{O}(1) \simeq \{\pm 1\}, & \mathbf{Spin}(2) &\simeq \mathbf{U}(1) \simeq \mathbf{SO}(2), & \mathbf{Spin}(3) &\simeq \mathbf{SU}(2) \simeq \mathbf{Sp}(1), \\ \mathbf{Spin}(4) &\simeq \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2), & \mathbf{Spin}(5) &\simeq \mathbf{Sp}(2), & \mathbf{Spin}(6) &\simeq \mathbf{SU}(4). \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Tutte le proprietà si ricavano facilmente dal fatto che (8.43) è un rivestimento a due fogli, connesso per $n > 1$, e dalle proprietà dei gruppi speciali ortogonali.

Gli isomorfismi di $\mathbf{Spin}(n)$ dell'enunciato sono già stati verificati per $n = 1, 2$ e seguono dall'unicità del rivestimento a due fogli negli altri casi. Sono quindi conseguenza dei risultati del Capitolo XXV. \square

PROPOSIZIONE 8.6.14. *Il sottogruppo compatto massimale di $\mathbf{Spin}(p, q)$, per $pq \geq 1$, è isomorfo al quoziente di $\mathbf{Spin}(p) \times \mathbf{Spin}(q)$ rispetto al sottogruppo $\{\pm(1, 1)\} \simeq \mathbb{Z}_2$.* \square

8.7. Spinori complessi

Le algebre di Clifford degli spazi ortogonali complessi si possono rappresentare come algebre di endomorfismi delle algebre di Grassmann dei loro sottospazi isotropi massimali. Distinguiamo i casi di dimensione pari e dispari¹⁰.

8.7.1. Dimensione pari.

TEOREMA 8.7.1. *Se (V, \mathfrak{q}) è uno spazio ortogonale complesso di dimensione pari e W un suo sottospazio totalmente isotropo massimale, allora*

$$(8.48) \quad \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \simeq \text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W).$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che V abbia dimensione $2n$, per un intero positivo n . Un suo sottospazio totalmente isotropo massimale W ha dimensione n ed ammette un complemento lineare totalmente isotropo W' , della stessa dimensione. La $W \times W' \ni (w, w') \rightarrow \mathfrak{q}'(w, w') \in \mathbb{C}$ stabilisce un accoppiamento di dualità tra W e W' . In particolare, ad ogni elemento w' di W' possiamo associare la forma lineare $\theta_{w'}(w) = \mathfrak{q}'(w, w')$ su W . Per costruire l'isomorfismo (8.48) utilizziamo le applicazioni

$$\lambda_w : \Lambda^*W \ni s \rightarrow w \wedge s \in \Lambda^*W, \quad \delta_{w'} : \Lambda^*W \ni s \rightarrow \theta_{w'} \lrcorner s \in \Lambda^*W, \quad w \in W, \quad w' \in W'.$$

Ricordiamo che, se $\theta \in W^*$ è un funzionale lineare su W , la $\theta \lrcorner$ indica il *prodotto interno* per θ : è cioè la restrizione a Λ^*W della derivazione di grado (-1) dell'algebra tensoriale di W , definita da

$$\theta \lrcorner 1 = 0, \quad \theta \lrcorner w = \theta(w), \quad \forall w \in W,$$

e che $\lambda_w^2 = 0, \delta_{w'}^2 = 0$ su Λ^*W .

Definiamo un'applicazione lineare Φ di V nell'algebra associativa degli endomorfismi dell'algebra di Grassmann di W , ponendo

$$(8.49) \quad \begin{cases} \Phi : V \ni v \longrightarrow (\lambda_w - \delta_{w'}) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^2W), \\ \text{se } v = w + w' \text{ con } w \in W, w' \in W'. \end{cases}$$

Dimostriamo che

$$(*) \quad (\Phi(v))^2 = -(\lambda_w \delta_{w'} + \delta_{w'} \lambda_w) = -\mathfrak{q}(v) \mathbf{I}_{\Lambda^*W}.$$

La (*) è valida quando $w = 0$ oppure $w' = 0$.

Se $w' \neq 0$, sia $U = w'^{\perp} \cap W = \{u \in W \mid \mathfrak{q}'(u, w') = 0\}$. Fissato un elemento $e_0 \in W$ con $\mathfrak{q}'(e_0, w') = 1$, possiamo decomporre Λ^*W nella somma diretta $\Lambda^*W = \Lambda^*U \oplus (e_0 \wedge \Lambda^*U)$. Abbiamo allora, per ogni $s \in \Lambda^*U$,

$$\begin{aligned} (\lambda_w \circ \delta_{w'} + \delta_{w'} \circ \lambda_w)(s) &= \delta_{w'}(w \wedge s) = \mathfrak{q}'(w, w') \cdot s, \\ (\lambda_w \circ \delta_{w'} + \delta_{w'} \circ \lambda_w)(e_0 \wedge s) &= \lambda_w(s) + \delta_{w'}(w \wedge e_0 \wedge s) \\ &= w \wedge s + \mathfrak{q}'(w, w') \cdot (e_0 \wedge s) - w \wedge s = \mathfrak{q}'(w, w') \cdot (e_0 \wedge s) \end{aligned}$$

¹⁰Corrispondono rispettivamente alle algebre di Lie semplici di tipo D e B nella classificazione di Cartan. La descrizione nel caso pari si applica in particolare agli spazi vettoriali *iperbolici*, che sono cioè isomorfi alla somma diretta $W \oplus W^*$ di uno spazio vettoriale con il suo duale, con forma quadratica $\mathfrak{q}(w, \eta) = \eta(w), \forall w \in W, \eta \in W^*$.

e vale quindi la (*).

Per la proprietà universale risulta univocamente determinato un omomorfismo

$$\tilde{\Phi} : \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \longrightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W),$$

che estende la (8.49). Verifichiamo che le λ_w e le $\delta_{w'}$ generano l'algebra associativa unitaria degli endomorfismi complessi di Λ^*W . Fissiamo a questo scopo una base e_1, \dots, e_n di W e sia e'_1, \dots, e'_n la base duale in W' , con $\mathfrak{q}'(e_i, e'_j) = \delta_{i,j}$. Consideriamo la base di Λ^*W formata dagli elementi $e_{\emptyset} = 1, e_1, \dots, e_n, \dots, e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_h}$ se $h > 1$ ed $I = (i_1, \dots, i_h)$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq n$. Mostriamo che per ogni coppia I, J possiamo trovare, nella sottoalgebra di $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W)$ generata dalle $\lambda_w, \delta_{w'}$, un elemento $T_{J,I}$ che trasforma e_I in e_J e gli e_K con $K \neq I$ in 0. Cominciamo dal caso $I = \emptyset$. Se $J = (1, \dots, n)$, basterà considerare $\lambda_{e_1} \circ \dots \circ \lambda_{e_n}$. Se $J \neq (1, \dots, n)$, allora vi è un'unica sequenza (j_1, \dots, j_r) tale che $\delta_{e'_{j_1}} \circ \dots \circ \delta_{e'_{j_r}}(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = e_J$. Allora la $T_{J,\emptyset} = \delta_{e'_{j_1}} \circ \dots \circ \delta_{e'_{j_r}} \circ \lambda_{e_1} \circ \dots \circ \lambda_{e_n}$ ha la proprietà richiesta. Viceversa, se $I \neq \emptyset$, possiamo trovare una sequenza j_1, \dots, j_k tale che $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k} \wedge e_I = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$. Allora $T_{\emptyset,I} = \delta_{e_n} \circ \dots \circ \delta_{e_1} \circ \lambda_{e_{j_1}} \circ \dots \circ \lambda_{e_{j_k}}$ trasforma e_I in 1 e tutti gli e_J con $J \neq I$ in 0. Abbiamo $T_{J,I} = T_{J,\emptyset} \circ T_{\emptyset,I}$. Questo dimostra che $\tilde{\Phi}$ è surgettiva, e dunque un isomorfismo, perché le due algebre hanno la stessa dimensione. \square

DEFINIZIONE 8.7.2. Se (V, \mathfrak{q}) è uno spazio ortogonale complesso di dimensione pari e W un suo sottospazio isotropo massimale, allora poniamo

$$(8.50) \quad S = \Lambda^*W, \quad S^+ = \bigoplus_h \Lambda^{2h}W, \quad S^- = \bigoplus_h \Lambda^{2h+1}W.$$

Gli elementi di S si dicono¹¹ *spinori*. Quelli di S^+ sono gli *spinori destrorsi*, o con¹² *chiralità positiva*, quelli di S^- *sinistrorsi* o con *chiralità negativa*.

L'inclusione di V in $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \simeq \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W)$ definisce dei prodotti

$$(8.51) \quad \begin{cases} V \times S^+ \ni (v, s) \longrightarrow v \times s = \Phi(v)(s) \in S^-, \\ V \times S^- \ni (v, s) \longrightarrow v \times s = \Phi(v)(s) \in S^+. \end{cases}$$

Il gruppo **Spin** (V, \mathfrak{q}) agisce su S^+ ed S^- mediante i corrispondenti endomorfismi di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \simeq \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W)$, e su V mediante la restrizione dell'applicazione aggiunta. Otteniamo quindi, per ogni $s \in S, v \in V$ e $\xi \in \mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})$,

$$\xi(v \cdot s) = (\xi \cdot v \cdot \xi^{-1}) \cdot \xi(s).$$

I prodotti (8.51) sono quindi *equivarianti* per l'azione del gruppo spinoriale.

8.7.2. Dimensione dispari.

TEOREMA 8.7.3. Sia (V, \mathfrak{q}) uno spazio ortogonale complesso di dimensione dispari e $V = W \oplus W' \oplus U$ una sua decomposizione nella somma diretta di due sottospazi isotropi massimali e di una retta anisotropa ad essi ortogonale. Allora

$$(8.52) \quad \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \simeq \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W) \oplus \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W').$$

¹¹In fisica sono noti come spinori di Dirac, o anche $\frac{1}{2}$ -spinori.

¹²Il termine greco $\chi\epsilon\rho$ significa *mano*. La *chiralità* è la proprietà di una configurazione spaziale di non essere sovrapponibile alla sua immagine speculare.

DIMOSTRAZIONE. Descriviamo separatamente due omomorfismi surgettivi $\tilde{\Phi}_W : \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \rightarrow \Lambda^*W$ e $\tilde{\Phi}_{W'} : \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \rightarrow \Lambda^*W'$.

Per definire Φ_W , utilizziamo gli endomorfismi λ_w e $\delta_{w'}$ introdotti nella dimostrazione del Teorema 8.7.1. Aggiungiamo ad essi, per un vettore e_0 di U con $\mathfrak{q}(e_0) = -1$, l'involuzione definita sugli elementi omogenei mediante

$$\tau_{e_0}(s) = (-1)^p s, \quad \text{per } s \in \Lambda^p W.$$

Poniamo

$$\Phi_W(c e_0 + w + w') = c \tau_{e_0} + \lambda_w - \delta_{w'} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W), \quad \forall c \in \mathbb{C}, w \in W, w' \in W'.$$

Allora, per $v = c e_0 + w + w'$, poiché sia λ_w che $\delta_{w'}$ anti-commutano con τ_{e_0} , abbiamo

$$[\Phi_W(v)]^2 = c^2 \cdot \text{id} - (\lambda_w \delta_{w'} + \delta_{w'} \lambda_w) = -(-c^2 + \mathfrak{q}'(w, w')) \cdot \text{id} = -\mathfrak{q}(v) \cdot \text{id}.$$

Per la proprietà universale del prodotto tensoriale, la Φ_W si prolunga ad un omomorfismo dell'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ in $\text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W)$, che è surgettivo perché, per la dimostrazione del Teorema 8.7.1, lo è la sua restrizione a $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(W) \subset \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$. Per caratterizzare il nucleo di $\tilde{\Phi}_W$, consideriamo una base $e_0, e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_n$ di V che, oltre al vettore e_0 , contenga basi e_1, \dots, e_n di W ed e'_1, \dots, e'_n di W' , tali che $\mathfrak{q}'(e_i, e'_j) = \delta_{i,j}$ per $1 \leq i, j \leq n$. Allora $e_0, (e_1 - e'_1), (e_1 + e'_1), \dots, (e_n - e'_n), (e_n + e'_n)$ è una base ortogonale di V , con $\mathfrak{q}(e_i - e'_i) = -1$ e $\mathfrak{q}(e_i + e'_i) = 1$ per $1 \leq i \leq n$. Lo pseudoscalare

$$\eta = e_0 \cdot (e_1 - e'_1) \cdot (e_1 + e'_1) \cdots (e_n - e'_n) \cdot (e_n + e'_n)$$

ha quadrato

$$\begin{aligned} \eta^2 &= (-1)^{n(2n+1)} (-1)^{2n+1} \cdot \mathfrak{q}(e_0) \cdot \mathfrak{q}(e_1 - e'_1) \cdots \mathfrak{q}(e_n - e'_n) \cdot \mathfrak{q}(e_n + e'_n) \\ &= -(-1)^n (-1)^{n+1} = 1 \end{aligned}$$

e quindi la moltiplicazione per η definisce un'involuzione dell'algebra di Clifford. Inoltre, poiché V ha dimensione dispari, η appartiene al centro di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$. Ad η corrisponde l'endomorfismo

$$\tilde{\Phi}_W(\eta) = \tau_{e_0} \circ (\lambda_{e_1} \circ \delta_{e'_1} - \delta_{e'_1} \circ \lambda_{e_1}) \circ \cdots \circ (\lambda_{e_n} \circ \delta_{e'_n} - \delta_{e'_n} \circ \lambda_{e_n}).$$

Per calcolarlo, osserviamo che, se U_j è il sottospazio di W generato dai vettori $\{e_i \mid i \neq j\}$, allora ogni elemento di Λ^*W si scrive in modo unico come una somma $s = a_j + e_j \wedge b_j$, con $a_j, b_j \in \Lambda^*U_j$. Allora

$$(\lambda_{e_j} \circ \delta_{e'_j} - \delta_{e'_j} \circ \lambda_{e_j})(s) = \lambda_{e_j}(b_j) - \delta_{e'_j}(e_j \wedge a_j) = -a_j + e_j \wedge b_j.$$

Quindi, la $(\lambda_{e_j} \circ \delta_{e'_j} - \delta_{e'_j} \circ \lambda_{e_j})$ cambia di segno gli elementi di Λ^*U_j e lascia invariati quelli di $(e_j \wedge \Lambda^*U_j)$. Da questa ricaviamo che, se $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$, allora

$$\Phi_W(\eta)(e_I) = \Phi_W(\tau_u)[(-1)^{n-p} e_I] = (-1)^n e_I.$$

Abbiamo perciò la decomposizione

$$\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) = \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^+(V) \oplus \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^-(V), \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^+(V) = \{\xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \mid \eta \cdot \xi = (-1)^n \xi\}, \\ \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^-(V) = \{\xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V) \mid \eta \cdot \xi = (-1)^{n+1} \xi\} \end{cases}$$

dell'algebra di Clifford nella somma diretta di due ideali, di cui il secondo è il nucleo di $\tilde{\Phi}_W$. Infatti, abbiamo

$$\tilde{\Phi}_W(\eta \cdot \xi) = \tilde{\Phi}_W(\eta) \circ \tilde{\Phi}_W(\xi) = (-1)^n \cdot \Phi_W(\xi)$$

e quindi $\tilde{\Phi}_W(\xi) = 0$ se $\xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^-(V)$. La $\tilde{\Phi}_W$ si restringe quindi ad un isomorfismo di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^+(W)$ su $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W)$.

Si costruisce in modo analogo l'isomorfismo di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^-(V)$ su Λ^*W' , utilizzando (con ovvie notazioni) la $\Phi_{W'}(w + w') = (\delta'_w - \lambda'_{w'})$ ed una $\Phi_{W'}(e_0) = \pm \tau'_{e_0}$, in modo che il nucleo della rappresentazione $\tilde{\eta}_{W'}$ sia questa volta $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^+(V)$. \square

Sia (V, \mathfrak{q}) uno spazio ortogonale complesso di dimensione dispari e W, W' due suoi sottospazi totalmente isotropi massimali con $W \cap W' = \{0\}$. Le due rappresentazioni $\tilde{\Phi}_W$ e $\tilde{\Phi}_{W'}$ sono equivalenti e la restrizione ad $\mathfrak{so}(2n + 1, \mathbb{C})$ ed a $\mathbf{Spin}(2n + 1, \mathbb{C})$ di ciascuna di queste rappresentazioni è irriducibile.

DEFINIZIONE 8.7.4. Gli elementi di $S = \Lambda^*W$ si dicono *spinori* di (V, \mathfrak{q}) e l'isomorfismo ζ_W di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ su $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Lambda^*W)$ una sua *rappresentazione spinoriale*.

La restrizione ad $\mathfrak{so}(2n + 1, \mathbb{C})$ ed a $\mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})$ di $\tilde{\Phi}_W$ si dice una loro *rappresentazione spinoriale*.

Come nel caso di dimensione pari, la rappresentazione spinoriale dell'algebra di Clifford ci permette di definire un'applicazione

$$(8.53) \quad V \times S \ni (v, s) \longrightarrow v \times s = \Phi_W(v)(s) \in S,$$

che è equivariante per l'azione del gruppo spinoriale.

OSSERVAZIONE 8.7.5. In particolare, $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ è *semplice centrale* se e soltanto se V ha dimensione pari, mentre, quando V ha dimensione dispari, $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ si decompone nella somma diretta di due ideali bilateri, ciascuno semplice centrale, che sono gli autospazi delle applicazioni lineari definite dalle moltiplicazioni per gli pseudoscalari.

Spinori di Pauli. Se V ha dimensione dispari, la rappresentazione S è irriducibile. I vettori di S sono noti in fisica come *spinori di Pauli* e le matrici di $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(S)$ corrispondenti a una base ortonormale di V *matrici di Pauli*. L'azione di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ su S , come abbiamo visto non è fedele (lo è quella di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$), ma lo è la somma diretta delle rappresentazioni S ed S' , che si dice *rappresentazione di Cartan*.

Spinori di Dirac. Se V ha dimensione pari, gli elementi di S si dicono *spinori di Dirac*. Su di essi la rappresentazione di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ è irriducibile, mentre quella di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}^0(V)$ si decompone nella somma diretta delle due rappresentazioni irriducibili S^+ ed S^- , caratterizzate dalla segnatura dello pseudoscalare η , (operatore di *chiralità*). Gli elementi di S^+ od S^- sono gli *spinori di Weyl*, o *chirali*.

8.7.3. Rappresentazioni spinoriali. Nel caso complesso, possiamo precisare i risultati del § 8.5 con la seguente:

PROPOSIZIONE 8.7.6. (1) *Se (V, \mathfrak{q}) è uno spazio quadratico complesso di dimensione dispari e W è un suo sottospazio isotropo massimale, allora*

la $\tilde{\Phi}_W \circ \rho : \mathfrak{so}_{\mathbb{q}}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(S)$ definisce una rappresentazione irriducibile di $\mathfrak{so}_{\mathbb{q}}(V)$ su $S = \Lambda^* W$.

- (2) Se (V, \mathfrak{q}) è uno spazio quadratico complesso di dimensione pari e W è un suo sottospazio isotropo massimale, allora la $\tilde{\Phi}_W \circ \rho$ si decompone nella somma diretta di due rappresentazioni irriducibili non equivalenti, su

$$S^+ = \sum_{h=0}^n \Lambda^{2h} W \quad \text{ed} \quad S^- = \sum_{h=0}^{n-1} \Lambda^{2h+1} W.$$

Queste rappresentazioni si rialzano a rappresentazioni irriducibili di $\mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})$. \square

NOTAZIONE 8.7.7. Tutti gli spazi quadratici complessi della stessa dimensione, e quindi le corrispondenti algebre di Clifford, sono isomorfi. Indicheremo quindi con $\mathcal{C}(\mathbb{C}^n)$ l'algebra di Clifford complessa di un (qualsiasi) spazio quadratico complesso di dimensione n , con $S_n(\mathbb{C})$, $S_n^{\pm}(\mathbb{C})$ le corrispondenti rappresentazioni spinoriali e con $\mathbf{Spin}(n, \mathbb{C})$ i gruppi spinoriali, che hanno algebre di Lie $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$.

OSSERVAZIONE 8.7.8. L'enunciato della Proposizione 8.7.6 vale, in campo reale, per le algebre $\mathfrak{so}(n, n+1)$ ed $\mathfrak{so}(n, n)$ e per i corrispondenti gruppi spinoriali $\mathbf{Spin}(n, n+1)$ e $\mathbf{Spin}(n, n)$.

ESEMPIO 8.7.9. Utilizzando le rappresentazioni descritte in questo paragrafo, descriviamo le rappresentazioni spinoriali in dimensione minore o uguale a cinque.

$$\boxed{n=1} \quad \mathcal{C}(\mathbb{C}^1) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, V = \mathbb{C}^1, S_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^1, \mathbf{Spin}(1, \mathbb{C}) = \{\pm 1\}, v \times s = v \cdot s.$$

$$\boxed{n=2} \quad \mathcal{C}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}(2), V = \mathbb{C}^2, S_2^+(\mathbb{C}) = S_2^-(\mathbb{C}) = \mathbb{C}, \mathbf{Spin}(2, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*,$$

$$(v_1, v_2) \times (s_1, s_2) = (v_1 \cdot s_2, v_2 \cdot s_1).$$

$$\boxed{n=3} \quad \mathcal{C}(\mathbb{C}^3) = \mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2), V = \mathbb{C}^3, S_3(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2, \mathbf{Spin}(3, \mathbb{C}) = \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}),$$

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 & -v_2 \\ v_1 & -v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 s_0 - v_2 s_1 \\ v_1 s_0 - v_0 s_1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{n=4} \quad \mathcal{C}(\mathbb{C}^4) = \mathbb{C}(4), V = \mathbb{C}^4, S_4^{\pm}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2, \mathbf{Spin}(4, \mathbb{C}) = \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}),$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_0 \\ s_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 s_0 + v'_2 s_{1,2} \\ v_2 s_0 - v'_1 s_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 s_1 + v'_2 s_2 \\ v_1 s_2 - v_2 s_1 \end{pmatrix}.$$

L'immersione di \mathbb{C}^4 in $\mathcal{C}(\mathbb{C}^4) = \mathbb{C}(4)$ è data in questo caso da

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & v'_1 & v'_2 \\ & -v_1 & v_1 \\ v_1 & -v'_2 & \\ v_2 & v'_1 & \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{n=5} \quad \mathcal{C}(\mathbb{C}^5) = \mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4), V = \mathbb{C}^5, S_5(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^4,$$

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 & v'_1 & v'_2 & 0 \\ v_1 & -v_0 & 0 & -v'_2 \\ v_2 & 0 & -v_0 & -v'_1 \\ 0 & -v_2 & v_1 & v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_{1,2} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo la rappresentazione spinoriale dell'algebra $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$. Sia e_1, e_2, e_3, e_4 la base canonica di \mathbb{C}^4 . Agli elementi della base canonica di V corrispondono le matrici

$$E_0 = (e_1, -e_2, -e_3, e_4), \quad E_1 = (e_2, 0, e_4, 0), \quad E_2 = (e_3, -e_4, 0, 0), \\ E_3 = (0, e_1, 0, -e_3), \quad E_4 = (0, 0, e_1, -e_2).$$

La rappresentazione è generata dalle matrici $[E_i, E_j]$ con $0 \leq i < j \leq 4$. Abbiamo

$$\begin{aligned} [E_0, E_1] &= -2(e_2, 0, -e_4, 0), & [E_0, E_2] &= -2(e_3, e_4, 0, 0), \\ [E_0, E_3] &= 2(0, e_1, 0, e_3), & [E_0, E_4] &= 2(0, 0, e_1, e_2), \\ [E_1, E_2] &= 2(e_4, 0, 0, 0), & [E_1, E_3] &= -(e_1, -e_2, -e_3, e_4) = -E_0, \\ [E_1, E_4] &= 2(0, 0, e_2, 0), & [E_2, E_3] &= 2(0, e_3, 0, 0), \\ [E_2, E_4] &= (-e_1, -e_2, e_3, e_4), & [E_3, E_4] &= 2(0, 0, 0, e_1). \end{aligned}$$

L'algebra $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$, che ha dimensione 10, si rappresenta come la sottoalgebra di $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$ generata dagli elementi

$$\begin{aligned} (e_1, 0, -e_3, 0), & (0, e_1, 0, e_3), (0, 0, e_1, e_2), (0, 0, 0, e_1), \\ (e_2, 0, -e_4, 0), & (0, e_2, 0, -e_4), (0, 0, e_2, 0), \\ (e_3, e_4, 0, 0), & (0, e_3, 0, 0), \\ (e_4, 0, 0, 0). & \end{aligned}$$

8.8. Algebre di Clifford reali di segnatura (p, q)

In questo paragrafo descriviamo le algebre di Clifford degli spazi vettoriali quadratici reali. Per semplicità di notazioni, indicheremo con $\mathbb{R}^{p,q}$ uno spazio vettoriale reale \mathbb{R}^{p+q} su cui sia stata assegnata una forma quadratica q di segnatura (p, q) e con $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p,q})$ l'algebra di Clifford ad esso associata.

Fissiamo una base ortonormale $e_1, \dots, e_p, \epsilon_1, \dots, \epsilon_q$ di $\mathbb{R}^{p,q}$, i cui primi p vettori siano positivi e i rimanenti q negativi. I suoi elementi generano $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p,q})$ come algebra associativa unitaria e soddisfano le relazioni:

$$(8.54) \quad \begin{cases} e_i^2 = -1, & \epsilon_j^2 = 1, \\ e_i e_j = -e_j e_i, & \epsilon_i \epsilon_j = -\epsilon_j \epsilon_i, & e_i \epsilon_j = -\epsilon_j e_i. \end{cases}$$

Gli pseudo-scalari di $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p,q})$ sono multipli di

$$(8.55) \quad \eta_{p,q} = e_1 \cdots e_p \epsilon_1 \cdots \epsilon_q.$$

ed appartengono al centro di $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p,q})$ se e soltanto se $p+q$ è dispari. Il loro quadrato è uno scalare. Nel caso in cui $p+q$ sia dispari, dal segno di η^2 dipende se l'algebra di Clifford $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p,q})$ sia semplice oppure si decomponga nella somma diretta di due ideali. Infatti, se $p+q$ è dispari ed $\eta_{p,q}^2 = 1$, allora

$$\{\xi \in \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p,q}) \mid \eta_{p,q} \cdot \xi = \xi\} \quad \text{e} \quad \{\xi \in \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p,q}) \mid \eta_{p,q} \cdot \xi = -\xi\}$$

sono due ideali bilateri di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$. Se $\eta_{p,q}^2 = -1$, vedremo che $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ ha commutante \mathbb{C} ed è isomorfa ad un'algebra semplice complessa. Poiché

$$\eta_{p,q}^2 = (-1)^{(p+q)(p+q-1)} e_1^2 \cdots e_p^2 \cdot \epsilon_1^2 \cdots \epsilon_q^2 = (-1)^{(p+q)(p+q-1)+p}$$

Abbiamo

$$(8.56) \quad \eta_{p,q}^2 = \begin{cases} +1 & \text{se } p - q \equiv 0, 3 \pmod{4}, \\ -1 & \text{se } p - q \equiv 1, 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Infatti, posto $p - q = r$, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(p+q)(p+q-1) + p &= \frac{1}{2}(2q+r)(2q+r-1) + q + r \\ &= \frac{1}{2}(4q^2 + 4qr + r^2 - 2q - r) = q + r \equiv \frac{r(r+1)}{2} \pmod{2}. \end{aligned}$$

La classificazione completa delle algebre di Clifford reali è data dalla seguente tabella, in cui nella prima colonna è riportata la classe di equivalenza di $(p-q)$ modulo 8, nella seconda il segno più o meno a seconda che $\eta_{p,q}^2$ sia l'identità di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ o la sua opposta e nella terza l'algebra, o somma diretta di algebre di matrici, equivalente.

TEOREMA 8.8.1.

$p - q \pmod{8}$	$\eta_{p,q}^2 / 1_{p,q}$	$\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}) \ (p+q=n)$
0	+	$\mathbb{R}(2^{n/2})$
1	-	$\mathbb{C}(2^{(n-1)/2})$
2	-	$\mathbb{H}(2^{(n-2)/2})$
3	+	$\mathbb{H}(2^{(n-3)/2}) \oplus \mathbb{H}(2^{(n-3)/2})$
4	+	$\mathbb{H}(2^{(n-2)/2})$
5	-	$\mathbb{C}(2^{(n-1)/2})$
6	-	$\mathbb{R}(2^{n/2})$
7	+	$\mathbb{R}(2^{(n-1)/2}) \oplus \mathbb{R}(2^{(n-1)/2})$

Infatti, quando $(p-q)$ è pari, lo è anche $n = p+q$. In questo caso $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ è semplice centrale, perché lo è la sua complessificazione $\mathcal{C}\ell(\mathbb{C}^n) \simeq \text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^* \mathbb{C}^{n/2})$. È quindi isomorfa ad un'algebra di matrici reali o quaternioniche.

Quando $n = p+q$ è dispari, la complessificazione $\mathcal{C}\ell(\mathbb{C}^n)$ di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ si decompone nella somma diretta di due algebre semplici centrali. Quindi $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ è o la somma diretta di due algebre reali semplici centrali, quando $\eta_{p,q}^2 = 1_{p,q}$, (le $P_{\pm} = \frac{1}{2}(1_{p,q} \pm \eta_{p,q})$ sono in questo caso omomorfismi idempotenti), oppure isomorfa ad un'algebra semplice centrale complessa, nel caso in cui $\eta_{p,q}^2 = -1_{p,q}$.

Per completare la dimostrazione del teorema di classificazione, possiamo utilizzare il seguente

LEMMA 8.8.2. *Valgono i seguenti isomorfismi:*

$$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{q+2,p}), \quad \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{q,p+2}) \simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p+1,q+1}).$$

DIMOSTRAZIONE. Utilizziamo per gli spazi vettoriali $V = \mathbb{R}^{p,q}$ con $0 \leq p, q \leq 2$, $p + q = 2$, le rappresentazioni matriciali:

$$\mathbb{R}^{2,0} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z \\ -\bar{z} & 0 \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{C} \right\}, \quad \mathbb{R}^{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} & t+s \\ t-s & \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathbb{R}^{0,2} = \left\{ \begin{pmatrix} t & s \\ s & -t \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Queste ci permettono di identificare $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{2,0})$ con $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}(2)$ e le $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{1,1})$ e $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,2})$ con l'algebra $\mathbb{R}(2)$ delle matrici reali 2×2 . Con queste identificazioni,

$$\eta_{2,0} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \eta_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta_{0,2} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

Consideriamo le applicazioni lineari

$$\phi_{2,0} : \mathbb{R}^{q+2,p} \simeq \mathbb{R}^{2,0} \oplus \mathbb{R}^{p,q} \ni (w, v) \longrightarrow w \otimes 1_{p,q} + \eta_{2,0} \otimes v \in \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}),$$

$$\phi_{1,1} : \mathbb{R}^{p+1,q+1} \simeq \mathbb{R}^{0,2} \oplus \mathbb{R}^{p,q} \ni (w, v) \longrightarrow w \otimes 1_{p,q} + \eta_{1,1} \otimes v \in \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}),$$

$$\phi_{0,2} : \mathbb{R}^{q,p+2} \simeq \mathbb{R}^{0,2} \oplus \mathbb{R}^{p,q} \ni (w, v) \longrightarrow w \otimes 1_{p,q} + \eta_{0,2} \otimes v \in \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}).$$

Ricordiamo che $\eta_{i,j}$ anti-commuta con gli elementi di $\mathbb{R}^{i,j}$ e che $\eta_{i,j}^2 = (-1)^{1+ij} 1_{i,j}$ se $0 \leq i, j \leq 2$ ed $i + j = 2$. Poiché

$$(\phi_{i,j}(w \oplus v, w \oplus v))^2 = -\mathfrak{q}_{i,j}(w) + (-1)^{ij} \mathfrak{q}_{p,q}(v), \quad \forall w \in \mathbb{R}^{i,j}, \forall v \in \mathbb{R}^{p,q},$$

le $\phi_{i,j}$ si estendono ad omomorfismi, che si verifica essere isomorfismi, delle algebre di Clifford dell'enunciato. \square

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 8.8.1. Nel caso $q = 0$, la classificazione è stata ottenuta nel Teorema 8.1.6.

Consideriamo il caso $p = 0$. È $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,1}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,2}) \simeq \mathbb{R}(2)$ e $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,q}) \simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{q-2,0})$ se $q > 2$. Questo dà gli isomorfismi della tabella per $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,q})$.

Il caso generale si può ora dimostrare per induzione su q . Abbiamo già osservato che l'enunciato è valido per $q = 0$. Se è valido per un $q \geq 0$ fissato, utilizziamo il fatto che per le considerazioni precedenti $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{0,q+1})$ è ancora dato dalla tabella, mentre $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q+1}) \simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p-1,q})$ se $p \geq 1$. La tesi segue allora per ricorrenza dagli isomorfismi:

$$\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2^m) \simeq \mathbb{R}(2^{m+1}), \quad \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}(2^m) \simeq \mathbb{C}(2^{m+1}), \quad \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2^m) \simeq \mathbb{H}(2^{m+1}),$$

che esprimono il fatto che il prodotto tensoriale per $\mathbb{R}(2)$ preserva la classe di Brauer di un'algebra semplice centrale¹³. \square

Un caso particolarmente importante per le applicazioni fisiche è quello delle algebre $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n,1})$ (di tipo spazio-tempo).

Ricordando che $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n,1}) \simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n-1,0})$ se $n \geq 1$, otteniamo

¹³C. T. C. Wall, *Graded Brauer groups*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **213** (1964), pp. 187-199.

Per il Teorema di Artin-Wedderburn, un'algebra associativa unitaria semplice centrale è un'algebra di matrici con coefficienti in un'algebra di divisione D , che è la sua *classe di Brauer*. Nel caso reale, D può essere \mathbb{R} od \mathbb{H} .

PROPOSIZIONE 8.8.3. *Valgono gli isomorfismi:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{0,1}) &\simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \\
\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{1,1}) &\simeq \mathbb{R}(2), \\
\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{2,1}) &\simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^1) \simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}(2), \\
\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{3,1}) &\simeq \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H} \simeq \mathbb{H}(2), \\
\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{4,1}) &\simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) \simeq \mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2), \\
\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{5,1}) &\simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2) \simeq \mathbb{H}(4), \\
\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{6,1}) &\simeq \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}(4) \simeq \mathbb{C}(8), \\
\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{7,1}) &\simeq \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(8) \simeq \mathbb{R}(16), \\
\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{8,1}) &\simeq \mathbb{R}(2) \otimes (\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)) \simeq \mathbb{R}(16) \oplus \mathbb{R}(16), \\
\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{n+8,1}) &\simeq \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{n,1}) \otimes \mathbb{R}(16) \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 8.8.4. Il sottogruppo compatto massimale di $\mathbf{SO}^+(1, m)$ è $\mathbf{SO}(m)$. In particolare, come abbiamo osservato, $\mathbf{Spin}(1, m)$ è semplicemente connesso per $m \geq 3$.

Un altro modo di calcolare le algebre di Clifford $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p,q})$ è quello di utilizzare la seguente proposizione ed il suo corollario: possiamo allora ricondurci ad isomorfismi con algebre $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{n,0})$ e $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{0,n})$.

PROPOSIZIONE 8.8.5. *Siano p, q interi non negativi con $p + q > 0$. Allora*

$$(8.57) \quad \mathcal{Cl}^0(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq \begin{cases} \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p-1,q}), & \text{se } p > 0, \\ \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{q-1,p}), & \text{se } q > 0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Fissato un vettore anisotropo e_0 di $\mathbb{R}^{p,q}$, con $e_0^2 = \pm 1$, definiamo l'applicazione

$$\phi : \mathbb{R}^{p+q-1} \simeq e_0^\perp \ni v \longrightarrow e_0 \cdot v \in \mathcal{Cl}^0(\mathbb{R}^{p,q}).$$

Abbiamo

$$(e_0 \cdot v)^2 = -e_0^2 \cdot v^2,$$

in quanto e_0 e v anti-commutano. Se e_0 è positivo, la ϕ si estende ad un omomorfismo $\tilde{\phi}$ di $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p-1,q})$ in $\mathcal{Cl}^0(\mathbb{R}^{p,q})$. Se e_0 è negativo, s'inverte la segnatura della restrizione della forma ad e_0^\perp ed otteniamo quindi un omomorfismo $\tilde{\phi}$ di $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{q-1,p})$ in $\mathcal{Cl}^0(\mathbb{R}^{p,q})$. Poiché gli $e_0 \cdot v$, con $v \in e_0^\perp$, generano $\mathcal{Cl}^0(\mathbb{R}^{p,q})$, la $\tilde{\phi}$ è in entrambi i casi un isomorfismo, perché è surgettiva ed i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione. \square

COROLLARIO 8.8.6. *Se $p, q > 0$, allora $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p-1,q}) \simeq \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{q-1,p})$.* \square

8.9. Spinori reali

Consideriamo in questo paragrafo le rappresentazioni spinoriali *reali*. Le loro complessificazioni sono rappresentazioni spinoriali delle corrispondenti algebre complesse.

Le algebre di Clifford reali sono o algebre semplici (reali, quaternioniche, complesse) o loro somme dirette. Le loro rappresentazioni vettoriali irriducibili sono quindi essenzialmente uniche e si possono ottenere dalla tabella del Teorema 8.8.1.

DEFINIZIONE 8.9.1. Chiamiamo *spinoriale* una rappresentazione irriducibile S dell'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{q}}(V)$ e la sua restrizione al gruppo $\mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})$.

Le rappresentazioni irriducibili S di un'algebra reale associativa e unitaria \mathbb{A} si classificano in base al loro *commutante*

$$\mathbb{K} = \{\alpha \in \text{End}_{\mathbb{R}}(S) \mid \alpha(\alpha(s)) = \alpha(a(s)), \forall a \in \mathbb{A}, \forall s \in S\}.$$

Per il Lemma di Schur \mathbb{K} è un'algebra di divisione associativa e reale, e quindi uguale ad \mathbb{R} , \mathbb{C} od \mathbb{H} . La rappresentazione si dirà allora di tipo *reale*, *complesso*, *quaternionico*. Il tipo della rappresentazione è legato a quello della sua complessificazione dalla seguente Proposizione¹⁴

PROPOSIZIONE 8.9.2. Sia S una rappresentazione irriducibile di un'algebra reale associativa e unitaria \mathbb{A} , con commutante \mathbb{K} ed $S^{\mathbb{C}}$ la corrispondente rappresentazione complessa della complessificazione $\mathbb{A}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{A}$ di \mathbb{A} . Possono darsi i tre casi seguenti

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \Leftrightarrow S^{\mathbb{C}}$ è un $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ -modulo semplice;

$\mathbb{K} = \mathbb{C} \Leftrightarrow S^{\mathbb{C}}$ è somma diretta di due $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ -moduli semplici non isomorfi, che sono uno il coniugato dell'altro;

$\mathbb{K} = \mathbb{H} \Leftrightarrow S^{\mathbb{C}}$ è somma diretta di due $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ -moduli semplici isomorfi, scambiati tra loro dal coniugio. \square

Sia W uno spazio vettoriale complesso. Fissiamo un coniugio $w \rightarrow \bar{w}$ su W . Se $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ è un'algebra complessa e W ha una struttura di $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ -modulo, indichiamo con \bar{W} l' $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ -modulo ottenuto ponendo

$$a \cdot w = \overline{a(\bar{w})}, \quad \forall a \in \mathbb{A}^{\mathbb{C}}, \forall w \in \bar{W}.$$

Osserviamo che, dal momento che due diversi coniugi su W sono coniugati mediante un automorfismo \mathbb{C} -lineare, tutte le strutture di $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ -modulo definite da scelte diverse del coniugio \bar{W} sono tra loro equivalenti.

PROPOSIZIONE 8.9.3. Sia \mathbb{A} un'algebra reale associativa e unitaria, W una rappresentazione \mathbb{C} -lineare della sua complessificazione $\mathbb{A}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{A}$ e \bar{W} una sua coniugata. Possono allora darsi i seguenti casi, l'uno esclusivo degli altri:

- (1) Possiamo trovare un isomorfismo $\theta : W \rightarrow \bar{W}$ di $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ -moduli con $\theta^2 = \text{id}$. Allora $S = \{w \in W \mid \theta(w) = w\}$ è un \mathbb{A} -modulo semplice irriducibile di commutante \mathbb{R} .

¹⁴cf. Appendice II, in [N.Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 9*, Masson, 1982, Paris.]

- (2) W e \bar{W} non sono isomorfi come $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ -moduli. Allora $S = W_{[\mathbb{R}]}$ è un \mathbb{A} -modulo semplice, con commutante \mathbb{C} .
- (3) Possiamo trovare un $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ -isomorfismo $\theta : W \rightarrow \bar{W}$ con $\theta^2 = -\text{id}$. Allora $S = W_{[\mathbb{R}]}$ è un \mathbb{A} -modulo semplice, con commutante \mathbb{H} . \square

Abbiamo indicato con $W_{[\mathbb{R}]}$ lo spazio vettoriale complesso W pensato come spazio vettoriale reale per restrizione del campo degli scalari.

Possiamo utilizzare la Proposizione 8.9.3 per calcolare le rappresentazioni spinoriali reali delle algebre di Clifford reali (e quindi anche dei relativi gruppi $\mathbf{Pin}(V, \mathfrak{q})$) a partire dalle loro complessificazioni.

Per la Proposizione 8.9.3 possiamo ricavare la dimensione delle rappresentazioni spinoriali S delle algebre di Clifford reali $\mathcal{E}l_{\mathfrak{q}}(V)$ da quella delle corrispondenti algebre complesse, noto il commutante $\mathbb{K}(S)$. Abbiamo:

$$(8.58) \quad \dim_{\mathbb{R}} S = \begin{cases} 2^{\lfloor n/2 \rfloor}, & \text{se } \mathbb{K}(S) = \mathbb{R}, \\ 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}, & \text{se } \mathbb{K}(S) = \mathbb{C}, \mathbb{H}. \end{cases} \quad \text{ove } n = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

Dalla tabella del Teorema 8.8.1 sappiamo se la rappresentazione è di tipo reale, complesso o quaternionico.

$p - q \pmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{K}(S)$	\mathbb{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	\mathbb{H}	\mathbb{H}	\mathbb{C}	\mathbb{R}	\mathbb{R}

Per restrizione, le rappresentazioni spinoriali e pinoriali definiscono rappresentazioni dei gruppi $\mathbf{Spin}(V, \mathfrak{q})$ e $\mathbf{Pin}(V, \mathfrak{q})$.

Ricordiamo che, se $p > 0$, allora $\mathcal{E}l^0(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq \mathcal{E}l(\mathbb{R}^{p-1,q})$. Quindi la rappresentazione spinoriale di $\mathcal{E}l(\mathbb{R}^{p,q})$ si decompone in rappresentazioni spinoriali di $\mathcal{E}l(\mathbb{R}^{p-1,q})$, che sono anche rappresentazioni irriducibili di $\mathbf{Spin}(p, q)$. Se $p = 0$, allora $\mathcal{E}l^0(\mathbb{R}^{0,q}) \simeq \mathcal{E}l(\mathbb{R}^{q-1,0})$ e quindi la rappresentazione spinoriale di $\mathcal{E}l(\mathbb{R}^{0,q})$ si decompone in rappresentazioni irriducibili di $\mathbf{Spin}(q - 1)$.

Indichiamo con $\Sigma_{p,q}$ la rappresentazione spinoriale reale di $\mathcal{E}l(\mathbb{R}^{p,q})$. Le rappresentazioni spinoriali sono descritte allora dalla seguente tabella, in cui $n = p + q$:

$p - q \pmod 8$	$\mathcal{E}l(\mathbb{R}^{p,q})$	$\Sigma_{p,q}$
0	$\text{End}_{\mathbb{R}}(\Lambda \mathbb{R}^{n/2})$	$\Lambda(\mathbb{R}^{n/2})$
1	$\text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda \mathbb{C}^{(n-1)/2})$	$\Lambda \mathbb{C}^{(n-1)/2}$
2	$\text{End}_{\mathbb{H}}(\Lambda \mathbb{H}^{(n-2)/2})$	$\Lambda \mathbb{H}^{(n-2)/2}$
3	$\text{End}_{\mathbb{H}}(\Lambda \mathbb{H}^{(n-3)/2}) \oplus \text{End}_{\mathbb{H}}(\Lambda \mathbb{H}^{(n-3)/2})$	$\Lambda \mathbb{H}^{(n-3)/2}$
4	$\text{End}_{\mathbb{H}}(\Lambda \mathbb{H}^{(n-2)/2})$	$\Lambda \mathbb{H}^{(n-2)/2}$
5	$\text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda \mathbb{C}^{(n-1)/2})$	$\Lambda \mathbb{C}^{(n-1)/2}$
6	$\text{End}_{\mathbb{R}}(\Lambda \mathbb{R}^{n/2})$	$\Lambda \mathbb{R}^{n/2}$
7	$\text{End}_{\mathbb{R}}(\Lambda \mathbb{R}^{(n-1)/2}) \oplus \text{End}_{\mathbb{R}}(\Lambda \mathbb{R}^{(n-1)/2})$	$\Lambda \mathbb{R}^{(n-1)/2}$

Per quanto riguarda le rappresentazioni di $\mathbf{Spin}(p, q)$ indichiamo con $V_{p,q} \simeq \mathbb{R}^n$ la rappresentazione vettoriale e con $S_{p,q}$ quella spinoriale. Quando questa si decompone nella somma di due rappresentazioni irriducibili, le indicheremo con $S_{p,q}^{\pm}$,

indicando poi se queste sono o meno isomorfe. Otteniamo la tabella

$p - q \pmod 8$	$V_{p,q}$	$S_{p,q}$ oppure $S_{p,q}^+ \oplus S_{p,q}^-$	isomorfe
0	\mathbb{R}^n	$\Lambda^+ \mathbb{R}^{n/2} \oplus \Lambda^- \mathbb{R}^{n/2}$	no
1	\mathbb{R}^n	$\Lambda \mathbb{R}^{(n-1)/2} \oplus \Lambda \mathbb{R}^{(n-1)/2}$	si
2	\mathbb{R}^n	$\Lambda \mathbb{C}^{(n-2)/2} \oplus \Lambda \mathbb{C}^{(n-2)/2}$	si
3	\mathbb{R}^n	$\Lambda \mathbb{H}^{(n-3)/2}$	–
4	\mathbb{R}^n	$\Lambda^+ \mathbb{H}^{n-2/2} \oplus \Lambda^- \mathbb{H}^{n-2/2}$	no
5	\mathbb{R}^n	$\Lambda \mathbb{H}^{(n-3)/2}$	–
6	\mathbb{R}^n	$\Lambda \mathbb{C}^{(n-2)/2}$	–
7	\mathbb{R}^n	$\Lambda \mathbb{R}^{(n-1)/2} \oplus \Lambda \mathbb{R}^{(n-1)/2}$	si

Per n pari abbiamo posto $\Lambda^+ \mathbb{K}^n = \bigoplus_{h=0}^{n/2} \Lambda^{2h} \mathbb{K}^n$ e $\Lambda^- \mathbb{K}^n = \bigoplus_{h=0}^{(n-2)/2} \Lambda^{2h+1} \mathbb{K}^n$.

Consideriamo le algebre di Clifford $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^n)$ associate agli spazi euclidei \mathbb{R}^n .

Abbiamo osservato che $\eta_n^2 = (-1)^{n(n+1)/2}$ e quindi uguale ad 1 soltanto nei casi in cui n sia dispari e congruo a 3 o a 7 modulo 8.

In tutti gli altri casi, le $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^n)$ sono semplici (reali se n è pari, complesse se n è dispari) ed hanno quindi un'unica rappresentazione irriducibile. Lo spazio della rappresentazione si indica con P_n e si dice spazio dei *pinori*.

Quando $n \equiv 3, 7 \pmod 8$, la $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^n)$ è somma diretta di due algebre di matrici, reali o quaternioniche, ed ha due rappresentazioni irriducibili non equivalenti, dei *pinori positivi*, o *destrorsi*, P_n^+ e dei *pinori negativi*, o *sinistrorsi*, P_n^- .

Raccogliamo nella tabella seguente le rappresentazioni pinoriali per $0 \leq n \leq 7$.

n	$\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^n)$	rappres.
0	\mathbb{R}	$P_0 = \mathbb{R}$
1	\mathbb{C}	$P_1 = \mathbb{C}$
2	\mathbb{H}	$P_2 = \mathbb{H}$
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$P_3^\pm = \mathbb{H}$
4	$\mathbb{H}(2)$	$P_4 = \mathbb{H}^2$
5	$\mathbb{C}(4)$	$P_5 = \mathbb{C}^4$
6	$\mathbb{R}(8)$	$P_6 = \mathbb{R}^8$
7	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$P_7^\pm = \mathbb{R}^8$

Le rappresentazioni irriducibili di $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{n+8})$ si ottengono da quelle di $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^n)$ tensorizzandole per \mathbb{R}^{16} . Come abbiamo osservato, queste sono anche rappresentazioni irriducibili del gruppo $\mathbf{Pin}(n)$.

Analogamente, le rappresentazioni irriducibili di $\mathcal{Cl}^0(\mathbb{R}^n)$ definiscono rappresentazioni irriducibili di $\mathbf{Spin}(n) \subset \mathcal{Cl}^0(\mathbb{R}^n)$. Poiché $\mathcal{Cl}^0(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{n-1})$, abbiamo, per $n \leq 8$, per le rappresentazioni spinoriali irriducibili in dimensione n con

$1 \leq n \leq 8$, la tabella

n	$\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^n)$	rappres.
1	\mathbb{R}	$S_1 = \mathbb{R}$
2	\mathbb{C}	$S_2 = \mathbb{C}$
3	\mathbb{H}	$S_3 = \mathbb{H}$
4	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$S_4^\pm = \mathbb{H}$
5	$\mathbb{H}(2)$	$S_5 = \mathbb{H}^2$
6	$\mathbb{C}(4)$	$S_6 = \mathbb{C}^4$
7	$\mathbb{R}(8)$	$S_7 = \mathbb{R}^8$
8	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$S_8^\pm = \mathbb{R}^8$

e, per periodicit , $S_{n+8} \simeq S_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{16}$ (con eventuali \pm).

I vettori della rappresentazione vettoriale $V_n = \mathbb{R}^n$ si possano identificare ad elementi dell'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$. Come tali, essi agiscono sui pinori e sugli spinori. Restringiamo la nostra attenzione a questi ultimi.

LEMMA 8.9.4. *Per restrizione a $V_n = \mathbb{R}^n \subset \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$ dell'azione dell'algebra di Clifford sugli spinori, risultano definite applicazioni bilineari*

$$(8.59) \quad \begin{cases} m_n : V_n \times S_n^\pm \rightarrow S^\mp, & (n \equiv 3, 7 \pmod{8}), \\ m_n : V_n \times S_n \rightarrow S_n, & (n \equiv 0, 1, 2, 4, 5, 6 \pmod{8}). \end{cases}$$

Le diverse rappresentazioni spinoriali sono duali l'una dell'altra (nel caso in cui n sia congruo a 3 o a 7 modulo 8), oppure autoduali (negli altri casi). Possiamo quindi descrivere le applicazioni in (8.59) utilizzando forme trilineari

$$(8.60) \quad t_n(s_1, v, s_2) = \langle s_1, m_n(v, s_2) \rangle, \quad \text{con } s_1, s_2 \text{ spinori e } v \text{ vettore.}$$

DIMOSTRAZIONE. Discutiamo i diversi casi, per $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

$n = 1$ È

$$\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{C},$$

$$\mathcal{C}\ell^0(\mathbb{R}^1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R},$$

$$\mathbf{Spin}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \middle| \epsilon = \pm 1 \right\},$$

$$V_1 = \mathcal{C}\ell^1(\mathbb{R}^1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v \\ -v & 0 \end{pmatrix} \middle| v \in \mathbb{R} \right\},$$

$$S_1^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$S_1^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\},$$

Le rappresentazioni di **Spin**(1) sono quella banale su V_1 , la moltiplicazione per ± 1 su $S_1^\pm \simeq \mathbb{R}$. La forma trilineare associata è

$$\langle y|v|x \rangle = xvy, \quad \forall x, y, v \in \mathbb{R}.$$

$n = 2$ È

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^2) &= \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \middle| z, w \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{H}, \\ \mathcal{Cl}^0(\mathbb{R}^2) &= \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{C}, \\ \mathbf{Spin}(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \right\} \simeq S^1, \\ V_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v \\ -\bar{v} & 0 \end{pmatrix} \middle| v \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{C}, \\ S_2^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{C}, \\ S_2^- &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Possiamo quindi rappresentare l'azione di **Spin**(2) sugli spinori e sui vettori mediante

$$\xi(x) = zx, \quad \xi(y) = \bar{z}y, \quad \xi(v) = zv\bar{z}, \quad \text{per } \xi = \begin{pmatrix} z & \\ & \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Il gruppo **Spin**(2) è quello che lascia invariante la forma trilineare

$$\mathbb{C}^3 \ni (x, y, v) \longrightarrow \langle y|v|x \rangle = \Re e(xvy) \in \mathbb{R}.$$

$n = 3$ È

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^3) &= \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} \middle| z, w \in \mathbb{H} \right\} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \\ \mathcal{Cl}^0(\mathbb{R}^3) &= \left\{ \begin{pmatrix} z & \\ & z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{H} \right\} \simeq \mathbb{H}, \\ \mathbf{Spin}(3) &= \left\{ \begin{pmatrix} z & \\ & z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{H}, |z| = 1 \right\} \simeq S^3 \simeq \mathbf{SU}(2), \\ V_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v \\ v & 0 \end{pmatrix} \middle| v \in \text{Im}(\mathbb{H}) \right\} \simeq \text{Im}(\mathbb{H}) \simeq \mathbb{R}^3, \\ S_3 = S_3^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{H} \right\} \simeq \mathbb{H}, \\ S_3 = S_3^- &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{H} \right\} \simeq \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\gamma \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^* & w^* \\ w^* & z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix}^*$$

e di conseguenza l'azione di $\mathbf{Spin}(3)$ si può rappresentare mediante

$$\xi(x) = zx, \quad \xi(y) = zy, \quad \xi(v) = zvz^*, \quad \text{con} \quad \xi = \begin{pmatrix} z & \\ & z \end{pmatrix} \in \mathbf{Spin}(3).$$

La forma trilineare con gruppo di invarianza $\mathbf{Spin}(3)$ è la

$$S_3^+ \times S_3^- \times V_3 \ni (x, y, v) \longrightarrow \langle y|v|x \rangle = \mathcal{R}e(y^*vx) \in \mathbb{R}.$$

$n = 4$ Lo spazio V_4 della rappresentazione vettoriale si identifica con il corpo \mathbb{H} dei quaternioni e $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ all'algebra $\mathbb{H}(2)$ delle matrici 2×2 a coefficienti in \mathbb{H} , con

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^0(\mathbb{R}^4) &= \left\{ \begin{pmatrix} q_1 & \\ & q_2 \end{pmatrix} \middle| q_1, q_2 \in \mathbb{H} \right\}, \\ \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^4) &= \left\{ \begin{pmatrix} & q_1 \\ q_2 & \end{pmatrix} \middle| q_1, q_2 \in \mathbb{H} \right\}, \\ V_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} & v \\ -\bar{v} & \end{pmatrix} \middle| v \in \mathbb{H} \right\}. \end{aligned}$$

È poi

$$\gamma \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{q}_{11} & -q_{12} \\ -q_{21} & \bar{q}_{22} \end{pmatrix}, \quad \forall q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22} \in \mathbb{H}.$$

Perciò

$$\begin{aligned} \mathbf{Spin}(4) &= \left\{ \text{diag}(a, b) = \begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in S^3 \subset \mathbb{H} \right\} \simeq \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2), \\ S_4^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} x & \\ & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{H} \right\}, \quad S_4^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \\ & y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{H} \right\}. \end{aligned}$$

Indicando per semplicità con un singolo quaternionione le corrispondenti matrici di V_4 ed S_4^\pm , l'azione di $\mathbf{Spin}(4)$ è descritta da

$$\begin{aligned} \phi(x) &= ax, & \phi(y) &= by, & \phi(v) &= av\bar{b}, \\ x &\in S_4^+, & y &\in S_4^-, & v &\in V_4, & \phi &= \text{diag}(a, b) \in \mathbf{Spin}(4). \end{aligned}$$

Dalle tre rappresentazioni V_4, S_4^+, S_4^- possiamo costruire la forma trilineare

$$V_4 \times S_4^+ \times S_4^- \ni (v, x, y) \longrightarrow \langle y|v|x \rangle = -\mathcal{R}e(y^*v^*x) \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che $\langle \phi(y)|\phi(v)|\phi(x) \rangle = \langle y|v|x \rangle$ per ogni $\phi \in \mathbf{Spin}(4)$ e, viceversa, $\mathbf{Spin}(4)$ è il gruppo che lascia invariante la forma trilineare.

$n = 5$ Sappiamo che in questo caso $\mathbf{Spin}(5) \simeq \mathbf{Sp}(2)$. Con

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad \text{ove} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \text{è}$$

$$\mathbf{Spin}(5) = \mathbf{Sp}(2) = \{a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \mid a\Omega a^\dagger = \Omega, aa^* = I_4\}.$$

Osserviamo che

$$\text{se } a \in \mathbf{Spin}(5) = \mathbf{Sp}(2), \quad \text{allora } a\Omega = \Omega(a^\dagger)^{-1} = \Omega\bar{a} \quad \text{e} \quad a^*\Omega = \Omega a^\dagger.$$

Ricordiamo che

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^5) = \mathbb{C}(4),$$

$$\mathcal{L}^0(\mathbb{R}^5) = \{X \in \mathbb{C}(4) \mid X\Omega = \Omega\bar{X}\},$$

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^5) = \{X \in \mathbb{C}(4) \mid X\Omega + \Omega\bar{X} = 0\}.$$

La rappresentazione vettoriale è data da

$$V_5 = \{X \in \mathbb{C}(4) \mid X\Omega = \Omega X^\dagger, X + X^* = 0, \text{traccia}(X) = 0\}$$

e su di essa $\mathbf{Spin}(5)$ opera mediante l'estensione della rappresentazione aggiunta. È infatti

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix} \in V_5 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,1} = -x_{1,1}^* = x_{2,2}^\dagger, \\ x_{1,2} = -x_{2,1}^* = -x_{1,2}^\dagger, \\ \text{traccia}(x_{1,1}) = 0. \end{cases}$$

Sia $X \in V_5$ ed $Y = aXa^*$ con $a \in \mathbf{Spin}(5)$. È $Y^* + Y = 0$ e $\text{traccia}(Y) = 0$ perché $\text{su}(4)$ è invariante per l'azione aggiunta di $\mathbf{Spin}(5) \subset \mathbf{SU}(4)$. Abbiamo poi

$$Y\Omega = aXa^*\Omega = aX\Omega a^\dagger = a\Omega X^\dagger a^\dagger = \Omega(\bar{a}X^\dagger a^\dagger) = \Omega Y^\dagger.$$

Questo dimostra che $aXa^* \in V_5$ per ogni $a \in \mathbf{Spin}(5)$.

Gli elementi di V_5 sono della forma

$$X = \begin{pmatrix} it & \alpha & 0 & \beta \\ -\bar{\alpha} & -it & -\beta & 0 \\ 0 & \bar{\beta} & it & -\bar{\alpha} \\ -\bar{\beta} & 0 & \alpha & -it \end{pmatrix}, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

La rappresentazione spinoriale è

$$S_5^\pm = \mathbb{C}^4 \simeq \mathbb{R}^8,$$

su cui l'azione di $\mathbf{Sp}(2)$ è la restrizione di quella di $\mathbb{C}(4)$. Anche in questo caso abbiamo una forma trilineare

$$S_5^+ \times S_5^- \times V_5 \ni (x, y, v) \longrightarrow \langle y|v|x \rangle = \Re e(y^*vx) \in \mathbb{R},$$

e $\mathbf{Spin}(5)$ si può caratterizzare come il gruppo di trasformazioni \mathbb{R} -lineari che la lascia invariante.

$n = 6$ Sappiamo che $\mathbf{Spin}(6) \simeq \mathbf{SU}(4)$. Sia

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ -I_4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}.$$

Allora

$$\mathbf{Spin}(6) = \{a \in \mathbf{SO}(8) \mid a\Omega a^\dagger = \Omega\}.$$

La rappresentazione spinoriale S_6^\pm è la rappresentazione su \mathbb{R}^8 di $\mathbf{Spin}(6) \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(8)$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbb{R}^6) &= \mathbb{R}(8), \\ \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^6) &= \{X \in \mathbb{R}(8) \mid \Omega X = X\Omega\} \simeq \mathbb{C}(4), \\ \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^6) &= \{X \in \mathbb{R}(8) \mid \Omega X + X\Omega = 0\}.\end{aligned}$$

Gli elementi di V_6 si possono rappresentare mediante matrici

$$v = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$$

in cui $A, B \in \mathfrak{so}(4)$, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_2 & -x_3 & 0 & x_1 \\ -x_3 & x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ -y_1 & 0 & -y_3 & y_2 \\ -y_2 & y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_3 & -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti l'insieme

$$W = \{v \in \mathbb{R}^{8 \times 8} \mid v + v^\dagger = 0, \Omega v + v\Omega = 0, v^\dagger v \in \mathbb{R}I_8\}.$$

è unione di due sottospazi vettoriali reali di dimensione 6, invarianti per l'azione aggiunta di $\mathbf{Spin}(6)$ su $\mathcal{E}(\mathbb{R}^6) = \mathbb{R}(8)$. Infatti, se $a \in \mathbf{Spin}(6)$, $X \in W$ ed $Y = \text{ad}(a)(X) = aXa^\dagger$, allora

$$\begin{aligned}Y^\dagger &= (aXa^\dagger)^\dagger = aX^\dagger a^\dagger = -aXa^\dagger = -Y, \\ \Omega Y &= \Omega aXa^\dagger = a\Omega Xa^\dagger = -aX\Omega a^\dagger = -aXa^\dagger \Omega = -Y\Omega, \\ Y^\dagger Y &= aX^\dagger a^\dagger aXa^\dagger = aX^\dagger Xa^\dagger = kaa^\dagger = kI_8, \quad \text{se } X^\dagger X = kI_8.\end{aligned}$$

Questo dimostra che W è trasformato in sé dall'azione aggiunta di $\mathbf{Spin}(6)$. Poiché $\mathbf{Spin}(6)$ è connesso e la sua azione aggiunta sulla Grassmanniana dei sottospazi di dimensione 6 di $\mathbb{R}^{8 \times 8}$ continua, ciascuno dei due sottospazi di dimensione 6 contenuti in W è trasformato in sé da $\mathbf{Spin}(6)$.

Anche in questo caso $\mathbf{Spin}(6)$ si può caratterizzare come il gruppo di trasformazioni lineari che lasciano invariante la forma trilineare

$$S_6^+ \times S_6^- \times V_6 \ni (x, y, v) \longrightarrow \langle y|v|x \rangle = y^\dagger v x \in \mathbb{R}.$$

$n = 7$ Il gruppo $\mathbf{Spin}(7)$ è il rivestimento a due fogli di $\mathbf{SO}(7)$. In questo caso

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbb{R}^7) &\simeq \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix} \mid X, Y \in \mathbb{R}(8) \right\}, \\ \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^7) &\simeq \mathbb{R}(8) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \mid X \in \mathbb{R}(8) \right\}, \\ \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^7) &\simeq \mathbb{R}^{8 \times 8} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y & 0 \end{pmatrix} \mid X, Y \in \mathbb{R}(8) \right\}, \\ V_7 &= \left\{ v = \begin{pmatrix} 0 & t\Omega + v' \\ t\Omega + v' & 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}, v' \in V_6 \right\},\end{aligned}$$

$$S_7^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{16} \mid x \in \mathbb{R}^8 \right\},$$

$$S_7^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{16} \mid y \in \mathbb{R}^8 \right\},$$

e $\mathbf{Spin}(7)$ è il gruppo di trasformazioni lineari che lascia invariante la forma trilineare

$$S_7^+ \times S_7^- \times V_7 \ni (x, y, v) \longrightarrow \langle y|v|x \rangle = y^\dagger v x \in \mathbb{R}.$$

□

8.10. Applicazione ai campi di vettori tangenti alle sfere

Abbiamo osservato che l'esistenza di $(k-1)$ campi di vettori privi di punti critici e due a due ortogonali tra loro sulla sfera S^{n-1} è una conseguenza dell'esistenza di una moltiplicazione ortogonale $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e che ciò corrisponde ad una rappresentazione lineare su \mathbb{R}^n dell'algebra di Clifford $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^k)$. Le moltiplicazioni definite nel Lemma 8.9.4 sono ortogonali. Quindi, tenuto conto della discussione del paragrafo precedente, abbiamo:

TEOREMA 8.10.1. *Se $n = (2k+1) \cdot 2^{c(n)} \cdot 16^{d(n)}$, con $k, c(n), d(n) \in \mathbb{N}$ e $c(n) \leq 3$, allora su S^{n-1} è possibile trovare $(2^{c(n)} + 8 \cdot d(n))$ campi di vettori tangenti ortogonali tra loro e privi di punti critici.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con b_k la minima dimensione n per cui \mathbb{R}^n abbia una struttura di $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^k)$ -modulo irriducibile. Allora $b_{k+8} = 16 \cdot b_k$, perché $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{k+8}) = \mathbb{R}(16) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Basta quindi, utilizzando le rappresentazioni descritte nel paragrafo precedente, verificare l'enunciato per $k = 0, 1, \dots, 7$. □

8.11. Spinori di Dirac, Weyl, Majorana

In fisica, gli *spinori* di dimensione n si costruiscono a partire da una base di matrici Hermitiane $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, il cui ordine d_n sarà precisato in seguito, e che soddisfano la relazione di anti-commutazione

$$(8.61) \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\delta_{i,j}.$$

Le γ_i si dicono *matrici gamma* o *matrici di Dirac* ed i vettori dello spazio complesso su cui operano *spinori di Dirac*.

Le matrici

$$(8.62) \quad \sigma_{i,j} = \frac{1}{4}[\gamma_i, \gamma_j], \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

che a meno del fattore $\frac{1}{4}$ sono i commutatori delle matrici gamma, generano un'algebra di Lie \mathfrak{g} di matrici anti-Hermitiane. L'algebra \mathfrak{g} è isomorfa ad $\mathfrak{so}(n)$ e questo isomorfismo si rialza ad una rappresentazione unitaria di $\mathbf{Spin}(n)$ in $\mathbf{SU}\left(\binom{n}{2}\right)$.

Se le matrici gamma possono essere scelte o tutte reali o tutte puramente immaginarie, allora le $\sigma_{i,j}$ sono reali e lasciano invariante il sottospazio degli spinori reali, che si dicono *di Majorana*.

Quando $n = 2m$ è pari, la *matrice di chiralità* $\hat{\gamma} = i^{\pm m} \gamma_1 \cdots \gamma_{2m}$ è Hermitiana. Infatti abbiamo

$$\hat{\gamma}^* = i^{\mp m} \gamma_{2m} \cdots \gamma_1 = i^{\mp m} (-1)^{m(2m-1)} \gamma_1 \cdots \gamma_{2m} = \hat{\gamma}.$$

Poiché $\hat{\gamma}^2 = I$, la $\hat{\gamma}$ ha autovalori ± 1 . Poiché anticommute con le matrici gamma, gli autospazi degli autovalori ± 1 sono invarianti per l'azione di $\mathbf{Spin}(n)$. Gli spinori di Dirac si decompongono quindi nella somma diretta di due rappresentazioni, che si dicono *spinori di Weyl*.

Se le rappresentazioni sono complessificazioni di rappresentazioni reali, i vettori di queste sono gli *spinori di Majorana-Weyl*.

Quando n è dispari, il prodotto $\hat{\gamma}$ delle matrici gamma è un multiplo dell'identità e la rappresentazione di Dirac è irriducibile.

Costruzione delle matrici gamma.

$n = 2$. Possiamo considerare due scelte distinte delle matrici gamma e quindi dell'operatore di chiralità, che corrispondono agli isomorfismi $\mathbf{Spin}(2) \simeq \mathbf{SO}(2)$ e $\mathbf{Spin}(2) \simeq \mathbf{U}(1)$, rispettivamente.

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma} = i\gamma_1\gamma_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}.$$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$n = 2m + 1$. Date le matrici gamma $\gamma_1, \dots, \gamma_{2m}$ in dimensione pari $2m$, otteniamo le matrici gamma per la dimensione $2m + 1$ aggiungendo come γ_{2m+1} la matrice di chiralità $i^{\pm m} \gamma_1 \cdots \gamma_{2m}$.

$n = 2m \geq 4$. Date le matrici $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{2m-1}$ nella dimensione dispari precedente, possiamo costruire le nuove matrici gamma per la dimensione $2m$ ponendo

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma'_i \\ -i\gamma'_i & \end{pmatrix} \quad \text{per } 1 \leq i < 2m, \quad \gamma_{2m} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

CAPITOLO IX

Ottonioni

9.1. Richiami sulle algebre

Ricordiamo che un'algebra è uno spazio vettoriale \mathbb{A} su un campo \mathbb{k} , su cui è definita un'applicazione bilineare

$$(9.1) \quad \mathbb{A} \times \mathbb{A} \ni (a, b) \longrightarrow a \cdot b \in \mathbb{A}.$$

Diciamo che \mathbb{A} è *unitaria* se contiene un elemento 1 con la proprietà che

$$(9.2) \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \quad \forall a \in \mathbb{A}.$$

Ogni algebra \mathbb{A} è sottoalgebra di un'algebra unitaria $\mathbb{A}' = \mathbb{A} \oplus \mathbb{k}$, in cui il prodotto è definito da

$$(\lambda + a)(\mu + b) = \lambda\mu + \lambda b + \mu a + ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}.$$

NOTAZIONE 9.1.1. Se a_1, \dots, a_k sono elementi di un'algebra reale unitaria \mathbb{A} su \mathbb{k} , indichiamo con $\mathbb{k}[a_1, \dots, a_k]$ la sottoalgebra unitaria di \mathbb{A} generata da a_1, \dots, a_k , cioè la più piccola sottoalgebra unitaria di \mathbb{A} che li contiene.

Algebre di divisione.

DEFINIZIONE 9.1.2. Chiamiamo *di divisione* un'algebra unitaria \mathbb{A} in cui gli endomorfismi lineari di \mathbb{A} definiti dalle moltiplicazioni a destra e a sinistra per elementi diversi da zero siano invertibili.

LEMMA 9.1.3. *Un'algebra unitaria \mathbb{A} di dimensione finita è di divisione se e soltanto se*

$$a, b \in \mathbb{A}, \quad ab = 0, \quad a \neq 0 \implies b = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Le traslazioni a sinistra $L_a : \mathbb{A} \ni x \rightarrow a \cdot x \in \mathbb{A}$ e a destra $R_a : \mathbb{A} \ni x \rightarrow x \cdot a \in \mathbb{A}$ sono morfismi \mathbb{R} -lineari di \mathbb{A} . Se \mathbb{A} ha dimensione finita, L_a ed R_a sono isomorfismi lineari se e soltanto se sono iniettive. La condizione che non vi siano divisori sinistri o destri di zero non banali ci dice che sia L_a che R_a sono iniettive, e quindi isomorfismi, quando $a \neq 0$. \square

OSSERVAZIONE 9.1.4. In un'algebra di divisione ogni elemento non nullo ha inversi destro e sinistro, ma questi possono essere distinti se l'algebra non è né associativa né commutativa. Inoltre, ci sono esempi di algebre unitarie non associative in cui per ogni elemento non nullo a si possono trovare elementi b, c con $ab = 1$, $ca = 1$, ma a è un divisore di 0.

Algebre normate.

DEFINIZIONE 9.1.5. Chiamiamo *normata* un'algebra reale unitaria \mathbb{A} su cui sia definita una norma $\mathbb{A} \ni a \rightarrow \|a\| \in \mathbb{R}$ per cui valgano:

$$\|1\| = 1 \quad \text{e} \quad \|a \cdot b\| \leq \|a\| \|b\|, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

Algebre commutative, associative, alternative. Su un'algebra \mathbb{A} possiamo definire

$$\begin{aligned} [a, b] &= a \cdot b - b \cdot a && \text{(il COMMUTATORE),} \\ [a, b, c] &= (a \cdot b) \cdot c - a \cdot (b \cdot c) && \text{(l'ALTERNATORE).} \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 9.1.6. Un'algebra \mathbb{A} si dice

- *commutativa*, se il commutatore è identicamente nullo;
- *associativa*, se l'alternatore è identicamente nullo;
- *alternativa* se l'alternatore è una 3-forma alternata.

L'alternatività¹ equivale cioè alla validità delle identità

$$(a \cdot a) \cdot b = a \cdot (a \cdot b), \quad (a \cdot b) \cdot a = a \cdot (b \cdot a), \quad a \cdot (b \cdot b) = (a \cdot b) \cdot b, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

LEMMA 9.1.7 (Identità di Moufang²). *In un'algebra alternativa \mathbb{A} valgono, per ogni $a, b, x, y \in \mathbb{A}$, le identità³*

$$(9.3) \quad (xax)y = x(axy),$$

$$(9.4) \quad y(xax) = (yx)ax,$$

$$(9.5) \quad (xy)(ax) = x(ya)x$$

$$(9.6) \quad [y, xa, x] = -[y, x, a]x.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned} (xax)y - x(axy) &= ((xa)x)y - (xa)(xy) + (xa)(xy) - x(axy) = [xa, x, y] + [x, a, xy] \\ &= -[x, xa, y] - [x, xy, a] = -(x(xa))y + x((xa)y) - (x(xy))a + x((xy)a) \\ &= -(x^2a)y - (x^2y)a + x((xa)y + (xy)a) \\ &= -[x^2, a, y] - [x^2, y, a] - x^2(ay + ya) + x((xa)y + (xy)a) \\ &= x(-x(ay) - x(ya) + (xa)y + (xy)a) \\ &= x([x, y, a] + [x, a, y]) = 0. \end{aligned}$$

¹Per le algebre alternative vedi:

E. Artin: *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, New York, 1957,

R.D. Schafer, *On the algebras formed by the Cayley-Dickson process*. Amer. J. Math. **76** (1954), pp. 435-446.

²Ruth Moufang (1905-1977), prima matematica tedesca ad ottenere una cattedra di professore ordinario (nel 1957). Ha dimostrato nel 1933 che nel piano proiettivo di Cayley non vale il teorema di Desargues. (*Alternativkörper und der Satz von vollständigen Vierseit*, Abh. Math. Sem. Hamburg **9** (1933), pp.207-222.) Nel 1935 (*Zur Struktur von Alternativkörpern*, Math. Ann. **110** (1935), pp. 416-430) introdusse e studiò una nozione di *quasi-gruppo (Moufang loops)*, in cui all'associatività sono sostituite le identità di Moufang (9.3), (9.4), (9.5).

³Possiamo scrivere senza ambiguità xax perché $(xa)x = x(ax)$ in quanto \mathbb{A} è alternativa.

Questo dimostra la (9.3). La (9.4) si dimostra in modo del tutto analogo. Utilizzando la (9.3) otteniamo poi

$$\begin{aligned} (xy)(ax) - x(ya)x &= [x, y, ax] + x((y(ax)) - x(ya)x) = -[x, ax, y] - x[y, a, x] \\ &= -(xax)y + x((ax)y - [y, a, x]) = -x(a(xy)) + x((ax)y - [y, a, x]) \\ &= x([a, x, y] - [y, a, x]) = 0. \end{aligned}$$

Questo dimostra (9.5). Per concludere, mostriamo che la (9.4) e la (9.6) sono equivalenti. È infatti

$$[y, xa, x] + [y, x, a]x = (y(xa))x - y((xa)x) + ((yx)a - y(xa))x = (yx)a x - y((xa)x)$$

e nell'ultimo membro dell'uguaglianza possiamo scrivere $(xa)x = xax$ perché abbiamo supposto che \mathbb{A} fosse alternativa. \square

Dati degli elementi a_1, \dots, a_k di un'algebra A , definiamo per ricorrenza i monomi di grado minore o uguale ad m di a_1, \dots, a_k mediante

$$\begin{cases} \mathcal{M}on_0(a_1, \dots, a_k) = \mathbb{k}, \\ \mathcal{M}on_m(a_1, \dots, a_k) = \bigcup_{i=1}^k a_i \cdot \mathcal{M}on_{m-1}(a_1, \dots, a_k) \cup \bigcup_{i=1}^k \mathcal{M}on_{m-1}(a_1, \dots, a_k) \cdot a_i \\ \quad \cup \mathcal{M}on_{m-1}(a_1, \dots, a_k), \text{ se } m > 0, \\ \text{e poniamo } \mathcal{M}on(a_1, \dots, a_k) = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{M}on_m(a_1, \dots, a_k). \end{cases}$$

Osserviamo che, se \mathbb{A} non è associativa, $(a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$ potrebbe non essere un monomio di a, b .

LEMMA 9.1.8. *Siano a_1, \dots, a_k elementi di un'algebra alternativa \mathbb{A} . Allora, per ogni coppia di interi non negativi m_1, m_2 ,*

$$c \in \mathcal{M}on_{m_1}(a_1, \dots, a_k), d \in \mathcal{M}on_{m_2}(a_1, \dots, a_k) \implies c \cdot d \in \langle \mathcal{M}on_{m_1+m_2}(a_1, \dots, a_k) \rangle.$$

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per ricorrenza su $\mu = \inf\{m_1, m_2\}$. Se $\mu \leq 1$, l'affermazione si riduce alla definizione dei monomi di grado minore o uguale ad $m_1 + m_2$. Supponiamo $\mu > 1$ e l'affermazione vera per prodotti di monomi di cui uno almeno abbia grado minore di μ . Supponiamo che $m_1 \leq m_2$. Se $c = a_i \cdot a$, con $a \in \mathcal{M}on_{\mu-1}(a_1, \dots, a_k)$, allora

$$\begin{aligned} c \cdot d &= (a_i \cdot a) \cdot d = a_i \cdot (a \cdot d) + [a_i, a, d] = a_i \cdot (a \cdot d) - [a_i, d, a] \\ &= a_i \cdot (a \cdot d) - (a_i \cdot d) \cdot a + a_i \cdot (d \cdot a) \\ d \cdot c &= d \cdot (a_i \cdot a) = (d \cdot a_i) \cdot a - [d, a_i, a] = (d \cdot a_i) \cdot a + [a_i, d, a] \\ &= (d \cdot a_i) \cdot a + (a_i \cdot d) \cdot a - a_i \cdot (d \cdot a). \end{aligned}$$

Per l'ipotesi di ricorrenza, otteniamo che sia $(c \cdot d)$ che $(d \cdot c)$ sono combinazioni lineari di elementi di $\mathcal{M}on_{m_1+m_2}(a_1, \dots, a_k)$. Infatti $a \cdot d \in \langle \mathcal{M}on_{m_1+m_2-1}(a_1, \dots, a_k) \rangle$ per l'ipotesi induttiva perché $a \in \mathcal{M}on_{\mu-1}(a_1, \dots, a_k)$ e $d \in \mathcal{M}on_{m_2}(a_1, \dots, a_k)$ e quindi $a_i \cdot (a \cdot d) \in \langle \mathcal{M}on_{m_1+m_2}(a_1, \dots, a_k) \rangle$. Si ragiona in modo analogo per gli altri addendi nelle uguaglianze finali.

Supponiamo ora sia $c = a \cdot a_i$. Allora

$$c \cdot d = (a \cdot a_i) \cdot d = a \cdot (a_i \cdot d) + [a, a_i, d] = a \cdot (a_i \cdot d) + [a_i, d, a]$$

$$\begin{aligned}
&= a \cdot (a_i \cdot d) + (a_i \cdot d) \cdot a - a_i \cdot (d \cdot a), \\
d \cdot c &= d \cdot (a \cdot a_i) = (d \cdot a) \cdot a_i - [d, a, a_i] = (d \cdot a) \cdot a_i - [a_i, d, a] \\
&= (d \cdot a) \cdot a_i - (a_i \cdot d) \cdot a + a_i \cdot (d \cdot a),
\end{aligned}$$

e ancora si vede che tutti gli addendi delle ultime uguaglianze appartengono allo spazio vettoriale $\langle \text{Mon}_{m_1+m_2}(a_1, \dots, a_k) \rangle$ generato dai monomi di grado minore o uguale ad m_1+m_2 . \square

TEOREMA 9.1.9 (Artin). *L'algebra \mathbb{A} è alternativa se e soltanto se, per ogni coppia di elementi $a, b \in \mathbb{A}$, la sua sottoalgebra $\mathbb{k}[a, b]$ è associativa.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre senz'altro che \mathbb{A} sia unitaria.

Se $\mathbb{k}[a, b]$ è associativa per ogni $a, b \in \mathbb{A}$, allora l'alternatore si annulla quando due dei suoi argomenti sono uguali ed è perciò una forma alternata. Quindi l'algebra \mathbb{A} è alternativa.

Dimostriamo ora l'implicazione opposta.

Fissiamo due elementi a, b di \mathbb{A} . Per il Lemma 9.1.8, sarà sufficiente dimostrare che l'alternatore si annulla sui monomi di a, b .

Siano $p = p(a, b), q = q(a, b), r = r(a, b) \in \text{Mon}(a, b)$, di gradi, rispettivamente, minori o uguali a d_p, d_q, d_r . Sarà sufficiente dimostrare che l'alternatore $[p, q, r]$ è nullo per ogni scelta di monomi p, q, r , con gradi d_p, d_q, d_r maggiori o uguali ad uno. Ragioniamo per ricorrenza sulla somma $d = d_p + d_q + d_r \geq 3$. Due dei tre monomi p, q, r hanno l'ultimo fattore uguale. Possiamo supporre che questo sia a . Esaminiamo dapprima il caso in cui per uno il fattore sia a sinistra e per l'altro a destra. Poiché l'alternatore è una forma alternata, possiamo supporre che i monomi col fattore uguale siano il primo e l'ultimo. Utilizzando l'ipotesi induttiva (e ponendo uguale ad 1 il monomio di grado 0), possiamo scrivere $p = ap'$ ed $r = r'a$, con p' ed r' monomi in a, b , di gradi $\leq d_p - 1$ e $\leq d_r - 1$ rispettivamente. Allora, utilizzando (9.5) ed evitando di scrivere le parentesi per prodotti di monomi la somma dei cui gradi sia strettamente inferiore a d , otteniamo, per la (9.5),

$$[p, q, r] = [ap', q, r'a] = (ap'q')(r'a) - (ap')(q'r'a) = a(p'q'r'a) - a(p'q'r'a) = 0.$$

Mostriamo che possiamo sempre ricondurci a questo caso. Se fosse $p = a \cdot p'$, $r = a \cdot r'$, allora

$$\begin{aligned}
[ap', q, ar'] &= (ap'q) \cdot (ar') - (ap')(qar') = -[ap'q, a, r'] + (ap'qa)r' - (ap')(qar') \\
&= -[ap'q, a, r'] + [ap', qa, r'].
\end{aligned}$$

Analogamente, se fosse $p = p'a, r = r'a$, allora

$$\begin{aligned}
[p'a, q, r'a] &= (p'aq)(r'a) - (p'a)(qr'a) = [p', aq, r'a] + p'(aqr'a) - (p'a)(qr'a) \\
&= [p', aq, r'a] - [p', a, qr'a].
\end{aligned}$$

Possiamo dunque ricondurci al caso in cui due monomi abbiamo lo stesso ultimo fattore, uno a sinistra, l'altro a destra. Come abbiamo visto in questo caso l'alternatore è nullo. La dimostrazione è completa. \square

★-algebre.

DEFINIZIONE 9.1.10. Un *coniugio* su un'algebra \mathbb{A} su \mathbb{k} è un'involuzione

$$\mathbb{A} \ni a \rightarrow a^* \in \mathbb{A}$$

che gode delle proprietà

$$(9.7) \quad a^{**} = a, \quad (\lambda a + \mu b)^* = \lambda a^* + \mu b^*, \quad (ab)^* = b^* a^*, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}.$$

Chiamiamo *★-algebra* un'algebra \mathbb{A} su cui sia fissato un *coniugio*.

Diciamo che una *★-algebra reale* \mathbb{A} ammette una *norma compatibile* (con il coniugio) se

$$a + a^*, a \cdot a^* \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in \mathbb{A} \quad \text{ed} \quad a \cdot a^* > 0, \quad \text{se} \quad a \neq 0.$$

In questo caso definiamo⁴

$$\operatorname{Re}(a) = \frac{1}{2}(a + a^*), \quad \operatorname{Im}(a) = \frac{1}{2}(a - a^*), \quad \|a\| = \sqrt{a \cdot a^*} \geq 0, \quad \forall a \in \mathbb{A}.$$

OSSERVAZIONE 9.1.11. In una *★-algebra di divisione* con una *norma compatibile* il *reciproco* di un elemento non nullo a è $a^{-1} = a^* / \|a\|^2$.

LEMMA 9.1.12. In una *★-algebra reale alternativa* \mathbb{A} con *norma compatibile* vale l'*uguaglianza*

$$\|a \cdot b\| = \|a\| \|b\|, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

Se, inoltre, \mathbb{A} ha *dimensione finita*, allora \mathbb{A} è un'algebra di divisione.

DIMOSTRAZIONE. Se $a, b \in \mathbb{A}$, allora a, a^*, b, b^* appartengono alla sottoalgebra unitaria di \mathbb{A} generata da $\operatorname{Im}(a)$ ed $\operatorname{Im}(b)$. Per ipotesi $\mathbb{R}[\operatorname{Im}(a), \operatorname{Im}(b)]$ è associativa. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \|a \cdot b\|^2 &= (a \cdot b)(a \cdot b)^* = (a \cdot b) \cdot (b^* \cdot a^*) \\ &= a \cdot (b \cdot b^*) \cdot a^* = a \cdot \|b\|^2 \cdot a^* = (a \cdot a^*) \|b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2. \end{aligned}$$

Questo dimostra che in \mathbb{A} non ci sono divisori destri o sinistri di 0 non banali, e quindi, se \mathbb{A} ha *dimensione finita*, è un'algebra di divisione. \square

Ad una *norma compatibile* sulla *★-algebra* \mathbb{A} è associato il *prodotto scalare*

$$(9.8) \quad (a|b) = \frac{1}{2}(ab^* + ba^*), \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

Se \mathbb{A} è *alternativa*, abbiamo anche

$$(9.9) \quad \|a^*\| = \|a\|, \quad (a|b) = \frac{1}{2}(a^* b + b^* a), \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

⁴Richiamiamo l'attenzione sul fatto che questa notazione differisce dalla convenzione usuale per i numeri complessi di definire *parte immaginaria* il coefficiente *reale* y nella decomposizione $x + iy$ di un numero complesso nella somma di un numero reale x e di un immaginario puro iy .

9.2. La costruzione di Cayley-Dickson

In questo paragrafo consideriamo soltanto algebre *reali*.

La costruzione di Cayley-Dickson⁵ consiste nell'*estendere* una \star -algebra agiungendole un'*unità immaginaria*.

Data una \star -algebra \mathbb{A} , definiamo la sua estensione \mathbb{A}' nel modo seguente.

Sia j un elemento che non appartiene ad \mathbb{A} . Poniamo

$$(9.10) \quad \mathbb{A}' = \{a + jb \mid a, b \in \mathbb{A}\} \simeq \mathbb{A} \oplus \mathbb{A},$$

e definiamo su \mathbb{A}' una struttura di \star -algebra mediante le

$$(9.11) \quad (a + jb)(c + jd) = (ac - db^*) + j(a^*d + cb), \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{A},$$

$$(9.12) \quad (a + jb)^* = a^* - jb, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

LEMMA 9.2.1. *Le (9.11) e (9.12) definiscono una struttura di \star -algebra su \mathbb{A}' , che estende quella di \mathbb{A} .*

DIMOSTRAZIONE. Le prime due relazioni nella (9.7) sono facilmente verificate. Basta verificare che vale la terza, cioè che \star è un'anti-isomorfismo dell'algebra \mathbb{A}' . Siano $a, b, c, d \in \mathbb{A}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} [(a + jb)(c + jd)]^* &= [(ac - db^*) - j(a^*d + cb)]^* = (c^*a^* - b^*d^*) - j(a^*d + cb), \\ (c + jd)^*(a + jb)^* &= (c^* - jd^*)(a^* - jb) = (c^*a^* - b^*d^*) + j(-cb - a^*d). \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione. \square

Osserviamo che la struttura di \star -algebra di \mathbb{A}' si può anche riassumere nella tabella di moltiplicazione e coniugazione:

$$(9.13) \quad a(jb) = j(a^*b), \quad (ja)b = j(ba), \quad (ja)(jb) = -ba^*, \quad j^2 = -1, \quad j^* = -j.$$

L'ultima relazione ci dice che j non è né divisore destro né sinistro di zero, perché

$$\begin{aligned} 0 = (x + jy)j &= jx^* - y^* \implies x^* = 0, \quad y^* = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad y = 0, \\ 0 = j(x + jy) &= jx - y \implies x = 0, \quad y = 0. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 9.2.2. Per dare un'altra interpretazione della costruzione di \mathbb{A}' , introduciamo le traslazioni a sinistra e a destra rispetto agli elementi di \mathbb{A}'

$$L_a : \mathbb{A}' \ni x \rightarrow ax \in \mathbb{A}', \quad R_a : \mathbb{A}' \ni x \rightarrow xa \in \mathbb{A}', \quad \forall a \in \mathbb{A}'.$$

Nel caso in cui \mathbb{A} sia associativa, allora

$$(9.14) \quad L_a \circ L_{jb} = L_{jb} \circ L_{a^*}, \quad R_a \circ R_{jb} = R_{jb} \circ R_{a^*}, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

e le regole che definiscono il prodotto in \mathbb{A}' sono conseguenza delle (9.14).

LEMMA 9.2.3. *Se valgono le (9.14), allora \mathbb{A}' si ottiene da \mathbb{A} per mezzo della costruzione di Cayley-Dickson.*

⁵Leonard E. Dickson, *On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem*, Ann. Math, **20** (1919), pp. 155-171.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $j^2 = -1$ e valgano le (9.14). Allora, per ogni $a, b \in \mathbb{A}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} aj &= L_a \circ L_j(1) = L_j \circ L_{a^*}(1) = ja^*, \\ a(jb) &= L_a \circ L_j(b) = L_j \circ L_{a^*}(b) = j(a^*b), \\ (ja)b &= (a^*j)b = R_b \circ R_j(a^*) = R_j \circ R_{b^*}(a^*) = (a^*b^*)j = j(ba), \\ (ja)(jb) &= (ja)(b^*j) = L_{ja} \circ L_{b^*j} = L_b \circ L_{ja}(j) = b((ja)j) \\ &= b(R_j \circ R_a(j)) = b(R_{a^*} \circ R_j(j)) = -ba^*. \end{aligned}$$

□

Consideriamo su una \star -algebra la proprietà seguente:

$$(P) \quad (a + a^*)b = b(a + a^*), \quad \forall a, b \in \mathbb{A}, \quad aa^* = a^*a, \quad \forall a \in \mathbb{A}.$$

PROPOSIZIONE 9.2.4. *Supponiamo che il campo \mathbb{k} abbia caratteristica zero⁶.*

Siano \mathbb{A} una \star -algebra ed \mathbb{A}' la \star -algebra da essa ottenuta con la costruzione di Cayley-Dickson. Allora:

- (1) *Condizione necessaria e sufficiente affinché \mathbb{A}' sia commutativa è che $x^* = x$ per ogni $x \in \mathbb{A}$.*
- (2) *Condizione necessaria e sufficiente affinché \mathbb{A}' sia associativa è che \mathbb{A} sia associativa e commutativa.*
- (3) *Se \mathbb{A} ha la proprietà (P), allora anche \mathbb{A}' ha la proprietà (P), e viceversa.*
- (4) *Se \mathbb{A} ed \mathbb{A}' hanno la proprietà (P), allora condizione necessaria e sufficiente affinché \mathbb{A}' sia alternativa è che \mathbb{A} sia associativa.*

DIMOSTRAZIONE. (1). Se \mathbb{A}' è commutativa, allora $xj = jx^* = x^*j$ per ogni $x \in \mathbb{A}$ e quindi $x = x^*$ per ogni $x \in \mathbb{A}$.

(2). Supponiamo che \mathbb{A}' sia associativa. Allora, per ogni $a, b \in \mathbb{A}$,

$$j \cdot (ab) = (ja) \cdot b = j \cdot (ba) \Rightarrow ab = ba, \quad \text{perché } j \text{ non è divisore di zero,}$$

e quindi \mathbb{A} è commutativa.

Viceversa, se \mathbb{A} è associativa e commutativa, allora, essendo

$$\begin{aligned} (a_1 + jb_1)[(a_2 + jb_2)(a_3 + jb_3)] &= (a_1 + jb_1)[(a_2a_3 - b_3b_2^*) + j(a_2^*b_3 + a_3b_2)] \\ &= a_1a_2a_3 - a_1b_3b_2^* - a_2^*b_3b_1^* - a_3b_2b_1^* \\ &\quad + j(a_1^*a_2^*b_3 + a_1^*a_3b_2 + a_2a_3b_1 - b_3b_2^*b_1), \\ [(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2)](a_3 + jb_3) &= [a_1a_2 - b_2b_1^* + j(a_1^*b_2 + a_2b_1)](a_3 + jb_3) \\ &= a_1a_2a_3 - b_2b_1^*a_3 - b_3b_2^*a_1 - b_3b_1^*a_2^* \\ &\quad + j(a_2^*a_1^*b_3 - b_1b_2^*b_3 + a_3a_1^*b_2 + a_3a_2b_1), \end{aligned}$$

ne segue che \mathbb{A}' è associativa.

(3). Poiché il coniugio su \mathbb{A}' estende quello su \mathbb{A} , è chiaro che, se vale (P) su \mathbb{A}' , allora vale a maggior ragione su \mathbb{A} .

⁶basterebbe richiedere che la caratteristica sia diversa da 2, 3.

Per verificare l'implicazione opposta, basta osservare che, se vale la proprietà (P) per \mathbb{A} , allora, utilizzando le (9.13), abbiamo, per ogni $a, b \in \mathbb{A}$,

$$\begin{aligned}(a + a^*)(jb) &= j[(a + a^*)b] = (jb)(a + a^*), \\ (a + jb)(a + jb)^* &= (a + jb)(a^* - jb) = a \cdot a^* + b \cdot b^* + j(a^* \cdot b - a^* \cdot b) = a \cdot a^* + b \cdot b^*, \\ (a + jb)^*(a + jb) &= (a^* - jb) \cdot (a^* - jb)^* = a^* \cdot a + b \cdot b^*.\end{aligned}$$

Se $a \cdot a^* = a^* \cdot a$, i prodotti nelle ultime due righe sono uguali. Questo completa la dimostrazione della (3).

(4). Supponiamo che \mathbb{A}' sia alternativa. Allora

$$\begin{aligned}0 &= [a, b + jc, b + jc] = (a \cdot b + j(a^* \cdot c)) \cdot (b + jc) - a \cdot (b^2 - c \cdot c^* + j((b^* + b) \cdot c)) \\ &= ((a \cdot b) \cdot b - c \cdot (c^* \cdot a) - a \cdot b^2 + a(c \cdot c^*)) \\ &\quad + j((a \cdot b)^* \cdot c + b \cdot (a^* \cdot c) - (a^* \cdot ((b + b^*) \cdot c))) \\ &= ([a, b, b] + [c, c^*, a]) \\ &\quad + j((b^* \cdot a^*) \cdot c + b \cdot (a^* \cdot c) + [a^*, b + b^*, c] - ((b + b^*) \cdot a^*) \cdot c)\end{aligned}$$

perché $a \cdot (c \cdot c^*) = (c \cdot c^*) \cdot a$ ed $a^* \cdot (b + b^*) = (b + b^*) \cdot a^*$ per la proprietà (P)

$$= [c, c^*, a] + j([a^*, b + b^*, c] - [b, a^*, c]) = [c, c^*, a] + j[a^*, 2b + b^*, c]$$

ove abbiamo utilizzato il fatto che \mathbb{A} , essendo una sottoalgebra di \mathbb{A} , è alternativa,

$$\Rightarrow [a^*, 2b + b^*, c] = 0, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{A}.$$

Se siamo su un campo \mathbb{k} di caratteristica diversa da tre, l'equazione

$$2b + b^* = x \text{ ha soluzione } b = \frac{1}{3}(2x - x^*).$$

Vale quindi $[a, b, c] = 0$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{A}$ e quindi \mathbb{A} è associativa.

Mostriamo che, viceversa, se \mathbb{A} è associativa e vale la proprietà (P), allora \mathbb{A}' è alternativa. Dobbiamo verificare che l'alternatore si annulla quando due dei suoi argomenti sono uguali. Possiamo limitarci a considerare elementi in $\mathbb{A} \cup (j \cdot \mathbb{A})$. Abbiamo

$$\begin{aligned}[a, a, jb] &= a^2 \cdot jb - a \cdot (a \cdot jb) = j \cdot (a^{*2} \cdot b - a^* \cdot (a^* \cdot b)), \\ [a, jb, a] &= (a \cdot jb) \cdot a - a \cdot (jb \cdot a) = j(a \cdot (a^* \cdot b - a^* \cdot (a \cdot b))) \\ [jb, a, a] &= [j(a \cdot b)] \cdot a - (jb) \cdot a^2 = j(a \cdot (a \cdot b) - a^2 \cdot b), \\ [a, jb, jb] &= (j(a^* \cdot b)) \cdot jb + a \cdot (b \cdot b^*) = -b(b^* \cdot a) + a \cdot (b \cdot b^*), \\ [jb, a, jb] &= (j(ab)) \cdot (jb) - (jb) \cdot (j(a^*b)) = -b \cdot (b^*a) - (a^*b) \cdot b^*, \\ [jb, jb, a] &= -(b \cdot b^*) \cdot a - (jb) \cdot (j(ab)) = -(b \cdot b^*)a + (ab) \cdot b^*, \\ [ja, jb, jc] &= j((c \cdot b^*) \cdot a - (a \cdot b^*) \cdot c).\end{aligned}$$

Il primo ed il terzo si annullano per l'associatività; per il secondo, quarto, quinto e sesto dobbiamo utilizzare anche la proprietà (P); infine, per l'associatività

$$(9.15) \quad [ja, jb, jc] = j(c \cdot b^* \cdot a - a \cdot b^* \cdot c),$$

che si annulla senz'altro per $a = c$, mentre per $a = b$ o $b = c$ dobbiamo utilizzare la proprietà (P). \square

I numeri reali \mathbb{R} costituiscono una \star -algebra di divisione normata *reale*, in cui cioè $a^* = a$ per ogni elemento a . Osserviamo che, per le \star -algebre \mathbb{A} che si costruiscono successivamente a partire da \mathbb{R} ed iterando la costruzione di Cayley-Dickson, xx^* è un numero reale ed è il quadrato della norma, associata al prodotto scalare reale $(x|y) = \frac{1}{2}(xy^* + yx^*)$, e la proprietà (P) è equivalente al fatto che

$$x + x^* \in \mathbb{R}, \quad xx^* = \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{A}.$$

Al primo passo, otteniamo il campo \mathbb{C} dei numeri complessi: come \star -algebra di divisione normata è commutativa e associativa, ma non reale. Il passo successivo dà $\mathbb{C}' = \mathbb{H}$, il corpo non commutativo dei quaternioni. Abbiamo ottenuto una \star -algebra di divisione normata associativa, ma non commutativa. A partire dai quaternioni, otteniamo $\mathbb{C}' = \mathbb{O}$, l'algebra di divisione degli ottonioni (o ottave di Cayley), che è una \star -algebra normata che non è né associativa, né commutativa, ma alternata.

OSSERVAZIONE 9.2.5. Iterando il processo di Cayley-Dickson otteniamo una sequenza di \star -algebre normate, di dimensioni 16, 32, 64, . . . , che non sono né reali, né commutative, né alternative e non sono più algebre di divisione, sebbene ogni elemento non nullo abbia un inverso moltiplicativo. L'algebra di dimensione 16, dei *sedenioni* (e quindi a maggior ragione anche le successive) ha degli elementi che sono divisori di zero⁷. Quelli di norma uno formano un sottospazio omeomorfo al gruppo speciale compatto \mathbf{G}_2 .

9.3. Un teorema di Hurwitz

La classificazione delle algebre di divisione reali normate è dovuta ad Hurwitz⁸. Le algebre di divisione reali normate coincidono con quelle *alternate*.

Ci sono esempi di algebre di divisione reali che non sono né normate, né alternative. Nei lavori di Kervaire, Bott, e Milnor citati nella nota si dimostra comunque che tutte le algebre di divisione reali hanno dimensioni 1, 2, 4, 8.

Diamo qui una dimostrazione del teorema di classificazione per algebre reali alternate, che utilizza le algebre di Clifford ed alcune considerazioni elementari di algebra lineare.

⁷G. Moreno, *The zero divisors of the Cayley-Dickson algebras over the real numbers*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 4 (1998), pp.13-28.

⁸Adlof Hurwitz *Über die Composition der quadratischen formen von beliebig vielen Variablen*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1898), 309-316, per il caso delle algebre *normate*.

Michel Kervaire, *Non-parallelizability of the n sphere for $n > 7$* , Proc. Nat. Acad. Sci. USA **44** (1958), pp. 280-283 e

Raoul Bott, John Milnor, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), pp. 87-89,

hanno dimostrato indipendentemente il teorema generale, utilizzando tecniche di topologia algebrica.

Se \mathbb{A} è un'algebra reale, possiamo associare ad ogni $a \in \mathbb{A}$ le applicazioni lineari

$$L_a : \mathbb{A} \ni x \longrightarrow ax \in \mathbb{A}, \quad R_a : \mathbb{A} \ni x \longrightarrow xa \in \mathbb{A}.$$

Otteniamo in questo modo due applicazioni lineari

$$L : \mathbb{A} \ni a \longrightarrow L_a \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{R}}(\mathbb{A}), \quad R : \mathbb{A} \ni a \longrightarrow R_a \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{R}}(\mathbb{A}).$$

LEMMA 9.3.1. *Sia \mathbb{A} un'algebra di divisione reale, di dimensione finita n . Per ogni elemento a che non sia multiplo dell'identità sono univocamente determinati due numeri reali λ_0, λ_1 ed un elemento j_a di \mathbb{A} tali che*

$$(9.16) \quad a = \lambda_0 1 + \lambda_1 j_a, \quad j_a^2 = -1, \quad \text{ove} \quad \lambda_0 = \frac{1}{n} \text{traccia}(L_a).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia a un elemento di \mathbb{A} . Se L_a ha un autovalore reale λ_0 , allora c'è in \mathbb{A} un elemento $x \neq 0$ per cui $ax = \lambda_0 x$. Da $(a - \lambda_0)x = 0$ segue che $a = \lambda_0$, perché abbiamo supposto che \mathbb{A} fosse di divisione. Quindi, se a non è un numero reale, l'endomorfismo L_a ha solo autovalori non reali. Sia $\lambda_0 + i\lambda_1$, con $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq 0$, un autovalore di L_a . Allora $-\lambda_1^2$ è un autovalore di $L_{a-\lambda_0}^2$. Possiamo quindi trovare un $x \neq 0$ in \mathbb{A} per cui

$$(a - \lambda_0)[(a - \lambda_0)x] = -\lambda_1^2 x \implies \left[\left(\frac{a - \lambda_0}{\lambda_1} \right) + \left(\frac{a - \lambda_0}{\lambda_1} \right)^{-1} \right] x = 0.$$

Poiché abbiamo supposto che \mathbb{A} sia di divisione,

$$j_a = \left(\frac{a - \lambda_0}{\lambda_1} \right) \text{ soddisfa } j_a + j_a^{-1} = 0 \text{ e quindi } j_a^2 = -1.$$

È dunque $a = \lambda_0 + \lambda_1 j_a$. Osserviamo che L_{j_a} ha autovalori $\pm i$ ed è un endomorfismo reale. Ha quindi traccia nulla. La traccia di L_a è allora uguale a $n\lambda_0$, ove n è la dimensione di \mathbb{A} come spazio vettoriale reale. La dimostrazione è completa. \square

COROLLARIO 9.3.2. *Sia \mathbb{A} un'algebra di divisione reale di dimensione n . Allora*

$$(9.17) \quad V = \text{Im}(\mathbb{A}) = \{a \in \mathbb{A} \mid \text{traccia}(L_a) = 0\}.$$

è un'ipersuperficie in \mathbb{A} , trasversale ad \mathbb{R} e

$$(9.18) \quad (\lambda + v \mid \mu + w) = \lambda\mu - \frac{1}{2n} \text{traccia}(L_{(vw+wv)}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V$$

è un prodotto scalare su \mathbb{A} , con la proprietà che

$$(9.19) \quad L_v^2 = -\|v\|^2 \mathbf{I}_{\mathbb{A}}, \quad \forall v \in V.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 9.3.1, il quadrato di un elemento di V è un numero reale negativo. Quindi la forma bilineare simmetrica (9.18) è un prodotto scalare su \mathbb{A} . Anche la (9.19) segue subito dal Lemma, perché $v^2 = -\|v\|^2$ per ogni $v \in V$. \square

LEMMA 9.3.3. *Sia \mathbb{A} un'algebra di divisione reale alternata e V il sottospazio dei suoi elementi immaginari, definito dalla (9.17). Allora l'applicazione*

$$(9.20) \quad \star : \mathbb{A} = \mathbb{R} \oplus V \ni (\lambda + v) \longrightarrow \lambda - v \in \mathbb{A}$$

è un'anti-involuzione dell'algebra \mathbb{A} .

DIMOSTRAZIONE. Per la (9.19), la $V \ni v \rightarrow L_v \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$ si estende ad una rappresentazione su \mathbb{A} dell'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell(V)$ (il prodotto scalare è la restrizione a V del prodotto scalare (9.18)).

In particolare, se $e_1, e_2 \in V$ sono ortogonali tra loro, con $e_1^2 = -1, e_2^2 = -1$, da $L_{e_1} \circ L_{e_2} + L_{e_2} \circ L_{e_1} = 0$ ricaviamo che $e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0$. Infatti $e_1 e_2 + e_2 e_1$ è il valore in 1 dell'endomorfismo $(L_{e_1} \circ L_{e_2} + L_{e_2} \circ L_{e_1})$ di \mathbb{A} . Dico che $e_1 e_2 \in V$. Infatti, poiché $\mathbb{R}[e_1, e_2]$ è associativa per il Teorema di Artin, $(e_1 e_2)^{-1} = e_2 e_1 = -e_1 e_2$ ci dice che $(e_1 e_2)^2 = -1$ e quindi che $L_{e_1 e_2}$ non ha autovalori reali.

Per dimostrare che $(xy)^* = y^* x^*$ per ogni $x, y \in \mathbb{A}$, è sufficiente considerare il caso in cui x e y siano due elementi linearmente indipendenti di V . Fissiamo allora una base ortonormale e_1, e_2 del sottospazio generato da x, y con $x = \lambda_1 e_1$ ed $y = \lambda_2 e_1 + \lambda_3 e_2$, con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Abbiamo

$$xy = \lambda_1 e_1 (\lambda_2 e_1 + \lambda_3 e_2) = -\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 (e_1 e_2).$$

Poiché abbiamo verificato che $e_1 e_2 \in V$ ed $e_2 e_1 = -e_1 e_2$, troviamo che

$$(xy)^* = -\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 (e_1 e_2) = -\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 (e_2 e_1) = y^* x^*.$$

La dimostrazione è completa. \square

Vale il

TEOREMA 9.3.4 (Hurwitz, Kervaire, Bott, Milnor). *Esistono, a meno di isomorfismi, esattamente quattro algebre reali di divisione alternate, di dimensioni 1, 2, 4, 8 rispettivamente.*

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathbb{A} un'algebra di divisione alternata.

Poiché per la (9.19) la $V \ni v \rightarrow L_v \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$ si estende ad una rappresentazione su \mathbb{A} dell'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell(V)$, la dimensione n dev'essere tale che $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{n-1})$ abbia una rappresentazione non banale di dimensione n . Considerando la prima tabella in §8.9, si vede che questo è possibile solo se $n = 1, 2, 4, 8$.

Resta da verificare l'unicità. A questo fine mostreremo che le algebre di divisione normate formano una catena in cui ciascuna si ottiene dalla precedente mediante la costruzione di Cayley-Dickson.

Sia \mathbb{A} sia un'algebra di divisione e \mathbb{B} una sua sottoalgebra unitaria. La \mathbb{B} è anch'essa di divisione. Infatti, se x è un elemento non nullo di \mathbb{B} , è $L_{x^{-1}} = (L_x)^{-1}$. Infatti,

$$y = (L_x)^{-1}(z) \Leftrightarrow z = L_x(y) = xy \Leftrightarrow y = x^{-1}z = L_{x^{-1}}(z).$$

Quindi $L_{x^{-1}} \in \mathbb{R}[L_x]$. Se $f(\lambda)$ è un polinomio tale che $f(L_x) = L_{x^{-1}}$, abbiamo

$$x^{-1} = L_{x^{-1}}(1) = f(L_x)(1) = f(x),$$

e perciò $x^{-1} \in \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{B}$.

Se $\mathbb{B} \neq \mathbb{A}$, allora gli elementi dell'ortogonale \mathbb{B}^\perp di \mathbb{B} in \mathbb{A} sono immaginari e possiamo fissare $j \in \mathbb{B}^\perp$ con $j^2 = -1$. Poiché $L : V \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$ si estende ad un omomorfismo di $\mathcal{C}\ell(V)$ in $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$, abbiamo $L_j \circ L_w + L_w \circ L_j = 0$ se $w \in \text{Im}(\mathbb{B}) = \mathbb{B} \cap \text{Im}(\mathbb{A})$ e quindi, più in generale, che $L_j \circ L_x = L_{x^*} \circ L_j$ per ogni $x \in \mathbb{B}$. Applicando questi endomorfismi ad 1 otteniamo la formula di commutazione

$$jx = x^*j, \quad \forall x \in \mathbb{B}.$$

Questo ci permette di calcolare il prodotto in $\mathbb{B}[j]$ a partire dal prodotto in \mathbb{B} . Infatti, se $x, y \in \mathbb{B}$, otteniamo le formule:

$$\begin{aligned} x(jy) &= L_x \circ L_j(y) = L_j \circ L_{x^*}(y) = j(x^*y), \\ (jx)y &= (x^*j)y = R_y \circ R_j(x^*) = R_j \circ R_{y^*}(x^*) = (x^*y^*)j = j(yx), \\ (jx)(jy) &= (jx)(y^*j) = L_{jx} \circ L_{y^*}(j) = L_y \circ L_{jx}(j) \\ &= y((jx)j) = y((x^*j)j) = y(R_j^2(x^*)) = -yx^*. \end{aligned}$$

Nel derivare la seconda formula abbiamo utilizzato il fatto che anche la traslazione a destra definisce un'applicazione lineare $V \ni v \rightarrow R_v \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$ che verifica la condizione $R_v^2 = -\|v\|^2 I_{\mathbb{A}}$ e si estende quindi ad un omomorfismo $\mathcal{L}(V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$.

Nel derivare la terza, abbiamo utilizzato il fatto che, se $x \in \mathbb{B}$, allora jx è ortogonale a \mathbb{B} e verifica quindi $(jx)y = y^*(jx)$ per ogni y di \mathbb{B} .

Da queste otteniamo

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - db^*) + j(a^*d + cb), \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{B},$$

formula che dimostra che $\mathbb{B}[j]$ si ottiene a partire da \mathbb{B} per mezzo della costruzione di Cayley-Dickson.

Poiché la sola algebra di divisione reale di dimensione uno è \mathbb{R} , l'esistenza e unicità è conseguenza della costruzione di Cayley-Dickson. \square

9.4. Gli ottonioni

Abbiamo esaminato in precedenza la struttura del corpo non commutativo dei quaternioni. In questo paragrafo discutiamo quella dell'algebra di divisione reale di dimensione otto, alternativa ma non associativa, che abbiamo costruito in precedenza con il metodo di Cayley-Dickson.

DEFINIZIONE 9.4.1. L'algebra di divisione normata di dimensione otto si indica con \mathbb{O} e si dice *degli ottonioni, od ottave di Cayley*.

La costruzione di Cayley-Dickson ci dà:

- LEMMA 9.4.2.**
- (1) Se e_1 è un qualsiasi ottonione immaginario, la sottoalgebra unitaria $\mathbb{R}[e_1]$ di \mathbb{O} è isomorfa a \mathbb{C} .
 - (2) Fissati due ottonioni immaginari e_1, e_2 ortogonali tra loro la sottoalgebra $\mathbb{R}[e_1, e_2]$ è isomorfa ad \mathbb{H} .
 - (3) Possiamo trovare tre ottonioni immaginari e_1, e_2, e_3 , ortogonali tra loro, tali che $e_2 \notin \mathbb{R}[e_1] \simeq \mathbb{C}$, $e_3 \notin \mathbb{R}[e_1, e_2] \simeq \mathbb{H}$, $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3] = \mathbb{O}$.
 - (4) Per ogni tripletta e_1, e_2, e_3 di ottonioni immaginari ortogonali tra loro, tali che $e_2 \notin \mathbb{R}[e_1] \simeq \mathbb{C}$, $e_3 \notin \mathbb{R}[e_1, e_2] \simeq \mathbb{H}$, risulta $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3] = \mathbb{O}$. \square

DEFINIZIONE 9.4.3. Una tripletta e_1, e_2, e_3 di ottonioni immaginari, con

$$(9.21) \quad e_i^2 = -1, \quad i = 1, 2, 3, \quad e_i e_j + e_j e_i = 0, \quad \forall 1 \leq i < j \leq 3, \quad e_3 \notin \mathbb{R}[e_1, e_2]$$

si dice *generatrice*.

Il Lemma 9.4.2 ci dice che *esistono triplette generatrici*. Si può completare la tripletta generatrice aggiungendo le quattro radici di -1 :

$$(9.22) \quad e_4 = e_1e_2, \quad e_5 = e_2e_3, \quad e_6 = e_3e_4, \quad e_7 = e_4e_5.$$

Per calcolare la tabella di moltiplicazione di queste unità immaginarie possiamo pensare che \mathbb{O} è stata ottenuta da $\mathbb{H} = \mathbb{R}[e_1, e_2] = \langle 1, e_1, e_2, e_4 \rangle$ con il procedimento di Cayley-Dickson per la scelta $j = e_3$. Dobbiamo quindi esprimere e_5, e_6, e_7 come prodotto di e_3 per un quaternioni. Ricordiamo che, se $q \in \mathbb{H} = \mathbb{R}[e_1, e_2]$, allora $qe_3 = e_3q^*$. Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} e_5 &= e_2e_3 = -e_3e_2, & e_6 &= e_3e_4, \\ e_7 &= e_4e_5 = -e_4(e_3e_2) = e_3(e_4e_2) = -e_3e_1. \end{aligned}$$

Possiamo quindi ricavare la tabella di moltiplicazione delle unità immaginarie e_1, \dots, e_7 dalle

$$\begin{cases} e_1e_2 = -e_2e_1 = e_4, \\ e_2e_4 = -e_4e_2 = e_1, \\ e_4e_1 = -e_1e_4 = e_2, \end{cases} \quad \begin{cases} e_5 = -e_3e_2 = -e_2e_3, \\ e_6 = e_3e_4 = -e_4e_3, \\ e_7 = -e_3e_1 = e_1e_3. \end{cases}$$

La seguente tabella riporta alla i -esima riga e j -esima colonna il prodotto dell'elemento che sta nella i -esima riga per quello che sta nella j -esima colonna.

1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Ciascun prodotto si può calcolare a partire dalle identità stabilite sopra. Ad esempio,

$$e_5e_4 = (-e_3e_2)e_4 = (j(-e_2))e_4 = j[(e_4)(-e_2)] = je_1 = e_3e_1 = -e_7.$$

OSSERVAZIONE 9.4.4. L'insieme $\{\pm 1\} \cup \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq 7\}$, con la restrizione del prodotto in \mathbb{O} , costituisce un esempio di *Moufang loop* finito, di ordine 16.

9.5. G_2

Élie Cartan⁹ osservò, nel 1914, che il più piccolo dei gruppi semplici eccezionali scoperti da Killing¹⁰ si può identificare col gruppo degli automorfismi di \mathbb{O} . Utilizziamo questo risultato di Cartan come una definizione.

⁹Les groupes réels simples et continus, Ann. Sci. École Norm. Sup. **31** (1914), pp. 255-262.

¹⁰Wilhelm Killing, Die Zusammensetzung der stetigen/endllichen Transformationsgruppen, Mathematische Annalen, vol. **31**, 2, (1888) pp. 252-290, vol. **33**, 1 (1888), pp.1-48 vol. **34**, 1, (1889), pp. 57-122, vol. **36**, 2 (1890), pp. 161-189.

DEFINIZIONE 9.5.1. Indichiamo con \mathbf{G}_2 il gruppo degli automorfismi di \mathbb{O} :

$$(9.23) \quad \mathbf{G}_2 = \{\phi \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}) \mid \phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \forall a, b \in \mathbb{O}\}.$$

PROPOSIZIONE 9.5.2. \mathbf{G}_2 è un gruppo di Lie compatto, connesso e semplicemente connesso, di dimensione 14. La sua algebra di Lie

$$(9.24) \quad \mathfrak{g}_2 = \text{der}(\mathbb{O}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}) \mid X(ab) = (X(a))b + a(X(b)), \forall a, b \in \mathbb{O}\}$$

è l'algebra delle derivazioni di \mathbb{O} .

DIMOSTRAZIONE. \mathbf{G}_2 è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$ e quindi un gruppo di Lie. La sua algebra di Lie è quella delle derivazioni¹¹ di \mathbb{O} .

Gli elementi di \mathbf{G}_2 operano in modo semplicemente transitivo sulle triplette generatrici. Fissata come punto base una tripletta generatrice (e_1, e_2, e_3) , possiamo identificare un elemento $\phi \in \mathbf{G}_2$ con la tripletta generatrice $(\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3))$. La $\mathbf{G}_2 \ni \phi \rightarrow \phi(e_1)$ è una fibrazione di \mathbf{G}_2 sulla sfera unitaria S^6 dello spazio \mathbb{R}^7 degli ottonioni immaginari. Sia $F_1 = \{\phi \in \mathbf{G}_2 \mid \phi(e_1) = e_1\}$ la fibra su e_1 . Abbiamo allora una fibrazione $F_1 \ni \phi \rightarrow \phi(e_2) \in S^5$ di F_1 sulla sfera unitaria S^5 dello spazio \mathbb{R}^6 degli ottonioni immaginari perpendicolari ad e_1 .

La fibra $F_2 = \{\phi \in F_1 \mid \phi(e_2) = e_2\}$ è diffeomorfa alla sfera S^3 nello spazio \mathbb{R}^4 degli ottonioni immaginari ortogonali ad $\mathbb{H} = \mathbb{R}[e_1, e_2]$. Questo mostra che \mathbf{G}_2 è connesso, semplicemente connesso, compatto, di dimensione $6 + 5 + 3 = 14$. La semplice connessione segue dalle successioni esatte di Serre:

$$0 = \pi_2(S^5) \longrightarrow \pi_1(F_2) \longrightarrow \pi_1(F_1) \longrightarrow \pi_1(S^5) = 0,$$

$$0 = \pi_2(S^6) \longrightarrow \pi_1(F_1) \longrightarrow \pi_1(\mathbf{G}_2) \longrightarrow \pi_1(S^6) = 0,$$

perché $\pi_1(F_2) = \pi_1(S^3) = 0$. □

9.5.1. Trialità. Siano dati tre spazi vettoriali reali V_1, V_2, V_3 di dimensione finita ed un'applicazione trilineare

$$(9.25) \quad t : V_1 \times V_2 \times V_3 \ni (v_1, v_2, v_3) \longrightarrow t(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}.$$

Per ogni permutazione $(i, j, k) \in \mathbf{S}_3$ consideriamo l'applicazione bilineare

$$m_{i,j} : V_i \times V_j \ni (v_i, v_j) \longrightarrow m_{i,j}(v_i, v_j) = \{V_k \ni v_k \rightarrow t(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}\} \in V_k^*.$$

DEFINIZIONE 9.5.3. Diciamo che la (9.25) è una *trialità* se, per ogni coppia (i, j) con $1 \leq i < j \leq 3$ ed ogni scelta di $v_i \in V_i \setminus \{0\}$, $v_j \in V_j \setminus \{0\}$, il funzionale lineare $m_{i,j}(v_i, v_j)$ è diverso da zero.

Consideriamo il prodotto $m = m_{1,2}$. Per ogni $v_1 \neq 0$ fissato, l'applicazione

$$V_2 \ni v_2 \longrightarrow m(v_1, v_2) \in V_3^*$$

è un isomorfismo lineare. Analogamente, per ogni $v_2 \neq 0$ fissato, la

$$V_1 \ni v_1 \longrightarrow m(v_1, v_2) \in V_3^*$$

¹¹L'algebra di Lie del gruppo degli automorfismi di un'algebra reale è quella delle sue derivazioni.

è un isomorfismo lineare. Quindi, se fissiamo due elementi non nulli $\epsilon_1 \in V_1$ ed $\epsilon_2 \in V_2$, otteniamo delle identificazioni di V_1 e V_2 con il duale $V = V_3^*$ di V_3 . In particolare, se i tre spazi hanno dimensione finita, alla trialità ed alla scelta di ϵ_1, ϵ_2 risulta associato un prodotto

$$(9.26) \quad m : V \times V \ni (v, w) \longrightarrow v \times w \in V.$$

Osserviamo che ϵ_1, ϵ_2 ed $\epsilon_1 \times \epsilon_2$ definiscono lo stesso elemento e di V . Poiché la moltiplicazione a destra e a sinistra per un elemento di V è un'applicazione invertibile, la V , con la moltiplicazione (9.26), è un'algebra di divisione. Viceversa, il prodotto in un'algebra di divisione definisce una trialità.

L'applicazione

$$(9.27) \quad V_8 \times S_8^+ \ni (v, s) \longrightarrow v \times s \in S_8^-$$

definisce una trialità, il cui gruppo degli automorfismi è $\mathbf{Spin}(8)$. Per ottenere il gruppo \mathbf{G}_2 , dobbiamo fissare in ciascuno degli spazi V_8 ed S_8^+ un vettore unitario. Il sottogruppo di $\mathbf{Spin}(8)$ che fissa un vettore unitario di V_8 è $\mathbf{Spin}(7)$. Quando restringiamo la rappresentazione S_8^+ a $\mathbf{Spin}(7)$, otteniamo una rappresentazione $S_7 \simeq \mathbb{R}^8$. Quindi \mathbf{G}_2 è il sottogruppo di $\mathbf{Spin}(7)$ che fissa un vettore unitario della sfera unitaria S^7 di S_7 . Poiché $\mathbf{Spin}(7)$ opera transitivamente su $S^7 \subset S_7$, otteniamo che

$$(9.28) \quad S^7 \simeq \mathbf{Spin}(7)/\mathbf{G}_2.$$

Quindi: $\mathbf{Spin}(7)$ è il sottogruppo di $\mathbf{Spin}(8)$ che fissa 1 nella rappresentazione vettoriale \mathbb{O} e \mathbf{G}_2 è il sottogruppo che fissa 1 nella rappresentazione spinoriale S_8^+ (e quindi anche in S_8^-).

In particolare abbiamo la successione esatta di Serre

$$\cdots \longrightarrow \pi_{h+1}(S^7) \longrightarrow \pi_h(\mathbf{G}_2) \longrightarrow \pi_h(\mathbf{Spin}(7)) \longrightarrow \cdots$$

In particolare, poiché

$$\pi_h(\mathbf{Spin}(7)) = \begin{cases} 0 & \text{per } h = 0, 1, 2, 4, \\ \mathbb{Z} & \text{per } h = 3, \end{cases}$$

e $\pi_h(S^7) = 0$ se $h < 7$, otteniamo

$$\text{PROPOSIZIONE 9.5.4. } \pi_h(\mathbf{G}_2) = 0 \text{ se } h = 0, 1, 2, 4 \text{ e } \pi_3(\mathbf{G}_2) = \mathbb{Z}. \quad \square$$

La rappresentazione vettoriale \mathbb{O} di $\mathbf{Spin}(8)$ definisce un monomorfismo di gruppi di Lie

$$\mathbf{G}_2 \hookrightarrow \mathbf{Spin}(8)$$

e quindi, a livello di algebre di Lie, un monomorfismo

$$\mathfrak{g}_2 \hookrightarrow \mathfrak{so}(8).$$

La dimensione del gruppo ortogonale, e quindi dell'algebra $\mathfrak{so}(8)$, è 28, doppia di quella di \mathfrak{g}_2 .

Caratterizziamo un complemento vettoriale di \mathfrak{g}_2 in $\mathfrak{so}(8)$. Ricordiamo che il prodotto scalare su \mathbb{O} è definito da

$$(x|y) = \Re e(x^*y), \quad \forall x, y \in \mathbb{O}.$$

LEMMA 9.5.5. Per ogni $a \in \text{Im}(\mathbb{O})$, gli endomorfismi L_a ed R_a appartengono all'algebra di Lie del gruppo ortogonale di \mathbb{O} . Vale la decomposizione in somma diretta:

$$(9.29) \quad \mathfrak{so}(\mathbb{O}) = \mathfrak{g}_2 \oplus L_{\text{Im}(\mathbb{O})} \oplus R_{\text{Im}(\mathbb{O})}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $x \in \mathbb{O}$, il coniugato x^* appartiene alla sottoalgebra $\mathbb{R}[x] = \mathbb{R}[\text{Im}(x)]$. Quindi, poiché \mathbb{O} è alternativa, se $a, x \in \mathbb{O}$, allora la sottoalgebra generata da a ed x contiene anche a^* ed x^* ed è associativa per il teorema di Artin. Abbiamo allora, se $x \in \mathbb{O}$ ed $a \in \text{Im}(\mathbb{O})$,

$$2(x|ax) = x^*(ax) + (ax)^*x = x^*ax + x^*a^*x = x^*ax - x^*ax = 0, \quad (a^* = -a),$$

$$2(x|xa) = x^*(xa) + (xa)^*x = x^*xa + a^*x^*x = (x^*x)a - a(x^*x) = 0, \quad (x^*x \in \mathbb{R}).$$

Questo dimostra che $L_a, R_a \in \mathfrak{so}(\mathbb{O})$. Abbiamo poi $L_{\text{Im}(\mathbb{O})} \cap R_{\text{Im}(\mathbb{O})} = \{0\}$, perché, se $L_a = R_b$, allora $a = L_a(1) = R_b(1) = b$ ed $L_a = R_a$ significa che a sta nel centro di \mathbb{O} e quindi è uno scalare.

Infine, se $L_a + R_b$ è una derivazione, deve essere $b = -a$ perché le derivazioni si annullano sul centro \mathbb{R} di \mathbb{O} . Se $L_a - R_a$ fosse una derivazione di \mathbb{O} , avremmo

$$\begin{aligned} 0 &= (L_a - R_a)(xy) - ((L_a - R_a)x)y - x((L_a - R_a)y) \\ &= a(xy) - (xy)a - (ax)y + (xa)y - x(ay) + x(ya) \\ &= -[a, x, y] - [x, y, a] + [x, a, y] = -3[a, x, y], \quad \forall x, y \in \mathbb{O}. \end{aligned}$$

Dimostriamo che a non può essere un immaginario non nullo. Infatti, se lo fosse, potremmo, a meno di sostituirlo con un suo multiplo reale, supporre che a sia il primo elemento e_1 di una terna generatrice e_1, e_2, e_3 . Ma

$$[e_1, e_2, e_3] = e_4e_3 - e_1(e_2e_3) = -e_3e_4 + e_1(e_3e_2) = -e_3(e_4 + e_1e_2) = -2e_3e_4 \neq 0$$

ci darebbe allora una contraddizione. Quindi

$$\mathfrak{g}_2 \cap (L_{\text{Im}(\mathbb{O})} \oplus R_{\text{Im}(\mathbb{O})}) = \{0\}.$$

La dimostrazione è completa. \square

Poniamo

$$\text{ad}_{\text{Im}(\mathbb{O})} = \{(L_a - R_a) = \text{ad}_a \mid a \in \text{Im}(\mathbb{O})\}.$$

PROPOSIZIONE 9.5.6. Abbiamo le inclusioni di algebre di Lie

$$(9.30) \quad \mathfrak{g}_2 \hookrightarrow \mathfrak{so}(\text{Im}(\mathbb{O})) = \mathfrak{g}_2 \oplus \text{ad}_{\text{Im}(\mathbb{O})} \hookrightarrow \mathfrak{so}(\mathbb{O}) = \mathfrak{g}_2 \oplus L_{\text{Im}(\mathbb{O})} \oplus R_{\text{Im}(\mathbb{O})}. \quad \square$$

Indichiamo con V_7 lo spazio vettoriale di dimensione sette $\text{Im}(\mathbb{O})$ degli ottonioni immaginari. Il gruppo \mathbf{G}_2 opera su V_7 : questa è la rappresentazione irriducibile non banale di dimensione minima di \mathbf{G}_2 .

Come nel caso dei quaternioni, la restrizione del prodotto agli ottonioni immaginari definisce, da un lato, il prodotto scalare in V_7 come l'opposto della sua parte reale

$$(v_1|v_2) = \Re(v_1^* \cdot v_2) = -\Re(v_1 \cdot v_2) = -\frac{1}{2}(v_1 \cdot v_2 + v_2 \cdot v_1), \quad \forall v_1, v_2 \in \text{Im}(\mathbb{O}) = V_7,$$

mentre la sua parte immaginaria il prodotto vettoriale

$$v_1 \times v_2 = \text{Im}(v_1 \cdot v_2) = \frac{1}{2}(v_1 \cdot v_2 - v_2 \cdot v_1).$$

Osserviamo che il prodotto vettoriale si riduce nei fatti a quello dei quaternioni: se i due vettori v_1 e v_2 sono proporzionali, $v_1 \times v_2 = 0$. Altrimenti, la sottoalgebra di \mathbb{O} da essi generata è isomorfa ad un'algebra di quaternioni, ed il risultato del prodotto vettore $v_1 \times v_2$ appartiene a $\mathbb{R}[v_1, v_2] \simeq \mathbb{H}$.

Poiché $\|v_1 \cdot v_2\| = \|v_1\| \cdot \|v_2\|$ e $V_7 \perp \mathbb{R}$, abbiamo

$$\|v_1 \times v_2\|^2 + |(v_1|v_2)|^2 = \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2.$$

Poiché $(v_1|v_2) = \cos \widehat{v_1 v_2} \cdot \|v_1\| \cdot \|v_2\|$, Questa formula equivale a

$$\|v_1 \times v_2\| = |\sin \widehat{v_1 v_2}| \cdot \|v_1\| \cdot \|v_2\|.$$

Abbiamo poi

$$(v_1|v_2) = -\frac{1}{6} \text{traccia}(v_1 \times (v_2 \times \cdot))$$

e quindi dal prodotto vettoriale possiamo ottenere la formula per il prodotto degli ottonioni immaginari e quindi degli ottonioni. Da questo segue che

PROPOSIZIONE 9.5.7. *Il gruppo G_2 ha una rappresentazione fedele come il gruppo delle trasformazioni lineari di V_7 che preservano il prodotto vettore.* \square

Enunciamo infine, senza darne la dimostrazione completa, la rappresentazione esplicita degli elementi di \mathfrak{g}_2 come algebra di endomorfismi di \mathbb{O} e di V_7 .

PROPOSIZIONE 9.5.8. *Per ogni coppia di elementi $v_1, v_2 \in V_7$,*

$$\mathbb{O} \ni a \longrightarrow D_{v_1, v_2}(a) = [[v_1, v_2], a] - 3[v_1, v_2, a] \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$$

è una derivazione.

L'algebra \mathfrak{g}_2 delle derivazioni di \mathbb{O} è il sottospazio vettoriale di $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$ generato dalle D_{v_1, v_2} al variare di v_1, v_2 in V_7 . \square

9.6. Algebre di Jordan, geometria proiettiva ed F_4

Le algebre di Jordan¹² furono introdotte nel 1932 per formalizzare la struttura dei possibili *osservabili* della meccanica quantistica.

DEFINIZIONE 9.6.1. Chiamiamo di *Jordan* un'algebra commutativa e unitaria \mathbb{A} , il cui prodotto $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \ni (a, b) \rightarrow a \circ b \in \mathbb{A}$ soddisfi l'IDENTITÀ DI JORDAN

$$(9.31) \quad a \circ (b \circ a^2) = (a \circ b) \circ a^2.$$

Un'algebra di Jordan è con potenza associativa¹³ e, più in generale, soddisfa le identità

$$(9.32) \quad a^m \circ (b \circ a^n) = (a^m \circ b) \circ a^n, \quad \forall a, b \in \mathbb{A}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

DEFINIZIONE 9.6.2. Un'algebra di Jordan \mathbb{A} si dice *formalmente reale* se

$$(9.33) \quad a_1, \dots, a_m \in \mathbb{A}, \quad a_1^2 + \dots + a_m^2 = 0 \implies a_1 = 0, \dots, a_m = 0.$$

¹²Ernst Pascual Jordan (1902-1980) fu un matematico e fisico teorico tedesco, che ha dato contributi significativi alla meccanica quantistica e alla teoria quantistica dei campi.

¹³Questo significa che tutte le sue sottoalgebre generate da un singolo elemento sono associative.

OSSERVAZIONE 9.6.3. Un'algebra commutativa e con potenza associativa che soddisfi (9.33) è necessariamente di Jordan. La (9.31) è cioè una conseguenza di (9.33) e della $a^m \circ a^n = a^{m+n}$, per ogni $a \in \mathbb{A}$ ed $m, n \in \mathbb{N}$.

TEOREMA 9.6.4. *La algebre di Jordan formalmente reali semplici sono le seguenti:*

- (1) $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^\top = X\}$, con $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$,
- (2) $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^* = X\}$, con $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$,
- (3) $\mathcal{H}_n(\mathbb{H}) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^* = X\}$, con $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$,
- (4) $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ con il prodotto

$$(v_1, \lambda_1) \circ (v_2, \lambda_2) = (\lambda_2 v_1 + \lambda_1 v_2, (v_1 | v_2) + \lambda_1 \lambda_2),$$

- (5) $\mathcal{H}_3(\mathbb{O}) = \{X \in \mathbb{O}^{3 \times 3} \mid X^* = X\}$ con $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$.

Ogni algebra di Jordan formalmente reale si decompone nella somma diretta delle algebre di Jordan formalmente reali semplici di questa lista. \square

Le algebre del tipo (4) si dicono anche *fattori di Spin* o *di tipo Clifford* (sono infatti le *abelianizzate* delle corrispondenti algebre di Clifford).

L'algebra (5) è l'*algebra di Jordan eccezionale*, o *algebra di Albert*¹⁴. Il fatto che $\mathcal{H}_n(\mathbb{O})$ sia un'algebra di Jordan per $n = 1, 2, 3$ è conseguenza del fatto che \mathbb{O} è alternata¹⁵.

OSSERVAZIONE 9.6.5. Le algebre $\mathcal{H}_2(\mathbb{K})$ sono isomorfe a fattori di Spin. Valgono infatti gli isomorfismi

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2(\mathbb{R}) &\simeq \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}, & \mathcal{H}_2(\mathbb{C}) &\simeq \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}, \\ \mathcal{H}_2(\mathbb{H}) &\simeq \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}, & \mathcal{H}_2(\mathbb{O}) &\simeq \mathbb{R}^9 \oplus \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sia \mathbb{A} un'algebra di Jordan formalmente reale.

DEFINIZIONE 9.6.6. Chiamiamo *positivi* gli elementi di \mathbb{A} che sono somme di quadrati. Definiamo su \mathbb{A} la relazione di ordinamento parziale

$$a < b \iff b - a \text{ è positivo.}$$

Chiamiamo *proiezione* un elemento p di \mathbb{A} tale che $p^2 = p$.

Le proiezioni non nulle sono elementi positivi. Poniamo

$$\text{Pr}(\mathbb{A}) = \{p \in \mathbb{A} \mid p^2 = p\}.$$

Il *rango* di una proiezione $p \in \text{Pr}(\mathbb{A})$ è l'estremo superiore degli interi r per cui si possa trovare una sequenza di proiezioni distinte p_1, \dots, p_r tali che

$$0 = p_0 < p_1 < \dots < p_{r-1} < p_r = p.$$

Conveniamo che 0 abbia rango 0. Indichiamo con $\text{Pr}^h(\mathbb{A})$ l'insieme delle proiezioni di rango h di \mathbb{A} .

¹⁴A. Adrian Albert, *A structure theory for Jordan algebras*, Annals of Mathematics. Second Series 48 (3) (1947), pp. 546-567.

¹⁵vedi: Nathan Jacobson, *Structure and Representations of Jordan Algebras*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol.39, (1968).

LEMMA 9.6.7. *Abbiamo isomorfismi naturali*

$$\mathcal{P}r^1(\mathcal{H}_{n+1}(\mathbb{K})) \simeq \mathbb{K}\mathbb{P}^n, \quad \text{per } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}.$$

DIMOSTRAZIONE. Associamo ad $X = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{1 \times (n+1)}$ la matrice

$$(9.34) \quad X^* \cdot X = (x_i^* x_j)_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{H}_{n+1}(\mathbb{K}).$$

Se $\|X\| = 1$, allora X^*X è una proiezione di rango uno e tutti gli elementi di $\mathcal{P}r^1(\mathcal{H}_{n+1}(\mathbb{K}))$ hanno questa forma. L'applicazione $X \rightarrow X^*X$ definisce per passaggio al quoziente un diffeomorfismo tra $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ e $\mathcal{P}r^1(\mathcal{H}_{n+1}(\mathbb{K}))$. \square

OSSERVAZIONE 9.6.8. Abbiamo $\mathcal{P}r^1(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}) = \{(v, \lambda) \mid \|v\|^2 + \lambda^2 = 1\} = \mathbb{S}^n$.

Possiamo ispirarci alla caratterizzazione degli spazi proiettivi del Lemma 9.6.7 per definire la retta ed il piano proiettivo associati ad una qualsiasi \star -algebra di divisione alternativa \mathbb{K} , utilizzando il fatto che gli $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ sono in questo caso algebre di Jordan per $n = 1, 2, 3$ (cf. ad esempio N.Jacobson, op.cit.).

DEFINIZIONE 9.6.9. Chiamiamo *retta proiettiva su \mathbb{K}* , ed indichiamo con $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$, lo spazio $\mathcal{P}r^1(\mathcal{H}_2(\mathbb{K}))$ e *piano proiettivo su \mathbb{K}* lo spazio $\mathcal{P}r^1(\mathcal{H}_3(\mathbb{K}))$.

È in particolare

$$\mathcal{P}r^1(\mathcal{H}_2(\mathbb{K})) = \left\{ \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} (x \ y) = \begin{pmatrix} x^*x & x^*y \\ y^*x & y^*y \end{pmatrix} \mid \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1 \right\}.$$

Ad un elemento non nullo $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ possiamo far corrispondere il punto

$$[(x, y)] = \frac{1}{\|x\|^2 + \|y\|^2} \begin{pmatrix} x^*x & x^*y \\ y^*x & y^*y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}\mathbb{P}^1.$$

Otteniamo così una proiezione $\mathbb{K}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^1$. Le fibre di questa proiezione sono le *rette* di \mathbb{K}^2 . Se $y \neq 0$, allora (x, y) ed $(y^{-1}x, 1)$ rappresentano lo stesso punto. Infatti

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \|y^{-1}x\|^2} \begin{pmatrix} (y^{-1}x)^* \cdot (y^{-1}x) & (y^{-1}x)^* \\ (y^{-1}x) & 1 \end{pmatrix} &= \frac{\|y\|^2}{\|x\|^2 + \|y\|^2} \begin{pmatrix} \|x\|^2/\|y\|^2 & x^*[y^*]^{-1} \\ y^{-1}x & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|x\|^2 + \|y\|^2} \begin{pmatrix} x^*x & x^*y \\ y^*x & y^*y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

in quanto la sottoalgebra generata da x ed y è associativa. Analogamente, se $x \neq 0$, è $[(x, y)] = [(1, x^{-1}y)]$. Abbiamo perciò

$$\pi^{-1}([(x, y)]) = \begin{cases} \{(a \cdot (x^{-1}y), a) \mid a \in \mathbb{K}^*\} & \text{se } x \neq 0, \\ \{(a, a \cdot (y^{-1}x)) \mid a \in \mathbb{K}^*\} & \text{se } y \neq 0. \end{cases}$$

Consideriamo il caso in cui \mathbb{K} sia la \star -algebra di divisione alternata \mathbb{O} degli ottonioni.

PROPOSIZIONE 9.6.10. *Abbiamo l'isomorfismo $\mathbb{O}\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{S}^8$.* \square

DEFINIZIONE 9.6.11. Indichiamo con \mathbf{F}_4 il gruppo degli automorfismi dell'algebra di Jordan eccezionale $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ e con \mathfrak{f}_4 la sua corrispondente algebra di Lie, che consiste delle derivazioni di $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$.

Poiché, in particolare, \mathbf{F}_4 opera transitivamente su $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$, identificato alle proiezioni di rango uno in $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$, possiamo identificare $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ ad uno spazio omogeneo di \mathbf{F}_4 . Il sottogruppo di \mathbf{F}_4 che fissa la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è $\mathbf{Spin}(9)$. Da questo ricaviamo che

$$(9.35) \quad \mathbb{O}\mathbb{P}^2 \simeq \mathbf{F}_4/\mathbf{Spin}(9) \implies \dim(\mathbf{F}_4) = 16 + \binom{9}{2} = 16 + 36 = 52.$$

Abbiamo poi le successioni esatte di omotopia di Serre:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_h(\mathbf{S}^{23}) &\longrightarrow \pi_h(\mathbb{O}\mathbb{P}^2) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{S}^7) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{S}^{23}) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_h(\mathbf{Spin}(9)) &\longrightarrow \pi_h(\mathbf{F}_4) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{O}\mathbb{P}^2) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{Spin}(9)) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Dalla prima ricaviamo che

$$h \leq 22 \implies \pi_h(\mathbb{O}\mathbb{P}^2) \simeq \pi_{h-1}(\mathbf{S}^7) = \begin{cases} 0, & \text{per } 0 \leq h \leq 7, h = 12, 13 \\ \mathbb{Z}, & \text{per } h = 8, \\ \mathbb{Z}_2, & \text{per } h = 9, 10, 14, \\ \mathbb{Z}_{24}, & \text{per } h = 11, \\ \mathbb{Z}_{120}, & \text{per } h = 15, \\ \mathbb{Z}_2^3, & \text{per } h = 16, \end{cases}$$

I gruppi di omotopia di $\mathbf{Spin}(9)$ sono:

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbf{Spin}(9)) &= 0, & \pi_2(\mathbf{Spin}(9)) &= 0, & \pi_3(\mathbf{Spin}(9)) &= \mathbb{Z}, \\ \pi_4(\mathbf{Spin}(9)) &= 0, & \pi_5(\mathbf{Spin}(9)) &= 0, & \pi_6(\mathbf{Spin}(9)) &= 0, \\ \pi_7(\mathbf{Spin}(9)) &= \mathbb{Z}^2, & \pi_8(\mathbf{Spin}(9)) &= \mathbb{Z}_2^3, & \pi_9(\mathbf{Spin}(9)) &= \mathbb{Z}_2^3, \\ \pi_{10}(\mathbf{Spin}(9)) &= \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_8, & \pi_{11}(\mathbf{Spin}(9)) &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & \pi_{12}(\mathbf{Spin}(9)) &= 0. \end{aligned}$$

In particolare

PROPOSIZIONE 9.6.12. *Il gruppo di Lie \mathbf{F}_4 è 2-connesso e $\pi_3(\mathbf{F}_4) \simeq \mathbb{Z}$.* □

Parte 3

Complesso di de Rham e coomologia di Čech

CAPITOLO X

Forme differenziali negli spazi Euclidei

10.1. Forme differenziali in \mathbb{R}^n

Indichiamo con $\Lambda^q \mathbb{R}^n$ lo spazio vettoriale reale, di dimensione $\binom{n}{q}$, delle forme q -multilineari alternate su \mathbb{R}^n .

DEFINIZIONE 10.1.1. Sia A un aperto di \mathbb{R}^n . Le applicazioni $\eta \in \mathcal{C}^\infty(A, \Lambda^q \mathbb{R}^n)$ si dicono *forme differenziali alternate, omogenee di grado q e con coefficienti di classe \mathcal{C}^∞ in A* .

Useremo la notazione

$$(10.1) \quad \Omega^q(A) := \mathcal{C}^\infty(A, \Lambda^q \mathbb{R}^n)$$

Indichiamo con dx^i la forma lineare su \mathbb{R}^n definita da:

$$(10.2) \quad dx^i(x) = x^i, \quad \forall x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Le forme:

$$(10.3) \quad dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} \quad \text{con} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$$

costituiscono una base di $\Lambda^q \mathbb{R}^n$. Una forma $\eta \in \Omega^q(A)$ si scrive in modo unico come:

$$(10.4) \quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} \eta_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}, \quad \text{con}$$

$$(10.5) \quad \eta_{i_1, \dots, i_q}(x) = \eta(x)(e_{i_1}, \dots, e_{i_q}) \in \mathcal{C}^\infty(A),$$

ove abbiamo indicato con e_1, \dots, e_n i vettori della base canonica di \mathbb{R}^n .

DEFINIZIONE 10.1.2. L'algebra di Grassmann $\Omega^*(A)$ delle forme alternate di classe \mathcal{C}^∞ su A è la somma diretta

$$\Omega^*(A) = \bigoplus_{q=0}^n \Omega^q(A),$$

con il prodotto definito sulle forme omogenee da

$$\begin{aligned} & \eta' \wedge \eta''(x)(v_1, \dots, v_q) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_{q'} \leq q \\ 1 < \sigma_{q'+1} < \dots < \sigma_q \\ \sigma \in \mathcal{S}_q}} \varepsilon(\sigma) \eta'(x)(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_{q'}}) \eta''(x)(v_{\sigma_{q'+1}}, \dots, v_{\sigma_q}) \\ & \forall v_1, \dots, v_q \in \mathbb{R}^n, \quad \eta' \in \Omega^{q',(k)}(A), \quad \eta'' \in \Omega^{q'',(k)}(A), \quad q' + q'' = q. \end{aligned}$$

10.2. Pull-back

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$ è una funzione reale di classe \mathcal{C}^∞ , definita sull'aperto A di \mathbb{R}^n , il suo differenziale è l'elemento di $\Omega^1(A)$ definito da:

$$(10.6) \quad df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} dx^i.$$

Siano B un aperto di \mathbb{R}^m , A un aperto di \mathbb{R}^n e $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^n) \in \mathcal{C}^\infty(B, A)$.

DEFINIZIONE 10.2.1. Il *pullback*, o *immagine inversa* di una forma differenziale $\eta \in \Omega^q(A)$, descritta da (10.4), è la forma differenziale $\phi^*\eta \in \Omega^q(B)$ definita da:

$$(10.7) \quad \phi^*\eta = \sum_{i_1 \dots i_q} \eta_{i_1 \dots i_q}(\phi) d\phi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi^{i_q}.$$

Si verifica immediatamente che il pull-back di forme gode delle proprietà:

TEOREMA 10.2.2. (1) $\phi^* : \Omega^q(A) \rightarrow \Omega^q(B)$ è un'applicazione \mathbb{R} -lineare.

(2) Se $\eta_1 \in \Omega^{q_1}(A)$ ed $\eta_2 \in \Omega^{q_2}(A)$, allora $\eta_1 \wedge \eta_2 \in \Omega^{q_1+q_2}(A)$ e

$$\phi^*(\eta_1 \wedge \eta_2) = (\phi^*\eta_1) \wedge (\phi^*\eta_2).$$

(3) Se $\psi : D \rightarrow B$ è un'applicazione di classe \mathcal{C}^{k+1} , definita su un aperto D di \mathbb{R}^ℓ , allora

$$(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*.$$

10.3. Differenziale di una forma

Estendiamo la definizione del differenziale dal caso delle funzioni a quello delle forme differenziali ponendo, per una $\eta \in \Omega^{q,(k+1)}(A)$ descritta dalla (10.4):

$$(10.8) \quad \begin{aligned} d\eta(x) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} d\eta_{i_1 \dots i_q}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} \frac{\partial \eta_{i_1 \dots i_q}(x)}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}. \end{aligned}$$

Il differenziale delle forme differenziali è caratterizzato dal:

TEOREMA 10.3.1. Il differenziale è l'unica applicazione \mathbb{R} -lineare

$$d : \Omega^*(A) \longrightarrow \Omega^*(A)$$

che goda delle seguenti proprietà:

(1) Per ogni intero $q \geq 0$, il differenziale definisce un'applicazione \mathbb{R} -lineare:

$$(10.9) \quad d : \Omega^q(A) \rightarrow \Omega^{q+1}(A).$$

(2) d coincide con il differenziale definito sulle funzioni nel caso $q = 0$.

(3) Vale la formula del differenziale del prodotto:

$$\begin{aligned} d(\eta_1 \wedge \eta_2) &= d\eta_1 \wedge \eta_2 + (-1)^{q_1} \eta_1 \wedge d\eta_2 \\ &\quad \forall \eta_1 \in \Omega_{k+1}^{q_1}(A), \quad \forall \eta_2 \in \Omega_{k+1}^{q_2}(A) \end{aligned}$$

(4) $d \circ d : \Omega^q(A) \rightarrow \Omega^{q+2}(A)$ è l'applicazione nulla, cioè

$$(10.10) \quad d \circ d = d^2 = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Il differenziale definito dalla (10.8) soddisfa la (3) per le proprietà del prodotto esterno e la regola di Leibnitz per la derivazione del prodotto di due funzioni. La (10.10) è allora conseguenza della:

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0,$$

valida per ogni funzione $f \in \mathcal{C}^2(A, \mathbb{R})$. Viceversa, se valgono le (1), (2), (3), (4) l'espressione del differenziale è data necessariamente dalla (10.8). \square

10.4. Il complesso di de Rham

Per ogni aperto A di \mathbb{R}^n , otteniamo un *complesso di operatori differenziali*:

$$(10.11) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega_{k+n}^0(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_{k+n-1}^1(A) & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \rightarrow & \Omega_{k+n-h}^h(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_{k+n-h-1}^{h+1}(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_{k+n-h-2}^{h+2}(A) \rightarrow \\ & & & & \dots & \xrightarrow{d} & \Omega_k^n(A) \rightarrow 0 \end{array}$$

DEFINIZIONE 10.4.1. Il complesso (10.11) si dice il *complesso di de Rham*¹ sull'aperto A di \mathbb{R}^n .

Poniamo:

$$(10.12) \quad \mathcal{L}^q(A) = \{\eta \in \Omega^q(A) \mid d\eta = 0\} \quad (\text{spazio delle } q\text{-forme chiuse}),$$

$$(10.13) \quad \mathcal{B}^q(A) = \{d\eta \mid \eta \in \Omega^{q-1}(A)\} \quad (\text{spazio delle } q\text{-forme esatte}),$$

$$(10.14) \quad H^q(A) = \mathcal{L}^q(A) / \mathcal{B}^q(A) \quad (q\text{-esimo gruppo di coomologia di de Rham}).$$

Se $\alpha \in \mathcal{L}^q(A)$, indicheremo con $[\alpha]$ la corrispondente classe di coomologia in $H^q(A)$,

Se $q < 0$, oppure $q > n$, porremo $\mathcal{L}^q(A) = 0$, $\mathcal{B}^q(A) = 0$, $H^q(A) = 0$.

Dalla formula dei differenziali, otteniamo immediatamente il:

TEOREMA 10.4.2. Siano A un aperto di \mathbb{R}^n , B un aperto di \mathbb{R}^m e $\phi \in \mathcal{C}^\infty(B, A)$. Il pullback commuta con i differenziali:

$$(10.15) \quad \phi^*(d\eta) = d\phi^*\eta, \quad \forall \eta \in \Omega^*(A)$$

e definisce quindi, per ogni intero q , un omomorfismo

$$(10.16) \quad [\phi^*] : H^q(A) \longrightarrow H^q(B).$$

¹ Georges de Rham, Matematico (Roche, Losanna, 1903 - Losanna 1990). Dal 1932 prof. all'univ. di Losanna e successivamente di Parigi (1943) e Ginevra (1953). Le sue ricerche riguardano soprattutto problemi di natura differenziale e topologica sulle varietà differenziabili. Nel 1931 dimostrò il famoso teorema che identifica i gruppi di coomologia ad invarianti topologici. I suoi risultati hanno aperto nuovi ed elevati settori di ricerca. Il suo lavoro è stato particolarmente importante per lo sviluppo della teoria dei fasci.

OSSERVAZIONE 10.4.3. Il Teorema 10.4.2 ci dice che la differenziazione è un'operazione invariante rispetto ai cambiamenti di carte locali e ci permetterà perciò di definire le forme differenziali e il differenziale di forme sulle varietà.

Dimostriamo alcuni risultati sui gruppi di coomologia del complesso di de Rham, da cui ricaveremo in particolare il Lemma di Poincaré-Volterra sull'aciclicità locale di (10.11).

LEMMA 10.4.4. *Sia A un aperto di \mathbb{R}^n , I un intervallo aperto di \mathbb{R} e*

$$\pi_A : A \times I \ni (x, t) \rightarrow x \in A$$

la proiezione canonica. Allora il pullback di forme induce un isomorfismo lineare

$$(10.17) \quad [\pi_A^*] : H^q(A) \longrightarrow H^q(A \times I).$$

In particolare

$$(10.18) \quad H^{n+1}(A \times I) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $t_0 \in I$ e consideriamo l'inclusione

$$J_{t_0} : A \ni x \longrightarrow (x, t_0) \in A \times I.$$

Poiché $\pi_A \circ J_{t_0} = \text{id}_A$, abbiamo

$$\text{id}_{H^q(A)} = [(\pi_A \circ J_{t_0})^*] = [J_{t_0}^* \circ \pi_A^*] = [J_{t_0}^*] \circ [\pi_A^*]$$

e quindi $[\pi_A^*]$ è iniettiva.

Resta da dimostrare che $[\pi_A^*]$ è anche surgettiva.

Indichiamo con d_x il differenziale in A e con d quello su $A \times I$. Scriviamo un elemento $\alpha \in \Omega^q(A \times I)$ nella forma

$$\alpha = \alpha' + dt \wedge \alpha'', \quad \text{con } \alpha' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n), \quad \alpha'' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n).$$

Abbiamo allora

$$d\alpha = d_x \alpha + dt \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t} = d_x \alpha' + dt \wedge \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t} - d_x \alpha'' \right).$$

Osserviamo che $\alpha \in \pi_A^*(\Omega^q(A))$ se e soltanto se

$$\alpha'' = 0, \quad \frac{\partial \alpha'}{\partial t} = 0.$$

Se $\alpha \in \mathcal{L}^q(A \times I)$, abbiamo

$$d_x \alpha' = 0, \quad \frac{\partial \alpha'}{\partial t} = d_x \alpha''.$$

Poniamo

$$\beta(x, t) = \int_{t_0}^t \alpha'' dt \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n) \subset \Omega^{q-1}(A \times I).$$

Allora

$$\alpha - d\beta = (\alpha' + dt \wedge \alpha'') - (d_x \beta + dt \wedge \frac{\partial \beta}{\partial t}) = \alpha' - d_x \beta \in \mathcal{L}^q(A \times I) \cap \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n).$$

La forma $\gamma = \alpha' - d_x \beta$ è coomologa ad α e soddisfa le equazioni

$$d_x \gamma = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} = 0.$$

In particolare, γ è il pullback mediante π_A^* di un elemento di $\mathcal{L}^q(A)$. La dimostrazione è completa. \square

Ogni elemento $\alpha \in \mathcal{Q}^{n+1}(A \times I) = \mathcal{L}^{n+1}(A \times I)$ è divisibile per dt , risulta cioè

$$\alpha = dt \wedge \alpha'', \quad \text{con } \alpha'' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^n(A)).$$

Allora

$$\beta = \int_{t_0}^t \alpha'' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^n(A)) \subset \mathcal{Q}^n(A \times I)$$

soddisfa l'equazione

$$d\beta = dt \wedge \frac{\partial \beta}{\partial t} = dt \wedge \alpha'' = \alpha.$$

Più in generale abbiamo:

PROPOSIZIONE 10.4.5. *Siano A un aperto di \mathbb{R}^n e I_1, \dots, I_k intervalli aperti di \mathbb{R} .*

Allora

$$H^q(A \times I_1 \times \dots \times I_k) = 0, \quad \forall q > n.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti, per il Lemma 10.4.4, $H^q(A \times I_1 \times \dots \times I_k) \simeq H^q(A \times I_1 \times \dots \times I_{k-1}) \simeq \dots \simeq H^q(A \times I_1) \simeq H^q(A) = \{0\}$. \square

Dalla Proposizione 10.4.5 si ottiene facilmente il

TEOREMA 10.4.6. *Siano I_1, \dots, I_n intervalli aperti di \mathbb{R} . Allora*

$$(10.19) \quad H^q(I_1 \times \dots \times I_n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, \\ \{0\} & \text{se } q \neq 0. \end{cases}$$

In particolare, otteniamo il teorema di Poincaré² e Volterra³ sull'aciclicità locale del complesso di de Rham.

² Jules Henri Poincaré (Nancy, 29 aprile 1854 - Parigi, 17 luglio 1912) è stato un matematico, un fisico teorico e un filosofo naturale francese. Poincaré viene considerato un enciclopedico e in matematica l'ultimo universalista, dal momento che eccelse in tutti i campi della disciplina attivi ai suoi giorni.

Come matematico e fisico, diede molti contributi originali alla matematica pura, alla matematica applicata, alla fisica matematica e alla meccanica celeste. A lui si deve la formulazione della congettura di Poincaré, uno dei più famosi problemi in matematica. Nelle sue ricerche sul problema dei tre corpi, Poincaré fu la prima persona a scoprire un sistema caotico deterministico, ponendo in tal modo le basi della moderna teoria del caos. Viene inoltre considerato come uno dei fondatori della topologia.

Poincaré introdusse il moderno principio di relatività e fu il primo a presentare le trasformazioni di Lorentz nella loro moderna forma simmetrica. Poincaré completò le trasformazioni concernenti la velocità relativistica e le trascrisse in una lettera a Lorentz nel 1905. Ottenne così la perfetta invarianza delle equazioni di Maxwell, un passo importante nella formulazione della teoria della relatività ristretta. Il gruppo di Poincaré usato in fisica e matematica deve a lui il suo nome.

³Vito Volterra (Ancona, 3 maggio 1860 - Roma, 11 ottobre 1940), matematico e fisico italiano. Fu uno dei principali fondatori dell'analisi funzionale e della connessa teoria delle equazioni integrali. Il suo nome noto soprattutto per i suoi contributi alla biologia matematica.

TEOREMA 10.4.7 (Lemma di Poincaré-Volterra). *Sia $\eta \in \Omega^q(A)$ ($k \geq 1$) una forma differenziale definita su un aperto A di \mathbb{R}^n , che soddisfa*

$$(10.20) \quad d\eta = 0$$

in un intorno aperto di un punto p di A . Se $q = 0$, allora f è costante in un intorno di p in A . Se $q > 0$, possiamo trovare un intorno aperto U di p in A ed una forma differenziale $u \in \Omega^{(q-1)}(U)$ tale che:

$$(10.21) \quad du = \eta \text{ in } U.$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 10.4.7. La tesi segue dal Teorema 10.4.6, perché ogni punto $p \in A$ ha in A un intorno aperto della forma $I_1 \times \cdots \times I_n$, con I_1, \dots, I_n intervalli aperti in \mathbb{R} . \square

10.5. Coomologia di de Rham a supporti compatti

Sia A un aperto di \mathbb{R}^n . Se B è un aperto di A , possiamo definire la restrizione $r_B^A \eta \in \Omega^q(B)$ di una forma $\eta \in \Omega^*(A)$ come il pullback di η rispetto all'inclusione $B \hookrightarrow A$.

DEFINIZIONE 10.5.1. Il *supporto* di una forma differenziale $\eta \in \Omega^*(A)$ è il complementare del più grande aperto di A su cui la restrizione di η sia nulla.

Indichiamo con $\Omega_0^q(A)$ il sottospazio delle q -forme differenziali alternate, con coefficienti di classe \mathcal{C}^∞ , che hanno supporto compatto in A .

Poiché

$$(10.22) \quad \text{supp } d\eta \subset \text{supp } \eta, \quad \forall \eta \in \Omega^*(A),$$

il differenziale di una forma a supporto compatto ha ancora supporto compatto. Otteniamo perciò un sottocomplesso del complesso (10.11) restringendoci ai sottospazi $\Omega_0^q(A)$ delle forme con supporto compatto in A .

$$(10.23) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_0^0(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^1(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^2(A) & \longrightarrow & \cdots \\ \cdots & \longrightarrow & \Omega_0^h(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^{h+1}(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^{h+2}(A) & \longrightarrow & \\ & & \cdots & \longrightarrow & \Omega_0^{n-1}(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^n(A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

DEFINIZIONE 10.5.2. Poniamo:

$$\mathcal{Z}_0^q(A) = \{\alpha \in \Omega_0^q(A) \mid d\alpha = 0\}, \quad (\text{spazio delle } q\text{-forme chiuse a supporto compatto}),$$

$$\mathcal{B}_0^q(A) = \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega_0^{q-1}(A)\}, \quad (\text{spazio delle } q\text{-forme esatte a supporto compatto}),$$

$$H_0^q(A) = \mathcal{Z}_0^q(A) / \mathcal{B}_0^q(A), \quad (q\text{-esimo gruppo di coomologia di de Rham a supporti compatti}).$$

Osserviamo che $H_0^0(A) = 0$ se A è un aperto di \mathbb{R}^n con $n > 0$, perché $\mathcal{Z}_0^0(A) = 0$, in quanto i suoi elementi sono funzioni localmente costanti con supporto compatto in A .

Sia A un qualsiasi aperto di \mathbb{R}^n , I un intervallo aperto di \mathbb{R} e $\pi_A : A \times I \ni (x, t) \rightarrow x \in A$ la proiezione su A . Se $\eta \in \Omega_0^q(A \times I)$, scriviamo

$$(10.24) \quad \eta = \eta' + dt \wedge \eta'', \quad \text{con } \eta' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n), \quad \eta'' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n).$$

e definiamo

$$(10.25) \quad \pi_{A_*}(\eta) = \int_I \eta'' dt.$$

DEFINIZIONE 10.5.3. La forma $\pi_{A_*}(\eta) \in \Omega_0^{q-1}(A)$ si dice ottenuta da $\eta \in \Omega_0^q(A \times I)$ mediante *integrazione sulla fibra*.

LEMMA 10.5.4. *Siano A un aperto di \mathbb{R}^n ed I un intervallo aperto di \mathbb{R} . L'integrazione sulla fibra anticommuta con i differenziali:*

$$(10.26) \quad d_x(\pi_{A_*}(\eta)) = -\pi_{A_*}(d\eta), \quad \forall \eta \in \Omega_0(A \times I).$$

DIMOSTRAZIONE. Con η definita dalla (10.24), abbiamo

$$d\eta = d_x \eta' + dt \wedge \left(\frac{\partial \eta'}{\partial t} - d_x \eta'' \right).$$

Quindi

$$\pi_{A_*}(d\eta) = \int_I \left(\frac{\partial \eta'}{\partial t} - d_x \eta'' \right) dt = - \int_I d_x \eta'' dt = -d_x \int_I \eta'' dt = -d_x \pi_{A_*}(\eta)$$

perché $\int_I (\partial \eta' / \partial t) dt = 0$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale. \square

In particolare, per ogni intero non negativo q l'integrazione sulla fibra definisce un omomorfismo

$$(10.27) \quad [\pi_{A_*}] : H^{q+1}(A \times I) \longrightarrow H^q(A).$$

Vale il

LEMMA 10.5.5. *Siano A un qualsiasi aperto di \mathbb{R}^n ed I un intervallo aperto di \mathbb{R} . Allora per ogni intero non negativo q , la (10.27) è un isomorfismo.*

Utilizzeremo, nella dimostrazione, il seguente

LEMMA 10.5.6. *Sia I un intervallo aperto di \mathbb{R} e $t_0 = \inf I$. Se $f(t)dt \in \Omega_0^1(I)$, la*

$$(10.28) \quad u(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

è l'unica soluzione dell'equazione $du = f(t)dt$ che si annulli in un intorno destro di t_0 . La u ha supporto compatto se, e soltanto se,

$$(10.29) \quad \int_I f(t) dt = 0.$$

La (10.29) è condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione $u' = f$ ammetta in I una soluzione a supporto compatto.

OSSERVAZIONE 10.5.7. Per il Lemma 10.5.5 l'applicazione

$$\mathcal{Z}_0^1(I) = \Omega_0^1(I) \ni f(t)dt \longrightarrow \int_I f(t)dt \in \mathbb{R}$$

è un funzionale lineare non nullo il cui nucleo è $\mathcal{B}_0^1(I)$. È perciò $H_0^1(I) \simeq \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 10.5.5. Fissiamo una qualsiasi funzione $\chi(t) \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$, con

$$\int_I \chi(t)dt = 1,$$

e definiamo, per ogni intero non negativo q , l'applicazione

$$(10.30) \quad \chi^\sharp : \Omega_0^q(A) \ni \alpha \rightarrow \chi(t) \cdot dt \wedge \pi_{A^*}^* \alpha \in \Omega_0^{q+1}(A \times \mathbb{R}).$$

Abbiamo

$$(10.31) \quad \pi_{A^*}(\chi^\sharp \alpha) = \alpha, \quad d(\chi^\sharp \alpha) = \chi^\sharp(d\alpha), \quad \forall \alpha \in \Omega_0^q(A).$$

Quindi χ^\sharp definisce per passaggio al quoziente un omomorfismo

$$[\chi^\sharp] : H_0^q(A) \longrightarrow H_0^{q+1}(A \times I).$$

Per (10.31) abbiamo

$$\text{id}_{H_0^q(A)} = [(\pi_{A^*} \circ \chi^\sharp)] = [\pi_{A^*}] \circ [\chi^\sharp],$$

Da cui segue subito immediatamente che la $[\pi_{A^*}]$ è surgettiva. Resta da dimostrarne l'iniettività.

Sia $q \geq 1$ ed $\eta = \eta' + dt \wedge \eta'' \in \mathcal{Z}_0^q(A \times \mathbb{R})$, con $\eta' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n)$, $\eta'' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n)$. È

$$d_x \eta' = 0, \quad \frac{\partial \eta'}{\partial t} = d_x \eta''.$$

Osserviamo, in particolare, che, se $\eta'' = 0$, allora $\eta = 0$. Infatti in questo caso η' , essendo indipendente da t ed a supporto compatto, è nulla.

Supponiamo vi sia una forma $\alpha \in \Omega_0^{q-2}(A)$ tale che

$$d\alpha = \pi_{A^*} \eta = \int_I \eta'' dt.$$

Sia

$$\beta = \eta - \chi^\sharp(d\alpha) = \eta - d(\chi^\sharp \alpha).$$

È $[\beta] = [\eta]$ e, per la (10.31),

$$\pi_{A^*} \beta = 0.$$

Questo significa che, per

$$\beta = \beta' + dt \wedge \beta'', \quad \text{con } \beta' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n), \quad \beta'' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n),$$

risulta

$$\int_I \beta'' dt = 0.$$

Perciò, se $t_0 = \inf I$,

$$\gamma(x, t) = \int_{t_0}^t \beta''(x, s) ds$$

definisce una forma in $\mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1}\mathbb{R}^n) \subset \Omega_0^{q-1}(A \times I)$ ed abbiamo

$$d\gamma = d_x\gamma + dt \wedge \frac{\partial\gamma}{\partial t} = d_x\gamma + dt \wedge \beta''.$$

Allora

$$\zeta = \beta - d\gamma \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^q\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{Z}_0^q(A \times I)$$

perciò, per quanto osservato in precedenza, $\zeta = 0$ e quindi $\beta = d\gamma$. È dunque $[\eta] = [\beta] = 0$. La dimostrazione è completa. \square

Otteniamo quindi

PROPOSIZIONE 10.5.8. *Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e siano I_1, \dots, I_k intervalli aperti di \mathbb{R} . Allora, per ogni intero $q \geq 0$,*

$$(10.32) \quad H_0^{q+k}(A \times I_1 \times \dots \times I_k) \simeq H_0^q(A).$$

Dalla Proposizione 10.5.8 e dall'Osservazione 10.5.7 otteniamo il

TEOREMA 10.5.9. *Siano I_1, \dots, I_n intervalli aperti di \mathbb{R} . Allora*

$$(10.33) \quad H_0^q(I_1 \times \dots \times I_n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = n, \\ 0 & \text{se } q \neq n. \end{cases}$$

Se $\alpha \in \Omega_0^n(I_1 \times \dots \times I_n)$, allora $\alpha \in \mathcal{B}_0^n(I_1 \times \dots \times I_n)$ se, e soltanto se,

$$(10.34) \quad \int_{I_1 \times \dots \times I_n} \alpha = 0.$$

10.6. Il grado di un'applicazione propria di \mathbb{R}^n in sé

Siano A, B aperti di \mathbb{R}^n ed $f : A \rightarrow B$ un'applicazione propria⁴ di classe \mathcal{C}^∞ . Poiché f è propria, il pullback di una forma a supporto compatto in A ha supporto compatto in B ed otteniamo quindi un'applicazione

$$f^* : \Omega_0^q(B) \rightarrow \Omega_0^q(A)$$

che commuta con in differenziale e definisce perciò, per passaggio al quoziente, un'applicazione

$$(10.35) \quad [f^*] : H_0^q(B) \rightarrow H_0^q(A).$$

Identifichiamo il gruppo di coomologia $H_0^n(\mathbb{R}^n)$ con \mathbb{R} mediante il quoziente dell'applicazione

$$(10.36) \quad \mathcal{Z}_0^n(\mathbb{R}^n) \ni \alpha \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \alpha \in \mathbb{R}.$$

⁴ Un'applicazione continua $\phi : X \rightarrow Y$ tra due spazi topologici X, Y si dice propria se l'immagine inversa $\phi^{-1}(K)$ di ogni compatto K di Y è un compatto di X . Ciò equivale al fatto che f sia continua, chiusa e che $\phi^{-1}(y)$ sia compatto in X per ogni punto y di Y .

Se f è un'applicazione propria differenziabile di \mathbb{R}^n in sé, la $[f^*]$ definisce un'applicazione lineare di \mathbb{R} in sé, quindi della forma $t \rightarrow c \cdot t$ con $c \in \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 10.6.1. Si dice *grado* di un'applicazione propria differenziabile di \mathbb{R}^n in sé, e si indica con $\deg(f)$, il numero per cui risulta

$$(10.37) \quad [f^*][\alpha] = (\deg(f)) \cdot [\alpha], \quad \forall [\alpha] \in H_0^n(\mathbb{R}^n).$$

TEOREMA 10.6.2. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile propria. Se $y \in \mathbb{R}^n$ è un valore regolare di f , definiamo il grado di f in y come l'intero

$$(10.38) \quad \deg_y f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}(\det df(x)).$$

Allora

$$(10.39) \quad \deg_y f = \deg(f) \in \mathbb{Z}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus CV(f),$$

$$(10.40) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha = \deg(f) \int_{\mathbb{R}^n} \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathcal{Q}_0^n(\mathbb{R}^n).$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente dimostrare che, dato un qualsiasi valore regolare $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus CV(f)$, risulta

$$(10.41) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha = (\deg_{y_0} f) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathcal{Q}_0^n(\mathbb{R}^n).$$

L'insieme $f^{-1}(y_0)$ è finito, perché è compatto e consiste di punti isolati. Sia $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_k\}$. Per il teorema dell'applicazione inversa, possiamo trovare un intorno aperto connesso V di Y tale che $f^{-1}(V)$ sia unione disgiunta di aperti U_1, \dots, U_k , con $x_j \in U_j$ per $j = 1, \dots, k$ e la restrizione di f ad U_j sia un diffeomorfismo di U_j su V . Fissiamo una forma $\alpha_0 \in \mathcal{Q}_0^n(V)$, con

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha_0 = \int_V \alpha_0 = 1.$$

Se $\alpha \in \mathcal{Q}_0^n(\mathbb{R}^n)$, la forma

$$\beta = \alpha - \left(\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \right) \cdot \alpha_0$$

soddisfa

$$\int_{\mathbb{R}^n} \beta = 0,$$

quindi, per il Teorema 10.5.9, è $\alpha = du$ per qualche $u \in \mathcal{Q}_0^{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha &= \int_{\mathbb{R}^n} \beta + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \right) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} df^* u + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \right) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0 \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \right) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0. \end{aligned}$$

Basterà quindi dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0 = \deg_{y_0} f.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0 &= \sum_{j=1}^k \int_{U_j} f^* \alpha \\ &= \sum_{j=1}^k \text{sign}(\det df(x_j)) \int_{\mathbb{R}^n} \alpha_0 = \deg_{y_0} f, \end{aligned}$$

per le formule di cambiamento di variabile nell'integrale multiplo. \square

ESEMPIO 10.6.3. Per ogni intero positivo n l'applicazione $f_n : \mathbb{R} \ni t \rightarrow t^n \in \mathbb{R}$ è propria. Osserviamo che 1 è un valore regolare di f_n , che viene assunto nel solo punto 1 se n è dispari, nei punti ± 1 se 1 è pari. Poiché $\frac{d}{dt} f_n(t) = nt^{n-1}$, il grado di f_n è 1 se n è dispari, 0 se n è pari.

Più in generale, si può verificare che una $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è propria se e soltanto se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \pm\infty$. Il grado di f è 0 se f ha segno costante al di fuori di un intervallo limitato, 1 se $tf(t)$ è positiva e -1 se $tf(t)$ è negativa fuori da un intervallo limitato.

ESEMPIO 10.6.4. Per ogni intero positivo n , l'applicazione

$$f_n : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \ni z \rightarrow z^n \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$$

è propria ed 1 è un suo valore regolare, immagine delle n radici n -esime dell'unità. Si verifica facilmente che lo Jacobiano di f_n ha determinante positivo in tutti i punti $z \neq 0$ e quindi il grado di $f_n(z) = z^n$ è n .

Per il Teorema grande di Picard, una funzioni intera $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ è propria se e soltanto se è un polinomio di grado positivo. Se $f \in \mathbb{C}[z]$, il grado dell'applicazione $z \rightarrow f(z)$ da esso definita è uguale al suo grado come polinomio. Infatti i valori regolari w di f sono quelli per cui l'equazione $f(z) = w$ ha un numero di radici distinte uguale al grado di f e in ciascuna di esse il determinante dello Jacobiano della corrispondente applicazione in \mathbb{R}^2 è positivo.

ESEMPIO 10.6.5. Calcoliamo il grado dell'applicazione $f : \mathbb{C} \ni z \rightarrow z^3 - \bar{z} \in \mathbb{C}$. Si verifica facilmente che f è propria e che 0 è un valore regolare di f . Abbiamo

$$f^{-1}(0) = \{0, \pm 1, \pm i\}.$$

Il differenziale di f è $df = 3z^2 dz - d\bar{z}$. Abbiamo, in forma matriciale

$$df(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad df(\pm 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad df(\pm i) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Il grado è quindi $(-1) + 1 + 1 + 1 + 1 = 3$. Osserviamo che $df(z)$ ha determinante positivo se z è sufficientemente grande. Come conseguenza, esiste una costante $c > 0$ tale che $f^{-1}(w)$ contenga esattamente tre elementi se $|w| > c$.

10.7. Orientazione e sottovarietà di \mathbb{R}^n .

Sia M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$. Un atlante \mathcal{A} di classe \mathcal{C}^k si dice *orientato* se i determinanti degli jacobiani delle sue funzioni di transizione sono positivi. Diremo che due atlanti orientati \mathcal{A}_1 ed \mathcal{A}_2 sono compatibili se la loro unione è ancora un atlante orientato. Una varietà differenziabile che

ammetta un atlante orientato si dice *orientabile*. La relazione di compatibilità è allora una relazione di equivalenza tra gli atlanti orientati su M che ne definiscono la struttura differenziabile. Se M è connessa e orientabile, ci sono esattamente due classi di equivalenza di atlanti orientati su M . La scelta di una delle due classi è una *orientazione* della varietà M . Nel caso di una varietà non connessa, un'orientazione di M sarà la scelta di una particolare orientazione su ciascuna delle sue componenti connesse.

OSSERVAZIONE 10.7.1. Non tutte le varietà sono orientabili. Ad esempio gli spazi proiettivi reali $\mathbb{R}P^n$ sono orientabili se n è dispari, ma non se n è pari.

Consideriamo ora in particolare l'orientabilità di sottovarietà di \mathbb{R}^n . Ricordiamo che una sottovarietà localmente chiusa di \mathbb{R}^n , di classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) e di dimensione m , è un sottoinsieme S di \mathbb{R}^n tale che, per ogni punto $p \in S$, si possano trovare un intorno aperto U di p in \mathbb{R}^n ed $n - m$ funzioni di classe \mathcal{C}^k

$$f_i : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = m + 1, \dots, n$$

tali che

$$(10.42) \quad \begin{cases} S \cap U = \{x \in U \mid f_i(x) = 0 \quad i = m + 1, \dots, n\} \\ df_{m+1}(x) \wedge \dots \wedge df_n(x) \neq 0, \quad \forall x \in U. \end{cases}$$

Una *carta locale* su S è una *parametrizzazione*

$$(10.43) \quad \mathbb{R}^m \supset B^{\text{aperto}} \xrightarrow{\mathbf{r}} S \subset \mathbb{R}^n$$

di classe \mathcal{C}^k , cioè un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^k , definita su un aperto B di \mathbb{R}^m , a valori in \mathbb{R}^n , *non singolare*, cioè con Jacobiano di rango massimo m in ogni punto di B , e la cui immagine $\mathbf{r}(B)$ sia contenuta in S . L'esistenza di un atlante ottenuto mediante parametrizzazioni è assicurata dal teorema delle funzioni implicite.

La scelta delle funzioni f_{m+1}, \dots, f_n determina un'orientazione su $S \cap U$: una parametrizzazione (10.43) con $\mathbf{r}(B) \subset S \cap U$ sarà una carta ammissibile se

$$\det \left(\nabla f_{m+1}(\mathbf{r}), \dots, \nabla f_n(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^m} \right) > 0.$$

Torniamo al caso generale. Sia M una varietà di classe \mathcal{C}^k con $k \geq 1$ e sia D un aperto di M . È allora possibile definire un'applicazione continua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ che assuma valori negativi su D e positivi su $M \setminus \bar{D}$. Infatti M è uno spazio topologico regolare e a base numerabile e dunque metrizzabile. Se d è una distanza che definisce la topologia di M , e bD è la frontiera di D , basterà porre

$$f(x) = \begin{cases} -d(x, bD) & \text{se } x \in \bar{D} \\ d(x, bD) & \text{se } x \in M - D. \end{cases}$$

Diciamo che D è regolare di classe \mathcal{C}^k se è possibile scegliere una tale funzione f in modo che sia di classe \mathcal{C}^k in un intorno U di bD in M e non abbia punti critici su bD ; diciamo allora che la f *definisce* D . Se M è orientata, possiamo definire sulla frontiera di un suo aperto D di classe \mathcal{C}^k una struttura di varietà

orientata di dimensione $n - 1$. Se f è una funzione che definisce D , costruiamo un atlante orientato su bD nel modo seguente: ogni punto p di bD ammette un intorno coordinato (U, ϕ) , compatibile con l'orientazione di M , della forma

$$\phi = (f, \phi^2, \dots, \phi^n).$$

Considereremo allora la

$$(bD \cap U, (\phi^2, \dots, \phi^n))$$

come una carta dell'atlante che definisce l'orientazione di bD . La frontiera di D , pensata come varietà orientata nel modo che abbiamo precisato, si indica con ∂D e si dice il bordo o la frontiera orientata di D .

Questa nozione è molto importante per la teoria dell'integrazione delle forme differenziali.

10.8. Integrazione sulle sottovarietà e formule di Stokes

In questo paragrafo, dati un aperto A di \mathbb{R}^n e due interi non negativi h, q , indicheremo con $\Omega^{q,(h)}(A)$ lo spazio $\mathcal{C}^h(A, \Lambda^q \mathbb{R}^n)$ delle forme differenziali alternate di grado q , con coefficienti differenziabili di classe \mathcal{C}^h in A .

Sia A un dominio di \mathbb{R}^n . Una n -forma continua $\eta \in \Omega^{n,(0)}(A)$ si scrive nella forma

$$\eta = \eta_{1,\dots,n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

ove $\eta_{1,\dots,n}$ è una funzione reale, continua in A . Se D è un sottoinsieme misurabile di A ed $\eta_{1,\dots,n}$ è integrabile su D , possiamo definire

$$\int_D \eta = \int_D \eta_{1,\dots,n} dx.$$

Siano B un aperto di \mathbb{R}^q , A un aperto di \mathbb{R}^n ed $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^1(B, A)$ un'inclusione differenziabile. La $\mathbf{r}(B)$ è una *sottovarietà parametrica* di $A \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione q . Se $\eta \in \Omega^{q,(0)}(A)$, il suo pull-back $\mathbf{r}^* \eta$ è una q -forma continua su B . Se D è un dominio misurabile di B , e $\text{supp}(\mathbf{r}^* \eta) \cap \bar{D}$ un compatto contenuto in B , possiamo integrare su D la forma $\mathbf{r}^* \eta$, e porre:

$$\int_{\mathbf{r}(D)} \eta = \int_D \mathbf{r}^* \eta.$$

La formula di cambiamento di variabili negli integrali multipli ci dice che un cambiamento di parametrizzazione di $\mathbf{r}(D)$ che non ne cambi l'orientazione, ottenuto cioè mediante un diffeomorfismo

$$z : B \rightarrow B' \quad \text{tra aperti } B', B \subset \mathbb{R}^q \quad \text{con} \quad \det \left(\frac{\partial z^i}{\partial y^j} \right)_{1 \leq i, j \leq q} > 0$$

non cambia il valore dell'integrale :

$$\int_{z(D)} (\mathbf{r} \circ z^{-1})^* \eta = \int_D \mathbf{r}^* \eta.$$

Possiamo quindi integrare una q -forma su sottoinsiemi compatti di sottovarietà orientate di dimensione q , usando l'additività dell'integrale e riducendoci, per

partizione dell'unità, a considerare soltanto il caso di varietà parametriche (carte locali).

Riconsideriamo ora il concetto di *bordo* di un dominio di \mathbb{R}^n . Supponiamo che D sia un aperto relativamente compatto di \mathbb{R}^n . Sia d la distanza euclidea in \mathbb{R}^n e consideriamo la funzione continua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ negativa in D e positiva su $\mathbb{R}^n - \bar{D}$:

$$f(x) = \begin{cases} -d(x, bD) & \text{se } x \in \bar{D} \\ d(x, bD) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n - D. \end{cases}$$

Allora bD è di classe \mathcal{C}^k con $k \geq 1$ in un punto $p \in bD$ se e soltanto se la funzione f così definita è di classe \mathcal{C}^k in un intorno di p e $\nabla f(p) \neq 0$.

Se bD è di classe \mathcal{C}^k in un punto p , per il teorema delle funzioni implicite potremo trovare un intorno U di p in \mathbb{R}^n tale che $bD \cap U$ sia una sottovarietà chiusa di classe \mathcal{C}^k e di dimensione $n - 1$ dell'aperto U . L'orientazione di ∂D è definita dalle rappresentazioni parametriche

$$\mathbf{r} : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow U$$

con $\mathbf{r}(V) = bD \cap U' \subset U$ che soddisfano la condizione:

$$\det \left(\nabla f(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^{n-1}} \right) > 0.$$

Se la frontiera di un un aperto relativamente compatto D è differenziabile in tutti i punti, indichiamo con ∂D la sua frontiera come sottovarietà differenziabile orientata di dimensione $n - 1$, con l'orientazione definita nel modo precisato sopra.

TEOREMA 10.8.1 (Formula di Green). *Sia D un aperto relativamente compatto con frontiera differenziabile e sia $\eta \in \mathcal{Q}_1^{n-1}(A)$ una forma differenziale definita in un intorno aperto A di \bar{D} . Allora*

$$(10.44) \quad \int_{\partial D} \eta = \int_D d\eta.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia A un intorno aperto di \bar{D} ed $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di A . Fissiamo una partizione dell'unità $\{\chi_i\}$ di classe \mathcal{C}^∞ , subordinata ad $\{U_i\}$. Se $\eta \in \mathcal{Q}_1^{n-1}(A)$, per l'additività dell'integrale e del differenziale, è sufficiente dimostrare la (10.44) per ciascuna delle forme $\eta_i = \chi_i \cdot \eta$.

Basterà quindi dimostrare che, per ogni punto $x_0 \in A$, esiste un intorno aperto U_{x_0} di x_0 in A tale che la (10.44) sia verificata se η ha supporto contenuto in U_{x_0} .

Se η ha supporto compatto contenuto in D , entrambi i termini della (10.44) sono nulli. In questo caso infatti il secondo membro è un integrale su un compatto $[-R, R]^n \supset D$. Per il teorema di Fubini, la verifica della formula si riduce all'integrazione per parti per funzioni di una variabile reale.

Sia $x_0 \in \partial D$. Per il teorema delle funzioni implicite, esiste un intorno U di x_0 in cui sono definite coordinate $y = y(x)$ con

$$U = \{|y^h| < 1 \mid 1 \leq h \leq n\}, \\ D \cap U = \{-1 < y^1 < 0, |y^h| < 1 \text{ per } 2 \leq h \leq n\}.$$

Se η ha supporto contenuto in U , Abbiamo allora

$$\int_D d\eta = \int_{y^{-1}(D \cap U)} y^*(d\eta).$$

Scriviamo

$$\eta = \sum_{h=1}^n (-1)^h \eta_h dy^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy^h} \wedge \cdots \wedge dy^n, \quad \text{con } \eta_h \in \mathcal{C}_0^\infty(y^{-1}(U)).$$

Allora

$$d\eta = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \eta_h}{\partial y^h} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_D d\eta &= \int_{D \cap U} d\eta = \int_{y^{-1}(D \cap U)} y^*(d\eta) = \int_{y^{-1}(D \cap U)} dy^* \eta \\ &= \iint_{[-1,1]^{n-1}} dy^2 \cdots dy^n \int_{-1}^0 \frac{\partial \eta_1}{\partial y^1} dy^1 \\ &\quad + \sum_{h=2}^n \int_{-1}^0 dy^1 \iint_{[-1,1]^{n-1}} \frac{\partial \eta_h}{\partial y^h} dy^2 \cdots dy^n \\ &= \iint_{[-1,1]^{n-1}} \eta_1(0, y^2, \dots, y^n) dy^2 \cdots dy^n = \int_{\partial D} \eta, \end{aligned}$$

perché

$$\int_{-1}^0 \frac{\partial \eta_1}{\partial y^1} dy^1 = \eta_1^{(i)}(0, y^2, \dots, y^n), \quad \int_{-1}^1 \frac{\partial \eta_h}{\partial y^h} dy^h = 0 \quad \text{per } 2 \leq h \leq n.$$

□

Sia ora S una sottovarietà differenziabile orientata di dimensione q e di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, di un aperto A di \mathbb{R}^n . Ciò significa che, per ogni punto $p \in S$, possiamo trovare un intorno U_p di p ed $n - q$ funzioni differenziabili f_i per $i = q + 1, \dots, n$ definite in U_p e tali che:

$$\begin{cases} S \cap U_p = \{x \in U_p \mid f_i(x) = 0, \forall i = q + 1, \dots, n\}, \\ df_{q+1}(x) \wedge \dots \wedge df_n(x) \neq 0, \quad \forall x \in S \cap U_p. \end{cases}$$

e inoltre l'orientazione di S è definita dall'atlante in cui sono carte ammissibili in $S \cap U_p$ le parametrizzazioni:

$$\mathbf{r} : V \subset \mathbb{R}^q \rightarrow S \cap U_p \subset \mathbb{R}^n$$

per cui

$$\det \left(\nabla f_{q+1}(\mathbf{r}), \dots, \nabla f_n(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^q} \right) > 0.$$

Dato un aperto relativamente compatto D di S , diremo che la sua frontiera è di classe \mathcal{C}^k se possiamo trovare una funzione ϕ di classe \mathcal{C}^k con:

$$\begin{cases} D = \{x \in S \mid \phi(x) < 0\} \\ d\phi(x) \wedge df_{q+1}(x) \wedge \dots \wedge df_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial D, \end{cases}$$

dove bD è la frontiera di D in S e le f_{q+1}, \dots, f_n definiscono l'orientazione di S in un intorno x . Su bD consideriamo allora l'orientazione definita dalle funzioni $f_{q+1}, \dots, f_n, \phi$. La sottovarietà bD , con questa orientazione, si dice il *bordo* di D e si indica con ∂D . Otteniamo allora, per la definizione di integrale di una q -forma su una sottovarietà orientata q -dimensionale e la formula di Green:

TEOREMA 10.8.2 (Formula di Stokes). *Sia D un dominio relativamente compatto con frontiera di classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) di una sottovarietà orientata S di dimensione q di \mathbb{R}^n (con $q \geq 1$). Sia $\eta \in \Omega_1^{q-1}(U)$ per un intorno U di \bar{D} in \mathbb{R}^n . Allora:*

$$\int_{\partial D} \eta = \int_D d\eta.$$

OSSERVAZIONE 10.8.3. Le formule di Green e di Stokes si estendono al caso in cui la frontiera dell'aperto relativamente compatto D sia di classe \mathcal{C}^1 a tratti, cioè D si possa ottenere mediante unioni e intersezioni finite di aperti con frontiera regolare di classe \mathcal{C}^1 . In questo caso ∂D risulta un'unione finita di sottoinsiemi chiusi di sottovarietà orientate, due a due senza punti interni comuni e l'integrale sulla frontiera deve intendersi come la somma finita degli integrali effettuati su ciascuno di tali sottoinsiemi.

OSSERVAZIONE 10.8.4. Concludiamo con alcune osservazioni che collegano le formule di Green-Stokes al lemma di Poincaré-Volterra. Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e sia $\eta \in \Omega_k^q(A)$, ($k, q \geq 1$) con

$$d\eta = 0 \text{ in } A.$$

Una tale forma si dice *chiusa*. Allora:

(i) L'integrale della η su sottovarietà compatte di A di dimensione q è invariante per omotopia e la sua definizione si può estendere fino a definire applicazioni:

$$\pi(S^q, A) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \pi_\ell(D^q, S^{q-1}; A) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ciò dipende dal fatto che le applicazioni continue $S^n \rightarrow A$ si possono approssimare mediante applicazioni di classe \mathcal{C}^∞ e queste, per il lemma di Sard, hanno luogo di valori critici di misura q -dimensionale nulla.

(ii) Condizione necessaria e sufficiente affinché si possa trovare una forma $u \in \Omega_{k+1}^{q-1}(A)$ tale che

$$du = \eta \text{ in } A$$

(in questo caso diciamo che η è *esatta* in A) è che l'integrale di η su ogni sottovarietà compatta orientata di dimensione q di A sia 0.

OSSERVAZIONE 10.8.5. Sia $A = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Consideriamo su A la forma chiusa

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Essa non è esatta in quanto il suo integrale su una qualsiasi circonferenza

$$[0, 2\pi] \ni t \rightarrow {}^t(R \cos t, R \sin t) \in A$$

($R > 0$) è uguale a 2π . L'integrale della forma $d\theta$ su un laccetto in A , diviso per 2π si dice l'*indice* del laccetto rispetto a 0 e l'annullarsi dell'indice del laccetto è

condizione necessaria e sufficiente affinché esso sia omotopo al laccetto costante. Intuitivamente l'indice rispetto a 0 di un laccetto in A misura quante volte esso si avvolge intorno all'origine. In generale, dato un laccetto in \mathbb{R}^2 , è possibile definire l'indice del laccetto rispetto a qualsiasi punto di \mathbb{R}^2 che non appartenga al laccetto, considerando le forme:

$$\frac{(x - x_0)dy - (y - y_0)dx}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Nel caso di laccetti semplici, l'indice rispetto al laccetto di ciascun punto che non sia nel suo supporto può assumere solo due valori tra i numeri $0, 1, -1$. I punti in cui l'indice è diverso da 0 formano un aperto limitato che ha il laccetto come frontiera (Teorema di Jordan).

L'indice rispetto a 0 della frontiera orientata di un dominio regolare connesso e semplicemente connesso che contenga 0 come suo punto interno è 1, mentre la somma degli indici dei laccetti che compongono la frontiera di un dominio regolare che non contenga 0 nella sua chiusura è uguale a 0.

Calcolo differenziale sulle varietà

11.1. Fibrato cotangente e tensori

DEFINIZIONE 11.1.1. Sia M una varietà differenziabile. Il fibrato duale T^*M del suo fibrato tangente TM si dice il suo *fibrato cotangente* ed i suoi elementi *vettori cotangenti* o *covettori* di M .

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, per ogni $p \in M$ l'applicazione $T_p \ni v \rightarrow v(f) \in \mathbb{R}$ è un funzionale lineare su $T_p M$ ed è dunque un elemento di $T_p^* M$. Associamo in questo modo ad ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ una sezione differenziabile \widetilde{df} del fibrato T^*M , con

$$df(v) = \langle v, \widetilde{df}(\pi(v)) \rangle, \quad \forall v \in TM.$$

Nel seguito scriveremo per semplicità df invece di \widetilde{df} , identificando il differenziale di una funzione reale alla corrispondente sezione del fibrato cotangente.

Indichiamo con $\mathfrak{X}^*(M)$ il $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo $\Gamma(M, T^*M)$ delle sezioni differenziabili del fibrato T^*M .

Abbiamo un accoppiamento di dualità

$$(11.1) \quad \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \ni (X, \xi) \rightarrow \langle X, \xi \rangle \in \mathcal{C}^\infty(M),$$

definito da

$$\langle X, \xi \rangle(p) = [X(\xi)](p) = \xi_p(X_p) \quad \text{per ogni } p \in M.$$

DEFINIZIONE 11.1.2. Indichiamo con $\mathcal{T}^{r,s}(TM)$ la potenza tensoriale r -covariante ed s -controvariante di TM . Essa è un fibrato vettoriale con fibra $[T_p M]^{\otimes r} \otimes [T_p^* M]^{\otimes s}$. Indichiamo poi con $\mathfrak{T}^{r,s}(M)$ lo spazio delle sue sezioni, che si dicono *tensori r -covarianti ed s -controvarianti*.

Per estensione dell'accoppiamento (12.1), possiamo far corrispondere ad una sezione $\tau \in \Gamma(M, \mathcal{T}^{r,s}(TM))$ un'applicazione:

$$(11.2) \quad \tau : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{X}^*(M)}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{\mathfrak{X}(M) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ volte}} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

Si verifica senza difficoltà il seguente criterio:

PROPOSIZIONE 11.1.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione \mathbb{R} -multilineare (11.2) sia associata ad un tensore è che sia $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare.*

11.2. Forme differenziali su una varietà

Indichiamo con $\Omega^q(M)$ lo spazio dei tensori alternati q -controvarianti su M . Per la Proposizione 12.1.3 abbiamo il seguente criterio

PROPOSIZIONE 11.2.1. *Sia M una varietà differenziabile. Un'applicazione \mathbb{R} -multilineare*

$$\tau : (\mathfrak{X}(M))^q \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

definisce un elemento di $\Omega^q(M)$ se e soltanto se verifica le due condizioni:

$$(11.3) \quad \tau(X_1, X_2, \dots, X_q) = 0 \quad \text{se} \quad X_1, X_2, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M) \quad \text{ed} \\ \exists 1 \leq i < j \leq q \quad \text{con} \quad X_i = X_j,$$

$$(11.4) \quad \tau(fX_1, X_2, \dots, X_q) = f \cdot \tau(X_1, \dots, X_q), \\ \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

La condizione (12.3) è equivalente a ciascuna delle

$$(11.5) \quad \tau(X_1, \dots, X_q) = 0 \quad \text{se} \quad X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M) \\ \text{sono } \mathbb{R}\text{-linearmente dipendenti,}$$

$$(11.6) \quad \tau(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_q}) = \varepsilon(\sigma)\tau(X_1, \dots, X_q), \\ \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_q.$$

Dalle (12.3) ed (12.4) segue che

$$(11.7) \quad \tau(X_1, \dots, X_q)(p) = 0 \quad \text{se} \quad X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), \quad p \in M \\ \text{ed} \quad X_{1p}, \dots, X_{qp} \text{ sono } \mathbb{R}\text{-linearmente dipendenti in } T_pM.$$

DEFINIZIONE 11.2.2. Gli elementi di $\Omega^q(M)$ si chiamano *forme alternate di grado q* , o *q -forme alternate*.

DEFINIZIONE 11.2.3. Il *differenziale* della q -forma alternata $\tau \in \Omega^q(M)$ è la $(q+1)$ -forma alternata $d\tau \in \Omega^{q+1}(M)$ definita da

$$(11.8) \quad d\tau(X_0, X_1, \dots, X_q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i X_i[\tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_q)] \\ + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \tau([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q) \\ \forall X_0, X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M).$$

Verifichiamo che la (12.8) definisce una $(q+1)$ -forma alternata. Se, per due indici $0 \leq r < s \leq q$, è $X_r = X_s = Y$, si verifica facilmente che ciascuna delle due somme a secondo membro di (12.8) si annulla. Per dimostrare la $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilinearità, è allora sufficiente verificare che $d\tau$ verifica anche la (12.4). Abbiamo

$$[fX_0, X_i] = f[X_0, X_i] - (X_i f)X_0.$$

Quindi

$$d\tau(fX_0, X_1, \dots, X_h) = f \sum_{i=0}^h (-1)^i (X_i) \tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^h (-1)^i (X_i f) \tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h) \\
& + f \sum_{0 \leq i < j \leq h} (-1)^{i+j} \tau([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_h) \\
& - \sum_{i=1}^h (-1)^i (X_i f) \tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h) \\
& = f d\tau(X_0, X_1, \dots, X_h), \\
& \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \quad \forall X_0, X_1, \dots, X_h \in \mathfrak{X}(M).
\end{aligned}$$

Se x^1, \dots, x^m sono coordinate locali, è

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

Quindi la definizione (12.8) coincide, nel caso in cui M sia un aperto di uno spazio Euclideo, con quella data in §10.3 del Capitolo X. Poiché, per calcolare il differenziale di una q -forma alternata τ nell'intorno di un punto $p \in M$ possiamo utilizzare nella (12.8) campi di vettori definiti soltanto in un intorno di p , otteniamo in particolare il

TEOREMA 11.2.4. *Se M è una varietà differenziabile di dimensione m , il differenziale definisce un complesso di operatori differenziali del prim'ordine :*

$$(11.9) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M) & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \dots & \xrightarrow{d} & \Omega^{m-1}(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^m(M) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

È $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ e, per ogni aperto connesso U di M , le funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ con $df = 0$ su U sono costanti su U .

Ogni punto $p \in M$ ha un sistema fondamentale di intorni aperti U tali che, se $1 \leq q \leq m$ e $\tau \in \Omega^q(U)$ soddisfa $d\tau = 0$ in U , allora esiste una $\eta \in \Omega^{q-1}(U)$ tale che $d\eta = \tau$ in U .

DIMOSTRAZIONE. Il Teorema segue dal teorema analogo (Lemma di Poincaré-Volterra) dimostrato per le forme differenziali definite sugli aperti degli spazi Euclidei. \square

DEFINIZIONE 11.2.5. Poniamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^q(M) &= \{f \in \Omega^q(M) \mid df = 0\} && \text{(spazio delle } q\text{-forme chiuse su } M), \\
\mathcal{B}^q(M) &= \{df \mid f \in \Omega^{q-1}(M)\} && \text{(spazio delle } q\text{-forme esatte su } M), \\
H^q(M) &= \mathcal{Z}^q(M) / \mathcal{B}^q(M) && \text{(} q\text{-esimo gruppo di coomologia} \\
&&& \text{di de Rham di } M).
\end{aligned}$$

11.3. Il lemma di Poincaré-Volterra sugli intorni contrattili

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Un aperto U di M si dice *contrattile* se esiste un'omotopia $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(U \times [0, 1], U)$, di un'applicazione costante con l'identità.

Abbiamo:

TEOREMA 11.3.1 (Poincaré-Volterra). *Se U è un aperto contrattile di M , allora*

$$H^q(U) = \{0\} \quad \text{per ogni } q \geq 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(U \times [0, 1], U)$ con

$$F_0(p) = p_0 \in U, \quad F_1(p) = p, \quad \forall p \in U.$$

Sia $\alpha \in \Omega^q(U)$ una forma chiusa e poniamo

$$\Phi^*(\alpha) = \alpha_0 + dt \wedge \alpha_1,$$

con $\alpha_0 \in \Gamma(U \times [0, 1], \Lambda^q T^*M)$, $\alpha_1 \in \Gamma(U \times [0, 1], \Lambda^{q-1} T^*M)$. Allora

$$d(\Phi^*(\alpha)) = \Phi^*(d\alpha) = 0 \implies (d_M \alpha_0 = 0, \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial t} = d_M \alpha_1),$$

dove abbiamo indicato con d_M la restrizione del differenziale su $U \times [0, 1]$ ai vettori *orizzontali*, cioè a $\ker dt$. Definiamo:

$$\beta(t) = \int_0^t \alpha_1(s) ds.$$

Otteniamo allora, per differenziazione sotto il segno di integrale,

$$d_M \beta(t) = \int_0^t d_M \alpha_1(s) ds = \int_0^t \frac{\partial \alpha_0}{\partial t}(s) ds = \alpha_0(t),$$

perché $\alpha_0(0) = 0$. Con $u = \beta(1) \in \Omega^{q-1}(U)$, otteniamo $du = \alpha_0(1) = \alpha$ in U . \square

11.4. Derivata di Lie di un tensore

Un diffeomorfismo $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ definisce isomorfismi:

$$(\psi^{-1})^* : \mathcal{C}^\infty(M) \ni f \rightarrow f_\psi = f \circ \psi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(N)$$

$$\psi_* : \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow X^\psi = \psi_*(X) \in \mathfrak{X}(N)$$

$$\text{ove } \psi_*(X)(q) = d\psi(X_{\psi^{-1}(q)}) \quad \forall q \in N$$

$$(\psi^{-1})^* : \mathfrak{X}^*(M) \ni \xi \rightarrow \xi_\psi \in \mathfrak{X}^*(N) \quad \text{ove } \xi_\psi(X^\psi) = \xi(X) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Questi isomorfismi si estendono agli isomorfismi degli spazi tensoriali:

$$\mathcal{T}^{r,s}(M) \ni \tau \rightarrow \tau^\psi \in \mathcal{T}^{r,s}(N),$$

definiti da:

$$\tau^\psi(\xi^1_\psi, \dots, \xi^r_\psi, X^\psi_1, \dots, X^\psi_s) = \tau(\xi^1, \dots, \xi^r, X_1, \dots, X_s)$$

$$\forall \xi^1, \dots, \xi^r \in \mathfrak{X}^*(M), \quad \forall X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M).$$

Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\Phi_X = \Phi_X(t)$ il corrispondente gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di M .

Per ogni aperto U relativamente compatto in M esiste un $\epsilon > 0$ tale che, per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\Phi_X(p, t)$ sia definita per ogni $p \in U$. Quindi, per ogni $\tau \in \mathcal{T}^{r,s}(M)$, utilizzando il diffeomorfismo

$$\Phi_X(t)^{-1}(U) \ni p \rightarrow \Phi_X(p, t) \in U,$$

possiamo definire $\tau_X(t) = \tau^{\Phi_X(\cdot, t)} \in \mathcal{T}^{r,s}(U)$. Otteniamo pertanto un nuovo tensore $L_X(\tau) \in \mathcal{T}^{r,s}(M)$, ponendo :

$$(11.10) \quad L_X(\tau) = - \left. \frac{d\tau_X(t)}{dt} \right|_{t=0}.$$

DEFINIZIONE 11.4.1. Il tensore $L_X(\tau)$ è la *derivata di Lie del tensore τ rispetto al campo di vettori X* .

PROPOSIZIONE 11.4.2. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora $L_X(Y) = [X, Y]$.

DIMOSTRAZIONE. In una carta coordinata (U, x) siano $X = \sum_{i=1}^m a^i \partial/\partial x^i$, $Y_i = \sum b^i \partial/\partial x^i$. Il gruppo locale a un parametro $\Phi(t)$ è allora definito dalle equazioni :

$$\dot{\Phi}^i(x, t) = a^i(\Phi(x, t)) \quad i = 1, \dots, m.$$

Scriviamo $\Psi(x, t)$ per l'inversa della $\Phi(t)$. Abbiamo cioè $\Phi(\Psi(x, t), t) = x$ per ogni t e x nel dominio di definizione. Abbiamo allora:

$$Y(t) = \sum_{i,j=1}^m b^i(\Psi(x, t)) (\partial \Phi^j / \partial x^i)(\Psi(x, t)) (\partial / \partial x^j).$$

Otteniamo quindi:

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^m \left(\sum_{h=1}^m \frac{\partial b^i}{\partial x^h} \frac{\partial \Psi^h}{\partial t} \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} + b^i \left[\frac{\partial^2 \Phi^j}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial \Psi^k}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi^j}{\partial x^i \partial t} \right] \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Da $\Psi(\Phi(x, t), t) = x$, abbiamo:

$$\frac{\partial \Psi^h}{\partial t} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \Psi^h}{\partial x^k} \frac{\partial \Phi^k}{\partial t} = 0.$$

Poiché $\partial \Phi / \partial x$ e $\partial \Psi / \partial x$ sono entrambi l'identità per $t = 0$, abbiamo :

$$\sum_{i,j,h=1}^m \left. \frac{\partial b^i}{\partial x^h} \frac{\partial \Psi^h}{\partial t} \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} \right|_{t=0} = - \sum_{h=1}^m a^h \frac{\partial b^j}{\partial x^h}.$$

Per $t = 0$ è $\partial^2 \Phi^j / \partial x^i \partial x^k = 0$, mentre $\partial^2 \Phi^j / \partial x^i \partial t = \partial a^j / \partial x^i$ ed otteniamo quindi la formula desiderata. \square

Si verifica facilmente che :

PROPOSIZIONE 11.4.3. Se $f \in \mathcal{T}^{0,0}(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, allora $L_X f = Xf$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$.

DEFINIZIONE 11.4.4. Dati numeri positivi h, k, r, s con $h \leq r, k \leq s$, definiamo sui tensori l'operazione di *contrazione degli indici* (h, k):

$$\mathbf{c}_k^h : \mathcal{T}^{r,s}(M) \longrightarrow \mathcal{T}^{r-1,s-1}(M)$$

nel modo seguente: siano $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}(M)$ campi di vettori che definiscono un sistema di riferimento su un aperto U di M , tali cioè che $X_1(p), \dots, X_m(p) \in T_p M$ sia una base di $T_p M$ per ogni $p \in U$. Definiamo il sistema di riferimento duale $\xi^1, \dots, \xi^m \in \mathfrak{X}^*(U)$ mediante $\langle X_i, \xi^j \rangle(p) = \delta_j^i$ (delta di Kronecker) per ogni $p \in U$. Allora, su U , poniamo:

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_k^h(\tau)(\eta^1, \dots, \eta^{r-1}, Y_1, \dots, Y_{s-1}) \\ &= \sum_{j=1}^m \tau(\eta^1, \dots, \eta^{k-1}, \underbrace{\xi^j}_{\hat{k}}, \eta^k, \dots, \eta^{r-1}, Y_1, \dots, Y_{h-1}, \underbrace{X_j}_{\hat{h}}, Y_h, \dots, Y_{s-1}) \\ & \quad \forall \eta^j \in \mathfrak{X}^*(M), Y_i \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

Si verifica che la contrazione è ben definita, che cioè non dipende dalla scelta del sistema di riferimento su U .

Abbiamo:

PROPOSIZIONE 11.4.5. *La derivata di Lie commuta con le contrazioni.*

Utilizzando questa proposizione possiamo calcolare la derivata di Lie dei diversi tensori a partire dalla definizione della derivata di Lie dei campi di vettori. Ad esempio, se $\alpha \in \Omega^1(M)$, abbiamo:

$$(11.11) \quad L_X(\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha([X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

e, più in generale:

PROPOSIZIONE 11.4.6. *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\alpha \in \Omega^h(M)$, allora:*

$$(11.12) \quad \begin{aligned} L_X(\alpha)(X_1, \dots, X_h) &= X(\alpha(X_1, \dots, X_h)) \\ &+ \sum_{i=1}^h (-1)^i \alpha([X, X_i], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h), \\ & \quad \forall X_1, \dots, X_h \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 11.4.7. Dato un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$, definiamo il *prodotto interno* rispetto ad $X \in \mathfrak{X}(M)$ mediante:

$$\begin{aligned} \iota_X : \mathcal{T}^{r,s}(M) \ni \tau &\rightarrow \iota_X(\tau) \in \mathcal{T}^{r,s-1}(M) \\ \iota_X(\tau)(\xi^1, \dots, \xi^r, X_1, \dots, X_{s-1}) &= \tau(\xi^1, \dots, \xi^r, X, X_1, \dots, X_{s-1}) \\ \forall \xi^1, \dots, \xi^r \in \mathfrak{X}^*(M), \forall X_1, \dots, X_{s-1} &\in \mathfrak{X}(M) \end{aligned}$$

quando $s \geq 1$. Porremo $\iota_X(\tau) = 0$ per ogni tensore 0-controvariante.

TEOREMA 11.4.8. *Valgono le formule:*

$$(11.13) \quad L_X(\alpha) = d(\iota_X \alpha) + \iota_X(d\alpha) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall \alpha \in \Omega^h(X),$$

$$(11.14) \quad \begin{aligned} [L_X, \iota_Y](\tau) &= L_X(\iota_Y(\tau)) - \iota_Y(L_X(\tau)) \\ &= \iota_{[X, Y]}(\tau) \end{aligned} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tau \in \mathcal{T}^{r,s}(M).$$

11.5. Distribuzioni vettoriali e teorema di Frobenius

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m .

DEFINIZIONE 11.5.1. Una *distribuzione vettoriale generalizzata* su M è un sotto- $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo \mathfrak{B} di $\mathfrak{X}(M)$.

Ciò significa che

$$fX + gY \in \mathfrak{B}, \quad \text{per ogni } X, Y \in \mathfrak{B} \text{ e per ogni } f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Per ogni $p \in M$ poniamo

$$\mathfrak{B}_p = \{X_p \mid X \in \mathfrak{B}\} \subset T_p M.$$

La dimensione di \mathfrak{B}_p , come spazio vettoriale reale, è il *rango* di \mathfrak{B} in p .

DEFINIZIONE 11.5.2. Una distribuzione vettoriale generalizzata \mathfrak{B} di rango costante si dice una *distribuzione vettoriale*.

In questo caso, gli elementi di \mathfrak{B} sono le sezioni di un sottofibrato vettoriale $\xi_{\mathfrak{B}} = (W \xrightarrow{\pi} M)$ del fibrato tangente e, viceversa, se $\xi = (W \xrightarrow{\pi} M)$ è un sottofibrato vettoriale del fibrato tangente, lo spazio $\mathfrak{B} = \Gamma(M, W)$ delle sue sezioni è una distribuzione vettoriale su M .

Sia $\Omega^*(M) = \bigoplus_{h=0}^m \Omega^h(M)$ l'algebra delle forme differenziali alternate su M . Indichiamo con $\Omega^+(M) = \bigoplus_{h=1}^m \Omega^h(M)$ l'ideale delle forme di grado positivo, che non contengono cioè componenti di grado 0.

Associamo alla distribuzione vettoriale \mathfrak{B} il *sistema differenziale*:

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{B}} = \{\alpha \in \Omega^+(M) \mid \alpha|_{\mathfrak{B}} = 0\}.$$

Osserviamo che $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$ è un *sotto- $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo graduato* ed un *ideale* di $\Omega^*(M)$, e che, come ideale, è generato dai suoi elementi di grado uno.

DEFINIZIONE 11.5.3. Chiamiamo *sistema differenziale* su M un qualsiasi ideale \mathcal{I} di $\Omega^*(M)$ contenuto in $\Omega^+(M)$.

Ad un sistema differenziale \mathcal{I} associamo la sua *distribuzione caratteristica*

$$(11.15) \quad \mathfrak{B}_{\mathcal{I}} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \iota_X(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}\}.$$

La relazione tra sistemi differenziali e distribuzioni vettoriali è descritta dal seguente:

LEMMA 11.5.4. Sia \mathfrak{B} una distribuzione vettoriale ed $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$ il sistema differenziale ad essa associato. Allora \mathfrak{B} è la distribuzione caratteristica di $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$.

Se \mathcal{I} è un sistema differenziale e $\mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$ la sua distribuzione caratteristica, abbiamo l'inclusione

$$(11.16) \quad \mathcal{I} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{B}_{\mathcal{I}}}.$$

ESEMPIO 11.5.5. Sia \mathcal{I} il sistema differenziale $\Omega(\mathbb{R}^n) \wedge (dx^1 + dx^2 \wedge dx^3)$ in \mathbb{R}^m , con $m \geq 3$. Allora $\mathfrak{B}_{\mathcal{I}} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \left[\frac{\partial}{\partial x^4}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right]$ ed $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}_{\mathcal{I}}}$ è l'ideale di $\Omega^*(M)$ generato da dx^1, dx^2, dx^3 .

DEFINIZIONE 11.5.6. Sia \mathfrak{B} una distribuzione vettoriale su M .

Una sottovarietà N di M si dice una *sottovarietà integrale* di \mathfrak{B} se $T_p N \subset \mathfrak{B}_p$ per ogni $p \in N$.

Una distribuzione vettoriale \mathfrak{B} si dice *totalmente integrabile* se per ogni punto $p \in M$ esiste una sottovarietà integrale N di \mathfrak{B} con $p \in N$ e $T_p N = \mathfrak{B}_p$.

Diciamo che \mathfrak{B} è *formalmente integrabile* se

$$(11.17) \quad [\mathfrak{B}, \mathfrak{B}] \subset \mathfrak{B}.$$

Abbiamo il

TEOREMA 11.5.7 (Frobenius). *Sia \mathfrak{B} una distribuzione vettoriale di rango costante k . Sono allora equivalenti:*

- (i) \mathfrak{B} è *totalmente integrabile*;
- (ii) \mathfrak{B} è *formalmente integrabile*;
- (iii) $d\mathcal{I}_{\mathfrak{B}} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$

DIMOSTRAZIONE. (ii) \implies (i). Sia $p \in M$. Poiché \mathfrak{B}_p ha rango k , possiamo fissare k campi vettoriali $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{B}$ con X_{1p}, \dots, X_{kp} linearmente indipendenti in $T_p M$. Possiamo allora trovare una carta locale (U, x) per cui:

$$X_i = \sum_{j=1}^m a_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \text{con } a_i^j(0) = \delta_i^j \quad \text{per } 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m.$$

Consideriamo la matrice $k \times k$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1k}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}(x) & a_{k2}(x) & \cdots & a_{kk}(x) \end{pmatrix}.$$

Poiché $A(0) = I_k$, a meno di restringere l'intorno U di p , possiamo supporre che $A(x)$ sia invertibile in U . Sia $B(x) = (b_i^j(x))$ la sua inversa. Allora i campi di vettori

$$Y_i = \sum_{j=1}^k b_i^j(x) X_j = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=k+1}^m c_i^h(x) \frac{\partial}{\partial x^h} \quad (i = 1, \dots, k)$$

generano \mathfrak{B}_q in ogni punto $q \in U$. La condizione (ii) implica che

$$[Y_i, Y_j]_q \in \langle Y_{1q}, \dots, Y_{kq} \rangle \quad \text{per ogni } q \in U.$$

Poiché i campi di vettori

$$Y_1, \dots, Y_k, \frac{\partial}{\partial x^{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$$

definiscono una base di $T_q M$ in ogni punto $q \in U$, ed

$$[Y_i, Y_j]_q \in \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial x^{k+1}} \right]_q, \dots, \left[\frac{\partial}{\partial x^m} \right]_q \right\rangle,$$

otteniamo che $[Y_i, Y_j] = 0$ in U per ogni $1 \leq i, j \leq k$.

Dimostriamo ora il seguente

LEMMA 11.5.8. *Siano Y_1, \dots, Y_k campi di vettori definiti e linearmente indipendenti in tutti i punti di un intorno aperto U di $p \in M$. Se $[Y_i, Y_j] = 0$ in U per ogni $1 \leq i < j \leq k$, allora esiste una carta locale (U', y) con $p \in U' \subset U$ per cui $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ in U' per $i = 1, \dots, k$.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che (U, x) sia una carta locale in p . Ragioniamo per induzione su k .

Sia $k = 1$. Possiamo supporre che $Y_{1p} = \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \right]_p$. Il campo di vettori Y_1 definisce un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi $x(U) \times \mathbb{R} \supset \tilde{U} \ni (x, t) \rightarrow \Phi(x, t) \in \mathbb{R}^m$, ove \tilde{U} è un intorno di $x(U) \times \{0\}$ in $x(U) \times \mathbb{R}$. Abbiamo $\frac{\partial \Phi^1(x, t)}{\partial t} = 1$ per $x = 0, t = 0$ e quindi, per il teorema delle funzioni implicite, $x = \Phi(0, y^2, \dots, y^m; y^1)$ definisce coordinate in un intorno U' di p in U , per cui $Y_1 = \frac{\partial}{\partial y^1}$.

Sia ora $k > 1$ e supponiamo che il lemma valga per un numero inferiore di campi di vettori linearmente indipendenti che commutano tra loro. Per la prima parte della dimostrazione, possiamo fissare coordinate locali (U, x) tali che:

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad Y_i = \sum_{j=1}^m a_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{per } 2 \leq j \leq k.$$

Poiché

$$[Y_1, Y_i] = \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_i^j(x)}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{per } 2 \leq j \leq k,$$

la condizione $[Y_1, Y_i] = 0$ implica che i coefficienti a_i^j sono indipendenti da x^1 in un intorno $\{-\epsilon < x^1 < \epsilon\} \subset x(U)$.

Poniamo $Z_j = \sum_{i=2}^m a_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ per $2 \leq j \leq k$. Allora $[Z_i, Z_j] = 0$ per $2 \leq i, j \leq k$. Per l'ipotesi induttiva, possiamo trovare un cambiamento delle coordinate x^2, \dots, x^m per cui risulti $Z_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$ per $2 \leq j \leq k$. Otteniamo perciò nelle nuove coordinate x^1, \dots, x^m :

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + a_i^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} \quad \text{per } 2 \leq i \leq k.$$

Da $[Y_i, Y_j] = 0$ per ogni $1 \leq i, j \leq k$ otteniamo allora che le a_i^1 sono indipendenti da x^1 e $\partial a_i^1 / \partial x^j = \partial a_j^1 / \partial x^i$ per $2 \leq i, j \leq k$. Possiamo quindi trovare una funzione ϕ , indipendente da x^1 , tale che $a_i^1 = \partial \phi / \partial x^i$ per $2 \leq i \leq k$. Nelle nuove variabili:

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + \phi(x^2, \dots, x^m) \\ y^i = x^i \end{cases} \quad \text{per } 2 \leq i \leq m$$

abbiamo $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ per $1 \leq i \leq k$. \square

Completiamo ora la dimostrazione dell'implicazione (ii) \implies (i). Fissata una carta locale (U', y) con centro in p per cui $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$, la

$$N = \{y^{k+1} = 0, \dots, y^m = 0\}$$

è una sottovarietà di M , contenuta in U' , contenente p e tale che $T_q N = \mathfrak{B}_q$ per ogni $q \in N$.

(ii) \implies (iii) Se $\alpha \in \Omega^1(M)$ si annulla su tutti i campi di \mathfrak{B} , abbiamo:

$$(*) \quad d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{B}$$

perché $\alpha(Y) = 0$, $\alpha(X) = 0$ ed anche $\alpha([X, Y]) = 0$ perché $[X, Y] \in \mathfrak{B}$. Si ragiona in modo analogo per forme di grado maggiore di uno.

(iii) \implies (ii) Abbiamo $\mathfrak{B} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \alpha(X) = 0, \forall \alpha \in \mathcal{I}_{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{X}^*(M)\}$. L'implicazione è allora una facile conseguenza della (*).

(ii) \implies (i) Segue dal fatto che il commutatore di due campi di vettori tangenti a una sottovarietà N in tutti i suoi punti è ancora tangente alla sottovarietà N in tutti i suoi punti. \square

Osserviamo infine che vale la :

PROPOSIZIONE 11.5.9. *Se \mathcal{I} è un sistema differenziale in M e $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$, allora $\mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$ è formalmente integrabile.*

DIMOSTRAZIONE. Se $X \in \mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$ ed $\alpha \in \mathcal{I}$, allora :

$$L_X(\alpha) = d(\iota_X(\alpha)) + \iota_X(d\alpha) \in \mathcal{I}$$

per l'ipotesi che $d\alpha \in d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$. Poiché la derivata di Lie commuta con la contrazione, abbiamo, per $X, Y \in \mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$ ed $\alpha \in \mathcal{I}$:

$$\iota_{[X, Y]}(\alpha) = \iota_{L_X(Y)}(\alpha) = L_X(\iota_Y(\alpha)) - \iota_Y(L_X(\alpha)) \in \mathcal{I}.$$

Questo vale per ogni $\alpha \in \mathcal{I}$ e quindi anche $[X, Y] \in \mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$. \square

Calcolo differenziale sulle varietà

12.1. Fibrato cotangente e tensori

DEFINIZIONE 12.1.1. Sia M una varietà differenziabile. Il fibrato duale T^*M del suo fibrato tangente TM si dice il suo *fibrato cotangente* ed i suoi elementi *vettori cotangenti* o *covettori* di M .

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, per ogni $p \in M$ l'applicazione $T_p \ni v \rightarrow v(f) \in \mathbb{R}$ è un funzionale lineare su T_pM ed è dunque un elemento di T_p^*M . Associamo in questo modo ad ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ una sezione differenziabile \widetilde{df} del fibrato T^*M , con

$$df(v) = \langle v, \widetilde{df}(\pi(v)) \rangle, \quad \forall v \in TM.$$

Nel seguito scriveremo per semplicità df invece di \widetilde{df} , identificando il differenziale di una funzione reale alla corrispondente sezione del fibrato cotangente.

Indichiamo con $\mathfrak{X}^*(M)$ il $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo $\Gamma(M, T^*M)$ delle sezioni differenziabili del fibrato T^*M . Abbiamo un accoppiamento di dualità

$$(12.1) \quad \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \ni (X, \xi) \rightarrow \langle X, \xi \rangle \in \mathcal{C}^\infty(M),$$

definito da

$$\langle X, \xi \rangle(p) = \xi_p(X_p) \quad \text{per ogni } p \in M.$$

DEFINIZIONE 12.1.2. Indichiamo con $T^{r,s}M$ la potenza tensoriale r -covariante ed s -controvariante di TM . Essa è un fibrato vettoriale con fibra $[T_pM]^{\otimes r} \otimes [T_p^*M]^{\otimes s}$. In particolare, $T^{1,0}M = TM$ e $T^{0,1}M = T^*M$. Indichiamo poi con $\mathfrak{T}^{r,s}(M)$ lo spazio delle sue sezioni, che si dicono *tensori r -covarianti ed s -controvarianti*.

Per estensione dell'accoppiamento (12.1), possiamo far corrispondere ad una sezione $\tau \in \mathfrak{T}^{r,s}(M)$ un'applicazione \mathbb{R} -multilineare

$$(12.2) \quad \tau : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ volte}} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M).$$

Si verifica senza difficoltà il seguente criterio:

PROPOSIZIONE 12.1.3. *Un'applicazione \mathbb{R} -multilineare (12.2) è associata ad un tensore se e soltanto se è $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare.* \square

12.2. Forme differenziali su una varietà

Sia M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ e di dimensione m . Indichiamo con $\Omega^q(M)$ lo spazio dei tensori alternati q -controvarianti su M . Per la Proposizione 12.1.3 abbiamo il seguente criterio

PROPOSIZIONE 12.2.1. *Un'applicazione \mathbb{R} -multilineare*

$$\tau : (\mathfrak{X}(M))^q \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

definisce un elemento di $\Omega^q(M)$ se e soltanto se verifica le due condizioni:

$$(12.3) \quad \tau(X_1, X_2, \dots, X_q) = 0 \quad \text{se } X_1, X_2, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M) \quad \text{ed} \\ \exists 1 \leq i < j \leq h \quad \text{con } X_i = X_j,$$

$$(12.4) \quad \tau(fX_1, X_2, \dots, X_q) = f \cdot \tau(X_1, \dots, X_q), \\ \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

La condizione (12.3) è equivalente a ciascuna delle

$$(12.5) \quad \tau(X_1, \dots, X_q) = 0 \quad \text{se } X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M) \\ \text{sono } \mathbb{R}\text{-linearmente dipendenti,}$$

$$(12.6) \quad \tau(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_q}) = \varepsilon(\sigma)\tau(X_1, \dots, X_q), \\ \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall \sigma \in \mathbf{S}_q.$$

Dalle (12.3) ed (12.4) segue che

$$(12.7) \quad \tau(X_1, \dots, X_q)(p) = 0 \quad \text{se } X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), \quad p \in M \\ \text{ed } X_{1_p}, \dots, X_{q_p} \text{ sono } \mathbb{R}\text{-linearmente dipendenti in } T_p M.$$

DEFINIZIONE 12.2.2. Gli elementi di $\Omega^q(M)$ si chiamano *forme alternate di grado q* , o *q -forme alternate*.

DEFINIZIONE 12.2.3. Chiamiamo *differenziale* della q -forma alternata $\tau \in \Omega^q(M)$ la $(q+1)$ -forma alternata $d\tau \in \Omega^{q+1}(M)$, definita da

$$(12.8) \quad d\tau(X_0, X_1, \dots, X_q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i X_i [\tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_q)] \\ + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \tau([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q) \\ \forall X_0, X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M).$$

Verifichiamo che la (12.8) definisce una $(q+1)$ -forma alternata. Se, per due indici $0 \leq r < s \leq q$, è $X_r = X_s = Y$, si verifica facilmente che ciascuna delle due somme a secondo membro di (12.8) si annulla. Per dimostrare la $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilinearità, è allora sufficiente verificare che $d\tau$ verifica anche la (12.4). Abbiamo

$$[fX_0, X_i] = f[X_0, X_i] - (X_i f)X_0.$$

Quindi

$$d\tau(fX_0, X_1, \dots, X_h) = f \sum_{i=0}^h (-1)^i (X_i) \tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h) \\ + \sum_{i=1}^h (-1)^i (X_i f) \tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h)$$

$$\begin{aligned}
& + f \sum_{0 \leq i < j \leq h} (-1)^{i+j} \tau([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_h) \\
& - \sum_{i=1}^h (-1)^i (X_i f) \tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h) \\
& = f d\tau(X_0, X_1, \dots, X_h), \\
& \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \quad \forall X_0, X_1, \dots, X_h \in \mathfrak{X}(M).
\end{aligned}$$

Se x^1, \dots, x^m sono coordinate locali, è

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

Quindi la definizione (12.8) coincide, nel caso in cui M sia un aperto di uno spazio Euclideo, con quella data in §10.3. Poiché, per calcolare il differenziale di una q -forma alternata τ nell'intorno di un punto $p \in M$ possiamo utilizzare nella (12.8) campi di vettori definiti soltanto in un intorno di p , otteniamo in particolare il

TEOREMA 12.2.4. *Se M è una varietà differenziabile di dimensione m , il differenziale definisce un complesso di operatori differenziali del prim'ordine :*

$$(12.9) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M) & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \dots & \xrightarrow{d} & \Omega^{m-1}(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^m(M) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

È $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ e, per ogni aperto connesso U di M , le funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ con $df = 0$ su U sono costanti su U .

Ogni punto $p \in M$ ha un sistema fondamentale di intorni aperti U tali che, se $1 \leq q \leq m$ e $\tau \in \Omega^q(U)$ soddisfa $d\tau = 0$ in U , allora esiste una $\eta \in \Omega^{q-1}(U)$ tale che $d\eta = \tau$ in U .

DIMOSTRAZIONE. Il Teorema segue dal teorema analogo (Lemma di Poincaré-Volterra) dimostrato per le forme differenziali definite sugli aperti degli spazi Euclidei. \square

DEFINIZIONE 12.2.5. Poniamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^q(M) &= \{f \in \Omega^q(M) \mid df = 0\} && \text{(spazio delle } q\text{-forme chiuse su } M), \\
\mathcal{B}^q(M) &= \{df \mid f \in \Omega^{q-1}(M)\} && \text{(spazio delle } q\text{-forme esatte su } M), \\
H^q(M) &= \mathcal{Z}^q(M) / \mathcal{B}^q(M) && \text{(} q\text{-esimo gruppo di coomologia} \\
&&& \text{di de Rham di } M).
\end{aligned}$$

12.3. Il lemma di Poincaré-Volterra sugli intorni contrattili

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Un aperto U di M si dice *contrattile* se esiste un'omotopia $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(U \times [0, 1], U)$ dell'identità su U con un'applicazione costante.

TEOREMA 12.3.1 (Poincaré-Volterra). *Se U è un aperto contrattile di M , allora*

$$H^q(U) = \{0\} \quad \text{per ogni } q \geq 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un'omotopia $\Phi = \{\phi_t\} \in \mathcal{C}^\infty(U \times [0, 1], U)$ con

$$\phi_0(p) = p_0 \in U, \quad \phi_1(p) = p, \quad \forall p \in U.$$

Sia $q \geq 1$ ed $\alpha \in \Omega^q(U)$ una q -forma chiusa. Poniamo

$$\Phi^*(\alpha) = \alpha_0 + dt \wedge \alpha_1,$$

con $\alpha_0 \in \Gamma(U \times [0, 1], \Lambda^q T^*M)$, $\alpha_1 \in \Gamma(U \times [0, 1], \Lambda^{q-1} T^*M)$. Allora

$$d(\Phi^*(\alpha)) = \Phi^*(d\alpha) = 0 \implies (d_M \alpha_0 = 0, \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial t} = d_M \alpha_1),$$

dove abbiamo indicato con d_M la restrizione del differenziale su $U \times [0, 1]$ ai vettori *orizzontali*, cioè a $\ker(dt)$. Definiamo:

$$\beta(t) = \int_0^t \alpha_1(s) ds.$$

Differenziando sotto il segno di integrale otteniamo

$$d_M \beta(t) = \int_0^t d_M \alpha_1(s) ds = \int_0^t \frac{\partial \alpha_0}{\partial t}(s) ds = \alpha_0(t),$$

perché $\alpha_0(0) = 0$. Con $u = \beta(1) \in \Omega^{q-1}(U)$, otteniamo $d_M u = \alpha_0(1) = \alpha$ in U . \square

12.4. Derivata di Lie di un tensore

Siano M, N due varietà differenziabili. Un'applicazione $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ definisce applicazioni $\psi_* = d\psi : TM \rightarrow TN$ (immagine diretta o *pushdown*) e $\psi^* : \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$, $\psi^* : \mathfrak{X}^*(N) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ (immagine inversa o *pullback*).

Se ψ è un diffeomorfismo, sia ψ_* che ψ^* si estendono ad isomorfismi:

$$\begin{aligned} \psi_* : T^{r,s} M &\longrightarrow T^{r,s} N, & \psi_* : \mathfrak{T}^{r,s}(M) &\longrightarrow \mathfrak{T}^{r,s}(N), \\ \psi^* : T^{r,s} N &\longrightarrow T^{r,s} M, & \psi^* : \mathfrak{T}^{r,s}(N) &\longrightarrow \mathfrak{T}^{r,s}(M), \end{aligned}$$

con $\psi^* = (\psi^{-1})_* = \psi_*^{-1}$ e $\psi_* = (\psi^{-1})^* = (\psi^*)^{-1}$.

Siano $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\Phi^X = \{\phi_t^X\}$ il corrispondente gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di M .

Per ogni aperto U relativamente compatto in M esiste un $\epsilon > 0$ tale che, per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, le ϕ_t^X siano definite su U . Quindi, per ogni $\tau \in \mathfrak{T}^{r,s}(M)$, la $(\phi_t^X)^* \tau$ definisce un tensore di $\mathfrak{T}^{r,s}(U)$. In particolare, per ogni $p \in U$ fissato, è definita un'applicazione $\{t \rightarrow [(\phi_t^X)^* \tau](p)\} \in \mathcal{C}^\infty((-\epsilon, \epsilon), T_p^{r,s} M)$. Otteniamo pertanto un nuovo tensore $L_X(\tau) \in \mathfrak{T}^{r,s}(M)$, ponendo:

$$(12.10) \quad L_X(\tau)(p) = \left. \frac{d(\phi_t^X)^* \tau(p)}{dt} \right|_{t=0} = - \left. \frac{d(\phi_t^X)_* \tau(p)}{dt} \right|_{t=0}.$$

DEFINIZIONE 12.4.1. Chiamiamo il tensore $L_X(\tau)$ *derivata di Lie di τ rispetto al campo di vettori X* .

Si verifica facilmente che:

PROPOSIZIONE 12.4.2. Se $f \in \mathfrak{T}^{0,0}(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, allora $L_X f = Xf$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti $L_X f = \frac{d}{dt} f(\phi_t^X)|_{t=0} = Xf$, per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. \square

PROPOSIZIONE 12.4.3. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora $L_X(Y) = [X, Y]$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Poniamo $Y(t) = (\phi_t^X)_* Y$. In una carta coordinata (U, x) siano $X = \sum_{i=1}^m a^i \partial/\partial x^i$, $Y_i = \sum b^i \partial/\partial x^i$. Scriviamo $\Phi = \Phi(x, t)$ per la funzione che descrive nelle coordinate locali il gruppo locale a un parametro Φ_X . La Φ è soluzione del sistema

$$\dot{\Phi}^i(x, t) = a^i(\Phi(x, t)) \quad i = 1, \dots, m.$$

Scriviamo $\Psi(x, t)$ per l'inversa $\Phi(x, -t)$ della $\Phi(t)$. Abbiamo cioè $\Phi(\Psi(x, t), t) = x$ per ogni t ed x nel dominio di definizione. Abbiamo allora:

$$Y(t) = \sum_{i,j=1}^m b^i(\Psi(x, t)) (\partial \Phi^j / \partial x^i)(\Psi(x, t)) (\partial / \partial x^j).$$

Otteniamo quindi:

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^m \left(\sum_{h=1}^m \frac{\partial b^i}{\partial x^h} \frac{\partial \Psi^h}{\partial t} \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} + b^i \left[\frac{\partial^2 \Phi^j}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial \Psi^k}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi^j}{\partial x^i \partial t} \right] \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Da $\Psi(\Phi(x, t), t) = x$, abbiamo:

$$\frac{\partial \Psi^h}{\partial t} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \Psi^h}{\partial x^k} \frac{\partial \Phi^k}{\partial t} = 0.$$

Poiché $\partial \Phi / \partial x$ e $\partial \Psi / \partial x$ sono entrambi l'identità per $t = 0$, abbiamo:

$$\sum_{i,j,h=1}^m \frac{\partial b^i}{\partial x^h} \frac{\partial \Psi^h}{\partial t} \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} \Big|_{t=0} = - \sum_{h=1}^m a^h \frac{\partial b^j}{\partial x^h}.$$

Per $t = 0$ è $\partial^2 \Phi^j / \partial x^i \partial x^k = 0$, mentre $\partial^2 \Phi^j / \partial x^i \partial t = \partial a^j / \partial x^i$ ed otteniamo quindi la formula desiderata. \square

DEFINIZIONE 12.4.4. Dati numeri positivi h, k, r, s con $h \leq r, k \leq s$, definiamo sui tensori l'operazione di *contrazione degli indici* (h, k) :

$$\mathfrak{C}_k^h : \mathfrak{T}^{r,s}(M) \longrightarrow \mathfrak{T}^{r-1,s-1}(M)$$

nel modo seguente: siano $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}(M)$ campi di vettori che definiscono un sistema di riferimento su un aperto U di M , tali cioè che $X_1(p), \dots, X_m(p) \in T_p M$ sia una base di $T_p M$ per ogni $p \in U$. Definiamo il sistema di riferimento duale $\xi^1, \dots, \xi^m \in \mathfrak{X}^*(U)$ mediante $\langle X_i, \xi^j \rangle(p) = \delta_j^i$ (delta di Kronecker) per ogni $p \in U$. Allora, su U , poniamo:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{C}_k^h(\tau)(\eta^1, \dots, \eta^{r-1}, Y_1, \dots, Y_{s-1}) \\ &= \sum_{j=1}^m \tau(\eta^1, \dots, \eta^{k-1}, \underbrace{\xi^j, \eta^k}_{\hat{k}}, \dots, \eta^{r-1}, Y_1, \dots, Y_{h-1}, \underbrace{X_j, Y_h}_{\hat{h}}, \dots, Y_{s-1}) \\ & \quad \forall \eta^j \in \mathfrak{X}^*(M), Y_i \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

Si verifica che la contrazione è ben definita, che cioè non dipende dalla scelta del sistema di riferimento su U .

Abbiamo :

PROPOSIZIONE 12.4.5. *La derivata di Lie commuta con le contrazioni.*

DIMOSTRAZIONE. Ciò è conseguenza del fatto che le contrazioni commutano con gli isomorfismi locali degli spazi di tensori che sono definiti dall'azione di un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi. \square

Utilizzando questa proposizione possiamo calcolare la derivata di Lie dei diversi tensori a partire dalla definizione della derivata di Lie delle funzioni e dei campi di vettori. Ad esempio, se $\alpha \in \Omega^1(M)$, abbiamo :

$$(12.11) \quad L_X(\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha([X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

e, più in generale :

PROPOSIZIONE 12.4.6. *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\alpha \in \Omega^h(M)$, allora :*

$$(12.12) \quad \begin{aligned} L_X(\alpha)(X_1, \dots, X_h) &= X(\alpha(X_1, \dots, X_h)) \\ &+ \sum_{i=1}^h (-1)^i \alpha([X, X_i], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h), \\ &\forall X_1, \dots, X_h \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 12.4.7. Dato un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$, definiamo il *prodotto interno* rispetto ad $X \in \mathfrak{X}(M)$ mediante :

$$\begin{aligned} \iota_X : \mathfrak{T}^{r,s}(M) \ni \tau &\rightarrow \iota_X(\tau) \in \mathfrak{T}^{r,s-1}(M) \\ \iota_X(\tau)(\xi^1, \dots, \xi^r, X_1, \dots, X_{s-1}) &= \tau(\xi^1, \dots, \xi^r, X, X_1, \dots, X_{s-1}) \\ \forall \xi^1, \dots, \xi^r \in \mathfrak{X}^*(M), \forall X_1, \dots, X_{s-1} &\in \mathfrak{X}(M) \end{aligned}$$

quando $s \geq 1$. Porremo $\iota_X(\tau) = 0$ per ogni tensore 0-controvariante.

Il prodotto interno per il campo di vettori X si indica anche con $X \lrcorner \tau$.

TEOREMA 12.4.8. *Valgono le formule:*

$$(12.13) \quad L_X(\alpha) = d(\iota_X \alpha) + \iota_X(d\alpha) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall \alpha \in \Omega^h(X),$$

$$(12.14) \quad \begin{aligned} [L_X, \iota_Y](\tau) &= L_X(\iota_Y(\tau)) - \iota_Y(L_X(\tau)) = \iota_{[X, Y]}(\tau) \\ &\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tau \in \mathfrak{T}^{r,s}(M). \end{aligned}$$

12.5. Distribuzioni vettoriali e teorema di Frobenius

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m .

DEFINIZIONE 12.5.1. Una *distribuzione vettoriale generalizzata* su M è un sotto- $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo \mathfrak{B} di $\mathfrak{X}(M)$.

Ciò significa che

$$fX + gY \in \mathfrak{B}, \quad \text{per ogni } X, Y \in \mathfrak{B} \text{ e per ogni } f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Per ogni $p \in M$ poniamo

$$\mathfrak{B}_p = \{X_p \mid X \in \mathfrak{B}\} \subset T_p M.$$

La dimensione di \mathfrak{B}_p , come spazio vettoriale reale, è il *rango* di \mathfrak{B} in p .

DEFINIZIONE 12.5.2. Una distribuzione vettoriale generalizzata \mathfrak{B} di rango costante si dice una *distribuzione vettoriale*.

In questo caso, gli elementi di \mathfrak{B} sono le sezioni di un sottofibrato vettoriale $\xi_{\mathfrak{B}} = (W \xrightarrow{\pi} M)$ del fibrato tangente e, viceversa, se $\xi = (W \xrightarrow{\pi} M)$ è un sottofibrato vettoriale del fibrato tangente, lo spazio $\mathfrak{B} = \Gamma_{\xi}(M, W)$ delle sue sezioni è una distribuzione vettoriale su M .

Denotiamo con $\Omega^*(M) = \bigoplus_{h=0}^m \Omega^h(M)$ l'algebra delle forme differenziali alternate su M e con $\Omega^+(M) = \bigoplus_{h=1}^m \Omega^h(M)$ l'ideale delle forme di grado positivo, che non contengono cioè componenti di grado 0.

DEFINIZIONE 12.5.3. Un *sistema differenziale esterno* su M è un ideale \mathcal{I} dell'algebra di Grassmann $\Omega^*(M)$, contenuto nell'ideale $\Omega^+(M)$.

Associamo alla distribuzione vettoriale \mathfrak{B} il *sistema differenziale esterno*

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{B}} = \{\alpha \in \Omega^+(M) \mid \alpha|_{\mathfrak{B}} = 0\}.$$

Osserviamo che $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$ è un *sotto-* $\mathcal{C}^\infty(M)$ -*modulo graduato* ed un *ideale* di $\Omega^*(M)$, e che, come ideale, è generato dai suoi elementi di grado uno.

DEFINIZIONE 12.5.4. Sia \mathcal{I} un sistema differenziale esterno. La sua *distribuzione caratteristica* è la distribuzione vettoriale

$$(12.15) \quad \mathfrak{B}_{\mathcal{I}} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \iota_X(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}\}.$$

La relazione tra sistemi differenziali esterni e distribuzioni vettoriali è descritta dal seguente:

LEMMA 12.5.5. Sia \mathfrak{B} una distribuzione vettoriale ed $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$ il sistema differenziale esterno ad essa associato. Allora \mathfrak{B} è la distribuzione caratteristica di $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$.

Se \mathcal{I} è un sistema differenziale esterno e $\mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$ la sua distribuzione caratteristica, abbiamo l'inclusione

$$(12.16) \quad \mathcal{I} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{B}_{\mathcal{I}}}.$$

ESEMPIO 12.5.6. Sia \mathcal{I} il sistema differenziale $\Omega^*(\mathbb{R}^m) \wedge (dx^1 + dx^2 \wedge dx^3)$ in \mathbb{R}^m , con $m \geq 3$. Allora $\mathfrak{B}_{\mathcal{I}} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \left[\frac{\partial}{\partial x^4}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right]$ ed $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}_{\mathcal{I}}}$ è l'ideale di $\Omega^*(M)$ generato da dx^1, dx^2, dx^3 .

Sia \mathfrak{B} una distribuzione vettoriale su M .

DEFINIZIONE 12.5.7. Una sottovarietà N di M si dice una *sottovarietà integrale* di \mathfrak{B} se $T_p N \subset \mathfrak{B}_p$ per ogni $p \in N$.

Diciamo che \mathfrak{B} è *totalmente integrabile* se per ogni punto $p \in M$ esiste una sottovarietà integrale N di \mathfrak{B} con $p \in N$ e $T_p N = \mathfrak{B}_p$.

Diciamo che \mathfrak{B} è *formalmente integrabile* se

$$(12.17) \quad [\mathfrak{B}, \mathfrak{B}] \subset \mathfrak{B}.$$

Abbiamo il

TEOREMA 12.5.8 (Frobenius). *Sia \mathfrak{B} una distribuzione vettoriale di rango k . Sono equivalenti:*

- (i) \mathfrak{B} è *totalmente integrabile*;
- (ii) \mathfrak{B} è *formalmente integrabile*;
- (iii) $d\mathcal{I}_{\mathfrak{B}} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$

DIMOSTRAZIONE. (ii) \implies (i). Sia $p \in M$. Poiché \mathfrak{B}_p ha rango k , possiamo fissare k campi vettoriali $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{B}$ con X_{1p}, \dots, X_{kp} linearmente indipendenti in $T_p M$. Possiamo allora trovare una carta locale (U, x) per cui:

$$X_i = \sum_{j=1}^m a_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \text{con } a_i^j(0) = \delta_i^j \quad \text{per } 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m.$$

Consideriamo la matrice $k \times k$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1k}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}(x) & a_{k2}(x) & \cdots & a_{kk}(x) \end{pmatrix}.$$

Poiché $A(0) = I_k$, a meno di restringere l'intorno U di p , possiamo supporre che $A(x)$ sia invertibile in U . Sia $B(x) = (b_i^j(x))$ la sua inversa. Allora i campi di vettori

$$Y_i = \sum_{j=1}^k b_i^j(x) X_j = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=k+1}^m c_i^h(x) \frac{\partial}{\partial x^h} \quad (i = 1, \dots, k)$$

generano \mathfrak{B}_q in ogni punto $q \in U$. La condizione (ii) implica che

$$[Y_i, Y_j]_q \in \langle Y_{1q}, \dots, Y_{kq} \rangle \quad \text{per ogni } q \in U.$$

Poiché i campi di vettori

$$Y_1, \dots, Y_k, \frac{\partial}{\partial x^{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$$

definiscono una base di $T_q M$ in ogni punto $q \in U$, ed

$$[Y_i, Y_j]_q \in \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial x^{k+1}} \right]_q, \dots, \left[\frac{\partial}{\partial x^m} \right]_q \right\rangle,$$

otteniamo che $[Y_i, Y_j] = 0$ in U per ogni $1 \leq i, j \leq k$.

Dimostriamo ora il seguente

LEMMA 12.5.9. Siano Y_1, \dots, Y_k campi di vettori definiti e linearmente indipendenti in tutti i punti di un intorno aperto U di $p \in M$. Se $[Y_i, Y_j] = 0$ in U per ogni $1 \leq i < j \leq k$, allora esiste una carta locale (U', y) con $p \in U' \subset U$ per cui $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ in U' per $i = 1, \dots, k$.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che (U, x) sia una carta locale in p . Ragioniamo per induzione su k .

Sia $k = 1$. Possiamo supporre che $Y_{1,p} = \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \right]_p$. Il campo di vettori Y_1 definisce un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi $x(U) \times \mathbb{R} \supset \tilde{U} \ni (x, t) \rightarrow \Phi(x, t) \in \mathbb{R}^m$, ove \tilde{U} è un intorno di $x(U) \times \{0\}$ in $x(U) \times \mathbb{R}$. Abbiamo $\frac{\partial \Phi^1(x, t)}{\partial t} = 1$ per $x = 0, t = 0$ e quindi, per il teorema delle funzioni implicite, $x = \Phi(0, y^2, \dots, y^m; y^1)$ definisce un nuovo sistema di coordinate in un intorno U' di p in U , per cui $Y_1 = \frac{\partial}{\partial y^1}$.

Sia ora $k > 1$ e supponiamo che il lemma valga per un numero inferiore di campi di vettori linearmente indipendenti che commutano tra loro. Per la prima parte della dimostrazione, possiamo fissare coordinate locali (U, x) tali che:

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad Y_i = \sum_{j=1}^m a_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{per } 2 \leq j \leq k.$$

Poiché

$$[Y_1, Y_i] = \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_i^j(x)}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{per } 2 \leq j \leq k,$$

la condizione $[Y_1, Y_i] = 0$ implica che i coefficienti a_i^j sono indipendenti da x^1 in un intorno $\{-\epsilon < x^1 < \epsilon\} \subset x(U)$.

Poniamo $Z_j = \sum_{i=2}^m a_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ per $2 \leq j \leq k$. Allora $[Z_i, Z_j] = 0$ per $2 \leq i, j \leq k$. Per l'ipotesi induttiva, possiamo trovare un cambiamento delle coordinate x^2, \dots, x^m per cui risulti $Z_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$ per $2 \leq j \leq k$. Otteniamo perciò nelle nuove coordinate x^1, \dots, x^m :

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + a_i^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} \quad \text{per } 2 \leq i \leq k.$$

Da $[Y_i, Y_j] = 0$ per ogni $1 \leq i, j \leq k$ otteniamo allora che le a_i^1 sono indipendenti da x^1 e $\partial a_i^1 / \partial x^j = \partial a_j^1 / \partial x^i$ per $2 \leq i, j \leq k$. Possiamo quindi trovare una funzione ϕ , indipendente da x^1 , tale che $a_i^1 = \partial \phi / \partial x^i$ per $2 \leq i \leq k$. Nelle nuove variabili:

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + \phi(x^2, \dots, x^m) \\ y^i = x^i \end{cases} \quad \text{per } 2 \leq i \leq m$$

abbiamo $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ per $1 \leq i \leq k$. □

Completiamo ora la dimostrazione dell'implicazione (ii) \implies (i). Fissata una carta locale (U', y) con centro in p per cui $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ per $i = 1, \dots, k$, la

$$N = \{y^{k+1} = 0, \dots, y^m = 0\}$$

è una sottovarietà di M , contenuta in U' , contenente p e tale che $T_q N = \mathfrak{B}_q$ per ogni $q \in N$.

(ii) \implies (iii) Se $\alpha \in \mathcal{Q}^1(M)$ si annulla su tutti i campi di \mathfrak{B} , abbiamo:

$$(*) \quad d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{B}$$

perché $\alpha(Y) = 0$, $\alpha(X) = 0$ ed anche $\alpha([X, Y]) = 0$ perché $[X, Y] \in \mathfrak{B}$. Si ragiona in modo analogo per forme di grado maggiore di uno.

(iii) \implies (ii) Abbiamo $\mathfrak{B} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \alpha(X) = 0, \forall \alpha \in \mathcal{I}_{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{X}^*(M)\}$. L'implicazione è allora una facile conseguenza della (*).

(ii) \implies (i) Segue dal fatto che il commutatore di due campi di vettori tangenti a una sottovarietà N in tutti i suoi punti è ancora tangente alla sottovarietà N in tutti i suoi punti. \square

Possiamo ancora riformulare il Teorema di Frobenius nella forma

TEOREMA 12.5.10 (Frobenius). *Condizione necessaria e sufficiente affinché una distribuzione vettoriale \mathfrak{B} , di rango k , sia formalmente integrabile è che sia verificata una delle condizioni equivalenti:*

- (1) per ogni punto $p \in M$ possiamo trovare una carta locale (U, x) con centro in p tale che $\mathfrak{B}|_U$ sia generata dai campi di vettori $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}$;
 - (2) per ogni punto $p \in M$ possiamo trovare una carta locale (U, x) con centro in p tale che l'ideale $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}|_U$ sia generato dai differenziali dx^{k+1}, \dots, dx^m .
- \square

Osserviamo infine che vale la :

PROPOSIZIONE 12.5.11. *Se \mathcal{I} è un sistema differenziale esterno in M e $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$, allora $\mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$ è formalmente integrabile.*

DIMOSTRAZIONE. Se $X \in \mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$ ed $\alpha \in \mathcal{I}$, allora :

$$L_X(\alpha) = d(\iota_X(\alpha)) + \iota_X(d\alpha) \in \mathcal{I}$$

per l'ipotesi che $d\alpha \in d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$. Poiché la derivata di Lie commuta con la contrazione, abbiamo, per $X, Y \in \mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$ ed $\alpha \in \mathcal{I}$:

$$\iota_{[X, Y]}(\alpha) = \iota_{L_X(Y)}(\alpha) = L_X(\iota_Y(\alpha)) - \iota_Y(L_X(\alpha)) \in \mathcal{I}.$$

Questo vale per ogni $\alpha \in \mathcal{I}$ e quindi anche $[X, Y] \in \mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$. \square

Vale ancora il

LEMMA 12.5.12. Siano \mathfrak{B}_k e \mathfrak{B}_n due distribuzioni vettoriali totalmente integrabili su M , di rango k ed n rispettivamente, con $k < n$ e $\mathfrak{B}_k \subset \mathfrak{B}_n$. Per ogni punto $p_0 \in M$ possiamo trovare un intorno aperto U di p_0 in M e distribuzioni vettoriali totalmente integrabili $\mathfrak{B}_h(U)$ di rango h , per $k < h < n$, tali che $\mathfrak{B}_h \subset \mathfrak{B}_{h+1}$ per ogni $h = k, \dots, n-1$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un punto $p_0 \in M$. Per il Teorema 12.5.10 possiamo trovare una carta coordinata (U_0, y) , con centro in p_0 , tale che

$$\mathfrak{B}_k(U_0) = \left\langle \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^k} \right\rangle.$$

Possiamo completare i campi di vettori $\frac{\partial}{\partial y^i}$, $i = 1, \dots, k$ a un sistema di generatori di \mathfrak{B}_n , in un intorno U_1 di p_0 in U_0 , aggiungendo campi di vettori Z_i della forma

$$Z_i = \sum_{j=k+1}^m a_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad a_i^j \in \mathcal{C}^\infty(U_1), \quad i = k+1, \dots, n.$$

I campi Z_{k+1}, \dots, Z_n definiscono in tutti i punti di U_1 vettori tangenti linearmente indipendenti. A meno di una permutazione delle coordinate, possiamo supporre che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{k+1}^{k+1} & \cdots & a_n^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

sia invertibile in p_0 , e quindi in un intorno aperto U_2 di p_0 in U_1 . Posto

$$\begin{pmatrix} Y_{k+1} \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} Z_{k+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix},$$

i campi di vettori $Y_1, \dots, Y_n \in \mathfrak{X}(U_2)$ sono della forma

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i} + \sum_{j=n+1}^m b_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad b_i^j \in \mathcal{C}^\infty(U_2), \quad i = 1, \dots, n$$

e quindi, poiché \mathfrak{B}_n è totalmente integrabile, soddisfano

$$[Y_i, Y_j] = 0, \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq n.$$

Ne segue che le distribuzioni

$$\mathfrak{B}_h = \langle Y_1, \dots, Y_h \rangle, \quad \text{per } k \leq h \leq n.$$

sono totalmente integrabili e soddisfano la tesi. \square

12.6. Integrabilità formale e lemma di Poincaré-Volterra

Ci sarà utile utilizzare nel seguito una versione *relativa* del Lemma di Poincaré-Volterra, in cui utilizziamo la nozione di distribuzione totalmente integrabile.

Fissiamo una varietà differenziabile M di dimensione m . Se \mathfrak{B} è una distribuzione vettoriale di rango n su M ed U un aperto di M , indicheremo con $\mathfrak{B}(U)$ la distribuzione vettoriale in U generata da \mathfrak{B} , cioè il $\mathcal{C}^\infty(U)$ -modulo a sinistra generato dalle restrizioni ad U dei campi di vettori di $\mathfrak{B}(= \mathfrak{B}(M))$.

Supponiamo fissata su M una distribuzione vettoriale \mathfrak{B} , di rango n e totalmente integrabile.

LEMMA 12.6.1. *Siano \mathfrak{B} , \mathfrak{B}_1 due distribuzioni totalmente integrabili su M , di ranghi n ed $n-1$ rispettivamente, con $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$. Supponiamo vi sia un campo di vettori $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tale che*

- (i) \mathfrak{B}_1 ed Y generano \mathfrak{B} ;
- (ii) $L_Y(\mathfrak{B}_1) \subset \mathfrak{B}_1$.

Allora, per ogni punto $p \in M$ possiamo trovare un intorno aperto U di p in M con la proprietà:

$$(12.18) \quad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{C}^\infty(U) \text{ tale che } Xf = 0, \forall X \in \mathfrak{B}_1 \\ \exists g \in \mathcal{C}^\infty(U) \text{ tale che } \begin{cases} Xg = 0 & \text{in } U, \forall X \in \mathfrak{B}_1, \\ Yg = f & \text{in } U. \end{cases} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 12.5.10 possiamo trovare una carta coordinata (U, x) con centro in p tale che:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathfrak{B}_1}(U) &\text{ è generato da } dx^1, dx^{n+1}, \dots, dx^m; \\ \mathcal{I}_{\mathfrak{B}}(U) &\text{ è generato da } dx^{n+1}, \dots, dx^m. \end{aligned}$$

In particolare, $\mathfrak{B}(U)$ è generato da $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ e quindi

$$Y = \sum_{i=1}^n a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{in } U.$$

Per ipotesi $a^1 \neq 0$ in tutti i punti di U ed

$$L_Y \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \in \left\langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle, \quad \forall i = 2, \dots, n \implies \frac{\partial a^1}{\partial x^i} = 0 \text{ in } U, \quad \forall i = 2, \dots, n.$$

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ed $Xf = 0$, allora

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \quad \text{in } U \text{ per } i = 2, \dots, n.$$

Possiamo supporre che $x(U)$ sia un ipercubo $\{|x^i| < 1, 1 \leq i \leq m\}$. Ponendo

$$g(x) = g(x^1, x^2, \dots, x^m) = \int_0^{x^1} \frac{f(t, x^2, \dots, x^m)}{a^1(t, x^2, \dots, x^m)} dt$$

definiamo allora una funzione $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ che soddisfa il sistema in (12.18). \square

Data una distribuzione formalmente integrabile, possiamo sempre ricondurci localmente alla situazione descritta nel Lemma 12.6.1:

LEMMA 12.6.2. *Sia \mathfrak{B} una distribuzione totalmente integrabile di rango n . Per ogni punto $p \in M$ possiamo trovare un intorno aperto U di p in M ed una distribuzione totalmente integrabile \mathfrak{B}_1 di rango $n-1$ in U ed un campo di vettori $Y \in \mathfrak{B}(U)$ tali che*

- (i) \mathfrak{B}_1 ed Y generano $\mathfrak{B}(U)$;
- (ii) $L_Y(\mathfrak{B}_1) \subset \mathfrak{B}_1$.

DIMOSTRAZIONE. Scegliamo una carta coordinata (U, x) con centro in p tale che $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}(U) = \langle dx^{n+1}, \dots, dx^m \rangle$ e definiamo

$$\mathfrak{B}_1 = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle \quad \text{ed} \quad Y = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

□

Introduciamo la notazione: se $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ e \mathfrak{B} è una distribuzione vettoriale su M , scriviamo

$$(12.19) \quad \alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{B}} \iff \alpha(X_1, \dots, X_p) = \beta(X_1, \dots, X_p), \quad \forall X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{B}.$$

Osserviamo che

LEMMA 12.6.3. *Se \mathfrak{B} è formalmente integrabile, allora*

$$(12.20) \quad \alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{B}} \implies d\alpha \equiv d\beta \pmod{\mathfrak{B}}. \quad \square$$

Possiamo enunciare ora il

TEOREMA 12.6.4. *Sia \mathfrak{B} una distribuzione vettoriale formalmente integrabile su M . Allora, per ogni $p \in M$ possiamo trovare un intorno aperto U di p in M tale che, per ogni intero k con $1 \leq k \leq m$ ed ogni forma*

$$\alpha \in \Omega^k(U) \quad \text{con} \quad d\alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{B}(U)}$$

possiamo trovare una forma

$$\beta \in \Omega^{k-1}(U) \quad \text{tale che} \quad d\beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{B}(U)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il teorema per induzione sul rango n di \mathfrak{B} . La tesi è banalmente vera se \mathfrak{B} ha rango zero. Supponiamo quindi che $n > 0$ e la tesi sia verificata per tutte le distribuzioni formalmente integrabili di rango inferiore ad n .

Per i Lemmi 12.6.1 e 12.6.2 e l'ipotesi induttiva, fissato $p \in M$ possiamo trovare un intorno aperto U di p in M tale che

- (a) esiste un $Y \in \mathfrak{B}(U)$ ed una distribuzione formalmente integrabile $\mathfrak{B}_1(U)$ di rango $n-1$ in U tali che

$$\mathfrak{B}(U) = \langle Y, \mathfrak{B}_1(U) \rangle \quad \text{ed} \quad [Y, \mathfrak{B}_1(U)] \subset \mathfrak{B}_1(U).$$

- (b) Per ogni $\alpha \in \Omega^k(U)$, con $k > 0$ e $d\alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{B}_1(U)}$ possiamo trovare $\beta \in \Omega^{k-1}(U)$ con $d\beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{B}_1(U)}$.
(c) Per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ con $Xf = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{B}_1(U)$ possiamo trovare una $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tale che

$$\begin{cases} Xg = 0 & \forall X \in \mathfrak{B}_1(U), \\ Yg = f & \text{in } U. \end{cases}$$

Sia ora $\alpha \in \Omega^k(U)$, con $k > 0$, e supponiamo che

$$d\alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{B}(U)}.$$

In particolare,

$$d\alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{B}_1(U)}$$

e quindi, per (b) possiamo trovare una $\beta \in \mathcal{Q}^{k-1}(U)$ con

$$d\beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{B}_1(U)}.$$

Consideriamo

$$\gamma = Y\lrcorner(\alpha - d\beta) \in \mathcal{Q}^{k-1}(U).$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} d\gamma &= d(Y\lrcorner(\alpha - d\beta)) = L_Y(\alpha - d\beta) - Y\lrcorner(d[\alpha - d\beta]) \\ &= L_Y(\alpha - d\beta) - Y\lrcorner d\alpha. \end{aligned}$$

Poiché $[Y, \mathfrak{B}_1(U)] \subset \mathfrak{B}_1(U)$, otteniamo che

$$d\gamma \equiv 0 \pmod{\mathfrak{B}_1(U)}.$$

Consideriamo ora il caso in cui sia $k = 1$. Allora $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ed $X\gamma = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{B}_1(U)$. Per il punto (c), possiamo trovare una funzione $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tale che

$$\begin{cases} Xg = 0 & \forall X \in \mathfrak{B}_1(U), \\ Yg = \gamma & \text{in } U. \end{cases}$$

Dico che

$$d(\beta + g) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{B}(U)}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} d(\beta + g)(X) &= X\beta + Xg = d\beta(X) = \alpha(X), & \forall X \in \mathfrak{B}_1(U), \\ d(\beta + g)(Y) &= Y\lrcorner(d\beta) + Yg = Y\lrcorner(d\beta) + \gamma = Y\lrcorner\alpha = \alpha(Y). \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione nel caso $k = 1$.

Se $k > 1$, per (b) possiamo trovare $\eta \in \mathcal{Q}^{k-1}(U)$ tale che

$$d\eta \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{B}_1(U)}.$$

Sia $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ una soluzione (che esiste per il punto (c)) di

$$\begin{cases} Xg = 0 & \forall X \in \mathfrak{B}_1(U), \\ Yg = 1 & \text{in } U. \end{cases}$$

Dico che allora

$$\alpha \equiv d(\beta + dg \wedge \eta) \pmod{\mathfrak{B}(U)}.$$

Infatti, se $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{B}_1(U)$, otteniamo

$$\begin{aligned} d(\beta + dg \wedge \eta)(X_1, \dots, X_k) &= d\beta(X_1, \dots, X_k) = \alpha(X_1, \dots, X_k), \\ d(\beta + dg \wedge \eta)(Y, X_2, \dots, X_k) &= (Y\lrcorner d\beta)(X_2, \dots, X_k) + d\eta(X_2, \dots, X_k) \\ &= (Y\lrcorner d\beta)(X_2, \dots, X_k) + \gamma(X_2, \dots, X_k) \\ &= Y\lrcorner\alpha(X_2, \dots, X_k) = \alpha(Y, X_2, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione. \square

12.7. Il teorema di Darboux sulle forme canoniche

In questo paragrafo studieremo la forma canonica di Darboux¹ di una uno-forma e di una due-forma chiusa. Questi risultati sono preliminari allo studio delle varietà di contatto e delle varietà simplettiche.

12.7.1. Un Lemma di algebra lineare. Sia $\omega \in \Lambda^2 V^*$ una forma bilineare alternata su uno spazio vettoriale reale V . Un sottospazio vettoriale W di V è *isotropo* se la restrizione di ω a W è nulla, cioè se $\omega(w_1, w_2) = 0$ per ogni coppia di vettori $w_1, w_2 \in W$. Chiamiamo *Lagrangiano* un sottospazio isotropo massimale.

LEMMA 12.7.1. *Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita m ed $\omega \in \Lambda^2 V^*$ una forma bilineare antisimmetrica su V . Allora*

- (1) ω ha rango pari $2r$;
- (2) $\ker \omega = \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0, \forall w \in V\}$ ha dimensione $m - 2r$;
- (3) i sottospazi Lagrangiani di V rispetto ad ω hanno dimensione $m - r$;
- (4) ogni sottospazio isotropo è contenuto in un sottospazio Lagrangiano.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che il rango di ω è la dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare $\lambda_\omega : V \rightarrow V^*$ ad essa associata:

$$\langle w, \lambda_\omega(v) \rangle = \omega(v, w), \quad \forall v, w \in V.$$

Per verificare (1) e (2) basta osservare che la matrice $(\omega(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq m}$ associata ad ω in una qualsiasi base e_1, \dots, e_m di V è antisimmetrica e quindi, poiché tutti i suoi autovalori non nulli sono immaginari puri, ha rango pari.

Dimostriamo (3) per ricorrenza sul rango r di ω . Se $r = 0$, allora dobbiamo prendere $W = V$. Se $r > 0$, fissiamo un vettore $v_1 \in V$ per cui $\omega(v_1, \cdot)$ sia un funzionale non nullo. Allora $V_1 = \{v \in V \mid \omega(v_1, v) = 0\}$ è un sottospazio di dimensione $m - 1$ di V e la restrizione di ω a V_1 ha rango $r - 1$. Per l'ipotesi induttiva, V_1 contiene un sottospazio W , di dimensione $(m - 1) - (r - 1) = m - r$ su cui la restrizione di ω è nulla.

Dimostriamo ora (4). Sia W un sottospazio isotropo per ω . La somma $W + \ker \omega$ è ancora un sottospazio isotropo. Sia L un sottospazio isotropo massimale che contenga W . Se $\dim L < m - r$, poiché $\ker \omega \subset L$, l'ortogonale L^ω di L rispetto ad ω avrebbe dimensione $m - \dim L + m - 2r > m - r$. Se $v \in L^\omega \setminus L$, allora il sottospazio $L + \mathbb{R}v$ sarebbe un sottospazio isotropo di dimensione $1 + \dim L$ e conterrebbe propriamente L , contro l'ipotesi di massimalità. \square

LEMMA 12.7.2. *Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita m , $\alpha \in V^*$ un funzionale lineare, ed $\omega \in \Lambda^2 V^*$ una forma alternata di rango $2r$ su V . Allora*

- (1) Se $\alpha \wedge \omega^r \neq 0$, allora $\ker \omega \not\subset \ker \alpha$ e i sottospazi Lagrangiani della restrizione di ω a $\ker \alpha$ hanno dimensione $m - r - 1$ e sono le intersezioni di $\ker \alpha$ con i sottospazi Lagrangiani di ω in V .

¹Jean-Gaston Darboux (14 agosto 1842, Nîmes - 23 febbraio 1917, Parigi) matematico francese che ha dato contributi fondamentali alla geometria differenziale. Ha avuto come allievo Élie Cartan.

(2) Se $\alpha \wedge \omega^r = 0$, allora $\ker \omega \subset \ker \alpha$ e $\ker \alpha$ contiene sottospazi Lagrangiani di ω in V .

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 12.7.1, ogni sottospazio isotropo di $\ker \alpha$ è contenuto in un sottospazio Lagrangiano di ω in V .

Indichiamo con $\lambda_\omega : V \rightarrow V^*$ l'applicazione lineare associata ad ω . Se ω ha rango $2r$, abbiamo

$$\alpha \wedge \omega^r = 0 \iff \alpha \in \lambda_\omega(V) \iff \ker \omega \subset \ker \alpha.$$

Se $\alpha \wedge \omega^r \neq 0$, allora $\ker \alpha$ non contiene $\ker \omega$ e quindi non può contenere sottospazi Lagrangiani di ω in V . I suoi sottospazi isotropi massimali sono tutte e sole le intersezioni di $\ker \alpha$ con un sottospazio Lagrangiano di ω in V , ed hanno dimensione $m-r-1$.

Se $\alpha \wedge \omega^r = 0$, allora $\alpha \in \lambda_\omega(V)$ ed esiste quindi un vettore $v_\alpha \in V$ tale che $\alpha(v) = \omega(v_\alpha, v)$ per ogni $v \in V$. I sottospazi Lagrangiani contenuti in $\ker \alpha$ sono tutti e soli quelli che contengono il vettore v_α . \square

12.7.2. Il teorema di Darboux per le due-forme. Enunciamo una *versione geometrica*, in termini di distribuzioni totalmente integrabili, del teorema di Darboux sulle forme canoniche delle due-forme alternate.

LEMMA 12.7.3. *Siano M una varietà differenziabile di dimensione m , \mathfrak{B} una distribuzione formalmente integrabile ed $\omega \in \Omega^2(M)$ una due-forma su M . Supponiamo che:*

$$(12.21) \quad d\omega(X_1, X_2, X_3) = 0, \quad \forall X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{B}.$$

Allora

$$(12.22) \quad \mathfrak{R}_\omega = \{X \in \mathfrak{B} \mid X \lrcorner \omega = 0 \text{ su } \mathfrak{B}\}.$$

è una distribuzione formalmente integrabile su M .

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $X, Y \in \mathfrak{R}_\omega$ e $Z \in \mathfrak{B}$, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 = d\omega(X, Y, Z) &= X\omega(Y, Z) - Y\omega(X, Z) + Z\omega(X, Y) \\ &\quad - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X) = -\omega([X, Y], Z). \end{aligned}$$

Infatti $\omega(X, Y) = 0$, $\omega(X, Z) = 0$, $\omega(Y, Z) = 0$ perché $X, Y \in \mathfrak{R}_\omega$, $Z \in \mathfrak{B}$, e $\omega([X, Z], Y) = 0$, $\omega([Y, Z], X) = 0$ perché $X, Y \in \mathfrak{R}_\omega$, $[X, Z], [Y, Z] \in \mathfrak{B}$. Questo dimostra che \mathfrak{R}_ω è formalmente integrabile. \square

TEOREMA 12.7.4. *Sia $\omega \in \Omega^2(M)$ una due-forma alternata su una varietà differenziabile M di dimensione m . Siano \mathfrak{B}_0 e \mathfrak{B} due distribuzioni vettoriali di rango n_0 ed n rispettivamente, totalmente integrabili, con*

$$(12.23) \quad \mathfrak{R}_\omega = \{X \in \mathfrak{B} \mid X \lrcorner \omega = 0 \text{ su } \mathfrak{B}\} \subset \mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$$

e supponiamo che:

- (1) $\omega = 0$ su \mathfrak{B}_0 ;
- (2) per ogni $p \in M$, la forma ω_p ha rango costante $2r$ su \mathfrak{B}_p ;

$$(3) \quad d\omega(X_1, X_2, X_3) = 0, \quad \forall X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{B}.$$

Allora per ogni punto $p \in M$ possiamo trovare un intorno aperto U di p in M ed una distribuzione totalmente integrabile \mathfrak{B}_1 di rango $n - r$ su U con

$$(4) \quad \mathfrak{B}_0(U) \subset \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}(U) \text{ ed } \omega(X_1, X_2) = 0 \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{B}_1.$$

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per induzione sul rango $2r$ di ω . Se $r = 0$, la tesi è banalmente verificata con $U = M$ e $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}$. Supponiamo quindi $r > 0$ e la tesi vera quando ω abbia rango minore di $2r$.

Per il Lemma 12.5.12, fissato un punto p di M possiamo trovare un intorno aperto U' di p in M ed una distribuzione totalmente integrabile $\mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{X}(U')$, di rango $n - 1$ su U' , con

$$\mathfrak{B}_0(U') \subset \mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}(U').$$

La restrizione di ω a \mathfrak{B}_2 ha rango $2r - 2$ e verifica le ipotesi del teorema con U' al posto di M , $n - 1$ al posto di n , \mathfrak{B}_2 al posto di \mathfrak{B} . Per l'ipotesi induttiva, possiamo trovare un intorno aperto U di p in U' ed una distribuzione vettoriale totalmente integrabile $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{X}(U)$, di rango $(n - 1) - (r - 1) = n - r$, con $\mathfrak{B}_0(U) \subset \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2(U)$, su cui la restrizione di ω sia identicamente nulla. La distribuzione \mathfrak{B}_1 soddisfa la (4). \square

Possiamo utilizzare il Teorema 12.7.4 per ottenere una forma canonica di ω . Per il Teorema 12.6.4, fissato un punto $p_0 \in M$, possiamo trovare un suo intorno U in M ed una forma $\alpha \in \Omega^1(U)$ tali che

$$d\alpha \equiv \omega \pmod{\mathfrak{B}(U)}.$$

Per il Teorema 12.7.4 possiamo supporre che su U sia definita una distribuzione totalmente integrabile \mathfrak{B}_1 , di rango $n - r$, su cui ω sia identicamente nulla. In particolare

$$d\alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{B}_1}.$$

Utilizzando ancora il Teorema 12.6.4, a meno di restringere ulteriormente l'intorno U di p_0 , possiamo supporre che vi sia una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tale che

$$df \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{B}_1}.$$

A meno di un'ulteriore restrizione dell'intorno U di p_0 , possiamo supporre che su U sia definito un sistema di coordinate x tali che

- (i) dx^{n+1}, \dots, dx^m generano l'ideale $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}(U)$;
- (ii) $dx^1, \dots, dx^r, dx^{n+1}, \dots, dx^m$ generano l'ideale $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}_1}$.

Allora:

$$\begin{aligned} \alpha - df &= \sum_{i=1}^r a_i dx^i + \sum_{i=n+1}^m b_i dx^i, \\ \omega - d\alpha &= \sum_{i=n+1}^r \beta_i \wedge dx^i \end{aligned}$$

con $a_j, b_j \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $\beta_j \in \Omega^1(U)$. Differenziando otteniamo

$$d\alpha = \sum_{i=1}^r da_i \wedge dx^i + \sum_{i=n+1}^m db_i \wedge dx^i$$

e quindi

$$\omega = \sum_{j=1}^r da_j \wedge dx^j + \sum_{j=n+1}^m (db_j + \beta_j) \wedge dx^j$$

Poiché la restrizione di ω a \mathfrak{B} ha rango $2r$, abbiamo

$$da_1 \wedge \cdots \wedge da_r \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^r \neq 0 \quad \text{su } \mathfrak{B}_p, \forall p \in U.$$

Possiamo quindi scegliere nuove coordinate $y = (y^1, \dots, y^m)$ in un intorno aperto U' di p in U , con

$$\begin{cases} y^i = x^i & \text{se } 1 \leq i \leq r, n < i \leq m, \\ y^i = a_i & \text{se } r < i \leq 2r. \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto il seguente

COROLLARIO 12.7.5. *Sotto le ipotesi del Teorema 12.7.4, per ogni punto $p \in M$ possiamo trovare una carta coordinata (U, x) con centro in p ed $m - n$ forme differenziali $\beta_{n+1}, \dots, \beta_m \in \Omega^1(U)$ tali che*

$$(12.24) \quad \mathcal{I}_{\mathfrak{B}}(U) = \langle dx^{n+1}, \dots, dx^m \rangle,$$

$$(12.25) \quad \omega = \sum_{i=1}^r dx^i \wedge dx^{r+i} + \sum_{i=n+1}^m \beta_i \wedge dx^i.$$

Dal Teorema 12.7.4 ricaviamo il risultato di Darboux sulle due forme chiuse:

TEOREMA 12.7.6. *Sia $\omega \in \Omega^2(M)$ una forma chiusa, di rango costante $2r$. Per ogni punto p di M possiamo trovare una carta coordinata (U, x) con centro in p tale che*

$$(12.26) \quad \omega = \sum_{i=1}^r dx^i \wedge dx^{r+i} \quad \text{su } U.$$

12.7.3. Il teorema di Darboux per le uno-forme. Una uno-forma $\alpha \in \Omega^1(M)$, che non si annulli in nessun punto di M , definisce una distribuzione d'iperpiani

$$(12.27) \quad \mathfrak{B}_\alpha = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \alpha(X) = 0\}.$$

Per il Lemma di Cartan, \mathfrak{B}_α è totalmente integrabile se e soltanto se

$$(12.28) \quad \alpha \wedge d\alpha = 0.$$

In questo caso, per ogni punto $p \in M$ possiamo trovare, in un opportuno intorno aperto U di p , un *fattore integrante* $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ con $f \neq 0$ in tutti i punti di U e

$$(12.29) \quad d(f\alpha) = 0, \quad f\alpha = dg \quad \text{con } g \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

Le $\{g = \text{costante}\}$ definiscono in U la foliazione associata alla distribuzione \mathfrak{B}_α .

Più in generale, quando \mathfrak{B}_α non sia totalmente integrabile, possiamo porci il problema di determinare foliazioni locali, di dimensione massimale, di varietà integrali di \mathfrak{B}_α .

Osserviamo che, se $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_\alpha$ è totalmente integrabile, allora

$$d\alpha(X_1, X_2) = X_1\alpha(X_2) - X_2\alpha(X_1) - \alpha([X_1, X_2]) = 0, \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{B}.$$

Dobbiamo quindi cercare le intersezioni della distribuzione \mathfrak{B}_α con le distribuzioni vettoriali massimali su cui si annulla la forma $d\alpha$.

Nel caso in cui il rango di $d\alpha$ su \mathfrak{B}_α sia costante, questo problema è risolto dal seguente

TEOREMA 12.7.7 (Darboux). Sia $\alpha \in \Omega^1(M)$ una forma differenziale che goda delle proprietà:

$$(12.30) \quad \alpha(p) \neq 0, \quad \forall p \in M,$$

$$(12.31) \quad d\alpha(p) \text{ ha rango } 2r \text{ su } T_pM, \text{ per ogni } p \in M.$$

Sia $p \in M$. Allora:

(1) Se

$$(12.32) \quad \alpha(p) \wedge (d\alpha(p))^r \neq 0,$$

possiamo trovare un intorno aperto U di p in M ed una distribuzione totalmente integrabile $\mathfrak{B}^{m-r-1} \subset \mathfrak{X}(U)$, di rango $m - r - 1$ in U , con

$$(12.33) \quad \mathfrak{B}^{m-r-1} \subset \mathfrak{B}_\alpha(U).$$

(2) Se

$$(12.34) \quad \alpha \wedge (d\alpha)^r = 0 \quad \text{in un intorno di } p,$$

possiamo trovare un intorno aperto U di p in M ed una distribuzione totalmente integrabile $\mathfrak{B}^{m-r} \subset \mathfrak{X}(U)$, di rango $m - r$ in U , con

$$(12.35) \quad \mathfrak{B}^{m-r} \subset \mathfrak{B}_\alpha(U).$$

Tali distribuzioni hanno rango massimo tra le distribuzioni totalmente integrabili contenute in $\mathfrak{B}_\alpha(U)$, per un intorno aperto U di p in M .

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo valga la (12.32). A meno di sostituire ad M un intorno aperto di p in M , possiamo supporre, per semplicità, che la (12.32) valga per tutti i punti di M .

Per il Teorema 12.7.4, possiamo trovare un intorno aperto U di p in M ed una distribuzione vettoriale totalmente integrabile $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{X}(U)$, di rango $m - r$ su U , su cui $d\alpha$ si annulli identicamente. L'intersezione $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_\alpha$ è una distribuzione di rango $m - r - 1$ per il Lemma 12.7.2. Dico che $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_\alpha$ è totalmente integrabile. Infatti, se $X, Y \in \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_\alpha$, è $[X, Y] \in \mathfrak{B}_1$ perché \mathfrak{B}_1 è totalmente integrabile, ed $[X, Y] \in \mathfrak{B}_\alpha$ perché

$$\alpha([X, Y]) = -d\alpha(X, Y) + X\alpha(Y) - Y\alpha(X) = 0.$$

Consideriamo ora il caso in cui valga la (12.34). Possiamo supporre per semplicità che $\alpha \wedge (d\alpha)^r = 0$ su M . Per il Lemma 12.7.2,

$$\mathfrak{R}_{d\alpha} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid d\alpha(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{X}(M)\} \subset \mathfrak{B}_\alpha.$$

e la distribuzione vettoriale

$$\mathfrak{B}_0 = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \alpha \wedge (X \lrcorner d\alpha) = 0\}$$

contiene $\mathfrak{R}_{d\alpha}$, ha rango $m - 2r + 1$ ed è contenuta in \mathfrak{B}_α .

La distribuzione \mathfrak{B}_0 è formalmente integrabile. Infatti

$$\alpha([X, Y]) = d\alpha(X, Y) - X\alpha(Y) + Y\alpha(X) = 0,$$

in quanto $\alpha(X) = 0$, $\alpha(Y) = 0$ e $d\alpha(X, Y) = (X]d\alpha)(Y) = 0$ perché $(X]d\alpha)$ è multiplo di α per $X \in \mathfrak{B}_0$. È poi, se $X, Y \in \mathfrak{B}_0$ e $Z \in \mathfrak{B}_\alpha$,

$$\begin{aligned} 0 &= d^2\alpha(X, Y, Z) = Xd\alpha(Y, Z) - Yd\alpha(Y, Z) + Zd\alpha(X, Y) \\ &\quad - d\alpha([X, Y], Z) + d\alpha([X, Z], Y) - d\alpha([Y, Z], X) \\ &= -d\alpha([X, Y], Z), \end{aligned}$$

perché $d\alpha(Y, Z) = 0$, $d\alpha(X, Z) = 0$, $d\alpha(X, Y) = 0$, $d\alpha([X, Z], Y) = 0$, $d\alpha([Y, Z], X) = 0$ in quanto le forme $X]d\alpha$ ed $Y]d\alpha$ sono multiple di α ed $[X, Z], [Y, Z] \in \mathfrak{B}_\alpha$. Quindi $[X, Y]d\alpha$ si annulla su \mathfrak{B}_α e perciò è un multiplo di α .

Per il Teorema 12.7.4, per ogni punto $p \in M$ possiamo trovare una distribuzione vettoriale \mathfrak{B}_1 in U , di rango $m - r$, che contenga $\mathfrak{B}_0(U)$ e su cui $d\alpha$ sia identicamente nulla. Per il Lemma 12.7.2, la \mathfrak{B}_1 è contenuta in \mathfrak{B}_α . La dimostrazione è completa. \square

Dalla discussione sulle forme canoniche di una due forma fatta sopra, ricaviamo il

TEOREMA 12.7.8 (Darboux). *Sia $\alpha \in \Omega^1(M)$ una uno-forma, che non si annulli in nessun punto di M e tale che $d\alpha$ abbia rango costante $2r$ in tutti i punti di M . Sia $p \in M$. Allora:*

- (1) *Se $\alpha \wedge (d\alpha)^r$ non si annulla in p , esiste una carta coordinata (U, x) con centro in p tale che*

$$(12.36) \quad \alpha = dx^{2r+1} + \sum_{i=1}^r x^i \wedge dx^{r+i} \quad \text{in } U.$$

- (2) *Se $\alpha \wedge (d\alpha)^r$ è identicamente nulla in un intorno di p , esiste una carta coordinata (U, x) con centro in p tale che*

$$(12.37) \quad \alpha = \sum_{i=1}^r x^i \wedge dx^{r+i} \quad \text{in } U.$$

Coomologia di de Rham sulle varietà

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m .

13.1. Definizioni principali

DEFINIZIONE 13.1.1. I complessi di spazi vettoriali ed operatori differenziali

$$(13.1) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow \Omega^0(M) &\xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \Omega^{q-1}(M) &\xrightarrow{d} \Omega^q(M) \xrightarrow{d} \Omega^{q+1}(M) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

$$(13.2) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow \Omega_c^0(M) &\xrightarrow{d} \Omega_c^1(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^2(M) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \Omega_c^{q-1}(M) &\xrightarrow{d} \Omega_c^q(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^{q+1}(M) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

si dicono il *complesso di de Rham* ed il *complesso di de Rham sui supporti compatti*, rispettivamente. Poniamo

$$(13.3) \quad \begin{cases} \mathcal{Z}^q(M) = \{\alpha \in \Omega^q(M) \mid d\alpha = 0\}, & (q\text{-cicli}) \\ \mathcal{B}^q(M) = \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega^{q-1}(M)\}, & (q\text{-bordi}) \\ \mathcal{Z}_c^q(M) = \{\alpha \in \Omega_c^q(M) \mid d\alpha = 0\}, & (q\text{-cicli a supporto compatto}) \\ \mathcal{Z}_c^q(M) = \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega_c^{q-1}(M)\}, & (q\text{-bordi a supporto compatto}). \end{cases}$$

I quozienti

$$(13.4) \quad \begin{cases} H^q(M) = \mathcal{Z}^q(M) / \mathcal{B}^q(M), \\ H_c^q(M) = \mathcal{Z}_c^q(M) / \mathcal{B}_c^q(M) \end{cases}$$

si dicono il q -esimo gruppo di coomologia di de Rham e il q -esimo gruppo di coomologia di de Rham a supporti compatti, rispettivamente. Poniamo

$$(13.5) \quad H^*(M) = \bigoplus_{q=0}^m H^q(M), \quad H_c^*(M) = \bigoplus_{q=0}^m H_c^q(M).$$

PROPOSIZIONE 13.1.2. Il prodotto esterno nelle algebre di Grassmann $\Omega^*(M)$ e $\Omega_c^*(M)$ definisce, per passaggio al quoziente, strutture di algebra di Grassmann su $H^*(M)$ ed $H_c^*(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che

$$(d\alpha) \wedge \beta = d(\alpha \wedge \beta), \quad \forall \alpha \in \Omega^{q_1}(M), \beta \in \mathcal{Z}^{q_2}(M).$$

Quindi $\mathcal{Z}^{q_1}(M) \wedge \mathcal{Z}^{q_2}(M) \subset \mathcal{Z}^{q_1+q_2}(M)$ e
 $\mathcal{B}^{q_1}(M) \wedge \mathcal{Z}^{q_2}(M) + \mathcal{Z}^{q_1}(M) \wedge \mathcal{B}^{q_2}(M) \subset \mathcal{B}^{q_1+q_2}(M). \quad \square$

Se $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^*(M)$ ed $[\alpha], [\beta] \in H^*(M)$ sono le classi di coomologia da esse definite, poniamo

$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta].$$

13.2. Invarianza omotopica

Siano M, N varietà differenziabili ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ un'applicazione differenziabile. Si verifica facilmente che il pull-back commuta col differenziale sulle forme. Quindi, per passaggio ai quozienti, otteniamo per ogni q un'applicazione

$$(13.6) \quad f^* : H^q(N) \ni [\alpha] \longrightarrow [f^* \alpha] \in H^q(M),$$

che, se f è propria, si restringe ad un'applicazione $f^* : H_c^q(N) \rightarrow H_c^q(M)$.

LEMMA 13.2.1. *Siano M una varietà differenziabile ed I un intervallo di \mathbb{R} . Siano $\text{pr}_M : M \times I \rightarrow M$ la proiezione sul primo fattore e, per ogni $t \in I$, $s_t \in \mathcal{C}^\infty(M, M \times I)$ la sezione $s_t(x) = (x, t)$. Allora, per ogni $q \geq 0$ e $t \in I$,*

$$\text{pr}_M^* : H^q(M) \rightarrow H^q(M \times I) \quad \text{ed} \quad s_t^* : H^q(M \times I) \rightarrow H^q(M)$$

sono isomorfismi, l'uno inverso dell'altro.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $t \in I$, è $\text{pr}_M \circ s_t = \text{id}_M$ e quindi $s_t^* \circ \text{pr}_M^* = \text{id}_M^*$ è l'identità in coomologia:

$$\begin{array}{ccc} H^q(M) & \xrightarrow{\text{pr}_M^*} & H^q(M \times I) \\ & \searrow & \swarrow s_t^* \\ & H^q(M) & \end{array}$$

In particolare, s_t^* è surgettiva e pr_M^* iniettiva.

Per ogni intero $q \geq 1$ indichiamo con $\Omega_M^q(M \times I)$ lo spazio delle q -forme su $M \times I$ che sono localmente combinazioni lineari, con coefficienti in $\mathcal{C}^\infty(M \times I)$, di elementi di $\text{pr}_M^*(\Omega^q(M))$. È

$$\Omega^q(M \times I) = \Omega_M^q(M \times I) \oplus \Omega_M^{q-1}(M \times I) \wedge dt.$$

Decomponiamo $f \in \mathcal{L}^q(M \times I)$ come una somma $f = f^{(q)} + f^{(q-1)} \wedge dt$, con $f^{(h)} \in \Omega_M^h(M \times I)$. La condizione d'integrabilità $df = 0$ ci dà

$$\begin{cases} d_M s_t^* f^{(q)} = 0, \\ \frac{d}{dt}(s_t^* f^{(q)}) + (-1)^q d_M s_t^* f^{(q-1)} = 0, \end{cases} \quad \forall t \in I.$$

Fissato $t_0 \in I$, definiamo una forma $g^{(q-1)} \in \Omega_M^{q-1}(M \times I)$ mediante

$$g^{(q-1)}(x, t) = \text{pr}_M^* \left(\int_{t_0}^t s_\tau^* f^{(q-1)} d\tau \right)(x, t).$$

Allora $\phi^{(q)} = f - d_{M \times I} g^{(q-1)} \in \mathcal{L}^q(M \times I) \cap \Omega_M^q(M \times I)$. In particolare, $\phi^{(q)}$ soddisfa

$$\frac{d}{dt} s_t^* \phi^{(q)} = 0,$$

onde $s_t^* \phi^{(q)}$ è una forma $\psi \in \Omega^q(M)$, indipendente da $t \in I$, ed abbiamo $\phi^{(q)} = \text{pr}_M^* \psi$. Inoltre

$$d_M \psi = d_M s_t^* \phi^{(q)} = s_t^* d_{M \times I} \phi^{(q)} = 0.$$

Questo dimostra che $\text{pr}_M^* : H^q(M) \rightarrow H^q(M \times I)$ è anche surgettiva, e completa quindi la dimostrazione. \square

PROPOSIZIONE 13.2.2. *Due applicazioni differenziabili $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ omotopie inducono la stessa applicazione in coomologia.*

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi esiste un'applicazione differenziabile

$$F = (f_t) \in \mathcal{C}^\infty(M \times I, N), \quad \text{con } F(\cdot, 0) = f_0, F(\cdot, 1) = f_1.$$

È $f_t = F \circ s_t$ e quindi $f_t^* = s_t^* \circ F^*$. Per il Lemma 13.2.1, per ogni $t \in I = [0, 1]$, la s_t^* inverte pr_M^* , ove $\text{pr}_M : M \times [0, 1] \rightarrow M$ è la proiezione sul primo fattore. Abbiamo perciò, in coomologia,

$$f_0^* = s_0^* \circ F^* = \text{pr}_M^* \circ F^* = s_1^* \circ F^* = f_1^*. \quad \square$$

COROLLARIO 13.2.3. *Due varietà che abbiano lo stesso tipo d'omotopia hanno la stessa coomologia di de Rham.* \square

Ricordiamo, che, per varietà differenziabili, possiamo definire tutte le nozioni usuali dell'omotopia richiedendo che tutte le mappe considerate siano differenziabili. Ad esempio, nell'enunciato del corollario, il fatto che due varietà M ed N abbiano lo stesso tipo d'omotopia si può formulare nel modo seguente:

Esistono applicazioni differenziabili $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$, $g \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$, $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], M)$, $G \in \mathcal{C}^\infty(N \times [0, 1], N)$, tali che

$$\begin{cases} F_0 = g \circ f, \\ F_1 = \text{id}_M, \end{cases} \quad \begin{cases} G_0 = f \circ g, \\ G_1 = \text{id}_N. \end{cases}$$

13.3. Complessi differenziali

Ricordiamo qui alcune nozioni di algebra omologica che utilizzeremo nel seguito (vedi e.g. [7]).

DEFINIZIONE 13.3.1. Un *complesso differenziale* è il dato di uno spazio vettoriale \mathbf{C} su un campo \mathbb{k} , di una sua \mathbb{Z} -gradazione $\mathbf{C} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathbf{C}^q$ e di un omomorfismo $d_C : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, omogeneo di grado 1, con $d_C^2 = 0$. Indichiamo il complesso mediante

$$(13.7) \quad \dots \rightarrow \mathbf{C}^{q-1} \xrightarrow{d_C} \mathbf{C}^q \xrightarrow{d_C} \mathbf{C}^{q+1} \rightarrow \dots$$

La *coomologia* di (13.7) è la somma diretta di spazi vettoriali:

$$(13.8) \quad H(\mathbf{C}, d_C) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^q(\mathbf{C}, d_C), \quad \text{ove } H^q(\mathbf{C}, d_C) = (\ker d_C \cap \mathbf{C}^q) / d_C(\mathbf{C}^{q-1}).$$

Chiamiamo $H^q(\mathbf{C}, d_C)$ il *q-esimo gruppo di coomologia* di (13.7).

Dati due complessi differenziali (\mathbf{A}, d_A) e (\mathbf{B}, d_B) sullo stesso campo \mathbb{k} , un'applicazione \mathbb{k} -lineare $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ si dice un *omomorfismo di complessi* se

$$(13.9) \quad f(\mathbf{A}^q) \subset \mathbf{B}^q, \quad \forall q \in \mathbb{Z}, \quad \text{ed} \quad f \circ d_A = d_B \circ f.$$

Essa induce un'applicazione naturale

$$(13.10) \quad f_* : H^q(\mathbf{A}, d_A) \rightarrow H^q(\mathbf{B}, d_B),$$

che fa corrispondere alla classe $[a_q]$ di $a_q \in \ker d_A \cap \mathbf{A}^q$ la classe $[f(a_q)]$ di $f(a_q) \in \ker d_B \cap \mathbf{B}^q$.

Una successione

$$(13.11) \quad \dots \rightarrow \mathbf{V}^{q-1} \xrightarrow{f_{q-1}} \mathbf{V}^q \xrightarrow{f_q} \mathbf{V}^{q+1} \rightarrow \dots$$

di \mathbb{k} -spazi vettoriali ed applicazioni \mathbb{k} -lineari si dice *esatta* se

$$(13.12) \quad f_{q-1}(\mathbf{V}^{q-1}) = \ker f_q, \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Una successione esatta della forma

$$(13.13) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{B} \xrightarrow{\beta} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

si dice una *successione esatta corta*.

Se (\mathbf{A}, d_A) , (\mathbf{B}, d_B) , e (\mathbf{C}, d_C) sono complessi differenziali sullo stesso campo \mathbb{k} e la (13.13) una successione esatta corta di omomorfismi di complessi, possiamo definire delle applicazioni \mathbb{k} -lineari

$$(13.14) \quad \Delta_q : H^q(\mathbf{C}, d_C) \rightarrow H^{q+1}(\mathbf{A}, d_A)$$

nel modo seguente.

Sia $c_q \in \mathbf{C}^q$ con $d_C c_q = 0$. Poiché β è surgettiva, esiste un elemento $b_q \in \mathbf{B}^q$ tale che $c_q = \beta(b_q)$. Abbiamo

$$\beta(d_B b_q) = d_C \beta(b_q) = d_C c_q = 0$$

e quindi, per l'esattezza di (13.13) esiste uno ed un solo $a_{q+1} \in \mathbf{A}^{q+1}$ tale che

$$\alpha(a_{q+1}) = d_B b_q.$$

Poiché

$$\alpha(d_A a_{q+1}) = d_B \alpha(a_{q+1}) = d_B^2 b_q = 0 \implies d_A a_{q+1} = 0$$

per l'esattezza di (13.13), l'elemento a_{q+1} definisce per passaggio al quoziente una classe $[a_{q+1}] \in H^{q+1}(\mathbf{A}, d_A)$.

Siano ora

$$\begin{aligned} c'_q &= c_q + d_C c_{q-1}, \quad \text{con } c_{q-1} \in \mathbf{C}^{q-1}, \\ b'_q &\in \mathbf{B}^q, \quad \text{con } \beta(b'_q) = c'_q = c_q + d_C c_{q-1}, \\ a'_{q+1} &\in \mathbf{A}^{q+1}, \quad \text{con } \alpha(a'_{q+1}) = d_B b'_q. \end{aligned}$$

Utilizzando ancora l'esattezza di (13.13), otteniamo

$$\begin{aligned} &\exists b_{q-1} \in \mathbf{B}^{q-1} \quad \text{tale che} \\ \beta(b'_q - b_q) &= c'_q - c_q = d_C c_{q-1} = d_C \beta(b_{q-1}) = \beta(d_B b_{q-1}) \\ &\implies \exists a_q \in \mathbf{A}^q \quad \text{tale che } b'_q - b_q - d_B b_{q-1} = \alpha(a_q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies \alpha(a'_{q+1} - a_{q+1}) &= d_B b'_{q+1} - d_B b_q \\
&= d_B(b'_q - b_q - d_B b_{q-1}) \\
&= d_B \alpha(a_q) = \alpha(d_A a_q) \\
\implies a'_{q+1} - a_{q+1} &= d_A a_q.
\end{aligned}$$

Quindi la Δ_q risulta ben definita da

$$(13.15) \quad \Delta_q([c_q]) = [a_{q+1}].$$

Vale il

TEOREMA 13.3.2. *Se (13.13) è una successione esatta lunga di complessi differenziali di spazi vettoriali su \mathbb{k} , allora abbiamo una successione esatta lunga*

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \dots & \longrightarrow & H^{q-1}(\mathbf{B}, d_B) & \xrightarrow{\beta_*} & H^{q-1}(\mathbf{C}, d_C) \\
(13.16) & \xrightarrow{\Delta_{q-1}} & H^q(\mathbf{A}, d_A) & \xrightarrow{\alpha_*} & H^q(\mathbf{B}, d_B) & \xrightarrow{\beta_*} & H^q(\mathbf{C}, d_C) \\
& \xrightarrow{\Delta_q} & H^{q+1}(\mathbf{A}, d_A) & \longrightarrow & \dots & &
\end{array}$$

Nello studio dei gruppi di coomologia dei complessi, è spesso utile i seguenti lemmi algebrici (la dimostrazione di 13.3.4 segue da quella di 38.3.3):

TEOREMA 13.3.3 (Lemma dei cinque). *Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe e colonne esatte:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
& & & & 0 & & 0 & & 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\
\alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\
\mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & & & 0 & &
\end{array}$$

Abbiamo supposto cioè che α_1 sia surgettiva, α_2 e α_4 siano isomorfismi ed α_5 sia iniettiva. Allora α_3 è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che α_3 è iniettiva. Sia $a_3 \in \mathbf{A}_3$, con $\alpha_3(a_3) = 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\alpha_4(f_3(a_3)) &= g_3(\alpha_3(a_3)) = 0 \implies f_3(a_3) = 0 \implies \exists a_2 \in \mathbf{A}_2 \text{ t.c. } a_3 = f_2(a_2) \\
&\implies \alpha_3(f_2(a_2)) = g_2(\alpha_2(a_2)) = 0 \implies \exists b_1 \in \mathbf{B}_1 \text{ t.c. } \alpha_2(a_2) = g_1(b_1) \\
&\implies \exists a_1 \in \mathbf{A}_1 \text{ t.c. } \alpha_1(a_1) = b_1, \implies \alpha_2(a_2) = g_1(\alpha_1(a_1)) = \alpha_2(f_1(a_1)) \\
&\implies a_2 = f_1(a_1) \implies a_3 = f_2 \circ f_1(a_1) = 0.
\end{aligned}$$

Dimostriamo ora che α_3 è surgettiva. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
& \exists a_4 \in \mathbf{A}_4 \text{ t.c. } g_3(b_3) = \alpha_4(a_4) \implies 0 = g_4 \circ g_3(b_3) = g_4 \circ \alpha_4(a_4) = \alpha_5 \circ f_4(a_4) \\
& \implies f_4(a_4) = 0 \implies \exists a_3 \in \mathbf{A}_3 \text{ t.c. } f_3(a_3) = a_4 \\
& \implies g_3(b_3) = \alpha_4 \circ f_3(a_3) = g_3(\alpha_3(a_3)) \implies g_3(b_3 - \alpha_3(a_3)) = 0 \\
& \implies \exists b_2 \in \mathbf{B}_2 \text{ t.c. } g_2(b_2) = b_3 - \alpha_3(a_3) \implies \exists a_2 \in \mathbf{A}_2 \text{ t.c. } \alpha_2(a_2) = b_2 \\
& \implies b_3 - \alpha_3(a_3) = g_2 \circ \alpha_2(a_2) = \alpha_3(f_2(a_2)) \implies b_3 = \alpha_3(a_3 + f_2(a_2)). \quad \square
\end{aligned}$$

TEOREMA 13.3.4 (Lemmi dei quattro). *Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe esatte:*

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 0 & & & 0 \\
& & & \downarrow & & & \downarrow \\
\mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 \\
\alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow \\
\mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 \\
& & & \downarrow & & & \\
& & & 0 & & &
\end{array}$$

Se α_1 è surgettiva ed α_2, α_4 iniettive, allora α_3 è iniettiva.

Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & & 0 \\
& & & & & & \downarrow \\
\mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\
\alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\
\mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5 \\
& & & & & & \downarrow \\
& & & & & & 0 \\
& & & & & & \downarrow \\
& & & & & & 0
\end{array}$$

Se α_5 è iniettiva ed α_2, α_4 surgettive, allora α_3 è surgettiva.

13.4. Le successioni di Mayer-Vietoris

La successione di Mayer-Vietoris¹ è uno degli strumenti fondamentali per il calcolo dei gruppi di coomologia. Essa è una conseguenza del Teorema 13.3.2 e

¹Leopold Vietoris (Radkersburg, 4 giugno 1891 – Innsbruck, 9 aprile 2002), matematico austriaco. I suoi principali contributi sono nel campo della topologia e della storia della matematica.

Meinhard E. Mayer (nato nel 1929 in Romania), ha insegnato a partire dal 1966 presso l'Università della California ad Irvine. I suoi interessi principali sono stati i metodi geometrici delle teorie di gauge e le applicazioni delle ondelette alla turbolenza. Ha contribuito alla teoria dei bosoni-vettori (W e Z bosoni) e dell'unificazione elettro-debole, che sarebbe divenuta poi il modello standard.

del

LEMMA 13.4.1. *Siano A, B due aperti di una varietà M . Allora, per ogni intero q , abbiamo la successione corta*

$$(13.17) \quad 0 \rightarrow \Omega^q(A \cup B) \xrightarrow{\alpha} \Omega^q(A) \oplus \Omega^q(B) \xrightarrow{\beta} \Omega^q(A \cap B) \rightarrow 0,$$

ove

$$(13.18) \quad \begin{cases} \alpha(f) = f|_A \oplus f|_B, & \forall f \in \Omega^q(A \cup B), \\ \beta(g \oplus h) = g|_{A \cap B} - h|_{A \cap B}, & \forall g \in \Omega^q(A), h \in \Omega^q(B). \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. L'iniettività di α e il fatto che la sua immagine sia uguale al nucleo di β sono evidenti. La surgettività di β segue dall'esistenza di una partizione dell'unità su $A \cup B$ subordinata al ricoprimento $\{A, B\}$. Se $\phi_A, \phi_B \in \mathcal{C}^\infty(A \cup B)$ e $\text{supp } \phi_A \subset A$, $\text{supp } \phi_B \subset B$, e $\phi_A + \phi_B = 1$ su $A \cup B$, allora, data $f \in \Omega^q(A \cap B)$, possiamo definire

$$f_A = \begin{cases} \phi_B f & \text{su } A \cap B, \\ 0 & \text{su } A \setminus B, \end{cases}, \quad f_B = \begin{cases} -\phi_A f & \text{su } A \cap B, \\ 0 & \text{su } B \setminus A. \end{cases}$$

Allora $f_A \in \Omega^q(A)$, $f_B \in \Omega^q(B)$ ed $f_A - f_B = f$ su $A \cap B$. \square

Otteniamo quindi, per il Teorema 13.3.2, la successione esatta di Mayer-Vietoris.

TEOREMA 13.4.2 (Mayer-Vietoris). *Per ogni coppia di aperti A, B di una varietà differenziabile M , abbiamo la successione esatta lunga in coomologia:*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^{q-1}(A) \oplus H^{q-1}(B) & \longrightarrow & H^{q-1}(A \cap B) & & \\ \xrightarrow{\Delta_{q-1}} & H^q(A \cup B) & \longrightarrow & H^q(A) \oplus H^q(B) & \longrightarrow & H^q(A \cap B) & \\ \xrightarrow{\Delta_q} & H^{q+1}(A \cup B) & \longrightarrow & H^{q+1}(A) \oplus H^{q+1}(B) & \longrightarrow & \dots & \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Il risultato segue dal Teorema 38.3.2. L'applicazione Δ_q si può descrivere nel modo seguente. Se $f \in \mathcal{L}^q(A \cap B)$ ed $f_A \in \Omega^q(A)$, $f_B \in \Omega^q(B)$ sono forme tali che $f = f_A - f_B$ su $A \cap B$, allora

$$(13.19) \quad g = \begin{cases} df_A & \text{su } A, \\ df_B & \text{su } B, \end{cases}$$

definisce un elemento di $\mathcal{L}^{q+1}(A \cup B)$, la cui classe di coomologia $[g]$ in $H^{q+1}(A \cup B)$ è l'immagine mediante Δ_q della classe $[f]$ di f in $H^q(A \cap B)$. \square

ESEMPIO 13.4.3. Consideriamo la circonferenza $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Siano $A = S^1 \setminus \{-i\}$, $B = S^1 \setminus \{i\}$. Gli aperti A e B sono diffeomorfi ad \mathbb{R} , la loro intersezione $A \cap B$ all'unione disgiunta di due copie di \mathbb{R} . Risulterà quindi:

$$H^q(A) \simeq H^q(B) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } q = 0, \\ 0, & \text{se } q \neq 0, \end{cases} \quad H^q(A \cap B) = \begin{cases} \mathbb{R}^2, & \text{se } q = 0, \\ 0, & \text{se } q \neq 0. \end{cases}$$

Dalla successione di Mayer-Vietoris ricaviamo allora che $H^q(S^1) = 0$ se $q \neq 0, 1$. Inoltre, $H^0(S^1) \simeq \mathbb{R}$ perché S^1 è connesso per archi. Otteniamo allora la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow H^1(S^1) \longrightarrow 0.$$

Quindi la dimensione dello spazio vettoriale $H^1(S^1)$ si ricava da

$$\begin{aligned} 0 &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 - \dim_{\mathbb{R}} H^1(S^1) \\ &= 1 - 2 + 2 - \dim_{\mathbb{R}} H^1(S^1) \implies H^1(S^1) \simeq \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ESEMPIO 13.4.4. Consideriamo la sfera

$$S^n = \{x = (x^0, x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}, \quad n > 1.$$

Siano $A = \{x \in S^n \mid x^0 > -1\}$, $B = \{x \in S^n \mid x^0 < 1\}$. Poiché A e B sono diffeomorfi ad \mathbb{R}^n , ed $A \cap B$ è connesso, otteniamo dalla successione di Mayer-Vietoris gli isomorfismi

$$H^q(S^n) \simeq H^{q-1}(A \cap B), \quad \text{se } q \neq 0, 1,$$

e la successione esatta

$$0 \rightarrow H^0(S^n) \simeq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow H^0(A \cap B) \simeq \mathbb{R} \longrightarrow H^1(S^n) \rightarrow 0,$$

da cui ricaviamo che $H^1(S^n) = 0$ se $n > 1$. Infine, $A \cap B$ si retrae per deformazione su $S^{n-1} = \{x \in S^n \mid x^0 = 0\}$. Per il Corollario 13.2.3 è allora $H^q(A \cap B) \simeq H^q(S^{n-1})$ per ogni $q \in \mathbb{Z}$. Ricaviamo così per ricorrenza, dall'esempio precedente, che

$$H^q(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, n, \\ 0 & \text{se } q \neq 0, n, \end{cases} \quad \text{per } n \geq 1.$$

ESEMPIO 13.4.5. Sia Σ un iperpiano dello spazio proiettivo reale $\mathbb{R}P^n$. Possiamo supporre che $\Sigma = \{x^0 = 0\}$. Allora $A = \{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 > 0\}$ è lo spazio totale di un intorno tubolare di Σ in $\mathbb{R}P^n$. Sia $B = \mathbb{R}P^n \setminus \Sigma$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} A &= \{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 > 0\} \simeq \mathbb{R}P^{n-1} \times \mathbb{R}, \\ B &= \{x_0 \neq 0\} \simeq \mathbb{R}^n, \\ A \cup B &= \mathbb{R}P^n, \\ A \cap B &\simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Utilizzando le equivalenze omotopiche $A \simeq \mathbb{R}P^{n-1}$, $B \simeq \{0\}$, $A \cap B \equiv S^{n-1}$, otteniamo la successione esatta in coomologia

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H^{q-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H^q(\mathbb{R}P^n) \longrightarrow H^q(\mathbb{R}P^{n-1}) \oplus H^q(\{0\}) \\ &\longrightarrow H^q(S^{n-1}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Per $n = 2$, questa si riduce alla

$$0 \longrightarrow H^1(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^2(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow 0.$$

Poiché il rivestimento universale S^2 di $\mathbb{R}P^2$ è compatto e semplicemente connesso, $H^1(\mathbb{R}P^2) = 0$ e quindi anche $H^2(\mathbb{R}P^2) = 0$. Si dimostra allora per ricorrenza che

$$H^q(\mathbb{R}P^{2m+1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 2m + 1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad H^q(\mathbb{R}P^{2m}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESEMPIO 13.4.6. Siano m, n interi con $1 \leq m < n$, Σ un m -piano di $\mathbb{R}P^n$ ed $M = \mathbb{R}P^n \setminus \Sigma$. Scegliamo un $(n-m-1)$ -piano Σ' di $\mathbb{R}P^n$ con $\Sigma \cap \Sigma' = \emptyset$. Per ogni $q \in M$, l' $(m+1)$ -piano per q e Σ interseca Σ' in uno ed un solo punto $p = \pi(q)$. Poiché $(q\Sigma) \setminus \Sigma \simeq \mathbb{R}^{m+1}$, la $\tau = (M \xrightarrow{\pi} \Sigma')$ definisce un intorno tubolare di Σ' in $\mathbb{R}P^n$, con spazio totale M . L' $(n-m-1)$ -piano Σ' è quindi un retratto di deformazione di M . Otteniamo perciò

$$H^q(\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^m) \simeq H^q(\mathbb{R}P^{n-m-1}), \quad \forall q > 0.$$

Ad esempio,

$$\begin{aligned} H^q(\mathbb{R}P^3 \setminus \mathbb{R}P^1) &= \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \\ H^q(\mathbb{R}P^5 \setminus \mathbb{R}P^1) &= \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 3, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \\ H^q(\mathbb{R}P^5 \setminus \mathbb{R}P^2) &= \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \\ H^q(\mathbb{R}P^5 \setminus \mathbb{R}P^3) &= \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned}$$

ESEMPIO 13.4.7. Siano $\mathbb{C}P^n$ lo spazio proiettivo di dimensione complessa n e $\Sigma = \{z^0 = 0\}$ un suo iperpiano. Allora $A = \{|z^1|^2 + \dots + |z^n|^2 > 0\}$ è lo spazio totale di un intorno tubolare di Σ in $\mathbb{C}P^n$. Poniamo $B = \mathbb{C}P^n \setminus \Sigma$. Allora

$$\begin{aligned} A &= \{|z^1|^2 + \dots + |z^n|^2 > 0\} \simeq \mathbb{C}P^{n-1}, \\ B &= \mathbb{C}P^n \setminus \Sigma = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \\ A \cup B &= \mathbb{C}P^n, \\ A \cap B &= \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \simeq S^{2n-1}, \end{aligned}$$

ove \simeq indica equivalenza omotopica. Otteniamo allora la successione esatta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(\mathbb{C}P^n) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{C}P^{n-1}) & \longrightarrow & H^1(S^{2n-1}) \\ & & \longrightarrow & & H^2(\mathbb{C}P^n) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & H^{q-1}(S^{2n-1}) \\ & & \longrightarrow & & H^q(\mathbb{C}P^n) & \longrightarrow & H^q(\mathbb{C}P^{n-1}) & \longrightarrow & H^q(S^{2n-1}) \\ & & \longrightarrow & & \dots & & & & \end{array}$$

Otteniamo allora

$$H^q(\mathbb{C}P^n) \simeq H^q(\mathbb{C}P^{n-1}), \quad \forall q \leq 2n - 2, \quad H^{2n-1}(\mathbb{C}P^n) = 0, \quad H^{2n}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{R}.$$

Ricaviamo perciò, per ricorrenza,

$$H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 2, \dots, 2n, \\ 0 & \text{se } q = 1, 3, \dots, 2n-1. \end{cases}$$

ESEMPIO 13.4.8. Siano m, n due interi con $1 \leq m < n$ e Σ un m -piano proiettivo complesso in $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Se scegliamo un $(n-m-1)$ -piano proiettivo complesso Σ' che non intersechi Σ , l'applicazione che fa corrispondere ad ogni punto q di $M = \mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \Sigma$ l'unico punto $p = \pi(q)$ di Σ' in cui l' $(m+1)$ -piano proiettivo complesso per Σ e q interseca Σ' definisce un intorno tubolare $\tau = (M \xrightarrow{\pi} \Sigma')$ di Σ' in $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Otteniamo perciò

$$H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{C}\mathbb{P}^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 2, \dots, 2(n-m-1), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESEMPIO 13.4.9. Siano M ed N due sottovarietà proprie connesse di \mathbb{R}^n la cui intersezione sia un singolo punto p_0 . Possiamo scegliere due loro intorni tubolari con spazi totali A e B la cui intersezione $A \cap B$ sia un intorno contrattile di p_0 . Dalla successione esatta di Mayer-Vietoris possiamo allora dedurre che

$$H^0(A \cap B) = \mathbb{R}, \quad H^q(A \cup B) = H^q(A) \oplus H^q(B), \quad \text{per ogni } q > 0.$$

ESEMPIO 13.4.10. Siano M una varietà connessa di dimensione $m \geq 2$, $p_0 \in M$ ed $N = M \setminus \{p_0\}$. Allora $H^q(M) \simeq H^q(N)$ per ogni $q \neq m, m-1$. Infatti, se A è un intorno contrattile di p_0 in M , l'intersezione $A \cap N$ è omotopicamente equivalente alla sfera S^{m-1} . La successione di Mayer-Vietoris ci dà quindi l'isomorfismo desiderato se $1 \leq q \leq m-2$. Abbiamo poi la successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{m-1}(M) & \longrightarrow & H^{m-1}(N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \\ & & H^m(M) & \longrightarrow & H^m(N) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Una varietà connessa di dimensione m ha m -esimo gruppo di coomologia di de Rham uguale ad \mathbb{R} se compatta ed orientabile, uguale a 0 altrimenti. Avremo quindi $H^{m-1}(M) \simeq H^{m-1}(N)$ se M è compatta e orientabile, $H^{m-1}(N) \simeq H^{m-1}(M) \oplus \mathbb{R}$ altrimenti.

ESEMPIO 13.4.11. Siano M_1, M_2 due varietà connesse di dimensione m . Allora

$$H^q(M_1 \sharp M_2) = H^q(M_1) \oplus H^q(M_2) \quad \text{se } q \neq m-1, m.$$

ESEMPIO 13.4.12. Introduciamo su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la relazione di equivalenza

$$x \sim y \iff y = 2^k x, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Allora $M = ((\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) / \sim)$ ha un'unica struttura di varietà differenziabile di dimensione n per cui la proiezione nel quoziente $\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow M$ sia un diffeomorfismo locale. Per $n = 1$ la M è diffeomorfa ad S^1 e per $n = 2$ al toro $T^2 = S^1 \times S^1$.

Consideriamo il caso $n \geq 3$.

Possiamo ricoprire M con i due aperti

$$A = \pi(\{1 < |x| < 2\}), \quad B = \pi(\{\frac{3}{2} < |x| < 3\}).$$

I due aperti A e B sono omotopicamente equivalenti ad S^{n-1} e la loro intersezione $A \cap B$ all'unione disgiunta di due copie di S^{n-1} . Otteniamo allora la successione esatta di Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ & & \longrightarrow & & H^1(M) & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & H^q(M) & \longrightarrow & 0 & \text{ per } 2 \leq q \leq m-2 \\ 0 & \longrightarrow & H^{m-1}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ & & \longrightarrow & & H^m(M) = \mathbb{R} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Da questo ricaviamo:

$$H^q(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 1, (m-1), m, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Costruiamo ora la successione esatta di Mayer-Vietoris per le forme a supporto compatto.

LEMMA 13.4.13. *Siano A, B due aperti della varietà differenziabile M . Allora, per ogni intero non negativo q abbiamo la successione esatta*

$$(13.20) \quad 0 \rightarrow \Omega_c^q(A \cap B) \xrightarrow{\alpha} \Omega_c^q(A) \oplus \Omega_c^q(B) \xrightarrow{\beta} \Omega_c^q(A \cup B) \rightarrow 0$$

ove

$$\begin{cases} \alpha(f) = f \oplus f & \forall f \in \Omega_c^q(A \cap B), \\ \beta(f \oplus g) = f - g & \forall f \in \Omega_c^q(A), g \in \Omega_c^q(A \cap B). \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. L'iniettività di α e il fatto che l'immagine di α sia il nucleo di β sono ovvii. La surgettività di β è conseguenza della partizione dell'unità. Se $\phi_A, \phi_B \in \mathcal{C}^\infty(A \cup B)$ e $\text{supp } \phi_A \subset A$, $\text{supp } \phi_B \subset B$, e $\phi_A + \phi_B = 1$ su $A \cup B$, allora, data $f \in \Omega_c^q(A \cup B)$, possiamo definire

$$f_A = \phi_A f, \quad f_B = \phi_B f.$$

Allora $f_A \in \Omega_c^q(A)$, $f_B \in \Omega_c^q(B)$ ed $f_A - f_B = f$ su $A \cup B$. \square

Come conseguenza abbiamo

TEOREMA 13.4.14 (Mayer-Vietoris per supporti compatti). *Siano A, B due aperti della varietà differenziabile M . Abbiamo allora una successione esatta lunga per la coomologia di de Rham a supporti compatti:*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_c^{q-1}(A) \oplus H_c^{q-1}(B) & \longrightarrow & H_c^{q-1}(A \cup B) \\ \longrightarrow & H_c^q(A \cap B) & \longrightarrow & H_c^q(A) \oplus H_c^q(B) & \longrightarrow & H_c^q(A \cup B) \\ \longrightarrow & H_c^{q+1}(A \cap B) & \longrightarrow & H_c^{q+1}(A) \oplus H_c^{q+1}(B) & \longrightarrow & \dots & \square \end{array}$$

13.5. Dualità di Poincaré

DEFINIZIONE 13.5.1. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Un *buon ricoprimento* di M è un suo ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ per cui ogni intersezione non vuota $U_{i_1, \dots, i_k} = U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$ sia diffeomorfa ad \mathbb{R}^m .

Introducendo ad esempio una metrica Riemanniana su M e scegliendo intorni aperti convessi (vedi e.g. [4, Chap.3, §4]), possiamo dimostrare il

TEOREMA 13.5.2. *Ogni varietà differenziabile M ammette un buon ricoprimento. Ogni ricoprimento aperto di una varietà differenziabile M ammette un buon raffinamento.* \square

TEOREMA 13.5.3. *Se una varietà M ammette un buon ricoprimento finito, allora sia la sua coomologia di de Rham che la sua coomologia di de Rham coi supporti compatti hanno dimensione finita. Se inoltre M è una varietà differenziabile orientabile di dimensione m , la forma bilineare*

$$(13.21) \quad (f, g) \rightarrow \int_M f \wedge g, \quad \text{per } f \in \Omega^q(M), \quad g \in \Omega_c^{m-q}(M)$$

definisce per passaggio al quoziente un accoppiamento di dualità tra $H^q(M)$ ed $H_c^{m-q}(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Ragionando per induzione sulla cardinalità di un buon ricoprimento, ed utilizzando le successioni esatte di Mayer-Vietoris, si dimostra facilmente la finitezza dei gruppi di coomologia di de Rham, sia con supporti chiusi che con supporti compatti.

Supponiamo ora che M sia orientabile. Possiamo allora definire senza ambiguità l'integrale su M delle m -forme. Se f e g sono chiuse, ed una delle due esatta, abbiamo

$$\int_M f \wedge g = 0.$$

Se infatti $f = du$, con $u \in \Omega^{q-1}(M)$, allora $f \wedge g = d(u \wedge g)$, con $u \wedge g \in \Omega_c^{m-1}(M)$, e quindi l'integrale (13.21) è nullo per la formula di Stokes. Se $g = dv$ con $v \in \Omega_c^{q-1}(M)$, allora ancora $w = (-1)^q f \wedge v \in \Omega_c^{m-1}(M)$ e l'integrale (13.21) è nullo per la formula di Stokes perché $f \wedge g = dw$. Questo dimostra in particolare che il valore dell'integrale in (13.21) dipende dalle classi di coomologia, e non dai loro rappresentanti f, g .

Verifichiamo ora che (13.21) definisce un accoppiamento di dualità tra i gruppi di coomologia. Osserviamo che questo è vero se $M = \mathbb{R}^m$. Possiamo quindi ragionare per induzione, supponendolo vero per varietà M che ammettano un buon ricoprimento che consista di al più un certo numero $\ell \geq 1$ di aperti, e dimostrandolo quindi per varietà che ammettano un buon ricoprimento con $\ell + 1$ aperti.

Siamo U, V due aperti di M e definiamo

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = H^q(U \cap V), \\ \mathbf{A}_2 = H^q(U) \oplus H^q(V), \\ \mathbf{A}_3 = H^q(U \cup V), \\ \mathbf{A}_4 = H^{q+1}(U \cap V), \\ \mathbf{A}_5 = H^{q+1}(U) \oplus H^{q+1}(V), \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{B}_1 = (H_c^{m-q}(U \cap V))^*, \\ \mathbf{B}_2 = (H_c^{m-q}(U))^* \oplus (H_c^{m-q}(V))^*, \\ \mathbf{B}_3 = (H_c^q(U \cup V))^*, \\ \mathbf{B}_4 = (H_c^{m-q-1}(U \cap V))^*, \\ \mathbf{B}_5 = (H_c^{m-q-1}(U))^* \oplus (H_c^{m-q-1}(V))^*, \end{cases}$$

ove E^* denota il duale dello spazio vettoriale di dimensione finita E . La (13.21) definisce le frecce verticali del diagramma commutativo a righe esatte

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5, \end{array}$$

ove le g_i sono ottenute per dualità da quelle della successione esatta di Mayer-Vietoris per i supporti compatti. Se M ammette un buon ricoprimento consistente di $\ell + 1$ aperti U_0, U_1, \dots, U_ℓ e scegliamo $U = U_0, V = \bigcup_{j=1}^\ell U_j$, allora U, V ed $U \cap V$ ammettono buoni ricoprimenti con al più ℓ aperti. Per l'ipotesi induttiva ne segue che $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ sono isomorfismi e dunque, per il lemma dei cinque, anche α_3 è un isomorfismo, che identifica $H^q(M) = H^q(U \cup V)$ al duale di $H_c^{m-q}(M)$. \square

COROLLARIO 13.5.4. *Sia M una varietà differenziabile orientabile che ammette un buon ricoprimento finito.*

Sia $\alpha \in \Omega^q(M)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\alpha \in \mathcal{B}^q(M)$ è che

$$(13.22) \quad \int_M \alpha \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{Z}_c^{m-q}(M).$$

Sia $\alpha \in \Omega_c^q(M)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\alpha \in \mathcal{B}_c^q(M)$ è che

$$(13.23) \quad \int_M \alpha \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{Z}^{m-q}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\alpha \in \Omega^q(M)$ soddisfi la (13.23). Abbiamo in particolare

$$\int_M (d\alpha) \wedge \theta = (-1)^{q+1} \int_M \alpha \wedge d\theta = 0, \quad \forall \theta \in \Omega_c^{m-q+1}(M),$$

e quindi $\alpha \in \mathcal{Z}^q(M)$. Se fosse $[\alpha] \neq 0$ in $H^q(M)$, per il Teorema 13.5.3 potremmo trovare una $\eta \in \mathcal{Z}_c^{m-q}(M)$ con

$$\int_M \alpha \wedge \eta \neq 0.$$

Quindi $\alpha \in \mathcal{B}^q(M)$. La dimostrazione nel caso delle forme a supporto compatto è analoga. \square

In particolare abbiamo:

TEOREMA 13.5.5. *Se M è una varietà differenziabile compatta e orientabile di dimensione m , allora*

$$(13.24) \quad \dim_{\mathbb{R}} H^q(M) = \dim_{\mathbb{R}} H^{m-q}(M) < +\infty$$

e la (13.21) definisce un accoppiamento di dualità tra $H^q(M)$ ed $H^{m-q}(M)$. In particolare, per una varietà differenziabile connessa, compatta ed orientabile di dimensione m è $H^m(M) \simeq \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE 13.5.6. L'enunciato non vale, in generale, nel caso di varietà non orientabili. Ad esempio, per lo spazio proiettivo reale di dimensione pari $2m > 0$ abbiamo

$$\mathbb{R} = H^0(\mathbb{R}P^{2m}) \neq H^{2m}(\mathbb{R}P^{2m}) = 0.$$

ESEMPIO 13.5.7. Sia M una superficie orientabile di genere g . Possiamo ottenere M da un poligono chiuso P di $4g$ identificando a coppie i suoi lati secondo la formula $\partial P = a_1 b_1^{-1} a_1 b_1^{-1} \cdots a_g b_g^{-1} a_g b_g^{-1}$. Sia $\pi : P \rightarrow M$ la proiezione nel quoziente. Utilizziamo un ricoprimento di M mediante i due aperti $A = \pi(\mathring{P}) \simeq \mathbb{R}^2$, $B = \pi(P \setminus \{p_0\})$ per un punto $p_0 \in \mathring{P}$. L'intersezione $A \cap B$ è omotopicamente equivalente ad S^1 . Per l'Esempio 13.4.9, poiché B si retrae su un bouquet di $2g$ circonferenze, otteniamo che $H^1(B) = \underbrace{H^1(S^1) \oplus \cdots \oplus H^1(S^1)}_{2g \text{ volte}} = \mathbb{R}^{2g}$. Per Mayer-Vietoris

abbiamo allora la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{2g} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^2(M) \longrightarrow 0.$$

Per la dualità di Poincaré è $H^2(M) \simeq H^0(M) = \mathbb{R}$ e quindi $H^1(M) = \mathbb{R}^{2g}$.

OSSERVAZIONE 13.5.8. I gruppi di coomologia $H^q(M)$ hanno in generale, anche quando non siano di dimensione finita, una struttura naturale di spazi di Fréchet. Se M è orientabile, i gruppi $H_c^{m-q}(M)$ sono ancora i loro duali topologici, con opportuna topologia di spazi vettoriali topologici. La (13.21) definisce ancora un accoppiamento di dualità tra $H^q(M)$ ed $H_c^q(M)$.

13.6. Grado di un'applicazione

Dal Teorema 13.5.5 segue:

TEOREMA 13.6.1. *Siano M, N due varietà connesse, compatte, orientabili, della stessa dimensione m . Se $f : M \rightarrow N$ è un'applicazione differenziabile, esiste un numero intero k tale che*

$$(13.25) \quad \int_M f^* \phi = k \int_N \phi, \quad \forall \phi \in \Omega^m(N).$$

DEFINIZIONE 13.6.2. Il numero intero k nella formula (13.25) si dice il *grado* dell'applicazione f e si denota con $\deg(f)$.

Con una dimostrazione analoga a quella del Teorema 10.6.2 del Capitolo X possiamo dimostrare

TEOREMA 13.6.3. *Siano M, N due varietà connesse, compatte, orientabili, della stessa dimensione m ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$. Allora il grado di f è la somma algebrica delle segnature di $df(p)$, per p che varia nella controimmagine $f^{-1}(q)$ di un valore regolare $q \in N$ di f , ed è zero se f non è surgettiva. \square*

ESEMPIO 13.6.4. Su $S^1 = \{z = e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ la forma differenziale

$$\frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{d\bar{z}}{\bar{z}}$$

definisce l'orientazione ed ha integrale 1.

Se $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{D})$ ed $f(z) \neq 0$ per $z \in S^1$, la

$$(13.26) \quad g : S^1 \ni z \longrightarrow \frac{f(z)}{|f(z)|} \in S^1$$

è un'applicazione di classe \mathcal{C}^∞ . Per calcolarne l'indice, osserviamo che

$$(13.27) \quad \begin{aligned} g^*\left(\frac{1}{2\pi} d\theta\right) &= \frac{1}{2\pi i} d \log g = \frac{1}{2\pi i} (d \log f(z) - \frac{1}{2} d \log f(z)\bar{f}(z)) \\ &= \frac{1}{4\pi i} \left(\frac{f'(z)dz}{f(z)} - \frac{\bar{f}'(z)d\bar{z}}{\bar{f}(z)} \right). \end{aligned}$$

Otteniamo allora

$$(13.28) \quad \begin{aligned} \deg(g) &= \frac{1}{4\pi i} \int_S \left(\frac{f'(z)dz}{f(z)} - \frac{\bar{f}'(z)d\bar{z}}{\bar{f}(z)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f'(z)dz}{f(z)} = \sum_{z \in D} v_z(f), \end{aligned}$$

ove $v_z(f)$ è la molteplicità di zero di f in z .

Più in generale se $f \in \mathcal{M}(D) \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{D} \setminus f^{-1}(\infty))$ è una funzione meromorfa su D , che si prolunga ad una funzione \mathcal{C}^∞ in un intorno di S^1 , e definiamo g mediante la (13.26), il grado di g è ancora definito dalla (13.28), ove $v_z(f)$ indica l'intero per cui $\zeta \rightarrow (\zeta - z)^{v_z(f)} f(\zeta)$ è definita, olomorfa e non nulla in un intorno di z in D , è cioè o l'ordine di zero o l'opposto dell'ordine di polo di f in z .

13.7. La formula di Künnet

TEOREMA 13.7.1 (formula di Künnet). *Siano M ed N due varietà differenziabili, di dimensioni m ed n , rispettivamente. Supponiamo che M ammetta un buon ricoprimento finito². Allora vale la formula di Künnet³*

$$(13.29) \quad \begin{cases} H^q(M \times N) \simeq \bigoplus_{j=0}^m H^j(M) \otimes H^{q-j}(N), \\ H_c^q(M \times N) \simeq \bigoplus_{j=0}^m H_c^j(M) \otimes H_c^{q-j}(N), \end{cases} \quad \text{per ogni } q \in \mathbb{N}.$$

²Il teorema vale anche sotto l'ipotesi meno restrittiva che i gruppi di coomologia di M siano di dimensione finita. Nel caso in cui né i gruppi di coomologia di de Rham di M né tutti quelli di N siano tutti di dimensione finita, la tesi vale ancora, purché i prodotti tensoriali nella formula di Künnet si intendano calcolati nel senso degli spazi vettoriali topologici.

³Otto Hermann Lorenz Künneth (Neustadt an der Haardt, 6 luglio 1892 – Erlangen, 7 maggio 1975) topologo algebrico tedesco.

DIMOSTRAZIONE. Siano

$$(13.30) \quad \begin{array}{ccc} & M \times N & \\ \pi_M \swarrow & & \searrow \pi_N \\ M & & N \end{array}$$

le proiezioni del prodotto $M \times N$ sui singoli fattori, e sia $\Omega^{q_1}(M) \otimes \Omega^{q_2}(N)$ il prodotto tensoriale algebrico di $\Omega^{q_1}(M)$ ed $\Omega^{q_2}(N)$. I suoi elementi sono le somme finite

$$(13.31) \quad f = \sum_{j=1}^r \pi_M^*(g_j) \wedge \pi_N^*(h_j), \quad \text{con } g_j \in \Omega^{q_1}(M), h_j \in \Omega^{q_2}(N).$$

Abbiamo inclusioni naturali

$$\begin{aligned} \bigoplus_{q_1+q_2=q} \mathcal{L}^{q_1}(M) \otimes \mathcal{L}^{q_2}(N) &\hookrightarrow \mathcal{L}^q(M \times N), \\ \bigoplus_{q_1+q_2=q} \mathcal{B}^{q_1}(M) \otimes \mathcal{B}^{q_2}(N) &\hookrightarrow \mathcal{B}^q(M \times N), \end{aligned}$$

che definiscono applicazioni

$$(13.32) \quad \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}(M) \otimes H^{q_2}(N) \longrightarrow H^q(M \times N).$$

Fissiamo due aperti U, V di M e poniamo

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}(U \cap V) \otimes H^{q_2}(N), \\ \mathbf{A}_2 = \bigoplus_{q_1+q_2=q} (H^{q_1}(U) \oplus H^{q_1}(V)) \otimes H^{q_2}(N), \\ \mathbf{A}_3 = \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}(U \cup V) \otimes H^{q_2}(N), \\ \mathbf{A}_4 = \bigoplus_{q_1+q_2=q+1} H^{q_1}(U \cap V) \otimes H^{q_2}(N), \\ \mathbf{A}_5 = \bigoplus_{q_1+q_2=q+1} (H^{q_1}(U) \oplus H^{q_1}(V)) \otimes H^{q_2}(N), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = H^q((U \cap V) \times N), \\ \mathbf{B}_2 = H^q(U \times N) \oplus H^q(V \times N), \\ \mathbf{B}_3 = H^q((U \cup V) \times N), \\ \mathbf{B}_4 = H^{q+1}((U \cap V) \times N), \\ \mathbf{B}_5 = H^{q+1}(U) \oplus H^{q+1}(V \times N), \end{cases}$$

Per la successione esatta di Mayer-Vietoris, otteniamo un diagramma commutativo a righe esatte

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccccc} \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5, \end{array}$$

dove le α_i sono definite dalle (13.32), sostituendo ad M le sottovarietà $U, V, U \cap V$. Dimostreremo quindi la formula di Künnet per induzione sul numero di aperti di

un buon ricoprimento di M . Infatti, con una dimostrazione analoga a quella del Lemma 10.4.4 del Capitolo X, si dimostra che

$$H^q(\mathbb{R}^m \times N) \simeq H^q(N), \quad \forall q \in \mathbb{N},$$

e quindi la formula di Künnet vale quando $M = \mathbb{R}^m$. Supponiamo che essa valga per ogni varietà M che ammetta un buon ricoprimento con al più k aperti, per qualche $k \geq 1$. Se $\{U_0, \dots, U_k\}$ è un buon ricoprimento di una varietà M , che consiste di $k + 1$ aperti, consideriamo il diagramma (*) con $U = U_0$ e $V = U_1 \cup \dots \cup U_k$. Allora, per l'ipotesi induttiva, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ sono isomorfismi. Per il lemma dei cinque anche α_3 è un isomorfismo. \square

Con analoga dimostrazione otteniamo

TEOREMA 13.7.2 (Leray-Hirsch). *Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato differenziabile, con fibra tipica F . Supponiamo che M abbia un buon ricoprimento finito e che per ogni intero non negativo q vi siano delle classi di coomologia $e_1^q, \dots, e_{\nu_q}^q \in H^q(E)$ tali che il loro pull-back su ciascuna fibra $\pi^{-1}(x)$, per $x \in M$, sia una base di $H^q(\pi^{-1}(x))$. Allora vale la formula di Künneth:*

$$(13.33) \quad H^q(E) = \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}(M) \otimes H^{q_2}(F). \quad \square$$

ESEMPIO 13.7.3. Sia $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ volte}}$ il toro n -dimensionale.

Poiché $T^n = T^{n-1} \times S^1$, per la formula di Künnet, abbiamo

$$H^q(T^n) = (H^q(T^{n-1}) \otimes \mathbb{R}) \oplus (H^{q-1}(T^{n-1}) \otimes \mathbb{R}) = H^{q-1}(T^{n-1}) \oplus H^q(T^{n-1}), \quad \forall q \geq 1.$$

Poiché $\binom{n-1}{q} + \binom{n-1}{q-1} = \binom{n}{q}$, otteniamo per ricorrenza

$$H^q(T^n) = \mathbb{R}^{\binom{n}{q}}, \quad \forall q = 0, 1, \dots, n.$$

13.8. Duale di Poincaré di una sottovarietà orientata

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m ed S una sua sottovarietà propria orientata di dimensione k . Associamo ad S il funzionale lineare \mathbb{I}_S , definito sulle k -forme a supporto compatto da:

$$(13.34) \quad \mathbb{I}_S(f) = \int_S f, \quad \forall f \in \mathcal{Q}_c^k(M).$$

Per la formula di Stokes, $\mathbb{I}_S(f) = 0$ se $f \in \mathcal{B}_c^k(M)$. Per passaggio al quoziente, \mathbb{I}_S definisce quindi un funzionale lineare su $H_c^k(M)$. Supponiamo che M sia orientata ed ammetta un buon ricoprimento finito. Allora vale la dualità di Poincaré e potremo dunque identificare \mathbb{I}_S ad un elemento di $H^{m-k}(M)$.

DEFINIZIONE 13.8.1. Sia M una varietà orientata ed S una sua sottovarietà propria orientata di dimensione k . Si dice *duale di Poincaré chiuso* di S una qualsiasi forma $\eta_S \in \mathcal{L}^{m-k}(M)$, tale che

$$(13.35) \quad \int_M f \wedge \eta_S = \int_S f, \quad \forall f \in \mathcal{L}_c^k(M).$$

La classe $[\eta_S] \in H^{m-k}(M)$ è l'elemento che definisce \mathbb{I}_S nella dualità di Poincaré.

In modo analogo, se S è una sottovarietà compatta orientata di dimensione k di M , possiamo associare ad essa un funzionale definito sulle k -forme differenziali con supporti chiusi in M , mediante

$$(13.36) \quad \mathbb{I}_S(f) = \int_S f, \quad \forall f \in \mathcal{Q}^k(M).$$

Poiché $\mathbb{I}_S(f) = 0$ se $f \in \mathcal{B}^k(M)$, la \mathbb{I}_S definisce in questo caso un funzionale lineare su $H^k(M)$. Per la dualità di Poincaré potremo trovare un unico elemento di $H_c^{m-k}(M)$ tale che, se $\eta_S \in \mathcal{L}_c^{m-k}(M)$ è un suo rappresentante, risulti

$$(13.37) \quad \int_M f \wedge \eta_S = \int_S f, \quad \forall f \in \mathcal{L}^k(M).$$

DEFINIZIONE 13.8.2. Sia M una varietà orientata ed S una sua sottovarietà compatta orientata di dimensione k . Una forma $\eta_S \in \mathcal{L}_c^{m-k}(M)$ per cui valga la (13.37) si dice *duale di Poincaré compatto* di S . La sua classe $[\eta_S] \in H_c^{m-k}(M)$ è l'elemento che definisce \mathbb{I}_S nella dualità di Poincaré.

ESEMPIO 13.8.3. Il duale di Poincaré chiuso di un punto in \mathbb{R}^n è 0, mentre il suo duale di Poincaré compatto è una qualsiasi forma a supporto compatto con integrale 1 su \mathbb{R}^n .

ESEMPIO 13.8.4. Sia $S = \{(x, 0) \mid x > 0\} \subset M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Introduciamo su M coordinate polari (r, θ) . Il differenziale

$$d\theta = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$$

è ben definito su M .

Sia $f = a(x, y)dx + b(x, y)dy \in \mathcal{L}_c^1(M)$. Scriviamola nella forma

$$f = \phi dr + \psi d\theta, \quad \text{con} \quad \phi = a \cos \theta + b \sin \theta, \quad \psi = -r(a \sin \theta - b \cos \theta).$$

Abbiamo

$$\iint_M f \wedge d\theta = \iint_M \phi dr \wedge d\theta = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} \phi(r, \theta) d\theta$$

Integrando per parti abbiamo

$$\int_0^{2\pi} \phi d\theta = 2\pi\phi(r, 0) - \int_0^{2\pi} \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta.$$

Utilizzando le condizioni d'integrabilità e scambiando l'ordine d'integrazione, otteniamo che

$$\int_0^{+\infty} dr \int_0^{2\pi} \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \theta d\theta \int_0^\infty \frac{\partial \psi}{\partial r} dr = 0.$$

Quindi

$$\iint_M f \wedge d\theta = 2\pi \int_0^\infty \phi(r, 0) dr = 2\pi \int_S f.$$

Quindi $(2\pi)^{-1}d\theta$ è il duale di Poincaré chiuso di $S = \{x > 0, y = 0\}$ in $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Osserviamo che, in particolare, se $f = adx + bdy \in \mathcal{L}_c^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, l'integrale

$$\int_{S_\theta} f, \quad \text{per } S_\theta = \{t(\cos \theta, \sin \theta) \mid t > 0\}$$

non dipende dalla scelta dell'angolo θ .

ESEMPIO 13.8.5. Sia $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Il duale di Poincaré di S^1 è la classe di $\chi(r)dr$ per una qualsiasi funzione $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, con $\text{supp } \chi \subset \{r > 0\}$ ed $\int_{\mathbb{R}} \chi dr = 1$.

13.9. La proprietà semi-locale

In questo paragrafo studiamo la coomologia di de Rham su varietà differenziabili che possono non avere un buon ricoprimento finito. Dimostriamo innanzi tutto il seguente

LEMMA 13.9.1. *Sia M una varietà differenziabile connessa ed orientabile, che ammette un buon ricoprimento finito. Sia q un intero con $1 \leq q \leq n$ ed $\eta_1, \dots, \eta_k \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(M)$ forme chiuse a supporto compatto tali che $[\eta_1], \dots, [\eta_k]$ sia una base di $H_c^{m-q+1}(M)$.*

Se $\alpha \in \mathcal{B}^q(M)$, allora esiste una soluzione $\beta \in \mathcal{Q}^{q-1}$ di

$$(13.38) \quad d\beta = \alpha, \quad \int_M \beta \wedge \eta_i = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq k.$$

Se $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{Q}^{q-1}$ sono soluzioni di (13.38), allora $\beta_1 - \beta_2 \in \mathcal{B}^{q-2}(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\beta_0 \in \mathcal{Q}^{q-1}$ una soluzione di $d\beta_0 = \alpha$ in M . Per la dualità di Poincaré, esiste una $\beta_1 \in \mathcal{L}^{q-1}(M)$ tale che

$$\int_M \beta_1 \wedge \eta_i = \int_M \beta_0 \wedge \eta_i, \quad \text{per } 1 \leq i \leq k.$$

Allora $\beta = \beta_0 - \beta_1$ soddisfa la (13.38).

Se β_1, β_2 soddisfano la (13.38), allora $\beta_1 - \beta_2 \in \mathcal{L}^{q-1}(M)$ soddisfa

$$\int_M (\beta_1 - \beta_2) \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(M).$$

Infatti, $\eta \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(M)$ si può scrivere in modo unico nella forma $\eta = d\theta + \sum_{i=1}^k c_i \eta_i$ con $\theta \in \mathcal{L}_c^{m-q}(M)$ e $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. Abbiamo perciò

$$\begin{aligned} \int_M (\beta_1 - \beta_2) \wedge \eta &= \int_M (\beta_1 - \beta_2) \wedge d\theta + \sum_{i=1}^k c_i \int_M (\beta_1 - \beta_2) \wedge \eta_i \\ &= (-1)^{q-1} \int_M d((\beta_1 - \beta_2) \wedge \theta) = 0 \end{aligned}$$

per la formula di Stokes. Quindi, per il Corollario 13.5.4, $\beta_1 - \beta_2 \in \mathcal{B}^q(M)$. \square

La coomologia di de Rham gode della proprietà semi-locale, che è descritta dalla seguente

PROPOSIZIONE 13.9.2. *Sia M una varietà differenziabile connessa, orientabile e numerabile all'infinito. Sia q un intero ≥ 0 e supponiamo che $H_c^{m-q+1}(M)$ abbia dimensione finita.*

Per $\alpha \in \mathcal{L}^q(M)$ sono equivalenti:

- (1) $\alpha \in \mathcal{B}^q(M)$,
- (2) $\int_M \alpha \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}^{m-q}(M)$,
- (3) $\forall U^{\text{aperto}} \Subset M, \quad \alpha|_U \in \mathcal{B}^q(U)$.

DIMOSTRAZIONE. Per $q = 0$, una $\alpha \in \mathcal{L}^0(M)$ è una funzione costante su M e le condizioni (1), (2), (3) equivalgono al fatto che $\alpha = 0$.

Osserviamo che chiaramente (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2). Basterà quindi dimostrare l'implicazione (3) \Rightarrow (1) per $1 \leq q \leq n$.

Fissiamo un buon ricoprimento numerabile e localmente finito $\{U_\nu\}_{\nu \geq 0}$ di M , formato da aperti relativamente compatti. Costruiamo una successione crescente di aperti $\{V_\nu\}_{\nu \geq 0}$, con $V_\nu \Subset V_{\nu+1}$ ed $M = \bigcup_\nu V_\nu$, ciascuno dotato di un buon ricoprimento finito. A questo scopo possiamo definire per ricorrenza:

$$\begin{cases} V_0 = U_0, \\ V_{\nu+1} = \bigcup \{U_\mu \mid U_\mu \cap \bar{V}_\nu \neq \emptyset\}. \end{cases}$$

Il gruppo $H_c^{m-q+1}(M)$ è unione delle immagini delle applicazioni

$$H_c^{m-q+1}(V_\nu) \rightarrow H_c^{m-q+1}(M)$$

definite dalle inclusioni $V_\nu \hookrightarrow M$. Quindi $H_c^{m-q+1}(M)$ ha una base al più numerabile. Costruiamo una successione $\{\eta_h\}_{h \geq 1} \subset \mathcal{L}^{m-q+1}(M)$ ed una successione di aperti $\{W_\nu\}$ di M con le proprietà

- (1) $([\eta_h])$ è una base di $H_c^{m-q+1}(M)$.
- (2) $W_\nu \Subset W_{\nu+1}$ ed $M = \bigcup_\nu W_\nu$.
- (3) Ogni W_ν ammette un buon ricoprimento finito.
- (4) Esiste una successione crescente h_ν di interi positivi tali che $\text{supp } \eta_h \subset W_\nu$ per $h \leq h_\nu$ e l'immagine di $H^{n-q+1}(W_\nu) \rightarrow H^{n-q+1}(W_{\nu+1})$ sia generata dalle classi di $\eta_1, \dots, \eta_{h_\nu}$ in $H^{n-q+1}(W_{\nu+1})$.

Ragioniamo per ricorrenza. Possiamo fissare $W_0 = V_0$. Per il Teorema 13.5.5, $H^{m-q+1}(W_0)$ ha dimensione finita. Possiamo quindi scegliere $\eta_1, \dots, \eta_{h_0} \in \mathcal{L}^{m-q+1}(W_0)$ in modo tale che le loro classi di coomologia in $H^{m-q+1}(M)$ generino l'immagine di $H^{m-q+1}(W_0) \rightarrow H^{m-q+1}(M)$.

Completiamo $[\eta_1]_0, \dots, [\eta_{h_0}]_0 \in H_c^{m-q+1}(W_0)$ ad una base di $H^{m-q+1}(W_0)$, aggiungendo classi $[\theta_1]_0, \dots, [\theta_k]_0 \in H^{m-q+1}(W_0)$, con $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathcal{L}_0^{m-q+1}(W_0)$. Per ogni $j = 1, \dots, k$ potremo allora trovare $c_1, \dots, c_{h_0} \in \mathbb{R}$ e $\zeta_j \in \mathcal{L}_c^{m-q}(M)$ tali che

$$\theta_j = d\zeta_j + \sum_{h=1}^{h_0} c_h \eta_h, \quad \text{per } j = 1, \dots, k.$$

Scegliamo allora $W_1 = V_{\mu_1}$, per un intero positivo μ_1 tale che

$$\bar{W}_0 \cup \bigcup_{j=1}^k \text{supp } \zeta_j \subset V_{\mu_1}.$$

Ripetendo questa costruzione otteniamo le successioni $\{[\eta_h]\}$ e $\{W_\nu\}$ desiderate.

Costruiamo ora, per ricorrenza, una successione $\{\beta_\nu\}$, con

- (1) $\beta_\nu \in \Omega^{q-1}(W_\nu)$, $d\beta_\nu = \alpha$, $\int_{W_\nu} \beta_\nu \wedge \eta_j = 0$ per $1 \leq j \leq h_\nu$,
- (2) $\beta_{\nu+1}|_{W_{\nu-2}} = \beta_\nu|_{W_{\nu-2}}$ se $\nu \geq 2$.

Per il Lemma 13.9.1 possiamo trovare β_0 e β_1 che soddisfino (1). Supponiamo di aver costruito $\beta_0, \dots, \beta_\nu$, con $\nu \geq 1$, che soddisfino (1) e (2). Sia $\gamma \in \Omega^{q-1}(W_{\nu+1})$ una soluzione di

$$d\gamma = \alpha \text{ in } W_{\nu+1}, \quad \int_{W_{\nu+1}} \gamma \wedge \eta_j = 0 \text{ se } j \leq h_{\nu+1}.$$

Dico che $\beta_{\nu+1} - \beta_\nu$ soddisfa

$$\int_{W_{\nu-1}} (\gamma - \beta_\nu) \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(W_{\nu-1}).$$

Infatti questa equazione è equivalente a

$$\int_{W_{\nu-1}} (\gamma - \beta_\nu) \wedge \eta_j = 0, \quad \forall j \leq h_{\nu-1}.$$

Possiamo quindi trovare $\zeta \in \Omega^{q-2}(W_{\nu-1})$ tale che $d\zeta = \gamma - \beta_\nu$. Con $\tilde{\zeta} \in \Omega^{q-2}(M)$ con $\tilde{\zeta}|_{W_{\nu-2}} = \zeta|_{W_{\nu-2}}$, poniamo allora $\beta_{\nu+1} = \gamma - d\tilde{\zeta}$.

Definiamo infine $\beta \in \Omega^{q-1}(M)$ mediante

$$\beta|_{W_\nu} = \beta_{\nu+2}|_{W_\nu} \quad \text{per } \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Abbiamo $d\beta = \alpha \in \mathcal{B}^q(M)$. Ciò completa la dimostrazione.

Il caso $q = 1$ si può trattare in modo più semplice. Ricordiamo che abbiamo supposto che M sia connessa. Fissiamo una successione di aperti connessi $\{U_\nu\}_{\nu \geq 0}$ con $U_\nu \Subset U_{\nu+1}$ per ogni ν ed $M = \bigcup_\nu U_\nu$.

Sia $\alpha \in \mathcal{L}^q(M)$ e supponiamo che, per ogni ν , vi sia

$\beta_\nu \in \Omega^{q-1}(U_\nu)$ con $d\beta_\nu = \alpha|_{U_\nu}$. Dico che è possibile trovare un'altra successione $\{\gamma_\nu \in \Omega^{q-1}(U_\nu)\}$ tale che (poniamo $U_\nu = \emptyset$ se $\nu < 0$)

$$(13.39) \quad d\gamma_\nu = \alpha|_{U_\nu}, \quad \gamma_\nu|_{U_{\nu-1}} = \gamma_{\nu-1}.$$

Ragioniamo per i diversi interi $q \geq 0$.

Se $q = 0$, le ipotesi dicono che $\alpha = 0$ e quindi la condizione è banalmente soddisfatta con $\gamma_\nu = 0$ per ogni ν .

Se $q = 1$, scegliamo $\nu_0 = u_0$ e supponiamo di aver scelto, per qualche $\mu \geq 0$, ν_0, \dots, ν_μ in modo tale che (13.39) sia soddisfatta se $\nu \leq \mu$. Poiché

$$d(\gamma_\mu - \beta_{\mu+1}) = \alpha - \alpha = 0 \quad \text{su } U_\mu \implies \exists c_\mu \in \mathbb{R} \text{ tale che } u_{\mu+1} = \nu_\mu + c_\mu,$$

basterà allora scegliere $\nu_{\mu+1} = u_{\mu+1} - c_\mu$ perché la (13.39) sia soddisfatta anche per $\nu \leq \mu + 1$.

Sia ora $q > 1$. Dico che possiamo costruire per ricorrenza una successione $\{\gamma_\nu \in \Omega^{q-1}(M)\}_{\nu \geq 0}$ con le proprietà

$$(13.40) \quad d\gamma_\nu = \alpha \text{ su } U_{\nu+1}, \quad \gamma_\nu|_{U_{\nu-2}} = \gamma_{\nu-1}|_{U_{\nu-2}}.$$

Sia infatti $\gamma_0 \in \Omega^{q-1}(M)$ una $(q-1)$ -forma su M uguale ad β_2 su U_1 . In particolare, $d\gamma_0 = \alpha$ su U_1 . Supponiamo poi di aver costruito, per qualche $\mu \geq 0$, $\gamma_0, \dots, \gamma_\mu \in \Omega^{q-1}(M)$ che soddisfino (13.40). Allora $w = \gamma_\mu - \beta_{\mu+2}$ soddisfa $dw = 0$ su $U_{\mu+1}$. \square

Come conseguenza di questo teorema, abbiamo

TEOREMA 13.9.3. *Se M è una varietà compatta orientabile, allora*

$$(13.41) \quad H^q(M) \simeq (H_c^{m-q}(M))^*.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo osservato, nella dimostrazione del teorema precedente, che $H_c^{m-q}(M)$ ammette una base numerabile. Ripetendo la costruzione nella dimostrazione del lemma precedente, otteniamo una successione $\{W_\nu\}$ di aperti di M ed una successione $\{\eta_h\} \subset \mathcal{L}_c^{m-q}(M)$ con le proprietà:

- (1) ogni W_ν ammette un buon ricoprimento finito,
- (2) $W_\nu \Subset W_{\nu+1}$, $\bigcup W_\nu = M$,
- (3) per una successione non decrescente $\{h_\nu\}$ abbiamo $\text{supp } \eta_h \subset W_\nu$ per $h \leq h_\nu$ e l'immagine di $H_c^{m-q}(W_\nu) \rightarrow H_c^{m-q}(W_{\nu+1})$ è generata dalle classi di η_h per $h \leq h_\nu$.

Sia $\{c_h\}$ una successione di numeri reali. Dico che è possibile determinare una successione $\{\alpha_\nu \in \mathcal{L}(W_\nu)\}$ tale che

$$\int_{W_\nu} \alpha_\nu \wedge \eta_h = c_h, \quad \text{per } h \leq h_\nu, \quad \alpha_{\nu+1}|_{W_{\nu-2}} = \alpha_\nu|_{W_{\nu-2}} \quad \text{per } \nu \geq 2.$$

Poiché i W_ν ammettono un buon ricoprimento finito, per la dualità di Poincaré possiamo trovare $\{\beta_\nu \in \mathcal{L}(W_\nu)\}$ tali che

$$\int_{W_\nu} \beta_\nu \wedge \eta_h = c_h, \quad \text{per } h \leq h_\nu.$$

Possiamo quindi scegliere $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$. Supponiamo di aver costruito $\alpha_0, \dots, \alpha_\nu$, per qualche $\nu \geq 1$, in modo che sia soddisfatta la

$$\alpha_\mu|_{W_{\mu-2}} = \alpha_{\mu+1}|_{W_{\mu-2}}, \quad \text{se } 2 \leq \mu \leq \nu.$$

Abbiamo allora

$$\int_{W_{\nu-1}} (\beta_{\nu+1} - \alpha_\nu) \wedge \eta_h = 0, \quad \text{per } h \leq h_\nu.$$

Questo implica che

$$\int_{W_{\nu-1}} (\beta_{\nu+1} - \alpha_\nu) \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q}(W_{\nu-1})$$

e quindi esiste una $\phi \in \Omega^{q-1}(W_{\nu-1})$ tale che $\beta_{\nu+1}|_{W_{\nu-1}} - \alpha_\nu|_{W_{\nu-1}} = d\phi$. Se $\psi \in \Omega^{q-1}(W_{\nu+1})$ è uguale a ϕ su $W_{\nu-2}$, possiamo definire $\alpha_{\nu+1} = \beta_{\nu+1} - d\psi$. Otteniamo quindi per ricorrenza la successione delle $\{\beta_\nu\}$ e potremo allora definire $\beta \in \mathcal{L}^q(M)$ ponendo $\beta|_{W_\nu} = \beta_{\nu+2}|_{W_\nu}$ per ogni $\nu \geq 0$. La classe di coomologia definita da β

è l'elemento del duale di $H_c^{m-q}(M)$ che vale c_h sull'elemento $[\eta_h]$ della base di $H_c^{m-q}(M)$. Ciò completa la dimostrazione. \square

13.10. Coomologia a supporti compatti nelle fibre

DEFINIZIONE 13.10.1. Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale. Una forma $\alpha \in \Omega^q(E)$ ha supporto compatto nella direzione verticale se

$$\forall K^{\text{compatto}} \subset M, \quad \text{supp } \alpha \cap \pi^{-1}(K) \text{ è compatto in } E.$$

Indichiamo con $\Omega_{cv}^q(E)$ lo spazio vettoriale delle q -forme su E che hanno supporto compatto nella direzione verticale.

Poiché il differenziale non accresce i supporti, abbiamo il complesso di de Rham per le forme con supporto compatto nella direzione verticale:

$$(13.42) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega_{cv}^0(E) & \xrightarrow{d} & \Omega_{cv}^1(E) & \xrightarrow{d} & \Omega_{cv}^2(E) \rightarrow \dots \\ & & \dots & \rightarrow & \Omega_{cv}^{q-1}(E) & \xrightarrow{d} & \Omega_{cv}^q(E) \xrightarrow{d} \Omega_{cv}^{q+1}(E) \rightarrow \dots \end{array}$$

Porremo

$$(13.43) \quad \mathcal{Z}_{cv}^q(E) = \{\alpha \in \Omega_{cv}^q(E) \mid d\alpha = 0\},$$

$$(13.44) \quad \mathcal{B}_{cv}^q(E) = \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega_{cv}^{q-1}(E)\},$$

$$(13.45) \quad H_{cv}^q(E) = \mathcal{Z}_{cv}^q(E) / \mathcal{B}_{cv}^q(E).$$

13.11. Integrazione sulla fibra

Sia M una varietà differenziabile ed $(M \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\pi_M} M)$ il fibrato vettoriale banale di rango k su M .

Siano t^1, \dots, t^k le coordinate cartesiane di $t \in \mathbb{R}^k$. Una forma $\alpha \in \Omega^q(M \times \mathbb{R}^k)$ si può scrivere in modo unico come

$$\alpha = \sum_{h=0}^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_h \leq k} \alpha_{j_1, \dots, j_h}^{(q-j)} \wedge dt^{j_1} \wedge \dots \wedge dt^{j_h}, \quad \text{con } \alpha_{j_1, \dots, j_h}^{(q-j)} \in \Gamma(M \times \mathbb{R}^k, \Lambda^{q-1} T^* M).$$

Ad $\alpha \in \Omega_{cv}^q(M \times \mathbb{R}^k)$ associamo una forma $\pi_{M*} \alpha \in \Omega^{q-k}(M)$ ponendo

$$(13.46) \quad \begin{cases} \pi_{M*} \alpha = \int_{\mathbb{R}^k} \alpha_{1,2,\dots,k}^{q-k}(x,t) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k & \text{se } q \geq k, \\ \pi_{M*} \alpha = 0 & \text{se } q < k. \end{cases}$$

Sia ora $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale di rango k orientato. L'orientazione di ξ è definita da un atlante di trivializzazione $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$, con funzioni di transizione $g_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(U_i \cap U_j, \mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R}))$, ove abbiamo indicato con $\mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})$ il gruppo delle matrici $k \times k$ con determinante positivo.

Sia $\alpha \in \Omega_{cv}^q(E)$. Per ogni i , la trivializzazione locale $\phi_i : U_i \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_{U_i} \subset E$ ci permette di definire una forma $\phi_i^* \alpha \in \Omega_{cv}^q(U_i \times \mathbb{R}^k)$. Fissata una partizione dell'unità

$\{\chi_i\}$ subordinata al ricoprimento $\{U_i\}$, definiamo⁴

$$(13.47) \quad \begin{cases} \pi_*\alpha = \sum_{i \in I} \chi_i \pi_{U_i*} \phi_i^* \alpha & \text{se } q \geq k, \\ \pi_*\alpha = 0 & \text{se } q < k. \end{cases}$$

Per le formule del cambiamento di variabili negli integrali multipli abbiamo:

LEMMA 13.11.1. *Il valore di $\pi_*\alpha$ in (13.47) non dipende dalla scelta della partizione dell'unità $\{\chi_i\}$ e non varia se si sostituisce ad \mathcal{U} un altro atlante di trivializzazione equiorientato.*

Abbiamo perciò

TEOREMA 13.11.2 (integrazione sulla fibra). *Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale orientato. Allora risulta definita un'unica applicazione lineare*

$$(13.48) \quad \pi_* : \Omega_{cv}^q(E) \longrightarrow \Omega^{q-k}(M)$$

tale che, se $\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_U \subset E$ è una trivializzazione di ξ su un aperto U di M , allora

$$(13.49) \quad \pi_*\alpha|_U = (\pi_U)_*(\phi^*\alpha), \quad \forall \alpha \in \Omega_{cv}(E).$$

PROPOSIZIONE 13.11.3. *L'integrazione sulla fibra commuta con il differenziale esterno.*

DIMOSTRAZIONE. Ci possiamo ridurre, per partizione dell'unità, al caso di un fibrato vettoriale banale, per cui la verifica è immediata. \square

Poiché l'integrazione sulla fibra commuta con il differenziale esterno, essa definisce, per passaggio al quoziente, un'applicazione in coomologia.

TEOREMA 13.11.4 (isomorfismo di Thom). *Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale orientabile di rango k . Allora l'applicazione*

$$(13.50) \quad [\pi_*] : H_{cv}^{q+k}(E) \longrightarrow H^q(M),$$

che si ottiene dall'integrazione sulla fibra per passaggio al quoziente, è un isomorfismo di gruppi per ogni $q \in \mathbb{Z}$.

DIMOSTRAZIONE. Siano U, V due aperti di M . Utilizzando la partizione dell'unità, otteniamo per ogni q una successione esatta

$$0 \rightarrow \Omega_{cv}^q(E|_{U \cup V}) \longrightarrow \Omega_{cv}^q(E|_U) \oplus \Omega_{cv}^q(E|_V) \longrightarrow \Omega_{cv}^q(E|_{U \cap V}) \rightarrow 0,$$

che definisce una successione esatta corta di complessi differenziali.

Otteniamo perciò un diagramma commutativo

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccccc} \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5, \end{array}$$

⁴Al solito, se $\beta \in \Omega^q(U_i)$ indichiamo con $\chi_i\beta \in \Omega^q(M)$ la forma uguale a $\chi_i\beta$ su U_i e nulla fuori da U_i .

con

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_1 = H_{cv}^{q+k-1}(E|_U) \oplus H_{cv}^{q+k-1}(E|_V), \\ \mathbf{A}_2 = H_{cv}^{q+k-1}(E|_{U \cap V}), \\ \mathbf{A}_3 = H_{cv}^{q+k}(E|_{U \cup V}), \\ \mathbf{A}_4 = H_{cv}^{q+k}(E|_U) \oplus H_{cv}^{q+k}(E|_V), \\ \mathbf{A}_5 = H_{cv}^{q+k}(E|_{U \cap V}), \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}_1 = H^{q-1}(U) \oplus H^{q-1}(V), \\ \mathbf{B}_2 = H^{q-1}(U \cap V), \\ \mathbf{B}_3 = H^q(U \cup V), \\ \mathbf{B}_4 = H^q(U) \oplus H^q(V), \\ \mathbf{B}_5 = H^q(U \cap V), \end{array} \right.$$

in cui le righe sono esatte perché parte di successioni esatte di Mayer-Vietoris, e le α_i sono definite mediante l'integrazione sulla fibra. A questo punto osserviamo che il teorema di isomorfismo di Thom vale senz'altro nel caso di fibrati banali. Se M ammette un atlante di trivializzazione finito, possiamo ragionare per induzione sul numero degli aperti di un atlante di trivializzazione ed applicare quindi il lemma dei cinque alla (*). Nel caso generale, dovremo ricorrere al Lemma di Zorn. Fissiamo un atlante orientato di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ ed indichiamo con \mathcal{J} la famiglia dei sottoinsiemi J di I con la proprietà:

Per ogni aperto Ω di M e per ogni intero q , l'applicazione

$$H_{cv}^{q+k}(E|_{\Omega \cap \bigcup_{i \in J} U_i}) \rightarrow H^q(\Omega \cap \bigcup_{i \in J} U_i)$$

è un isomorfismo.

Per quanto osservato in precedenza, \mathcal{J} contiene tutti i sottoinsiemi finiti di I e quindi non è vuota. Per il Lemma di Zorn contiene allora un elemento massimale J_0 . Se fosse $J_0 \neq I$, potremmo applicare il Lemma dei cinque alla (*) ottenuta con $U = \bigcup_{i \in J_0} U_i$ e $V = U_{i_0}$ per un $i_0 \notin J_0$: otteniamo allora che $J_0 \cup \{i_0\} \in \mathcal{J}$, e dunque una contraddizione; quindi $J_0 = I$. La dimostrazione è completa. \square

DEFINIZIONE 13.11.5. Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale orientato di rango k . L'immagine inversa della classe di 1 in $H^0(M)$ mediante l'isomorfismo (13.50) è una classe di coomologia $\Phi \in H_{cv}^k(E)$, che si dice la *classe di Thom* del fibrato orientato $E \xrightarrow{\pi} M$.

Osserviamo che la classe di Thom si restringe, su ogni singola fibra E_x , ad un generatore di $H_c^k(E_x)$, e che, viceversa, questa proprietà caratterizza la classe di Thom del fibrato. Abbiamo quindi, in particolare:

PROPOSIZIONE 13.11.6. Siano $\xi_i = (E_i \xrightarrow{\pi_i} M)$, per $i = 1, 2$, due fibrati vettoriali orientati sulla stessa base M , di ranghi k_1, k_2 , rispettivamente. Se Φ_i è la classe di Thom del fibrato ξ_i , allora $\Phi_1 \wedge \Phi_2$ è la classe di Thom del fibrato $E_1 \oplus_M E_2 \xrightarrow{\pi_{1,2}} M$.

13.12. Dualità di Poincaré e classe di Thom

Sia S una sottovarietà propria di una varietà differenziabile M e $\tau = (U \xrightarrow{\pi} S)$ un suo intorno tubolare. Ricordiamo che τ è un fibrato vettoriale con base S il cui spazio totale è un intorno aperto di S in M .

Supponiamo che τ sia orientato. Ricordiamo che, se S ed M sono orientate, risulta definita in modo naturale un'orientazione sulle fibre dell'intorno tubolare.

Applichiamo al fibrato normale τ l'isomorfismo di Thom. Siano $\Phi_S \in H_{cv}^k(U)$ la classe di Thom di τ e $\iota : U \hookrightarrow M$ l'inclusione. Otteniamo una successione di applicazioni

$$H^q(S) \xrightarrow[\cong]{\wedge \Phi_S} H_{cv}^{q+k}(U) \xrightarrow{\iota_*} H^{q+k}(M).$$

Abbiamo:

PROPOSIZIONE 13.12.1. *L'immagine $\iota_*(\Phi_S)$ della classe di Thom del fibrato normale in $H^k(M)$ è il duale di Poincaré della varietà orientata S .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\alpha \in \Omega_c^k(M)$ una k -forma con supporto compatto in M .

Siano $j : S \hookrightarrow U$ l'inclusione di S nel suo intorno tubolare U e $\pi : U \rightarrow S$ la proiezione sulla base. Poiché π e j sono inverse omotopiche l'una dell'altra, $\alpha|_U$ e $\pi^* j^* \alpha|_U$ differiscono per una forma esatta:

$$(*) \quad \alpha|_U - \pi^* j^* \alpha|_U = d\beta, \quad \text{con } \beta \in \Omega^{k-1}(U).$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \int_M \alpha \wedge \iota_* \Phi_S &= \int_U \alpha \wedge \iota_* \Phi_S \quad (\text{perché } \iota_* \Phi_S \text{ ha supporto in } U) \\ &= \int_U (\pi^* j^* \alpha + d\beta) \wedge \iota_* \Phi_S \quad (\text{per la } (*)) \\ &= \int_U \pi^* j^* \alpha \wedge \iota_* \Phi_S \quad (\text{per la formula di Stokes}) \\ &= \int_S j^* \alpha = \int_S \alpha, \end{aligned}$$

per la definizione della classe di Thom del fibrato. □

Se viceversa $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ è un fibrato vettoriale orientato su una varietà orientata M , allora possiamo immergere M in E come la sezione nulla ed identificare E al fibrato normale di M in E . Abbiamo dunque:

PROPOSIZIONE 13.12.2. *Il duale di Poincaré di una sottovarietà chiusa orientata di una varietà orientata M e la classe di Thom del fibrato normale di S in M si possono rappresentare mediante la stessa forma.*

La classe di Thom di un fibrato vettoriale orientato $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ e il duale di Poincaré della sua sezione nulla possono essere rappresentati dalla stessa forma.

Il duale di Poincaré di una sottovarietà chiusa orientata di S si può rappresentare con una forma che ha supporto in un qualsiasi intorno tubolare di S in M .

13.13. Due proprietà fondamentali della dualità di Poincaré

Ricordiamo che due sottovarietà R ed S di una varietà differenziabile M si intersecano trasversalmente se

$$(13.51) \quad T_x R + T_x S = T_x M, \quad \forall x \in R \cap S.$$

Se le due varietà R ed S si intersecano trasversalmente, allora

$$(13.52) \quad \text{codim}(R \cap S) = \text{codim} R + \text{codim} S.$$

In particolare, il fibrato normale $\nu_M R \cap S$ della loro intersezione è

$$(13.53) \quad \nu_M(R \cap S) = \nu_M R|_{R \cap S} \oplus_{R \cap S} \nu_M S|_{R \cap S}.$$

Supponiamo ora che sia M che R ed S siano orientate. Abbiamo allora la relazione tra le classi di Thom:

$$(13.54) \quad \Phi_{R \cap S} = \Phi_R \wedge \Phi_S.$$

Quindi *nella dualità di Poincaré l'intersezione trasversale di sottovarietà orientate corrisponde al prodotto esterno di forme.*

Ricordiamo che, più in generale, un'applicazione $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ si dice *trasversale* a una sottovarietà S di N se

$$(13.55) \quad f_*(T_x M) + T_{f(x)} S = T_{f(x)} N, \quad \forall x \in f^{-1}(S).$$

Supponiamo ora che M ed N siano orientate e che $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ preservi l'orientazione. Sia S una sottovarietà orientata di N , trasversale ad f . Se $\tau = (U \xrightarrow{\pi} S)$ è un intorno tubolare sufficientemente piccolo di S in N , allora $f^{-1}(U)$ è lo spazio totale di un intorno tubolare $\tau' = (f^{-1}(U) \xrightarrow{\pi'} f^{-1}(S))$ di $f^{-1}(S)$ in M . Dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} H^q(S) & \xrightarrow{\wedge \Phi_S} & H_{cv}^{q+k}(U) & \xrightarrow{\iota_*} & H^{q+k}(N) \\ f^* \downarrow & & f^* \downarrow & & f^* \downarrow \\ H^q(f^{-1}(S)) & \xrightarrow{\wedge \Phi_S} & H_{cv}^{q+k}(f^{-1}(U)) & \xrightarrow{\iota_*} & H^{q+k}(M) \end{array}$$

otteniamo che, se η_S è duale di Poincaré di S in N , allora $f^* \eta_S = \eta_{f^{-1}(S)}$, cioè *nella dualità di Poincaré le applicazioni indotte in coomologia corrispondono alle immagini inverse dei corrispondenti oggetti geometrici.*

Per il Teorema di trasversalità in omotopia, questa uguaglianza vale anche senza l'ipotesi di trasversalità dell'applicazione f .

13.14. Il complesso di deRham twistato

13.14.1. Fibrato d'orientazione e fibrati vettoriali piatti. Sia M una varietà differenziabile ed $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i)\}$ il suo atlante massimale.

Definiamo un fibrato in rette $\circ_M = (L \xrightarrow{\pi} M)$ su M richiedendo che gli U_i siano gli aperti di un atlante di trivializzazione di \circ_M e le funzioni di transizione siano

$$(13.56) \quad g_{i,j}(p) = \text{sgn}(\det(\partial x_i / \partial x_j)), \quad p \in U_i \cap U_j.$$

DEFINIZIONE 13.14.1. Il fibrato \circ_M si dice *il fibrato d'orientazione della varietà M .*

Indicheremo con $\phi_{U,x} : U \times \mathbb{R} \rightarrow L_U$ la trivializzazione locale corrispondente alla carta locale (U, x) di M . Se (U, y) è un'altra carta locale sullo stesso aperto U di M , abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id} \times (\text{sgn}(\partial x / \partial y) \cdot)} & U \times \mathbb{R} \\ & \searrow \phi_{U,x} & \swarrow \phi_{U,y} \\ & L|_U & \end{array}$$

LEMMA 13.14.2. *Il fibrato d'orientazione \circ_M della varietà M è banale se e soltanto se la varietà M è orientabile.*

Il fibrato di orientazione è un esempio di fibrato vettoriale piatto:

DEFINIZIONE 13.14.3. Sia ξ un fibrato vettoriale di rango k . Un *atlante di trivializzazione piatto* di ξ è un atlante di trivializzazione $\{(U_i, \phi_i)\}$ di ξ in cui le funzioni di transizione $g_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(U_i \cap U_j, \mathbf{GL}(k, \mathbb{R}))$ siano localmente costanti.

Due atlanti di trivializzazione piatti di ξ sono *equivalenti* se la loro unione è ancora un atlante di trivializzazione piatto di ξ .

Una classe di equivalenza di atlanti di trivializzazione piatti di ξ si dice una *struttura di piattezza* di ξ .

Un *fibrato vettoriale piatto* è un fibrato vettoriale con una struttura di piattezza assegnata.

OSSERVAZIONE 13.14.4. I fibrati vettoriali banali ammettono una struttura di piattezza, ma non tutti i fibrati vettoriali ammettono una struttura di piattezza. Ad esempio, il fibrato tangente ad una sfera di dimensione $n \geq 2$ non ammette una struttura di piattezza.

13.14.2. Forme differenziali a coefficienti in un fibrato vettoriale. Sia M una varietà differenziabile e sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato differenziabile con base M .

DEFINIZIONE 13.14.5. Una *q-forma differenziale su M a coefficienti in E* è un'applicazione

$$(13.57) \quad \alpha : (\mathfrak{X}(M))^q \longrightarrow \Gamma(M, E)$$

tale che, per $X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M)$ risulti:

$$(13.58) \quad \alpha(X_1, \dots, X_q) = 0 \quad \text{se } \exists 1 \leq i < j \leq q \text{ tale che } X_i = X_j,$$

$$(13.59) \quad \alpha(fX_1, \dots, X_q) = f\alpha(X_1, \dots, X_q), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Indichiamo con $\mathcal{Q}^q(M, E)$ lo spazio delle q -forme differenziali a coefficienti in E e con $\mathcal{Q}_c^q(M, E)$ il sottospazio delle q -forme differenziali a coefficienti in E ed a supporto compatto in M .

Per ogni coppia di interi non negativi q_1, q_2 possiamo definire un prodotto

$$(13.60) \quad \mathcal{Q}^{q_1}(M) \times \mathcal{Q}^{q_2}(M, E) \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha \odot \beta \in \mathcal{Q}^{q_1+q_2}(M, E)$$

mediante

$$(\alpha \otimes \beta)(X_1, \dots, X_{q_1+q_2}) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{q_1+q_2}, \\ 1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_{q_1} \leq q_1+q_2, \\ 1 \leq \sigma_{q_1+1} < \dots < \sigma_{q_1+q_2} \leq q_1+q_2}} \varepsilon(\sigma) \alpha(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_{q_1}}) \beta(X_{\sigma_{q_1+1}}, \dots, X_{\sigma_{q_1+q_2}})$$

Scriveremo anche

$$\beta \otimes \alpha = (-1)^{q_1 q_2} \alpha \otimes \beta$$

ed

$$s \otimes \alpha = s \otimes \alpha \in \Omega^q(M, E), \quad \text{se } s \in \Gamma(M, E) = \Omega^0(M, E), \quad \alpha \in \Omega^q(M).$$

13.14.3. Integrazione di densità.

DEFINIZIONE 13.14.6. Una *densità* sulla varietà differenziale M di dimensione m è una m -forma differenziale a coefficienti nel suo fibrato d'orientazione $\nu_M = (L \xrightarrow{\pi} M)$.

Ad ogni carta locale (U, x) in M possiamo associare la sezione $s_{U,x} \in \Gamma(U, L)$ definita dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \text{id} \times 1 \swarrow & & \searrow s_{U,x} \\ U \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\phi_{(U,x)}} & L_U \end{array}$$

Se $\omega \in \Omega_c^m(U)$, definiamo

$$(13.61) \quad \int_M s_{U,x} \otimes \omega = \int_{x(U)} x^* \omega.$$

Osserviamo che, se y sono diverse coordinate sullo stesso aperto U di M , allora $s_{U,x} \otimes \omega = \text{sgn}(\partial y / \partial x) s_{U,y} \otimes \omega$ ed abbiamo

$$\int_{x(U)} x^* \omega = \int_{y(U)} \text{sgn}(\partial y / \partial x) y^* \omega$$

per le formule di cambiamento di variabili negli integrali multipli.

Utilizzando la partizione dell'unità ricaviamo allora

TEOREMA 13.14.7. *Esiste un'unica applicazione lineare*

$$(13.62) \quad \Omega^m(M, L) \ni \alpha \longrightarrow \int_M \alpha \in \mathbb{R}$$

che coincide con la (13.61) sugli elementi della forma $\alpha = s_{U,x} \otimes \omega$ per (U, x) carta coordinata in M ed $\omega \in \Omega_c^m(U)$.

Utilizzando la partizione dell'unità si dimostra facilmente che vale la formula di Stokes per le densità:

TEOREMA 13.14.8 (Formula di Stokes). *Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Allora*

$$(13.63) \quad \int_M d\alpha = 0, \quad \forall \alpha \in \Omega_c^{m-1}(M).$$

Sia S una sottovarietà propria di M , di dimensione k . Un'orientazione del fibrato normale $\nu_M S$ definisce un isomorfismo del fibrato d'orientazione $\nu_S = (L_S \xrightarrow{S} \rightarrow)$ di S con il pullback su S del fibrato d'orientazione ν_M di M . Questo si può definire nel modo seguente. Sia $\tau_S = (U \xrightarrow{\pi_S} S)$ un intorno tubolare di S in M . Per ogni carta coordinata (W, y) in S possiamo trovare una carta coordinata (V, x) in M tale che

$$V \cap S = W, \quad x^i|_W = y^i, \quad \text{per } 1 \leq i \leq k, \quad dx^{k+1} \wedge \cdots \wedge dx^m > 0$$

$$\text{su } \pi_S^{-1}(p) \cap V, \quad \forall p \in W.$$

Qui $dx^{k+1} \wedge \cdots \wedge dx^m > 0$ significa che x^{k+1}, \dots, x^m sono coordinate orientate positivamente sulle fibre dell'intorno tubolare. L'isomorfismo è dato allora dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} L_S|_W & \xleftrightarrow{\sim} & L|_W \\ \phi_{W,y} \swarrow & & \searrow \phi_{V,x} \\ & W \times \mathbb{R}. & \end{array}$$

Quindi, se S è una sottovarietà propria di dimensione k di M con fibrato normale orientato ed $\alpha \in \Omega_c^k(M, L)$, allora $\alpha|_S \in \Omega_c^k(S, L_S)$ e possiamo quindi calcolare l'integrale

$$\int_S \alpha = \int_S \alpha|_S.$$

Osserviamo che viceversa, se $\alpha \in \Omega_c^k(S, L_S)$ e Φ_S è la classe di Thom di S con supporto nell'intorno tubolare U , allora $(\pi_S^* \alpha) \otimes \Phi_S \in \Omega_c^m(M)$ e

$$(13.64) \quad \int_S \alpha = \int_M (\pi_S^* \alpha) \otimes \Phi_S.$$

13.14.4. Il complesso di deRham per forme a coefficienti in un fibrato vettoriale piatto. In generale, non è possibile estendere la definizione del differenziale esterno alle forme a coefficienti in un fibrato vettoriale. Per scrivere la formula (12.8) del Capitolo XII occorre infatti che sia definita una nozione di derivazione per le sezioni del fibrato. A questo fine introdurremo nel seguito la derivazione covariante, ma, come vedremo, la differenziazione covariante non ci permetterà, in generale, di definire un complesso.

Nel caso di un fibrato vettoriale piatto, c'è però una differenziazione naturale delle sezioni e possiamo quindi definire il differenziale mediante la (12.8) del Capitolo XII.

Abbiamo in particolare, associati al fibrato d'orientazione $\nu_M = (L \xrightarrow{\pi} M)$, i complessi

$$(13.65) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^0(M, L) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M, L) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(M, L) \\ & & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \Omega^{m-1}(M, L) & \xrightarrow{d} & \Omega^m(M, L) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

$$(13.66) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_c^0(M, L) & \xrightarrow{d} & \Omega_c^1(M, L) & \xrightarrow{d} & \Omega_c^2(M, L) \\ & & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \Omega_c^{m-1}(M, L) & \xrightarrow{d} & \Omega_c^m(M, L) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

DEFINIZIONE 13.14.9. I complessi (13.65) e (13.66) si dicono, rispettivamente, il *complesso di de Rham twistato* e il *complesso di de Rham twistato a supporti compatti*.

Indichiamo con $H^q(M, L)$ ed $H_c^q(M, L)$ i loro rispettivi gruppi di coomologia.

13.14.5. Dualità di Poincaré. Sia M una varietà ed i complessi di de Rham twistati sono isomorfi ai rispettivi complessi di de Rham definiti in precedenza nel caso in cui M sia una varietà orientabile, e ne differiscono nel caso in cui M non sia orientabile.

Dalla formula di Stokes ricaviamo

TEOREMA 13.14.10. (1) *L'applicazione*

$$(13.67) \quad \Omega^q(M) \times \Omega_c^{m-q}(M, L) \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow \int_M \alpha \otimes \beta \in \mathcal{R}$$

definisce, per passaggio al quoziente, un'applicazione bilineare

$$(13.68) \quad H^q(M) \times H_c^{m-q}(M, L) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

(2) *L'applicazione*

$$(13.69) \quad \Omega_c^q(M) \times \Omega^{m-q}(M, L) \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow \int_M \alpha \otimes \beta \in \mathcal{R}$$

definisce, per passaggio al quoziente, un'applicazione bilineare

$$(13.70) \quad H_c^q(M) \times H^{m-q}(M, L) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Ripetendo la dimostrazione fatta nel caso delle varietà orientabili e della coomologia di deRham, otteniamo

TEOREMA 13.14.11 (dualità di Poincaré). *Se M è una varietà non orientabile con un buon ricoprimento finito, abbiamo gli isomorfismi*

$$(13.71) \quad H^q(M) \simeq (H_c^{m-q}(M, L))^*, \quad H^q(M, L) \simeq (H_c^{m-q}(M))^*.$$

OSSERVAZIONE 13.14.12. Sia S una sottovarietà propria di dimensione k di M .

(1) Ad un'orientazione di S corrisponde una classe $[\eta_S]$ in $H^k(M, L)$, con $\eta_S \in \mathcal{L}^k(M, L)$ e

$$\int_S \alpha = \int_M \alpha \otimes \eta_S, \quad \forall \alpha \in \mathcal{L}^k(M).$$

- (2) Ad un'orientazione del fibrato normale di S corrisponde una classe $[\eta_S]$ in $H^k(M)$, con $\eta_S \in \mathcal{L}^k(M)$ e

$$\int_S \alpha = \int_M \alpha \otimes \eta_S, \quad \forall \alpha \in \mathcal{L}^k(M, L).$$

13.14.6. Rivestimento a due fogli di una varietà non orientabile. Sia M una varietà differenziabile ed $\nu_M = (L \xrightarrow{\pi} M)$ il suo fibrato d'orientazione. Indichiamo con L_0 la sezione nulla di ν_M e definiamo

$$(13.72) \quad \tilde{M} = (L \setminus L_0) / \sim, \quad \text{ove } t \sim t' \Leftrightarrow t' = k \cdot t, \text{ con } k > 0.$$

La proiezione nella base definisce un'applicazione $\varpi : \tilde{M} \rightarrow M$, che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} L \setminus L_0 & \xrightarrow{\quad} & \tilde{M} \\ & \searrow \pi & \swarrow \varpi \\ & & M. \end{array}$$

La $\varpi : \tilde{M} \rightarrow M$ è un rivestimento a due fogli ed è possibile definire in modo unico una struttura di varietà differenziabile su \tilde{M} , per cui ϖ sia un diffeomorfismo locale. Vale il seguente

LEMMA 13.14.13. *Se M è connessa, allora \tilde{M} è connessa se e soltanto se la M non è orientabile.*

L'applicazione

$$(13.73) \quad \varpi^* : H^q(M) \longrightarrow H^q(\tilde{M})$$

è iniettiva per ogni $q \geq 0$.

ESEMPIO 13.14.14. La bottiglia di Klein si può definire come il quoziente M del quadrato $Q = \{0 \leq x, y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ rispetto alla relazione d'equivalenza:

$$(13.74) \quad (0, y) \sim (1, y) \text{ per } 0 \leq y \leq 1, \quad \text{e} \quad (x, 0) \sim (1-x, 1) \text{ per } 0 \leq x \leq 1.$$

La M è una varietà differenziabile compatta di dimensione 2 non orientabile. Sia $\pi : Q \rightarrow M$ la proiezione nel quoziente. Siano $A = \pi(\overset{\circ}{Q})$ e $B = \pi(Q \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\})$. Allora A è omotopicamente equivalente ad un disco, B al bouquet di due circonferenze ed $A \cap B$ ad una circonferenza. La successione esatta di Mayer-Vietoris ci dà allora:

$$0 \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow H^1(B) \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^2(M) = \{0\}.$$

Poiché $H^1(B) = \mathbb{R}^2$, otteniamo che $H^1(M) = \mathbb{R}$. Per la dualità di Poincaré

$$H^q(M, L) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 1, 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo che il rivestimento doppio della bottiglia di Klein è il toro T^2 e quindi $H^1(M) \rightarrow H^1(\tilde{M})$ è iniettiva e non surgettiva.

Il complesso di Čech-de Rham

14.1. Successione esatta associata ad un ricoprimento

In questo paragrafo introduciamo una successione esatta che ci sarà poi utile per costruire oggetti globali a partire da altri oggetti definiti localmente.

Siano M una varietà differenziabile di dimensione m , $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un suo ricoprimento aperto e $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale differenziabile di base M . Per ogni sequenza finita di indici i_1, \dots, i_n indichiamo con U_{i_1, \dots, i_n} l'intersezione $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$ dei corrispondenti aperti del ricoprimento. Siano

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, E) &= \bigoplus_{i \in I} \Gamma_{\xi}(U_i, E), \\ \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, E) &= \left\{ f = (f_{i_0, \dots, i_q}) \mid f_{i_0, \dots, i_q} \in \Gamma_{\xi}(U_{i_0, \dots, i_q}, E), f_{i_{\sigma_1} \dots i_{\sigma_q}} = \varepsilon(\sigma) f_{i_0, \dots, i_q}, \forall \sigma \in \mathbf{S}_q \right\}, \\ & \qquad \qquad \qquad q \geq 1, \\ \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, E) &= \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, E). \end{aligned}$$

Definiamo un'applicazione lineare $\delta : \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, E) \rightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, E)$, omogenea di grado uno, ponendo

$$(14.1) \quad (\delta f)_{i_0, \dots, i_{q+1}} = \sum_{h=0}^{q+1} (-1)^h f_{i_0, \dots, \widehat{i}_h, \dots, i_{q+1}} \Big|_{U_{i_0 \dots i_{q+1}}}, \quad \forall f = (f_{i_0, \dots, i_q}) \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, E)$$

ed un'applicazione $\epsilon : \Gamma_{\xi}(M, E) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, E)$ mediante

$$(14.2) \quad (\epsilon f)_i = f|_{U_i}.$$

TEOREMA 14.1.1. *La successione*

$$(14.3) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Gamma_{\xi}(M, E) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, E) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, E) & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \dots & \rightarrow & \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, E) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, E) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^{q+1}(\mathcal{U}, E) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

è esatta.

Premettiamo alla dimostrazione del teorema la costruzione di un *operatore d'omotopia* per il complesso (14.3).

Fissata una partizione dell'unità $\{\kappa_i\}_{i \in I}$ su M , subordinata al ricoprimento aperto \mathcal{U} , indichiamo con κ le applicazioni

$$(14.4) \quad \begin{cases} \kappa : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, E) \longrightarrow \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, E), & (\kappa f)_{i_1, \dots, i_q} = \sum_{i \in I} \kappa_i f_{i, i_1, \dots, i_q}, & q > 0 \\ \kappa : \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, E) \longrightarrow \Gamma_{\xi}(M, E), & \kappa f = \sum_{i \in I} \kappa_i f_i, & q = 0, \end{cases}$$

dove per semplicità di notazione abbiamo indicato con $\kappa_i f_{i,i_1,\dots,i_q}$ la sezione di $\Gamma_\xi(U_{i_1,\dots,i_q}, E)$ che è uguale a $\kappa_i f_{i,i_1,\dots,i_q}$ su U_{i,i_1,\dots,i_q} e a zero fuori del supporto di κ_i .

PROPOSIZIONE 14.1.2. *L'applicazione (14.4) soddisfa le identità*

$$(14.5) \quad \begin{cases} \delta \circ \kappa + \kappa \circ \delta = 1 & \text{su } \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, E) \text{ per } q \geq 1, \\ \epsilon \circ \kappa + \kappa \circ \delta = 1 & \text{su } \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, E). \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $f = (f_{i_0,\dots,i_q}) \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, E)$, con $q \geq 1$. Abbiamo

$$\begin{aligned} (\delta(\kappa f))_{i_0,\dots,i_q} &= \sum_{h=0}^q (-1)^h (\kappa f)_{i_0,\dots,\widehat{i}_h,\dots,i_q} = \sum_{h=0}^q \sum_i (-1)^h \kappa_i f_{i,i_0,\dots,\widehat{i}_h,\dots,i_q}, \\ (\kappa(\delta f))_{i_0,\dots,i_q} &= \sum_i \kappa_i (\delta f)_{i,i_0,\dots,i_q} \\ &= \sum_i \kappa_i f_{i_0,\dots,i_q} - \sum_i \sum_{h=0}^q (-1)^h \kappa_i f_{i,i_0,\dots,\widehat{i}_h,\dots,i_q} \\ &= f_{i_0,\dots,i_q} - \sum_i \sum_{h=0}^q (-1)^h \kappa_i f_{i,i_0,\dots,\widehat{i}_h,\dots,i_q}, \end{aligned}$$

dove per semplicità di notazioni abbiamo ommesso di indicare le restrizioni e le estensioni a zero fuori dai supporti delle κ_i . Sommando membro a membro otteniamo che $\delta(\kappa f) + \kappa(\delta f) = f$. La verifica per il caso $q = 0$ è analoga. \square

DEFINIZIONE 14.1.3. *L'applicazione κ definita nella (14.4) si dice l'applicazione di omotopia associata alla partizione dell'unità $\{\kappa_i\}$.*

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 14.1.1. L'esattezza in $\Gamma_\xi(M, E)$ ed in $\mathcal{C}^0(\mathcal{U}, E)$ sono ovvie, così come il fatto che $\delta^2 = 0$ e quindi (14.3) sia un complesso. L'esattezza è conseguenza dell'esistenza di un operatore d'omotopia. Se infatti $f \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, E)$ e $\delta f = 0$, allora $\delta(\kappa f) = \delta(\kappa f) + \kappa(\delta f) = f$. Questo completa la dimostrazione dell'esattezza della (14.3). \square

14.2. La coomologia di Čech-de Rham

Fissata la varietà M ed un suo ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$, per ogni coppia di interi non negativi (q_1, q_2) denotiamo con \mathcal{H}^{q_1, q_2} lo spazio $\mathcal{C}^{q_1}(\mathcal{U}, \Omega^{q_2})$ delle $(q_1 + 1)$ -uple $f = (f_{i_0,\dots,i_{q_1}})$ con $f_{i_0,\dots,i_{q_1}} \in \Omega^{q_2}(U_{i_0,\dots,i_{q_1}})$ ed $f_{i_{\sigma_0},\dots,i_{\sigma_{q_1}}} = \varepsilon(\sigma) f_{i_0,\dots,i_{q_1}}$ per ogni permutazione σ di $\{0, 1, \dots, q_1\}$. Possiamo allora costruire il *complesso doppio*

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^0(M) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{H}^{0,0} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{H}^{1,0} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{H}^{2,0} & \longrightarrow & \dots \\ & & d \downarrow & & d \downarrow & & d \downarrow & & d \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^1(M) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{H}^{0,1} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{H}^{1,1} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{H}^{2,1} & \longrightarrow & \dots \\ & & d \downarrow & & d \downarrow & & d \downarrow & & d \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^2(M) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{H}^{0,2} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{H}^{1,2} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{H}^{2,2} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

delle q_1 -cocatene alternate del ricoprimento \mathcal{U} a coefficienti nelle q_2 -forme differenziali. Poniamo

$$(14.6) \quad \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, \Omega^*) = \bigoplus_{q_1, q_2 \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{C}^{q_1}(\mathcal{U}, \Omega^{q_2})$$

e definiamo il *differenziale totale* del complesso doppio

$$(14.7) \quad \begin{aligned} D : \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, \Omega^*) &\rightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, \Omega^*), \quad \text{mediante} \\ Df &= \delta f + (-1)^{q_1} df, \quad \forall f \in \mathcal{C}^{q_1}(\mathcal{U}, \Omega^{q_2}). \end{aligned}$$

Sia

$$(14.8) \quad \mathcal{K}^{(q)} = \bigoplus_{q_1+q_2=q} \mathcal{K}^{q_1, q_2} = \bigoplus_{q_1+q_2=q} \mathcal{C}^{q_1}(\mathcal{U}, \Omega^{q_2}).$$

LEMMA 14.2.1. $D(\mathcal{K}^{(q)}) \subset \mathcal{K}^{(q+1)}$ per ogni intero $q \geq 0$ e

$$(14.9) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{K}^{(0)} \xrightarrow{D} \mathcal{K}^{(1)} \xrightarrow{D} \mathcal{K}^{(2)} \longrightarrow \dots$$

è un complesso.

DIMOSTRAZIONE. La prima osservazione segue dal fatto che $\delta \mathcal{K}^{(q)} \subset \mathcal{K}^{(q+1)}$ e $d \mathcal{K}^{(q)} \subset \mathcal{K}^{(q+1)}$. Sia ora $f \in \mathcal{C}^{q_1}(\mathcal{U}, \Omega^{q_2})$. Abbiamo

$$\begin{aligned} D^2 f &= D(\delta f + (-1)^{q_1} df) = \delta^2 f + (-1)^{q_1} \delta df + (-1)^{q_1+1} d\delta f + (-1)^{2q_1} d^2 f \\ &= (-1)^{q_1} (\delta df - d\delta f) = 0 \end{aligned}$$

Questo dimostra che (14.9) è un complesso. \square

Indichiamo con

$$(14.10) \quad H^q(\mathcal{K}^*, D) = (\ker(D : \mathcal{K}^{(q)} \rightarrow \mathcal{K}^{(q+1)})) / D\mathcal{K}^{(q-1)}$$

i gruppi di coomologia del complesso (14.9).

Per ogni intero non negativo q abbiamo un'applicazione naturale

$$(14.11) \quad \epsilon : \Omega^q(M) \ni \alpha \longrightarrow (\alpha|_{U_i})_{i \in I} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^q) \subset \mathcal{K}^{(q)}.$$

Osserviamo che

$$(14.12) \quad \epsilon \circ d = D \circ \epsilon.$$

L'applicazione (14.11) induce quindi un'applicazione in coomologia

$$(14.13) \quad \epsilon_* : H^q(M) \longrightarrow H^q(\mathcal{K}^*, D).$$

TEOREMA 14.2.2 (Mayer-Vietoris generalizzato). Per ogni intero $q \geq 0$, l'applicazione (14.13) è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Il caso $q = 0$ è banale. Dimostriamo l'isomorfismo per $q \geq 1$. INIETTIVITÀ. Sia $f \in Z^q(M)$ e supponiamo esista una $g \in \mathcal{K}^{(q-1)}$ tale che $\epsilon f = Dg$.

Dimostriamo per ricorrenza che, per ogni $h = 0, \dots, q-1$, si può trovare una soluzione $g_h \in \bigoplus_{j=0}^{q-h-1} \mathcal{K}^{j, q-j-1}$ dell'equazione $Dg = \epsilon f$. Per ipotesi l'asserzione è vera se $h = 0$, perché $\bigoplus_{j=0}^{q-1} \mathcal{K}^{j, q-j-1} = \mathcal{K}^{(q-1)}$. Supponiamo $0 \leq h < q-1$ e che vi sia una soluzione $g_h \in \bigoplus_{j=0}^{q-h-1} \mathcal{K}^{j, q-j-1}$ dell'equazione $Dg = \epsilon f$. Abbiamo

$$g_h = g_h^0 + \dots + g_h^{q-h-1}, \quad \text{con } g_h^j \in \mathcal{K}^{j, q-j-1}.$$

Abbiamo allora

$$\begin{cases} (f|_{U_i}) = dg_h^0, \\ \delta g_h^0 - dg_h^1 = 0, \\ \dots \\ \delta g_h^{q-h-2} + (-1)^{q-h-1} dg_h^{q-h-1} = 0, \\ \delta g_h^{q-h-1} = 0. \end{cases}$$

Fissata una partizione dell'unità $\{\kappa_i\}$ subordinata ad \mathcal{U} , sia κ il corrispondente operatore di omotopia. Allora $g_{h+1} = g_h - D(\kappa g_h^{q-h-1}) \in \bigoplus_{j=0}^{q-h-2} \mathcal{K}^{j, q-j-1}$ e soddisfa ancora l'equazione $D(g_{h+1}) = D(g_h - D(\kappa g_h^{q-h-1})) = Dg_h = \epsilon f$.

Per ricorrenza otteniamo quindi una soluzione $g_0 = (g_{0,i}) \in \mathcal{K}^{0, q-1}$ di $Dg_0 = \epsilon f$. È allora

$$\begin{cases} dg_{0,i} = f|_{U_i}, \\ g_{0,i} = g_{0,j} \quad \text{su } U_i \cap U_j, \end{cases}$$

e quindi $g_0 = \epsilon g$ per una $g \in \Omega^{q-1}(M)$ per cui $dg = f$.

SURGETTIVITÀ. Sia $f \in \mathcal{K}^{(q)}$ con $Df = 0$. Dimostriamo per ricorrenza che, per ogni $h = 0, \dots, q$, esiste una $g_h \in \mathcal{K}^{(q-1)}$ tale che $f_h = f - Dg_h \in \bigoplus_{j=0}^{q-h} \mathcal{K}^{j, q-j}$. Per $h = 0$ possiamo prendere $f_0 = f$ e $g_0 = 0$. Supponiamo, per un h con $0 \leq h < q$, di aver trovato $g_h \in \mathcal{K}^{(q-1)}$ tale che $f_h = f - Dg_h \in \bigoplus_{j=0}^{q-h} \mathcal{K}^{j, q-j}$. Scriviamo $f_h = f_h^0 + \dots + f_h^{q-h}$ con $f_h^j \in \mathcal{K}^{j, q-j}$. Da $Df_h = 0$ ricaviamo che $\delta f_h^{q-h} = 0$. Posto $g'_{h+1} = \kappa f_h^{q-h} \in \mathcal{K}^{q-h-1, h} \subset \mathcal{K}^{(q-1)}$ e $g_{h+1} = g_h + g'_{h+1} \in \mathcal{K}^{(q-1)}$, otteniamo

$$f_{h+1} = f_h - Dg'_{h+1} = f - Dg_{h+1} \in \bigoplus_{j=0}^{q-h-1} \mathcal{K}^{j, q-j}.$$

Per $h = q$ otteniamo una $g_q \in \mathcal{K}^{q-1}$ tale che $f_q = f - Dg_q \in \mathcal{K}^{0, q}$. L'equazione $Df_q = 0$ ci dà allora $f_q = \epsilon \alpha$ per una forma $\alpha \in Z^q(M)$. L'immagine della classe di α in $H^q(M)$ è la classe di f in $H^q(\mathcal{K}^*, D)$. \square

Per ogni intero $q \geq 0$ indichiamo con $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale

$$(14.14) \quad \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \{(c_{i_0, \dots, i_q}) \mid U_{i_0, \dots, i_q} \neq \emptyset\}.$$

Possiamo identificare $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ad un sottospazio di $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^0)$ e la restrizione dell'operatore δ definisce un'applicazione

$$(14.15) \quad \delta : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R}).$$

Otteniamo un complesso

$$(14.16) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow \dots$$

DEFINIZIONE 14.2.3. Il complesso (14.16) si dice il *complesso di Čech*, a coefficienti reali, relativo al ricoprimento \mathcal{U} . Poniamo

$$Z^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \{\alpha \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \mid \delta \alpha = 0\},$$

$$\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \delta \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathbb{R}),$$

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = Z^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})/\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}).$$

I gruppi di coomologia $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ e si dicono i *gruppi di coomologia di Čech*, a coefficienti reali, del ricoprimento \mathcal{U} .

Abbiamo un'inclusione naturale

$$(14.17) \quad \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{K}^{q,0} \subset \mathcal{K}^{(q)}.$$

Osserviamo ancora che, se $c \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, è $Dc = \delta c$. Quindi (14.16) è un sottocomplesso del complesso (14.9) ed abbiamo perciò un omomorfismo naturale

$$(14.18) \quad \check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow H^*(\mathcal{K}^*, D).$$

TEOREMA 14.2.4. *Se \mathcal{U} è un buon ricoprimento, allora l'omomorfismo (14.18) è un isomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Per $q = 0$ sia $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ che $H^0(\mathcal{K}^*, D)$ si identificano allo spazio delle funzioni localmente costanti su M e sono quindi isomorfi. Nel resto della dimostrazione considereremo gli omomorfismi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow H^q(\mathcal{K}^*, D)$ per $q \geq 1$.

SURGETTIVITÀ. Sia q un intero positivo ed $f \in \mathcal{K}^{(q)}$ con $Df = 0$. Dimostriamo, per induzione su $h = 0, \dots, q$, che è possibile trovare un elemento $f^{(h)} \in \bigoplus_{j=h}^q \mathcal{K}^{j,q-j}$ con $f - f^{(h)} \in D\mathcal{K}^{(q-1)}$. Per $h = 0$ possiamo prendere $f^{(0)} = f$. Supponiamo ora che $0 \leq h < q$ e che vi sia una $f^{(h)} \in \bigoplus_{j=h}^q \mathcal{K}^{j,q-j}$ con $f - f^{(h)} \in D\mathcal{K}^{(q-1)}$. Scriviamo

$$f^{(h)} = f_h^{(h)} + f_{h+1}^{(h)} + \dots + f_q^{(h)}, \quad \text{con } f_j^{(h)} \in \mathcal{K}^{j,q-j}.$$

Poiché $Df^{(h)} = 0$, abbiamo in particolare $df_h^{(h)} = 0$. Per l'ipotesi che \mathcal{U} sia un buon ricoprimento, $H^{q-h}(U_{i_0, \dots, i_h}) = 0$ per ogni scelta degli indici i_0, \dots, i_h e quindi possiamo trovare un elemento $g \in \mathcal{K}^{h,q-h-1}$ tale che $dg = (-1)^h f_h^{(h)}$. Allora $f^{(h+1)} = f^{(h)} - Dg \in \bigoplus_{j=h+1}^q \mathcal{K}^{j,q-j}$ ed $f - f^{(h+1)} \in D\mathcal{K}^{(q-1)}$. Otteniamo in questo modo un elemento $f^{(q)} = f_q^{(q)} \in \mathcal{K}^{q,0}$, coomologo ad f in $H^q(\mathcal{K}^*, D)$. L'equazione $Df^{(q)} = 0$ ci dà $df^{(q)} = 0$ e $\delta f^{(q)} = 0$ e quindi $f^{(q)}$ è un elemento di $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, che definisce una classe di coomologia in $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ la cui immagine in $H^q(\mathcal{K}^*, D)$ è la classe di coomologia di f .

INIETTIVITÀ. Sia q un intero positivo ed $f \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ con $\delta f = 0$. Abbiamo già osservato che ciò equivale al fatto che $f \in \mathcal{K}^{q,0}$ e $Df = 0$. Supponiamo esista $u \in \mathcal{K}^{(q-1)}$ tale che $Du = f$. Dimostriamo per induzione su $h = 0, \dots, q-1$ che è possibile trovare soluzioni $u^{(h)}$ di $Du^{(h)} = f$ con $u^{(h)} \in \bigoplus_{j=h}^{q-1} \mathcal{K}^{j,q-j-1}$. Possiamo infatti porre $u^{(0)} = u$. Supponiamo di aver costruito $u^{(h)}$ per un h con $0 \leq h < q-1$. Se

$$u^{(h)} = u_h^{(h)} + u_{h+1}^{(h)} + \dots + u_{q-1}^{(h)}, \quad \text{con } u_j^{(h)} \in \mathcal{K}^{j,q-j-1},$$

dall'equazione $du^{(h)} = f$ ricaviamo che $du_h^{(h)} = 0$. Poiché $q-h-1 > 0$ ed \mathcal{U} è un buon ricoprimento, possiamo trovare $w \in \mathcal{K}^{h,q-h-2}$ tale che $dw = (-1)^h u_h^{(h)}$. Quindi $u^{(h+1)} = u^{(h)} - Dw \in \bigoplus_{j=h+1}^{q-1} \mathcal{K}^{j,q-j-1}$ e soddisfa $Du^{(h+1)} = f$. Per $u^{(q-1)} \in$

$\mathcal{K}^{q-1,0}$ l'equazione $Du^{(q-1)} = f$ dà $du^{(q-1)} = 0$, cioè $u^{(q-1)} \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, e $\delta u^{(q-1)} = f$. Ciò dimostra che f è coomologa a zero in $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. La dimostrazione è completa. \square

Abbiamo quindi il

TEOREMA 14.2.5 (de Rham). *Se \mathcal{U} è un buon ricoprimento di M , allora abbiamo gli isomorfismi*

$$(14.19) \quad H^*(M) \xrightarrow{\cong} H^*(\mathcal{K}^*, D) \xleftarrow{\cong} \check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}). \quad \square$$

OSSERVAZIONE 14.2.6. Per ogni ricoprimento \mathcal{U} di M la composizione

$$\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(\mathcal{K}^*, D) \xrightarrow{\cong} H^*(M)$$

definisce un omomorfismo della coomologia di Čech del ricoprimento \mathcal{U} , a coefficienti in \mathbb{R} , e la coomologia di de Rham. In generale, questo omomorfismo può non essere né iniettivo, né surgettivo.

14.3. Una formula di omotopia

Ricaviamo in questo paragrafo una *formula di omotopia* che renda esplicito l'omomorfismo di de Rham $\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow H^q(M)$, che diventa un isomorfismo nel caso in cui \mathcal{U} sia un buon ricoprimento.

Fissiamo una partizione dell'unità $\{\kappa_i\}$ subordinata ad \mathcal{U} . Indichiamo con κ le applicazioni descritte in (14.4). Osserviamo che $\kappa : \mathcal{K}^{q_1, q_2} \rightarrow \mathcal{K}^{q_1-1, q_2}$ se $q_1 > 0$, mentre $\kappa : \mathcal{K}^{0, q} \rightarrow \Omega^q(M)$ è l'inversa di $\epsilon : \Omega^q \rightarrow \mathcal{K}^{0, q} \subset \mathcal{K}^{(q)}$. È inoltre conveniente introdurre la notazione d per l'operatore $d : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{K}^*$ descritto sugli elementi bi-omogenei di \mathcal{K} mediante

$$d = (-1)^{q_1} d : \mathcal{K}^{q_1, q_2} \rightarrow \mathcal{K}^{q_1, q_2+1},$$

in modo che il differenziale del complesso (\mathcal{K}^*, D) si scriva nella forma

$$D = \delta + d.$$

L'esistenza di un'equivalenza omotopica $F : \mathcal{K}^* \rightarrow \Omega^*(M)$ è conseguenza di alcuni fatti generali sui complessi di cocatene¹.

L'applicazione $\epsilon : \Omega^*(M) \rightarrow \mathcal{K}^*$ commuta con i differenziali, è cioè

$$D \circ \epsilon = \epsilon \circ d$$

e definisce quindi un omomorfismo di complessi.

Poniamo (con $\mathcal{K}^{(-1)} = 0$)

$$(14.20) \quad \mathcal{Q}^q = \Omega^q(M) \oplus \mathcal{K}^{(q-1)}, \quad \text{per } q \in \mathbb{Z}, q \geq 0.$$

e definiamo su $\mathcal{Q}^* = \bigoplus_{q \geq 0} \mathcal{Q}^q$ un differenziale $\mathcal{D} : \mathcal{Q}^* \rightarrow \mathcal{Q}^*$ mediante la formula:

$$(14.21) \quad \mathcal{D}(f, \alpha) = (-df, \epsilon(f) + D\alpha).$$

Poiché $\epsilon \circ d = D \circ \epsilon$, e $d^2 = 0$, $D^2 = 0$, è

$$\mathcal{D}^2(f, \alpha) = \mathcal{D}(-df, \epsilon(f) + D\alpha) = (d^2 f, -\epsilon(df) + D\epsilon(f) + D^2 \alpha) = 0.$$

¹Vedi ad esempio il Cap.4, §2 in: Edvin H. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer, 1966.

Quindi $\mathcal{D}^2 = 0$ ed otteniamo un complesso $(\mathcal{Q}^*, \mathcal{D}_*)$:

$$(14.22) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{Q}^0 \xrightarrow{\mathcal{D}_0} \mathcal{Q}^1 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} \mathcal{Q}^2 \longrightarrow \dots$$

dove abbiamo indicato con \mathcal{D}_q la restrizione di \mathcal{D} ad un operatore da \mathcal{Q}^q in \mathcal{Q}^{q+1} .

DEFINIZIONE 14.3.1. Il complesso (14.22) si dice il *cono* dell'omomorfismo di complessi $\epsilon : \mathcal{Q}^*(M) \rightarrow \mathcal{K}^*$.

LEMMA 14.3.2. Il complesso (14.22) è aciclico e possiamo definire un omomorfismo $S : \mathcal{Q}^* \rightarrow \mathcal{Q}^*$, con $S_q : \mathcal{Q}^q \rightarrow \mathcal{Q}^{q-1}$, tale che

$$(14.23) \quad \mathcal{D}_{q-1} S_q(f, \alpha) = (f, \alpha), \quad \forall (f, \alpha) \in \mathcal{Q}^q \text{ t.c. } \mathcal{D}_q(f, \alpha) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $(f, 0) \in \mathcal{Q}^0$ e $\mathcal{D}(f, 0) = 0$, è $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ con $df = 0$ ed $\epsilon(f) = 0$, e dunque $f = 0$. Quindi $\mathcal{D}_0 : \mathcal{Q}^0 \rightarrow \mathcal{Q}^1$ è iniettiva.

Sia $q \geq 1$ ed $(f, \alpha) \in \mathcal{Q}^q$, con $f \in \mathcal{Q}^q(M)$ ed $\alpha = \alpha_0 + \dots + \alpha_{q-1}$, con $\alpha_j \in \mathcal{K}^{j, q-j-1}$, e $\mathcal{D}_q(f, \alpha) = 0$. Abbiamo

$$\begin{cases} \delta \alpha_{q-1} = 0, \\ \delta \alpha_{q-2} + d \alpha_{q-2} = 0, \\ \dots \\ \delta \alpha_0 + d \alpha_1 = 0, \\ \epsilon(f) + d \alpha_0 = 0, \\ df = 0. \end{cases}$$

Sia $\kappa : \mathcal{K}^{q_1, q_2} \rightarrow \mathcal{K}^{q_1-1, q_2}$ l'operatore di omotopia descritto dalle (14.4), associato ad una partizione dell'unità $\{\kappa_i\}$ subordinata al ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}$. Abbiamo allora, con

$$\begin{cases} \beta_{q-2} = \kappa \alpha_{q-1}, \\ \beta_{q-3} = \kappa(\alpha_{q-2} - (d\kappa)\alpha_{q-1}), \\ \beta_{q-4} = \kappa(\alpha_{q-3} - (d\kappa)\alpha_{q-2} + (d\kappa)^2 \alpha_{q-1}), \\ \dots \\ \beta_1 = \kappa(\alpha_2 - (d\kappa)\alpha_3 - \dots + (-1)^{q-2} (d\kappa)^{q-2} \alpha_{q-1}), \\ \beta_0 = \kappa(\alpha_1 - (d\kappa)\alpha_2 + \dots - (-1)^{q-1} (d\kappa)^{q-1} \alpha_{q-1}), \\ \alpha_{q-1} = \delta \beta_{q-2}, \\ \alpha_{q-2} = \delta \beta_{q-3} + d \beta_{q-2}, \\ \alpha_{q-3} + \delta \beta_{q-4} + d \beta_{q-3}, \\ \dots \\ \alpha_1 = \delta \beta_0 + d \beta_1. \end{cases}$$

Abbiamo poi

$$\delta \alpha_0 + d \alpha_1 = 0 \implies \delta(\alpha_0 - d \beta_0) = 0$$

e quindi esiste un'unica $g \in \mathcal{Q}^{q-1}(M)$ tale che

$$\alpha_0 = d \beta_0 + \epsilon(g),$$

e da questa relazione si deduce che anche

$$-\epsilon(f) = d\alpha_0 = d\epsilon(g) = \epsilon(dg) \implies -dg = f.$$

Abbiamo perciò ottenuto

$$(f, \alpha) = \mathcal{D}(g, \beta), \quad \text{con } \beta = \beta_0 + \cdots + \beta_{q-2}.$$

L'espressione esplicita della S_q è allora

$$(14.24) \quad \begin{cases} \epsilon(g(\alpha)) = \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i (d \circ \kappa)^i \alpha_i, \\ S_q(f, \alpha_0 + \cdots + \alpha_{q-1}) = \left(g(\alpha), \kappa \sum_{i=0}^{q-2} \sum_{j=0}^i (-1)^j (d \circ \kappa)^j \alpha_{i+1} \right). \end{cases}$$

□

Indichiamo nel seguito con S_q omomorfismi che soddisfano (14.23).

Poiché l'immagine di $1 - S_q \mathcal{D}_{q-1}$ è contenuta nel nucleo di \mathcal{D}_{q-1} , possiamo definire un operatore

$$(14.25) \quad R_q = S_q \circ (1 - S_{q+1} \mathcal{D}_q) : \mathcal{Q}^q \rightarrow \mathcal{Q}^{q-1}.$$

Vale allora

LEMMA 14.3.3. *Per ogni intero $q \geq 0$ abbiamo*

$$(14.26) \quad \mathcal{D}_{q-1} R_q + R_{q+1} \mathcal{D}_q = 1_{\mathcal{Q}^q}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{q-1} R_q + R_{q+1} \mathcal{D}_q &= \mathcal{D}_{q-1} \circ S_q \circ (1 - S_{q+1} \mathcal{D}_q) + S_{q+1} \circ (1 - S_{q+2} \mathcal{D}_{q+1}) \mathcal{D}_q \\ &= (1 - S_{q+1} \mathcal{D}_q) + S_{q+1} \mathcal{D}_q = 1, \end{aligned}$$

perché $\mathcal{D}_{q-1} \circ S_q$ è l'identità sull'immagine di $(1 - S_{q+1} \mathcal{D}_q)$, che è contenuta nel nucleo di \mathcal{D}_q . □

Definiamo operatori $F_q : \mathcal{K}^{(q)} \rightarrow \Omega^q(M)$ e $K_q : \mathcal{K}^{(q)} \rightarrow \mathcal{K}^{(q-1)}$ ponendo

$$(14.27) \quad R_q(0, \alpha) = (F_q(\alpha), K_q(\alpha)), \quad \forall \alpha \in \mathcal{K}^{(q)}.$$

PROPOSIZIONE 14.3.4. *Le $F = (F_q)$ ed $\epsilon = (\epsilon_q)$ sono inverse omotopiche l'una dell'altra.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \Omega^{q-1}(M)$,

$$R_q(0, \epsilon(f)) = S_q(1 - S_{q+1} \mathcal{D}_q)(0, \epsilon(f)) = S_q(df, \epsilon(f)) = (f, 0).$$

Quindi $F \circ \epsilon = 1$.

Sia ora $\alpha \in \mathcal{K}^{q-1}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} (0, \alpha) &= \mathcal{D}(F(\alpha), K(\alpha)) + (F(D\alpha), K(D\alpha)) \\ &= (-dF(\alpha), \epsilon(F(\alpha)) + DK(\alpha)) + (F(D\alpha), K(D\alpha)). \end{aligned}$$

Da questa identità ricaviamo le uguaglianze

$$\begin{aligned} dF(\alpha) &= F(D\alpha), \\ \alpha - \epsilon \circ F(\alpha) &= DK(\alpha) + K(D\alpha) \end{aligned}$$

La prima ci dice che $F : \mathcal{K}^* \rightarrow \Omega^*$ è un omomorfismo di complessi e la seconda che $\epsilon \circ F$ è omotopa all'identità su (\mathcal{K}^*, D_*) . \square

La formula esplicita per l'operatore F è data da

$$(14.28) \quad \epsilon \circ F(\alpha) = \sum_{i=0}^q (-d\kappa)^i \alpha_i - \sum_{i=0}^q \kappa(-d\kappa)^i \beta_{i+1},$$

con $\beta = \beta_0 + \dots + \beta_{q+1} = D\alpha$ e $\beta_i \in \mathcal{K}^{i, q-i+1}$.

14.4. La forma di Eulero di un fibrato in sfere orientate

Ricordiamo che le classi di coomologia di de Rham $H^q(S^n)$ della sfera S^n sono 0 per $q \neq 0, n$ ed isomorfe ad \mathbb{R} per $q = 0, n$. L'applicazione

$$\Omega^n(S^n) \ni \alpha \longrightarrow \int_{S^n} \alpha \in \mathbb{R}$$

definisce per passaggio al quoziente l'isomorfismo $H^n(S^n) \simeq \mathbb{R}$.

Indichiamo con ω l'elemento di $H^n(S^n)$ tale che²

$$\int_{S^n} \omega = 1.$$

Sia $\text{pr} : \mathbb{R}^m \times S^n \rightarrow S^n$ la proiezione sul secondo fattore. Se $\alpha \in \Omega^n(\mathbb{R}^m \times S^n)$ e $d\alpha = 0$, allora, per la formula di Stokes

$$I_\alpha(x) = \int_{\{x\} \times S^n} \alpha$$

è costante per $x \in \mathbb{R}^m$ ed α è una forma esatta se e soltanto se $I_\alpha(x) = 0$. L'applicazione $\alpha \rightarrow I_\alpha(x)$ rende esplicito, in grado n , l'isomorfismo $\text{pr}^* : H^*(S^n) \rightarrow H^*(\mathbb{R}^m \times S^n)$ indotto dal pullback, descritto nel Teorema ???. In particolare, la classe di $\text{pr}^*\omega$ è una base di $H^n(\mathbb{R}^m \times S^n) \simeq \mathbb{R}$. La forma $\omega_U = \text{pr}^*\omega$ ha la proprietà che il suo pullback ad ogni fibra $\{x\} \times S^n$ definisce il generatore di $H^n(\{x\} \times S^n)$ con integrale 1.

Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato differenziabile localmente banale con fibre S^n orientate. Il pullback $\pi^* : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(E)$ commuta con i differenziali e definisce quindi un omomorfismo di complessi. Il cono di π^* è un complesso

$$(14.29) \quad 0 \longrightarrow \Omega^0(\xi) \xrightarrow{d_\xi} \Omega^1(\xi) \xrightarrow{d_\xi} \Omega^2(\xi) \xrightarrow{d_\xi} \dots$$

²Ricordiamo che un rappresentante di ω è il pullback ad S^n della forma

$$\lambda = \frac{1}{(n+1)c_{n+1}} \frac{\sum_{i=0}^n (-1)^i x^i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n}{(\sum_{i=0}^n |x^i|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \in \mathcal{Q}^{n-1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}),$$

ove

$$c_{n+1} = \begin{cases} \frac{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!!} = \frac{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)(n-1)\dots 3 \cdot 1} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \frac{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!!} = \frac{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)(n-1)\dots 4 \cdot 2} & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

è il volume della palla unitaria $(n+1)$ -dimensionale.

dove abbiamo posto³

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^q(\xi) &= \mathcal{Q}^q(M) \oplus \mathcal{Q}^{q-1}(E), \quad q \geq 0, \\ d_\xi(f, g) &= (-d_M f, \pi^*(f) + d_E g), \quad \forall f \in \mathcal{Q}^*(M), \forall g \in \mathcal{Q}^*(E).\end{aligned}$$

Dalla successione esatta corta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{Q}^{q-1}(E) & \xrightarrow{a} & \mathcal{Q}(\xi) & \xrightarrow{b} & \mathcal{Q}(M) \longrightarrow 0 \\ & & & & \text{con } a(g) = (0, g) & \text{e } & b(f, g) = f \end{array}$$

si ricava la successione esatta lunga di coomologia

$$(14.30) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\xi) & \longrightarrow & H^0(M) & \longrightarrow & H^0(E) \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & & H^1(M) & \longrightarrow & H^1(E) \longrightarrow \dots \\ \dots & \longrightarrow & H^q(\xi) & \longrightarrow & H^q(M) & \longrightarrow & H^q(E) \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & & H^{q+1}(\xi) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

L'integrazione sulla fibra ci permette di definire, per ogni intero q , un'applicazione

$$(14.31) \quad \mu : \mathcal{Q}^q(\xi) \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow \pi_* \beta \in \mathcal{Q}^{q-n-1}.$$

Poiché il differenziale commuta con il pullback, la restrizione alla fibra del pullback di una forma di grado positivo su M è nullo, e l'integrale sulla fibra di una forma di grado minore di n è nullo, abbiamo

$$\begin{aligned}\mu(d_\xi(\alpha, \beta)) &= \mu(-d_M \alpha, d_E \beta + \pi^* \alpha) = \pi_*(d_E \beta + \pi^* \alpha) \\ &= \pi_*(d_E \beta) + \pi_*(\pi^* \alpha) = d_M(\pi_* \beta) = d_M(\mu(\alpha, \beta)), \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{Q}^*(\xi).\end{aligned}$$

Quindi

$$(14.32) \quad \mu \circ d_\xi = d_M \circ \mu$$

e quindi la μ definisce per passaggio al quoziente un omomorfismo di grado $-(n+1)$

$$(14.33) \quad [\mu] : H^{n+q+1}(\xi) \longrightarrow H^q(M).$$

OSSERVAZIONE 14.4.1. In particolare, se $(\alpha, \beta) \in Z^{n+1}(\xi)$, l'integrale sulla fibra $\pi_* \beta$ è una funzione localmente costante su M .

Dimostreremo in 14.5 che (14.33) è un isomorfismo per ogni intero q . Per dimostrare questo risultato consideriamo preliminarmente il caso $q = 0$.

TEOREMA 14.4.2. *L'omomorfismo*

$$(14.34) \quad [\mu] : H^{n+1}(\xi) \longrightarrow H^0(M)$$

è un isomorfismo.

In particolare vale il

³Conveniamo che $\mathcal{Q}^q(E) = 0$ per $q < 0$.

COROLLARIO 14.4.3. *Esiste un'unica classe di coomologia $[(e_\xi, \psi_\xi)] \in H^{n+1}(\xi)$ tale che*

$$(14.35) \quad \pi_* \psi_\xi = 1 \text{ su } M.$$

DEFINIZIONE 14.4.4. L'unica classe di coomologia $[(e_\xi, \psi_\xi)] \in H^{n+1}(\xi)$ che soddisfa (14.35) si dice la *classe di Eulero totale del fibrato ξ* .

La sua immagine $[e_\xi]$ in $H^{n+1}(M)$ si dice la *classe di Eulero del fibrato ξ* .

Se $(e_\xi, \psi_\xi) \in Z^{n+1}(\xi)$ è un rappresentante della classe di Eulero totale di ξ , chiamiamo $\psi_\xi \in \mathcal{Q}^n(E)$ una *forma angolare* ed $e_\xi \in Z^{n+1}(M)$ la corrispondente *forma di Eulero* del fibrato ξ .

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 14.4.2. Possiamo supporre che M sia connessa. La dimostrazione della surgettività di (14.34) è allora equivalente all'esistenza di una classe di Eulero del fibrato ξ , cioè di una $(e_\xi, \psi_\xi) \in Z^{n+1}(\xi)$ con $\pi_* \psi_\xi = 1$.

Se U è un aperto di trivializzazione per ξ , diffeomorfo ad \mathbb{R}^m , la restrizione a $\xi|_U$ della classe di Eulero totale ha un rappresentante della forma $(0, \psi_U)$, con una forma $\psi_U \in Z^n(E|_U)$ la cui classe di coomologia in $H^n(E|_U)$ è univocamente determinata dalla richiesta⁴ che sia $\pi_* \psi_U = 1$ su U .

Fissiamo un buon ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di M , che consista di aperti di trivializzazione di ξ . Sia $V_i = E|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i)$ ed indichiamo con $\mathcal{V} = \{V_i\}$ il ricoprimento aperto di E immagine inversa del ricoprimento \mathcal{U} di M .

Costruiamo per ricorrenza una sequenza⁵ ψ_0, \dots, ψ_n con

$$(14.36) \quad \begin{cases} \psi_h \in \mathcal{C}^h(\mathcal{V}, \mathcal{Q}^{n-h}), \\ \pi_* \psi_0 = \epsilon(1), \\ d_E \psi_0 = 0, \\ d_E \psi_h + \delta \psi_{h-1} = 0 \quad \text{se } 1 \leq h \leq n. \end{cases}$$

Per ogni indice i , fissiamo una forma chiusa $u_i \in Z^n(V_i)$ con $\pi_* u_i = 1$ su U_i e poniamo $\psi_0 = (u_i)$. Poiché

$$\pi_*(\delta \psi_0) = \delta(\pi_* \psi_0) = \delta(\epsilon(1)) = 0,$$

possiamo trovare $\psi_1 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{V}, \mathcal{Q}^{n-1})$ tale che $d_E \psi_1 + \delta \psi_0 = 0$. Supponiamo di aver costruito ψ_0, \dots, ψ_h per qualche h con $1 \leq h < n$. Poiché

$$d_E \delta \psi_h = -\delta d_E \psi_h = \delta^2 \psi_{h-1} = 0$$

e $\delta \psi_h \in \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{V}, \mathcal{Q}^{n-h})$, con $1 \leq n-h < n$, poiché $H^{n-h}(V_{i_0, \dots, i_{h+1}}) = 0$ per ogni scelta degli indici i_0, \dots, i_{h+1} , possiamo trovare una $\psi_{h+1} \in \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{U}, \mathcal{Q}^{n-h-1})$ tale che

$$d_E \psi_{h+1} + \delta \psi_h = 0.$$

⁴La classe di Eulero di ξ è un'ostacolo all'esistenza di una forma chiusa globale ψ in $\mathcal{Q}^n(E)$ che abbia integrale uno su tutte le fibre di ξ .

⁵Al solito, se $\alpha = (\alpha_{i_0, \dots, i_h}) \in \mathcal{C}^h(\mathcal{V}, \mathcal{Q}^q)$, poniamo $d_E \psi^q = (-1)^q (d_E \alpha_{i_0, \dots, i_q})$. Poniamo ancora $D_E = d_E + \delta$.

Questo completa la dimostrazione dell'esistenza della successione ψ_0, \dots, ψ_n che soddisfa (14.36). Abbiamo poi

$$d_E \delta \psi_n = -\delta d_E \psi_n = \delta^2 \psi_{n-1} = 0.$$

Quindi $\delta \psi_n \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathcal{V}, \mathbb{R})$.

L'omomorfismo canonico

$$\pi^* : \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, \Omega^*) \longrightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*)$$

dà per restrizione un isomorfismo

$$\pi^* : \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{V}, \mathbb{R}).$$

In particolare, c'è un unico elemento $\theta_{n+1} \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ tale che

$$(14.37) \quad \delta \theta_{n+1} = 0, \quad \pi^* \theta_{n+1} + \delta \psi_n = 0.$$

Fissiamo una partizione dell'unità $\{\kappa_i\}$, di classe \mathcal{C}^∞ , su M , subordinata al ricoprimento \mathcal{U} e sia $\{\pi^* \kappa_i\}$ la corrispondente partizione dell'unità su E subordinata al ricoprimento \mathcal{V} . Come in 14.3, costruiamo a partire dalle due partizioni gli operatori di omotopia

$$F_M : \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, \Omega^*) \rightarrow \Omega^*(M), \quad F_E : \mathcal{C}^*(\mathcal{V}, \Omega^*) \rightarrow \Omega^*(E).$$

Ricordiamo che

$$d_M \circ F_M = F_M \circ D_M, \quad d_E \circ F_E = F_E \circ D_E,$$

ove abbiamo indicato con $D_M = d_M + \delta$ il differenziale totale del complesso di Čech-de Rham associato al ricoprimento \mathcal{U} di M . Inoltre, per la scelta delle partizioni dell'unità, abbiamo

$$F_E \circ \pi^* = \pi^* \circ F_M, \quad \pi_* \circ F_E = F_M \circ \pi_*.$$

Abbiamo

$$D_E(\psi_0 + \dots + \psi_n) = d_E \psi_0 + \delta \psi_n = -\pi^* \theta_{n+1}$$

Poniamo

$$\begin{cases} e_\xi = F_M(\theta_{n+1}) \in \Omega^{n+1}(M), \\ \psi_\xi = F_E(\psi_0 + \dots + \psi_n). \end{cases}$$

Otteniamo allora

$$\begin{aligned} d_M e_\xi &= d_M F_M(\theta_{n+1}) = F_M(D_M \theta_{n+1}) = F_M(\delta \theta_{n+1}) = 0, \\ d_E \psi_\xi &= d_E F_E(\psi_0 + \dots + \psi_n) = F_E(D_E(\psi_0 + \dots + \psi_n)) \\ &= F_E(-\pi^* \theta_{n+1}) = -\pi^* F_M(\theta_{n+1}) = -\pi^* e_\xi, \\ \pi_* \psi &= \pi_* F_E(\psi_0 + \dots + \psi_n) = F_E(\pi_*(\psi_0 + \dots + \psi_n)) = F_E(\pi_* \psi_0) = F_E(\epsilon(1)) = 1. \end{aligned}$$

Questo dimostra che $(e_\xi, \psi_\xi) \in Z^{n+1}(\xi)$ e $\mu(e_\xi, \psi_\xi) = 1$, e completa la dimostrazione della surgettività.

La classe di Eulero è un'ostruzione all'esistenza di sezioni globali di ξ . Abbiamo infatti:

PROPOSIZIONE 14.4.5. *Se il fibrato ξ ammette una sezione globale, allora $[e_\xi]=0$. La condizione che sia $[e_\xi]=0$ è necessaria e sufficiente affinché esista una classe $[\psi_\xi] \in H^n(E)$ con $\pi_*\psi_\xi = 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo esista una sezione globale $\sigma \in \Gamma_\xi(M, E)$. Poiché $\pi \circ \sigma = 1$, la $\sigma^* \circ \pi^*$ è l'identità in coomologia. In particolare π^* è iniettiva e quindi $[e_\xi] = 0$ perché $[\pi^*e_\xi] = -[d_E\psi_\xi] = 0$. La seconda affermazione è ovvia. \square

Per completare la dimostrazione del Teorema 14.4.2, basterà dimostrare che una $(\alpha, \beta) \in \mathcal{Z}^{n+1}(\xi)$ con $\pi_*\beta = 0$ è coomologa a zero in $H^{n+1}(\xi)$. Usiamo le notazioni introdotte in precedenza.

In particolare $\mathcal{U} = \{U_i\}$ è un buon ricoprimento di M e $\{V_i = \pi^{-1}(U_i)\}$ la sua immagine inversa in E .

Le forme $\alpha \in \mathcal{Q}^{n+1}(M)$ e $\beta \in \mathcal{Q}^n(E)$ soddisfano

$$d_M\alpha = 0, \quad d_E\beta + \pi^*\alpha = 0, \quad \pi_*\beta = 0.$$

Poiché \mathcal{U} è un buon ricoprimento, possiamo costruire una successione f_0, f_1, \dots, f_n con

$$\begin{cases} f_h \in \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathcal{Q}^{n-q}), \\ \epsilon(\alpha) + d_M f_0 = 0, \\ d f_h + \delta f_{h-1} = 0 \quad \text{per } 1 \leq h \leq n. \end{cases}$$

Dall'uguaglianza $d_E\beta + \pi^*\alpha = 0$ ricaviamo che

$$0 = d_E\epsilon(\beta) + \pi^*\epsilon\alpha = d_E\epsilon(\beta) + \pi^*d_M f_0 = d_E(\epsilon(\beta) - \pi^*f_0).$$

Poiché

$$\pi_*(\epsilon(\beta) - \pi^*f_0) = \pi_*\epsilon(\beta) = \epsilon(\pi_*\beta) = 0,$$

possiamo trovare $u_0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{V}, \mathcal{Q}^{n-1})$ tale che

$$d_E u_0 + \pi^*(f_0) = \epsilon(\beta).$$

Poiché $H^q(V_{i_0, \dots, i_\ell}) = 0$ per ogni $q \neq 0, n$, possiamo costruire una successione u_0, \dots, u_{n-1} con

$$\begin{cases} u_h \in \mathcal{C}^h(\mathcal{V}, \mathcal{Q}^{n-h-1}), \\ d_E u_0 + \pi^*(f_0) = \epsilon(\beta), \\ d_E u_h + \delta u_{h-1} + \pi^*(f_h) = 0 \quad \text{per } 1 \leq h \leq n-1. \end{cases}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(d_E u_{n-1} + \delta u_{n-2} + \pi^*(f_{n-1})) = -d_E \delta u_{n-1} + \pi^*(\delta f_{n-1}) \\ &= -d_E \delta u_{n-1} - \pi^*(d_M f_n) = -d_E(\delta u_{n-1} + \pi^*f_n). \end{aligned}$$

In particolare, è determinata una $\theta_n \in \mathcal{C}^n(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ tale che

$$\delta u_{n-1} + \pi^*f_n = \pi^*\theta_n,$$

ed abbiamo

$$\pi^*(\theta_n - f_n) = \delta u_{n-1} \implies \delta(\theta_n - f_n) = 0.$$

Osserviamo che

$$D_M(f_0 + \dots + f_n) = -\epsilon(\alpha) + \delta f_n,$$

$$\begin{aligned} D_E(u_0 + \cdots + u_{n-1}) &= \epsilon(\beta) - \pi^*(f_0 + \cdots + f_{n-1}) + \delta u_{n-1} \\ &= \epsilon(\beta) - \pi^*(f_0 + \cdots + f_{n-1} + f_n - \theta_n). \end{aligned}$$

Poniamo

$$\begin{cases} f = F_M(f_0 + \cdots + f_n - \theta_n), \\ u = F_E(u_0 + \cdots + u_{n-1}). \end{cases}$$

Allora

$$\begin{cases} d_M f = F_M(-\epsilon(\alpha) + \delta f_n - \delta \theta_n) \\ \quad = -\alpha + F_M(\delta(f_n - \theta_n)) = -\alpha, \\ d_E u = \beta - \pi^* f, \end{cases}$$

da cui otteniamo che

$$d_\xi(f, u) = (\alpha, \beta).$$

La dimostrazione è completa. \square

14.5. La successione di Gysin

La successione esatta lunga di Gysin⁶ è un caso particolare della successione spettrale di Serre⁷ per la coomologia di un fibrato differenziabile.

TEOREMA 14.5.1 (Successione esatta di Gysin). *Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato differenziabile in sfere S^{n-1} orientato, con $n \geq 2$, su una varietà M , e sia $[e_\xi] \in H^n(M)$ la sua classe di Eulero. Abbiamo allora la successione esatta lunga di coomologia*

$$(14.38) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^{q-1}(E) & \xrightarrow{\pi_*} & H^{q-n}(M) & \xrightarrow{[e_\xi]^\wedge} & H^q(M) \\ & & \xrightarrow{\pi^*} & H^q(E) & \longrightarrow & H^{q-n+1}(M) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

ove π_* è l'applicazione associata all'integrazione sulla fibra, $[e_\xi]^\wedge$ quella associata al prodotto esterno per una forma di Eulero e_ξ e la π^* l'applicazione naturale indotta dal pullback.

La successione esatta di Gysin è conseguenza della successione esatta della fibrazione (14.30) e della seguente

PROPOSIZIONE 14.5.2. *Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato differenziabile localmente banale con fibre S^{n-1} orientate e sia $(e_\xi, \psi_\xi) \in Z^n(\xi)$ una coppia di forme che rappresenti la classe di Eulero totale del fibrato ξ . Allora*

$$(14.39) \quad \lambda : \Omega^q(M) \ni \alpha \longrightarrow (e_\xi \wedge \alpha, \psi_\xi \wedge \pi^* \alpha) \in \Omega^{n+q}(\xi), \quad q \in \mathbb{Z},$$

⁶Werner Gysin è un matematico svizzero, nato nel 1915, studente di Heinz Hopf ed Eduard L. Stiefel. Ha pubblicato un solo lavoro, in cui discute il risultato legato al suo nome: *Zur Homologietheorie der Abbildungen und Faserungen von Mannigfaltigkeiten*, Commentarii Mathematici Helvetici 14 (1942) pp. 61-122.

⁷La successione spettrale di Serre, ottenuta da Jean-Pierre Serre (Bages, 15 settembre 1926) nella sua tesi di dottorato, esprime, nel linguaggio dell'algebra omologica, la coomologia singolare dello spazio totale di una fibrazione di Serre in termini della coomologia della base e della fibra. Il risultato è esposto nell'articolo:

J.-P. Serre, *Homologie singulière des espaces fibrés*, Ann. of Math. (2) **54** (1951), pp 425-505.

$$(14.40) \quad \mu : \Omega^{n+q}(\xi) \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow \pi_*\beta \in \Omega^q(M), \quad q \in \mathbb{Z},$$

definiscono omomorfismi di complessi, di grado n e $-n$ rispettivamente, che inducono per passaggio al quoziente isomorfismi

$$(14.41) \quad [\lambda] : H^q(M) \longrightarrow H^{n+q}(\xi), \quad [\mu] : H^{n+q}(\xi) \longrightarrow H^q$$

che sono l'uno l'inverso dell'altro.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo che λ è un omomorfismo di complessi. Se $\alpha \in \Omega^q(M)$, è

$$\begin{aligned} d_\xi(\lambda(\alpha)) &= (-d_M(e_\xi \wedge \alpha), d_E(\psi_\xi \wedge \pi^*\alpha) + \pi^*(e_\xi \wedge \alpha)) \\ &= ((-1)^{n+1}e_\xi \wedge d_M\alpha, (d_E\psi_\xi) \wedge \pi^*(\alpha) + (-1)^{n-1}\psi_\xi \wedge d_E(\pi^*\alpha) + \pi^*(e_\xi) \wedge \pi^*(\alpha)) \\ &= (-1)^{n+1}(e_\xi \wedge d_M\alpha, \psi_\xi \wedge (\pi^*(d_M\alpha))) = (-1)^{n+1}\lambda(d_M\alpha). \end{aligned}$$

Quindi

$$\lambda \circ d_M = (-1)^{n+1}d_\xi \circ \lambda.$$

Se $(\alpha, \beta) \in \Omega^{n+q}(\xi)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \mu(d_\xi(\alpha, \beta)) &= \mu(-d_M\alpha, d_E\beta + \pi^*\alpha) = \pi_*(d_E\beta + \pi^*\alpha) \\ &= \pi_*(d_E\beta) = d_M\pi_*\beta = d_M\mu(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Questo dimostra che

$$\mu \circ d_\xi = d_M \circ \mu$$

e quindi sia λ che μ sono omomorfismi di complessi ed inducono perciò omomorfismi (14.41) in coomologia. Abbiamo

$$\mu \circ \lambda(\alpha) = \mu(e_\xi \wedge \alpha, \psi_\xi \wedge (\pi^*\alpha)) = \pi_*(\psi_\xi \wedge \pi^*\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in \Omega^*(M).$$

Quindi $\mu \circ \lambda$ è l'identità e dunque anche $[\mu] \circ [\lambda]$ è l'identità in coomologia. Questo dimostra che

$$\begin{aligned} [\lambda] : H^q(M) &\longrightarrow H^{n+q}(\xi) \quad \text{è iniettiva per ogni } q \in \mathbb{Z}, \\ [\mu] : H^{n+q}(\xi) &\longrightarrow H^q(M) \quad \text{è surgettiva per ogni } q \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Per dimostrare che $[\mu]$ è iniettiva, utilizzeremo il lemma:

LEMMA 14.5.3. Consideriamo il fibrato banale

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^m \times S^{n-1} & \\ \pi \swarrow & & \searrow p \\ \mathbb{R}^m & & S^{n-1} \end{array}$$

Abbiamo

$$(14.42) \quad H^q(\mathbb{R}^m \times S^{n-1}) \simeq H^q(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, n-1, \\ 0 & \text{se } q \neq 0, n-1. \end{cases}$$

L'integrazione sulla fibra definisce un omomorfismo surgettivo

$$(14.43) \quad \pi_* : \Omega^{n+q}(\mathbb{R}^m \times S^{n-1}) \longrightarrow \Omega^q(M), \quad \text{per ogni } q \in \mathbb{Z},$$

che per passaggio al quoziente dà, per $q = 0$, un isomorfismo

$$(14.44) \quad \pi_* : H^n(\mathbb{R}^m \times S^{n-1}) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^m).$$

Abbiamo inoltre:

$$(14.45) \quad \begin{cases} \forall q \geq 1, \quad \forall f \in Z^q(E) \text{ t.c. } \pi_* f = 0, \\ \exists u \in \Omega^{q-1}(E) \text{ t.c. } \pi_* u = 0, \quad du = f. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. La (14.42) segue dal fatto che S^n è un retratto differenziabile di deformazione di $\mathbb{R}^m \times S^n$.

Se $\omega_n \in Z^n(S^n)$ è una forma⁸ con $\int_{S^n} \omega_n = 1$, abbiamo $\pi_*(p^*\omega_n) = 1$ e quindi l'applicazione $\pi_* : H^n(\mathbb{R}^m \times S^n) \rightarrow H^0(\mathbb{R}^m)$ è surgettiva. La (14.43) segue dal fatto che

$$\pi_*(p^*\omega \wedge \pi^*\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in \Omega^*(M).$$

Per completare la dimostrazione, basterà allora verificare la (14.45). Osserviamo che $\pi_* u = 0$ se $u \in \Omega^q(E)$ con $q < n$ e quindi, tenuto conto di (14.42) e dell'isomorfismo $H^n(\mathbb{R}^m \times S^n) \simeq H^n(S^n) \simeq \mathbb{R}$, la (14.45) è senz'altro valida se $q \leq n$.

Sia $q > n$ ed $f \in Z^q(E)$ soddisfi $\pi_* f = 0$. Poiché $H^q(\mathbb{R}^m \times S^n) = 0$, esiste una $v \in \Omega^{q-1}(\mathbb{R}^m \times S^n)$ tale che $dv = 0$. Consideriamo la forma $(p^*\omega_n) \wedge (\pi^*(\pi_*v)) \in \Omega^{q-1}(\mathbb{R}^m \times S^n)$. È

$$d[(p^*\omega_n) \wedge (\pi^*(\pi_*v))] = (-1)^n(p^*\omega_n) \wedge (\pi^*(\pi_*dv)) = (-1)^n(p^*\omega_n) \wedge (\pi^*(\pi_*f)) = 0.$$

Quindi la $u = v - [(p^*\omega_n) \wedge (\pi^*(\pi_*v))] \in \Omega^{q-1}(E)$ è una soluzione di $du = f$ con $\pi_*u = \pi_*v - \pi_*v = 0$. \square

Torniamo alla dimostrazione dell'iniettività di $[\mu]$.

Sia $(\alpha, \beta) \in Z^q(\xi)$ e supponiamo che $\pi_*\beta = d_M f$, con $f \in \Omega^{q-n-1}(M)$. Allora

$$(\alpha, \beta) + (-1)^n d_\xi \lambda(f) = (\alpha - e_\xi \wedge df, \beta - \psi_\xi \wedge (\pi^*df)) = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \ker \mu.$$

Per completare la dimostrazione sarà quindi sufficiente mostrare che

ogni $(\alpha, \beta) \in Z^q(\xi)$ con $\pi_*\beta = 0$ è coomologo a zero in $H^q(\xi)$.

La condizione $\pi_*\beta = 0$ è automaticamente verificata se $q < n$. In particolare, verificheremo che $H^q(\xi) = 0$ se $q < n$.

Un elemento di $Z^0(\xi)$ è una coppia $(f, 0)$, con $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $d_M f = 0$, $\pi^* f = 0$. Quindi $H^0(\xi) = Z^0(\xi) = 0$.

⁸Ricordiamo che un rappresentante di ω è il pullback ad S^n della forma

$$\lambda = \frac{1}{(n+1)c_{n+1}} \frac{\sum_{i=0}^n (-1)^i x^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n}{(\sum_{i=0}^n |x^i|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \in \mathcal{D}^{n-1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}),$$

ove

$$c_{n+1} = \begin{cases} \frac{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!!} = \frac{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)(n-1)\cdots 3 \cdot 1} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \frac{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!!} = \frac{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)(n-1)\cdots 4 \cdot 2} & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

è il volume della palla unitaria $(n+1)$ -dimensionale.

Per dimostrare la nostra tesi per $q \geq 1$, fissiamo un buon ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di M mediante aperti di trivializzazione per ξ , e denotiamo con $\mathcal{V} = \{V_i = \pi^{-1}(U_i)\}$ la sua immagine inversa in E .

Sia $(\alpha, \beta) \in Z^1(\xi)$. È

$$\alpha \in \Omega^1(M), \quad d_M \alpha = 0, \quad \beta \in \mathcal{C}^\infty(E), \quad d\beta + \pi^* \alpha = 0.$$

Poiché $n \geq 2$, la condizione $\pi_* \beta = 0$ è automaticamente verificata. Poiché \mathcal{U} è un buon ricoprimento, possiamo trovare un elemento $f_0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^0)$ tale che

$$\epsilon(\alpha) + d_M f_0 = 0.$$

Abbiamo allora

$$0 = \epsilon(d_E \beta + \pi^* \alpha) = \epsilon(d_E \beta) + \pi^*(\epsilon \alpha) = d_E \epsilon(\beta) - \pi^*(d_M f_0) = d_E(\epsilon(\beta) - \pi^* f_0).$$

Quindi $\epsilon(\beta) - \pi^* f_0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{V}, \mathbb{R})$.

L'applicazione naturale

$$\pi^* : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^*) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{V}, \Omega^*), \quad \forall q \in \mathbb{Z},$$

dà per restrizione un isomorfismo

$$(14.46) \quad \pi^* : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \longleftrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{V}, \mathbb{R}), \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Possiamo quindi trovare un elemento $\theta_0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ tale che

$$\epsilon(\beta) - \pi^* f_0 = \pi^* \theta_0.$$

Abbiamo

$$(14.47) \quad \delta(\pi^*(\theta_0 + f_0)) = \delta(\epsilon(\beta)) = 0 \implies \delta(\theta_0 + f_0) = 0.$$

Quindi $\theta_0 + f_0 = \epsilon(f)$ per una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ed otteniamo

$$\begin{aligned} d_M \epsilon(f) &= d_M(\theta_0 + f_0) = d_M f_0 = -\epsilon(\alpha) \implies d_M f = -\alpha, \\ \pi^* \epsilon(f) &= \pi^*(\theta_0 + f_0) = \epsilon(\beta) \implies \pi^* f = \beta, \end{aligned}$$

e dunque

$$d_\xi(f, 0) = (-d_M f, \pi^* f) = (\alpha, \beta).$$

Sia ora $q \geq 2$. Dimostriamo che in questo caso è possibile costruire due successioni f_0, \dots, f_{q-1} ed u_0, \dots, u_{q-2} tali che

$$\begin{cases} f_h \in \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \Omega^{q-h-1}), \\ \epsilon(\alpha) + d_M f_0 = 0, \\ \delta f_{h-1} + d_M f_h = 0 \\ \text{per } 1 \leq h \leq q-1, \end{cases} \quad \begin{cases} u_h \in \mathcal{C}^h(\mathcal{V}, \Omega^{q-h-2}), \\ \pi_* u_h = 0, \\ \epsilon(\beta) + d_E u_0 = \pi^* f_0, \\ \delta u_{h-1} + d_E u_h = \pi^* f_h \\ \text{per } 1 \leq h \leq q-2. \end{cases}$$

Costruiamo per ricorrenza prima la successione f_0, \dots, f_{q-1} , poi la successione u_0, \dots, u_{q-2} . Per ipotesi, la coppia (α, β) soddisfa

$$\alpha \in \Omega^q(M), \quad d_M \alpha = 0, \quad \beta \in \Omega^{q-1}(E), \quad d_E \beta + \pi^* \alpha = 0, \quad \pi_* \beta = 0.$$

Poiché \mathcal{U} è un buon ricoprimento, possiamo trovare $f_0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^{q-1})$ tale che $\epsilon(\alpha) + d_M f_0 = 0$. Applicando δ ai due membri di questa uguaglianza otteniamo che

$$0 = \delta(\epsilon(\alpha) + d_M f_0) = \delta(d_M f_0) = -d_M \delta f_0.$$

Poiché \mathcal{U} è un buon ricoprimento, possiamo allora trovare $f_1 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^{q-2})$ tale che $\delta f_0 + d_M f_1 = 0$. Se $1 \leq h < q - 1$ ed abbiamo già costruito f_0, \dots, f_h con $\delta f_{h-1} + d_M f_h = 0$, allora

$$d_M \delta f_h = -\delta(d_M f_h) = \delta^2 f_{h-1} = 0.$$

Poiché \mathcal{U} è un buon ricoprimento, potremo trovare $f_{h+1} \in \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{U}, \Omega^{q-h-2})$ tale che

$$\delta f_h + d_M f_{h+1} = 0.$$

Ciò dimostra l'esistenza della successione f_0, \dots, f_{h-1} . Abbiamo poi

$$\begin{aligned} d_E(\epsilon(\beta) - \pi^* f_0) &= \epsilon(d_E \beta) - \pi^*(d_M f_0) = \epsilon(d_E \beta) + \pi^*(\epsilon(\alpha)) = 0, \\ \pi_*(\epsilon(\beta) - \pi^* f_0) &= \pi_*(\epsilon(\beta)) = \epsilon(\pi_* \beta) = 0. \end{aligned}$$

Per il Lemma 14.5.3 possiamo trovare $u_0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{V}, \Omega^{q-2})$ tale che

$$\epsilon(\beta) + d_E u_0 = \pi^* f_0, \quad \pi_* u_0 = 0.$$

Se $q = 2$ abbiamo finito. Altrimenti, se $q > 2$, osserviamo che

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(\epsilon(\beta) + d_E u_0 - \pi^* f_0) = -d_E \delta u_0 - \pi^* \delta f_0 = -d_E \delta u_0 + \pi^* d_M f_1 = d_E(\pi^* f_1 - \delta u_0), \\ \pi_*(\pi^* f_1 - \delta u_0) &= -\pi_* \delta u_0 = -\delta(\pi_* u_0) = 0. \end{aligned}$$

Per il Lemma 14.5.3 possiamo trovare $u_1 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{V}, \Omega^{q-3})$ tale che

$$\delta u_0 + d_E u_1 = \pi^* f_1, \quad \pi_* u_1 = 0.$$

Se $q = 3$ abbiamo finito. Se $q > 3$ ed abbiamo già costruito u_0, \dots, u_h con $1 \leq h < q - 2$, da

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(\delta u_{h-1} + d_E u_h - \pi^* f_h) = -d_E \delta u_h - \pi^* \delta f_h = -d_E \delta u_h + \pi^* d_M f_{h+1} = d_E(\pi^* f_{h+1} - \delta u_h), \\ \pi_*(\pi^* f_{h+1} - \delta u_h) &= -\pi_*(\delta u_h) = -\delta(\pi_* u_h) = 0, \end{aligned}$$

applicando il Lemma 14.5.3 possiamo trovare $u_{h+1} \in \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{V}, \Omega^{q-h-3})$ tale che

$$\delta u_h + d_E u_{h+1} = \pi^* f_{h+1}, \quad \pi_* u_{h+1} = 0.$$

Quindi per ricorrenza otteniamo anche la successione u_0, \dots, u_{q-2} .

Abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(\delta u_{q-3} + d_E u_{q-2} - \pi^* f_{q-1}) = -d_E \delta u_{q-2} - \pi^* \delta f_{q-1} \\ &= -d_E \delta u_{q-2} + \pi^* d_M f_{q-1} = d_E(f_{q-1} - \delta u_{q-2}). \end{aligned}$$

Quindi $f_{q-1} - \delta u_{q-2} \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ e quindi risulta univocamente determinato $\theta_{q-1} \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ tale che

$$f_{q-1} - \delta u_{q-2} = \pi^* \theta_{q-1}.$$

Siano F_E e F_M come in 14.4. Con

$$\begin{cases} f = F_M(f_0 + \dots + f_{q-1} - \theta_{q-1}) \in \Omega^{q-1}(M), \\ u = F_E(u_0 + \dots + u_{q-2}) \in \Omega^{q-2}(M), \end{cases}$$

otteniamo

$$df = -\alpha, \quad du + \pi^* f = \beta, \quad \text{cioè} \quad d_\xi(f, u) = (\alpha, \beta).$$

La dimostrazione è completa. \square

Poiché $H^q(M) = 0$ per $q < 0$, il segmento iniziale della successione di Gysin definisce isomorfismi $H^q(E) \simeq H^q(M)$ per $q < n - 1$. Il segmento successivo è quindi

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{n-1}(M) & \xrightarrow{\pi^*} & H^{n-1}(E) & \xrightarrow{\pi_*} & H^0(M) \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \end{array}$$

Osserviamo ancora che, nel caso esista una sezione globale $s \in \Gamma_\xi(M, E)$, $[e_\xi] = 0$ e l'applicazione π^* è iniettiva. Dunque la successione di Gysin si spezza nelle successioni esatte corte

$$0 \longrightarrow H^q(M) \xrightarrow{\pi^*} H^q(E) \xrightarrow{\pi_*} H^{q-n+1}(M) \longrightarrow 0.$$

In effetti, nel caso di un fibrato banale, queste successioni esatte corte sono compatibili con la formula di Künneth

$$H^q(M \times S^{n-1}) \simeq \bigoplus_{q_1+q_2=q} (H^{q_1}(M) \otimes H^{q_2}(S^{n-1})) \simeq H^q(M) \oplus H^{q-n+1}(M).$$

14.6. Coomologia delle varietà di Stiefel complesse e quaternioniche

Consideriamo le varietà di Stiefel⁹ $\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})$ dei sistemi di k vettori ortonormali rispetto al prodotto scalare Hermitiano di \mathbb{C}^n . Per ogni $k = 1, \dots, n$ la $\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})$ è una varietà analitica orientabile, connessa e compatta, di dimensione $2kn - n^2$.

È $\mathbb{V}_{n,1} = S^{2n-1}$ e, per ogni $k \geq 1$, abbiamo una fibrazione naturale $\xi_k = (\mathbb{V}_{n,k+1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi_k} \mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C}))$, con fibra $S^{2n-2k-1}$. Le varietà di Stiefel complesse sono orientabili e possiamo quindi utilizzare la successione di Gysin per studiare la loro coomologia di de Rham. Consideriamo innanzi tutto il caso $k = 1$. La forma di Eulero e_{ξ_1} ha grado $2n - 2$ ed è quindi coomologa a zero. La successione di Gysin si spezza quindi nelle successioni esatte corte

$$0 \longrightarrow H^q(S^{2n-1}) \xrightarrow{\pi_1^*} H^q(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C})) \xrightarrow{\pi_{1*}} H^{q-2n+3}(S^{2n-1}) \longrightarrow 0,$$

per ogni intero $q \geq 0$. Sia $\omega_{2n-1} \in \Omega^{2n-1}(S^{2n-1})$ un elemento con $\int_{S^{2n-1}} \omega_{2n-1} = 1$. Allora $1 \in \Omega^0(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$ e $\pi_1^*(\omega_{2n-1}) \in \Omega^{2n-1}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$ sono generatori dei gruppi

⁹Alcune delle varietà di Stiefel reali non sono orientabili. Non possiamo quindi applicare ad esse direttamente la successione di Gysin per il calcolo della loro coomologia di de Rham e della loro coomologia singolare. La loro coomologia a coefficienti \mathbb{Z}_2 fu calcolata da Armand Borel in:

A. Borel, *Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Ann. of Math. 57 (1953), 115-207.

Il calcolo completo dell'anello di coomologia a coefficienti interi delle varietà di Stiefel reali è stato ottenuto più recentemente. Vedi:

Martin Čadek, Mamoru Mimura, and Jiří Vanžura: *The cohomology rings of real Stiefel manifolds with integer coefficients*, J. Math. Kyoto Univ. Volume 43, Number 2 (2003), 411-428.

di coomologia $H^0(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$ ed $H^{2n-1}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$. Poiché la classe di Eulero di ξ_1 è nulla, esiste su $\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C})$ una forma angolare chiusa $\psi_{\xi_1} \in Z^{2n-3}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$, che definisce una base di $H^{2n-3}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$. Chiaramente la classe di $\psi_{\xi_1} \wedge \pi_1^*(\omega_{2n-1}) \in \Omega^{4n-4}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$ è una base di $H^{4n-4}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$ con $\int_{\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C})} \psi_{\xi_1} \wedge \pi_1^*\omega_{2n-1} = 1$. Dalla successione di Gysin ricaviamo poi che $H^q(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C})) = 0$ se $q \neq 0, 2n-3, 2n-1, 4n-4$. Se poniamo $a_{2n-1} = [\pi_1^*\omega_{2n-1}]$, $a_{2n-3} = [\psi_{\xi_1}]$, abbiamo:

L'anello di coomologia $H^(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{C}))$ è l'algebra reale unitaria libera di Grassmann generata dai due elementi omogenei a_{2n-3} ed a_{2n-1} .*

Possiamo calcolare ricorsivamente la coomologia delle varietà di Stiefell complesse utilizzando la successione di Gysin. Otteniamo, in generale:

PROPOSIZIONE 14.6.1. *L'anello di coomologia $H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C}))$ è un'algebra unitaria libera di Grassmann unitaria con k generatori omogenei $a_{2n-1}, a_{2n-3}, \dots, a_{2n-2k+1}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $k \geq 2$ e supponiamo di aver già dimostrato il teorema per la coomologia di de Rham di $\mathbb{V}_{n,k}$. Poiché i gruppi di coomologia di $\mathbb{V}_{n,k}$ sono nulli in grado dispari, la classe di Eulero di ξ_k è nulla e quindi otteniamo una successione esatta

$$0 \longrightarrow H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \xrightarrow{\pi_k^*} H^*(\mathbb{V}_{n,k+1}(\mathbb{C})) \xrightarrow{\pi_{k*}} H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \longrightarrow 0.$$

Poiché la forma di Eulero è nulla, la forma angolare di ξ_k ha un rappresentante chiuso $\psi_{\xi_k} \in Z^{2n-2k-1}(\mathbb{V}_{n,k+1}(\mathbb{C}))$. Poiché π_k^* è iniettiva in coomologia, $H^*(\mathbb{V}_{n,k+1}(\mathbb{C}))$ contiene $\pi_k^*H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \oplus [\psi_{\xi_k}] \wedge H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C}))$, e

$$\begin{aligned} & \pi_{k*}(\pi_k^*H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \oplus [\psi_{\xi_k}] \wedge H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C}))) \\ &= \pi_{k*}([\psi_{\xi_k}] \wedge \pi_k^*(H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})))) = H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})), \end{aligned}$$

otteniamo per la successione esatta di Gysin che

$$H^*(\mathbb{V}_{n,k+1}(\mathbb{C})) = \pi_k^*H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \oplus [\psi_{\xi_k}] \wedge H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})).$$

Da questa uguaglianza segue la tesi. \square

Le varietà di Stiefel quaternioniche $\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{H})$ sono varietà compatte, connesse, orientabili, di dimensione $k(4n - 2k + 1)$. Abbiamo $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{H}) \simeq S^{4n-1}$ e, per ogni k , otteniamo una fibrazione naturale $\pi : \mathbb{V}_{n,k+1}(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{H})$ con fibra $S^{4(n-k)-1}$. Anche queste fibrazioni hanno classe di Eulero nulla, ed utilizzando la successione esatta di Gysin otteniamo, con un ragionamento analogo a quello svolto nel caso complesso,

PROPOSIZIONE 14.6.2. *L'anello di coomologia $H^*(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{H}))$ è un anello unitario con k generatori omogenei $a_{4n-1}, a_{4n-5}, \dots, a_{4n-4k+3}$.*

14.7. L'isomorfismo di Thom

In questo paragrafo completiamo la dimostrazione dell'isomorfismo di Thom nel caso in cui non si assuma che la base M del fibrato vettoriale $\theta = (E_0 \xrightarrow{\pi} M)$ ammetta un buon ricoprimento aperto finito. Sia n il rango di θ .

Ricordiamo che il Teorema di Thom stabilisce che l'integrazione sulla fibra definisce un isomorfismo

$$(14.48) \quad \pi_* : H_{cv}^q(E_\theta) \longrightarrow H^{q-n}(M), \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Nella costruzione della classe e dell'isomorfismo di Thom utilizzeremo il

LEMMA 14.7.1. *Consideriamo il fibrato banale*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n & \\ \pi \swarrow & & \searrow p \\ \mathbb{R}^m & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

con base \mathbb{R}^m e fibra \mathbb{R}^n . Allora, per qualsiasi intero q ,

$$(14.49) \quad \begin{cases} \forall \alpha \in Z_{cv}^q(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \text{ t.c. } \pi_* \alpha = 0, \\ \exists \beta \in \Omega_{cv}^{q-1}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \text{ t.c. } d\beta = \alpha, \quad \pi_* \beta = 0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già dimostrato che l'integrazione sulla fibra definisce un isomorfismo $\pi_* : H_{cv}^q(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \rightarrow H^{q-n}(\mathbb{R}^m)$. Poiché $\pi_* \beta = 0$ se $\beta \in \Omega_{cv}^q(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ con $q < n$, basterà dimostrare la (14.49) per $q > n$.

Fissiamo $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 1$. Sia $\alpha \in Z_{cv}^q(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ con $\pi_* \alpha = 0$. Poiché $H_{cv}^q(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \simeq H^{q-n}(\mathbb{R}^m) = 0$, possiamo trovare $\beta_0 \in \Omega_{cv}^{q-1}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ tale che $d\beta_0 = \alpha$. Consideriamo la forma $\beta_1 = \pi^*(\pi_* \beta_0) \wedge p^* \omega$. Abbiamo

$$\begin{aligned} d\beta_1 &= \pi^*(\pi_* d\beta_0) \wedge p^* \omega = \pi^*(\pi_* \alpha) \wedge p^* \omega = 0, \\ \pi_* \beta_1 &= \pi_* [\pi^*(\pi_* \beta_0) \wedge p^* \omega] = \pi_* \beta_0. \end{aligned}$$

Quindi $\beta = \beta_0 - \beta_1 \in \Omega_{cv}^{q-1}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ è una soluzione di $d\beta = \alpha$ con $\pi_* \beta = 0$. \square

Fissiamo un buon ricoprimento finito $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di M mediante aperti di trivializzazione e sia $\mathcal{V} = \{V_i = \pi^{-1}(U_i)\}$ il ricoprimento immagine inversa di E_θ . Considereremo i complessi $(\mathcal{C}^*(\mathcal{U}, \Omega^*), D_M)$ e $(\mathcal{C}^*(\mathcal{V}, \Omega_{cv}^*), D_M)$ e, fissata una partizione dell'unità $\{\kappa_i\}$ su M subordinata ad \mathcal{U} e il suo pullback $\{\pi^* \kappa_i\}$ ad una partizione dell'unità su E_θ subordinata a \mathcal{V} , gli operatori d'omotopia

$$F_M : \mathcal{C}^*(\mathcal{U}, \Omega^*) \rightarrow \Omega^*(M) \quad \text{e} \quad F_{E_\theta} : \mathcal{C}^*(\mathcal{V}, \Omega_{cv}^*) \rightarrow \Omega_{cv}^*(E_\theta).$$

surgettività. La surgettività di (14.48) è banalmente verificata per $q < n$. Consideriamo dapprima l'omomorfismo $H_{cv}^n(E_\theta) \rightarrow H^0(M)$. Sia c una funzione localmente costante su M . Dico che possiamo, per ricorrenza, costruire una successione η_0, \dots, η_n tale che

$$(14.50) \quad \begin{cases} \eta_h \in \mathcal{C}^h(\mathcal{V}, \Omega_{cv}^{n-q}), \\ \epsilon(c) = \pi_* \eta_0, \\ d_{E_\theta} \eta_0 = 0, \\ d_{E_\theta} \eta_h + \delta \eta_{h-1} = 0 \quad \text{se } 1 \leq h \leq n. \end{cases}$$

L'esistenza di η_0 segue dalla validità dell'isomorfismo di Thom nel caso in cui la base sia uno spazio Euclideo. Le η_1, \dots, η_n si ottengono poi per ricorrenza utilizzando il Lemma 14.7.1. Osserviamo poi che

$$d_{E_0} \delta \eta_n = -\delta d_{E_0} \eta_n = \delta^2 \eta_{n-1} = 0,$$

e quindi $\delta(\eta_n) = 0$ perché le sue componenti sono funzioni localmente costanti con supporti che intersecano le fibre in sottoinsiemi compatti. Allora,

$$\begin{aligned} \eta &= F_{E_0}(\eta_0 + \dots + \eta_n) \quad \text{verifica} \\ d_{E_0} \eta &= F_{E_0}(D_{E_0}(\eta_0 + \dots + \eta_n)) = 0, \\ \pi_* \eta &= \pi_* F_{E_0}(u_0 + \dots + \eta_n) = \pi_* F_{E_0}(\eta_0) = F_M(\pi_* \eta_0) = F_M(\epsilon(c)) = c. \end{aligned}$$

In particolare abbiamo dimostrato che

Esiste una forma chiusa $\eta_\theta \in Z_{cv}^n(E_\theta)$, con supporto compatto rispetto alle fibre e tale che $\pi_ \eta_\theta = 1$.*

Ricordiamo che η_θ si dice una *forma di Thom* del fibrato θ e la sua classe di coomologia in $H_{cv}^n(E_\theta)$ la *classe di Thom* di θ .

L'esistenza della classe di Thom ci permette di completare la dimostrazione della surgettività di (14.48). Infatti, se $\alpha \in Z^q(M)$, allora $\eta_\theta \wedge \pi^* \alpha \in Z_{cv}(E_\theta)$ e $\pi_*(\eta_\theta \wedge \pi^* \alpha) = \alpha$.

Iniettività. Sia $f \in Z_{cv}^q(E_\theta)$ e supponiamo che $[\pi_* f] = 0$ in $H^{q-n}(M)$. Sia $u \in \Omega^{q-n-1}(M)$ tale che $du = \pi_* f$. Allora $f - d(\eta_\theta \wedge \pi^* u)$ è coomologa ad f in $H_{cv}^q(E_\theta)$ ed abbiamo

$$\pi_*(f - d(\eta_\theta \wedge \pi^* u)) = \pi_* f - \pi_*(\eta_\theta \wedge \pi^*(du)) = \pi_* f - \pi^*(\eta_\theta \wedge \pi_* f) = 0.$$

Basterà quindi dimostrare che ogni forma $f \in Z_{cv}^q(E_\theta)$ con $\pi_* f = 0$ è coomologa a zero in $H_{cv}^q(E_\theta)$. Sia quindi f una tale forma. Poiché l'isomorfismo di Thom vale per fibrati banali, possiamo costruire per ricorrenza, utilizzando in Lemma 14.7.1, una successione u_0, \dots, u_{q-1} con

$$(14.51) \quad \begin{cases} u_h \in \mathcal{C}^h(\mathcal{V}, \Omega_{cv}^{q-h-1}), \\ d_{E_0} u_0 = \epsilon(f), \\ d_{E_0} u_h + \delta u_{h-1} = 0, \quad \text{se } 1 \leq h \leq q-1. \end{cases}$$

Poiché

$$d_{E_0} \delta u_{q-1} = -\delta d_{E_0} u_{q-1} = \delta^2 u_{q-1} = 0,$$

è $\delta u_{q-1} \in \mathcal{C}^q(\mathcal{V}, \Omega_{cv}^0) \cap \mathcal{C}^q(\mathcal{V}, \mathbb{R}) = 0$. Otteniamo quindi

$$D_{E_0}(u_0 + \dots + u_{q-1}) = d_{E_0} u_0 = \epsilon(f)$$

e quindi è

$$\begin{cases} u = F_E(u_0 + \dots + u_{q-1}) \in \Omega_{cv}^{q-1}(E), \\ du = F_E(D_E(u_0 + \dots + u_{q-1})) = F_E(\epsilon(f)) = f. \end{cases}$$

Questo completa la dimostrazione dell'isomorfismo di Thom.

14.8. Fibrati in sfere associati a fibrati vettoriali

Sia $\theta = (E_\theta \xrightarrow{\pi_\theta} M)$ un fibrato vettoriale di rango n sulla varietà M . Fissiamo una metrica Riemanniana sulle fibre di θ e indichiamo con $\|\cdot\|_\theta$ la relativa norma sulle fibre di θ . Questo ci permette di definire il fibrato in sfere ξ , come il sottofibrato differenziabile di θ con spazio totale

$$(14.52) \quad E_\xi = \{v \in E_\theta \mid \|v\|_\theta = 1\}.$$

Ricordiamo che, se le fibre di θ sono orientate, risulta definita la sua *classe di Thom* $\eta_\theta \in H_{cv}^n(E_\theta)$, caratterizzata dal fatto che la restrizione alle fibre soddisfa

$$\int_{E_p} \eta_\theta = 1, \quad \forall p \in M.$$

In particolare, se sia la base M che le fibre di θ sono orientate, anche E_θ risulta orientata ed abbiamo

$$(14.53) \quad \int_M \alpha = \int_{E_\theta} \pi_\theta^* \alpha \wedge \eta_\theta, \quad \forall \alpha \in \mathcal{Q}_c^n(M).$$

In particolare, la classe di Thom η_θ è il duale di Poincaré chiuso in $H^n(E_\theta)$ della sezione nulla, che possiamo identificare ad M , del fibrato vettoriale θ . Fissiamo una forma, che indicheremo ancora con $\eta_\theta \in Z_{cv}^n(E_\theta)$, che rappresenti la classe di Thom. Possiamo scegliere η_θ con il supporto contenuto in $\{v \in E_\theta \mid \|v\|_\theta < 1\}$.

Poiché $\pi_\theta^* : H^n(M) \rightarrow H^n(E_\theta)$ è un isomorfismo, inverso dell'isomorfismo $H^n(E_\theta) \rightarrow H^n(M)$ indotto dalla restrizione, detto e_ξ il pullback su M della classe di Thom, poiché η_θ e $\pi_\theta^*(e_\xi) = \pi_\theta^*(\eta_\theta|_M)$ sono coomologhi in $H^n(E_\theta)$, esiste una forma $\psi_\xi \in \mathcal{Q}^{n-1}(E_\theta)$ tale che

$$(14.54) \quad \eta_\theta = \pi_\theta^*(e_\xi) + d\psi_\xi.$$

Per la formula di Stokes abbiamo

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{E_{0,p}} \eta_\theta = \int_{E_{0,p} \cap \{\|v\|_\theta \leq 1\}} \eta_\theta = \int_{E_{0,p} \cap \{\|v\|_\theta \leq 1\}} (\pi_\theta^*(e_\xi) + d\psi_\xi) \\ &= \int_{E_{0,p} \cap \{\|v\|_\theta \leq 1\}} d\psi_\xi = \int_{E_{\xi,p}} \psi_\xi. \end{aligned}$$

Poiché $\eta_\theta|_{E_\xi} = 0$, se indichiamo ancora con ψ_ξ la restrizione di ψ_ξ ad E_ξ , otteniamo che

$$\int_{E_{\xi,p}} \psi_\xi = 1, \quad \forall p \in M, \quad d\psi_\xi = -\pi_\xi^* e_\xi.$$

Abbiamo quindi ottenuto

TEOREMA 14.8.1. *Sia θ un fibrato vettoriale orientato, con base M , e ξ un fibrato in sfere ad esso associato. Allora la classe di Eulero di ξ è il pullback su M , identificata alla sezione nulla di θ , della classe di Thom di θ , o, in modo equivalente, la restrizione ad M del duale di Poincaré chiuso di M in E_θ . \square*

DEFINIZIONE 14.8.2. Chiamiamo *classe di Eulero* del fibrato vettoriale reale θ , ed indichiamo con e_θ , la classe di Eulero del suo fibrato in sfere associato.

Sia $\check{\theta}$ il sottofibrato differenziabile del fibrato vettoriale θ che ha spazio totale

$$(14.55) \quad \check{E}_\theta = \{v \in E_\theta \mid v \neq 0\}.$$

Consideriamo l'omomorfismo del fibrato $\check{\theta}$ sul fibrato in sfere ξ definito da

$$(14.56) \quad v : \check{E}_\theta \ni v \longrightarrow \frac{v}{\|v\|_\theta} \in E_\xi.$$

LEMMA 14.8.3. *L'applicazione*

$$(14.57) \quad \Theta : \Omega^*(\xi) \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow (\alpha, v^*\beta) \in \Omega^*(\check{\theta})$$

definisce un omomorfismo di complessi che, per passaggio al quoziente, dà un isomorfismo

$$(14.58) \quad [\Theta] : H^*(\xi) \longrightarrow H^*(\check{\theta})$$

in coomologia. □

14.9. Il numero di Eulero

Supponiamo che $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ sia un fibrato differenziabile orientato, localmente banale, con fibra S^{m-1} , su una varietà orientata, compatta e connessa M , di dimensione m . La classe di Eulero $[e_\xi]$ di ξ è un elemento di $H^m(M)$ ed è quindi completamente determinata dal numero

$$(14.59) \quad \chi(\xi) = \int_M e_\xi.$$

DEFINIZIONE 14.9.1. Chiamiamo $\chi(\xi)$ il numero di Eulero del fibrato ξ .

Sia $U \subset M$ un aperto di trivializzazione di ξ . Fissata la trivializzazione, una sezione s definita su un aperto U' contenuto in U determina un'applicazione $s_U \in \mathcal{C}^\infty(U', S^{m-1})$. Siano $p_0 \in U$ ed $s \in \Gamma_\xi(U \setminus \{p_0\}, E)$ una sezione su U , con una singolarità isolata nel punto p_0 . Possiamo supporre che $U \simeq \mathbb{R}^m$ per un diffeomorfismo descritto da una carta coordinata x , compatibile con l'orientazione di M e centrata in p_0 . Consideriamo l'applicazione $s_U \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}, S^{m-1})$ associata alla sezione s . Per ogni $r > 0$ otteniamo un'applicazione

$$\phi_r : S^{m-1} \ni x \longrightarrow s_U(rx) \in S^{m-1}.$$

Il grado di questa applicazione non dipende nè da r né dalla scelta della carta locale di trivializzazione e si dice il grado locale di s in p_0 . Se $\omega \in \Omega^{m-1}(S^{m-1})$ e $\int_{S^{m-1}} \omega = 1$, allora

$$\deg_{p_0} s = \int_{S^{m-1}} \phi_r^* \omega.$$

Se (e_ξ, ψ_ξ) è la forma di Eulero totale del fibrato ξ e W un intorno relativamente compatto di p_0 in U , con frontiera regolare di classe \mathcal{C}^∞ e diffeomorfo alla palla unitaria di \mathbb{R}^m , abbiamo

$$(14.60) \quad \deg_{p_0} s = \int_{\partial W} s^* \psi_\xi.$$

Supponiamo ora che M sia compatta e che vi sia una sezione s di ξ su M con singolarità isolate in un numero finito di punti p_1, \dots, p_k di M . È cioè $s \in$

$\Gamma_\xi(M \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, E)$. Per ogni $i = 1, \dots, k$ possiamo trovare un intorno U_i di p_i ed una forma $u_i \in \mathcal{Q}^{m-1}(U_i)$ tale che $du_i = e_\xi$ su U_i . Fissiamo degli aperti $W_i \subset U_i$, con chiusure \bar{W}_i due a due disgiunte, e frontiere di classe \mathcal{C}^∞ , ciascuno diffeomorfo ad una palla di \mathbb{R}^m e con $p_i \in W_i$. Siano poi $\kappa_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ con $\text{supp } \kappa_i \Subset U_i$ e $\kappa_i = 1$ su W_i . Allora $e_\xi - \sum_{i=1}^k d_M(\kappa_i u_i)$ è ancora una forma di Eulero ed è identicamente nulla su $\bigcup_{i=1}^k W_i$.

Utilizzando questa osservazione, possiamo fissare una forma di Eulero totale (e_ξ, ψ_ξ) con $e_\xi = 0$ su $\bigcup_{i=1}^k W_i$. Abbiamo allora, poiché $\pi \circ s(p) = p$ per ogni $p \neq p_1, \dots, p_k$:

$$\begin{aligned} \chi(\xi) &= \int_M e_\xi = \int_{M \setminus \bigcup_{i=1}^k W_i} e_\xi = \int_{M \setminus \bigcup_{i=1}^k W_i} (\pi \circ s)^* e_\xi \\ &= \int_{M \setminus \bigcup_{i=1}^k W_i} s^* \circ \pi^* e_\xi = - \int_{M \setminus \bigcup_{i=1}^k W_i} s^* d_E \psi_\xi \\ &= - \int_{M \setminus \bigcup_{i=1}^k W_i} d_M s^* \psi_\xi = \sum_{i=1}^k \int_{\partial W_i} s^* \psi = \sum_{i=1}^k \text{deg}_{p_i} s. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 14.9.2. Si può dimostrare¹⁰ che ogni fibrato in sfere orientato su una base compatta ammette una sezione globale con un numero finito di singolarità.

Abbiamo dimostrato il seguente

TEOREMA 14.9.3. *La caratteristica di Eulero di un fibrato differenziabile in sfere S^{m-1} , su una base compatta di dimensione m ed orientato è la somma dei gradi locali di una sua sezione che abbia un numero finito di singolarità.*

OSSERVAZIONE 14.9.4. In particolare, la caratteristica di Eulero è sempre un numero intero.

Sia $\theta = (E_\theta \xrightarrow{\pi_\theta} M)$ un fibrato vettoriale orientato, di rango m uguale alla dimensione della base M . Fissiamo una norma Riemanniana $\| \cdot \|_\theta$ sulle fibre di θ e consideriamo il sottofibrato in sfere ξ di θ , con spazio totale

$$E = \{v \in E_\theta \mid \|v\|_\theta = 1\}.$$

Per il Teorema ??, esistono sezioni $s \in \Gamma_\theta(M, E_\theta)$ trasversali alla sezione nulla. Una tale s ha un numero finito di zeri p_1, \dots, p_k in M . L'applicazione $s \rightarrow s/\|s\|_\theta$ è una sezione di ξ con un numero finito di singolarità negli zeri di s .

DEFINIZIONE 14.9.5. Chiamiamo *punto singolare* di una sezione $s \in \Gamma_\theta(M, E_\theta)$ un punto p_0 in cui $s(p_0) = 0$.

Chiamiamo *indice* di s in un suo punto singolare p_0 il grado locale dell'applicazione $p \rightarrow s(p)/\|s(p)\|_\theta$ in p_0 .

Per quanto osservato prima, abbiamo

¹⁰Vedi N.Steenrod: *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1951.

TEOREMA 14.9.6. *Sia $s \in \Gamma_\theta(M, E_\theta)$ una sezione di θ con un numero finito di singolarità. Allora la somma degli indici dei punti singolari di s è uguale alla caratteristica di Eulero di un qualsiasi fibrato in sfere associato ad θ .*

Osserviamo ancora che vale il

TEOREMA 14.9.7. *Sia θ un fibrato vettoriale orientato di rango m sulla varietà Riemanniana orientata compatta M , della stessa dimensione m . Se $s \in \Gamma_\theta(M, E_\theta)$ è una sezione con un numero finito di zeri, allora la classe di Eulero del fibrato in sfere associato ad E è il duale di Poincaré degli zeri di s , contati con le loro molteplicità.*

OSSERVAZIONE 14.9.8. Se θ è il fibrato tangente di una varietà compatta orientata M , vedremo nel paragrafo successivo che il numero di Eulero del fibrato in sfere associato è la caratteristica di Eulero-Poincaré di M .

ESEMPIO 14.9.9. Consideriamo la sfera $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$. La proiezione ortogonale sullo spazio tangente di S^m del campo di vettori $\partial/\partial x^0$ definisce un campo di vettori X su S^m , che si annulla in $\pm e_0$. Poiché gli indici di X in $\pm e_0$ sono uguali se la dimensione m è pari, opposti se m è dispari, ne segue che la caratteristica di Eulero-Poincaré di S^m è 2 se m è pari, zero se m è dispari.

OSSERVAZIONE 14.9.10. In generale, un fibrato in sfere orientato con fibra di dimensione pari ha classe di Eulero nulla.

ESEMPIO 14.9.11. Realizziamo il toro T^2 come il sottospazio

$$T^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

La proiezione ortogonale X sullo spazio tangente di T^2 del campo di vettori $\partial/\partial x$ si annulla nei quattro punti $(\pm 3, 0, 0)$ e $(\pm 1, 0, 0)$. Gli indici di X nelle coppie di punti $(-3, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$ e $(1, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$ sono opposti e quindi la caratteristica di Eulero-Poincaré del toro è nulla.

14.10. La caratteristica di Eulero

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m , i cui gruppi di coomologia di de Rham abbiano tutti dimensione finita.

DEFINIZIONE 14.10.1. La *caratteristica di Eulero* $\chi(M)$ di M è la somma alternata delle dimensioni dei suoi gruppi di coomologia

$$(14.61) \quad \chi(M) = \sum_q (-1)^q \dim_{\mathbb{R}} H^q(M).$$

OSSERVAZIONE 14.10.2. Per la dualità di Poincaré, se M è una varietà compatta orientabile di dimensione dispari, la sua caratteristica di Eulero è nulla.

Se M è una varietà complessa orientabile di dimensione pari, la sua caratteristica di Poincaré è un numero pari.

Gli spazi proiettivi reali di dimensione dispari sono orientabili ed hanno quindi caratteristica di Eulero zero.

Gli spazi proiettivi reali di dimensione pari sono varietà connesse e compatte non sono orientabili ed hanno tutti i gruppi di coomologia nulli in grado diverso. Hanno quindi caratteristica di Eulero 1.

Supponiamo che M sia una varietà connessa, compatta e orientata di dimensione m . Scegliamo una base $\{\omega_i\}$ di $H^*(M)$ come spazio vettoriale. Per la dualità di Poincaré, risulta determinata una base duale $\{\tau_i\}$ di $H^*(M)$ con

$$(14.62) \quad \int_M \omega_i \wedge \tau_j = \delta_{i,j}.$$

Siano $\pi_i : M \times M \rightarrow M$ le proiezioni sulla prima e sulla seconda componente, rispettivamente. Per la formula di Künneth,

$$(14.63) \quad H^*(M \times M) = H^*(M) \otimes H^*(M)$$

e $\{\pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j\}$ è una base di $H^*(M \times M)$.

LEMMA 14.10.3. *Sia $\{\omega_i\}$ una base di $H^*(M)$ formata da elementi omogenei. La sua base duale $\{\tau_i\}$ in $H^*(M)$ è ancora formata da elementi omogenei. Il duale di Poincaré della diagonale $\Delta_M = \{(p, p) \mid p \in M\}$ di $M \times M$ è*

$$(14.64) \quad \eta_{\Delta_M} = \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_i.$$

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che la base $\{\tau_i\}$ sia anch'essa formata da elementi omogenei è conseguenza del fatto che, per ogni $q = 0, \dots, m$, il gruppo $H^{m-q}(M)$ è duale di $H^q(M)$. Osserviamo ora che $\{(-1)^{(\deg \omega_i)(\deg \tau_i + \deg \omega_j)} \pi_1^* \tau_i \wedge \pi_2^* \omega_j\}$ è la base duale di $\{\pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j\}$ in $H^*(M \times M)$. Infatti

$$\begin{aligned} \int_{M \times M} \pi_1^* \tau_i \wedge \pi_2^* \omega_j \wedge \pi_1^* \omega_h \wedge \pi_2^* \tau_k &= \pm \int_{M \times M} \pi_1^* \omega_h \wedge \pi_1^* \tau_i \wedge \pi_2^* \omega_j \wedge \pi_2^* \tau_k \\ &= \pm \int_M \pi_1^* \omega_h \wedge \pi_1^* \tau_i \cdot \int_M \pi_2^* \omega_j \wedge \pi_2^* \tau_k \end{aligned}$$

è 0 se $(i, j) \neq (h, k)$. Per $(i, j) = (h, k)$ abbiamo, precisando i segni nelle uguaglianze precedenti,

$$\int_{M \times M} \pi_1^* \tau_i \wedge \pi_2^* \omega_j \wedge \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j = (-1)^{(\deg \omega_i)(\deg \tau_i + \deg \omega_j)}.$$

Il duale di Poincaré della diagonale Δ_M è una combinazione lineare degli elementi della base e si scrive quindi nella forma

$$\eta_{\Delta_M} = \sum_{i,j} c_{i,j} \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j.$$

Abbiamo, per la definizione del duale di Poincaré,

$$\begin{aligned} (-1)^{(\deg \omega_i)(\deg \tau_i + \deg \omega_j)} c_{i,j} &= \int_{M \times M} \pi_1^* \tau_i \wedge \pi_2^* \omega_j \wedge \eta_{\Delta_M} \\ &= \int_M \tau_i \wedge \omega_j = (-1)^{(\deg \tau_i)(\deg \omega_j)} \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Da questa identità ricaviamo che

$$c_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{\deg \omega_i} & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Questo completa la dimostrazione. \square

LEMMA 14.10.4. *Il fibrato normale della diagonale Δ_M di $M \times M$ è isomorfo al fibrato tangente di Δ_M ed al fibrato tangente di M .* \square

Indichiamo con $\nu(\Delta_M)$ il fibrato normale di Δ_M in $M \times M$. Ricordiamo che il duale di Poincaré di una sottovarietà compatta orientata e la classe di Thom di un suo intorno tubolare si rappresentano mediante la stessa forma. Inoltre, la restrizione della classe di Thom alla sezione nulla è la classe di Eulero del fibrato in sfere corrispondente. Abbiamo perciò, indicando con $\xi(T\Delta_M)$, $\xi(\nu(\Delta_M))$ e $\xi(TM)$ i fibrati in sfere di $T\Delta_M$, di $\nu(\Delta_M)$ e di TM , rispettivamente:

$$\int_{\Delta_M} \eta_{\Delta_M} = \int_{\Delta_M} e_{\xi(\nu(\Delta_M))} \int_{\Delta_M} e_{\xi(T\Delta_M)} = \int_M e_{\xi(TM)}$$

Poiché

$$(14.65) \quad \int_{\Delta_M} \eta_{\Delta_M} = \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \int_M \omega^i \wedge \tau_i = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{R}} H^i(M),$$

abbiamo ottenuto

TEOREMA 14.10.5. *Sia M una varietà compatta orientata. Allora il numero di Eulero del fibrato in sfere del fibrato tangente di M è uguale alla sua caratteristica di Eulero.* \square

Come corollario otteniamo

TEOREMA 14.10.6 (Teorema dell'indice di Hopf). *Se M è una varietà compatta orientata, ed $X \in \mathfrak{X}(M)$ un qualsiasi campo di vettori con un numero finito di punti critici¹¹, allora la somma degli indici di X nei suoi punti singolari è la caratteristica di Eulero di M .* \square

14.11. Caratteristica di Eulero di un complesso

Sia

$$(14.66) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V_0 & \xrightarrow{\lambda_1} & V_1 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & \cdots & \longrightarrow & V_{n-1} & \xrightarrow{\lambda_{n-1}} & V_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un complesso di spazi vettoriali di dimensione finita su un campo \mathbb{k} e di applicazioni \mathbb{k} -lineari. Indichiamo con $H^i = \ker \lambda_i / \lambda_{i-1}(V_{i-1})$ i suoi gruppi di coomologia. Allora

PROPOSIZIONE 14.11.1. *Vale l'uguaglianza*

$$(14.67) \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_{\mathbb{k}} H^i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_{\mathbb{k}} V_i.$$

¹¹Si dicono *critici* i punti in cui un campo di vettori su annulla.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \lambda_i + \dim_{\mathbb{K}} \lambda_i(V_i) = \dim_{\mathbb{K}} V_i.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_{\mathbb{K}} V_i &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (\dim_{\mathbb{K}} \ker \lambda_i + \dim_{\mathbb{K}} \lambda_i(V_i)) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (\dim_{\mathbb{K}} \ker \lambda_i - \dim_{\mathbb{K}} \lambda_i(V_{i-1})) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_{\mathbb{K}} H^i. \end{aligned}$$

□

Utilizzando il Teorema 14.2.4, questa proposizione ci permette di calcolare la caratteristica di Eulero delle varietà che ammettono un buon ricoprimento finito.

ESEMPIO 14.11.2. Sia $m \geq 2$ e sia M la varietà che si ottiene togliendo n punti da \mathbb{R}^m . Calcoliamo la caratteristica di Eulero di M a partire da un buon ricoprimento finito. Possiamo ottenere questo ricoprimento nel modo seguente. Innanzi tutto, a meno di un diffeomorfismo, possiamo supporre che

$$M = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x \neq (i, 0, \dots, 0), i = 1, \dots, n\}.$$

Costruiamo allora un buon ricoprimento di M utilizzando gli aperti

$$\begin{cases} U_1 = \{x^1 < 1\}, U_2 = \{1 < x^1 < 2\}, \dots, U_n = \{n-1 < x^1 < n\}, U_{n+1} = \{x^1 > n\}, \\ U_+^2 = \{x^2 > 0\}, U_-^2 = \{x^2 < 0\}, \\ \dots \\ U_+^m = \{x^m > 0\}, U_-^m = \{x^m < 0\}. \end{cases}$$

Poiché si ottengono intersezioni non nulle soltanto intersecando aperti che siano stati elencati in righe diverse, la dimensione d_h di $\mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ è

$$\begin{cases} d_0 = (n+1) + 2(m-1) = n + 2m - 1, \\ d_h = 2^h \binom{m-1}{h} (n+1) + 2^{h+1} \binom{m-1}{h+1} & \text{se } 1 \leq h \leq m-2, \\ d_{m-1} = 2^{m-1} (n+1), \\ 0 & \text{se } h \geq m. \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \chi(M) &= n + 2m - 1 + (n+1) \sum_{h=1}^{m-1} 2^h (-1)^h \binom{m-1}{h} - \sum_{h=1}^{m-2} (-1)^{h+1} 2^{h+1} \binom{m-1}{h+1} \\ &= n + 2m - 1 + n[(-1)^{m-1} - 1] - 2(m-1) = \begin{cases} 1 - n & \text{se } m \text{ è pari,} \\ 1 + n & \text{se } m \text{ è dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nel caso $m = 2$, poiché $\chi(M) = 1 - \dim_{\mathbb{R}} H^1(M)$, otteniamo che $H^1(M) = \mathbb{R}^n$. In generale, abbiamo

$$H^q(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, \\ \mathbb{R}^n & \text{se } q = m-1, \\ 0 & \text{se } q \neq 0, m-1. \end{cases}$$

Fasci e coomologia di Čech

15.1. Fasci d'insiemi e morfismi di fasci

DEFINIZIONE 15.1.1. Un *fascio d'insiemi* è un fibrato topologico $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ in cui la proiezione π sia un omeomorfismo locale.

Lo spazio X è la *base*, \mathcal{S} lo *spazio totale* o *étalé* e π la *proiezione sulla base* del fascio.

La fibra $\mathcal{S}_x = \pi^{-1}(x)$ si dice la *spiga* su $x \in X$, o l'insieme dei *germi* di \mathcal{S} in x .

Le spighe \mathcal{S}_x sono sottospazi discreti di \mathcal{S} e sono chiuse se e soltanto se $\pi(\mathcal{S}) \subset X$ è uno spazio T_1 . Infatti la proiezione π è aperta e quindi $\pi(\mathcal{S})$ ha la topologia quoziente, cioè la più fine tra quelle che rendano la proiezione π continua.

Quando ciò non crei confusione, si usa indicare il fascio $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ con la stessa lettera \mathcal{S} che denota il suo spazio totale.

ESEMPIO 15.1.2. Siano X uno spazio topologico ed Y uno spazio discreto. Allora $X \times Y \xrightarrow{\pi_X} X$, con $\pi_X(x, y) = x$, è un fascio d'insiemi, che si dice il *fascio costante d'insieme* Y .

ESEMPIO 15.1.3. Sia $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ un rivestimento di uno spazio topologico X ed \mathcal{S} un aperto di \tilde{X} . Allora $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ è un fascio d'insiemi di base X .

DEFINIZIONE 15.1.4. Se $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ ed $\mathcal{S}' \xrightarrow{\pi'} X'$ sono due fasci d'insiemi, un morfismo di fibrati

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{S}' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X & \xrightarrow{\phi} & X' \end{array}$$

si dice un *morfismo di fasci*.

Quando $X = X'$ e $\phi = \text{id}_X$, chiameremo Φ un *morfismo di fibrati su* X .

DEFINIZIONE 15.1.5. Se $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ è un fascio su X ed Y un sottospazio di X , allora $\pi^{-1}(Y)$, che indicheremo con $\mathcal{S}|_Y$, è lo spazio totale del fascio $\mathcal{S}|_Y \xrightarrow{\pi} Y$, di base Y , che chiamiamo la *restrizione ad* Y del fascio \mathcal{S} .

Più in generale,

LEMMA 15.1.6. Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio d'insiemi su X , Y uno spazio topologico ed $f : Y \rightarrow X$ un'applicazione continua. Allora

$$(15.1) \quad f^* \mathcal{S} = \{(q, \xi) \in Y \times \mathcal{S} \mid f(q) = \pi(\xi)\},$$

$$(15.2) \quad \varpi(q, \xi) = q, \quad \forall (q, \xi) \in f^* \mathcal{S},$$

definisce un fascio $f^* \mathcal{S} \xrightarrow{\varpi} Y$ di base Y .

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo dimostrare che ϖ è un omeomorfismo locale. Fissiamo un punto $(q_0, \xi_0) \in f^* \mathcal{S}$. Poiché \mathcal{S} è un fascio, esistono un intorno aperto A di ξ_0 in \mathcal{S} ed un intorno aperto U di $p_0 = f(q_0)$ in X tali che la restrizione $\pi|_A : A \rightarrow U$ sia un omeomorfismo. Poiché f è continua, possiamo trovare un intorno aperto V di q_0 in Y con $f(V) \subset U$. Allora $D = (V \times A) \cap f^* \mathcal{S}$ è un aperto di $f^* \mathcal{S}$ e l'applicazione

$$V \ni q \rightarrow (q, \pi|_A^{-1}(f(q))) \in D$$

è un'applicazione continua che inverte la $\varpi|_D : D \ni (q, \xi) \rightarrow q \in V \subset Y$. La dimostrazione è completa. \square

DEFINIZIONE 15.1.7. Il fascio $f^* \mathcal{S} \xrightarrow{\varpi} Y$ definito nel Lemma 15.1.6 si dice il *fascio immagine inversa* di $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ mediante $f \in \mathcal{C}(Y, X)$.

DEFINIZIONE 15.1.8. Un sottospazio \mathcal{T} di \mathcal{S} definisce un *sottofascio* di $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ se $\mathcal{T} \xrightarrow{\pi} X$ è ancora un fascio su X .

LEMMA 15.1.9. Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio su X . Condizione necessaria e sufficiente affinché un sottospazio \mathcal{T} di \mathcal{S} sia lo spazio totale di un sottofascio di $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ è che \mathcal{T} sia un sottospazio aperto di \mathcal{S} . \square

DEFINIZIONE 15.1.10. Se $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ ed $\mathcal{S}' \xrightarrow{\pi'} X$ sono due fasci su X , il loro *prodotto fibrato*, o *somma di Whitney*, è il fascio d'insiemi su X che ha come spazio totale

$$(15.3) \quad \mathcal{S} \oplus_X \mathcal{S}' = \{(\xi, \xi') \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}' \mid \pi(\xi) = \pi(\xi')\},$$

con proiezione definita da

$$(15.4) \quad \varpi : \mathcal{S} \oplus_X \mathcal{S}' \ni (\xi, \xi') \rightarrow \pi(\xi) = \pi'(\xi') \in X.$$

Osserviamo che $\varpi(\mathcal{S} \oplus_X \mathcal{S}') = \pi(\mathcal{S}) \cap \pi'(\mathcal{S}')$.

Questa definizione si estende ad un qualsiasi numero finito di fasci d'insiemi su X . In particolare, indicheremo con \mathcal{S}^p la somma di Whitney di p copie del fascio \mathcal{S} :

$$\mathcal{S}^p = \underbrace{\mathcal{S} \oplus_X \cdots \oplus_X \mathcal{S}}_{p \text{ volte}}.$$

DEFINIZIONE 15.1.11. Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio d'insiemi su X ed Y un sottospazio di X .

Una *sezione continua* di \mathcal{S} su Y è un'applicazione $s \in \mathcal{C}(Y, \mathcal{S})$ tale che

$$\pi \circ s = \text{id}_Y.$$

Indicheremo con $\mathcal{S}(Y)$, l'insieme di tutte le sezioni continue su $Y \subset X$ del fascio \mathcal{S} .

Se $s \in \mathcal{S}(Y)$ ed $y \in Y$, il valore di s in y si indica con s_y , od $s_{(y)}$, e si dice il *germe* di s in y .

PROPOSIZIONE 15.1.12. Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio d'insiemi su X .

- (1) Se U è un aperto di X , ogni $s \in \mathcal{S}(U)$ definisce un omeomorfismo di U su un aperto $s(U)$ di \mathcal{S} .
- (2) La famiglia di aperti $\{s(U) \mid U^{\text{aperto}} \subset X, s \in \mathcal{S}(U)\}$ è una base della topologia di \mathcal{S} .
- (3) Per ogni $\xi \in \mathcal{S}$ esiste un intorno aperto U di $\pi(\xi)$ in X ed una $s \in \mathcal{S}(U)$ tale che $\xi = s_{(\pi(\xi))}$.
- (4) Se $Y \subset X$ ed $s, s' \in \mathcal{S}(Y)$, allora l'insieme

$$(15.5) \quad \{y \in Y \mid s_{(y)} = s'_{(y)}\}$$

è un aperto di Y . □

DEFINIZIONE 15.1.13. Un fascio d'insiemi $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ si dice di Hausdorff se il suo spazio totale \mathcal{S} è di Hausdorff.

PROPOSIZIONE 15.1.14 (Principio di continuazione analitica). Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio di Hausdorff. Se $Y \subset X$, $s, s' \in \mathcal{S}(Y)$ ed $s_{(y_0)} = s'_{(y_0)}$ in un punto $y_0 \in Y$, allora $s_{(y)} = s'_{(y)}$ per ogni punto y della componente connessa di y_0 in Y .

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio di Hausdorff, l'insieme dei punti in cui i germi di due sezioni in $\mathcal{S}(Y)$ coincidono è aperto e chiuso in Y . □

15.2. Prefasci d'insiemi

DEFINIZIONE 15.2.1. Sia X uno spazio topologico. Un *prefascio d'insiemi* su X è un funtore controvariante \mathbb{S} tra la categoria $\text{Ap}(X)$ degli aperti di X , con i morfismi d'inclusione, e la categoria \mathfrak{C} degli insiemi, con i morfismi di applicazioni tra insiemi.

Questo significa assegnare una corrispondenza

$$(15.6) \quad \mathbb{S} : \text{Ap}(X) \ni U \longrightarrow \mathbb{S}(U) \in \mathfrak{C},$$

e per ogni coppia di aperti $U \subset V$ di X un'applicazione di restrizione $\rho_U^V : \mathbb{S}(V) \rightarrow \mathbb{S}(U)$ tale che

$$(15.7) \quad \begin{cases} \rho_U^U = \text{id}_{\mathbb{S}(U)}, & \forall U \in \text{Ap}(X), \\ \rho_U^V \circ \rho_V^W = \rho_U^W, & \forall U, V, W \in \text{Ap}(X) \text{ con } U \subset V \subset W. \end{cases}$$

Indicheremo il prefascio (X, \mathbb{S}, ρ) con la sola lettera \mathbb{S} , ove ciò non provochi confusione.

DEFINIZIONE 15.2.2. Siano (X, \mathbb{S}, ρ) ed (X, \mathbb{S}', ρ') due prefasci d'insiemi sullo stesso spazio topologico X . Un morfismo di prefasci $\Phi : (X, \mathbb{S}, \rho) \rightarrow (X, \mathbb{S}', \rho')$ è il

dato, per ogni aperto U di X , di un'applicazione $\Phi_U : \mathbb{S}(U) \rightarrow \mathbb{S}'(U)$, tale che, per ogni coppia di aperti $U \subset V \subset X$ vi sia un diagramma commutativo

$$(15.8) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{S}(V) & \xrightarrow{\Phi_V} & \mathbb{S}'(V) \\ \rho_U^V \downarrow & & \downarrow \rho_U^V \\ \mathbb{S}(U) & \xrightarrow{\Phi_U} & \mathbb{S}'(U). \end{array}$$

LEMMA 15.2.3. Se $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ è un fascio d'insiemi su X , allora la corrispondenza

$$(15.9) \quad \text{Ap}(X) \ni U \longrightarrow \mathcal{S}(U)$$

è un prefascio d'insiemi su X . \square

DEFINIZIONE 15.2.4. Il prefascio $U \rightarrow \mathcal{S}(U)$ si dice *associato* al fascio $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$. Lo indicheremo con $\Gamma\mathcal{S}$.

ESEMPIO 15.2.5. Siano X, Y due spazi topologici. Associamo ad ogni aperto U di X lo spazio $\mathcal{C}(U, Y)$ delle applicazioni continue di U in Y . Con le applicazioni naturali di restrizione, questo si dice il *prefascio delle applicazioni continue di X in Y* .

ESEMPIO 15.2.6. Siano M, N due varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^ω e k un ordinale con $0 \leq k \leq \omega$. Facciamo corrispondere ad ogni aperto $U \subset M$ l'insieme $\mathcal{C}^k(U, N)$ delle applicazioni di classe \mathcal{C}^k da U in N . Con le restrizioni naturali, otteniamo il *prefascio delle applicazioni di classe \mathcal{C}^k di M in N* .

ESEMPIO 15.2.7. Se M ed N sono varietà complesse, indichiamo con $\mathcal{O}(M, N)$, per ogni aperto U di M , l'insieme delle applicazioni olomorfe di U in N . Con le restrizioni naturali, questo è il *prefascio delle applicazioni olomorfe di M in N* .

ESEMPIO 15.2.8. Sia X uno spazio topologico ed Y un insieme. Se poniamo $\mathcal{S}(U) = Y$ per ogni aperto U di X e $\rho_U^V = \text{id}_Y$ per ogni coppia di aperti $U \subset V$ di X , otteniamo il *prefascio delle applicazioni costanti di X in Y* .

15.3. Fascio associato ad un prefascio e prefasci canonici

Dato un prefascio (X, \mathbb{S}, ρ) possiamo definire, per ogni punto $p \in X$, il limite diretto

$$(15.10) \quad \tilde{\mathbb{S}}_p = \varinjlim_{U \text{ aperto } \ni p} \mathbb{S}(U).$$

Esso è definito come il quoziente dell'unione disgiunta $\bigsqcup_{U \text{ aperto } \ni p} \mathbb{S}(U)$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$\mathbb{S}(U_1) \ni s_1 \sim s_2 \in \mathbb{S}(U_2) \iff \exists p \in U_3^{\text{aperto}} \subset U_1 \cap U_2 \text{ tale che } r_{U_3}^{U_1}(s_1) = r_{U_3}^{U_2}(s_2).$$

DEFINIZIONE 15.3.1. Chiamiamo $\tilde{\mathbb{S}}_p$ l'insieme, o la *spiga*, dei *germi* di sezioni di \mathbb{S} in p .

Se U è un aperto di X , $p \in U$ ed $s \in \mathbb{S}(U)$, indichiamo con $s_{(p)} = \rho_p^U(s)$ il *germe definito da s in p* .

Dato un prefascio (X, \mathbb{S}, ρ) , siano

$$(15.11) \quad \tilde{\mathbb{S}} = \bigsqcup_{p \in X} \tilde{\mathbb{S}}_p, \quad \pi : \tilde{\mathbb{S}} \longrightarrow X \text{ con } \pi(\tilde{\mathbb{S}}_p) = \{p\}.$$

PROPOSIZIONE 15.3.2. Sia (X, \mathbb{S}, ρ) è un prefascio, ed $\tilde{\mathbb{S}} \xrightarrow{\pi} X$ sia definita dalla (15.11). Consideriamo su $\tilde{\mathbb{S}}$ la topologia che ha come base degli aperti gli

$$A(U, s) = \{s_{(p)} \mid p \in U\}, \quad \text{con } U \in \text{Ap}(X), s \in \mathbb{S}(U).$$

Allora $\tilde{\mathbb{S}} \xrightarrow{\pi} X$ è un fascio d'insiemi su X . □

DEFINIZIONE 15.3.3. Il fascio $\tilde{\mathbb{S}} \xrightarrow{\pi} X$ definito dalla (15.11) si dice *associato al prefascio* (X, \mathbb{S}, ρ) .

Se $\tilde{\mathbb{S}}$ è il fascio associato al prefascio \mathbb{S} , abbiamo un morfismo canonico di prefasci

$$(15.12) \quad \Phi_U : \mathbb{S}(U) \longrightarrow \tilde{\mathbb{S}}(U)$$

che fa corrispondere ad $s \in \mathbb{S}(U)$ la sezione $U \ni p \longrightarrow s_{(p)} \in \tilde{\mathbb{S}}_p \subset \tilde{\mathbb{S}}$.

OSSERVAZIONE 15.3.4. Non è detto, in generale, che questo morfismo sia iniettivo o surgettivo.

Ad esempio, se \mathbb{S} è il prefascio delle applicazioni costanti di X in un insieme Y con almeno due elementi, ed X contiene un aperto U non connesso, allora Φ_U è iniettiva, ma non surgettiva. Infatti $\tilde{\mathbb{S}}$ è in questo caso il prefascio delle applicazioni *localmente* costanti di X in Y e quindi $\tilde{\mathbb{S}}(U)$ contiene applicazioni non costanti, mentre $\mathbb{S}(U)$ consiste delle sole applicazioni costanti.

Per costruire un esempio in cui Φ non sia iniettiva, consideriamo uno spazio X che contenga almeno due punti ed in cui i punti siano chiusi e fissiamo una coppia d'insiemi Y, Z con $Y \subsetneq Z$. Fissato un elemento $y_0 \in Y$, poniamo

$$\mathbb{S}(U) = \begin{cases} Z & \text{se } U = X, \\ Y & \text{se } U^{\text{aperto}} \subsetneq X, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_U^X(z) = y_0 & \forall z \in Z, \quad \forall U^{\text{aperto}} \subsetneq X, \\ \rho_U^Y(y) = y & \forall y \in Y, \quad \forall U^{\text{aperto}} \subsetneq V^{\text{aperto}} \subsetneq X. \end{cases}$$

Il fascio associato è il fascio costante $X \times Y \xrightarrow{\pi_X} X$. La $\Phi_X : \mathbb{S}(X) \rightarrow \tilde{\mathbb{S}}(X)$ non è iniettiva perché associa ad ogni elemento di $\mathbb{S}(X) = Z$ la sezione costante $s_{(p)} = y_0$ per ogni $p \in X$.

DEFINIZIONE 15.3.5. Un prefascio (X, \mathbb{S}, ρ) si dice *canonico* se, per ogni aperto U di X , la $\Phi_U : \mathbb{S}(U) \rightarrow \tilde{\mathbb{S}}(U)$ è bigettiva.

PROPOSIZIONE 15.3.6. Condizione necessaria e sufficiente affinché un prefascio (X, \mathbb{S}, ρ) sia canonico è che valgano le due proprietà:

- (S1) Se $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ è una qualsiasi famiglia di aperti di X , $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, ed $s, s' \in \mathbb{S}(U)$ soddisfano $r_{U_i}^U(s) = r_{U_i}^U(s')$ per ogni $i \in I$, allora $s = s'$;
- (S2) Se $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ è una qualsiasi famiglia di aperti di X , $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, per ogni famiglia di $s_i \in \mathbb{S}(U_i)$, che soddisfino $r_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = r_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$ per ogni $i, j \in I$, esiste un $s \in \mathbb{S}(U)$ tale che $r_{U_i}^U(s) = s_i$ per ogni $i \in I$.

DIMOSTRAZIONE. *Le condizioni (S1) ed (S2) sono necessarie.* Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia di aperti di X , $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ e supponiamo che $s, s' \in \mathbb{S}(U)$ soddisfino $r_{U_i}^U(s) = r_{U_i}^U(s')$ per ogni $i \in I$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} (\Phi_U(s))|_{U_i} &= \Phi_{U_i}(r_{U_i}^U(s)) = \Phi_{U_i}(r_{U_i}^U(s')) = (\Phi_U(s'))|_{U_i}, \quad \forall i \in I \\ &\implies (\Phi_U(s)) = (\Phi_U(s')) \end{aligned}$$

e questo implica che $s = s'$, perché Φ_U è, per ipotesi, iniettiva.

Supponiamo ora che siano assegnate $s_i \in \mathbb{S}(U_i)$, per $i \in I$, e che queste soddisfino $r_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = r_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$ per ogni $i, j \in I$. Le $\Phi_{U_i}(s_i)$ soddisfano allora

$$\Phi_{U_i}(s_i)|_{U_i \cap U_j} = \Phi_{U_i \cap U_j}(r_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i)) = \Phi_{U_i \cap U_j}(r_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)) = \Phi_{U_j}(s_j)|_{U_i \cap U_j}, \quad \forall i, j \in I.$$

Esiste quindi un'unica sezione globale $\sigma \in \tilde{\mathbb{S}}(U)$ tale che $\Phi_{U_i}(s_i) = \sigma|_{U_i}$ per ogni $i \in I$. Poiché ϕ_U è surgettiva, $\sigma = \Phi_U(s)$ per una $s \in \mathbb{S}(U)$. Da

$$\Phi_{U_i}(r_{U_i}^U(s)) = \Phi_U(s)|_{U_i} = \sigma|_{U_i} = \Phi_{U_i}(s_i), \quad \forall i \in I$$

otteniamo che $r_{U_i}^U(s) = s_i$, per l'iniettività delle Φ_{U_i} .

Le condizioni (S1) ed (S2) sono sufficienti. Sia U un qualsiasi aperto di X . Se $s, s' \in \mathbb{S}(U)$ e $\Phi_U(s) = \Phi_U(s')$, allora $s_{(p)} = s'_{(p)}$ per ogni $p \in U$. Ciò significa che per ogni $p \in U$ esiste un intorno aperto U_p di p in U tale che $r_{U_p}^U(s) = r_{U_p}^U(s')$. Per la condizione (S1) questo implica che $s = s'$. Quindi $\Phi_U : \mathbb{S}(U) \rightarrow \tilde{\mathbb{S}}(U)$ è iniettiva.

Sia ora $\sigma \in \tilde{\mathbb{S}}(U)$. Per ogni punto $p \in U$ esistono un intorno aperto U_p di p in U ed una $s_p \in \mathbb{S}(U_p)$ tali che $\Phi_{U_p}(s_p) = \sigma|_{U_p}$. Abbiamo poi

$$\Phi_{U_{p_1} \cap U_{p_2}}(r_{U_{p_1} \cap U_{p_2}}^{U_{p_1}}(s_{p_1})) = \sigma|_{U_{p_1} \cap U_{p_2}} = \Phi_{U_{p_1} \cap U_{p_2}}(r_{U_{p_1} \cap U_{p_2}}^{U_{p_2}}(s_{p_2})).$$

Abbiamo già dimostrato che le $\Phi_{U_{p_1} \cap U_{p_2}}$ sono iniettive. Quindi

$$r_{U_{p_1} \cap U_{p_2}}^{U_{p_1}}(s_{p_1}) = r_{U_{p_1} \cap U_{p_2}}^{U_{p_2}}(s_{p_2}), \quad \forall p_1, p_2 \in U.$$

Per (S2) esiste allora una $s \in \mathbb{S}(U)$ tale che $r_{U_p}^U(s) = s_p$ per ogni $p \in U$. Abbiamo allora $\Phi_U(s) = \sigma$. Abbiamo così dimostrato anche la surgettività di Φ_U . La dimostrazione è completa. \square

COROLLARIO 15.3.7. *Il prefascio $\Gamma\mathcal{S}$ associato ad un fascio \mathcal{S} su X è sempre canonico.*

15.4. Il fascio immagine diretta

Se (X, \mathbb{S}, ρ) è un prefascio sullo spazio topologico X , Y è un altro spazio topologico ed $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua, definiamo un prefascio su Y ponendo

$$(15.13) \quad f_*\mathbb{S}(V) = \mathbb{S}(f^{-1}(V)), \quad \forall V \in \text{Ap}(Y),$$

$$(15.14) \quad (f_*\rho)_{V_1}^{V_2}(s) = \rho_{f^{-1}(V_1)}^{f^{-1}(V_2)}(s) \text{ se } V_1, V_2 \in \text{Ap}(Y), V_1 \subset V_2, s \in f_*\mathbb{S}(V_2).$$

DEFINIZIONE 15.4.1. Il prefascio $(Y, f_*\mathbb{S}, f_*\rho)$ si dice *immagine diretta* di (X, \mathbb{S}, ρ) mediante l'applicazione continua f .

PROPOSIZIONE 15.4.2. *L'immagine diretta di un fascio canonico è un fascio canonico.* \square

DEFINIZIONE 15.4.3. Se \mathcal{S} è un fascio sullo spazio topologico X ed $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua a valori in uno spazio topologico Y , il fascio $f_*\tilde{\Gamma}\mathcal{S}$ si indica con $f_*\mathcal{S}$ e si dice *immagine diretta* del fascio \mathcal{S} mediante l'applicazione continua f .

OSSERVAZIONE 15.4.4. Un germe $\tau_{(q)}$ nel fascio immagine diretta $f_*\mathcal{S}$ è definito da una sezione $s \in \mathcal{S}(f^{-1}(V))$ per un intorno aperto V di q in Y . In particolare, per ogni $p \in f^{-1}(q)$ vi è un germe $s_{(p)}$ di \mathcal{S} in p che corrisponde a τ_q . In particolare, abbiamo un'inclusione naturale $(f_*\mathcal{S})_{q_0} \hookrightarrow \bigsqcup_{p \in f^{-1}(q_0)} \mathcal{S}_p$ e, per ogni $p_0 \in f^{-1}(q_0)$, la f definisce un'applicazione naturale di germi

$$\hat{f}_{p_0} : (f_*\mathcal{S})_{q_0} \longrightarrow \mathcal{S}_{p_0}$$

che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} (f_*\mathcal{S})_{q_0} & \xrightarrow{\hat{f}_{p_0}} & \mathcal{S}_{p_0} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \bigsqcup_{p \in f^{-1}(q_0)} \mathcal{S}_p & \end{array}$$

in cui la freccia a destra è l'inclusione naturale $\mathcal{S}_{p_0} \hookrightarrow \bigsqcup_{p \in f^{-1}(q_0)} \mathcal{S}_p$.

PROPOSIZIONE 15.4.5. *Siano $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ due fasci sulla stessa base X , $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ un morfismo di fasci. Siano poi Y, Z spazi topologici ed $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ applicazioni continue. Allora:*

(1) *Risulta definito un morfismo di fasci*

$$(15.15) \quad f_*\Phi : f_*\mathcal{S} \longrightarrow f_*\mathcal{S}',$$

in modo tale che

$$(15.16) \quad f_*\Phi(f_*\mathcal{S})(V) = (\Phi(\mathcal{S}))(f^{-1}(V)) = (f_*\mathcal{S}')(V), \quad \forall V \in \text{Ap}(Y).$$

(2) *Abbiamo*

$$(15.17) \quad (g \circ f)_*\mathcal{S} = g_*(f_*\mathcal{S}).$$

(3) *Abbiamo*

$$(15.18) \quad (g \circ f)_*\Phi = g_*(f_*\Phi).$$

15.5. Fasci dotati di struttura algebrica

DEFINIZIONE 15.5.1. Un *fascio di gruppi abeliani* è un fascio d'insiemi $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$, su ogni spiga \mathcal{S}_x del quale sia assegnata una struttura di gruppo abeliano, in modo tale che la:

$$(15.19) \quad \mathcal{S} \oplus_X \mathcal{S} \ni (\xi_1, \xi_2) \rightarrow \xi_1 - \xi_2 \in \mathcal{S}$$

sia un morfismo di fasci (basta cioè che sia un'applicazione continua tra gli spazi étalé).

Indichiamo con $0_{(p)}$ l'elemento neutro di \mathcal{S}_p e con $0 : X \rightarrow \mathcal{S}$ la *sezione nulla*, che associa ad ogni $p \in X$ l'elemento neutro $0_{(p)}$ di \mathcal{S}_p . Chiaramente $0 \in \mathcal{S}(X)$ è una sezione continua.

Osserviamo che le spighe \mathcal{S}_p di un fascio di gruppi abeliani contengono per ogni p l'elemento neutro e quindi sono non vuote.

Per ogni sottospazio Y di X , l'insieme $\mathcal{S}(Y)$ delle sezioni continue di \mathcal{S} su Y è in modo naturale un gruppo abeliano, con l'operazione:

$$(15.20) \quad \begin{aligned} \mathcal{S}(Y) \times \mathcal{S}(Y) \ni (s_1, s_2) &\rightarrow s_1 - s_2 \in \mathcal{S}(Y) \\ \text{ove } (s_1 - s_2)_{(p)} &= s_{1,(p)} - s_{2,(p)} \quad \forall p \in Y. \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 15.5.2. Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio di gruppi abeliani, Y un sottospazio di X ed $s \in \mathcal{S}(Y)$. Il *supporto* di s è l'insieme

$$(15.21) \quad \text{supp } s = \{p \in Y \mid s_{(p)} \neq 0_{(p)}\}.$$

OSSERVAZIONE 15.5.3. Il supporto di una sezione $s \in \mathcal{S}(Y)$ è un chiuso di Y , perché il luogo dei punti in cui $s_{(p)} = 0_{(p)}$ è aperto.

DEFINIZIONE 15.5.4. Chiamiamo *supporto* del fascio di gruppi abeliani \mathcal{S} l'insieme:

$$(15.22) \quad \text{supp } \mathcal{S} = \{x \in X \mid \mathcal{S}_x \neq \{0_{(p)}\}\}.$$

DEFINIZIONE 15.5.5. Un fascio \mathcal{S} di gruppi abeliani su X si dice *un fascio di anelli* se è assegnato un morfismo di fasci:

$$(15.23) \quad \mathcal{S} \oplus_X \mathcal{S} \ni (\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow \sigma_1 \sigma_2 \in \mathcal{S}$$

che definisca, su ogni spiga \mathcal{S}_x , insieme alla struttura di gruppo abeliano già assegnata, una struttura di anello.

Supporremo sempre nel seguito che tale anello sia commutativo e unitario e che l'applicazione $1 : X \rightarrow \mathcal{S}$, che associa ad ogni $p \in X$ l'unità $1_{(p)}$ dell'anello \mathcal{S}_p , sia continua.

PROPOSIZIONE 15.5.6. *Sia \mathcal{S} un fascio di anelli su X . Allora:*

$$(15.24) \quad \text{supp } \mathcal{S} = \{x \in X \mid 1_{(p)} \neq 0_{(p)}\}.$$

In particolare, il supporto di un fascio di anelli su X è chiuso.

DEFINIZIONE 15.5.7. Sia \mathcal{A} un fascio di anelli su X . Un *fascio di \mathcal{A} -moduli* su X è un fascio di gruppi abeliani per cui sia definito un morfismo di fasci:

$$(15.25) \quad \mathcal{A} \oplus_X \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

che definisca, su ciascuna spiga \mathcal{S}_x , una struttura di \mathcal{A}_x -modulo.

In modo del tutto analogo al caso della categoria dei gruppi abeliani, per ogni aperto U di X le sezioni di $\mathcal{A}(U)$ formano un anello e quelle di $\mathcal{S}(U)$ un $\mathcal{A}(U)$ -modulo.

Se $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$ sono fasci di \mathcal{A} -moduli, anche $\mathcal{S}_1 \oplus_X \dots \oplus_X \mathcal{S}_m$ è un fascio di \mathcal{A} -moduli, e in modo naturale, si può definire anche il fascio di \mathcal{A} -moduli $\mathcal{S}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{S}_m$.

Se $\mathcal{S}_i = \mathcal{A}$ per $i = 1, \dots, m$, scriveremo $\mathcal{S}_1 \oplus_X \dots \oplus_X \mathcal{S}_m = \mathcal{A}^m$.

15.6. Morfismi di \mathcal{A} -moduli e fasci quozienti

Sia \mathcal{A} un fascio di anelli su X , che considereremo fissato una volta per tutte.

DEFINIZIONE 15.6.1. Dati due fasci di \mathcal{A} -moduli $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$, un morfismo di fasci:

$$(15.26) \quad \Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$$

si dice un *morfismo di \mathcal{A} -moduli* se, per ogni $x \in X$, l'applicazione tra le spighe:

$$(15.27) \quad \Phi_x : \mathcal{S}_x \rightarrow \mathcal{S}'_x$$

è un morfismo di \mathcal{A}_x -moduli.

Gli \mathcal{A} -moduli, con i morfismi di \mathcal{A} -moduli, formano una *categoria*.

DEFINIZIONE 15.6.2. Un sottofascio \mathcal{I} di \mathcal{A} si dice un *fascio di ideali* se, per ogni $x \in X$, l'insieme dei germi \mathcal{I}_x è un ideale di \mathcal{A}_x . Un sottofascio \mathcal{T} di un fascio di \mathcal{A} -moduli \mathcal{S} è un fascio di sotto- \mathcal{A} -moduli di \mathcal{S} se, per ogni $x \in X$, \mathcal{T}_x è un sotto- \mathcal{A}_x -modulo di \mathcal{S}_x .

PROPOSIZIONE 15.6.3. (1) Se $\mathcal{S}', \mathcal{S}''$ sono due fasci di sotto- \mathcal{A} -moduli del fascio di \mathcal{A} -moduli \mathcal{S} , allora anche:

$$(15.28) \quad \mathcal{S}' + \mathcal{S}'' = \bigsqcup_{x \in X} (\mathcal{S}'_x + \mathcal{S}''_x) \quad \text{ed} \quad \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}'' = \bigsqcup_{x \in X} (\mathcal{S}'_x \cap \mathcal{S}''_x)$$

sono fasci di sotto- \mathcal{A} -moduli di \mathcal{S} .

(2) Se (15.26) è un morfismo di fasci di \mathcal{A} -moduli, allora:

$$(15.29) \quad \ker \Phi = \bigsqcup_{x \in X} \ker \Phi_x \quad \text{è un sotto-}\mathcal{A}\text{-modulo di } \mathcal{S},$$

$$(15.30) \quad \text{Imm } \Phi = \bigsqcup_{x \in X} \text{Imm } \Phi_x \quad \text{è un sotto-}\mathcal{A}\text{-modulo di } \mathcal{S}'. \quad \square$$

Le usuali nozioni di monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo si estendono in modo ovvio ai fasci di \mathcal{A} -moduli.

DEFINIZIONE 15.6.4. Una sequenza di \mathcal{A} -moduli e di \mathcal{A} -morfismi:

$$(15.31) \quad \cdots \longrightarrow \mathcal{S}_{h-1} \xrightarrow{\phi_{h-1}} \mathcal{S}_h \xrightarrow{\phi_h} \mathcal{S}_{h+1} \longrightarrow \cdots$$

$$(-\infty \leq a < h < b \leq +\infty),$$

si dice una \mathcal{A} -*successione*. Diciamo che (15.31) è un *complesso* se:

$$(15.32) \quad \text{Imm } \Phi_{h-1} \subset \ker \Phi_h \quad \forall a < h-1 < h < b$$

Diciamo che (15.31) è *esatta* in \mathcal{S}_h se:

$$(15.33) \quad \text{Imm } \Phi_{h-1} = \ker \Phi_h.$$

Diciamo che (15.31) è *esatta*, o *aciclica* se è esatta per ogni h con $a < h-1 < h < b$.

Una \mathcal{A} -*successione esatta corta* è una \mathcal{A} *successione esatta* della forma:

$$(15.34) \quad \tilde{0} \longrightarrow \mathcal{S}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S} \xrightarrow{\beta} \mathcal{S}'' \longrightarrow \tilde{0},$$

dove abbiamo indicato con $\tilde{0}$ il fascio di \mathcal{A} -moduli in cui per ogni $x \in X$ la spiga in x è l' \mathcal{A}_x -modulo nullo.

OSSERVAZIONE 15.6.5. Se (15.26) è un morfismo di \mathcal{A} -moduli, allora:

$$(15.35) \quad \tilde{0} \longrightarrow \ker \Phi \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \text{Imm } \Phi \longrightarrow \tilde{0}$$

è una \mathcal{A} -*successione esatta corta*.

DEFINIZIONE 15.6.6. Se \mathcal{S}' è un sotto- \mathcal{A} -modulo di \mathcal{S} , definiamo l' \mathcal{A} -modulo quoziente \mathcal{S}/\mathcal{S}' ponendo:

$$(15.36) \quad \mathcal{S}/\mathcal{S}' = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{S}_x/\mathcal{S}'_x,$$

ove su ogni spiga $\mathcal{S}_x/\mathcal{S}'_x$ si considera la struttura di \mathcal{A}_x -modulo quoziente.

In particolare, se \mathcal{I} è un fascio di ideali di \mathcal{A} , il fascio quoziente \mathcal{A}/\mathcal{I} è un fascio di anelli su X .

La proiezione naturale definisce un morfismo di \mathcal{A} -moduli:

$$(15.37) \quad \pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/\mathcal{S}'$$

ed otteniamo una \mathcal{A} -*successione esatta corta*:

$$(15.38) \quad \tilde{0} \longrightarrow \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{\pi} \mathcal{S}/\mathcal{S}' \longrightarrow \tilde{0}.$$

PROPOSIZIONE 15.6.7. Il funtore $\Gamma(U, \cdot)$ è *esatto a sinistra*: cioè, per ogni aperto U di X ed ogni *successione esatta corta* (15.35) otteniamo una *successione esatta*:

$$(15.39) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S}'(U) \longrightarrow \mathcal{S}(U) \longrightarrow \mathcal{S}''(U).$$

OSSERVAZIONE 15.6.8. Il funtore $\Gamma(U, \cdot)$ non è, in generale, *esatto a destra*: questo significa che l'ultima applicazione in (15.39) non è necessariamente *surgettiva*.

DEFINIZIONE 15.6.9. Dato un morfismo (15.26), il fascio quoziente $\mathcal{S}'/\text{Imm } \Phi$ si indica anche con $\text{coker } \Phi$. Abbiamo naturalmente una \mathcal{A} -*successione esatta corta*:

$$(15.40) \quad \tilde{0} \longrightarrow \text{Imm } \Phi \longrightarrow \mathcal{S}' \longrightarrow \text{coker } \Phi \longrightarrow \tilde{0}.$$

Scriveremo nel seguito, per semplicità, 0 invece di $\tilde{0}$ per indicare il fascio nullo di \mathcal{A} -moduli.

15.7. Coomologia di Cech con coefficienti in un fascio

Siano X uno spazio topologico ed \mathcal{S} un fascio di gruppi abeliani su X .

Fissiamo un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X . Per ogni intero $q \geq 0$, fissati $i_0, i_1, \dots, i_q \in I$ denotiamo con U_{i_0, i_1, \dots, i_q} l'intersezione $= U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_q}$. Indichiamo con $\mathcal{N}_q(\mathcal{U})$ l'insieme delle $(q+1)$ -uple di indici distinti di I tali che $U_{i_0, i_1, \dots, i_q} \neq \emptyset$.

DEFINIZIONE 15.7.1. Sia $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ il gruppo abeliano delle q -cocatene alter-nate di \mathcal{U} con coefficienti in \mathcal{S} : esso consiste di tutte le

$$(f_{i_0, i_1, \dots, i_q}) \in \prod_{(i_0, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U})} \mathcal{S}(U_{i_0, i_1, \dots, i_q})$$

che soddisfano¹:

$$f_{i_{\sigma_0}, i_{\sigma_1}, \dots, i_{\sigma_q}} = \varepsilon(\sigma) f_{i_0, i_1, \dots, i_q} \quad \forall \sigma \in \mathbf{S}_{q+1}.$$

Indichiamo con $\delta_q^{\mathcal{U}} = \delta_q = \delta$ l'applicazione:

$$(15.41) \quad \delta_q : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \ni (f_{i_0, i_1, \dots, i_q}) \longrightarrow ((\delta f)_{i_0, i_1, \dots, i_{q+1}}) \in \mathcal{C}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$$

definita da:

$$(15.42) \quad (\delta f)_{i_0, i_1, \dots, i_{q+1}} = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1}} |_{U_{i_0, i_1, \dots, i_{q+1}}}.$$

Le q -cocatene $f \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ che soddisfano $\delta(f) = 0$ si dicono q -cocicli; quelle della forma $\delta_{q-1}(\phi)$, con $\phi \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, si dicono q -cobordi.

Indicheremo con $\mathcal{Z}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ il gruppo dei q -cocicli e con $\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ il gruppo dei q -cobordi.

LEMMA 15.7.2. Per ogni $q \geq 0$ risulta $\delta_{q+1} \circ \delta_q = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Se $f = (f_{i_0, \dots, i_q}) \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, abbiamo:

$$\begin{aligned} (\delta_{q+1} \circ \delta_q f)_{i_0, \dots, i_{q+2}} &= \sum_{j=0}^{q+2} (-1)^j (\delta_q f)_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+2}} |_{U_{i_0, \dots, i_{q+2}}} \\ &= \sum_{j=0}^{q+2} \sum_{h=0}^{j-1} (-1)^{j+h} f_{i_0, \dots, \hat{i}_h, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+2}} |_{U_{i_0, \dots, i_{q+2}}} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{q+2} \sum_{h=j+1}^{q+1} (-1)^{j+h} f_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, \hat{i}_h, \dots, i_{q+2}} |_{U_{i_0, \dots, i_{q+2}}} \\ &= \sum_{0 \leq j < h \leq q+1} f_{i_0, \dots, \hat{i}_h, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+2}} |_{U_{i_0, \dots, i_{q+2}}} \\ &\quad - \sum_{0 \leq h < j \leq q+1} f_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, \hat{i}_h, \dots, i_{q+2}} |_{U_{i_0, \dots, i_{q+2}}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

¹Abbiamo indicato con \mathbf{S}_{q+1} il gruppo delle permutazioni dei $(q+1)$ elementi $\{0, 1, \dots, q\}$. Se $\sigma \in \mathbf{S}_{q+1}$, il simbolo $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ indica la sua segnatura.

Quindi, per ogni intero non negativo q , il gruppo $\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ dei q -cobordi è un sottogruppo del gruppo $\mathcal{Z}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ dei q -cocicli.

La successione dei gruppi delle cocatene e degli omomorfismi $\delta_q = \delta_q^{\mathcal{U}}$ che li legano formano un *complesso*² di gruppi abeliani e di omomorfismi:

(15.43)

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}) &\xrightarrow{\delta_0} \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) &\xrightarrow{\delta_{q-1}} \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\delta_q} \mathcal{C}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 15.7.3. Indichiamo con δ_{-1} l'applicazione nulla $0 = \mathcal{C}^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{S})$. Con questa convenzione, definiamo per ogni intero $q \geq 0$ il q -esimo gruppo di coomologia di Cech a coefficienti in \mathcal{S} del ricoprimento \mathcal{U} come il quoziente:

$$(15.44) \quad \mathbf{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) = \frac{\ker \delta_q}{\operatorname{im} \delta_{q-1}} = \frac{\mathcal{Z}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})}{\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})}.$$

Osserviamo che, poiché \mathcal{S} è un fascio, $\mathbf{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \simeq \mathcal{Z}^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \simeq \mathcal{S}(X)$. Infatti gli elementi (f_i) di $\mathcal{Z}^0(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ sono tutti e soli quelli della forma $f_i = f|_{U_i}$ per una $f \in \mathcal{S}(X)$ e la f è univocamente determinata dalle sue restrizioni agli aperti U_i del ricoprimento.

Un *raffinamento* del ricoprimento aperto \mathcal{U} è il dato di un altro ricoprimento aperto $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ e di una *funzione di raffinamento* $\tau : J \rightarrow I$, tale che $V_j \subset U_{\tau_j}$ per ogni $j \in J$.

Scriveremo $\mathcal{V} <_{\tau} \mathcal{U}$ per indicare che \mathcal{V} è un raffinamento di \mathcal{U} con funzione di raffinamento τ .

Se $\mathcal{V} <_{\tau} \mathcal{U}$, la τ induce un omomorfismo dei cocicli alternati a coefficienti in \mathcal{S} dei due ricoprimenti:

$$\begin{aligned} \tau^* &= \tau_q^* : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}), \quad \text{definita da} \\ (\tau^* f)_{j_0, \dots, j_q} &= f_{j_0, \dots, j_q}|_{V_{j_0, \dots, j_q}} \quad \forall (j_0, \dots, j_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{V}). \end{aligned}$$

Abbiamo:

$$(15.45) \quad \delta_q^{\mathcal{V}} \circ \tau_q^* = \tau_{q+1}^* \circ \delta_q^{\mathcal{U}} \quad \text{per ogni } q = 0, 1, \dots$$

Valgono dunque le inclusioni

$$\tau_q^*(\mathcal{Z}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})) \subset \mathcal{Z}^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}) \quad \text{e} \quad \tau_q^*(\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})) \subset \mathcal{B}^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}).$$

Per passaggio ai quozienti, otteniamo un omomorfismo

$$(15.46) \quad \hat{\tau}_q^* : \mathbf{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathbf{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}) \quad \text{per ogni } q = 0, 1, \dots$$

DEFINIZIONE 15.7.4. Il q -esimo gruppo $\mathbf{H}^q(X, \mathcal{S})$ della coomologia di Cech di X a coefficienti nel fascio \mathcal{S} è il limite induttivo, rispetto ai raffinamenti, dei gruppi $\mathbf{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ al variare di \mathcal{U} nella famiglia dei ricoprimenti aperti di X :

$$(15.47) \quad \check{\mathbf{H}}^q(X, \mathcal{S}) = \operatorname{inj} \lim_{\mathcal{U}} \mathbf{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \quad \text{per ogni } q = 0, 1, \dots$$

²La parola *complesso* significa che il nucleo di ciascun omomorfismo contiene l'immagine del precedente.

Una classe di coomologia in $\check{H}^q(X, \mathcal{S})$ è rappresentata da un q -cociclo $f \in \mathcal{L}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, modulo la relazione di equivalenza che identifica f a $\tau_q^*(f) + \delta_{q-1}^{\mathcal{V}}(g)$ se $\mathcal{V} <_{\tau} \mathcal{U}$ e $g \in \mathcal{L}^{q-1}(\mathcal{V}, \mathcal{S})$.

Possiamo definire i gruppi di coomologia di Cech anche come gruppi di coomologia di un complesso di cocatene. A questo scopo definiamo, per ogni intero $q \geq 0$, il gruppo abeliano $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{S})$ delle q -cocatene in X a coefficienti nel fascio di gruppi abeliani \mathcal{S} come il limite induttivo rispetto ai ricoprimenti aperti e ai raffinamenti:

$$(15.48) \quad \mathcal{C}^q(X, \mathcal{S}) = \operatorname{inj} \lim_{\mathcal{U}} \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$$

Per definizione di limite induttivo, un elemento di $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{S})$ è rappresentato da una $f = (f_{i_0, i_1, \dots, i_q}) \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ e due q -cocicli $f^h = (f_{i_0, i_1, \dots, i_q}^h) \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}^h, \mathcal{S})$ ($h = 1, 2$) definiscono lo stesso elemento di $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{S})$ se esiste un raffinamento comune $\mathcal{V} <_{\tau_h} \mathcal{U}^h$ (per $h = 1, 2$) tale che $\tau_1^*(f^1) = \tau_2^*(f^2)$. Poiché l'addizione commuta con le applicazioni indotte dai raffinamenti, gli insiemi $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{S})$ hanno una struttura naturale di gruppi abeliani. Ancora, poiché le applicazioni di cobordo commutano con gli omomorfismi indotti dai raffinamenti, otteniamo un complesso di gruppi abeliani e di omomorfismi:

$$(15.49) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{C}^0(X, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta_0^X} & \mathcal{C}^1(X, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta_1^X} & \mathcal{C}^2(X, \mathcal{S}) & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \rightarrow & \mathcal{C}^{q-1}(X, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta_{q-1}^X} & \mathcal{C}^q(X, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta_q^X} & \mathcal{C}^{q+1}(X, \mathcal{S}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Quando ciò non possa creare confusione, scriveremo a volte per semplicità δ_q , o anche δ , invece di δ_q^X .

I sottogruppi

$$\mathcal{L}^q(X, \mathcal{S}) = \ker \delta_q^X \quad \text{dei } q\text{-cocicli in } \mathcal{C}^q(X, \mathcal{S}) \text{ e}$$

$$\mathcal{B}^q(X, \mathcal{S}) = \delta_{q-1}^X(\mathcal{C}^{q-1}(X, \mathcal{S})) \quad \text{dei } q\text{-cobordi di } \mathcal{C}^q(X, \mathcal{S})$$

sono i limiti induttivi (rispetto alle applicazioni di raffinamento) dei corrispondenti sottogruppi $\mathcal{L}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ e $\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$. Il q -esimo gruppo di coomologia di Cech è allora dato da:

$$(15.50) \quad \check{H}^q(X, \mathcal{S}) = \frac{\ker \delta_q^X}{\operatorname{im} \delta_{q-1}^X} = \frac{\mathcal{L}^q(X, \mathcal{S})}{\mathcal{B}^q(X, \mathcal{S})}.$$

Siano $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ ed $\mathcal{F} \xrightarrow{\varpi} X$ due fasci di gruppi abeliani sullo spazio topologico X e $\Phi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}$ un omomorfismo di fasci di gruppi abeliani. Per ogni aperto U di X esso definisce un omomorfismo $\Phi_U: \mathcal{S}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$, che ci permette di costruire, assegnato un ricoprimento \mathcal{U} di X , un omomorfismo naturale tra le q cocatene alternate di \mathcal{U} a coefficienti in \mathcal{S} e in \mathcal{F} :

$$(15.51) \quad \begin{cases} \Phi_q: \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ (\Phi_q(f))_{i_0, i_1, \dots, i_q} = (\Phi_{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}}(f_{i_0, i_1, \dots, i_q})). \end{cases}$$

Si verifica facilmente che gli omomorfismi Φ_q commutano con le operazioni di cobordo δ_q dei due complessi di cocatene alternate a coefficienti in \mathcal{S} e in \mathcal{F} . Risultano quindi definite applicazioni naturali

$$(15.52) \quad \Phi_* = \Phi_{q*} : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

per ogni $q = 0, 1, \dots$. Queste applicazioni a loro volta commutano con gli omomorfismi dei raffinamenti e quindi, finalmente, otteniamo un'applicazione naturale:

$$(15.53) \quad \Phi_* = \Phi_{q*} : \check{H}^q(X, \mathcal{S}) \longrightarrow \check{H}^q(X, \mathcal{F})$$

per ogni $q = 0, 1, \dots$

Osserviamo che per passaggio al quoziente otteniamo ancora omomorfismi $\Phi_q : \mathcal{C}^q(X, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^q(X, \mathcal{F})$ che commutano con le operazioni di cobordo e quindi l'omomorfismo Φ_{q*} tra i gruppi di coomologia si può definire anche a partire dagli omomorfismi dei gruppi di cocatene. Abbiamo il diagramma commutativo (a righe esatte):

$$(15.54) \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}^q(X, \mathcal{S}) & \longrightarrow & \mathcal{L}^q(X, \mathcal{S}) & \longrightarrow & \check{H}^q(X, \mathcal{S}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \Phi_q \downarrow & & \Phi_q \downarrow & & \Phi_q \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}^q(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{L}^q(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{H}^q(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

15.8. Il teorema di Serre

I gruppi di coomologia di Cech hanno buone proprietà rispetto ai morfismi di fasci quando si assuma che lo spazio di base X sia paracompatto.

Ricordiamo che uno spazio topologico X si dice *paracompatto* se è di Hausdorff e se ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento localmente finito. Gli spazi paracompatti sono normali e tutti gli spazi metrizzabili sono paracompatti. Per uno spazio topologico connesso e localmente compatto, la paracompattezza equivale all'essere unione numerabile di insiemi compatti (numerabile all'infinito).

Se X è paracompatto ed \mathcal{S} un fascio su X , i gruppi di coomologia di Cech $H^q(X, \mathcal{S})$ si possono calcolare utilizzando soltanto ricoprimenti aperti localmente finiti.

LEMMA 15.8.1. *Sia X uno spazio normale ed $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un suo ricoprimento aperto localmente finito. Possiamo allora trovare un ricoprimento aperto $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ di X tale che $\bar{V}_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$.*

DIMOSTRAZIONE. Bene-ordiniamo l'insieme I ³. Costruiremo il ricoprimento \mathcal{V} per induzione transfinita, in modo che

- (1) $\bar{V}_i \subset U_i \quad \forall i \in I$,
- (2) $\forall j \in I, \{V_i \mid i \leq j\} \cup \{U_i \mid i > j\}$ è un ricoprimento aperto di X .

Dimostriamo induttivamente la proposizione

³Ciò significa che I è totalmente ordinato rispetto ad una relazione $<$ e che ogni sottoinsieme non vuoto di I ammette minimo rispetto a $<$.

(P_{j_0}) Gli aperti V_i sono definiti per ogni $i < j_0$ in modo che la (1) valga per $i < j_0$ e che, per ogni $h \in I$ con $h < j_0$, la famiglia di aperti

$$\{V_i \mid i \leq h\} \cup \{U_i \mid i > h\}$$

sia un ricoprimento aperto di X .

L'affermazione (P_{j_0}) è banalmente vera se j_0 è il minimo di I .

Osserviamo inoltre che, se (P_{j_0}) è valida per uno $j_0 \in I$, allora:

$$\mathcal{V}_{j_0} = \{V_i \mid i < j_0\} \cup \{U_i \mid i \geq j_0\}$$

è un ricoprimento aperto di X . Infatti, se $x \in X$, allora $I_x = \{i \in I \mid x \in U_i\}$ è finito perché \mathcal{U} è localmente finito. Se qualche $i \in I_x$ è $\geq j_0$, allora \mathcal{V}_{j_0} contiene un aperto U_i che contiene x . Altrimenti, indichiamo con j' il più grande elemento di I_x . Poiché per l'ipotesi induttiva

$$\{V_i \mid i \leq j'\} \cup \{U_i \mid i > j'\}$$

è un ricoprimento aperto di X , $x \in V_i$ per qualche $i \leq j' < j_0$ e dunque appartiene a un $V_i \in \mathcal{V}_{j_0}$.

Consideriamo ora l'insieme

$$F = \mathbb{C} \left(\bigcup_{j < j_0} V_j \cup \bigcup_{j > j_0} U_j \right).$$

Esso è un chiuso contenuto in U_{j_0} in quanto \mathcal{V}_{j_0} è un ricoprimento di X . Essendo X uno spazio T_4 , il chiuso F ha un intorno chiuso G contenuto in U_{j_0} . Posto $V_{j_0} = \overset{\circ}{G}$, chiaramente

$$\{V_i \mid i \leq j_0\} \cup \{U_i \mid i > j_0\}$$

è un ricoprimento aperto di X e vale la (1) per $j \leq j_0$. Se I ammette massimo e j_0 è il massimo di I , allora $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ soddisfa la tesi del Lemma. Se j_0 non è il massimo di I , abbiamo ottenuto la $(P_{j'_0})$ ove j'_0 è l'elemento di I successivo a j_0 (esso è ben definito come il minimo dell'insieme non vuoto $\{i \in I \mid i > j_0\}$ di I). Per induzione transfinita otteniamo quindi una famiglia $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ tale che valgano le (1), (2). Chiaramente \mathcal{V} è un ricoprimento aperto di X : se $x \in X$ e j è il minimo indice in I tale che $x \notin U_j$, la (2) ci dice che $x \in V_i$ per qualche $i \leq j$.

La dimostrazione è completa. \square

Da questo Lemma ricaviamo il seguente:

LEMMA 15.8.2. *Sia X uno spazio normale ed \mathcal{U} un suo ricoprimento aperto localmente finito. Fissiamo un intero $q \geq 0$ e supponiamo che, per ogni $(i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U})$ sia assegnato un ricoprimento aperto $\mathcal{W}^{i_0, i_1, \dots, i_q} = \{W_\alpha^{i_0, i_1, \dots, i_q}\}_{\alpha \in A_{i_0, i_1, \dots, i_q}}$ di U_{i_0, i_1, \dots, i_q} . Allora esiste un raffinamento $\mathcal{V} <_\tau \mathcal{U}$, mediante un ricoprimento aperto $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$, tale che :*

(15.55)

$$\begin{cases} \forall (j_0, j_1, \dots, j_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{V}) \text{ tale che } (\tau(j_0), \tau(j_1), \dots, \tau(j_q)) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U}) \\ \exists \alpha \in A_{\tau(j_0), \tau(j_1), \dots, \tau(j_q)} \text{ tale che } V_{j_0, j_1, \dots, j_q} \subset W_\alpha^{\tau(j_0), \tau(j_1), \dots, \tau(j_q)}. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 15.8.1 possiamo trovare un ricoprimento $\Gamma = \{\Omega_i\}_{i \in I}$ tale che $\bar{\Omega}_i \subset U_i$ per ogni indice $i \in I$. Il ricoprimento Γ è anch'esso localmente finito.

Per ogni $p \in X$, l'insieme I_p degli indici i per cui $U_i \cap G_p \neq \emptyset$ è finito.

Osserviamo che $\{\bar{\Omega}_i\}_{i \in I_p}$ è una famiglia di chiusi localmente finita. Quindi la loro unione $\bigcup_{i \in I_p} \bar{\Omega}_i$ è un chiuso che non contiene il punto p e perciò

$$\tilde{V}_p = \left(\bigcap_{i \in I_p} U_i \right) \setminus \left(\bigcup_{i \in I_p} \bar{\Omega}_i \right)$$

è un intorno aperto di p .

Per ogni $(i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U}) \cap I_p^{q+1}$ scegliamo $\alpha = \alpha_{i_0, i_1, \dots, i_q} \in A_{i_0, i_1, \dots, i_q}$ tale che $p \in W_\alpha^{i_0, i_1, \dots, i_q}$.

A questo punto, definiamo per ogni $p \in X$:

$$V_p = \begin{cases} \tilde{V}_p & \text{se } \mathcal{N}_q(\mathcal{U}) \cap I_p^{q+1} = \emptyset \\ \bigcap_{(i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U}) \cap I_p^{q+1}} (W_{\alpha_{i_0, i_1, \dots, i_q}}^{i_0, i_1, \dots, i_q} \cap \tilde{V}_p) & \text{se } \mathcal{N}_q(\mathcal{U}) \cap I_p^{q+1} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Definiamo $\mathcal{V} = \{V_p\}_{p \in X}$. Abbiamo $\mathcal{V} <_\tau \mathcal{U}$, con una funzione di raffinamento $\tau : X \ni x \rightarrow \tau(x) \in I$ che si può scegliere imponendo la sola condizione che $\tau(p) \in I_p$ per ogni $p \in X$. Per costruzione, se p_0, p_1, \dots, p_q sono punti distinti di X tali che $(p_0, p_1, \dots, p_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{V})$ e $(\tau(p_0), \tau(p_1), \dots, \tau(p_q)) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U})$, allora $\tau(p_i) \in I_{p_j}$ per ogni $0 \leq i, j \leq q$ e

$$V_{p_0, p_1, \dots, p_q} \subset W_{\alpha_{\tau(p_0), \tau(p_1), \dots, \tau(p_q)}}^{\tau(p_0), \tau(p_1), \dots, \tau(p_q)}.$$

Quindi $\mathcal{V} <_\tau \mathcal{U}$ soddisfa la tesi del Lemma. \square

Dimostriamo ora che, se X è paracompatto, il funtore $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}^q(X, \mathcal{S})$, dalla categoria dei fasci di gruppi abeliani su X a quella dei gruppi abeliani, è esatto. Abbiamo cioè:

TEOREMA 15.8.3. *Sia X uno spazio paracompatto e sia*

$$(15.56) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani. Allora per ogni intero $q \geq 0$ la successione di gruppi abeliani :

$$(15.57) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{C}^q(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. (a) Dimostriamo che $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{G})$ è iniettiva.

Sia $f \in \mathcal{C}^q(X, \mathcal{F})$, per un qualsiasi ricoprimento aperto \mathcal{U} di X . Dire che l'elemento di $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{G})$ definito da $\alpha_q(f)$ è nullo, equivale a dire che esiste un raffinamento $\mathcal{V} <_\tau \mathcal{U}$ tale che $\tau_q^* \circ \alpha_q(f) = 0$. Questa relazione ci dà $\alpha_q(\tau^*(f)) = 0$. Poiché $(\alpha_q(\tau^*(f)))_{j_0, j_1, \dots, j_q} = \alpha_{V_{j_0, j_1, \dots, j_q}}^{j_0, j_1, \dots, j_q}((\tau^*(f))_{j_0, j_1, \dots, j_q})$ per ogni $(j_0, j_1, \dots, j_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{V})$ e la $\alpha_{V_{j_0, j_1, \dots, j_q}}^{j_0, j_1, \dots, j_q} : \mathcal{S}(V_{j_0, j_1, \dots, j_q}) \rightarrow \mathcal{F}(V_{j_0, j_1, \dots, j_q})$ è iniettiva, ne segue che $\tau^*(f) = 0$ e quindi f definisce l'elemento nullo di $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{F})$.

(b) Dimostriamo l'esattezza della successione

$$\mathcal{C}^q(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{H}).$$

Sia γ un elemento di $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{G})$ con $\alpha_q(\gamma) = 0$. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto localmente finito di X e sia $g \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ una q -cocatena che rappresenta γ . A meno di passare a un raffinamento localmente finito di \mathcal{U} , possiamo supporre che $\alpha_q(g) = 0$. Per l'esattezza di (15.56), per ogni $(i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U})$ possiamo trovare un intorno aperto $W_p^{i_0, i_1, \dots, i_q}$ di p in U_{i_0, i_1, \dots, i_q} ed una $f_p^{i_0, i_1, \dots, i_q} \in \mathcal{F}(W_p^{i_0, i_1, \dots, i_q})$ tale che $r_{W_p^{i_0, i_1, \dots, i_q}}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}}(g_{i_0, i_1, \dots, i_q}) = \alpha_{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}}(f_p^{i_0, i_1, \dots, i_q})$. Per il Lemma 15.8.2 esiste un raffinamento aperto $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ di \mathcal{U} , che possiamo scegliere localmente finito:

$$\mathcal{V} <_{\tau} \mathcal{U}$$

tale che per ogni $(j_0, j_1, \dots, j_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{V})$ con $(\tau(j_0), \tau(j_1), \dots, \tau(j_q)) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U})$, possiamo trovare un punto $p(j_0, j_1, \dots, j_q)$ con

$$V_{j_0, j_1, \dots, j_q} \subset W_{p(j_0, j_1, \dots, j_q)}^{\tau(j_0), \tau(j_1), \dots, \tau(j_q)} \subset U_{\tau(j_0), \tau(j_1), \dots, \tau(j_q)}.$$

Definiamo un elemento $\phi \in \mathcal{C}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ ponendo:

$$\phi_{j_0, j_1, \dots, j_q} = r_{V_{j_0, j_1, \dots, j_q}}^{W_{p(j_0, j_1, \dots, j_q)}^{\tau(j_0), \tau(j_1), \dots, \tau(j_q)}} \left(f_{p(j_0, j_1, \dots, j_q)}^{\tau(j_0), \tau(j_1), \dots, \tau(j_q)} \right) \quad \text{per } (j_0, j_1, \dots, j_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{V}).$$

Se indichiamo con $[\phi]$ l'elemento di $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{F})$ definito da ϕ , abbiamo $\alpha_q([\phi]) = \gamma$.

(c) La dimostrazione della surgettività dell'applicazione $\mathcal{C}^q(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{H})$ è del tutto analoga a quella di (b). \square

Osserviamo che abbiamo ottenuto, con la dimostrazione di questo teorema, l'enunciato più preciso:

PROPOSIZIONE 15.8.4. *Sia X uno spazio topologico e sia*

$$(15.58) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su X . Allora, per ogni $q \geq 0$, otteniamo una successione esatta di gruppi abeliani:

$$(15.59) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{C}^q(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{G}).$$

Supponiamo ora che X sia paracompatto. Allora se la successione di fasci di gruppi abeliani:

$$(15.60) \quad \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

è esatta, è esatta anche la successione di gruppi abeliani:

$$(15.61) \quad \mathcal{C}^q(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_q} \mathcal{C}^q(X, \mathcal{H}).$$

Come conseguenza del Teorema 15.8.3 otteniamo il

TEOREMA 15.8.5 (Serre). *Se X è paracompatto e*

$$(15.56) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

è una successione esatta di gruppi abeliani su X , allora possiamo definire, per ogni intero $q \geq 0$, un omomorfismo

$$(15.62) \quad \vartheta_q : H^q(X, \mathcal{H}) \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{F})$$

in modo tale che la seguente successione lunga di gruppi di coomologia risulti esatta :

$$(15.63) \quad \begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha_{0*}} & H^0(X, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\beta_{0*}} & H^0(X, \mathcal{H}) & \longrightarrow & & & \\ & & \xrightarrow{\vartheta_0} & H^1(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha_{1*}} & \dots & & & & & \\ & & & & & \dots & \xrightarrow{\beta_{q-1*}} & H^{q-1}(X, \mathcal{H}) & \longrightarrow & & \\ & & \xrightarrow{\vartheta_{q-1}} & H^q(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha_{q*}} & H^q(X, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\beta_{q*}} & H^q(X, \mathcal{H}) & \longrightarrow & & \\ & & \xrightarrow{\vartheta_q} & H^{q+1}(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha_{q+1*}} & \dots & & & & & \end{array}$$

La dimostrazione è conseguenza del Teorema 15.8.3 e del risultato generale di algebra omologica:

TEOREMA 15.8.6. *Siano*

$$\begin{aligned} (A^*, a_*) &= \{0 \rightarrow A_0 \xrightarrow{a_0} A_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{q-1}} A_q \xrightarrow{a_q} A_{q+1} \xrightarrow{a_{q+1}} \dots\} \\ (B^*, b_*) &= \{0 \rightarrow B_0 \xrightarrow{b_0} B_1 \xrightarrow{b_1} \dots \xrightarrow{b_{q-1}} B_q \xrightarrow{b_q} B_{q+1} \xrightarrow{b_{q+1}} \dots\} \\ (C^*, c_*) &= \{0 \rightarrow C_0 \xrightarrow{c_0} C_1 \xrightarrow{c_1} \dots \xrightarrow{c_{q-1}} C_q \xrightarrow{c_q} C_{q+1} \xrightarrow{c_{q+1}} \dots\} \end{aligned}$$

complessi di gruppi abeliani e siano, per q intero ≥ 0 ,

$$(15.64) \quad H^q(A^*, a_*) = \frac{\ker a_q}{\operatorname{im} a_{q-1}}, \quad H^q(B^*, b_*) = \frac{\ker b_q}{\operatorname{im} b_{q-1}}, \quad H^q(C^*, c_*) = \frac{\ker c_q}{\operatorname{im} c_{q-1}}$$

i loro gruppi di coomologia. Supponiamo siano assegnati per ogni intero $q \geq 0$ omomorfismi

$$(15.65) \quad \phi_q : A_q \longrightarrow B_q \quad e \quad \psi_q : B_q \longrightarrow C_q$$

tali che il diagramma :

$$(15.66) \quad \begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A_0 & \xrightarrow{a_0} & A_1 & \xrightarrow{a_1} & \cdots & \xrightarrow{a_{q_1}} & A_q & \xrightarrow{a_q} & A_{q+1} & \xrightarrow{a_{q+1}} & \cdots \\ & & \downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi_1 & & & & \downarrow \phi_q & & \downarrow \phi_{q+1} & & \\ 0 & \longrightarrow & B_0 & \xrightarrow{b_0} & B_1 & \xrightarrow{b_1} & \cdots & \xrightarrow{b_{q_1}} & B_q & \xrightarrow{b_q} & B_{q+1} & \xrightarrow{b_{q+1}} & \cdots \\ & & \downarrow \psi_0 & & \downarrow \psi_1 & & & & \downarrow \psi_q & & \downarrow \psi_{q+1} & & \\ 0 & \longrightarrow & C_0 & \xrightarrow{c_0} & C_1 & \xrightarrow{c_1} & \cdots & \xrightarrow{c_{q_1}} & C_q & \xrightarrow{c_q} & C_{q+1} & \xrightarrow{c_{q+1}} & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

sia commutativo e con le colonne esatte. Allora esistono, per ogni intero $q \geq 0$, omomorfismi

$$(15.67) \quad \vartheta_q : H^q(C^*, c_*) \longrightarrow H^{q+1}(A^*, a_*)$$

tali che la successione lunga di coomologia :

$$(15.68) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(A^*, a_*) & \xrightarrow{\phi_{0*}} & H^0(B^*, b_*) & \xrightarrow{\psi_{0*}} & H^0(C^*, c_*) & \longrightarrow \\ & & \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \phi_{1*} & & \cdots & \\ & & & & & & \cdots & \xrightarrow{\psi_{q-1*}} & H^{q-1}(C^*, c_*) & \longrightarrow \\ & & \downarrow \varphi_{q-1} & & \downarrow \phi_{q*} & & \downarrow \psi_{0*} & & H^q(C^*, c_*) & \longrightarrow \\ & & & & \downarrow \phi_{q+1*} & & \cdots & & & \\ & & \downarrow \varphi_q & & & & & & H^{q+1}(A^*, a_*) & \longrightarrow \end{array}$$

sia esatta.

DIMOSTRAZIONE. Costruiamo in primo luogo gli omomorfismi ϑ_q . A questo scopo dimostriamo che:

- (1) Per ogni $z_q \in \ker c_q$ esistono $y_q \in B_q$ ed $x_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ tali che :

$$(15.69) \quad \begin{cases} \psi_q(y_q) = z_q \\ \phi_{q+1}(x_{q+1}) = b_q(y_q) \end{cases}$$

- (2) La x_{q+1} in (15.69) è univocamente determinata modulo l'aggiunta di un elemento di $\text{im } a_q$.

- (3) Se z'_q è un altro elemento di $\ker c_q$, che differisce da z_q per un elemento di $\text{im } c_{q-1}$, ed $x'_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ $y'_q \in B_q$ risolvono :

$$(15.70) \quad \begin{cases} \psi_q(y'_q) = z'_q \\ \phi_{q+1}(x'_{q+1}) = b_q(y'_q), \end{cases}$$

allora $x_{q+1} - x'_{q+1} \in \text{im } a_q$.

(1) Sia $z_q \in C_q$ con $c_q(z_q) = 0$. Poiché per ipotesi l'omomorfismo $\psi_q : B_q \rightarrow C_q$ è surgettivo, esiste un elemento $y_q \in B_q$ tale che $z_q = \psi_q(y_q)$. Risulta:

$$\psi_{q+1}(b_q(y_q)) = c_q(\psi_q(y_q)) = c_q(z_q) = 0.$$

Poiché per ipotesi la successione

$$0 \longrightarrow A_{q+1} \xrightarrow{\phi_{q+1}} B_{q+1} \xrightarrow{\psi_{q+1}} C_{q+1} \longrightarrow 0$$

è esatta, vi è un unico elemento $x_{q+1} \in A_{q+1}$ tale che

$$\phi_{q+1}(x_{q+1}) = b_q(y_q).$$

Abbiamo:

$$\phi_{q+2}(a_{q+1}(x_{q+1})) = b_{q+1}(\phi_{q+1}(x_{q+1})) = (b_{q+1} \circ b_q)(y_q) = 0$$

e quindi

$$a_{q+1}(x_{q+1}) = 0$$

perché ϕ_{q+2} è un omomorfismo iniettivo. Gli elementi $y_q \in B_q$ e $x_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ trovati risolvono (15.69).

(2) Siano $\tilde{y}_q \in B_q$ e $\tilde{x}_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ soluzione di :

$$\begin{cases} \psi_q(\tilde{y}_q) = z_q, \\ \phi(\tilde{x}_{q+1}) = b_q(\tilde{y}_q). \end{cases}$$

Allora $\psi_q(\tilde{y}_q - y_q) = 0$ e, per l'esattezza della successione:

$$0 \longrightarrow A_q \xrightarrow{\phi_q} B_q \xrightarrow{\psi_q} C_q \longrightarrow 0$$

esiste un unico elemento $x_q \in A_q$ tale che $\tilde{y}_q - y_q = \phi_q(x_q)$. Abbiamo perciò:

$$\phi_{q+1}(\tilde{x}_{q+1} - x_{q+1}) = b_q(\tilde{y}_q - y_q) = b_q(\phi_q(x_q)) = \phi_{q+1}(a_q(x_q)).$$

Poiché l'omomorfismo $\phi_{q+1} : A_{q+1} \rightarrow B_{q+1}$ è iniettivo, ricaviamo che $\tilde{x}_{q+1} = x_{q+1} + a_q(x_q)$.

(3) Tenuto conto della (2), per dimostrare (3) è sufficiente verificare che, se $z_{q-1} \in C_{q-1}$, il sistema :

$$(*) \quad \begin{cases} \psi_q(y''_q) = c_{q-1}(z_{q-1}) \\ \phi_{q+1}(x''_{q+1}) = b_q(y''_q) \end{cases}$$

ammette una soluzione $y''_q \in B_q$, $x''_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ con $x''_{q+1} \in \text{im } a_q$. Poiché $\psi_{q-1} : B_{q-1} \rightarrow C_{q-1}$ è per ipotesi un omomorfismo surgettivo, possiamo trovare $y_{q-1} \in B_{q-1}$ tale che $\psi_{q-1}(y_{q-1}) = z_{q-1}$. Allora

$$\psi_q(b_{q-1}(y_{q-1})) = c_{q-1}(\psi_{q-1}(y_{q-1})) = c_{q-1}(z_{q-1})$$

e quindi, poiché $b_q(b_{q-1}(y_{q-1})) = 0$, la coppia $y''_q = b_{q-1}(y_{q-1})$, $x''_{q+1} = 0$ è soluzione di (*).

Dimostriamo ora l'esattezza di (15.8.6). Per semplicità di notazioni, dato un qualsiasi elemento $x_q \in \ker a_q$ (risp. $y_q \in \ker b_q$, $z_q \in \ker c_q$) indicheremo con $[x_q]$

(risp. $[y_q]$, $[z_q]$) la corrispondente classe di q -coomologia in $H^q(A_*, a_*)$ (risp. in $H^q(B_*, b_*)$, $H^q(C_*, c_*)$).

Esattezza in $H^q(A_, a_*)$* Sia $x_q \in \ker a_q$. Se $\phi_{q*}([x_q]) = 0$, allora esiste un elemento $y_{q-1} \in B_{q-1}$ tale che $\phi_q(x_q) = b_{q-1}(y_{q-1})$. L'elemento $z_{q-1} = \psi_{q-1}(y_{q-1})$ di C_{q-1} soddisfa:

$$c_{q-1}(z_{q-1}) = c_{q-1}(\psi_{q-1}(y_{q-1})) = \psi_q(b_{q-1}(y_{q-1})) = \psi_q \circ \phi_q(x_q) = 0.$$

Quindi $z_{q-1} \in \ker c_{q-1}$ definisce una classe di coomologia $[z_{q-1}]$ in $H^{q-1}(C_*, c_*)$ e $\vartheta_{q-1}([z_{q-1}]) = [x_q]$.

Ciò dimostra l'esattezza di (15.8.6) in $H^q(A_*, a_*)$.

Esattezza in $H^q(B_, b_*)$* Sia $y_q \in \ker b_q$. Se $\psi_{q*}([y_q]) = 0$, allora esiste $z_{q-1} \in C_{q-1}$ tale che $\psi_q(y_q) = c_{q-1}(z_{q-1})$. Poiché abbiamo supposto che $\psi_{q-1} : B_{q-1} \rightarrow C_{q-1}$ sia iniettiva, esiste un elemento $y_{q-1} \in B_{q-1}$ tale che $z_{q-1} = \psi_{q-1}(y_{q-1})$. Abbiamo allora:

$$\psi_q(y_q - b_{q-1}(y_{q-1})) = \psi(y_q) - c_q(\psi_{q-1}(y_{q-1})) = \psi(y_q) - c_q(z_{q-1}) = 0.$$

Per l'esattezza della successione

$$0 \longrightarrow A_q \xrightarrow{\phi_q} B_q \xrightarrow{\psi_q} C_q \longrightarrow 0$$

v'è un unico $x_q \in A_q$ tale che $\phi_q(x_q) = y_q - b_{q-1}(y_{q-1})$. Abbiamo

$$\phi_{q+1}(a_q(x_q)) = b_q(\phi_q(x_q)) = b_q(y_q - b_{q-1}(y_{q-1})) = 0.$$

Per l'iniettività dell'omomorfismo $\phi_{q+1} : A_{q+1} \rightarrow B_{q+1}$, otteniamo che $a_q(x_q) = 0$. Quindi x_q definisce una classe di coomologia $[x_q] \in H^q(A_*, a_*)$ tale che

$$\phi_{q*}([x_q]) = [\phi_q(x_q)] = [y_q + b_{q-1}(y_{q-1})] = [y_q].$$

Questo dimostra l'esattezza di (15.8.6) in $H^q(B_*, b_*)$.

Esattezza in $H^q(C_, c_*)$* Sia $z_q \in \ker c_q$ e siano $y_q \in B_q$, $x_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ tali che valga la (15.69). Sia $[z_q] \in H^q(C_*, c_*)$ la classe di coomologia definita da z_q . Se $\vartheta_q([z_q]) = 0$, allora esiste un elemento $x_q \in A_q$ tale che $x_{q+1} = a_q(x_q)$. Abbiamo

$$b_q(y_q) = \phi_{q+1}(x_{q+1}) = \phi_{q+1}(a_q(x_q)) = b_q(\phi_q(x_q)).$$

Quindi $y'_q = y_q - \phi_q(x_q) \in \ker b_q$ e definisce pertanto una classe di coomologia $[y'_q] \in H^q(B_*, b_*)$ tale che:

$$\psi_{q*}([y'_q]) = [\psi_q(y'_q)] = [\psi_q(y_q)] = [z_q].$$

Questo dimostra l'esattezza di (15.8.6) in $H^q(C_*, c_*)$. \square

15.9. Un teorema di algebra omologica

In questo paragrafo enunceremo e dimostreremo un risultato generale sui complessi bi-graduati che utilizzeremo poi nei paragrafi successivi per discutere alcune proprietà della coomologia di Čech.

DEFINIZIONE 15.9.1. Un *complesso doppio di cocatene* è il dato di una famiglia $\{A_{r,s}\}_{r,s \in \mathbb{N}}$ di gruppi abeliani, indicizzati con le coppie di interi non negativi, e di due famiglie di omomorfismi:

$$(15.71) \quad d' = d'_{r,s} : A_{r,s} \longrightarrow A_{r+1,s} \quad \text{e} \quad d'' = d''_{r,s} : A_{r,s} \longrightarrow A_{r,s+1} \quad \forall r, s \in \mathbb{N}$$

tali che:

$$(15.72) \quad \begin{cases} d'_{r+1,s} \circ d'_{r,s} = 0 & \forall r, s \in \mathbb{N}, \\ d''_{r,s+1} \circ d''_{r,s} = 0 & \forall r, s \in \mathbb{N}, \\ d'_{r,s+1} \circ d''_{r,s} + d''_{r+1,s} \circ d'_{r,s} = 0 & \forall r, s \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Poniamo $A = \bigoplus_{(r,s) \in \mathbb{N}^2} A_{r,s}$ e definiamo $d' : A \rightarrow A$ e $d'' : A \rightarrow A$ mediante

$$(15.73) \quad d'((a_{r,s})_{r,s \in \mathbb{N}}) = (a'_{r,s})_{r,s \in \mathbb{N}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a'_{0,s} = 0 \text{ e} \\ a'_{r,s} = d'_{r-1,s}(a_{r-1,s}) \text{ se } r \geq 1, \end{cases}$$

$$(15.74) \quad d''((a_{r,s})_{r,s \in \mathbb{N}}) = (a''_{r,s})_{r,s \in \mathbb{N}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a''_{r,0} = 0 \text{ e} \\ a''_{r,s} = d''_{r,s-1}(a_{r,s-1}) \text{ se } s \geq 1. \end{cases}$$

Definiamo poi

$$(15.75) \quad d : A \ni a \longrightarrow d'(a) + d''(a) \in A.$$

La (15.72) si può esprimere mediante:

$$(15.76) \quad d \circ d = 0.$$

Poniamo:

$$(15.77) \quad A_{[q]} = \bigoplus_{r+s=q} A_{r,s}.$$

Allora $d(A_{[q]}) \subset A_{[q+1]}$. Risulta quindi definito, per ogni intero $q \geq 0$, un omomorfismo $d_q = d : A_{[q]} \ni a_{[q]} \rightarrow d(a_{[q]}) \in A_{[q+1]}$ con $d_{q+1} \circ d_q = 0$ per ogni $q \geq 0$, e $d = (d_q)$ è il *differenziale totale* del complesso:

$$(15.78) \quad 0 \longrightarrow A_{[0]} \xrightarrow{d_0} A_{[1]} \xrightarrow{d_1} A_{[2]} \xrightarrow{d_2} \dots$$

Indicheremo i gruppi di *coomologia del complesso totale* con:

$$(15.79) \quad H^q(A_{[*]}, d_*) = \frac{\ker d_q}{\text{im } d_{q-1}}.$$

Abbiamo poi le due famiglie numerabili di complessi di cocatene

$$(A_{*,s}, d'_{*,s}) = \left\{ 0 \longrightarrow A_{0,s} \xrightarrow{d'_{0,s}} A_{1,s} \xrightarrow{d'_{1,s}} A_{2,s} \xrightarrow{d'_{2,s}} \dots \right\}$$

per ogni $s \in \mathbb{N}$,

$$(A_{r,*}, d''_{r,*}) = \left\{ 0 \longrightarrow A_{r,0} \xrightarrow{d''_{r,0}} A_{r,1} \xrightarrow{d''_{r,1}} A_{r,2} \xrightarrow{d''_{r,2}} \dots \right\}$$

per ogni $r \in \mathbb{N}$,

e indicheremo i loro gruppi di coomologia con :

$$(15.80) \quad \begin{aligned} {}''E^{q,s} &= H^q(A_{*,s}, d'_{*,s}) = \frac{\ker d'_{q,s}}{\operatorname{im} d'_{q-1,s}} \quad \text{ed} \\ {}'E^{r,q} &= H^q(A_{r,*}, d''_{r,*}) = \frac{\ker d''_{r,q}}{\operatorname{im} d''_{r,q-1}}. \end{aligned}$$

La *successione spettrale*⁴ mette in relazione i gruppi di coomologia $H^q(A_{*,s}, d'_{*,s})$, $H^q(A_{r,*}, d''_{r,*})$ e i gruppi di coomologia $H^q(A_{[*]}, d_*)$ del complesso totale.

Osserviamo che per le (15.72) abbiamo in particolare :

$$d'_{r,s}(\ker d''_{r+1,s}) \subset \ker d''_{r+1,s} \quad \text{e} \quad d'_{r,s}(\operatorname{im} d''_{r,s-1}) \subset \operatorname{im} d''_{r,s},$$

ove abbiamo posto per convenzione $d'_{-1,s} = 0$ e $d''_{r,-1} = 0$ per ogni $r, s \in \mathbb{N}$. Definiamo gli omomorfismi $[d'_{r,s}] : {}'E^{r,s} \rightarrow {}'E^{r+1,s}$ per passaggio al quoziente, mediante il diagramma commutativo a righe esatte:

$$(15.81) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{im} d''_{r,s-1} & \longrightarrow & \ker d''_{r,s} & \longrightarrow & {}'E^{r,s} \longrightarrow 0 \\ & & d'_{r,s-1} \downarrow & & d'_{r,s} \downarrow & & \downarrow [d'_{r,s}] \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{im} d''_{r+1,s-1} & \longrightarrow & \ker d''_{r+1,s} & \longrightarrow & {}'E^{r+1,s} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Per ogni intero $s \geq 0$, otteniamo un complesso:

$$(15.82) \quad 0 \longrightarrow {}'E^{0,s} \xrightarrow{[d'_{0,s}]} {}'E^{1,s} \xrightarrow{[d'_{1,s}]} {}'E^{2,s} \xrightarrow{[d'_{2,s}]} \dots$$

In modo analogo, definendo gli omomorfismi $[d''_{r,s}] : {}''E^{r,s} \rightarrow {}''E^{r,s+1}$ mediante i diagrammi commutativi a righe esatte:

$$(15.83) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} d'_{r-1,s} & \longrightarrow & \ker d'_{r,s} & \longrightarrow & {}''E^{r,s} \longrightarrow 0 \\ & & d''_{r-1,s} \downarrow & & d''_{r,s} \downarrow & & \downarrow [d''_{r,s}] \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} d'_{r-1,s+1} & \longrightarrow & \ker d'_{r,s+1} & \longrightarrow & {}''E^{r,s+1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

ed otteniamo quindi, per ogni intero $r \geq 0$, un complesso :

$$(15.84) \quad 0 \longrightarrow {}''E^{r,0} \xrightarrow{[d''_{r,0}]} {}''E^{r,1} \xrightarrow{[d''_{r,1}]} {}''E^{r,2} \xrightarrow{[d''_{r,2}]} \dots$$

Indichiamo come al solito con

$$(15.85) \quad H^q({}'E^{*,s}, [d'_{*,s}]) = \frac{\ker [d'_{q,s}]}{\operatorname{im} [d'_{q-1,s}]} \quad \text{e} \quad H^q({}''E^{r,*}, [d''_{r,*}]) = \frac{\ker [d''_{r,q}]}{\operatorname{im} [d''_{r,q-1}]}$$

i gruppi di coomologia dei complessi (15.82) e (15.84).

⁴Vedi ad esempio: Roger Godement: **Topologie algébrique et théorie des faisceaux** (Troisième édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252), Hermann, Paris, 1973, pp viii+283.

LEMMA 15.9.2. Per ogni intero $q \geq 0$ vi è un unico omomorfismo

$$(15.86) \quad j'_q : H^q('E^{*,0}, [d'_{*,0}]) \rightarrow H^q(A_{[*]}, d_*)$$

che renda commutativo il diagramma a colonne esatte:

$$(15.87) \quad \begin{array}{ccc} \ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0} & \longrightarrow & \ker d_q \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q('E^{*,0}, [d'_{*,0}]) & \longrightarrow & H^q(A_{[*]}, d_*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Ogni elemento di $H^q('E^{*,0}, [d'_{*,q}])$ è rappresentato da una classe di coomologia di $H^0(A_{q,*}, d''_{q,*})$, cioè da un $x_{q,0} \in \ker d''_{q,0}$.

La condizione di cociclo $[d'_{q,0}][x_{q,0}] = 0$ dà $d'_{q,0}x_{q,0} = 0$ e dunque abbiamo un'applicazione surgettiva naturale $\ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0} @ \gg H^q('E^{*,0}, [d'_{*,0}])$. Osserviamo che se $x_{q,0} \in \ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0}$, allora $d x_{q,0} = d_q x_{q,0} = d'_{q,0} x_{q,0} + d''_{q,0} x_{q,0} = 0$ e quindi $\ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0} \hookrightarrow \ker d_q$. Se $x_{q,0} = d' x_{q-1,0} = d'_{q-1,0} x_{q-1,0}$ per un elemento $x_{q-1,0} \in \ker d''_{q-1,0}$, allora abbiamo $d x_{q-1,0} = d' x_{q-1,0} = x_{q,0}$. Quindi l'inclusione $\ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0} \hookrightarrow \ker d_q$ trasforma cobordi in cobordi ed otteniamo per passaggio al quoziente il diagramma commutativo (15.87). \square

OSSERVAZIONE 15.9.3. Siano q ed s due interi con $q \geq 0$ ed $s > 0$. Un elemento di $'E^{q,s}$ è la classe di equivalenza in $H^s(A_{q,*}, d''_{q,*})$ di un elemento $x_{q,s} \in A_{q,s}$ che soddisfa $d'' x_{q,s} = 0$. Supponiamo che esso rappresenti un cociclo, cioè che

$$[d'] [x_{q,s}] = [d' x_{q,s}] = 0 \text{ in } H^s(A_{q+1,*}, d''_{q+1,*}).$$

Poiché $s > 0$, ciò significa che esiste un elemento $x_{q+1,s-1} \in A_{q+1,s-1}$ tale che $d' x_{q,s} = d'' x_{q+1,s-1}$.

Vale la seguente :

PROPOSIZIONE 15.9.4. Con le notazioni introdotte sopra : se

$$'E^{q,j} = H^j(A_{q,*}, d''_{q,*}) = 0$$

per ogni coppia d'interi $j, q > 0$, allora gli omomorfismi

$$j'_q : H^q('E^{*,0}, [d'_{*,0}]) @ \gg H^q(A_{[*]}, d_*)$$

sono isomorfismi per ogni intero $q \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che per $q = 0$ abbiamo

$$H^0('E^{*,0}, [d'_{*,0}]) \simeq \ker d'_{0,0} \cap d''_{0,0}, \quad H^0(A_{[*]}, d_*) \simeq \ker d_0,$$

e quindi j'_0 è sempre un isomorfismo perché $\ker d_0 = \ker d'_{0,0} \cap d''_{0,0}$.

Dimostriamo ora l'isomorfismo per $q > 0$.

J'_q è iniettiva. Sia $x_{q,0} \in \ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0}$ un rappresentante di una classe di $H^q(E^{*,0}, [d'_{*,0}])$. Se $J'_q([x_{q,0}]) = 0$, esiste un elemento $y_{[q-1]} \in A_{[q-1]}$ tale che $d_{q-1}y_{[q-1]} = x_{q,0}$. Decomponiamo $y_{[q-1]}$:

$$y_{[q-1]} = y_{q-1,0} + y_{q-2,1} + \cdots + y_{1,q-2} + y_{0,q-1}, \quad \text{con } y_{r,s} \in A_{r,s}.$$

L'equazione $d_{q-1}y_{[q-1]} = x_{q,0}$ equivale al sistema:

$$(*) \quad \begin{cases} d'_{q-1,0}y_{q-1,0} = x_{q,0} \\ d'_{q-2,1}y_{q-2,1} + d''_{q-1,0}y_{q-1,0} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ d'_{0,q-1}y_{0,q-1} + d''_{1,q-2}y_{1,q-2} = 0 \\ d''_{0,q-1}y_{0,q-1} = 0. \end{cases}$$

In particolare, $x_{q,0}$ definisce la classe nulla in $H^q(E^{*,0}, [d'_{*,0}])$ se esiste una soluzione $y_{[q]}$ di (*) con $y_{j,q-j-1} = 0$ per ogni $j < q-1$.

Se $q = 1$, ogni soluzione di (*) è della forma $y_{[0]} = y_{0,0}$. Quindi: J'_1 è sempre iniettiva.

Per dimostrare l'iniettività di J'_q per gli interi $q > 1$, dimostreremo per ricorrenza che per ogni $0 \leq k \leq q-1$

(P'_k) esiste una soluzione $y_{[q-1]}^k$ di (*) con $y_{j,q-j-1}^k = 0$ se $j < k$.

Abbiamo già osservato che l'ipotesi che $J'_q([x_{q,0}]) = 0$ ci dice che ciò è vero per $k = 0$. Supponiamo ora, per un intero k con $0 \leq k < q-1$, di avere una soluzione $y_{[q-1]}^k$ di $d_{q-1}y_{[q-1]}^k = x_{q,0}$ con $y_{j,q-j-1}^k = 0$ se $j < k$. In particolare per (*) risulta $d''_{k,q-k-1}y_{k,q-k-1}^k = 0$. È $(q-k-1) > 0$ e perciò per ipotesi $H^{q-k-1}(A_{k,*}, d''_{k,*}) = 0$ e dunque esiste un elemento $z_{k,q-k-2} \in A_{k,q-k-2}$ tale che $d''_{k,q-k-2}z_{k,q-k-2} = y_{k,q-k-1}^k$. Allora $y_{[q-1]}^{k+1} = y_{[q-1]}^k - d_{q-2}z_{k,q-k-2}$ soddisfa $d_{q-1}y_{[q-1]}^{k+1} = x_{q,0}$ e $y_{j,q-j-1}^{k+1} = 0$ se $j < k+1$.

La $y_{[q-1]}^{q-1}$ è della forma $y_{[q-1]}^{q-1} = x_{q-1,0}$ e quindi l'equazione $d_{[q-1]}y_{[q-1]}^{q-1} = x_{q,0}$ significa che $d'_{q-1,0}x_{q-1,0} = x_{q,0}$ e $d''_{q-1,0}x_{q-1,0} = 0$. Questo prova che $x_{q,0}$ rappresenta la classe di coomologia nulla in $H^q(E^{*,0}, [d'_{*,0}])$.

J'_q è surgettiva. Sia η una classe di coomologia in $H^q(A_{[*]}, d_*)$. Sia $x_{[q]} \in \ker d_q$ un suo rappresentante. Scriviamo $x_q = x_{q,0} + x_{q-1,1} + \cdots + x_{1,q-1} + x_{0,q}$. L'equazione $d_q x_{[q]} = 0$ equivale al sistema:

$$(**) \quad \begin{cases} d'_{q,0}x_{q,0} = 0 \\ d'_{q-1,1}x_{q-1,1} + d''_{q,0}x_{q,0} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ d'_{0,q}x_{0,q} + d''_{1,q-1}x_{1,q-1} = 0 \\ d''_{0,q}x_{0,q} = 0. \end{cases}$$

Se fosse $x_{j,q-j} = 0$ per ogni $j < q$, allora $x_{[q]} = x_{q,0}$ e per (**) l'elemento $x_{q,0}$ apparterrebbe a $\ker d''_{q,0} \cap \ker d'_{q,0}$ e definirebbe una classe di coomologia ξ di

$H^q(E^{*,0}, [d'_{*,0}])$ con $j'_q(\xi) = \eta$. Per dimostrare la surgettività di j'_q dimostreremo quindi per ricorrenza:

$$(P''_k) \quad \begin{cases} \text{per ogni intero } k \text{ con } 0 \leq k \leq q \text{ esiste un rappresentante} \\ x_{[q]}^k \in \ker d_q \text{ di } \eta \text{ con } x_{j,q-j}^k = 0 \text{ per ogni intero } j < k. \end{cases}$$

Per $k = 0$ possiamo scegliere come $x_{[q]}^0$ un qualsiasi rappresentante di η in $\ker d_q$. Supponiamo ora che $0 < k < q$ e vi sia un $x_{[q]}^k \in \eta$ con $x_{j,q-j}^k = 0$ per ogni intero $j < k$. Abbiamo in particolare $d''_{k,q-k} x_{k,q-k} = 0$. Poiché $q - k > 0$, per ipotesi $H^{q-k}(A_{k,*}, d''_{k,*}) = 0$ e quindi esiste $y_{k,q-k-1} \in A_{k,q-k-1}$ tale che $d''_{k,q-k-1} y_{k,q-k-1} = x_{k,q-k}$. Poniamo allora $x_{[q]}^{k+1} = x_{[q]}^k - d_{q-1} y_{k,q-k-1}$, ottenendo in questo modo un elemento $x_{[q]}^{k+1} \in \eta$ con $x_{j,q-j}^{k+1} = 0$ se $j < k + 1$.

Per $k = q$, l'elemento $x_{[q]}^q = x_{q,0}^q \in \ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0}$ definisce una classe $\xi \in H^q(E^{*,0}, [d'_{*,0}])$ con $j'_q(\xi) = \eta$. \square

In modo del tutto analogo, abbiamo:

PROPOSIZIONE 15.9.5. *Per ogni intero $q \geq 0$ vi è un unico omomorfismo*

$$(15.88) \quad j''_q : H^q(E^{0,*}, [d''_{0,*}]) \longrightarrow H^q(A_{[*]}, d_*)$$

che renda commutativo il diagramma a colonne esatte:

$$(15.89) \quad \begin{array}{ccc} \ker d'_{0,q} \cap \ker d''_{0,q} & \longrightarrow & \ker d_q \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(E^{0,*}, [d''_{0,*}]) & \longrightarrow & H^q(A_{[*]}, d_*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Se

$${}''E^{j,q} = H^j(A_{*,q}, d'_{*,q}) = 0$$

per ogni coppia d'interi $j, q > 0$, allora gli omomorfismi (15.88) sono isomorfismi per ogni intero $q \geq 0$.

15.10. Il teorema di Leray sui ricoprimenti aciclici

Sia \mathcal{S} un fascio su uno spazio topologico X . Ad ogni aperto Ω di X associamo la restrizione $\mathcal{S}|_{\Omega}$ di \mathcal{S} ad Ω . Essa si definisce con la corrispondenza che ad ogni aperto U di Ω associa il gruppo $\mathcal{S}|_{\Omega}(U) = \mathcal{S}(U)$.

Se q è un intero non negativo, porremo $H^q(\Omega, \mathcal{S}) := H^q(\Omega, \mathcal{S}|_{\Omega})$. Per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X , $\mathcal{U} \cap \Omega := \{U_i \cap \Omega\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di Ω . Possiamo quindi definire per ogni intero $q \geq 0$ delle applicazioni naturali:

$$\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\rho_{\mathcal{U} \cap \Omega}} \mathcal{C}^q(\mathcal{U} \cap \Omega, \mathcal{S}|_{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\Omega, \mathcal{S}|_{\Omega}) := \mathcal{C}^q(\Omega, \mathcal{S}).$$

Poiché le operazioni di restrizione e di cobordo commutano, avremo anche :

$$\rho_{\mathcal{U} \cap \Omega}^{\mathcal{U}}(\mathcal{L}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})) \subset \mathcal{L}^q(\mathcal{U} \cap \Omega, \mathcal{S}), \quad \rho_{\mathcal{U} \cap \Omega}^{\mathcal{U}}(\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})) \subset \mathcal{B}^q(\mathcal{U} \cap \Omega, \mathcal{S}),$$

Fissato un ricoprimento aperto \mathcal{U} , definiamo per ogni intero $q \geq 0$ il fascio $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}^q \mathcal{S}$, facendo corrispondere ad ogni aperto Ω di X il gruppo $\mathcal{C}^q(\mathcal{U} \cap \Omega, \mathcal{S})$.

Poiché \mathcal{S} è un fascio, per ogni aperto Ω di X abbiamo una successione esatta :

$$(15.90) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{S}(\Omega) & \xrightarrow{i_{\Omega}} & \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^0 \mathcal{S}(\Omega) & \xrightarrow{\delta_0^{\mathcal{U} \cap \Omega}} & \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^1 \mathcal{S}(\Omega) \\ & & & & \parallel & & \parallel \\ & & & & \mathcal{C}^0(\mathcal{U} \cap \Omega, \mathcal{S}) & & \mathcal{C}^1(\mathcal{U} \cap \Omega, \mathcal{S}) \end{array}$$

ed otteniamo perciò la successione esatta di fasci

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{i} \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^0 \mathcal{S} \xrightarrow{\delta_q^{\mathcal{U} \cap *}} \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^1 \mathcal{S}.$$

Gli omomorfismi di cobordo $\delta_q^{\mathcal{U} \cap \Omega} : \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^q \mathcal{S}(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^{q+1} \mathcal{S}(\Omega)$ definiscono un omomorfismo di fasci :

$$(15.91) \quad \delta_q^{\mathcal{U} \cap *} : \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^q \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^{q+1} \mathcal{S}.$$

Vale il seguente :

LEMMA 15.10.1. *Se \mathcal{U} è un ricoprimento aperto localmente finito di X , allora la successione di fasci di gruppi abeliani Sia X uno spazio paracompatto. Allora, per ogni fascio di gruppi abeliani \mathcal{S} su X , la successione di fasci :*

$$(15.92) \quad \begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{S} & \xrightarrow{i} & \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^0 \mathcal{S} & \xrightarrow{\delta_0^{\mathcal{U} \cap *}} & \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^1 \mathcal{S} & \xrightarrow{\delta_1^{\mathcal{U} \cap *}} & \dots \\ \dots & \xrightarrow{\delta_{q-2}^{\mathcal{U} \cap *}} & \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^{q-1} \mathcal{S} & \xrightarrow{\delta_{q-1}^{\mathcal{U} \cap *}} & \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^q \mathcal{S} & \xrightarrow{\delta_q^{\mathcal{U} \cap *}} & \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^{q+1} \mathcal{S} & \xrightarrow{\delta_{q+1}^{\mathcal{U} \cap *}} & \dots \end{array}$$

è esatta.⁵

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo osservato sopra che $\text{im } i = \ker \delta_0^{\mathcal{U} \cap *}$.

Resta quindi da dimostrare che $\text{im } \delta_{q-1}^{\mathcal{U} \cap *} = \ker \delta_q^{\mathcal{U} \cap *}$ quando $q > 0$.

Sia $q > 0$, $p \in X$ e sia $\xi \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^q \mathcal{S}_p$ con $\delta_q^{\mathcal{U} \cap *}(xi) = 0$. Possiamo rappresentare ξ mediante una $f \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U} \cap \Omega, \mathcal{S})$, ove Ω è un intorno aperto di p in X . A meno di sostituire Ω con un intorno più piccolo di p in X , possiamo supporre che $\delta_q^{\mathcal{U} \cap \Omega}(f) = 0$.

Sia I_p l'insieme finito degli indici $i \in I$ per cui $p \in U_i$. Allora

$$W = \Omega \cap \left(\bigcap_{i \in I_p} U_i \right) \setminus \left(\bigcup_{i \in I \setminus I_p} \bar{U}_i \right)$$

è un intorno aperto di p in X e $\mathcal{U} \cap W$ contiene solo un numero finito di aperti non vuoti, tutti contenenti il punto p . Inoltre per ogni $(i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U} \cap W)$ abbiamo $W \subset U_{i_0, i_1, \dots, i_q}$. Definiamo allora $\phi \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U} \cap W, \mathcal{S})$ fissando

⁵Diciamo anche che (15.92) è una *risoluzione* del fascio \mathcal{S} .

arbitrariamente un indice $i_0 \in I_p$ e ponendo $\phi_{i_1, \dots, i_q} = r_{U_{i_1, \dots, i_q} \cap W}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}}(f_{i_0, i_1, \dots, i_q})$. Abbiamo (dove per semplicità di notazione abbiamo ommesso le funzioni di restrizione):

$$(\delta_{q-1}(\phi))_{j_0, j_1, \dots, j_q} = \sum_{h=0}^q (-1)^h f_{i_0, j_0, \dots, \hat{j}_h, \dots, j_q} = f_{j_0, \dots, j_q},$$

per la condizione che $\delta_q^{\mathcal{U} \cap \Omega}(f) = 0$.

La dimostrazione è completa. \square

Dalla Proposizione 15.8.4 otteniamo allora:

PROPOSIZIONE 15.10.2. *Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto localmente finito di uno spazio paracompatto X . Allora per ogni fascio di gruppi abeliani \mathcal{S} su X e per ogni intero $q \geq 0$ abbiamo una successione esatta di gruppi abeliani:*

$$(15.93) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^q(X, \mathcal{S}) & \xrightarrow{i_q} & \mathcal{C}^q(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^0 \mathcal{S}) & \longrightarrow & \\ & & \xrightarrow{(\delta_0^{\mathcal{U} \cap *})_q} & \mathcal{C}^q(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^1 \mathcal{S}) & \xrightarrow{(\delta_1^{\mathcal{U} \cap *})_q} & \dots & \\ & & & \dots & \xrightarrow{(\delta_{h-2}^{\mathcal{U} \cap *})_q} & \mathcal{C}^q(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^{h-1} \mathcal{S}) & \longrightarrow \\ & & \xrightarrow{(\delta_{h-1}^{\mathcal{U} \cap *})_q} & \mathcal{C}^q(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^h \mathcal{S}) & \xrightarrow{(\delta_h^{\mathcal{U} \cap *})_q} & \mathcal{C}^q(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^{h+1} \mathcal{S}) & \xrightarrow{(\delta_{h+1}^{\mathcal{U} \cap *})_q} \dots \end{array}$$

Un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X si dice \mathcal{S} -aciclico se

$$(15.94) \quad H^j(U_{i_0, i_1, \dots, i_q}, \mathcal{S}) = 0 \quad \forall q \geq 0, \forall (i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U}), \forall j > 0.$$

Vale il:

TEOREMA 15.10.3 (Leray). *Sia \mathcal{S} un fascio su uno spazio topologico paracompatto X . Se \mathcal{U} è un ricoprimento aperto localmente finito ed \mathcal{S} -aciclico di X , allora gli omomorfismi naturali:*

$$(15.95) \quad H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{S})$$

sono isomorfismi per ogni intero $q \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo

$$A_{r,s} = \mathcal{C}^r(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S})$$

per ogni coppia di interi $r, s \geq 0$, e definiamo gli omomorfismi

$$\begin{cases} d'_{r,s} : A_{r,s} \longrightarrow A_{r+1,s} \\ d''_{r,s} : A_{r,s} \longrightarrow A_{r,s+1} \end{cases}$$

ponendo $d'_{r,s}$ uguale al differenziale del complesso:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta_0} & \mathcal{C}^1(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta_1} & \dots \\ & & \dots & \xrightarrow{\delta_{q-1}} & \mathcal{C}^q(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta_q} & \mathcal{C}^{q+1}(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta_{q+1}} \dots \end{array}$$

e definendo $d''_{r,s}$ come gli omomorfismi indotti da quelli del complesso di fasci (15.92):

$$d''_{r,s} = (\delta_r^{\mathcal{U} \cap *})_s : \mathcal{C}^r(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^r(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^{s+1} \mathcal{S}).$$

Per la Proposizione 15.10.2, abbiamo $'E^{r,s} = 0$ per ogni $r \geq 0$ ed ogni $s > 0$ ed $'E^{r,0} = \mathcal{C}^r(X, \mathcal{S})$. Abbiamo perciò:

$$H^q('E^{*,0}, [d''_{*,0}]) = H^q(X, \mathcal{S})$$

e, per la Proposizione 15.9, l'applicazione:

$$j'_q : H^q(X, \mathcal{S}) \longrightarrow H^q(A_{[*]}, d_*)$$

è un isomorfismo per ogni $q \geq 0$. Osserviamo come questo isomorfismo sia conseguenza delle ipotesi che X sia paracompatto ed \mathcal{U} localmente finito, e sia valido a prescindere dall'ipotesi che \mathcal{U} sia \mathcal{S} -aciclico.

Indichiamo, per ogni $q \geq 0$, con $N_q(\mathcal{U})$ l'insieme:

$$N_q(\mathcal{U}) = \{ \{i_0, i_1, \dots, i_q\} \mid (i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U}) \}.$$

Abbiamo allora:

$$A_{r,s} \simeq \prod_{\{i_0, i_1, \dots, i_s\} \in N_s(\mathcal{U})} \mathcal{C}^r(U_{i_0, i_1, \dots, i_s}, \mathcal{S}).$$

Per verificare questo isomorfismo, definiamo per ogni aperto Ω di X il fascio \mathcal{S}^Ω mediante:

$$\mathcal{S}^\Omega(U) = \mathcal{S}(U \cap \Omega) \text{ per ogni aperto } U \text{ di } X.$$

Il fascio $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S}$ è prodotto diretto, localmente finito, dei fasci $\mathcal{S}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_s}}$. Per la Proposizione 15.10.2 l'isomorfismo di fasci:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S} \simeq \prod_{\{i_0, i_1, \dots, i_s\} \in N_s(\mathcal{U})} \mathcal{S}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_s}}$$

dà l'isomorfismo di gruppi abeliani:

$$\begin{aligned} A_{r,s} &= \mathcal{C}^r(X, \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^s \mathcal{S}) \\ &\simeq \prod_{\{i_0, i_1, \dots, i_s\} \in N_s(\mathcal{U})} \mathcal{C}^r(X, \mathcal{S}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_s}}) \\ &\simeq \prod_{\{i_0, i_1, \dots, i_s\} \in N_s(\mathcal{U})} \mathcal{C}^r(U_{i_0, i_1, \dots, i_s}, \mathcal{S}). \end{aligned}$$

Gli omomorfismi $d''_{r,s}$ si fattorizzano attraverso gli omomorfismi

$$\delta_r^{U_{i_0, i_1, \dots, i_s}} : \mathcal{C}^r(U_{i_0, i_1, \dots, i_s}, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^{r+1}(U_{i_0, i_1, \dots, i_s}, \mathcal{S}).$$

Quindi l'ipotesi che il ricoprimento \mathcal{U} sia \mathcal{S} -aciclico ci dà $''E^{r,s} = 0$ per ogni $s \geq 0$ ed ogni $r > 0$.

Abbiamo poi: $''E^{0,s} \simeq \mathcal{C}^s(\mathcal{U}, \mathcal{S})$

Auindi, per la Proposizione 15.9.5, per ogni ricoprimento aperto localmente finito \mathcal{U} di X paracompatto l'omomorfismo

$$j''_q : H^q(''E^{0,*}, [d''_{0,*}]) \simeq H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow H^q(A_{[*]}, d_*)$$

è un isomorfismo per ogni $q \geq 0$.

Componendo i due isomorfismi, per ogni intero $q \geq 0$, otteniamo l'isomorfismo cercato :

$$(j_q'')^{-1} \circ j_q' : H^q(X, \mathcal{S}) \xrightarrow{\cong} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}), \quad \forall q \geq 0.$$

□

OSSERVAZIONE 15.10.4. Ricordiamo che, senza nessuna ipotesi sul ricoprimento \mathcal{U} , ma come conseguenza della definizione di fascio, l'omomorfismo

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{S})$$

è sempre un isomorfismo e che l'omomorfismo

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{S})$$

è sempre iniettivo.

15.11. Il Teorema di de Rham

Sia \mathcal{S} un fascio di gruppi abeliani su uno spazio topologico X . Si dice *risoluzione* di \mathcal{S} una qualsiasi successione esatta di fasci su X :

$$(15.96) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{i} \mathcal{S}_0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{S}_1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{S}_2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots$$

La risoluzione (15.96) di \mathcal{S} si dice *aciclica* se $H^q(X, \mathcal{S}_h) = 0$ per ogni $q > 0$ ed $h \geq 0$.

TEOREMA 15.11.1 (de Rham). *Se X è uno spazio paracompatto e (15.96) è una risoluzione aciclica di un fascio \mathcal{S} su X , allora i gruppi di coomologia di Čech $H^q(X, \mathcal{S})$ sono isomorfi ai gruppi di coomologia $H^q(\mathcal{S}_*(X), \alpha_*)$ del complesso :*

$$(15.97) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S}_0(X) \xrightarrow{\alpha_{0*}} \mathcal{S}_1(X) \xrightarrow{\alpha_{1*}} \mathcal{S}_2(X) \xrightarrow{\alpha_{2*}} \mathcal{S}_3(X) \xrightarrow{\alpha_{3*}} \dots$$

DIMOSTRAZIONE. Utilizziamo i risultati e le notazioni del paragrafo §15.9. Per ogni coppia di interi non negativi r, s definiamo il gruppo abeliano

$$A_{r,s} = \mathcal{C}^r(X, \mathcal{S}_s).$$

Definiamo un complesso doppio di cocatene introducendo gli omomorfismi :

$$d_r' := \delta_r : A_{r,s} = \mathcal{C}^r(X, \mathcal{S}_s) \ni f \longrightarrow \delta_r(f) \in A_{r+1,s} = \mathcal{C}^{r+1}(X, \mathcal{S}_s),$$

$$d_s'' := (-1)^r (\alpha_{s*})_r : A_{r,s} = \mathcal{C}^r(X, \mathcal{S}_s) \ni f \longrightarrow (-1)^r (\alpha_{s*})_r(f) \in \mathcal{C}^r(X, \mathcal{S}_{s+1}).$$

Per l'ipotesi che (15.96) sia una risoluzione e per la Proposizione 15.8.4, $'E^{r,s} = 0$ per ogni $r \geq 0$ e per ogni $s > 0$. Per l'ipotesi che (15.96) sia aciclica, $''E^{r,s} = 0$ per ogni $r > 0$ e per ogni $s \geq 0$. Abbiamo poi :

$$\begin{aligned} 'E^{r,0} = \mathcal{C}^r(X, \mathcal{S}) & \quad \text{e} & \quad H^q('E^{*,0}, [d'_{*,0}]) = H^q(X, \mathcal{S}); \\ ''E^{0,s} = \mathcal{S}_s(X) & \quad \text{e} & \quad H^q(''E^{0,*}, [d''_{0,*}]) = H^q(\mathcal{S}_*(X), \alpha_*). \end{aligned}$$

Per la Proposizione 15.9, per ogni $q \geq 0$ l'omomorfismo

$$j_q' : H^q('E^{*,0}, [d'_{*,0}]) = H^q(X, \mathcal{S}) \longrightarrow H^q(A_{[*], d_*})$$

è un isomorfismo. Per la Proposizione 15.9.5, per ogni $q \geq 0$ l'omomorfismo

$$j_q'' : H^q(''E^{0,*}, [d''_{0,*}]) = H^q(\mathcal{S}_*(X), \alpha_*) \longrightarrow H^q(A_{[*], d_*})$$

è un isomorfismo. Allora

$$(j'_q)^{-1} \circ j'_q : H^q(X, \mathcal{S}) \longrightarrow H^q(\mathcal{S}_*(X), \alpha_*)$$

è per ogni $q \geq 0$ l'isomorfismo cercato. \square

OSSERVAZIONE 15.11.2. L'isomorfismo $j'_q : H^q(X, \mathcal{S}) \longrightarrow H^q(A_{[*]}, d_*)$ vale sotto la semplice ipotesi che (15.96) sia una risoluzione di \mathcal{S} . Quindi, sotto questa ipotesi è comunque definito un omomorfismo

$$j''_q : H^q(\mathcal{S}_*(X), \alpha_*) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{S}).$$

Esso è un isomorfismo quando (15.96) è aciclica su X .

15.12. Fasci fiacchi

Per utilizzare il Teorema di de Rham, è utile definire alcune categorie di fasci che sono coomologicamente banali: risoluzioni acicliche ottenute utilizzando fasci di questi tipi ci permettono di ricondurre il calcolo della coomologia di Čech a quello della coomologia di complessi differenziali.

DEFINIZIONE 15.12.1. Un fascio \mathcal{F} su uno spazio topologico X si dice *fiacco* se per ogni aperto Ω di X l'applicazione di restrizione: $r_\Omega^X : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(\Omega)$ è surgettiva.

ESEMPIO 15.12.2. Consideriamo su $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ la topologia di Zariski, in cui gli aperti sono i complementari di sottovarietà algebriche. Allora il fascio $\tilde{\mathbb{C}}$ delle funzioni localmente costanti su $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è fiacco.

ESEMPIO 15.12.3. Sia \mathcal{S} un fascio su uno spazio topologico X . Indichiamo con $\mathcal{S}^\#$ il fascio dei germi di sezioni discontinue⁶ di \mathcal{S} , associato al prefascio canonico

$$\text{Ap}(X) \ni U \longrightarrow \{f \in \mathcal{S}^U \mid \pi \circ f(p) = p, \forall p \in U\}.$$

Il fascio $\mathcal{S}^\#$ è un fascio fiacco ed abbiamo un ovvio morfismo iniettivo di fasci $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{S}^\#$.

PROPOSIZIONE 15.12.4. L'immagine diretta di un fascio fiacco mediante un'applicazione continua è un fascio fiacco.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio fiacco sullo spazio topologico X , Y un altro spazio topologico ed $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Sia V un aperto di Y . Abbiamo allora un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(X) & \xrightarrow{r_{f^{-1}(V)}^X} & \mathcal{S}(f^{-1}(V)) \\ \parallel & & \parallel \\ f_*\mathcal{S}(Y) & \xrightarrow{r_V^Y} & f_*\mathcal{S}(V). \end{array}$$

⁶Cioè non necessariamente continue.

Dalla surgettività di $\mathcal{S}(X) \xrightarrow{r_{f^{-1}(V)}^X} \mathcal{S}(f^{-1}(V))$ segue quella di $f_*\mathcal{S}(Y) \xrightarrow{r_V^Y} f_*\mathcal{S}(V)$. \square

PROPOSIZIONE 15.12.5. *Sia*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}' \xrightarrow{\phi} \mathcal{S} \xrightarrow{\psi} \mathcal{S}'' \longrightarrow 0$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su X . Se \mathcal{S}' è fiacco, allora, per ogni aperto U di X la successione

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}'(U) \xrightarrow{\phi} \mathcal{S}(U) \xrightarrow{\psi} \mathcal{S}''(U) \longrightarrow 0$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché la restrizione ad un aperto di un fascio fiacco è ancora un fascio fiacco, possiamo, per semplicità, limitarci a considerare il caso in cui $U = X$. L'esattezza in $\mathcal{S}'(X)$ ed $\mathcal{S}(X)$ è conseguenza della definizione di fascio. Basterà quindi dimostrare che $\psi : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}''(X)$ è surgettiva. Sia $s'' \in \mathcal{S}''(X)$ e consideriamo la famiglia

$$\Phi = \{(U, s_U) \mid U \in \text{Ap}(X), s_U \in \mathcal{S}(U), \psi(s_U) = s''|_U\}.$$

Introduciamo la relazione d'ordine su Φ :

$$(U, s_U) \leq (V, s_V) \iff U \subset V, s_U = s_V|_U.$$

Chiaramente Φ è una famiglia induttiva. Per il Lemma di Zorn essa ammette un elemento massimale (U_0, s_{U_0}) . Se $U_0 = X$, abbiamo ottenuto la tesi. Supponiamo per assurdo che $U_0 \neq X$ e sia $p_0 \in \complement U_0$. Vi è allora un intorno V di p_0 in X ed una sezione $s_V \in \mathcal{S}(V)$ tale che $\psi(s_V) = s''|_V$. Se $V \cap U_0 = \emptyset$, allora

$$s_{U_0 \cup V} = \begin{cases} s_{U_0} & \text{su } U_0, \\ s_V & \text{su } V \end{cases}$$

ci dà un elemento $(U_0 \cup V, s_{U_0 \cup V}) \gneq (U_0, s_{U_0})$, contraddicendo la massimalità. Quindi $U_0 \cap V \neq \emptyset$ e $\psi(u_{U_0}|_{U_0 \cap V} - u_V|_{U_0 \cap V}) = 0$. Esiste allora $s'_{U_0 \cap V} \in \mathcal{S}'(U_0 \cap V)$ tale che $\phi(s'_{U_0 \cap V}) = u_{U_0}|_{U_0 \cap V} - u_V|_{U_0 \cap V}$. Poiché \mathcal{S}' è fiacco, abbiamo $s'_{U_0 \cap V} = s'|_{U_0 \cap V}$ per una $s' \in \mathcal{S}'(X)$. Allora

$$s_{U_0 \cup V} = \begin{cases} s_{U_0} & \text{su } U_0, \\ s_V + \phi(s')|_V & \text{su } V \end{cases}$$

è un elemento di $\mathcal{S}(U_0 \cup V)$ e $(U_0 \cup V, s_{U_0 \cup V}) \gneq (U_0, s_{U_0})$ contraddice la massimalità. Quindi $U_0 = X$. La dimostrazione è completa. \square

Segue allora

PROPOSIZIONE 15.12.6. *Sia*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}' \xrightarrow{\phi} \mathcal{S} \xrightarrow{\psi} \mathcal{S}'' \longrightarrow 0$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su X . Se \mathcal{S}' e \mathcal{S} sono fiacchi, allora anche \mathcal{S}'' è fiacco.

DIMOSTRAZIONE. Se U è un aperto di X ed $s''_U \in \mathcal{S}''(U)$, per la Proposizione 15.12.5 esiste un $s_U \in \mathcal{S}(U)$ tale che $\phi(s_U) = s''_U$. Poiché abbiamo supposto che \mathcal{S} fosse fiacco, vi è una $s \in \mathcal{S}(X)$ tale che $s_U = s|_U$. È allora $\psi(s) \in \mathcal{S}'(X)$ e $\psi(s)|_U = s''_U$. \square

PROPOSIZIONE 15.12.7. Se

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{S}^2 \longrightarrow \dots$$

è una successione esatta di fasci di gruppi abeliani fiacchi, allora, per ogni aperto U di X , la successione di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^0(U) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{S}^1(U) \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{S}^2(U) \longrightarrow \dots$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. L'esattezza in $\mathcal{S}^0(U)$ è conseguenza della definizione di fascio. Per ogni $h \geq 0$ abbiamo per ipotesi una successione esatta corta di fasci

$$0 \longrightarrow \ker \tilde{\delta}_h \longrightarrow \mathcal{S}^h \xrightarrow{\delta_h} \ker \tilde{\delta}_{h+1} \longrightarrow 0.$$

Dalla Proposizione 15.12.6 segue per ricorrenza che tutti i fasci $\ker \tilde{\delta}_h$ sono fiacchi. La tesi segue allora dalla Proposizione 15.12.5. \square

Vale il seguente :

LEMMA 15.12.8. Se \mathcal{F} è un fascio di gruppi abeliani fiacco su X , allora

$$(15.98) \quad H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$$

per ogni $q > 0$ ed ogni ricoprimento aperto localmente finito \mathcal{U} di X .

DIMOSTRAZIONE. Sia $q > 0$ e sia $f = (f_{i_0, i_1, \dots, i_q}) \in \mathcal{L}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Sia $<$ un buon ordinamento di I . Per ogni $i \in I$ che non sia massimo in I , indicheremo con $i+1$ l'elemento di I successivo ad i : $i+1$ è il minimo dell'insieme $\{j \in I \mid j > i\}$. Per ogni $i \in I$ definiamo gli aperti :

$$\Omega_i = \bigcup_{j < i} U_j \quad \text{e} \quad \Omega'_i = U_i \cup \Omega_i.$$

Supponiamo che, per un indice $\nu \in I$ fissato, $f^{(\nu)} \in \mathcal{L}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ abbia la proprietà :

$$(\dagger) \quad r_{U_{i_0, i_1, \dots, i_q} \cap \Omega'_\nu}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}}(f_{i_0, i_1, \dots, i_q}^{(\nu)}) = 0 \quad \forall (i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U}).$$

Esiste allora una $\psi^{(\nu)} \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ tale che

$$\begin{cases} (i) & r_{U_{i_1, \dots, i_q} \cap \Omega'_\nu}^{U_{i_1, \dots, i_q}}(\psi_{i_1, \dots, i_q}^{(\nu)}) = 0 \quad \forall (i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U}), \\ (ii) & \psi_{i_1, \dots, i_q}^{(\nu)} = 0 \quad \text{se} \quad (\nu, i_1, \dots, i_q) \notin \mathcal{N}_q(\mathcal{U}) \\ (iii) & r_{U_{i_0, i_1, \dots, i_q} \cap \Omega'_\nu}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}}((f^{(\nu)} - \delta_{q-1} \psi^{(\nu)})_{i_0, i_1, \dots, i_q}) = 0 \quad \forall (i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U}). \end{cases}$$

Per ogni $(i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_{q-1}(\mathcal{U})$ per cui $(\nu, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_q(\mathcal{U})$, vi è un elemento $\eta \in \mathcal{S}(U_{\nu, i_1, \dots, i_q} \cup \Omega'_\nu)$ la cui restrizione a U_{ν, i_1, \dots, i_q} è $f_{\nu, i_1, \dots, i_q}^{(\nu)}$ e la cui restrizione a

Ω_ν è 0. Poiché il fascio \mathcal{S} è fiacco, vi è allora una $\tilde{\eta} \in \mathcal{S}(X)$ la cui restrizione a $U_{\nu, i_1, \dots, i_q} \cup \Omega_\nu$ è uguale a η . Definiamo $\psi_{i_1, \dots, i_q}^{(\nu)}$ come la restrizione di $\tilde{\eta}$ a U_{i_1, \dots, i_q} . Se $(\nu, i_1, \dots, i_q) \notin \mathcal{N}_q(\mathcal{U})$ poniamo $\psi_{i_1, \dots, i_q}^{(\nu)} = 0$ su U_{i_1, \dots, i_q} . Chiaramente, possiamo fare in modo che la $\psi^{(\nu)}$ sia alternata rispetto agli indici ($(i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_{q-1}(\mathcal{U})$, dimodochè $\psi^{(\nu)} \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$).

La $\psi^{(\nu)}$ così costruita gode ovviamente delle proprietà (i), (ii). Per dimostrare che gode anche della (iii), basta verificare che

$$r_{U_{\nu, i_0, i_1, \dots, i_q}}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}} ((f - \delta_{q-1} \psi^{(\nu)})_{i_0, i_1, \dots, i_q}) = 0 \quad \text{se } (\nu, i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_{q+1}(\mathcal{U}),$$

in quanto $\Omega'_\nu = U_\nu \cup \Omega_\nu$ e

$$r_{U_{i_0, i_1, \dots, i_q} \cap \Omega_\nu}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}} (f_{i_0, i_1, \dots, i_q}) = 0 \quad \text{per ipotesi e}$$

$$r_{U_{i_0, i_1, \dots, i_q} \cap \Omega_\nu}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}} ((\delta_{q-1} \psi^{(\nu)})_{i_0, i_1, \dots, i_q}) = 0 \quad \text{per la definizione di } \psi^{(\nu)}.$$

Su U_{ν, i_0, \dots, i_q} risulta:

$$(\delta_{q-1} \psi^{(\nu)})_{i_0, \dots, i_q} = \sum_{h=0}^q (-1)^h f_{\nu, i_0, \dots, \hat{i}_h, \dots, i_q} = f_{i_0, \dots, i_q}$$

per la condizione di cociclo $\delta_q f = 0$, e questo mostra che vale anche la (ii).

Se i_{\min} è il minimo di I , poniamo $f^{(i_{\min})} = f$. La (\dagger) è verificata banalmente, perché $\Omega_{i_{\min}} = \emptyset$, e la costruzione appena descritta ci permette di trovare una $\psi^{(i_{\min})}$ che soddisfa (i) e (ii) per $\nu = i_{\min}$. Definiamo $f^{(i_{\min}+1)} = f - \delta_{q-1}(\psi^{(i_{\min})})$.

Dimostriamo per induzione transfinita che è possibile costruire delle famiglie $\{f^{(\nu)}\}_{\nu \in I}$, con $f^{(\nu)} \in \mathcal{L}^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, e $\{\psi^{(\nu)}\}_{\nu \in I}$, con $\psi^{(\nu)} \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, che verifichino per ogni $\nu \in I$ le proprietà (\dagger), (i), (ii), (iii) e

$$(\ddagger) \quad f^{(\nu+1)} = f^{(\nu)} - \delta_{q-1}(\psi^{(\nu)}) \quad \forall \nu \in I \quad \text{che non sia massimo.}$$

Fissiamo ora un $\mu \in I$ con $\mu > i_{\min}$ e supponiamo che si siano già ottenute le $\psi^{(j)}$ per tutti gli indici $j < \mu$. Consideriamo ora la somma

$$\sum_{j < \mu} \psi^{(j)}.$$

Poiché \mathcal{U} è localmente finita, per ogni punto p di X esiste un intorno Ω_p di p che interseca soltanto un numero finito di aperti U_i del ricoprimento. Quindi per ogni $(i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_{q-1}(\mathcal{U})$ le somme

$$\sum_{j < \mu} r_{U_{i_1, \dots, i_q} \cap \Omega_p}^{U_{i_1, \dots, i_q}} (\psi_{i_1, \dots, i_q}^{(j)})$$

contengono soltanto un numero finito di addendi diversi da zero. Infatti, per la proprietà (ii), è $r_{U_{i_1, \dots, i_q} \cap \Omega_p}^{U_{i_1, \dots, i_q}} (\psi_{i_1, \dots, i_q}^{(j)}) = 0$ se $(j, i_1, \dots, i_q) \notin \mathcal{N}_q(\mathcal{U} \cap \Omega_p)$ e per la

scelta di Ω_p il numero di tali j , per ogni scelta di $(i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_{q-1}(\mathcal{U})$, è finito. Possiamo allora definire:

$$f^{(\mu)} = f - \delta_{q-1} \left(\sum_{j < i} \psi^{(j)} \right).$$

Osserviamo che, se i ammette un elemento precedente, cioè se $\mu = \nu + 1$ per qualche $\nu \in I$, allora vale la (\ddagger).

Per la prima parte della dimostrazione, possiamo definire $\psi^{(\mu)}$ in modo che siano soddisfatte le (i), (ii), (iii) (con μ al posto di ν).

Una volta costruite le famiglie $\{f^{(\nu)}\}$ e $\{\psi^{(\nu)}\}$, osserviamo che la somma:

$$\psi = \sum_{\nu \in I} \psi^{(\nu)}$$

definisce un elemento $\psi \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ e che

$$(\clubsuit) \quad \delta_{q-1}(\psi) = f.$$

Ciò è vero perché, per ogni aperto Ω di X , se $(i_1, \dots, i_q) \in \mathcal{N}_{q-1}(\mathcal{U})$ e $(\nu, i_1, \dots, i_q) \notin \mathcal{N}_q(\mathcal{U} \cap \Omega)$, abbiamo $r_{U_{i_1, \dots, i_q} \cap \Omega}^{U_{i_1, \dots, i_q}}(\psi_{i_1, \dots, i_q}^{(\nu)}) = 0$. Quindi, poiché \mathcal{U} è localmente finito, le somme

$$\sum_{\nu \in I} \psi_{i_1, \dots, i_q}^{(\nu)}$$

sono localmente finite. Analogamente, $r_{U_{i_0, i_1, \dots, i_q} \cap \Omega}^{U_{i_0, i_1, \dots, i_q}}((f^{(\nu)} - f^{(\nu+1)})_{i_0, i_1, \dots, i_q}) = 0$ a meno che qualcuna delle $(q+1)$ uple $(\nu, i_0, \dots, \hat{i}_h, \dots, i_q)$ o $(\nu+1, i_0, \dots, \hat{i}_h, \dots, i_q)$ non appartengano a $\mathcal{N}_q(\mathcal{U} \cap \Omega)$. Perciò anche le somme:

$$\sum_{\nu \in I} (f_{i_0, \dots, i_q}^{\nu} - f_{i_0, \dots, i_q}^{\nu+1})$$

sono localmente finite e

$$\sum_{\nu \in I} (f_{i_0, \dots, i_q}^{\nu} - f_{i_0, \dots, i_q}^{\nu+1}) = f_{i_0, \dots, i_q}.$$

Otteniamo perciò la (\clubsuit), e quindi la tesi. \square

Utilizziamo il Lemma 15.12.8 per dimostrare il:

TEOREMA 15.12.9. *Sia X uno spazio paracompatto. Allora, per ogni fascio fiacco \mathcal{S} su X abbiamo $H^q(X, \mathcal{S}) = 0$ per ogni $q > 0$.*

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza del Lemma 15.12.8, perché, essendo X paracompatto, i gruppi di coomologia di Čech si possono calcolare utilizzando i ricoprimenti aperti localmente finiti. \square

Il complesso di Cech-de Rham

16.1. Il teorema di de Rham

TEOREMA 16.1.1. *Sia M una varietà differenziabile paracompatta ed \mathcal{S} un fascio di \mathcal{E} -moduli su M . Allora*

$$(16.1) \quad H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) = 0, \quad \forall q \geq 1,$$

per ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} di M .

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che, per ogni intero $q \geq 0$,

$$(16.2) \quad \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathcal{S}) = \{(f_{i_1, \dots, i_h}) \mid f_{i_1, \dots, i_h} \in \mathcal{S}(U_{i_1, \dots, i_h}), f_{i_{\sigma_1}, \dots, i_{\sigma_h}} = \varepsilon(\sigma) f_{i_1, \dots, i_h}\}$$

e che il differenziale del complesso

$$\dots \longrightarrow \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^{h+2}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow \dots$$

è definito da

$$\delta : \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}),$$

$$(\delta(f_{i_0, \dots, i_h}))_{i_0, i_1, \dots, i_{h+1}} = \sum_{j=0}^{h+1} (-1)^j f_{i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_{h+1}}|_{U_{i_0, i_1, \dots, i_{h+1}}}.$$

Sia $\{\chi_i\}_{i \in I}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento \mathcal{U} . Definiamo

$$\chi : \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \quad \text{mediante}$$

$$(\chi(f_{i_0, \dots, i_h}))_{i_1, \dots, i_h} = \sum_{i \in I} [\chi_i f_{i, i_1, \dots, i_h}], \quad \text{ove}$$

$$\mathcal{S}(U_{i_1, \dots, i_h}) \ni [\chi_i f_{i, i_1, \dots, i_h}] = \begin{cases} \chi_i f_{i, i_1, \dots, i_h} & \text{in } U_{i, i_1, \dots, i_h}, \\ 0 & \text{in } U_{i_1, \dots, i_h} \setminus U_{i, i_1, \dots, i_h}. \end{cases}$$

La tesi segue allora dall'identità

$$(\delta \circ \chi + \chi \circ \delta)f = f, \quad \forall f \in \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathcal{S}), \quad \forall h \geq 1.$$

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} (\chi \circ \delta(f))_{i_0, \dots, i_h} &= \chi \left(\sum_{j=0}^{h+1} (-1)^j f_{i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_{h+1}}|_{U_{i_0, i_1, \dots, i_{h+1}}} \right) \\ &= \sum_i \chi_i f_{i_0, \dots, i_h} - \sum_{j=0}^h [\chi_i f_{i, i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_h}] \\ &= f_{i_0, \dots, i_h} - \sum_{j=0}^h (-1)^j [\chi_i f_{i, i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_h}] \\ &= f_{i_0, \dots, i_h} - (\delta \circ \chi(f))_{i_0, \dots, i_h}. \end{aligned}$$

□

Se \mathcal{S} è un fascio su M ed $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di M , definiamo

$$(16.3) \quad \delta_0 : \mathcal{S}(M) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}), \text{ mediante } (\delta_0 s)_i = s|_{U_i}, \quad \forall i \in I.$$

Se \mathcal{S} è un fascio di gruppi abeliani, allora la

$$(16.4) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S}(M) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{S})$$

è esatta per definizione di fascio.

Dal Teorema 16.1.1 otteniamo allora

COROLLARIO 16.1.2. *Se M è una varietà differenziabile paracompatta ed \mathcal{S} un fascio di \mathcal{E} -moduli su M , allora la successione*

$$(16.5) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{S}(M) & \xrightarrow{\delta_0} & \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \\ & & & & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{S}) & \longrightarrow & \dots & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \\ & & & & & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^{h+2}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

è esatta. □

Per ogni intero $q \geq 0$, i germi di forme differenziali alternate omogenee di grado q formano un fascio di \mathcal{E} -moduli su M , che denoteremo con Ω^q .

Per ogni coppia di interi non negativi h, q definiamo

$$(16.6) \quad \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \Omega^q) = \{f = (f_{i_0, \dots, i_h}) \mid f_{i_0, \dots, i_h} \in \Omega^q(U_{i_0, \dots, i_h}), f_{i_{\sigma_0}, \dots, i_{\sigma_h}} = \varepsilon(\sigma) f_{i_0, \dots, i_h}\}.$$

Abbiamo i due omomorfismi

$$d : \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \Omega^q) \longrightarrow \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \Omega^{q+1}), \quad \text{con} \\ (df)_{i_0, \dots, i_h} = (df_{i_0, \dots, i_h}),$$

$$\delta : \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \Omega^q) \longrightarrow \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{U}, \Omega^q), \quad \text{con} \\ (\delta f)_{i_0, i_1, \dots, i_h} = \sum_{j=0}^h (-1)^j f_{i_0, \dots, \widehat{i_j}, \dots, i_h} |_{U_{i_0, i_1, \dots, i_h}}.$$

Osserviamo che

$$d \circ \delta = \delta \circ d.$$

LEMMA 16.1.3. *Sia M una varietà differenziabile paracompatta. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di M . Allora*

(1) *per ogni $f_q \in \mathcal{L}^q(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}})$ esistono una successione $\{f_{q-h}^h\}$ ed un elemento f^q con le proprietà:*

$$(16.7) \quad \begin{cases} f_{q-h-1}^h \in \mathcal{C}^{q-h-1}(\mathcal{U}, \Omega^h), & h = 0, 1, \dots, q-1 \\ f^q \in \mathcal{L}^q(M), \\ f_q = \delta f_{q-1}^0, \\ df_{q-h-1}^h = \delta f_{q-h-2}^{h+1}, & h = 0, \dots, q-2, \\ df_0^{q-1} = \delta_0 f^q. \end{cases}$$

(2) *Se $f_q \in \mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}})$, ed $\{f_{q-h}^h\}, f^q$ soddisfano le (16.7), allora $f^q \in \mathcal{B}^q(M)$.*

DIMOSTRAZIONE. (1). Costruiamo le f_{q-h-1}^h per ricorrenza su h . Per $h = 0$, osserviamo che $f_q \in \mathcal{L}^q(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{L}^q(\mathcal{U}, \Omega^0)$. Possiamo quindi definire la f_{q-1}^0 utilizzando il Teorema 16.1.1, perché $\Omega^0 \simeq \mathcal{E}$. Supponiamo di aver costruito $f_{q-1}^0, \dots, f_{q-h-1}^h$ con $f_{q-j-1}^j \in \mathcal{C}^{q-j-1}(\mathcal{U}, \Omega^j)$ per $0 \leq j \leq h < q-1$ con

$$\begin{cases} f_q = \delta f_{q-1}^0, \\ df_{q-1}^0 = \delta f_{q-2}^1, \\ \dots \\ df_{q-h+1}^{h-2} = \delta f_{q-h}^{h-1}, \\ df_{q-h}^{h-1} = \delta f_{q-h-1}^h. \end{cases}$$

Allora

$$\delta(df_{q-h-1}^h) = d \circ \delta f_{q-h-1}^h = d^2 f_{q-h}^{h-1} = 0$$

e quindi, per il Teorema 16.1.1 esiste $f_{q-h-2}^{h+1} \in \mathcal{C}^{q-h-2}(\mathcal{U}, \Omega^{h+1})$ tale che

$$\delta f_{q-h-2}^{h+1} = df_{q-h-1}^h.$$

Dopo aver ottenuto le f_{q-h-1}^h per $h = 0, \dots, q-1$, osserviamo che

$$df_1^{q-2} = \delta f_0^{q-1} \implies \delta(df_0^{q-1}) = d \circ \delta f_0^{q-1} = d^2 f_1^{q-2} = 0.$$

Per il Corollario 16.1.2 vi è allora una $f^q \in \Omega^q(M)$ per cui $\delta_0(f^q) = df_0^q$. Chiaramente $f^q \in \mathcal{L}^q(M)$.

(2). Esaminiamo dapprima il caso $q = 1$. Abbiamo allora $f_1 \in \mathcal{L}^1(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}})$, $f_0^0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{E})$, $f^1 \in \mathcal{L}^1(M)$ ed

$$\begin{cases} f_1 = \delta f_0^0, \\ df_0^0 = \delta_0 f^1. \end{cases}$$

Se $f_1 = \delta g_0$, con $g_0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}})$, allora $\delta(f_0^0 - g_0^0) = 0$ ed esiste quindi una $g \in \mathcal{E}(M)$ tale che $f_0^0 - g_0^0 = \delta_0(g)$. Questa ci dà $dg = f^1$.

Supponiamo ora che $q \geq 2$ e che $f_q = \delta g_{q-1}$, con $g_{q-1} \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}})$. Assegnata una sequenza $\{f_{q-h-1}^h\}_{0 \leq h \leq q-1}$, costruiamo un'altra sequenza $\{g_{q-h-2}^h\}_{0 \leq h \leq q-2}$, con

$$\begin{cases} g_{q-h-2}^h \in \mathcal{C}^{q-h-2}(\mathcal{U}, \Omega^h), & \text{per } h = 0, \dots, q-2, \\ f_{q-1}^0 = g_{q-1} + \delta g_{q-2}^0, \\ f_{q-h-1}^h = dg_{q-h-1}^{h-1} + \delta g_{q-h-2}^h, & \text{per } h = 1, \dots, q-2. \end{cases}$$

Ragioniamo per ricorrenza. Abbiamo

$$\delta(f_{q-1}^0 - g_{q-1}) = f_q - f_q = 0 \implies \exists g_{q-2}^0 \in \mathcal{C}^{q-2}(\mathcal{U}, \Omega^0) \text{ t.c. } f_{q-1}^0 = g_{q-1} + \delta g_{q-2}^0.$$

Se abbiamo definito le g_{q-j-2}^j per $j = 0, \dots, h < q-2$, abbiamo

$$\begin{aligned} \delta f_{q-h-2}^{h+1} &= df_{q-h-1}^h = d(\delta g_{q-h-2}^h) = \delta(dg_{q-h-2}^h) \\ &\implies \exists g_{q-h-3}^{h+1} \in \mathcal{C}^{q-h-3}(\mathcal{U}, \Omega^{h+1}) \text{ t.c. } f_{q-h-2}^{h+1} = dg_{q-h-2}^h + \delta g_{q-h-3}^{h+1} \end{aligned}$$

per il Teorema 16.1.1. Otteniamo allora

$$\begin{aligned}\delta f_0^{q-1} &= df_1^{q-2} = d(\delta g_0^{q-2}) = \delta(dg_0^{q-2}) \\ &\implies \exists g^{q-1} \in \mathcal{Q}^{q-1}(M) \text{ t.c. } f_0^{q-1} - dg_0^{q-2} = \delta_0(g^{q-1}).\end{aligned}$$

Abbiamo allora $f^q = dg^{q-1}$. La dimostrazione è completa. \square

Otteniamo così il

TEOREMA 16.1.4. *Sia M una varietà differenziabile paracompatta ed \mathcal{U} un suo ricoprimento aperto. Allora per ogni q la (16.7) definisce per passaggio ai quozienti un omomorfismo*

$$(16.8) \quad \lambda_q : H^q(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \longrightarrow H^q(M).$$

L'omomorfismo λ_0 è un isomorfismo e λ_1 iniettivo, per ogni ricoprimento \mathcal{U} di M .

DIMOSTRAZIONE. Per $q = 0$ la λ_0 è l'identità tra i due gruppi, identificati allo spazio delle funzioni reali localmente costanti su M . Il fatto che l'omomorfismo λ sia definito per $q \geq 1$ è stato dimostrato nel Lemma 16.1.3. Dimostriamo l'iniettività di λ_1 . Siano quindi $f_1 \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}})$, $f_0^0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{E})$, $f^1 \in \mathcal{Z}^1(M)$ ed

$$\begin{cases} f_1 = \delta f_0^0, \\ df_0^0 = \delta_0 f^1. \end{cases}$$

Se $f^1 = dg^0$ per qualche $g^0 \in \mathcal{C}^\infty(M)$, otteniamo

$$d(f_0^0 - \delta_0(g^0)) = \delta_0(f^1 - dg^0) = 0.$$

Quindi

$$f_0^0 - \delta_0(g^0) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}), \quad \text{e} \quad \delta(f_0^0 - \delta_0(g^0)) = \delta(f_0^0) = f_1.$$

Ciò dimostra che λ_1 è iniettiva. \square

ESEMPIO 16.1.5. Consideriamo il ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ del toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, ove U_1 ed U_2 sono gli aperti

$$U_1 = \pi(\{(x, y) \mid \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\}), \quad U_2 = \pi(\{(x, y) \mid x - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}\}),$$

ove $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ è la proiezione nel quoziente. Osserviamo che $U_1 \cap U_2 = U_{1,2}$ ha due componenti connesse. È quindi $\mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \simeq \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \simeq \mathbb{R}^2$. Poiché $\tilde{\mathbb{R}}(T^2) = \mathbb{R}$, la $\delta : \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}})$ ha rango 1. Quindi $H^1(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$. L'applicazione $\lambda_1 : H^1(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \rightarrow H^1(T^2)$ è quindi, in questo caso, iniettiva e non nulla, ma non surgettiva.

TEOREMA 16.1.6. *Sia M una varietà differenziabile ed $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un suo buon ricoprimento. Allora l'omomorfismo (16.8) è un isomorfismo per ogni $q \geq 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo osservato che λ_q è un isomorfismo per $q = 0$.

Sia $f^1 \in \mathcal{Z}^1(M)$. Poiché gli aperti di \mathcal{U} sono contrattili, esiste una $f_0^0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ tale che

$$df_0^0 = \delta_0 f^1.$$

Allora δf_0^0 soddisfa

$$d(\delta f_0^0) = \delta \circ df_0^0 = \delta \circ \delta_0 f^1 = 0$$

e quindi $f_1 = \delta f_0^0 \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}})$.

Se fosse $f^1 = dg^0$ per qualche $g^0 \in \Omega^0(M) = \mathcal{E}(M)$, avremmo

$$\delta_0 f^1 = \delta_0(dg^0) = d \circ \delta_0(g^0) = df_0^0 \implies u_0^0 = f_0^0 - \delta_0(g^0) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}),$$

$$\delta u_0^0 = \delta f_0^0 = f_1 \in \mathcal{B}^1(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}).$$

La corrispondenza

$$\begin{array}{ccc} f^1 & \longrightarrow & f_0^0 & \longrightarrow & \delta f_0^0 \\ \in \mathcal{Z}^1(M) & & \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^0) & & \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \end{array}$$

definisce quindi per passaggio al quoziente un'applicazione $\psi_1 : H^1(M) \rightarrow H^1(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}})$ che inverte la λ_1 .

Generalizziamo questa costruzione e costruiamo, anche per ogni $q \geq 2$, un'applicazione $\psi_q : H^q(M) \rightarrow H^q(M, \tilde{\mathbb{R}})$ che inverte la λ_q .

Sia $f^q \in \mathcal{Z}^q(M)$, con $q \geq 2$. Dico che esiste una successione

$$(16.9) \quad f_0^{q-1} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^{q-1}), f_1^{q-2} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^{q-2}), \dots, f_{q-1}^0 \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \Omega^0)$$

tale che

$$(16.10) \quad \begin{cases} df_0^{q-1} = \delta_0 f^q, \\ df_1^{q-2} = \delta f_0^{q-1}, \\ \dots\dots\dots \\ df_{q-1}^0 = \delta f_{q-2}^1. \end{cases}$$

Infatti, poiché gli U_i sono contrattili, per ogni $i \in I$ possiamo trovare una forma $f_i^{q-1} \in \Omega^{q-1}(U_i)$ tale che

$$df_i^{q-1} = f|_{U_i}, \quad \forall i \in I.$$

Possiamo quindi definire $f_0^{q-1} = (f_i^{q-1})_{i \in I} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^{q-1})$. Supponiamo per ricorrenza di aver definito $f_0^{q-1}, \dots, f_h^{q-h-1}$ con

$$\begin{cases} f_r^{q-r-1} \in \mathcal{C}^r(\mathcal{U}, \Omega^{q-r-1}), & 0 \leq r \leq h, \\ df_0^{q-1} = \delta_0 f^q, \\ df_r^{q-r-1} = \delta f_{r-1}^{q-r}, & 1 \leq r \leq h. \end{cases}$$

Abbiamo

$$d \circ \delta f_h^{q-h-1} = \delta \circ df_h^{q-h-1} = \delta^2 f_{h-1}^{q-h} = 0$$

e quindi

$$\exists f_{h+1}^{q-h-2} \in \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{U}, \Omega^{q-h-2}) \quad \text{tale che} \quad df_{h+1}^{q-h-2} = \delta f_h^{q-h-1}.$$

Abbiamo quindi ottenuto la successione (16.9). Sia

$$f_q = \delta f_{q-1}^0.$$

Poiché

$$df_q = d \circ \delta f_{q-1}^0 = \delta \circ df_{q-1}^0 = \delta^2 f_{q-2}^1 = 0,$$

$f_q = (f_{i_0, \dots, i_q})$ con f_{i_0, \dots, i_q} costante su U_{i_0, \dots, i_q} . Quindi $f_q \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}})$. Inoltre

$$\delta f_q = \delta^2 f_{q-1}^0 = 0 \implies f_q \in \mathcal{Z}^q(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}).$$

Per dimostrare che la classe di coomologia definita da f_q in $H^q(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}})$ dipende solo dalla classe di coomologia di f^q , è sufficiente verificare che, se (16.9) è una successione che soddisfa (16.10) ed $f^q = dg^{q-1}$ per una $g^{q-1} \in \Omega^{q-1}(M)$, allora $f_q \in \mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}})$. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} f^q = dg^{q-1} &\implies d(f_0^{q-1} - \delta_0 g^{q-1}) = 0 \\ &\implies \exists g_0^{q-2} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^{q-2}) \text{ t.c. } f_0^{q-1} - \delta_0 g^{q-1} = dg_0^{q-2} \\ &\implies df_1^{q-2} = \delta f_0^{q-1} = \delta(\delta_0 g^{q-1} + dg_0^{q-2}) = \delta \circ dg_0^{q-2} = d\delta g_0^{q-2} \\ &\implies d(f_1^{q-2} - \delta g_0^{q-2}) = 0 \\ &\implies \exists g_1^{q-3} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^{q-3}) \text{ t.c. } f_1^{q-2} - \delta g_0^{q-2} = dg_1^{q-3} \implies \dots \end{aligned}$$

Possiamo cioè costruire per ricorrenza una successione $g_r^{q-r-2} \in \mathcal{C}^r(\mathcal{U}, \Omega^{q-r-2})$, per $r = 0, 1, \dots, q-2$ tale che

$$\begin{cases} f^q = dg^{q-1}, \\ f_0^{q-1} - \delta_0 g^{q-1} = dg_0^{q-2}, \\ f_r^{q-r-1} - \delta g_{r-1}^{q-r-1} = dg_r^{q-r-2} \quad 1 \leq r \leq q-2. \end{cases}$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} df_{q-1}^0 = \delta f_{q-2}^1 = \delta dg_{q-2}^0 &\implies d(f_{q-1}^0 - \delta g_{q-2}^0) = 0 \\ &\implies g_{q-1} = f_{q-1}^0 - \delta g_{q-2}^0 \in \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}), \end{aligned}$$

da cui $f_q = \delta g_{q-1}$. Quindi la (16.9), (16.10) definisce un'applicazione

$$(16.11) \quad \psi_q : H^q(M) \longrightarrow H^q(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}),$$

che, per le (16.10) è l'inversa di λ_q . \square

OSSERVAZIONE 16.1.7. Si possono costruire buoni ricoprimenti di M a partire da una sua triangolazione. A partire da una triangolazione \mathcal{K} di M , ad ogni vertice $p \in \mathcal{K}_0$ possiamo associare l'aperto U_p formato dall'unione di tutte le parti interne relative dei semplici di \mathcal{K} che contengono p , ovvero la parte interna della stella di p in \mathcal{K} . La famiglia $\{U_p \mid p \in \mathcal{K}_0\}$ è allora un buon ricoprimento, localmente finito, di M .

ESEMPIO 16.1.8. Otteniamo un buon ricoprimento della sfera S^n nel modo seguente.

Consideriamo la frontiera di un semplice $(n+1)$ -dimensionale Σ circoscritto e sia $\pi : \Sigma \rightarrow S^n$ l'omeomorfismo ottenuto per restrizione dalla proiezione

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \ni x \rightarrow \frac{x}{|x|} \in S^n.$$

Siano F_0, \dots, F_n le facce di Σ . Allora gli

$$U_i = \pi(\sigma \setminus F_i), \quad i = 0, \dots, n$$

sono gli aperti di un buon ricoprimento di S^n . Abbiamo allora

$$\mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \simeq \mathbb{R}^{\binom{n+1}{h}} \simeq \Lambda^h \mathbb{R}^{n+1}.$$

Per descrivere questo isomorfismo, Fissiamo una base e_0, \dots, e_n di \mathbb{R}^{n+1} , e facciamo corrispondere ad $(x_{i_0, \dots, i_h}) \in \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}})$ l'elemento

$$\sum_{0 \leq i_0 < \dots < i_h \leq n} x_{i_0, \dots, i_h} e_{i_0} \wedge \dots \wedge e_{i_h}.$$

Abbiamo allora un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^h(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^{h+1}(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \Lambda^h \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{e \wedge \cdot} & \Lambda^{h+1} \mathbb{R}^{n+1} \end{array}$$

per $0 \leq h \leq n-1$, con $e = e_0 + \dots + e_n$.

Si verifica facilmente che

$$\Lambda^h \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{e \wedge \cdot} \Lambda^{h+1} \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{e \wedge \cdot} \Lambda^{h+2} \mathbb{R}^{n+1}$$

è esatta per $0 \leq h \leq n$. Ne ricaviamo un'altra dimostrazione del fatto che

$$H^q(S^n) \simeq H^q(\mathcal{U}, \tilde{\mathbb{R}}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

16.2. Prolungamento di sezioni

TEOREMA 16.2.1. *Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio su uno spazio paracompatto X . Se Y è un chiuso di X ed $s_Y \in \mathcal{S}(Y)$, allora esiste un intorno aperto U di Y in X ed una sezione $s_U \in \mathcal{S}(U)$ tale che $s_U|_Y = s_Y$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché X è paracompatto, possiamo trovare un ricoprimento aperto localmente finito $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di Y in X tale che per ogni $i \in I$ vi sia una sezione $s_i \in \mathcal{S}(U_i)$ tale che $s_i|_{Y \cap U_i} = s_Y|_{Y \cap U_i}$. Fissiamo un altro ricoprimento aperto $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ di Y con $\bar{V}_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$. Osserviamo che, se $i, j \in I$, gli insiemi

$$F_{i,j} = \{p \in \bar{V}_i \cap V_j \mid s_{i(p)} \neq s_{j(p)}\}$$

sono chiusi che non intersecano Y . Poiché la famiglia $\{F_{i,j}\}_{i,j \in I}$ è localmente finita, l'unione $F = \bigcup_{i,j \in I} F_{i,j}$ è un chiuso che non interseca Y . Allora

$$U = \bigcup_{i \in I} V_i \setminus F$$

è un intorno aperto di Y in X e possiamo definire su U una sezione $s_U \in \mathcal{S}(U)$ con $s_U|_Y = s_Y$ ponendo

$$s_U = s_i \quad \text{su} \quad V_i \setminus F.$$

□

16.3. Fasci molli

DEFINIZIONE 16.3.1. Un fascio d'insiemi $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ si dice *molle*¹, o *soffice*² se, per ogni chiuso Y di X l'applicazione di restrizione

$$(16.12) \quad \mathcal{S}(X) \ni s \longrightarrow s|_Y \in \mathcal{S}(Y)$$

è surgettiva.

ESEMPIO 16.3.2. Per il Teorema 16.2.1 Ogni fascio fiacco è molle.

ESEMPIO 16.3.3. Se X è paracompatto, il fascio $\tilde{\mathcal{C}}$ dei germi di funzioni reali continue su X è molle.

Sia infatti Y un sottoinsieme chiuso di X ed $s \in \tilde{\mathcal{C}}(Y)$. Per ogni punto $q \in Y$, esiste un intorno U_q di q in X ed una $\sigma_q \in \mathcal{C}(U_q)$ tale che $(\sigma_q)_{(p)} = s_{(p)}$ per ogni $p \in Y \cap U_q$. Consideriamo il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_q \mid q \in Y\} \cup \{X \setminus Y\}$ di X e sia $\{\chi_q\} \cup \{\chi_*\}$ una partizione continua dell'unità su X con $\text{supp } \chi_q \subset U_q$, $\text{supp } \chi_* \subset X \setminus Y$. Allora

$$\tilde{s}(p) = \sum_{\text{supp } \chi_q \ni p} \chi_q(p) \sigma_q(p)$$

è una funzione in $\mathcal{C}(X)$ con $\tilde{s}_{(p)} = s_{(p)}$ per ogni $p \in Y$.

La proprietà di essere *molle* è una proprietà locale. Abbiamo infatti

PROPOSIZIONE 16.3.4. Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio su uno spazio paracompatto X . Se ogni punto $p \in X$ ha un intorno aperto U_p in X tale che

$\forall F$ chiuso in X e contenuto in U_p la restrizione $\mathcal{S}(U_p) \longrightarrow \mathcal{S}(F)$ è surgettiva, allora \mathcal{S} è molle.

DIMOSTRAZIONE. Sia Y un chiuso di X ed $s_Y \in \mathcal{S}(Y)$ una sezione di \mathcal{S} su Y . Possiamo allora trovare un ricoprimento aperto localmente finito $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X tale che:

- (1) per ogni $i \in I$ con $U_i \cap Y \neq \emptyset$ esiste una $s_i \in \mathcal{S}(U_i)$ tale che $s_i|_{Y \cap U_i} = s_Y|_{Y \cap U_i}$;
- (2) per ogni $i \in I$ ed ogni chiuso F di X tale che $F \subset U_i$ la restrizione $\mathcal{S}(U_i) \rightarrow \mathcal{S}(F)$ è surgettiva.

Fissiamo un raffinamento $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ di \mathcal{U} con $\bar{V}_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$ e poniamo, per ogni sottoinsieme J di I ,

$$F_J = \bigcup_{i \in J} \bar{V}_i.$$

Sia

$$\Phi = \{(s_J, J) \mid J \subset I, s_J \in \mathcal{S}(F_J), s_J|_{Y \cap F_J} = s_Y|_{Y \cap F_J}\}.$$

Definiamo su Φ la relazione d'ordine

$$(s_J, J) \leq (s_K, K) \iff J \subset K, s_K|_{F_J} = s_J.$$

¹In francese *mou*.

²In inglese, *soft*.

Chiaramente Φ è non vuota e induttiva. Essa ha pertanto un elemento massimale (s_{J_0}, J_0) . Dimostriamo che $J_0 = I$. Se così non fosse, fissiamo $i_0 \in I \setminus J_0$. Consideriamo allora la sezione

$$s_{i_0}^* = \begin{cases} s_{J_0} & \text{su } F_{J_0} \cap F_{i_0}, \\ s_{i_0} & \text{su } F_{i_0} \cap Y. \end{cases}$$

Poiché $F_{i_0}^* = (F_{J_0} \cap F_{i_0}) \cup (F_{i_0} \cap Y)$ è un chiuso contenuto in U_{i_0} , per ipotesi possiamo prolungare $s_{i_0}^* \in \mathcal{S}(F_{i_0}^*)$ ad una sezione $\tilde{s}_{i_0} \in \mathcal{S}(U_{i_0})$. Allora

$$s_{J_0 \cup \{i_0\}} = \begin{cases} s_{J_0} & \text{su } F_{J_0}, \\ \tilde{s}_{i_0} & \text{su } F_{i_0} \end{cases}$$

definisce un elemento $(s_{J_0 \cup \{i_0\}}, J_0 \cup \{i_0\})$ di Φ con $(s_{J_0 \cup \{i_0\}}, J_0 \cup \{i_0\}) \gneq (s_{J_0}, J_0)$. Abbiamo ottenuto una contraddizione, che dimostra che $J_0 = I$. La dimostrazione è completa. \square

PROPOSIZIONE 16.3.5. *Supponiamo che X sia paracompatto e sia*

$$(16.13) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S}' \xrightarrow{\phi} \mathcal{S} \xrightarrow{\psi} \mathcal{S}'' \longrightarrow 0$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani. Se \mathcal{S}' è molle, allora la successione

$$(16.14) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S}'(X) \longrightarrow \mathcal{S}(X) \longrightarrow \mathcal{S}''(X) \longrightarrow 0$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. L'esattezza in $\mathcal{S}'(X)$ ed in $\mathcal{S}(X)$ è conseguenza della definizione di fascio. È quindi sufficiente dimostrare che $\mathcal{S}(X) \xrightarrow{\psi} \mathcal{S}''(X)$ è surgettiva.

Sia $s'' \in \mathcal{S}''(X)$. Per ipotesi, possiamo trovare un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X , che possiamo supporre localmente finito per la paracompattezza di X , e sezioni $s_i \in \mathcal{S}(U_i)$, tali che

$$\psi(s_i) = s''|_{U_i}, \quad \forall i \in I.$$

Sia $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X con la proprietà che $\bar{V}_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$. Bene-ordiniamo I e dimostriamo che, posto $Y_i = \bigcup_{j \leq i} \bar{V}_j$, è possibile trovare una famiglia di sezioni

$$(16.15) \quad \sigma_i \in \mathcal{S}(Y_i) \text{ tali che } \psi(\sigma_i) = s''|_{Y_i}, \quad \sigma_i|_{Y_j} = \sigma_j|_{Y_j} \text{ se } j < i.$$

Infatti, sia J l'insieme degli indici $h \in I$ per cui si possono costruire le $\sigma_i \in \mathcal{S}(Y_i)$, per $i \leq h$, in modo che valgano le (16.15) per $i \leq h$. L'insieme J è non vuoto perché contiene il minimo di I . Supponiamo per assurdo che $J \neq I$. Sia allora h_0 il minimo di $I \setminus J$. L'unione $Y' = \bigcup_{i < h_0} \bar{V}_i$ è un chiuso di X perché unione localmente finita di chiusi. Definiamo una sezione $\sigma' \in \mathcal{S}(Y')$ ponendo

$$\sigma'|_{Y_i} = \sigma_i|_{Y_i} \text{ per } i < h_0.$$

Poiché \mathcal{S} è molle, esiste una sezione $\tilde{\sigma}' \in \mathcal{S}(X)$ tale che $\sigma' = \tilde{\sigma}'|_{Y'}$. Osserviamo ora che $\phi(\tilde{\sigma}' - s_{h_0})$ è definita e si annulla in tutti i punti di $\bar{V}_{h_0} \cap Y'$. Per l'esattezza di (16.13) esiste allora una sezione $s' \in \mathcal{S}'(\bar{V}_{h_0} \cap Y')$ tale che $(\tilde{\sigma}' - s_{h_0})|_{\bar{V}_{h_0} \cap Y'} = \phi(s')$.

Poiché \mathcal{S}' è molle, esiste una $\tilde{s}' \in \mathcal{S}'(X)$ tale che $s' = \tilde{s}'|_{\bar{V}_{h_0} \cap Y'}$. Definiamo allora l'elemento σ_{h_0} ponendo

$$\sigma_{h_0} = \begin{cases} \sigma_i & \text{su } Y_i \text{ se } i < h_0, \\ s_{h_0} + \phi(\tilde{s}') & \text{su } \bar{V}_{h_0}. \end{cases}$$

Allora $\sigma_{h_0} \in \mathcal{S}(Y_{h_0})$ e la famiglia $\{\sigma_i \mid i \leq h_0\}$ soddisfa le (16.15) per ogni $i \leq h_0$. Quindi $h_0 \in J$ ci dà una contraddizione e dimostra che è possibile definire una famiglia $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ che soddisfi le (16.15) per ogni $i \in I$. Otteniamo allora

$$\psi(s) = s'', \quad \text{con } s \in \mathcal{S}(X) \text{ definito da } s|_{Y_i} = \sigma_i, \quad \forall i \in I.$$

□

TEOREMA 16.3.6. *Siano X uno spazio pracompatto e*

$$(16.16) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S} \xrightarrow{\beta} \mathcal{S}'' \longrightarrow 0$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su X . Se \mathcal{S} ed \mathcal{S}' sono molli, anche \mathcal{S}'' è molle.

DIMOSTRAZIONE. Sia Y un sottoinsieme chiuso di X ed $s'' \in \mathcal{S}''(Y)$. Per la Proposizione 16.3.5, esiste una sezione $s \in \mathcal{S}(Y)$ tale che $\alpha(s) = s''$. Poiché \mathcal{S} è molle, abbiamo $s = \tilde{s}|_Y$ per una sezione $\tilde{s} \in \mathcal{S}(X)$. Allora $\tilde{s}'' = \alpha(\tilde{s}) \in \mathcal{S}''(X)$ ed $s''|_Y = \tilde{s}''|_Y = s''$. □

TEOREMA 16.3.7. *Se*

$$(16.17) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S}^0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{S}^2 \longrightarrow \dots$$

è una successione esatta di fasci molli di gruppi abeliani, allora anche la successione

$$(16.18) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S}^0(X) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{S}^1(X) \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{S}^2(X) \longrightarrow \dots$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. L'esattezza in $\mathcal{S}^0(X)$ è conseguenza della definizione di fascio.

Per ogni intero $h \geq 0$, per ipotesi la successione esatta corta di fasci

$$0 \longrightarrow \ker \tilde{\delta}_h \longrightarrow \mathcal{S}^h \xrightarrow{\delta_h} \ker \tilde{\delta}_{h+1} \longrightarrow 0.$$

è esatta. Poiché $\ker \tilde{\delta}_0$ è il fascio nullo, che è banalmente molle, segue per ricorrenza, dal Teorema 16.3.6, che $\ker \tilde{\delta}_h$ è un fascio molle per ogni intero $h \geq 0$. Otteniamo quindi per ogni intero $h \geq 0$, per la Proposizione 16.3.5, una successione esatta di fasci

$$0 \longrightarrow \ker \tilde{\delta}_h(X) \longrightarrow \mathcal{S}^h(X) \xrightarrow{\delta_h} \ker \tilde{\delta}_{h+1}(X) \longrightarrow 0,$$

che dimostra l'esattezza di (16.18) in $\mathcal{S}^h(X)$. □

Sia \mathcal{S} un fascio di gruppi abeliani su uno spazio topologico X ed $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X .

DEFINIZIONE 16.3.8. Se $s \in \mathcal{S}(X)$, chiamiamo *partizione di s su X subordinata ad \mathcal{U}* una successione $\{s_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{S}(X)$ tale che

$$(16.19) \quad \text{supp } s_i \subset U_i, \quad \{\text{supp } s_i\}_{i \in I} \text{ è localmente finita, } s = \sum_{i \in I} s_i.$$

Abbiamo

TEOREMA 16.3.9 (Esistenza di partizioni). *Se X è uno spazio paracompatto ed \mathcal{S} un fascio molle di gruppi abeliani, allora, per ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} di X ed ogni $s \in \mathcal{S}(X)$ esiste una partizione di s su X subordinata ad \mathcal{U} .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ un raffinamento localmente finito di \mathcal{U} , con funzione di raffinamento $j \rightarrow i_j$ e $\bar{V}_j \subset U_{i_j}$ per ogni $j \in J$. Siano $\{W_j\}_{j \in J}$, $\{G_j\}_{j \in J}$ altri ricoprimenti aperti di X con $\bar{W}_j \subset G_j \subset \bar{G}_j \subset V_j$ per ogni $j \in J$.

Bene-ordiniamo l'insieme J e dimostriamo per induzione transfinita che è possibile trovare sezioni $\sigma_j \in \mathcal{S}(X)$ con $\text{supp } \sigma_j \subset V_j$ e

$$\sum_{h \leq j} \sigma_{h(p)} = s_{(p)}, \quad \forall p \in \bigcup_{h \leq j} \bar{W}_h.$$

Per ogni $j \in J$, poniamo $Y_j = \bigcup_{h \leq j} \bar{W}_h \cup \bigcap G_j$. Gli insiemi Y_j sono chiusi perché unione localmente finita di chiusi. Se $j_0 = \min J$, definiamo $s_{j_0}^* \in \mathcal{S}(Y_{j_0})$ ponendo

$$s_{j_0}^* = \begin{cases} s & \text{su } \bar{W}_{j_0}, \\ 0 & \text{su } \bigcap G_{j_0} \end{cases}$$

Poiché \mathcal{S} è molle, esiste una sezione $s_{j_0} \in \mathcal{S}$ con $\sigma_{j_0}|_{Y_{j_0}} = s_{j_0}^*$.

Supponiamo che $j > j_0$ e di aver costruito σ_h per ogni $h < j$. Definiamo allora una sezione $s_j^* \in \mathcal{S}(Y_j)$ ponendo

$$s_j^* = \begin{cases} s - \sum_{h < j} \sigma_j & \text{su } \bar{W}_j, \\ 0 & \text{su } \bigcap G_j \cup \bigcup_{h < j} \bar{W}_h. \end{cases}$$

La sezione è ben definita perché

$$(s - \sum_{h < j} \sigma_j)_{(p)} = 0_{(p)}, \quad \forall p \in \bar{W}_j \cap \left(\bigcup_{h < j} \bar{W}_h \right).$$

Poiché \mathcal{S} è molle, esiste una sezione $\sigma_j \in \mathcal{S}(X)$ tale che $s_j^* = \sigma_j|_{Y_j}$. Chiaramente $\text{supp } \sigma_j \subset \bar{G}_j \subset V_j$. Ciò dimostra l'esistenza della successione $\{\sigma_j\}_{j \in J}$. Basterà allora porre

$$s_i = \sum_{i_j=i} \sigma_j$$

per avere la (16.19). □

Dal Teorema 16.3.9 ricaviamo immediatamente:

TEOREMA 16.3.10. *Se \mathcal{A} è un fascio d'anelli molle sullo spazio paracompatto X , allora ogni fascio di \mathcal{A} -moduli su X è molle.*

DIMOSTRAZIONE. Siano \mathcal{M} un fascio di \mathcal{A} -moduli su X , Y un chiuso di X e $\mu \in \mathcal{M}(Y)$ una sezione di \mathcal{M} su Y . Esistono allora un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di Y in X e sezioni $\mu_i \in \mathcal{M}(U_i)$ tali che $\mu_i|_{U_i \cap Y} = \mu|_{U_i \cap Y}$ per ogni $i \in I$. Per il Teorema 16.3.9 esiste una partizione $\{\chi_i\} \cup \{\chi_*\}$ di $1 \in \mathcal{A}(X)$ su X subordinata al ricoprimento $\mathcal{U} \cup \{X \setminus Y\}$. Definiamo

$$\alpha_i = \begin{cases} \chi_i \mu_i & \text{su } U_i, \\ 0 & \text{su } X \setminus U_i. \end{cases}$$

Allora

$$\tilde{\mu} = \sum_{i \in I} \alpha_i \in \mathcal{M}(X) \quad \text{e} \quad \tilde{\mu}|_Y = \mu.$$

□

16.4. Fasci fini

DEFINIZIONE 16.4.1. Un fascio \mathcal{S} di gruppi abeliani su uno spazio topologico X si dice *fine*³ se il fascio $\text{H}\ddot{\text{O}}\text{m}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ è molle.

TEOREMA 16.4.2. Sia X uno spazio paracompatto.

- (1) Ogni fascio fine è su X è molle.
- (2) Siano \mathcal{S}, \mathcal{T} due fasci di gruppi abeliani su X . Se \mathcal{S} è fine, allora anche $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{T}$ è fine.

16.5. Fasci differenziali

Sia X uno spazio topologico.

DEFINIZIONE 16.5.1. Un *fascio graduato* su X è il dato di una successione $\mathcal{A}^* = (\mathcal{A}^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ di fasci.

Siano $\mathcal{A}^* = (\mathcal{A}^n)_{n \in \mathbb{Z}}, \mathcal{B}^* = (\mathcal{B}^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ due fasci graduati su X . Un *morfismo di grado k* tra \mathcal{A}^* e \mathcal{B}^* è una successione $(f^n : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{B}^{n+k})$ di morfismi di fasci.

Un *fascio differenziale su X* è il dato di un fascio graduato di gruppi abeliani $\mathcal{A}^* = (\mathcal{A}^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ su X e di un morfismo di fasci abeliani di grado k

$$(16.20) \quad (\mathcal{A}^*, \delta^*) = (\delta^n : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}^{n+k})_{n \in \mathbb{Z}}$$

tale che

$$(16.21) \quad \delta^{n+k} \circ \delta^n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Associamo ad un fascio differenziale $(\mathcal{A}^*, \delta^*)$ i fasci

$$(16.22) \quad \mathcal{L}^n(\mathcal{A}^*, \delta^*) = \ker(\mathcal{A}^n \xrightarrow{\delta^n} \mathcal{A}^{n+k}),$$

$$(16.23) \quad \mathcal{B}^n(\mathcal{A}^*, \delta^*) = \text{Im}(\mathcal{A}^{n-k} \xrightarrow{\delta^{n-k}} \mathcal{A}^n),$$

$$(16.24) \quad \mathcal{H}^n(\mathcal{A}^*, \delta^*) = \mathcal{L}^n(\mathcal{A}^*, \delta^*) / \mathcal{B}^n(\mathcal{A}^*, \delta^*).$$

Il fascio $\mathcal{H}^n(\mathcal{A}^*, \delta^*)$ si dice il *fascio derivato di grado n* di $(\mathcal{A}^*, \delta^*)$.

³Inglese: fine; Francese: fin

Considereremo nel seguito, per semplicità e senza perdita di generalità, soltanto differenziali di grado 1.

16.6. Risoluzione d'un fascio

Sia \mathcal{A} un fascio di gruppi abeliani di base X .

DEFINIZIONE 16.6.1. Una *risoluzione coomologica* di \mathcal{A} è una successione esatta di fasci di gruppi abeliani della forma

$$(16.25) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{J} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{L}^2 \xrightarrow{\delta^2} \dots$$

ESEMPIO 16.6.2 (Cocatene di Alexander-Spanier). Sia X uno spazio topologico ed \mathbb{A} un gruppo abeliano. Per ogni intero non negativo n , associamo ad ogni aperto U di X il gruppo abeliano delle applicazioni $f : U^{n+1} \rightarrow \mathbb{A}$. Otteniamo così un prefascio canonico, associato al fascio $\mathcal{F}^n(X, \mathbb{A})$, che si dice il *fascio delle cocatene di Alexander-Spanier di grado n di X a valori in \mathbb{A}* .

Ad $f : U^{n+1} \rightarrow \mathbb{A}$ associamo l'applicazione $\delta_U^n f : U^{n+2} \rightarrow \mathbb{A}$ definita da

$$(16.26) \quad (\delta^n f)(x_0, \dots, x_{n+1}) = \sum_{h=0}^{n+1} (-1)^h f(x_0, \dots, \widehat{x}_h, \dots, x_{n+1}).$$

Da questa otteniamo un morfismo di fasci di gruppi abeliani

$$(16.27) \quad \delta^n : \mathcal{F}^n(X, \mathbb{A}) \longrightarrow \mathcal{F}^{n+1}(X, \mathbb{A}).$$

Indicando con $\tilde{\mathbb{A}}$ il fascio semplice di base X e fibra \mathbb{A} , abbiamo

$$(16.28) \quad \tilde{\mathbb{A}} = \ker(\delta^0 : \mathcal{F}^0(X, \mathbb{A}) \rightarrow \mathcal{F}^1(X, \mathbb{A})).$$

La

$$(16.29) \quad 0 \rightarrow \tilde{\mathbb{A}} \longrightarrow \mathcal{F}^0(X, \mathbb{A}) \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{F}^1(X, \mathbb{A}) \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{F}^2(X, \mathbb{A}) \rightarrow \dots$$

è una risoluzione del fascio semplice $\tilde{\mathbb{A}}$ su X .

Siano infatti $n \geq 1$ ed $f : U^{n+1} \rightarrow \mathbb{A}$. Fissato un qualsiasi punto $\bar{x} \in U$, poniamo

$$g : U^n \ni (x_0, \dots, x_{n-1}) \longrightarrow f(\bar{x}, x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{A}.$$

Otteniamo allora

$$\begin{aligned} (\delta_U^{n-1} g)(x_0, \dots, x_n) &= \sum_{h=0}^n (-1)^h f(\bar{x}, x_0, \dots, \widehat{x}_h, \dots, x_n) \\ &= f(x_0, \dots, x_n) - (\delta_U^n f)(\bar{x}, x_0, \dots, x_n), \end{aligned}$$

e quindi $\delta_U^{n-1} g = f$ se $\delta_U^n f = 0$.

16.7. Risoluzione canonica d'un fascio

Sia \mathcal{A} un fascio di gruppi abeliani sullo spazio topologico X . Per ogni aperto U di X indichiamo con

$$(16.30) \quad \mathcal{F}^0(U, \mathcal{A}) = \{s : U \rightarrow \mathcal{A} \mid \pi \circ s = \text{id}_U\}$$

il gruppo abeliano delle sezioni (non necessariamente continue) di \mathcal{A} su U . Allora $U \rightarrow \mathcal{F}^0(U, \mathcal{A})$ è un prefascio canonico. Il fascio associato, che indicheremo con $\mathcal{F}^0(\mathcal{A})$, è un fascio fiacco, ed abbiamo un'inclusione canonica

$$(16.31) \quad j: \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{F}^0(\mathcal{A}).$$

Definiamo per ricorrenza:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(\mathcal{A}) &= \mathcal{F}^0(\mathcal{A})/\mathcal{A}, & \mathcal{F}^1(\mathcal{A}) &= \mathcal{F}^0(\mathcal{L}^1(\mathcal{A})) \\ \mathcal{L}^2(\mathcal{A}) &= \mathcal{F}^1(\mathcal{A})/\mathcal{L}^1(\mathcal{A}), & \mathcal{F}^2(\mathcal{A}) &= \mathcal{F}^0(\mathcal{L}^2(\mathcal{A})) \\ &\dots\dots & &\dots\dots \\ \mathcal{L}^n(\mathcal{A}) &= \mathcal{F}^{n-1}(\mathcal{A})/\mathcal{L}^{n-1}(\mathcal{A}), & \mathcal{F}^n(\mathcal{A}) &= \mathcal{F}^0(\mathcal{L}^n(\mathcal{A})) \\ \mathcal{L}^{n+1}(\mathcal{A}) &= \mathcal{F}^n(\mathcal{A})/\mathcal{L}^n(\mathcal{A}), & \mathcal{F}^{n+1}(\mathcal{A}) &= \mathcal{F}^0(\mathcal{L}^{n+1}(\mathcal{A})). \end{aligned}$$

Abbiamo degli omomorfismi naturali

$$(16.32) \quad \delta^n: \mathcal{F}^n(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{F}^{n+1}(\mathcal{A}),$$

che si ottengono componendo la proiezione nel quoziente

$$\mathcal{F}^n(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{L}^{n+1}(\mathcal{A}) = \mathcal{F}^n(\mathcal{A})/\mathcal{L}^n(\mathcal{A})$$

con l'inclusione

$$\mathcal{L}^{n+1}(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{F}^0(\mathcal{L}^{n+1}(\mathcal{A})) = \mathcal{F}^{n+1}(\mathcal{A}).$$

Dalla costruzione che abbiamo descritto si ha

TEOREMA 16.7.1. *Per ogni fascio \mathcal{A} di gruppi abeliani la*

$$(16.33) \quad 0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{F}^0(\mathcal{A}) \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{F}^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{F}^2(\mathcal{A}) \rightarrow \dots$$

è una risoluzione del fascio \mathcal{A} mediante fasci fiacchi.

Parte 4

Classi caratteristiche

Classi caratteristiche

Sia M una varietà differenziabile. Ricordiamo che il prodotto esterno di forme definisce su $H^*(M) = \bigoplus H^q(M)$, per passaggio al quoziente, una struttura di algebra, che chiameremo *algebra di coomologia* di M .

Definiamo ancora, nel caso in cui i gruppi di coomologia di de Rham di M abbiano tutti dimensione finita, il *polinomio di Poincaré* di M come il polinomio

$$P_i(M) = \sum_{q \geq 0} t^q \dim_{\mathbb{R}} H^q(M).$$

17.1. La classe di Chern di un fibrato in rette complesse

Sia θ un fibrato in rette complesse con base M e spazio totale $E(\theta)$. Le funzioni di transizione $g_{i,j}$ di un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_i, s_i)\}$ di θ sono applicazioni $g_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(U_{i,j}, \mathbb{C}^*)$. Le $\{g_{i,j}/|g_{i,j}|\}$ sono ancora funzioni di transizione di un fibrato equivalente a θ . Se consideriamo i fibrati in rette complesse su M a meno di equivalenze, possiamo supporre che le funzioni di transizione $\{g_{i,j}\}$ siano a valori in $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Esse sono allora anche le funzioni di transizione di un fibrato in circonferenze ξ , associato a θ . Calcoliamo una sua forma di Eulero.

Su ciascun U_i è definita una *forma angolare* $d\theta_i$, associata alla rappresentazione dei punti di S^1 nella forma $z = e^{i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{R}$. Differenziando la

$$e^{i\theta_i} = g_{i,j} e^{i\theta_j} \quad \text{su } U_{i,j}$$

otteniamo che

$$i e^{i\theta_j} d\theta_j = i g_{i,j} e^{i\theta_i} d\theta_i + e^{i\theta_i} dg_{i,j} \implies d\theta_j = d\theta_i - i \cdot g_{i,j}^{-1} dg_{i,j}.$$

Poiché

$$g_{i,j} g_{j,k} g_{k,i} = 1 \quad \text{su } U_{i,j,k} \implies \frac{dg_{i,j}}{g_{i,j}} + \frac{dg_{j,k}}{g_{j,k}} + \frac{dg_{k,i}}{g_{k,i}} = 0 \quad \text{su } U_{i,j,k},$$

possiamo trovare delle forme $\alpha_i \in \mathcal{Q}^1(U_i)$ tali che

$$\frac{dg_{i,j}}{g_{i,j}} = i\alpha_i - i\alpha_j \quad \text{su } U_{i,j}.$$

Ne segue che

$$d\theta_i - \alpha_i = d\theta_j - \alpha_j \quad \text{su } U_{i,j}$$

e quindi risulta definita una forma angolare ψ_ξ con

$$\psi_\xi = d\theta_i - \pi^* \alpha_i \quad \text{su } U_i, \text{ per ogni indice } i.$$

La corrispondente forma di Eulero è

$$e_\xi = d\alpha_i \text{ su } U_i, \text{ per ogni indice } i.$$

Otteniamo un'espressione esplicita della forma di Eulero utilizzando una partizione dell'unità $\{\kappa_i\}$ subordinata al ricoprimento $\{U_i\}$. Scegliendo

$$\alpha_i = \sum_j \kappa_j \frac{dg_{j,i}}{g_{j,i}} \text{ su } U_i, \text{ per ogni indice } i$$

otteniamo

$$(17.1) \quad e_\xi = \sum_j d\kappa_j \wedge \frac{dg_{j,i}}{g_{j,i}} \text{ su } U_i, \text{ per ogni indice } i.$$

DEFINIZIONE 17.1.1. La classe di Eulero $[e_\xi] \in H^2(M)$ si dice la *prima classe di Chern* del fibrato in rette complesse θ e si indica con $c_1(\theta)$.

Dalla descrizione esplicita della prima classe di Chern ricaviamo

PROPOSIZIONE 17.1.2. Siano θ_1 e θ_2 due fibrati in rette complesse su M . La prima classe di Chern del fibrato in rette complesse $\theta_1 \otimes \theta_2$ è

$$(17.2) \quad c_1(\theta_1 \otimes \theta_2) = c_1(\theta_1) + c_1(\theta_2).$$

Se θ^* è il duale del fibrato in rette complesse θ su M , allora

$$(17.3) \quad c_1(\theta^*) = -c_1(\theta).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\{g_{i,j}^1\}$ e $\{g_{i,j}^2\}$ sono le funzioni di transizione dei fibrati θ_1 e θ_2 , rispettivamente, rispetto ad un comune ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di M di trivializzazione per entrambi, allora $g_{i,j} = g_{i,j}^1 \cdot g_{i,j}^2$ sono le funzioni di transizione di $\theta_1 \otimes \theta_2$. La formula (17.2) segue allora dalla (17.1).

Analogamente, se $\{g_{i,j}\}$ sono le funzioni di transizione di un fibrato in rette θ rispetto a un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di M mediante aperti di trivializzazione, le $\{g_{i,j}^* = g_{i,j}^{-1}\}$ sono funzioni di transizione per θ^* rispetto allo stesso ricoprimento \mathcal{U} , che è di trivializzazione anche per θ^* . La (17.3) segue allora dalla (17.1). \square

PROPOSIZIONE 17.1.3. Sia $\theta = (E_\theta \xrightarrow{\pi_\theta} M)$ un fibrato in rette complesse con base M . Sia N un'altra varietà differenziabile ed $f \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$. Allora

$$(17.4) \quad c_1(f^*\theta) = \pi^* c_1(\theta).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathcal{U} = \{U_i\}$ è un atlante di trivializzazione di θ in M , allora $\mathcal{W} = \{W_i = f^{-1}(U_i)\}$ è un atlante di trivializzazione di $\pi^*\theta$ in N . Se le $\{g_{i,j}\}$ sono le funzioni di transizione di θ relative ad \mathcal{U} , le $\{\pi^*g_{i,j} = g_{i,j} \circ \pi\}$ sono le funzioni di transizione di $\pi^*\theta$ relative a \mathcal{W} . Fissiamo una partizione \mathcal{C}^∞ dell'unità $\{\kappa_i\}$ in M relativa al ricoprimento \mathcal{U} . Allora $\{\pi^*\kappa_i\}$ è una partizione dell'unità \mathcal{C}^∞ in N relativa al ricoprimento \mathcal{W} . Un rappresentante in $H^2(N)$ di $c_1(\pi^*\theta)$ è dato, per la (17.1), da

$$\sum_i d_N(\pi^*\kappa_i) \wedge \frac{d_N(\pi^*g_{i,j})}{\pi^*g_{i,j}} = \pi^* \left(\sum_i d_M \kappa_i \wedge \frac{d_M g_{i,j}}{g_{i,j}} \right) \text{ su } W_j = f^{-1}(U_j)$$

per ogni indice j . Questo dimostra la Proposizione. \square

17.2. La coomologia degli spazi proiettivi complessi

Possiamo utilizzare la successione di Gysin per calcolare con maggior accuratezza la coomologia di de Rham degli spazi complessi $\mathbb{C}P^n$. Abbiamo una fibrazione naturale

$$(17.5) \quad S^{2n+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^n$$

con fibra S^1 . Indichiamo con $\mathbf{e} \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ la sua classe di Eulero. Abbiamo allora le successioni esatte

$$(17.6) \quad H^{q+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{\pi_*} H^q(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\mathbf{e} \wedge \cdot} H^{q+2}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\pi^*} H^{q+2}(S^{2n+1})$$

Abbiamo già visto nell'Esempio ?? che il polinomio di Poincaré di $\mathbb{C}P^n$ è

$$(17.7) \quad P_t(\mathbb{C}P^n) = \sum_{q=0}^n t^{2q} = \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2},$$

cioè $H^q(\mathbb{C}P^n)$ ha dimensione reale 1 per $q = 0, 2, \dots, 2n$, e zero altrimenti. La successione esatta (17.6) ci permette di affermare che \mathbf{e} è il generatore di $H^2(\mathbb{C}P^n)$, e che, per ogni $q = 2, \dots, n$,

$$(17.8) \quad \mathbf{e}^q = \underbrace{\mathbf{e} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}}_{q \text{ volte}} \text{ è il generatore di } H^{2q}(\mathbb{C}P^n).$$

Abbiamo ottenuto

PROPOSIZIONE 17.2.1. *L'algebra di coomologia $H^*(\mathbb{C}P^n)$ è un'algebra unitaria con un unico generatore \mathbf{e} , ed è isomorfa al quoziente $\mathbb{R}[x]/(x^{n+1})$.*

Osserviamo che $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ è il fibrato in sfere associato al *fibrato tautologico* di $\mathbb{C}P^n$, che ha come spazio totale

$$(17.9) \quad \mathbb{T} = \{(p, v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in p\},$$

dove abbiamo identificato i punti p di $\mathbb{C}P^n$ alle rette complesse passanti per l'origine di \mathbb{C}^{n+1} . Quindi la classe \mathbf{e} è la prima classe di Chern del fibrato tautologico di $\mathbb{C}P^n$.

17.3. Le classi di Chern

Sia $\theta = (E_\theta \xrightarrow{\pi_\theta} M)$ un fibrato vettoriale complesso di rango n . Possiamo associare ad esso il suo *proiettivizzato* $\mathbb{P}(\theta) = (\mathbb{P}(E_\theta) \xrightarrow{\pi} M)$. Il suo spazio totale si ottiene come il quoziente di E_θ , privato della sezione nulla, rispetto all'azione moltiplicativa del gruppo \mathbb{C}^* dei numeri complessi diversi da zero. Lo indicheremo con

$$(17.10) \quad \mathbb{P}(E_\theta) = \check{E}_\theta / \mathbb{C}^*, \quad \text{ove} \quad \check{E}_\theta = \{v \in E_\theta \mid v \neq 0\}.$$

La proiezione sulla base è definita dal diagramma commutativo

$$(17.11) \quad \begin{array}{ccc} \check{E}_\theta & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}(E_\theta) \\ \pi_\theta \searrow & & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

Identifichiamo $\mathbb{P}(E_\theta)$ con l'insieme delle rette per l'origine delle fibre di E_θ .

Definiamo il *fibrato tautologico* di $\mathbb{P}(\theta)$ con spazio totale

$$(17.12) \quad \mathbb{T}(\theta) = \{(\sigma, \nu) \in \mathbb{P}(E_\theta) \times E_\theta \mid \nu \in \sigma\},$$

base $\mathbb{P}(E_\theta)$ e proiezione $\pi : \mathbb{T}(\theta) \ni (\sigma, \nu) \rightarrow \sigma \in \mathbb{P}(E_\theta)$ e sia $\zeta \in H^2(\mathbb{P}(E_\theta))$ l'opposto della sua prima classe di Chern.

LEMMA 17.3.1. *Le classi $\zeta^q \in H^{2q}(\mathbb{P}(E_\theta))$, per $q = 0, 1, \dots, n-1$ si restringono, su ogni fibra di $\mathbb{P}(\theta)$, ad una base della coomologia della fibra.*

DIMOSTRAZIONE. Questo segue dal fatto che la classe di Eulero della restrizione di un fibrato in sfere orientate ad una sottovarietà della base è una restrizione alla sottovarietà della classe di Eulero del fibrato. \square

Come conseguenza otteniamo, per il Teorema di Leray-Hirsch, la

PROPOSIZIONE 17.3.2. *Abbiamo*

$$(17.13) \quad H^*(\mathbb{P}(E_\theta)) \simeq H^*(M) \otimes H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}),$$

$$(17.14) \quad P_t(\mathbb{P}(E_\theta)) = P_t(M) \cdot \frac{1 - t^{2n}}{1 - t^2}.$$

Da questa segue il

TEOREMA 17.3.3. *Sia $\zeta \in H^2(\mathbb{P}(E_\theta))$ l'opposta della classe di Eulero del fibrato tautologico su $\mathbb{P}(E_\theta)$. Esistono allora delle classi di coomologia*

$$(17.15) \quad c_q(\theta) \in H^{2q}(M)$$

tali che

$$(17.16) \quad \zeta^n + \pi^*(c_1(\theta)) \wedge \zeta^{n-1} + \dots + \pi^*(c_{n-1}(\theta)) \wedge \zeta + \pi^*(c_n(\theta)) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per la (17.13), è

$$H^*(\mathbb{P}(E_\theta)) = \left\{ \sum_{q=0}^{n-1} \pi^*(\alpha_q) \wedge \zeta^q \mid \alpha_q \in H^*(M) \right\}.$$

Le (17.15) e (17.16) si ottengono esprimendo $\zeta^n \in H^{2n}(\mathbb{P}(E_\theta))$ come combinazione lineare di $1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1}$ a coefficienti in $\pi^*(H^*(M))$. \square

DEFINIZIONE 17.3.4. Le classi $c_q(\theta) \in H^{2q}(M)$ definite dalle (17.15) e (17.16) si dicono le *classi di Chern* del fibrato θ .

Incheremo con

$$(17.17) \quad c(\theta) = 1 + c_1(\theta) + c_2(\theta) + \dots + c_N(\theta) \in H^*(M)$$

la *classe di Chern totale* del fibrato.

OSSERVAZIONE 17.3.5. Nel caso di un fibrato in rette complesse, la classe di Chern definita in 17.1 coincide con quella della Definizione 17.3.4.

17.4. Proprietà delle classi di Chern

Le classi di Chern godono di alcune importanti proprietà, che le caratterizzano assiomaticamente.

TEOREMA 17.4.1 (Naturalità). *Siano M, N due varietà differenziabili e sia $\theta = (E_\theta \xrightarrow{\pi_\theta} M)$ un fibrato vettoriale complesso di rango n su M . Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$. Allora le classi di Chern dell'immagine inversa $f^*\theta$ del fibrato θ sono le immagini inverse delle classi di Chern di θ :*

$$(17.18) \quad c_q(\pi^*\theta) = f^*(c_q(\theta)), \quad \forall q = 1, \dots, n.$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che $\pi^*\theta$ è il fibrato con spazio totale

$$E_{\pi^*\theta} = \{(a, v) \in N \times E_\theta \mid f(a) = \pi_\theta(v)\}$$

e proiezione $\pi_{\pi^*\theta} : E_{\pi^*\theta} \ni (a, v) \rightarrow a \in N$. La f si solleva ad un omomorfismo di fibrati vettoriali, definito sugli spazi totali da

$$F : E_{\pi^*\theta} \ni (a, v) \longrightarrow v \in E_\theta$$

che, per passaggio ai quozienti, dà un omomorfismo dei proiettivizzati

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(E_{\pi^*\theta}) & \xrightarrow{\hat{F}} & \mathbb{P}(E_\theta) \\ \pi_N \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ N & \xrightarrow{f} & M. \end{array}$$

Indichiamo con ζ_N l'opposta della prima classe di Chern del fibrato tautologico su $\mathbb{P}(E_{\pi^*\theta})$ e con ζ_M quella del fibrato tautologico su $\mathbb{P}(E_\theta)$. Per la Proposizione 17.1.2 è $\zeta_N = \hat{F}^*\zeta_M$. Applicando \hat{F}^* al primo membro dell'equazione

$$\zeta_M^n + \pi_M^*(c_1(\theta)) \wedge \zeta_M^{n-1} + \dots + \pi_M^*(c_{n-1}(\theta)) \wedge \zeta_M + \pi_M^*(c_n(\theta)) = 0$$

otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \zeta_N^n + \hat{F}^*(\pi_M^*(c_1(\theta))) \wedge \zeta_N^{n-1} + \dots + \hat{F}^*(\pi_M^*(c_{n-1}(\theta))) \wedge \zeta_N + \hat{F}^*(\pi_M^*(c_n(\theta))) \\ &= \zeta_N^n + \pi_N^*(f^*(c_1(\theta))) \wedge \zeta_N^{n-1} + \dots + \pi_N^*(f^*(c_{n-1}(\theta))) \wedge \zeta_N + \pi_N^*(f^*(c_n(\theta))), \end{aligned}$$

da cui segue la (17.18). \square

OSSERVAZIONE 17.4.2. Ovviamente fibrati complessi isomorfi sulla stessa base hanno uguali classi di Chern.

TEOREMA 17.4.3 (formula del prodotto di Whitney). *Se θ_1 e θ_2 sono fibrati vettoriali complessi su M , allora*

$$(17.19) \quad c(\theta_1 \oplus_M \theta_2) = c(\theta_1)c(\theta_2).$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $\theta_0 = \theta_1 \oplus_M \theta_2$ e $\theta_i = (E_i \xrightarrow{\pi_i} M)$, per $i = 0, 1, 2$ ed indichiamo con n, n_1, n_2 , ($n = n_1 + n_2$), i ranghi dei fibrati vettoriali complessi θ_0 , θ_1 e θ_2 , rispettivamente.

Consideriamo i $\mathbb{P}(E_i)$ come sottospazi di $\mathbb{P}(E_0)$ ed indichiamo con $\lambda_i : \mathbb{P}(E_i) \hookrightarrow \mathbb{P}(E_0)$ le inclusioni naturali. Siano poi

$$\mathbb{T}(E_i) = \{(a, v) \in \mathbb{P}(E_i) \times E_i \mid v \in a\}$$

gli spazi totali dei fibrati tautologici $\mathbb{T}(\theta_i)$. Abbiamo ancora inclusioni naturali $\hat{\lambda}_i : \mathbb{T}(E_i) \rightarrow \mathbb{T}(E_0)$ per $i = 1, 2$. In particolare, la prima classe di Chern di $\mathbb{T}(\theta_i)$ è l'immagine inversa mediante λ_i della prima classe di Chern di $\mathbb{T}(\theta_0)$, per $i = 1, 2$. Quindi, se $\zeta \in H^2(\mathbb{P}(E_0))$ è l'opposto della prima classe di Chern di $\mathbb{T}(\theta_0)$, le classi di Chern di θ_i sono caratterizzate dalle equazioni

$$[\lambda_i^*(\zeta)]^{n_i} + \pi_i^*(c_1(\theta_i))[\lambda_i^*(\zeta)]^{n_i-1} + \cdots + \pi_i^*(c_{n_i-1}(\theta_i))[\lambda_i^*(\zeta)] + \pi_i^*(c_{n_i}(\theta_i)) = 0.$$

Ciò significa che la classe

$$\alpha_i = \zeta^{n_i} + \pi_0^*(c_1(\theta_i))\zeta^{n_i-1} + \cdots + \pi_0^*(c_{n_i-1}(\theta_i))\zeta + \pi_0^*(c_{n_i}(\theta_i)) \in H^{2n_i}(\mathbb{P}(E_0))$$

ha restrizione nulla $\lambda_i^*(\alpha_i)$ su $\mathbb{P}(E_i)$, per $i = 1, 2$.

Dimostriamo che possiamo scegliere dei rappresentanti $f_i \in Z^{2n_i}(\mathbb{P}(E_0))$ delle classi di coomologia α_i con supporti disgiunti.

Sia $g_1 \in Z^{2n_1}(\mathbb{P}(E_0))$ un qualsiasi rappresentante di α_1 . Poiché $\mathbb{P}(E_0) \setminus \mathbb{P}(E_2)$ è un intorno tubolare di $\mathbb{P}(E_1)$ in $\mathbb{P}(E_0)$, la restrizione definisce, per passaggio al quoziente, un isomorfismo

$$H^q(\mathbb{P}(E_0) \setminus \mathbb{P}(E_2)) \longrightarrow H^q(\mathbb{P}(E_1)), \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Dunque la restrizione di g_1 a $\mathbb{P}(E_0) \setminus \mathbb{P}(E_2)$ è coomologa a zero e possiamo perciò trovare una forma $u_1 \in \Omega^{2n_1-1}(\mathbb{P}(E_0) \setminus \mathbb{P}(E_2))$ tale che $g_1 = du_1$ su $\mathbb{P}(E_0) \setminus \mathbb{P}(E_2)$. Fissiamo un qualsiasi intorno U_2 di $\mathbb{P}(E_2)$ in $\mathbb{P}(E_0)$ e sia $\kappa_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{P}(E_0))$ una funzione che si annulla su un intorno $U'_2 \Subset U_2$ di $\mathbb{P}(E_2)$ in U_2 e vale 1 sul complementare in $\mathbb{P}(E_0)$ di un altro intorno $U''_2 \Subset U_2$ di $\mathbb{P}(E_2)$ in U_2 . Allora

$$f_1 = \begin{cases} g_1 - d(\kappa_2 u_1) & \text{in } \mathbb{P}(E_0) \setminus \mathbb{P}(E_2), \\ g_1 & \text{in } \mathbb{P}(E_2) \end{cases}$$

è un rappresentante della classe α_1 con supporto contenuto in U_2 .

Analogamente, possiamo costruire una forma $f_2 \in Z^{2n_2}(\mathbb{P}(E_0))$ che rappresenta la classe α_2 , con supporto contenuto in un arbitrario intorno aperto U_1 di $\mathbb{P}(E_1)$. Scegliendo due intorni aperti disgiunti U_1 ed U_2 dei chiusi disgiunti $\mathbb{P}(E_1)$ e $\mathbb{P}(E_2)$, otteniamo per la classe $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ un rappresentante $f_1 \wedge f_2$ identicamente nullo. L'espressione $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0$ ci dà

$$\begin{aligned} \zeta^n + \beta_1 \wedge \zeta^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} \wedge \zeta + \beta_n &= 0 \\ \text{con } \beta_q &= \sum_{q_1+q_2=q} \pi_0^*(c_{q_1}(\theta_1)) \wedge \pi_0^*(c_{q_2}(\theta_2)) \\ &= \pi_0^* \left(\sum_{q_1+q_2=q} c_{q_1}(\theta_1) \wedge c_{q_2}(\theta_2) \right), \end{aligned}$$

ove abbiamo posto $c_0(\theta_i) = 1$. La dimostrazione è completa. \square

PROPOSIZIONE 17.4.4. *Sia $\theta = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale complesso di rango n . La sua n -esima classe di Chern $c_n(\theta)$ coincide con la classe di Eulero di θ .*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una metrica Hermitiana sulle fibre di θ ed indichiamo con $\mathbb{S}(\theta) = (\mathbb{S}(E) \xrightarrow{\pi_S} M)$ il corrispondente fibrato in sfere. La corrispondenza

$$\mathbb{S}(E) \ni v \longleftrightarrow ([v], v) \in \mathbb{S}(\mathbb{T}(E))$$

identifica gli spazi totali di $\mathbb{S}(\theta)$ e del fibrato in sfere del fibrato tautologico su $\mathbb{P}(\theta)$. Sia

$$\varpi : \mathbb{S}(E) \ni v \longrightarrow [v] \in \mathbb{P}(\theta)$$

la proiezione naturale. Abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}(E) & \longleftarrow & \mathbb{S}(\mathbb{T}(E)) \\ \downarrow & \swarrow \pi_P & \updownarrow \\ \mathbb{P}(E) & \xleftarrow{\varpi} & \mathbb{S}(E) \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_S \\ & M & \end{array}$$

Sia (e_P, ψ_P) la forma di Eulero totale del fibrato in sfere $\mathbb{S}(\mathbb{T}(\theta))$. Possiamo leggere ψ_P come una 1-forma su $\mathbb{S}(E)$ e la e_P come una 2-forma chiusa su $\mathbb{P}(E)$. Indicando con ζ l'opposta di e_P , abbiamo, per l'equazione che caratterizza la forma di Eulero,

$$d\psi_P = -\varpi^*(e_P) = \varpi^*(\zeta).$$

Consideriamo la forma

$$\psi_S = \psi_P \wedge \sum_{i=0}^{n-1} \pi_S^*(c_i(\theta)) \wedge (\varpi^*(\zeta))^{n-i-1}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \pi_{S*} \psi_S &= \pi_{S*}(\psi_P \wedge (\varpi^*(\zeta))^{n-1}) = 1, \\ d\psi_S &= \sum_{i=0}^{n-1} \pi_S^*(c_i(\theta)) \wedge (\varpi^*(\zeta))^{n-i} = \varpi^* \left(\sum_{i=0}^{n-1} \pi^*(c_i(\theta)) \wedge \zeta^{n-i} \right) \\ &= -\varpi^*(\pi^*(c_n(\theta))) = -\pi_S^*(c_n(\theta)), \end{aligned}$$

per la (17.16). Questo dimostra che $(\psi_S, c_n(\theta))$ è la classe di Eulero totale del fibrato in sfere $\mathbb{S}(\theta)$, e quindi la forma di Eulero di θ . \square

COROLLARIO 17.4.5. *Sia $\theta = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale complesso di rango n . Se θ ammette una sezione che non si annulli in nessun punto, allora $c_n(\theta) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti una sezione globale di θ che non si annulli in nessun punto ci permette di definire una sezione globale di $\mathbb{S}(\theta)$. Questo implica che la classe di Eulero, e quindi l' n -esima classe di Chern, è nulla. \square

17.5. Varietà bandiera e varietà di Grassmann

Richiamiamo la costruzione delle varietà di Grassmann e delle varietà bandiera complesse.

Se V è uno spazio vettoriale complesso di dimensione n e k un intero con $0 < k < n$, la Grassmanniana dei k -piani di V è l'insieme

$$(17.20) \quad \mathbb{G}_k(V) = \{\ell \mid \ell \text{ è un sottospazio vettoriale di dimensione } k \text{ di } V\},$$

dotato di un'unica struttura di varietà complessa compatta per cui l'azione naturale del gruppo lineare $\mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ è olomorfa. La $\mathbb{G}_k(V)$ è una varietà complessa, connessa e compatta di dimensione $k(n-k)$, e quindi una varietà reale analitica di dimensione $2k(n-k)$.

Sia ℓ_0 di $\mathbb{G}_k(V)$. Fissiamo una base e_1, \dots, e_n di V tale che e_1, \dots, e_k sia una base di ℓ_0 . Allora l'insieme di tutti i k -piani ℓ che ammettono una base della forma

$$e_1 + \sum_{i=1}^{n-k} x^{1,i} e_{k+i}, \dots, e_k + \sum_{i=1}^{n-k} x^{k,i} e_{k+i}$$

è un intorno aperto U_{e_1, \dots, e_n} di ℓ_0 ed i coefficienti $(x^{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n-k}}$ sono coordinate in U_{e_1, \dots, e_n} . Se fissiamo un prodotto scalare Hermitiano su V , possiamo considerare il gruppo unitario $\mathbf{U}(V)$ e il gruppo speciale unitario $\mathbf{SU}(V)$. Anch'essi operano transitivamente su $\mathbb{G}_k(V)$ che quindi può essere rappresentato come spazio omogeneo

$$\mathbb{G}_k(V) \simeq \mathbf{U}(n)/(\mathbf{U}(k) \times \mathbf{U}(n-k)) \simeq \mathbf{SU}(n)/\mathbf{S}(\mathbf{U}(k) \times \mathbf{U}(n-k)).$$

Più in generale, fissati interi k_1, \dots, k_r con $0 < k_1 < \dots < k_r < n$, definiamo

$$(17.21) \quad \mathbb{F}_{k_1, \dots, k_r}(V) = \{(\ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathbb{G}_{k_1}(V) \times \dots \times \mathbb{G}_{k_r}(V) \mid \ell_1 \subset \dots \subset \ell_r\}.$$

La $\mathbb{F}_{k_1, \dots, k_r}(V)$ è una sottovarietà complessa di $\mathbb{G}_{k_1}(V) \times \dots \times \mathbb{G}_{k_r}(V)$, connessa e compatta, di dimensione complessa

$$\begin{aligned} k_1(n-k_1) + (k_2-k_1)(n-k_2) + \dots + (k_r-k_{r-1})(n-k_r) \\ = nk_r - (k_1^2 + \dots + k_r^2) + k_1k_2 + \dots + k_{r-1}k_r \end{aligned}$$

Scriveremo nel seguito $\mathbb{F}_k(V)$ per $\mathbb{F}_{1,2,\dots,k}(V)$ ed $\mathbb{F}(V)$ per $\mathbb{F}_{n-1}(V)$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{F}(V) &= n(n-1), \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{F}_k(V) &= \frac{k(2n-k-1)}{2}. \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 17.5.1. Le varietà $\mathbb{F}_{k_1, \dots, k_r}(V)$ si chiamano *varietà bandiera*. La $\mathbb{F}_k(V)$ è la *varietà delle k -bandiere complete* e la $\mathbb{F}(V)$ *varietà delle bandiere complete*, o *varietà bandiera associata a V* .

17.6. Varietà bandiera di un fibrato vettoriale

Sia $\theta = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale complesso di rango n . Associamo a θ la varietà $\mathbb{F}(E)$

$$(17.22) \quad \mathbb{F}(E) = \{(p, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}) \mid p \in M, \ell_1 \subset \dots \subset \ell_{n-1} \subset E_p\},$$

ove abbiamo indicato con ℓ_h un sottospazio vettoriale complesso di dimensione h . La $\mathbb{F}(E)$ ha una struttura naturale di varietà differenziabile di dimensione $m+n(n-1)$ ed è lo spazio totale di un fibrato differenziabile $\mathbb{F}(\theta) = (\mathbb{F}(E) \xrightarrow{\pi_F} M)$ con base M .

DEFINIZIONE 17.6.1. La $\mathbb{F}(E)$ si dice la *varietà bandiera* del fibrato vettoriale θ .

Abbiamo

LEMMA 17.6.2. *L'immagine inversa $\pi_F^*(\theta)$ di θ su $\mathbb{F}(E)$ si decompone nella somma diretta*

$$(17.23) \quad \pi_F^*(\theta) = \theta_1 \oplus \cdots \oplus \theta_n$$

di n fibrati in rette complesse.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un prodotto scalare Hermitiano differenziabile sulle fibre di θ . Allora ad ogni bandiera completa $\ell_1 \subset \cdots \subset \ell_{n-1}$ in E_p corrisponde un'unica decomposizione ortogonale $L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ in rette complesse $L_i = L_i(\ell_1, \dots, \ell_{n-1})$ tali che $\ell_1 = L_1$ ed $\ell_i = L_1 \oplus \cdots \oplus L_i$ per ogni $1 < i < n$. Definiamo i fibrati in rette θ_i con spazi totali

$$E_i = \{(p, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}; v) \in \mathbb{F}(E) \times E \mid v \in L_i(\ell_1, \dots, \ell_{n-1})\}$$

e proiezioni $\pi_i : E_i \ni (p, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}; v) \rightarrow (p, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}) \in \mathbb{F}(E)$. L'applicazione $\theta_1 \oplus \cdots \oplus \theta_n \rightarrow \pi_F^*(\theta)$ definita da

$$(p, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}; v_1) \oplus \cdots \oplus (p, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}; v_n) \longrightarrow (p, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}; v_1 + \cdots + v_n)$$

definisce l'isomorfismo cercato. \square

Per la formula del prodotto di Whitney, è

$$c(\pi_F^*(\theta)) = c(\theta_1) \cdots c(\theta_n).$$

Poniamo

$$(17.24) \quad x_1 = c(\theta_1), \dots, x_n = c(\theta_n).$$

Allora

$$c(\pi_F^*(\theta)) = (1 + x_1) \cdots (1 + x_n) = \sum_{i=0}^n \sigma_i(x_1, \dots, x_n)$$

ove

$$\begin{cases} \sigma_0(x_1, \dots, x_n) = 1, \\ \sigma_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n, \\ \sigma_q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_q}, \quad \text{per } 1 < q < n, \\ \sigma_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n \end{cases}$$

sono le funzioni simmetriche elementari di x_1, \dots, x_n .

Poiché $c(\pi_F^*(\theta)) = \pi_F^*(c(\theta))$, otteniamo

$$(17.25) \quad \pi_F^*(c_q(\theta)) = \sigma_q(x_1, \dots, x_n).$$

Esprimeremo questa uguaglianza con la relazione formale

$$(17.26) \quad c(\theta) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i).$$

Abbiamo perciò

TEOREMA 17.6.3. Sia $\theta = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale complesso di rango $n \geq 2$. Allora l'anello di coomologia della varietà bandiera associata è

$$(17.27) \quad H^*(\mathbb{F}(E)) = H^*(M)[x_1, \dots, x_n] \left/ \left(\prod_{i=1}^n (1 + x_i) = c(\theta) \right) \right.,$$

ove il quoziente si intende rispetto all'ideale generato dalle $\sigma_q(x_1, \dots, x_n) - c_q(\theta)$, per $q = 1, \dots, n$, e la sua serie di Poincaré è

$$(17.28) \quad P_t(\mathbb{F}(E)) = P_t(M) \cdot \frac{1 - t^4}{1 - t^2} \cdots \frac{1 - t^{2n}}{1 - t^2}.$$

Possiamo considerare la varietà bandiera di uno spazio vettoriale complesso V di dimensione n come la varietà bandiera associata al fibrato vettoriale banale $\{0\} \times V$. Come conseguenza del teorema precedente abbiamo quindi

COROLLARIO 17.6.4. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione $n \geq 2$ e sia $\mathbb{F}(V)$ la varietà delle sue bandiere complete. L'algebra di coomologia e la serie di Poincaré di $\mathbb{F}(V)$ sono

$$(17.29) \quad H^*(\mathbb{F}(V)) = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \left/ \left(\prod_{i=1}^n (1 + x_i) = 1 \right) \right.,$$

$$(17.30) \quad P_t(\mathbb{F}(V)) = \prod_{i=2}^n \frac{1 - t^{2i}}{1 - t^2},$$

ove abbiamo indicato con $\left(\prod_{i=1}^n (1 + x_i) = 1 \right)$ l'ideale generato dalle funzioni simmetriche di grado positivo di x_1, \dots, x_n .

Appendice: Omotopia

Omotopia

18.1. Omotopia libera di applicazioni continue

Siano X, Y due spazi topologici.

DEFINIZIONE 18.1.1. Due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sono *omotope* se è possibile trovare un'applicazione continua:

$$(18.1) \quad F : X \times I \rightarrow Y$$

(indichiamo con I l'intervallo $[0, 1]$ di \mathbb{R}), tale che

$$(18.2) \quad F(x, 0) = f_0(x) \text{ e } F(x, 1) = f_1(x) \quad \forall x \in X.$$

La F si dice un'*omotopia tra f_0 e f_1* .

OSSERVAZIONE 18.1.2. Un'omotopia F definisce un'applicazione continua

$$I \ni t \rightarrow F_t = F(\cdot, t) \in \mathcal{C}(X, Y)$$

dall'intervallo I allo spazio $\mathcal{C}(X, Y)$ delle funzioni continue da X in Y con la topologia compatta-aperta.

Viceversa, se X è di Hausdorff e localmente compatto ogni applicazione continua

$$I \ni t \rightarrow F_t \in \mathcal{C}(X, Y)$$

definisce un'omotopia tra F_0 e F_1 .

In questo caso, data una $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, l'insieme delle funzioni $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ omotope ad f è la componente connessa per archi di f in $\mathcal{C}(X, Y)$.

PROPOSIZIONE 18.1.3. L'*omotopia è una relazione di equivalenza in $\mathcal{C}(X, Y)$* .

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo $f \sim g$ per indicare che due funzioni $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ sono omotope. Verifichiamo che questa è una relazione di equivalenza.

1. È $f \sim f$ mediante l'omotopia costante

$$X \times I \ni (x, t) \rightarrow f(x) \in Y.$$

2. Se

$$F : X \times I \rightarrow Y$$

è un'omotopia tra f e g , allora

$$X \times I \ni (x, t) \rightarrow F(x, 1-t) \in Y$$

è un'omotopia tra g ed f . Quindi

$$f \sim g \iff g \sim f.$$

3. Se $f, g, h \in \mathcal{C}(X, Y)$ ed $F : X \times I \rightarrow Y$ è un'omotopia tra f e g , e $G : X \times I \rightarrow Y$ un'omotopia tra g ed h , allora la

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ F(x, 2t - 1) & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

definisce un'omotopia tra f e h . Dunque

$$f \sim g \quad \text{e} \quad g \sim h \implies f \sim h. \quad \square$$

DEFINIZIONE 18.1.4. Indichiamo con $\pi(X, Y)$ il quoziente di $\mathcal{C}(X, Y)$ rispetto all'equivalenza omotopica. Questo insieme si dice l'*omotopia libera* delle applicazioni continue di X in Y .

PROPOSIZIONE 18.1.5. Siano X, Y, V, W spazi topologici e $\varphi : V \rightarrow X, \psi : Y \rightarrow W$ due applicazioni continue. L'applicazione:

$$\psi_*\varphi^* : \mathcal{C}(X, Y) \ni f \longrightarrow \psi \circ f \circ \varphi \in \mathcal{C}(V, W)$$

definisce per passaggio al quoziente un'applicazione

$$\pi(\varphi, \psi) : \pi(X, Y) \longrightarrow \pi(V, W). \quad \square$$

18.2. Equivalenza omotopica di spazi topologici

DEFINIZIONE 18.2.1. Due applicazioni continue

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{e} \quad g : Y \longrightarrow X$$

si dicono l'una l'inversa omotopica dell'altra se

$$\begin{aligned} g \circ f &\sim id_X & \text{in } \pi(X, X), \\ f \circ g &\sim id_Y & \text{in } \pi(Y, Y). \end{aligned}$$

Diciamo allora che f e g sono *equivalenze omotopiche*. Due spazi topologici X e Y tra i quali si possa stabilire un'equivalenza omotopica si dicono *omotopicamente equivalenti* o che *hanno lo stesso tipo di omotopia*.

L'equivalenza omotopica è una relazione di equivalenza nella categoria degli spazi topologici. Si dimostra facilmente la seguente:

PROPOSIZIONE 18.2.2. (1) Siano X, Y, Z spazi topologici e $\varphi : X \rightarrow Y, \psi : Y \rightarrow Z$ due applicazioni continue. Se due delle $\varphi, \psi, \psi \circ \varphi$ sono equivalenze omotopiche, anche la terza lo è.
(2) Se X, Y, V, W sono spazi topologici e $\varphi : V \rightarrow X, \psi : Y \rightarrow W$ sono due equivalenze omotopiche, allora

$$\pi(\varphi, \psi) : \pi(X, Y) \longrightarrow \pi(V, W)$$

è un'applicazione bigettiva. □

18.3. Spazi topologici contrattili

DEFINIZIONE 18.3.1. Uno spazio topologico X si dice contrattile se id_X è omotopicamente equivalente ad un'applicazione costante in $\pi(X, X)$.

PROPOSIZIONE 18.3.2. *Uno spazio topologico è contrattile se e soltanto se ha lo stesso tipo di omotopia dello spazio formato da un solo punto.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con D^0 (disco 0-dimensionale) lo spazio formato da un solo punto. Siano

$$\begin{aligned} f : D^0 &\longrightarrow X & e \\ g : X &\longrightarrow D^0 \end{aligned}$$

due applicazioni omotopicamente inverse l'una dell'altra. Allora $f \circ g : X \rightarrow X$ è costante ed omotopicamente equivalente a id_X .

Viceversa, se

$$\varphi : X \rightarrow X$$

è un'applicazione costante omotopicamente equivalente a id_X , definiamo

$$f : D^0 \longrightarrow X \quad \text{mediante} \quad f(D^0) = \varphi(X)$$

e consideriamo l'unica applicazione

$$g : X \longrightarrow D^0.$$

Poiché $f \circ g = \varphi$, la f e la g sono equivalenze omotopiche. □

LEMMA 18.3.3. *Uno spazio topologico contrattile è connesso per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$F : X \times I \longrightarrow X$$

un'omotopia tra l'identità su X e un'applicazione costante. Allora, per ogni coppia di punti $x, y \in X$,

$$\alpha(t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ F(y, 2 - 2t) & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

definisce un cammino continuo che congiunge x a y . □

PROPOSIZIONE 18.3.4. *Se X è uno spazio contrattile, allora, per ogni spazio topologico Y , l'omotopia libera $\pi(Y, X)$ contiene un solo elemento.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f : D^0 \longrightarrow X$ è un'equivalenza omotopica, allora

$$\pi(id_Y, f) : \pi(Y, X) \longrightarrow \pi(Y, D^0)$$

è bigettiva. Il secondo insieme contiene un solo elemento e dunque la tesi è dimostrata. □

In particolare, due qualsiasi applicazioni costanti di uno spazio contrattile in sé sono omotopicamente equivalenti.

OSSERVAZIONE 18.3.5. Se X è uno spazio topologico contrattile ed Y un qualsiasi spazio topologico, allora $\pi(X, Y)$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle componenti connesse per archi di Y . Infatti, per ogni $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, l'immagine $f(X)$ è contenuta in una componente connessa per archi di Y , univocamente determinata dalla classe di omotopia dell'applicazione f .

18.4. Omotopia legata. Retratti di deformazione. Omotopia relativa

DEFINIZIONE 18.4.1. Sia (X, A) una coppia topologica (X è uno spazio topologico ed A un suo sottospazio). Sia Y un altro spazio topologico. Un'omotopia

$$F : X \times I \longrightarrow Y$$

si dice *legata* su A , o un' A -omotopia, se

$$F(x, t) = F(x, 0) \quad \forall x \in A, \quad \forall t \in I.$$

La relazione di A -omotopia è una relazione di equivalenza su $\mathcal{C}(X, Y)$ e il relativo quoziente si indica con $\pi_\ell(X, A; Y)$.

Fissata un'applicazione continua $\varphi : A \rightarrow Y$, indichiamo con $\pi(X, Y; \varphi)$ l'immagine in $\pi_\ell(X, A; Y)$ dell'insieme $\{f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f|_A = \varphi\}$.

DEFINIZIONE 18.4.2. Un sottospazio A di uno spazio topologico X si dice un suo *retrato di deformazione* se possiamo trovare una retrazione

$$\rho : X \longrightarrow A$$

(cioè un'applicazione continua a valori in A con $\rho|_A = id_A$) tale che l'applicazione composta:

$$X \xrightarrow{\rho} A \xrightarrow{\iota} X$$

sia omotopa all'identità su X .

Diciamo che A è un *retrato di deformazione stretto* di X se, inoltre, l'applicazione composta $X \xrightarrow{\rho} A \xrightarrow{\iota} X$ è A -omotopa all'identità id_X su X , se cioè possiamo trovare un'omotopia

$$F : X \times I \longrightarrow X, \quad \text{con} \quad \begin{cases} F(x, 0) = x & \forall x \in X, \\ F(x, 1) = \rho(x) & \forall x \in X, \\ F(x, t) = x & \forall x \in A, \quad \forall t \in I. \end{cases}$$

Siano X, Y due spazi topologici. Fissiamo sottospazi A_1, \dots, A_n di X e B_1, \dots, B_n di Y , ed indichiamo con $\mathcal{C}(X, A_1, \dots, A_n; Y, B_1, \dots, B_n)$ lo spazio delle funzioni continue $f : X \rightarrow Y$ tali che $f(A_i) \subset B_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

DEFINIZIONE 18.4.3. Chiamiamo *omotopia relativa* alle $(n+1)$ -uple:

$$(X, A_1, \dots, A_n) \quad \text{ed} \quad (Y, B_1, \dots, B_n)$$

un'omotopia $F : X \times I \rightarrow Y$ tale che $F(A_i \times I) \subset B_i \quad \forall i = 1, \dots, n$. L'omotopia relativa definisce una relazione di equivalenza su $\mathcal{C}(X, A_1, \dots, A_n; Y, B_1, \dots, B_n)$.

Denotiamo il relativo quoziente con $\pi(X, A_1, \dots, A_n; Y, B_1, \dots, B_n)$.

18.5. k -connessione

Useremo in \mathbb{R}^n coordinate x^0, \dots, x^{n-1} e indicheremo con e_0, \dots, e_{n-1} i vettori della base canonica. Definiamo:

$$(18.3) \quad D^0 = \{0\}$$

$$(18.4) \quad D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\} \text{ se } n > 0,$$

$$(18.5) \quad S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\} \text{ se } n \geq 0.$$

Abbiamo $S^{n-1} \subset D^n$. Considereremo S^n come un sottospazio di S^{n+1} mediante l'inclusione canonica

$$(18.6) \quad S^n \ni x \longrightarrow (x, 0) \in S^{n+1}.$$

Indichiamo con σ_+ e σ_- le immersioni canoniche:

$$(18.7) \quad \sigma_+ : D^n \ni x \longrightarrow (x^0, \dots, x^{n-1}, \sqrt{1 - |x|^2}) \in S^n$$

$$(18.8) \quad \sigma_- : D^n \ni x \longrightarrow (x^0, \dots, x^{n-1}, -\sqrt{1 - |x|^2}) \in S^n.$$

Ricordiamo ancora che l'applicazione:

$$(18.9) \quad S^n \times I \ni (x, t) \longrightarrow tx \in D^{n+1}$$

(coordinate polari) definisce un omeomorfismo canonico

$$\frac{S^n \times I}{S^n \times \{0\}} \longrightarrow D^{n+1}.$$

Abbiamo:

PROPOSIZIONE 18.5.1. *Sia X uno spazio topologico ed*

$$f : S^n \longrightarrow X$$

un'applicazione continua. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- a) f è omotopa ad un'applicazione costante.
- b) f si può prolungare a un'applicazione continua

$$\tilde{f} : D^{n+1} \longrightarrow X.$$

- c) $f \circ \sigma_+$ e $f \circ \sigma_-$ sono S^{n-1} -omotope.
- d) f è $\{e_0\}$ -omotopa all'applicazione costante.

DIMOSTRAZIONE. a) \Rightarrow b). Sia $F : S^n \times I \longrightarrow X$ un'omotopia di f con un'applicazione costante. La

$$S^n \times I \ni (x, t) \longrightarrow g(x, t) = (1 - t)x \in D^{n+1}$$

è decomponibile¹ e il suo quoziente iniettivo definisce un omeomorfismo tra

$$S^n \times I / (S^n \times 1) \text{ e } D^{n+1}.$$

¹Ricordiamo che il *quoziente iniettivo* di un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ è il quoziente X/\sim di X rispetto alla relazione di equivalenza che identifica i punti di X che hanno la stessa immagine rispetto ad f . Se X e Y sono spazi topologici, la f è continua se e soltanto se l'applicazione $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y$

Poiché la F è costante su $S^n \times 1$, essa passa al quoziente, definendo un'applicazione continua

$$\tilde{f} : D^{n+1} \longrightarrow X$$

che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} S^n \times I & \xrightarrow{F} & X \\ & \searrow g & \swarrow \tilde{f} \\ & D^{n+1} & \end{array}$$

Chiaramente $\tilde{f}|_{S^n} = F_0 = f$.

b) \Rightarrow c), d). Sia $\tilde{f} : D^{n+1} \longrightarrow X$ un prolungamento continuo di f . Allora

$$F(x, t) = \tilde{f}(x, (1 - 2t) \sqrt{1 - |x|^2})$$

definisce una S^{n-1} -omotopia tra $f \circ \sigma_+$ e $f \circ \sigma_-$ e la

$$G(x, t) = \tilde{f}(t + (1 - t)x^0, (1 - t)x^1, \dots, (1 - t)x^{n-1})$$

definisce una $\{e_0\}$ -omotopia

$$G : S^n \times I \longrightarrow X$$

di f con l'applicazione costante.

c) \Rightarrow b). Sia $F : D^n \times I \longrightarrow X$ una S^{n-1} -omotopia tra $f \circ \sigma_+$ e $f \circ \sigma_-$. Definiamo

$$h : D^n \times I \ni (x, t) \longrightarrow h(x, t) = (x, (1 - 2t) \sqrt{1 - |x|^2}) \in D^{n+1}.$$

Allora h è un'applicazione decomponibile e la F per passaggio al quoziente definisce un prolungamento \tilde{f} di f che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} D^n \times I & \xrightarrow{F} & X \\ & \searrow h & \swarrow \tilde{f} \\ & D^{n+1} & \end{array}$$

L'implicazione d) \Rightarrow a) è banale. La dimostrazione è completa. \square

DEFINIZIONE 18.5.2. Sia k un intero non negativo o ∞ . Uno spazio topologico non vuoto X si dice k -connesso se, per ogni intero non negativo $n \leq k$, ogni applicazione continua $S^n \rightarrow X$ è omotopa ad un'applicazione costante, ovvero se

$$\pi(S^n, X) \text{ contiene un solo elemento } \forall 0 \leq n \leq k, n \in \mathbb{Z}.$$

definita dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \pi & \swarrow \hat{f} \\ & X/\sim & \end{array}$$

è continua. La $f : X \rightarrow Y$ si dice *decomponibile* se la \hat{f} è un omeomorfismo.

Uno spazio topologico omotopicamente equivalente ad uno spazio k -connesso è esso stesso k -connesso.

Gli spazi contrattili sono ∞ -connessi.

Gli spazi 0-connessi sono gli spazi connessi per archi.

Uno spazio 1-connesso si dice *connesso e semplicemente connesso*.

Uno spazio è *semplicemente connesso* se tutte le sue componenti connesse per archi sono 1-connesse.

18.6. k -conneSSIONE RELATIVA

DEFINIZIONE 18.6.1. Una coppia topologica (X, A) si dice k -connessa se, per ogni intero $0 \leq n \leq k$ ogni applicazione continua $f : D^n \rightarrow X$ tale che

$$f(S^{n-1}) \subset A$$

è S^{n-1} -omotopa ad un'applicazione continua $g : D^n \rightarrow X$ tale che

$$g(D^n) \subset A.$$

Il lemma seguente permette di dare una condizione equivalente di k -conneSSIONE, in termini di omotopia relativa.

PROPOSIZIONE 18.6.2. Sia $f \in \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; X, A)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia, in $\pi(D^n, S^{n-1}; X, A)$, omotopa ad un'applicazione costante, è che f sia S^{n-1} -omotopa ad un'applicazione continua g con $g(D^n) \subset A$.

DIMOSTRAZIONE.

NECESSITÀ. Sia $F : D^n \times I \rightarrow X$ un'omotopia con:

$$F_0 = f$$

$$F_t(S^{n-1}) \subset A \quad \forall t \in I$$

$$F_1(x) = \text{costante} \quad \forall x \in X.$$

Definiamo allora

$$G(x, t) = \begin{cases} F(x/|x|, 2(1 - |x|)) & \text{se } |x| \geq 1 - t/2, \\ F(x/(1 - t/2), t) & \text{se } |x| \leq 1 - t/2. \end{cases}$$

La G è una S^{n-1} -omotopia tra f e la funzione continua

$$g(x) = \begin{cases} F(x/|x|, 2(1 - |x|)) & \text{se } |x| \geq 1/2, \\ F(2x, 1) & \text{se } |x| \leq 1/2, \end{cases}$$

che soddisfa $g(D^n) \subset A$.

SUFFICIENZA. Sia $G : D^n \times I \rightarrow X$ una S^{n-1} -omotopia tra f ed un'applicazione g con $g(D^n) \subset A$. Allora la

$$F(x, t) = \begin{cases} G(x, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(2(1 - t)x, 1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

è, in $\pi(D^n, S^{n-1}; X, A)$, un'omotopia di f con un'applicazione costante. \square

OSSERVAZIONE 18.6.3. Osserviamo che, se A è un retratto di deformazione stretto di X , allora la coppia (X, A) è ∞ -connessa.

Per $n = 0$ poniamo $S^{-1} = \emptyset$. Allora l'enunciato del Lemma precedente è ancora valido: *Una coppia topologica (X, A) è 0-connessa se ogni punto di X può essere congiunto a un punto di A da un cammino continuo.*

Citiamo senza dimostrazione il seguente risultato:

Se l'inclusione $A \hookrightarrow X$ è un'equivalenza omotopica, allora la coppia (X, A) è ∞ -connessa.

18.7. Proprietà di omotopia delle sfere

Mostriamo in questo paragrafo che la sfera S^n è $(n - 1)$ -connessa, ma non n -connessa.

TEOREMA 18.7.1. *Per ogni intero $n \geq 1$, la sfera S^n è $(n - 1)$ -connessa.*

DIMOSTRAZIONE. Sia m un intero non negativo $< n$ e sia

$$f : S^m \longrightarrow S^n$$

un'applicazione continua. Per il teorema di Stone-Weierstrass possiamo trovare un'applicazione a componenti polinomiali

$$P : \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

tale che:

$$|P(x) - f(x)| < 1/2 \quad \forall x \in S^m.$$

Abbiamo quindi:

$$|f(x) + t(P(x) - f(x))| > 1/2 \quad \forall (x, t) \in S^m \times I.$$

L'applicazione

$$S^m \times I \ni (x, t) \longrightarrow \frac{f(x) + t(P(x) - f(x))}{|f(x) + t(P(x) - f(x))|} \in S^n$$

è perciò ben definita e descrive un'omotopia tra f e la restrizione g di $P/|P|$ a S^m . Dico che la g non è surgettiva. Infatti, g è di classe C^∞ su S^m e quindi, per il Lemma di Sard, $g(S^m)$ è di prima categoria in S^n . Poiché S^n meno un punto è omeomorfa ad \mathbb{R}^n , che ha lo stesso tipo di omotopia del punto, g è omotopa ad un'applicazione costante. \square

DEFINIZIONE 18.7.2. Sia n un intero ≥ 1 . Chiamiamo *sospensione* l'applicazione continua $\sigma : \mathcal{C}(S^n, S^n) \rightarrow \mathcal{C}(S^{n+1}, S^{n+1})$ definita da:

$$(18.10) \quad (\sigma f)(x', x^{n+1}) = \begin{cases} \left(|x'| \cdot f\left(\frac{x'}{|x'|}\right), x^{n+1} \right) & \text{se } x' \neq 0 \\ (0, x^{n+1}) & \text{se } x' = 0, \end{cases}$$

ove abbiamo posto $x' = (x^0, \dots, x^n)$.

LEMMA 18.7.3. Per ogni intero $n \geq 1$ la $\sigma : \mathcal{C}(S^n, S^n) \rightarrow \mathcal{C}(S^{n+1}, S^{n+1})$ induce un'applicazione bigettiva

$$\sigma_* : \pi(S^n, S^n) \longrightarrow \pi(S^{n+1}, S^{n+1}).$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché un'omotopia di applicazioni continue di S^n in sé si trasforma mediante σ in un'omotopia di applicazioni continue su S^{n+1} in sé, la σ_* è ben definita.

INIETTIVITÀ. Siano $f_0, f_1 : S^n \rightarrow S^n$ due applicazioni continue. Se σf_0 è omotopa a σf_1 , possiamo trovare un'omotopia

$$F : S^{n+1} \times I \rightarrow S^{n+1}$$

con $F_0 = \sigma f_0$, $F_1 = \sigma f_1$. Osserviamo che:

$$(*) \quad \Psi(x, t) = t(|F^{n+1}(x, t)| - |x^{n+1}|) \cdot e_0 + F(x, t) \neq 0 \\ \forall(x, t) \in S^{n+1} \times I \quad \text{con} \quad |F^{n+1}(x, t)| \geq |x^{n+1}|.$$

Infatti, se $|F^{n+1}(x, t)| > 0$, i due termini nella somma a secondo membro della (*) sono linearmente indipendenti. Se $|F^{n+1}(x, t)| = 0$, allora $\Psi(x, t) = F(x, t) \neq 0$.

Possiamo allora definire una nuova omotopia $G : S^n \times I \rightarrow S^n$ tra σf_0 e σf_1 ponendo:

$$G(x, t) = \begin{cases} F(x, t) & \text{se } |F^{n+1}(x, t)| \leq |x^{n+1}| \\ \Psi(x, t)/|\Psi(x, t)| & \text{se } |F^{n+1}(x, t)| \geq |x^{n+1}|. \end{cases}$$

Infatti, poiché $F^{n+1}(x, 0) = [\sigma f_0]^{n+1} = x^{n+1}$ ed $F^{n+1}(x, 1) = [\sigma f_1]^{n+1} = x^{n+1}$, risulta $G_0(x) = F_0(x) = \sigma f_0(x)$ e $G_1(x) = F_1(x) = \sigma f_1(x)$.

Questa nuova omotopia G verifica

$$|G^{n+1}(x, t)| < 1 \quad \forall(x, t) \in S^n \times I$$

in quanto ciò è vero se $t = 0, 1$ e per $t \neq 0, x \in S^n$ il vettore

$$\Psi(x, t) = t|F^{n+1}(x, t)|e_0 + F(x, t)$$

non è proporzionale ad e_{n+1} .

Otteniamo quindi un'omotopia $H : S^n \times I \rightarrow S^n$ di f_0 con f_1 dalla G componendola con la retrazione canonica di $S^{n+1} \setminus \{\pm e_{n+1}\}$ su S^n , definita da:

$$\varrho : S^{n+1} \setminus \{\pm e_{n+1}\} \ni x \rightarrow \frac{x'}{|x'|} \in S^n \quad (\text{ove } x' = (x^0, \dots, x^n)).$$

Poniamo cioè

$$H(x', t) = \varrho \circ G(x', 0; t) \quad \forall x' \in S^n \subset S^{n+1}, \forall t \in I.$$

SURGETTIVITÀ. Sia $f : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ un'applicazione continua.

a) Supponiamo che la f applichi la semisfera superiore nella semisfera superiore e la semisfera inferiore nella semisfera inferiore, cioè che, posti

$$S_+^{n+1} = \{x \in S^{n+1} \mid x^{n+1} \geq 0\} \quad \text{ed} \\ S_-^{n+1} = \{x \in S^{n+1} \mid x^{n+1} \leq 0\}$$

risulti

$$f(S_+^{n+1}) \subset S_+^{n+1} \quad \text{e} \quad f(S_-^{n+1}) \subset S_-^{n+1}.$$

In particolare $f(S^n) \subset f(S^n)$. Dimostriamo che f è omotopa alla sospensione σg della sua abbreviazione $g : S^n \ni x' \rightarrow f(x', 0) \in S^n$.

Indichiamo con $h : D^{n+1} \rightarrow D^{n+1}$ l'estensione canonica della g ad un'applicazione continua, omogenea di grado 1, di D^{n+1} in sé:

$$h(y) = \begin{cases} |y|g(y/|y|) & \forall y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Siano σ_+ e σ_- le applicazioni (18.7) e (18.8) introdotte nel §18.5 e

$$p : S^{n+1} \ni (x^0, \dots, x^n, x^{n+1}) \rightarrow (x^0, \dots, x^n) \in D^{n+1}$$

la proiezione naturale. Allora

$$\sigma g(x) = \begin{cases} \sigma_+(h(p(x))) & \forall x \in S_+^{n+1} \\ \sigma_-(h(p(x))) & \forall x \in S_-^{n+1}. \end{cases}$$

Indichiamo con $f_+, f_- : D^{n+1} \rightarrow D^{n+1}$ le funzioni continue:

$$\begin{aligned} f_+(y) &= p \circ f(\sigma_+(y)) \quad \text{per } y \in D^{n+1}, \\ f_-(y) &= p \circ f(\sigma_-(y)) \quad \text{per } y \in D^{n+1}. \end{aligned}$$

La proprietà della funzione f di trasformare in sé i due emisferi S_+^{n+1} ed S_-^{n+1} si può esprimere mediante:

$$f(x) = \begin{cases} \sigma_+ \circ f_+(p(x)) & \text{se } x \in S_+^{n+1} \\ \sigma_- \circ f_-(p(x)) & \text{se } x \in S_-^{n+1}. \end{cases}$$

Allora un'omotopia $F : S^{n+1} \times I \rightarrow S^{n+1}$ tra f e σg si può ottenere rialzando le omotopie lineari tra f_+, f_- ed h :

$$F(x, t) = \begin{cases} \sigma_+(f_+(p(x)) + t(h(p(x)) - f_+(p(x)))) & \text{se } x \in S_+^{n+1} \\ \sigma_-(f_-(p(x)) + t(h(p(x)) - f_-(p(x)))) & \text{se } x \in S_-^{n+1}. \end{cases}$$

b) Consideriamo ora il caso generale. Sia $f : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ una qualsiasi applicazione continua.

Se f non è surgettiva, allora è omotopa ad un'applicazione costante e questa è omotopa alla σh ove $h(x) = e_0 \quad \forall x \in S^n$.

Supponiamo quindi f surgettiva. Ripetendo il ragionamento svolto nella dimostrazione del Teorema 18.7.1, possiamo supporre che f sia di classe C^∞ . L'insieme dei suoi valori critici è allora un compatto di S^{n+1} privo di punti interni e potremo trovare una coppia di punti diametralmente opposti² che siano entrambi valori non critici di f . A meno di una rotazione, che possiamo ottenere mediante un'omotopia dell'identità, in quanto $SO(n+2)$ è connesso per archi, possiamo supporre che e_{n+1} e $-e_{n+1}$ siano valori regolari di f . Poniamo per semplicità $N = e_{n+1}$ ed

²Infatti sia $CV(f)$ che $\{-x \mid x \in CV(f)\}$ sono di prima categoria e quindi la loro unione è ancora un insieme di prima categoria, e dunque non è uguale ad S^{n+1} , che è uno spazio di Baire.

$S = -e_{n+1}$. Per il teorema delle funzioni implicite, ogni punto di $N^* = f^{-1}(N)$ ed ogni punto di $S^* = f^{-1}(S)$ ha un intorno aperto che non contiene altri punti di $N^* \cup S^*$. I due insiemi sono dunque sottoinsiemi discreti di S^{n+1} e perciò finiti. Possiamo fissare allora una forma lineare ξ in $(\mathbb{R}^{n+2})^*$ che assuma valori distinti sui punti distinti di $N^* \cup S^*$. Infatti, per ogni coppia di punti distinti di \mathbb{R}^{n+2} l'insieme delle forme lineari che nei due punti hanno valori distinti è un aperto denso di $(\mathbb{R}^{n+2})^*$, ed un'intersezione finita di aperti densi di $(\mathbb{R}^{n+2})^*$ è ancora un aperto denso in $(\mathbb{R}^{n+2})^*$. Scegliamo ξ in modo che $|\xi| = 1$ e $|\xi(x)| < 1$ su $N^* \cup S^*$. A meno di una rotazione, per cui valgono le considerazioni svolte sopra, possiamo supporre sia $\xi(x) = (x|N)$. Suddividiamo ora $[-1, 1]$ in un numero finito di intervalli, mediante punti $-1 < c_1 < \dots < c_\ell < 1$, in modo che:

$$\begin{aligned} (x|N) &\neq c_i \quad \text{per } i = 1, \dots, \ell \quad \text{se } x \in N^* \cup S^*, \\ \text{card}(\{(x|N) \mid x \in N^* \cup S^*\} \cap [c_i, c_{i+1}]) &= 1 \quad \text{per } i = 1, \dots, \ell - 1, \\ c_1 < (x|N) < c_\ell \quad \forall x \in N^* \cup S^*. \end{aligned}$$

Sia $\{x_i\} = \{x \in S^{n+1} \mid c_i < (x|N) < c_{i+1}\}$ e C la circonferenza $S^{n+1} \cap \langle e_0, e_{n+1} \rangle$. Costruiamo un'omotopia:

$$H : S^{n+1} \times I \longrightarrow S^{n+1}$$

tra l'identità ed un omeomorfismo di S^{n+1} la cui inversa trasforma ciascun punto x_i di N^* nel punto \bar{x}_i di C con $\bar{x}_i^0 > 0$ ed $\bar{x}_i^{n+1} = x_i^{n+1}$ e ciascun punto x_i di S^* nel punto \bar{x}_i di C con $\bar{x}_i^0 < 0$ ed $\bar{x}_i^{n+1} = x_i^{n+1}$. A questo scopo consideriamo, per ogni indice $i = 1, \dots, \ell - 1$, un arco continuo $g_i(t)$ in $SO(n+2)$, formato da applicazioni che lasciano fisso il punto N (l'insieme delle applicazioni in $SO(n+2)$ che lasciano fisso N è isomorfo, come gruppo topologico, ad $SO(n+1)$ ed è quindi connesso per archi) e tali che $g_i(1)\bar{x}_i = x_i$. Sia $\eta_i(x)$ la funzione definita per $c_i < (x|N) < c_{i+1}$ mediante:

$$\eta_i(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-(x-x_i|N)^2}{[(x|N)-c_i][c_{i+1}-(x|N)]}\right) & \text{se } c_i < (x|N) < c_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Essa è una funzione di classe C^∞ . Consideriamo quindi l'omotopia:

$$H(x, t) = \begin{cases} x & \text{se } (x|N) \notin [c_1, c_l] \\ g_i(t\eta_i(x))x & \text{se } c_i < (x|N) < c_{i+1}, \quad i = 1, \dots, \ell - 1 \\ x & \text{se } (x|N) = c_i, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

La $\Phi(x, t) = f(H(x, t))$ è un'omotopia di $f = \Phi_0$ con un'applicazione $h(x) = \Phi_1(x) = f(H(x, 1))$ per cui $h^{-1}(N)$ e $h^{-1}(S)$ sono sottoinsiemi finiti di punti con $x^0 > 0$ ed $x^0 < 0$, rispettivamente.

La h è omotopa alla $g = \phi \circ h$, ottenuta componendola con una rotazione $\phi \in \mathbf{SO}(n+2)$ che trasforma e_0 in $N = e_{n+1}$.

Quindi, la nostra f iniziale è omotopa ad un'applicazione continua $g : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ tale che

$$g^{-1}(N) \subset S_+^{n+1} \quad \text{e} \quad g^{-1}(S) \subset S_-^{n+1}.$$

Quindi $g(S_+^{n+1})$ è un compatto che non contiene S e $g(S_-^{n+1})$ un compatto che non contiene N . Possiamo quindi trovare $0 < \epsilon < 1/2$ tale che:

$$\begin{aligned} g(S_+^{n+1}) &\subset \{x \in S^{n+1} \mid |x^{n+1}| > 2\epsilon - 1\}, \\ g(S_-^{n+1}) &\subset \{x \in S^{n+1} \mid |x^{n+1}| < 1 - 2\epsilon\}. \end{aligned}$$

Consideriamo la porzione di sfera $Z = \{x \in S^{n+1} \mid |x^{n+1}| \leq 1 - 2\epsilon\} = \{x \in S^{n+1} \mid |x'| \leq \delta\}$, ove $\delta = 2\sqrt{\epsilon - \epsilon^2}$, e definiamo un'omotopia $L : S^{n+1} \times I \rightarrow S^{n+1}$ tra l'identità ed un'applicazione continua $L_1 : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ con $L_1(Z) \subset S^n$. Sia

$$\eta(x') = \begin{cases} \frac{x'}{\delta} & \text{se } |x'| < \delta, \\ \frac{x'}{|x'|} & \text{se } \delta \leq |x'| \leq 1. \end{cases}$$

Possiamo porre allora

$$L(x, t) = \begin{cases} \sigma_+(x' + t(\eta(x') - x')) & \text{se } x^{n+1} \geq 0, \\ \sigma_-(x' + t(\eta(x') - x')) & \text{se } x^{n+1} \leq 0. \end{cases}$$

La $S^{n+1} \times I \ni (x, t) \rightarrow L(g(x), t) \in S^{n+1}$ è un'omotopia di g con un'applicazione continua $L(g(x), 1) = \lambda(x)$ tale che:

$$\lambda(S_+^{n+1}) \subset S_+^{n+1}, \quad \lambda(S_-^{n+1}) \subset S_-^{n+1}.$$

Per il punto a), essa è omotopa alla sospensione della sua restrizione ad S^n .

La dimostrazione è completa. \square

TEOREMA 18.7.4. *Consideriamo l'insieme di applicazioni continue Φ formato dalle*

$$\varphi_k : S^1 \ni e^{i\theta} \longrightarrow \varphi_k(e^{i\theta}) = e^{ki\theta} \in S^1.$$

per $k \in \mathbb{Z}$. L'applicazione naturale:

$$(18.11) \quad \Phi \longrightarrow \pi(S^1, S^1)$$

è una bigezione.

DIMOSTRAZIONE. Ogni applicazione continua $f : S^1 \rightarrow S^1$ è omotopa ad un'applicazione continua $g : S^1 \rightarrow S^1$ tale che $g(1) = 1$. Inoltre, se $F : S^1 \times I \rightarrow S^1$ è un'omotopia tra due applicazioni continue $f_0, f_1 : S^1 \rightarrow S^1$ con $f_0(1) = 1 = f_1(1)$, la $S^1 \times I \ni (z, t) \rightarrow (F(z, t)/F(1, t)) \in S^1$ è una 1-omotopia tra f_0 ed f_1 . Quindi

$$\pi(S^1, \{1\}; S^1, \{1\}) \simeq \pi(S^1, S^1).$$

Osserviamo che l'applicazione

$$\mathbb{R} \ni \theta \longrightarrow e^{i\theta} \in S^1$$

è un omeomorfismo locale. Per ogni applicazione continua

$$f : S^1 \longrightarrow S^1 \quad \text{con} \quad f(1) = 1$$

possiamo allora trovare un'unica applicazione continua

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \tilde{f}(0) = 0$$

e il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ e^i \downarrow & & \downarrow e^i \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

sia commutativo. Abbiamo allora

$$\tilde{f}(2\pi) = 2k\pi \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z}.$$

L'applicazione che fa corrispondere l'intero k alla funzione f è un'applicazione continua

$$\mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \{1\}; \mathbb{S}^1, \{1\}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

che assume solo valori interi.

Essa è dunque costante sulle componenti connesse di $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \{1\}; \mathbb{S}^1, \{1\})$. Ciò dimostra che (18.11) è iniettiva. Siano ora $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \{1\}; \mathbb{S}^1, \{1\})$ tali che $\tilde{f}(2\pi) = \tilde{g}(2\pi)$. Allora l'omotopia lineare:

$$(\theta, t) \longrightarrow \tilde{f}(\theta) + t[\tilde{g}(\theta) - \tilde{f}(\theta)]$$

induce un'omotopia tra f e g . Ne segue che la (18.11) è anche surgettiva. La dimostrazione è completa. \square

TEOREMA 18.7.5. *Sia $n \geq 2$. L'applicazione*

$$\mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1) \ni f \longrightarrow \sigma^{(n)} f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n)$$

ove, posto $x = (x', x'')$, con $x' = (x^0, x^1)$, $x'' = (x^2, \dots, x^n)$, è

$$\sigma^{(n)} f(x', x'') = \begin{cases} (|x'| f(\frac{x'}{|x'|}), x'') & \text{se } x' \neq 0, \\ (0, x'') & \text{se } x' = 0, \end{cases}$$

induce un'applicazione bigettiva

$$\sigma_*^{(n)} : \pi(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n).$$

In particolare, l'applicazione

$$\mathbb{Z} \ni k \longleftrightarrow \varphi_k \in \Phi$$

induce per ogni $n \geq 1$ una bigezione:

$$\mathbb{Z} \longleftrightarrow \pi(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n).$$

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue per iterazione dal Lemma 18.7.3 e la seconda dal Teorema 18.7.4. \square

DEFINIZIONE 18.7.6. L'intero k associato ad un'applicazione continua $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ nel Teorema 18.7.5, si dice il *grado* di f e si indica con $\deg(f)$. È cioè $\deg(f) = k$ se $f \sim \sigma^{(n)}(\varphi_k)$.

18.8. Il teorema del punto fisso di Brouwer

Un'importante applicazione dei risultati sull'omotopia delle sfere è il seguente:

TEOREMA 18.8.1 (Brouwer). *Ogni applicazione continua*

$$f : D^n \longrightarrow D^n$$

ha almeno un punto fisso.

DIMOSTRAZIONE. Il teorema è banale se $n = 0$. Sia $n > 0$ supponiamo per assurdo che vi sia una funzione continua $f : D^n \longrightarrow D^n$ tale che

$$f(x) \neq x \quad \forall x \in D^n.$$

Allora l'applicazione $\psi : D^n \longrightarrow S^{n-1}$, che associa ad ogni punto x di D^n l'intersezione di S^{n-1} con la semiretta

$$t \longrightarrow x + t(x - f(x)), \quad \text{per } t \geq 0$$

è continua ed è una retrazione di D^n su S^{n-1} . Essa infatti è descritta analiticamente dalla formula

$$\psi(x) = x + \frac{\sqrt{(x|f(x)-x|)^2 + (1-|x|^2)|x-f(x)|^2} - |x| |x-f(x)|}{|x-f(x)|^2} (x-f(x)).$$

L'applicazione

$$D^n \times I \ni (x, t) \longrightarrow (1-t)x + t\psi(x) \in D^n$$

è una S^{n-1} omotopia dell'identità con una retrazione di D^n su S^{n-1} . Ciò è assurdo perchè S^{n-1} non può essere un retratto di deformazione stretto di D^n . Infatti D^n e S^{n-1} non sono omotopicamente equivalenti in quanto D^n è contrattile, mentre, per il Teorema 18.7.1, S^{n-1} non è $(n-1)$ -connesso. \square

OSSERVAZIONE 18.8.2. Il teorema di Brouwer si applica ovviamente a tutti i sottoinsiemi di \mathbf{R}^n che sono omeomorfi a D^n ; in particolare a tutti i sottoinsiemi convessi e compatti di uno spazio euclideo.

Rivestimenti ed omotopia

19.1. Azioni di gruppo

In questo paragrafo richiamiamo le principali definizioni relative all'azione di gruppo su un insieme e su uno spazio topologico. Ricordiamo innanzi tutto che un'azione di gruppo di un gruppo \mathbf{G} su un insieme X è un'applicazione

$$(19.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{G} \times X \ni (g, x) &\rightarrow gx \in X && \text{tale che} \\ g_1(g_2x) &= (g_1g_2)x \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbf{G}, \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

In particolare, indicando con $\mathfrak{S}(X)$ il gruppo delle applicazioni bigettive di X in sè, un'azione di gruppo di \mathbf{G} su X è un omomorfismo $\mathbf{G} \rightarrow \mathfrak{S}(X)$.

DEFINIZIONE 19.1.1. L'azione (19.1) si dice *fedele* od *effettiva* se l'omomorfismo $\mathbf{G} \rightarrow \mathfrak{S}(X)$ è iniettivo.

In generale, il nucleo di questa applicazione è un sottogruppo normale \mathbf{H} di \mathbf{G} , che si dice il *nucleo d'infedeltà* dell'azione.

Abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} \times X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \parallel \\ (\mathbf{G}/\mathbf{H}) \times X & \longrightarrow & X \end{array}$$

che definisce un'azione fedele su X del gruppo quoziente \mathbf{G}/\mathbf{H} .

Dato un punto x di X indichiamo con $\mathbf{G}x$ e chiamiamo *orbita* di x per l'azione di G , l'insieme

$$(19.2) \quad \mathbf{G}x = \{gx \mid g \in \mathbf{G}\}.$$

Chiamiamo *stabilizzatore* di x il sottogruppo \mathbf{G}_x di \mathbf{G} :

$$\mathbf{G}_x = \{g \in \mathbf{G} \mid gx = x\}.$$

Osserviamo che l'applicazione $\mathbf{G} \ni g \rightarrow gx \in \mathbf{G}x$ induce, per passaggio al quoziente, un'applicazione bigettiva:

$$(19.3) \quad \mathbf{G}/\mathbf{G}_x \longleftrightarrow \mathbf{G}x.$$

L'insieme delle orbite di \mathbf{G} in X è una *partizione* di X e si indica con X/\mathbf{G} .

DEFINIZIONE 19.1.2. Diciamo che G opera *transitivamente* su X se $\mathbf{G}x = X$ per qualche (e quindi per ogni) $x \in X$.

In questo caso gli stabilizzatori dei diversi punti di X sono sottogruppi tra loro coniugati di \mathbf{G} ed X è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle classi laterali di \mathbf{G} rispetto ad uno qualsiasi di tali sottogruppi.

Se \mathbf{G} opera transitivamente su X , diciamo che X è uno *spazio \mathbf{G} -omogeneo*.

Un'azione del gruppo \mathbf{G} sull'insieme X induce naturalmente un'azione del gruppo \mathbf{G} sull'insieme 2^X di tutti i suoi sottoinsiemi.

Sia $\Gamma \subset 2^X$ una partizione di X . Diciamo che G opera su Γ se

$$(19.4) \quad g(A) \in \Gamma, \quad \forall A \in \Gamma, \quad \forall g \in G.$$

Chiamiamo *non banale* una partizione Γ di X che sia diversa dalle partizioni $\{X\}$ e $\{\{x\} \mid x \in X\}$.

Chiamiamo l'azione di \mathbf{G} *primitiva* se non esiste nessuna partizione non banale di X su cui operi \mathbf{G} .

ESEMPIO 19.1.3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione ≥ 2 su un campo \mathbb{K} , sia $X = V - \{0\}$ e sia $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V)$. Allora \mathbf{G} opera transitivamente e fedelmente su X . L'azione di \mathbf{G} non è primitiva: infatti \mathbf{G} agisce sulla partizione di X formata dagli insiemi

$$\{kv \mid k \in \mathbb{K} - \{0\}\}$$

al variare di v in X .

È invece primitiva l'azione corrispondente di $\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ sul quoziente $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{K}\mathbb{P}^1$.

Citiamo il seguente teorema algebrico:

TEOREMA 19.1.4. *Se \mathbf{G} opera transitivamente su un insieme X che contiene almeno due elementi, allora condizione necessaria e sufficiente affinché \mathbf{G} operi in modo primitivo è che lo stabilizzatore di un qualsiasi punto di X sia un sottogruppo proprio massimale di \mathbf{G} .*

DEFINIZIONE 19.1.5. Indichiamo con X_n l'insieme delle n -uple ordinate di punti distinti di X . Un'azione di \mathbf{G} su X induce in modo ovvio un'azione di \mathbf{G} su X_n . Se questa è transitiva, diremo che \mathbf{G} opera su X in modo n -volte transitivo.

Ad esempio, il gruppo delle affinità di una retta opera in modo doppiamente transitivo sulla retta.

DEFINIZIONE 19.1.6. Supponiamo ora che \mathbf{G} sia un gruppo topologico ed X uno spazio topologico. Un'azione di gruppo $\mathbf{G} \times X \rightarrow X$ si dirà allora *continua* se tale applicazione è continua.

Essa si dirà *libera* se per ogni $x \in X$ la $\mathbf{G} \ni g \rightarrow gx \in X$ è un'immersione topologica.

Essa si dirà *propria* se per ogni compatto $K \subset X$ l'insieme

$$\{g \in \mathbf{G} \mid g(K) \cap K \neq \emptyset\}$$

è relativamente compatto in \mathbf{G} .

Se \mathbf{G} è un gruppo discreto, l'azione di \mathbf{G} sullo spazio topologico X è propria se, per ogni compatto $K \subset X$, l'insieme $\{g \in \mathbf{G} \mid g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ è finito. Diciamo allora che \mathbf{G} opera su X *in modo propriamente discontinuo*.

In questo caso vale il

TEOREMA 19.1.7. *Supponiamo che un gruppo \mathbf{G} operi in modo propriamente discontinuo su uno spazio topologico X localmente compatto e di Hausdorff. Allora le orbite $\mathbf{G}x$ sono sottoinsiemi chiusi discreti di X e X/\mathbf{G} è uno spazio di Hausdorff.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché X è localmente compatto, la famiglia Γ dei compatti di X forma un ricoprimento fondamentale di X . Per l'ipotesi che \mathbf{G} operi in modo propriamente discontinuo, ogni $A \in \Gamma$ interseca ogni orbita $\mathbf{G}x$ in un sottoinsieme finito, e dunque in un chiuso con la topologia discreta. Quindi $\mathbf{G}x$ è un chiuso con la topologia discreta.

Siano ora x e y due punti di X non appartenenti ad una stessa orbita. Possiamo allora trovare un intorno compatto U di x che non intersechi $\mathbf{G}y$. Dico allora che

$$\mathbf{G}(U) = \bigcup \{\mathbf{G}z \mid z \in U\}$$

non interseca $\mathbf{G}y$. In caso contrario avremmo

$$g_1y = g_2z$$

con $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$, $z \in U$ e quindi

$$g_2^{-1}g_1y = z \in U$$

ci darebbe una contraddizione.

Osserviamo che $\mathbf{G}(U)$ è un intorno di $\mathbf{G}x$. Esso è un chiuso. A questo scopo è sufficiente verificare che $\mathbf{G}(U) \cap K$ è chiuso per ogni compatto K di X .

Fissato il compatto K , l'insieme dei $g \in \mathbf{G}$ tali che $g(U) \cap K \neq \emptyset$ è finito: esso è intatti contenuto in

$$\{g \in \mathbf{G} \mid g(K \cup U) \cap (K \cup U) \neq \emptyset\}.$$

Quindi $\mathbf{G}(U) \cap K$ è unione finita di compatti della forma $g(U) \cap K$ e perciò chiuso in quanto X è di Hausdorff. Pertanto $\mathbf{G}(U)$ e $X \setminus \mathbf{G}(U)$ sono intorni saturi disgiunti delle due orbite $\mathbf{G}x$ e $\mathbf{G}y$. Ciò dimostra che X/\mathbf{G} è di Hausdorff. \square

19.2. Omeomorfismi locali

DEFINIZIONE 19.2.1. Sia $p : E \rightarrow B$ un'applicazione continua tra due spazi topologici E e B . Diciamo che p è un *omeomorfismo locale* se ogni punto $\xi \in E$ ha un intorno aperto W in E tale che $U = p(W)$ sia aperto in X e $p|_W : W \rightarrow U$ sia un omeomorfismo.

OSSERVAZIONE 19.2.2. Ogni omeomorfismo locale è una applicazione aperta.

Ricordiamo che una *sezione* di un fibrato topologico $E \xrightarrow{p} B$ sull'aperto U di B è un'applicazione $s : U \rightarrow E$ tale che $p \circ s = id_U$. Indichiamo con $\Gamma(U, E)$ l'insieme delle sezioni continue di E sull'aperto $U \subset B$. Vale il seguente

LEMMA 19.2.3. *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un omeomorfismo locale.*

- (1) *Sia U un aperto di B . Ogni sezione $s \in \Gamma(U, E)$ è un'applicazione aperta ed è un omeomorfismo di U sull'aperto $s(U)$ di E .*

- (2) Per ogni $b \in p(E)$ e $\xi \in p^{-1}(b)$ possiamo trovare un intorno aperto U di b in B ed una sezione $s \in \gamma(U, E)$ tale che $s(b) = \xi$.
- (3) Due sezioni $s_i \in \Gamma(U_i, E)$, definite su intorni aperti U_i dello stesso punto $b \in B$ ($i = 1, 2$) e tali che $s_1(b) = s_2(b)$ coincidono su un intorno aperto $U \subset U_1 \cap U_2$ di b in B .

DIMOSTRAZIONE. Sia U un aperto di B ed $s \in \gamma(U, E)$ una sezione continua. Se $\xi = s(b) \in s(U)$, possiamo trovare un intorno aperto W di ξ in E tale che $p|_W : W \rightarrow p(W)$ sia un omeomorfismo sull'aperto $p(W)$ di B . Poiché s è continua, possiamo trovare un intorno aperto V di b in U tale che $s(V) \subset W$. Allora $s|_V = (p|_W)^{-1}|_V$ è un omeomorfismo di V sull'aperto $s(V)$ di E . Ne segue che s è un omeomorfismo locale e dunque una applicazione aperta. Quindi $s : U \rightarrow s(U)$ è continua, bigettiva e aperta e perciò un omeomorfismo.

Sia $\xi \in E$ e $b = p(\xi)$. Fissiamo un intorno aperto W di ξ in E tale che $p|_W$ definisca un omeomorfismo di W su un aperto $U = p(W)$ di B . L'inversa s di tale omeomorfismo definisce allora la sezione continua cercata.

Infine, se $s_i : U_i \rightarrow E$ ($i = 1, 2$) sono sezioni continue definite su intorni aperti di $b \in B$ con $s_1(b) = s_2(b) = \xi$, esse coincidono sull'intorno aperto $p(s_1(U_1) \cap s_2(U_2))$ di b . \square

COROLLARIO 19.2.4. Sia $E \xrightarrow{p} B$ un omeomorfismo locale. Condizione necessaria e sufficiente affinché E sia di Hausdorff, è che B sia di Hausdorff. Se B è uno spazio di Hausdorff, due sezioni continue definite su uno stesso aperto U di B che assumano lo stesso valore in un punto b di U assumono gli stessi valori sulla componente connessa di b in U .

DEFINIZIONE 19.2.5. Siano $E_i \xrightarrow{p_i} B$ ($i = 1, 2$) due fibrati topologici sulla stessa base B . Un omomorfismo di fibrati è un'applicazione continua $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ tale che $p_2 \circ \phi = p_1$, tale cioè che $\phi((E_1)_b) \subset (E_2)_b$ per ogni $b \in B$.

Abbiamo allora

LEMMA 19.2.6. Siano $E_i \xrightarrow{p_i} B$, $i = 1, 2$, due omeomorfismi locali. Supponiamo che B sia di Hausdorff e che E_1 ed E_2 siano spazi connessi. Siano $\phi, \psi : E_1 \rightarrow E_2$ due morfismi di fibrati. Se $\phi(\xi) = \psi(\xi)$ in un punto $\xi \in E_1$, allora $\phi = \psi$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti ϕ e ψ sono allora omeomorfismi locali e la tesi segue pertanto dal corollario precedente. \square

DEFINIZIONE 19.2.7. Indichiamo con $\text{Aut}(E \xrightarrow{p} B)$ l'insieme degli omeomorfismi di E con se stesso che sono morfismi di fibrati. Esso è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni. I suoi elementi si dicono *automorfismi* del fibrato e $\text{Aut}(E \xrightarrow{p} B)$ il gruppo degli automorfismi del fibrato.

Questo gruppo opera su ciascuna fibra di E . Per il lemma precedente, se p è un omeomorfismo locale, ed E uno spazio di Hausdorff connesso, l'azione su una qualsiasi fibra non vuota è fedele e propriamente discontinua.

Se E è inoltre localmente compatto, l'azione del gruppo degli automorfismi del fibrato è anche propriamente discontinua su E .

19.3. Rivestimenti

Ricordiamo che un rivestimento è un fibrato $E \xrightarrow{p} B$ localmente banale con fibra F discreta. Abbiamo

LEMMA 19.3.1. *Se $E \xrightarrow{p} B$ è un rivestimento, allora $p : E \rightarrow B$ è un omeomorfismo locale.*

In particolare possiamo applicare ai rivestimenti i risultati dimostrati nel paragrafo precedente.

TEOREMA 19.3.2. *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un fibrato topologico con E connesso. Condizione necessaria e sufficiente affinché esso sia un rivestimento è che siano verificate le due condizioni:*

- (i) $p : E \rightarrow B$ è un omeomorfismo locale surgettivo;
- (ii) per ogni $b \in B$ possiamo trovare un intorno aperto U di b in B e per ogni $\xi \in p^{-1}(b)$ una sezione continua $s_\xi : U \rightarrow E$ con $s_\xi(b) = \xi$, in modo che

$$(19.5) \quad s_\xi(U) \cap s_\eta(U) = \emptyset \quad \forall \xi \neq \eta \in p^{-1}(b),$$

$$(19.6) \quad p^{-1}(U) = \bigcup \{s_\xi(U) \mid \xi \in p^{-1}(b)\}.$$

DIMOSTRAZIONE. La necessità della condizione è immediata. Dimostriamo la sufficienza.

Osserviamo che B è connesso perché immagine di un connesso mediante una applicazione continua. Fissiamo $b_0 \in B$. La fibra $F = E_{b_0} = p^{-1}(b_0)$ di E su b_0 è un sottospazio di E con la topologia discreta perché p è un omeomorfismo locale.

Dimostriamo che tutte le fibre E_b hanno la stessa cardinalità di F . A questo scopo indichiamo con A il sottoinsieme di B formato dai punti $b \in B$ tali che si possa trovare una applicazione bigettiva $\alpha_b : E_b \rightarrow F$.

L'insieme A è non vuoto perché contiene b_0 . Se $b \in A$, scegliamo un intorno aperto U di b in B con la proprietà (ii). Se $x \in U$, otteniamo un'applicazione bigettiva $\beta : E_x \rightarrow E_b$ facendo corrispondere ad $\eta \in E_x$ l'unica $\xi \in E_b$ tale che $s_\xi(x) = \eta$. Allora, se $\alpha_b : E_b \rightarrow F$ è bigettiva, anche la $\alpha_x = \alpha_b \circ \beta : E_x \rightarrow F$ è bigettiva. Ciò dimostra che A è aperto. Se $b \in \bar{A}$, scegliamo un intorno U di b con la proprietà (ii). Esso contiene punti di A e dunque, ragionando come in precedenza, possiamo costruire un'applicazione bigettiva di E_b su F . Dunque A è aperto e chiuso in B e coincide perciò con B , perché B è connesso.

Otteniamo allora che $E \xrightarrow{p} B$ è un fibrato localmente banale con fibra discreta utilizzando, con le notazioni di (ii), le trivializzazioni locali:

$$U \times F \xrightarrow{id_U \times \alpha_b^{-1}} U \times E_b \ni (x, \xi) \rightarrow s_\xi(x) \in E|U.$$

□

DEFINIZIONE 19.3.3. Se le fibre di un rivestimento $E \xrightarrow{p} B$ hanno cardinalità α , diremo che $E \xrightarrow{p} B$ è un rivestimento ad α fogli.

ESEMPIO 19.3.4. L'applicazione $S^1 \ni z \rightarrow z^n \in S^1$ è un rivestimento a n fogli.

L'applicazione $\mathbb{R} \ni t \rightarrow e^{2\pi it} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t) \in S^1$ è un rivestimento a un'infinità numerabile di fogli.

ESEMPIO 19.3.5. L'applicazione $S^n \ni x \rightarrow [x] \in \mathbb{R}P^n$ è un rivestimento a due fogli.

ESEMPIO 19.3.6 (Bottiglia di Klein). Consideriamo la relazione di equivalenza \sim su \mathbb{R}^2 generata dalle $(x, y) \sim (x, y + 1)$ e $(x, y) \sim (x + 1, -y)$. La proiezione nel quoziente $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \sim$ è un rivestimento a infiniti fogli.

ESEMPIO 19.3.7. Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio a coefficienti complessi di grado $m \geq 1$ e sia K l'insieme dei valori critici di $\mathbb{C} \ni z \rightarrow p(z) \in \mathbb{C}$. Allora $\mathbb{C} \setminus p^{-1}(K) \rightarrow \mathbb{C} \setminus K$ è un rivestimento a m fogli.

TEOREMA 19.3.8. Sia $E \xrightarrow{p} B$ un fibrato topologico in cui p sia un omeomorfismo locale e tutte le fibre E_b di E abbiano uno stesso numero finito m di elementi. Se E è di Hausdorff, allora $E \xrightarrow{p} B$ è un rivestimento a m fogli.

DIMOSTRAZIONE. Sia $b \in B$ e siano ξ_1, \dots, ξ_m gli elementi distinti della fibra E_b . Ognuno di essi è contenuto in un aperto W_i di E tale che $p|_{W_i}$ sia un omeomorfismo di W_i su un aperto U_i di B . Possiamo inoltre supporre W_1, \dots, W_m due a due disgiunti perché E è di Hausdorff. Allora $U = U_1 \cap \dots \cap U_m$ è un intorno aperto di b e risultano definite m sezioni continue $s_i : U \rightarrow E$ con $s_i(U) \subset W_i$. Ne segue che

$$U \times \{1, \dots, m\} \ni (x, i) \rightarrow s_i(x) \in E|U$$

è un omeomorfismo. Infatti è continua, aperta e iniettiva. Inoltre è surgettiva perché le immagini delle fibre di $U \times \{1, \dots, m\}$ sono formate da m elementi distinti e dunque coincidono con le fibre corrispondenti di $E|U$. La dimostrazione è completa. \square

Un caso particolare di questo teorema è il seguente:

TEOREMA 19.3.9. Siano M, N varietà differenziabili compatte e connesse della stessa dimensione n . Ogni applicazione differenziabile

$$p : M \rightarrow N$$

priva di punti critici è un rivestimento.

Ad esempio, le applicazioni

$$S^1 \ni e^{i\theta} \rightarrow e^{im\theta} \in S^1$$

con $0 \neq m \in \mathbf{Z}$ sono rivestimenti a $|m|$ fogli.

TEOREMA 19.3.10. Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento, con B di Hausdorff. Se E_0 è una componente connessa di E , allora

$$E_0 \xrightarrow{p|_{E_0}} p(E_0)$$

è ancora un rivestimento.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è una facile conseguenza del Teorema 19.3.2. \square

TEOREMA 19.3.11. *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento, con E di Hausdorff connesso. Se F è una fibra di E , l'azione del gruppo $\text{Aut}(E \xrightarrow{p} B)$ su F induce un isomorfismo di tale gruppo con un sottogruppo del gruppo $\mathfrak{S}(F)$ delle applicazioni bigettive (permutazioni) di F in sé.*

DIMOSTRAZIONE. Questo enunciato è un'immediata conseguenza del Lemma 19.2.3. \square

TEOREMA 19.3.12 (Gerarchia dei rivestimenti). *Siano $E_i \xrightarrow{p_i} B$ due rivestimenti dello spazio topologico B , con E_1, E_2 di Hausdorff connessi. Ogni morfismo di rivestimenti $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ è un rivestimento. Viceversa, se $E \xrightarrow{p} B$ ed $E' \xrightarrow{q} E$ sono rivestimenti, anche $E' \xrightarrow{p \circ q} B$ è un rivestimento.*

DEFINIZIONE 19.3.13. Questo teorema ci permette di introdurre un ordinamento parziale nello spazio dei rivestimenti: se le condizioni della prima parte dell'enunciato sono verificate, diremo che il rivestimento $E_2 \xrightarrow{p_2} B$ è *subordinato* al rivestimento $E_1 \xrightarrow{p_1} B$ e scriviamo:

$$(E_2 \xrightarrow{p_2} B) < (E_1 \xrightarrow{p_1} B).$$

Due rivestimenti che siano subordinati l'uno all'altro si dicono *equivalenti*: in questo caso il morfismo di rivestimenti è un omeomorfismo che commuta con le proiezioni sulla base.

DIMOSTRAZIONE. Il teorema è una facile conseguenza del Teorema 19.3.2. \square

Ad esempio, per i rivestimenti di $S^1 \subset \mathbb{C}$ definiti dalle applicazioni $p_m : S^1 \ni z \rightarrow z^m \in S^1$, il rivestimento relativo a un intero m_1 precede quello relativo all'intero m_2 nella gerarchia dei rivestimenti se e soltanto se m_1 divide m_2 .

TEOREMA 19.3.14 (Rialzamento di cammini). *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento ed $\alpha : I \rightarrow B$ un cammino continuo. Fissato $\xi \in p^{-1}(\alpha(0))$, vi è uno ed un solo cammino continuo $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E$, con punto iniziale ξ , che rileva α , tale cioè che*

$$\begin{cases} p \circ \tilde{\alpha} = \alpha, \\ \tilde{\alpha}(0) = \xi. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo trovare una partizione

$$0 = t_0 < t_1 \dots < t_n = 1$$

dell'intervallo I tale che per ogni $i = 1, \dots, n$ vi sia un aperto di trivializzazione U_i in B per cui

$$\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i.$$

Sia s_1 la sezione continua su U_1 con $s_1(\alpha(0)) = \xi$ e definiamo induttivamente le sezioni s_i su U_i per $i > 1$ ponendo la condizione che $s_i(\alpha(t_{i-1})) = s_{i-1}(\alpha(t_{i-1}))$. Definiamo allora

$$\tilde{\alpha}(t) = s_i(\alpha(t)) \quad \text{se } t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Questo è l'unico cammino continuo in E che soddisfa le condizioni del teorema. \square

TEOREMA 19.3.15 (Rialzamento dell'omotopia). *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento ed $F : I^n \rightarrow B$ un'applicazione continua. Fissato $\xi \in p^{-1}(F(0))$, vi è un'unica applicazione continua $\tilde{F} : I^n \rightarrow E$ tale che*

$$\begin{cases} \tilde{F}(0) = \xi, \\ p \circ \tilde{F} = F. \end{cases}$$

Se

$$F(I^{n-1} \times \{1\}) = \{b_1\},$$

allora anche

$$\tilde{F}(I^{n-1} \times \{1\}) = \{\xi_1\}$$

per qualche $\xi_1 \in p^{-1}(b_1)$.

Se $n \geq 2$ e $F(bI^n) = \{b_0\}$, allora $\tilde{F}(bI^n) = \{\xi_0\}$.

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue dal fatto che un rivestimento è un fibrato di Serre, quindi esiste una applicazione continua \tilde{F} che rialza F . L'unicità segue dal teorema precedente e implica le due ultime affermazioni dell'enunciato. \square

19.4. Gruppo del rivestimento

Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento. Fissiamo un punto base ξ_0 in E e sia $b_0 = p(\xi_0)$ il corrispondente punto base di B . La proiezione sulla base induce un omomorfismo dei gruppi fondamentali:

$$(19.7) \quad p_* : \pi_1(E, \xi_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0).$$

DEFINIZIONE 19.4.1. L'immagine dell'omomorfismo (19.7) si dice *gruppo del rivestimento* con punto di base ξ_0 e sarà indicata con $\mathbf{G}(E, \xi_0)$.

L'applicazione (19.7) è iniettiva e dunque un monomorfismo di gruppi.

TEOREMA 19.4.2 (Cambiamento del punto di base). *Supponiamo che lo spazio totale E del rivestimento $E \xrightarrow{p} B$ sia connesso per archi e siano ξ_0, η_0 due punti della fibra $E_{b_0} = p^{-1}(b_0)$ per un punto fissato $b_0 \in B$. Se α è un cammino continuo in E di punto iniziale ξ_0 e punto finale η_0 , allora $p \circ \alpha$ è un laccetto continuo in B e definisce un elemento $g_\alpha \in \pi_1(B, b_0)$. Abbiamo allora:*

$$(19.8) \quad \mathbf{G}(E, \eta_0) = g_\alpha \mathbf{G}(E, \xi_0) g_\alpha^{-1}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia infatti β un laccetto continuo in E con origine in η_0 . Allora $\alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1}$ è un laccetto con origine in ξ_0 . Per il Teorema 1.3.1 del Capitolo ??, questa applicazione induce un isomorfismo tra i gruppi fondamentali di E rispettivamente con punti base η_0 e ξ_0 . La tesi segue immediatamente. \square

Studiamo ora le relazioni tra la gerarchia dei rivestimenti e i gruppi dei rivestimenti.

DEFINIZIONE 19.4.3. Diciamo che uno spazio topologico X è *localmente connesso per archi* se per ogni punto $x \in X$ ed ogni intorno aperto U di x possiamo trovare un intorno aperto $V \subset U$ di x tale che due punti qualsiasi di V possano essere congiunti da un cammino continuo tutto contenuto in U .

Si ottiene facilmente il seguente:

LEMMA 19.4.4. Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento. Se B è localmente connesso per archi, allora ogni sezione di E su un aperto U di B che trasformi insiemi connessi per archi in insiemi connessi per archi è continua.

LEMMA 19.4.5. Siano $E_1 \xrightarrow{p_1} B$ ed $E_2 \xrightarrow{p_2} B$ due rivestimenti connessi e localmente connessi per archi dello stesso spazio topologico B . Fissiamo un punto base b_0 in B e siano $\xi_0^1 \in p_1^{-1}(b_0)$, $\xi_0^2 \in p_2^{-1}(b_0)$ corrispondenti punti base in E_1 ed E_2 . Se

$$\mathbf{G}(E_2, \xi_0^2) \subset \mathbf{G}(E_1, \xi_0^1),$$

allora possiamo trovare uno ed un solo morfismo di rivestimenti

$$\phi : E_1 \rightarrow E_2$$

tale che

$$\phi(\xi_0^1) = \xi_0^2.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $\xi^1 \in E_1$ ed α un cammino continuo in E_1 che congiunga ξ_0^1 a ξ^1 . Il cammino $p_1 \circ \alpha$ si rialza in modo unico a un cammino α' in E_2 con punto iniziale ξ_0^2 . Il suo punto finale ξ^2 dipende solo da ξ^1 e non dal cammino α prescelto. Se infatti β è un secondo cammino continuo di punto iniziale ξ_0^1 e punto finale ξ^1 in E_1 , allora $\alpha \cdot \beta^{-1}$ è un laccetto con origine in ξ_0^1 . Per ipotesi l'immagine in $\pi_1(B, b_0)$ della sua classe di omotopia è immagine di una classe di omotopia di un laccetto di E_2 con punto iniziale ξ_0^2 e dunque $p_1 \circ (\alpha \cdot \beta^{-1})$ si rialza a un laccetto di E_2 con punto iniziale ξ_0^2 . Facendo quindi corrispondere a ξ^1 il punto ξ^2 , otteniamo un'applicazione $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ che commuta con le rispettive proiezioni nella base. Essa è dunque un morfismo di rivestimenti, essendo continua per il Lemma 19.4.4. \square

Da questo lemma si deduce immediatamente:

TEOREMA 19.4.6. Siano $E_1 \xrightarrow{p_1} B$ ed $E_2 \xrightarrow{p_2} B$ due fibrati con spazi totali connessi per archi sulla stessa base B . Fissiamo un punto base b_0 in B e punti base corrispondenti $\xi_0^i \in p_i^{-1}(b_0)$ in E_i ($i = 1, 2$). Condizione necessaria e sufficiente affinché il secondo sia subordinato al primo è che il gruppo di rivestimento $\mathbf{G}(E_1, \xi_0^1)$ del primo sia contenuto in un coniugato in $\pi_1(B, b_0)$ del gruppo di rivestimento $\mathbf{G}(E_2, \xi_0^2)$ del secondo. In particolare i due rivestimenti sono equivalenti se e soltanto se i loro gruppi di rivestimento sono tra loro coniugati.

Fissato un rivestimento $E \xrightarrow{p} B$ con E e B connessi e localmente connessi per archi, un punto base $\xi_0 \in E$ e il punto base $b_0 = p(\xi_0)$ in B , indichiamo con F la fibra E_{b_0} e sia

$$F_{\xi_0} = \{\xi \in F \mid \mathbf{G}(E, \xi) = \mathbf{G}(E, \xi_0)\}.$$

Indichiamo poi con $\mathbf{N}(E, \xi_0)$ il normalizzatore di $\mathbf{G}(E, \xi_0)$ in $\pi_1(B, b_0)$:

$$\mathbf{N}(E, \xi_0) = \{g \in \pi_1(B, b_0) \mid g\mathbf{G}(E, \xi_0)g^{-1} = \mathbf{G}(E, \xi_0)\}.$$

TEOREMA 19.4.7. *L'applicazione $\delta : \pi_1(B, b_0) \rightarrow F$, che fa corrispondere alla classe di omotopia del laccetto α il secondo estremo $\tilde{\alpha}(1)$ del cammino che $\tilde{\alpha}$ con punto iniziale ξ_0 che rialza α , induce per restrizione e passaggio al quoziente una bigezione*

$$(19.9) \quad \lambda : \mathbf{N}(E, \xi_0)/\mathbf{G}(E, \xi_0) \rightarrow F_{\xi_0}.$$

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato è una conseguenza dei risultati precedenti. \square

TEOREMA 19.4.8. *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento, con E e B connessi e localmente connessi per archi. La composizione*

$$(19.10) \quad \text{Aut}(E \xrightarrow{p} B) \ni \phi \rightarrow \phi(\xi_0) \in F_{\xi_0} \rightarrow \lambda^{-1}(\phi(\xi_0)) \in \mathbf{N}(E, \xi_0)/\mathbf{G}(E, \xi_0)$$

è un antiisomorfismo di gruppi.

DEFINIZIONE 19.4.9. Un rivestimento $E \xrightarrow{p} B$ si dice *regolare* o *di Galois* se E e B sono connessi e localmente connessi per archi e se per qualche (e quindi per tutti) i punti $\xi \in E$ il gruppo $\mathbf{G}(E, \xi)$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(B, p(\xi))$. In questo caso abbiamo

$$(19.11) \quad \text{Aut}(E \xrightarrow{p} B) \simeq \pi_1(B, b_0)/\mathbf{G}(E, \xi_0)$$

per ogni $\xi_0 \in E$ e $b_0 = p(\xi_0)$.

19.5. Rivestimenti con gruppo di rivestimento assegnato

Diciamo che uno spazio topologico X è *microlocalmente semplicemente connesso* se ogni punto x di X ha un intorno U tale che l'applicazione canonica:

$$(19.12) \quad \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

abbia immagine nulla: ogni laccetto in U di punto iniziale x è omotopo in X al laccetto costante, in una omotopia che lascia fisso il punto x . Ad esempio, ogni varietà topologica è microlocalmente semplicemente connessa, in quanto ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni contrattili. Vale il:

TEOREMA 19.5.1 (Esistenza ed unicità del rivestimento universale). *Se B è uno spazio topologico di Hausdorff, connesso per archi e microlocalmente semplicemente connesso, allora possiamo trovare un rivestimento $E \rightarrow B$ di B con E connesso per archi e semplicemente connesso. Due rivestimenti di B connessi e semplicemente connessi sono equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un punto $b_0 \in B$ e definiamo l'insieme E come unione disgiunta degli insiemi

$$(19.13) \quad E_b = \pi(I, 0, 1; B, b_0, b).$$

Sia $p : E \rightarrow B$ l'applicazione che fa corrispondere a $\xi \in E_b$ il punto b di B . Definiamo una topologia su E in questo modo: un sottoinsieme W di E è aperto

se, per ogni $\xi \in W$, detto α un cammino continuo con punto iniziale b_0 e punto finale $b = p(\xi)$ rappresentante di ξ in E_b , possiamo trovare un intorno aperto U di b in B tale che i laccetti di punto iniziale b contenuti in U siano omotopi in X al laccetto costante e le classi di omotopia in E_t di tutti i cammini della forma $\alpha \cdot \beta$ con $\beta(1) = t \in U$ e $\beta(I) \subset U$ siano contenuti in W .

Si verifica allora che $E \xrightarrow{p} B$ è un rivestimento connesso e semplicemente connesso, con fibra $\pi_1(B, b_0)$.

L'unicità è conseguenza del Teorema 19.4.6. \square

TEOREMA 19.5.2. *Sia B uno spazio topologico connesso per archi e microlocalmente semplicemente connesso. Sia $b_0 \in B$ e sia \mathbf{G} un sottogruppo di $\pi_1(B, b_0)$. Allora possiamo trovare un rivestimento $E \xrightarrow{p} B$ di B , con E connesso per archi, tale che, per un punto $\xi_0 \in E_{b_0}$, sia $\mathbf{G}(E, \xi_0) = \mathbf{G}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\tilde{B} \xrightarrow{\varpi} B$ il rivestimento universale di B . Allora, fissato un punto $\tilde{b}_0 \in \tilde{B}_{b_0}$, \mathbf{G} si può identificare a un sottogruppo \mathbf{G}' del gruppo degli automorfismi di $\tilde{B} \xrightarrow{\varpi} B$. Allora il rivestimento di B con spazio totale \tilde{B}/\mathbf{G}' è il rivestimento cercato. \square

19.6. Rivestimenti di Galois

Consideriamo in tutto questo paragrafo un rivestimento $E \xrightarrow{p} B$ con E e B spazi di Hausdorff connessi e localmente connessi. Indichiamo con \mathbf{G}_E il gruppo $\text{Aut}(E \xrightarrow{p} B)$ degli automorfismi del rivestimento.

TEOREMA 19.6.1. *Il gruppo \mathbf{G}_E opera su E in modo libero e propriamente discontinuo.*

DIMOSTRAZIONE. L'azione di \mathbf{G}_E su E è libera per il Lemma 19.2.6: infatti le orbite sono sottospazi discreti di E e l'applicazione $\mathbf{G}_E \ni g \rightarrow g(\xi) \in E$ è iniettiva per ogni $\xi \in E$.

Sia ora K un compatto di E . Dobbiamo dimostrare che l'insieme dei $g \in \mathbf{G}_E$ tali che $g(K) \cap K \neq \emptyset$ è finito.

Se così non fosse, potremmo trovare una successione $\{g_m\}$ di elementi distinti di \mathbf{G}_E e una successione $\{x_m\}$ di elementi di K tali che $g_m(x_m) \in K$.

Possiamo ricoprire K con un numero finito di aperti W_i ($i = 1, \dots, n$) connessi tali che $p : W_i \rightarrow p(W_i) = U_i$ siano omeomorfismi e gli U_i siano aperti di trivializzazione di B . A meno di passare ad una sottosuccessione e di riordinare gli indici, possiamo supporre che $\{x_m\} \subset W_1$ e $\{g_m(x_m)\} \subset W_2$. Sostituendo W_1 con una delle componenti connesse di $W_1 \cap p^{-1}(U_2)$ che contiene infiniti x_m distinti, e W_2 con la corrispondente componente connessa di $W_2 \cap p^{-1}(U_1)$ possiamo ancora supporre che $U_1 = U_2 = U$. Un automorfismo di E che trasformi un punto di W_1 in un punto di W_2 trasforma allora W_1 in W_2 per il Lemma 19.2.6 ed è univocamente determinato. Ciò contraddice il fatto che i g_m fossero tutti distinti e dimostra quindi il teorema. \square

TEOREMA 19.6.2. *Perché il rivestimento $E \xrightarrow{p} B$ sia di Galois è sufficiente che \mathbf{G}_E agisca transitivamente su una delle fibre.*

Il teorema di Van Kampen

il teorema di Van Kampen uno dei principali strumenti per il calcolo del gruppo fondamentale di uno spazio topologico. Venne dimostrato indipendentemente da Karl Seifert ed Egbert Van Kampen agli inizi del 1930.

20.1. Prodotto libero di gruppi

PROPOSIZIONE 20.1.1. Sia $\mathcal{G} = \{\mathbf{G}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ una famiglia di gruppi. Possiamo allora determinare un gruppo \mathbf{G} , unico a meno di isomorfismi, tale che:

(1) Per ogni indice $\alpha \in A$ vi sia un monomorfismo di gruppi

$$(20.1) \quad j_\alpha : \mathbf{G}_\alpha \rightarrow \mathbf{G}.$$

(2) Dato un qualsiasi gruppo \mathbf{H} ed una qualsiasi famiglia di omomorfismi

$$\phi_\alpha : \mathbf{G}_\alpha \rightarrow \mathbf{H}$$

vi sia uno ed un solo omomorfismo di gruppi

$$\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$$

tale che

$$\phi \circ j_\alpha = \phi_\alpha \quad \forall \alpha \in A.$$

DEFINIZIONE 20.1.2. Un gruppo \mathbf{G} con le proprietà (1) e (2) della proposizione 20.1.1 si indica con $*\mathcal{G}$ e si dice il *prodotto libero* della famiglia \mathcal{G} . Indicheremo il prodotto libero di una famiglia finita $\{\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_n\}$ mediante $\mathbf{G}_1 * \dots * \mathbf{G}_n$.

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo innanzi tutto che il prodotto libero, se esiste, è univocamente determinato a meno di isomorfismi. Sia infatti \mathbf{G}' un altro gruppo e $j'_\alpha : \mathbf{G}_\alpha \rightarrow \mathbf{G}'$ monomorfismi di gruppi tali che sia verificata la proprietà (2). In particolare potremo trovare omomorfismi di gruppi

$$j : \mathbf{G}' \rightarrow \mathbf{G} \quad \text{e} \quad j' : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}'$$

tali che

$$j \circ j'_\alpha = j_\alpha,$$

$$j' \circ j_\alpha = j'_\alpha.$$

Da queste relazioni deduciamo che

$$j' \circ j \circ j'_\alpha = j' \circ j_\alpha = j'_\alpha,$$

$$j \circ j' \circ j_\alpha = j \circ j'_\alpha = j_\alpha,$$

e dunque, per l'unicità, otteniamo

$$\begin{aligned}j \circ j' &= \text{id}_{\mathbf{G}}, \\j' \circ j &= \text{id}_{\mathbf{G}'}. \end{aligned}$$

Ne segue che j e j' sono isomorfismi di gruppi.

Costruiamo ora un gruppo \mathbf{G} che goda delle proprietà (1) e (2). Sia $E = \bigsqcup \mathcal{G}$ l'unione disgiunta degli insiemi \mathbf{G}_α :

$$\bigsqcup \mathcal{G} = \{(g, \alpha) \mid \alpha \in A, g \in \mathbf{G}_\alpha\}$$

ed indichiamo con $P(E)$ l'insieme di tutte le sequenze finite di elementi di E . Chiamiamo E un *alfabeto* e $P(E)$ l'insieme delle *parole* nell'alfabeto E . Definiamo su $P(E)$ una struttura naturale di *monoide moltiplicativo* definendo l'operazione tra due parole mediante giustapposizione:

$$\begin{aligned}\text{se } (g_1, \alpha_1), \dots, (g_n, \alpha_n), (h_1, \beta_1), \dots, (h_m, \beta_m) \in E \text{ poniamo} \\ ((g_1, \alpha_1), \dots, (g_n, \alpha_n)) \cdot ((h_1, \beta_1), \dots, (h_m, \beta_m)) \\ = ((g_1, \alpha_1), \dots, (g_n, \alpha_n), (h_1, \beta_1), \dots, (h_m, \beta_m)).\end{aligned}$$

Questa operazione di prodotto gode della proprietà associativa e la parola vuota è elemento neutro del prodotto. Per ottenere il gruppo \mathbf{G} introduciamo la semplificazione di parole: conveniamo di cancellare da una parola tutte le lettere che siano l'identità di un gruppo e di sostituire a una coppia di lettere consecutive che siano elementi dello stesso gruppo la lettera ottenuta facendone il prodotto:

$$\begin{aligned}((g_1, \alpha_1), \dots, (g_i, \alpha_i)(g_{i+1}, \alpha_{i+1}), \dots, (g_n, \alpha_n)) \\ \sim ((g_1, \alpha_1), \dots, (g_i g_{i+1}, \alpha_i), (g_{i+2}, \alpha_{i+2}), \dots, (g_n, \alpha_n)) \\ \text{se } \alpha_i = \alpha_{i+1}.\end{aligned}$$

In questo modo ad ogni parola si può far corrispondere un'unica parola di lunghezza minimale, in cui nessuna lettera è identità di un gruppo e lettere consecutive appartengano a gruppi con indici diversi. La relazione tra parole che corrisponde ad avere associata la stessa parola minimale è una relazione di equivalenza. Definiamo \mathbf{G} come il quoziente di $P(E)$ rispetto a questa relazione di equivalenza. Si verifica facilmente che \mathbf{G} è un gruppo che gode delle proprietà richieste. \square

20.2. Teorema di Van Kampen

Sia X uno spazio topologico connesso per archi. Siano A, B due aperti di X tali che

$$\begin{aligned}A \cup B &= X, \\ \emptyset \neq A \cap B &\text{ è connesso per archi.}\end{aligned}$$

Fissiamo un punto base $x_0 \in A \cap B$. Le inclusioni:

$$\begin{aligned}\iota_A : A \cap B &\rightarrow A, \\ \iota_B : A \cap B &\rightarrow B, \\ J_A : A &\rightarrow X, \\ J_B : B &\rightarrow X,\end{aligned}$$

inducono un diagramma commutativo di omomorfismi di gruppi:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A, x_0) & \xrightarrow{J_{A*}} & \pi_1(X, x_0) \\ \iota_{A*} \uparrow & & \uparrow J_{B*} \\ \pi_1(A \cap B, x_0) & \xrightarrow{\iota_{B*}} & \pi_1(B, x_0) \end{array}$$

DEFINIZIONE 20.2.1. Il sottogruppo normale di $\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$, generato dagli elementi della forma $\iota_{A*}(\alpha) * \iota_{B*}(\alpha^{-1})$ al variare di α nel gruppo fondamentale $\pi_1(A \cap B, x_0)$ dell'intersezione $A \cap B$, si dice il *gruppo di Van Kampen* associato alla triade (X, A, B) e al punto base x_0 , e si indica con $\mathbf{K}(A, B, x_0)$.

Vale il

TEOREMA 20.2.2 (Van Kampen). *Sia X uno spazio topologico connesso per archi e siano A, B due aperti connessi per archi di X con $A \cup B = X$, ed intersezione $A \cap B$ non vuota e connessa per archi. Fissato un punto base x_0 di $A \cap B$, l'omomorfismo*

$$(20.2) \quad J_* : \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

indotto dagli omomorfismi $J_{A*} : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ e $J_{B*} : \pi_1(B, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ è surgettivo e definisce, per passaggio al quoziente, un isomorfismo di gruppi:

$$(20.3) \quad \frac{\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)}{\mathbf{K}(A, B, x_0)} \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

DIMOSTRAZIONE. È conveniente nella dimostrazione cambiare leggermente le notazioni e porre $A_1 = A$, $A_2 = B$. Scriveremo ancora $[\alpha]_X$ per indicare la classe di $\alpha \in \mathcal{C}(I, \{0, 1\}; X, x_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$ e, similmente, $[\alpha]_{A_i}$ per indicare la classe di $\alpha \in \mathcal{C}(I, \{0, 1\}; A_i, x_0)$ in $\pi_1(A_i, x_0)$.

Dimostriamo in primo luogo che l'omomorfismo (20.2) è surgettivo. Sia $\alpha \in \mathcal{C}(I, \{0, 1\}; X, x_0)$ un qualsiasi laccetto. Poiché $I = \alpha^{-1}(A_1) \cup \alpha^{-1}(A_2)$, possiamo fissare una partizione

$$(20.4) \quad 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = 1$$

dell'intervallo $I = [0, 1]$ ed un'applicazione $\{1, \dots, m\} \ni j \rightarrow \varepsilon(j) \in \{1, 2\}$ tale che l'immagine $\alpha([t_{j-1}, t_j])$ di ciascun sottointervallo della (20.4) sia tutta contenuta nell'aperto $A_{\varepsilon(j)}$. Indichiamo con $s_j \in \mathcal{C}(I, X)$ il cammino

$$(20.5) \quad s_j(t) = \alpha(t_{j-1} + t(t_j - t_{j-1})), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Il cammino α è una riparametrizzazione del prodotto $s_1 \cdots s_m$. Poiché i sottospazi A_1, A_2 ed $A_1 \cap A_2$ sono tutti e tre connessi per archi, per ogni indice $j = 1, \dots, m-1$, possiamo fissare un cammino continuo

$$\beta_j \in \mathcal{C}(I, 0, 1; A_{\varepsilon(j)} \cap A_{\varepsilon(j+1)}, \alpha(t_j), x_0).$$

Siano β_0, β_m i laccetti costanti in x_0 . Ciascuno dei prodotti¹ $\alpha_j = \check{\beta}_{j-1} \cdot s_j \cdot \beta_j$ è un laccetto in (X, x_0) , con supporto contenuto in $A_{\varepsilon(j)}$. Chiaramente $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ definisce

¹Ricordiamo che $\check{\beta}_i(t) = \beta_i(1-t)$ è il cammino inverso di β_i .

la stessa classe di omotopia di α in $\pi_1(X, x_0)$ e si ha

$$(20.6) \quad J_*([\alpha_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\alpha_m]_{A_{\varepsilon(m)}}) = [\alpha_1]_X \cdots [\alpha_m]_X = [\alpha_1 \cdots \alpha_m]_X = [\alpha]_X.$$

Ciò dimostra la surgettività di (20.2).

Chiameremo il prodotto $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ una *decomposizione* di α in laccetti, subordinata al ricoprimento $\{A_1, A_2\}$ di X .

Il sottogruppo $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$ è contenuto nel nucleo di J_* . Infatti $\ker J_*$ è un sottogruppo normale² di $\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, b_0)$ che contiene gli elementi $[\iota_A \circ \alpha]_A * [\iota_B \circ \check{\alpha}]_B$ per ogni $\alpha \in \mathcal{C}(I, \{0, 1\}, A \cap B, x_0)$.

Dividiamo la dimostrazione del fatto che $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$ è proprio uguale al nucleo di J_* in una serie di passi.

Passo 1. Sia $\eta_1 * \cdots * \eta_m$ un elemento del prodotto libero $\pi_1(A_1, x_0) * \pi_1(A_2, x_0)$. Supponiamo che per qualche j , con $1 \leq j \leq m$, la classe di omotopia η_j contenga un laccetto α_j con supporto in $A_1 \cap A_2$. Supponiamo per fissare le idee che $\eta_j \in \pi_1(A_1, x_0)$ ed indichiamo con η'_j la classe di omotopia definita da α_j in $\pi_1(A_2, x_0)$. Allora $\eta_j^{-1} \eta'_j$ è un generatore di $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$ e perciò

$$\begin{aligned} & (\eta_1 * \cdots * \eta_j * \cdots * \eta_m)^{-1} * (\eta_1 * \cdots * \eta'_j * \cdots * \eta_m) \\ &= \eta_m^{-1} * \cdots * \eta_j^{-1} * \cdots * \eta_1^{-1} * \eta_1 * \cdots * \eta'_j * \cdots * \eta_m \\ &= (\eta_{j+1} * \cdots * \eta_m)^{-1} (\eta_j^{-1} \eta'_j) (\eta_{j+1} * \cdots * \eta_m) \in \mathbf{K}(A_1, A_2, x_0). \end{aligned}$$

Quindi: due qualsiasi elementi del prodotto libero $\pi_1(A_1, x_0) * \pi_1(A_2, x_0)$ sono equivalenti rispetto al sottogruppo normale $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$ se sono ottenuti l'uno dall'altro sostituendo a fattori liberi che hanno rappresentanti α con supporto in $A_1 \cap A_2$ alla classe $[\alpha]_{A_1}$ la classe $[\alpha]_{A_2}$, o viceversa.

Passo 2. Dimostriamo ora che i prodotti $[\alpha_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\alpha_m]_{A_{\varepsilon(m)}}$ associati a decomposizioni di uno stesso laccetto $\alpha \in \mathcal{C}(I, \{0, 1\}; X, x_0)$ in prodotti di laccetti, subordinati al ricoprimento $\{A_1, A_2\}$ di X , sono tutti equivalenti modulo $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$. Per il Passo 1, scelte diverse delle $\varepsilon(j)$ danno prodotti equivalenti modulo $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$. Ancora, per il Passo 1, la classe d'equivalenza modulo $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$ del prodotto $[\alpha_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\alpha_m]_{A_{\varepsilon(m)}}$ dipende soltanto dalla partizione (20.4). Sarà quindi sufficiente dimostrare che, se fissiamo $t_{j-1} < \tau < t_j$ un prodotto associato ad α e che dipenda dalla partizione

$$0 = t_0 < \cdots < t_{j-1} < \tau < t_j < \cdots < t_m = 1$$

è equivalente modulo $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$ al prodotto $[\alpha_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\alpha_m]_{A_{\varepsilon(m)}}$. Siano $s'_j(t) = \alpha(t_{j-1} + t(\tau - t_{j-1}))$, $s''_j(t) = \alpha(\tau + t(t_j - \tau))$. Fissiamo un elemento $\gamma \in$

²Se \mathbf{N} è un sottogruppo normale di un gruppo \mathbf{G} , e se due elementi $g, g' \in \mathbf{G}$ sono equivalenti modulo \mathbf{N} , e $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$, allora anche $g_1 g g_2$ e $g_1 g' g_2$ sono equivalenti modulo \mathbf{N} . Infatti $(g_1 g g_2)^{-1} g_1 g' g_2 = g_2^{-1} g^{-1} g' g_2 \in \mathbf{N}$ se $g^{-1} g' \in \mathbf{N}$.

$\mathcal{C}(I, 0, 1; X, \alpha(\tau), x_0)$ con $\gamma(I) \subset A_i$ se $\alpha(\tau) \in A_i$, e $\gamma(I) \subset A_1 \cap A_2$ se $\alpha(\tau) \in A_1 \cap A_2$. Allora

$$\begin{aligned} & [\check{\beta}_0 s_1 \beta_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\check{\beta}_{j-1} s_j \beta_j]_{A_{\varepsilon(j)}} * \cdots * [\check{\beta}_{m-1} s_m \beta_m]_{A_{\varepsilon(m)}} \\ &= [\check{\beta}_0 s_1 \beta_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\check{\beta}_{j-1} s'_j \gamma]_{A_{\varepsilon(j)}} * [\check{\gamma} s''_j \beta_j]_{A_{\varepsilon(j)}} * \cdots * [\check{\beta}_{m-1} s_m \beta_m]_{A_{\varepsilon(m)}}. \end{aligned}$$

Passo 3. Sia $\alpha \in \mathcal{C}(I, \{0, 1\}; X, x_0)$ e sia (20.4) una partizione per cui $\alpha([t_{j-1}, t_j]) \subset A_{\varepsilon(j)}$, con $\varepsilon(j) \in \{0, 1\}$, per $j = 1, \dots, m$, e gli s_j definiti dalle (20.5). Siano $\beta_j, \gamma_j \in \mathcal{C}(I, 0, 1; X, \alpha(t_j), x_0)$ con

$$\beta_j(I) \cup \gamma_j(I) \subset A_{\varepsilon(j)} \cap A_{\varepsilon(j+1)}$$

e siano $\beta_0, \beta_m, \gamma_0, \gamma_m$ i laccetti costanti in (X, x_0) . Allora

$$\begin{aligned} [\check{\beta}_0 s_1 \beta_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\check{\beta}_{m-1} s_m \beta_m]_{A_{\varepsilon(m)}} &\equiv [\check{\gamma}_0 s_1 \gamma_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\check{\gamma}_{m-1} s_m \gamma_m]_{A_{\varepsilon(m)}} \\ &\text{mod } \mathbf{K}(A_1, A_2, x_0). \end{aligned}$$

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} & [\check{\beta}_0 s_1 \beta_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\check{\beta}_{m-1} s_m \beta_m]_{A_{\varepsilon(m)}} \\ &= [\check{\gamma}_0 s_1 \gamma_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * [\check{\gamma}_1 \beta_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * [\check{\beta}_1 \gamma_1]_{A_{\varepsilon(2)}} * [\check{\gamma}_1 s_2 \gamma_2]_{A_{\varepsilon(2)}} * \cdots \\ &\cdots * [\check{\gamma}_{m-1} \beta_{m-1}]_{A_{\varepsilon(m-1)}} * [\check{\beta}_{m-1} \gamma_{m-1}]_{A_{\varepsilon(m)}} * [\check{\gamma}_{m-1} s_m \gamma_m]_{A_{\varepsilon(m)}}. \end{aligned}$$

Il secondo membro di questa uguaglianza è equivalente, modulo il sottogruppo normale $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$, al prodotto che si ottiene da esso sostituendo a ciascun fattore $[\check{\beta}_j \gamma_j]_{A_{\varepsilon(j+1)}}$ il fattore $[\check{\beta}_j \gamma_j]_{A_{\varepsilon(j)}}$. Ciò è ovvio se $\varepsilon(j) = \varepsilon(j+1)$. Quando i due valori sono diversi, $\alpha(t_j) \in A_1 \cap A_2$ e $\check{\beta}_j \gamma_j$ è un laccetto in $(A_1 \cap A_2, x_0)$, per cui l'equivalenza segue dal Passo 1.

Passo 4. Possiamo ora concludere la dimostrazione.

Sia $\eta \in \pi_1(A_1, x_0) * \pi_1(A_2, x_0)$ un elemento del nucleo di J_* . Abbiamo $\eta = [\alpha_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\alpha_m]_{A_{\varepsilon(m)}}$, ove $\alpha_j \in \mathcal{C}(I, \{0, 1\}; A_{\varepsilon(j)}, x_0)$, $\varepsilon(j) \in \{0, 1\}$ per $j = 1, \dots, m$. Sia $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_m$. Per ipotesi $[\alpha]_X$ è la classe di omotopia del laccetto costante. Vi è perciò un'omotopia

$$\begin{cases} F : I \times I \ni (t, s) \rightarrow F(t, s) \in X, \\ F(t, 0) = \alpha(t), \\ F(0, s) = F(1, s) = F(t, 1) = x_0 \quad \forall t, s \in I. \end{cases}$$

Suddividiamo in quadrato $I \times I$ in N^2 quadratini di lato $1/N$:

$$Q_{i,j} = \{(t, s) \in I \times I \mid i-1 \leq Nt \leq i, j-1 \leq Ns \leq j\} \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq N.$$

Scegliendo l'intero positivo N sufficientemente grande, facciamo in modo che, per ogni quadratino $Q_{i,j}$ della suddivisione, $F(Q_{i,j})$ sia tutto contenuto in un aperto $A_{\varepsilon(i,j)}$, per $\varepsilon(i,j) \in \{1, 2\}$. Per ogni $1 \leq i \leq N-1$ e $0 \leq j \leq N-1$ fissiamo

$$\beta_{i,j} \in \mathcal{C}(I, 0, 1; A_{\varepsilon(i,j)} \cap A_{\varepsilon(i,j+1)}, \cap A_{\varepsilon(i+1,j)} \cap A_{\varepsilon(i+1,j+1)}, F(i/N, j/N), x_0).$$

Definiamo poi $\beta_{0,j}, \beta_{N,j}, \beta_{i,N}$ come il laccetto costante di (X, x_0) per ogni $0 \leq i, j \leq N$. Siano poi

$$\begin{cases} \sigma_{i,j}(t) = F((t+i-1)/N, j/N) & 1 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N, t \in I, \\ \tau_{i,j}(t) = F(i/N, (t+j-1)/N) & 0 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N, t \in I. \end{cases}$$

Per ogni $j = 0, 1, \dots, N$ consideriamo il laccetto $F_{j/N}(t) = F(t, j/N)$ di (X, x_0) . La sua classe di omotopia $[F_{j/N}]_X$ è l'immagine mediante J_* dell'elemento

$$\eta_j = [\check{\beta}_{0,j}\sigma_{1,j}\beta_{1,j}]_{A_{\varepsilon(1,j)}} * \dots * [\check{\beta}_{i-1,j}\sigma_{i,j}\beta_{i,j}]_{A_{\varepsilon(i,j)}} * \dots * [\check{\beta}_{N-1,j}\sigma_{N,j}\beta_{N,j}]_{A_{\varepsilon(N,j)}}$$

di $\pi_1(A_1, x_0) * \pi_1(A_2, x_0)$. Per i passi precedenti della dimostrazione, η_0 è equivalente ad η modulo $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$. Quindi, per verificare che $\eta \in \mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$ sarà sufficiente dimostrare che, per ogni $1 \leq j \leq N$, è $\eta_{j-1}\eta_j^{-1} \in \mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$. Indicando con \equiv l'equivalenza modulo $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$, ed utilizzando le omotopie descritte dai quadratini $Q_{i,j-1}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \eta_j &= [\check{\beta}_{0,j-1}\tau_{0,j-1}\sigma_{1,j}\check{\tau}_{1,j-1}\beta_{1,j-1}]_{A_{\varepsilon(1,j)}} * \dots \\ &\quad \dots * [\check{\beta}_{i-1,j-1}\tau_{i-1,j-1}\sigma_{i,j}\check{\tau}_{i,j-1}\beta_{i,j-1}]_{A_{\varepsilon(i,j)}} * \dots \\ &\quad \dots * [\check{\beta}_{N-1,j-1}\tau_{N-1,j-1}\sigma_{N,j}\check{\tau}_{N,j-1}\beta_{N,j-1}]_{A_{\varepsilon(i,j)}} \\ &= [\check{\beta}_{0,j-1}\sigma_{1,j-1}\beta_{1,j-1}]_{A_{\varepsilon(1,j)}} * \dots \\ &\quad \dots * [\check{\beta}_{i-1,j-1}\sigma_{i,j-1}\beta_{i,j-1}]_{A_{\varepsilon(i,j)}} * \dots \\ &\quad \dots * [\check{\beta}_{N-1,j-1}\sigma_{N,j-1}\beta_{N,j-1}]_{A_{\varepsilon(i,j)}} \\ &\equiv [\check{\beta}_{0,j-1}\sigma_{1,j-1}\beta_{1,j-1}]_{A_{\varepsilon(1,j-1)}} * \dots \\ &\quad \dots * [\check{\beta}_{i-1,j-1}\sigma_{i,j-1}\beta_{i,j-1}]_{A_{\varepsilon(i,j-1)}} * \dots \\ &\quad \dots * [\check{\beta}_{N-1,j-1}\sigma_{N,j-1}\beta_{N,j-1}]_{A_{\varepsilon(i,j-1)}} = \eta_{j-1}. \end{aligned}$$

Ciò completa la dimostrazione. \square

COROLLARIO 20.2.3. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi. Se $X = A \cup B$ con A, B aperti connessi per archi e semplicemente connessi, ed $A \cap B$ è non vuoto e connesso per archi, allora X è semplicemente connesso.*

ESEMPIO 20.2.4. Le sfere S^n , con $n \geq 2$, sono semplicemente connessi. Infatti $S^n = (S^n \setminus \{e_0\}) \cup (S^n \setminus \{-e_0\})$ ed i due sottospazi $(S^n \setminus \{e_0\})$, $(S^n \setminus \{-e_0\})$ sono omeomorfi ad \mathbb{R}^n e quindi contrattili; la loro intersezione $S^n \setminus \{\pm e_0\}$ è omeomorfa al cilindro $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ e quindi connessa per archi se $n \geq 2$.

20.3. Alcuni esempi ed applicazioni

20.3.1. Attaccamento di una 2-cella. Sia X uno spazio topologico connesso per archi e sia

$$f : S^1 \rightarrow X$$

una applicazione continua. Costruiamo un nuovo spazio topologico Y considerando l'unione disgiunta

$$D^2 \sqcup X$$

ed il suo quoziente Y ottenuto identificando i punti $y \in S^1 \subset D^2$ con i punti $f(y) \in X$. Lo spazio topologico Y si dice ottenuto da X per *attaccamento di una 2-cella* lungo f . Abbiamo inclusioni naturali:

$$\iota_X : X \rightarrow Y$$

$$\iota_{D^2} \rightarrow Y.$$

Osserviamo che ι_X è un omeomorfismo con l'immagine. Lo spazio topologico Y è connesso per archi e possiamo calcolare il suo gruppo fondamentale usando il teorema di Van Kampen.

Il gruppo fondamentale, a meno di isomorfismi, non dipende dalla scelta del punto base. Fissiamo dunque il punto base $y_0 = e_0/2$ in D^2 e consideriamo il ricoprimento di Y mediante i due aperti

$$A = \iota_X(X) \cup \iota_{D^2}(\{|y| > 0\}),$$

$$B = \iota_{D^2}(\{|y| < 1\}).$$

Allora $A \cap B$ è omeomorfo alla corona circolare $\{0 < |y| < 1\}$ e $\pi_1(A \cap B, y_0)$ è il gruppo ciclico di ordine infinito generato da

$$S^1 \ni e^{i\theta} \rightarrow \iota_{D^2}(y_0 \cdot e^{i\theta}) \in A \cap B.$$

Poiché B è contrattile, $\pi_1(B, y_0) = \{e\}$ e poiché $\iota_X(X)$ è un retratto di deformazione di A , $\pi_1(A, y_0)$ è isomorfo a $\pi_1(X, x_0)$ ove $x_0 = f(e_0)$ e l'isomorfismo è indotto dal cammino

$$I \ni t \rightarrow \iota_{D^2}([1-t]y_0 + te_0) \in Y.$$

Otteniamo quindi, indicando con $N(f)$ il sottogruppo normale di $\pi_1(X, x_0)$ generato dalla classe di omotopia $[f]$ di f ,

$$(20.7) \quad \pi_1(Y, \iota_X(x_0)) \simeq \pi_1(X, x_0)/N(f).$$

COROLLARIO 20.3.1. $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}_2$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $X = S^1$ ed $f : S^1 \ni e^{i\theta} \rightarrow f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta} \in X$. Lo spazio proiettivo $\mathbb{R}P^2$ si ottiene attaccando ad $X = S^1$ una 2-cella mediante f . Il sottogruppo normale $N(f)$ è l'immagine in $\pi_1(S^1, e_0) \simeq \mathbb{Z}$ delle applicazioni

$$S^1 \ni e^{i\theta} \rightarrow e^{2ki\theta} \in S^1 \text{ per } k \in \mathbb{Z}.$$

Abbiamo quindi:

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2.$$

□

ESEMPIO 20.3.2. In generale possiamo considerare lo spazio topologico Y_m che si ottiene attaccando ad $X = S^1$ una 2-cella mediante l'applicazione $f_m : S^1 \ni z \rightarrow z^m \in X$. Risulta

$$\pi_1(Y_m, e_0) = \mathbb{Z}/N(f) = \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_m.$$

ESEMPIO 20.3.3. $\pi_1(\mathbb{R}^3 - S^1, 0) \simeq \mathbb{Z}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$S^1 = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Possiamo trovare una retrazione di deformazione di $\mathbb{R}^3 - S^1$ su

$$X = \{(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 = 1\}.$$

Abbiamo quindi:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - S^1, 0) \simeq \pi_1(X, 0).$$

Lo spazio X si ottiene attaccando ad S^1 una 2-cella mediante l'applicazione

$$f(e^{i\theta}) = \begin{cases} e^{2i\theta} & 0 \leq \theta \leq \pi \\ e^{-2i\theta} & \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Poiché f è omotopa all'applicazione costante, ne segue che

$$\pi_1(X, 0) \simeq \mathbb{Z}.$$

□

20.3.2. Bouquet di circonferenze.

ESEMPIO 20.3.4. Consideriamo il *bouquet* di due circonferenze

$$X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| = 1\}.$$

Per calcolare $\pi_1(X, 0)$, consideriamo il ricoprimento aperto di X mediante gli insiemi

$$A = \left\{ z \in X \mid \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2} \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ z \in X \mid \operatorname{Re} z < \frac{1}{2} \right\}.$$

Ciascuno dei due insiemi A e B si può retrarre per deformazione su una circonferenza e la loro intersezione $A \cap B$ è connessa e contrattile. Quindi

$$\pi_1(X, 0) = \pi_1(S^1, e_0) * \pi_1(S^1, e_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

ESEMPIO 20.3.5. Più in generale possiamo considerare il bouquet

$$X_n = \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{n \text{ volte}}$$

di n circonferenze ($n \geq 2$). Esso è il quoziente dell'unione disgiunta di n circonferenze rispetto alla relazione di equivalenza che identifica ad un unico punto un punto fissato di ciascuna circonferenza:

$$X_n = \{(z, j) \in S^1 \times \{1, \dots, n\}\} /_{(\{1\} \times \{1, \dots, n\})}.$$

Indichiamo con $p : S^1 \times \{1, \dots, n\} \rightarrow X_n$ la proiezione nel quoziente. Possiamo considerare il ricoprimento di X_n mediante i due aperti $A = X_n \setminus \{p((-1, n))\}$ e $B = X_n \setminus \{p((-1, j) \mid 1 \leq j < n)\}$. Allora $A \cap B$ è contrattile ed A si retrae per deformazione su un sottospazio omeomorfo ad X_{n-1} , mentre B si retrae per deformazione su un sottospazio omeomorfo ad S^1 . Quindi, posto $x_0 = p((1, 1))$,

$$\pi_1(X_n, x_0) \simeq \pi_1(X_{n-1}, x_0) * \pi_1(S^1, 1) \simeq \dots \simeq \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}.$$

ESEMPIO 20.3.6. Consideriamo il toro $T = S^1 \times S^1$. Esso si può ottenere dal quadrato $Q = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ identificando tra loro i punti dei lati opposti:

$$(0, y) \sim (1, y), \quad (x, 0) \sim (x, 1).$$

Possiamo quindi considerare T come l'attaccamento di una due cella al bouquet di due circonferenze $(S^1, 1) \vee (S^1, 1)$ mediante l'applicazione

$$S^1 \ni z \rightarrow f(z) = \begin{cases} p(z^4, 1) & \text{se } \operatorname{Re}(z) \geq 0, \operatorname{Im}(z) \geq 0, \\ p(z^4, 2) & \text{se } \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) \geq 0, \\ p(-z^4, 1) & \text{se } \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) \leq 0, \\ p(-z^4, 2) & \text{se } \operatorname{Re}(z) \geq 0, \operatorname{Im}(z) \leq 0. \end{cases}$$

Qui $S^1 \vee S^1 = \{(z, h) \mid z \in S^1, h = 1, 2\} / \{(1, 1), (1, 2)\}$ e $p : \{(z, h) \mid z \in S^1, h = 1, 2\} \rightarrow S^1 \vee S^1$ è la proiezione nel quoziente. Detti a e b gli elementi di $\pi_1(S^1 \vee S^1, p(1, 1)) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ corrispondenti ai cammini $I \ni t \rightarrow p(e^{2i\pi t}, 1)$ e $I \ni t \rightarrow p(e^{2i\pi t}, 2)$, rispettivamente, otteniamo che il gruppo di Van Kampen è il sottogruppo normale generato da $aba^{-1}b^{-1}$. Quindi $\pi_1(T, x_0) \simeq (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) / \mathbb{N}(aba^{-1}b^{-1}) \simeq \mathbb{Z}^2$.

ESEMPIO 20.3.7. Consideriamo il sottoinsieme X_m di \mathbb{C} definito da

$$X_m = \{|z| = 1\} \cup \{|z| = 2\} \cup \bigcup_{j=1}^m \left\{ t \exp\left(\frac{2j\pi}{m}\right) \mid 1 < t < 2 \right\}.$$

X_1 è omotopicamente equivalente al bouquet di due circonferenze e quindi $\pi_1(X_1, e_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Sia ora $m > 1$. Siano $A = X_m \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ e $B = \left\{ z \in X_m \mid -\frac{\pi}{m} < \operatorname{Arg}(z) < \frac{3\pi}{m} \right\}$. Allora A si retrae per deformazione su un sottospazio omeomorfo ad X_{m-1} , B si retrae per deformazione su un sottospazio omeomorfo ad una circonferenza S^1 , mentre $A \cap B$ è contrattile. Otteniamo perciò

$$\begin{aligned} \pi_1(X_m, 1) &= \pi_1(A, 1) * \pi_1(B, 1) \simeq \pi_1(X_{m-1}, 1) * \pi_1(S^1, 1) \\ &\simeq \pi_1(X_{m-2}, 1) * \pi_1(S^1, 1) * \pi_1(S^1, 1) \simeq \dots \\ &\simeq \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{(m+1) \text{ volte}}. \end{aligned}$$

ESEMPIO 20.3.8. Il toro si generalizza alla *sfera ad n manici*. L'operazione di aggiungere un manico a una sfera si può effettuare togliendo dalla sfera due calotte aperte disgiunte ed attaccando ai loro bordi i bordi di un cilindro circolare retto. La sfera ad n manici M_n si può anche ottenere a partire dal disco $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ identificando coppie di punti della sua frontiera mediante

$$e^{it} \equiv e^{i\left(\frac{(j+n)\pi}{n} - t\right)} \quad \text{se } j = 1, \dots, n, \quad \frac{(j-1)\pi}{n} \leq t \leq \frac{j\pi}{n}.$$

Quindi M_n si ottiene attaccando una 2-cella al bouquet di n circonferenze

$$p : \{(z, h) \mid z \in S^1, h = 1, \dots, n\} \rightarrow (S^1, 1) \vee \dots \vee (S^1, 1)$$

mediante l'applicazione

$$f(z) = \begin{cases} p\left(z^{2n}, \left[\frac{\text{Arg}(z)}{n\pi}\right]\right) & \text{se } 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \pi, \\ p\left(z^{-2n}, \left[\frac{\text{Arg}(z)-\pi}{n\pi}\right]\right) & \text{se } \pi \leq \text{Arg}(z) \leq 2\pi. \end{cases}$$

Indichiamo con a_j l'elemento di $\pi_1(S^1 \vee \dots \vee S^1, p(1, 1))$ corrispondente al laccetto $p(e^{it}, j)$, per $j = 1, \dots, n$. Allora $\pi_1(S^1 \vee \dots \vee S^1, p(1, 1))$ è il gruppo libero con generatori a_1, \dots, a_n . Il quoziente

$$\pi_1(M_n, p_0) = \pi_1(S^1 \vee \dots \vee S^1, p(1, 1)) / \mathbf{N}(f)$$

è quindi il gruppo definito dai generatori a_1, \dots, a_n e dalla relazione

$$a_1 \cdots a_n a_1^{-1} \cdots a_n^{-1} = e.$$

ESEMPIO 20.3.9. Consideriamo nel piano l'insieme X ottenuto come unione di una circonferenza e dal perimetro di un quadrato ad essa circoscritto:

$$X = \{x^2 + y^2 = 1\} \cup \{\sup(|x|, |y|) = 1\}.$$

Vogliamo calcolare $\pi_1(X, e_1)$. Si verifica facilmente che X ha lo stesso tipo d'omotopia del bouquet di cinque circonferenze e quindi $\pi_1(X, e_1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (prodotto libero di cinque copie di \mathbb{Z}).

ESEMPIO 20.3.10. Sia $X \subset \mathbb{R}^3$ l'unione di una sfera e della superficie di un cubo ad essa circoscritto:

$$X = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{\sup(|x|, |y|, |z|) = 1\}.$$

Vogliamo calcolare $\pi_1(X, e_1)$. Siano $A = X \cap \{z < \frac{1}{2}\}$ e $B = X \cap \{z > -\frac{1}{2}\}$. Osserviamo che $A \cap B$ si retrae per deformazione sulla figura dell'esempio precedente. Il gruppo fondamentale $\pi_1(A \cap B, e_1)$ è quindi il gruppo libero generato dalla circonferenza e dai quattro laccetti ottenuti congiungendo con un arco al punto base uno dei triangoli curvilinei formato da un quarto del perimetro del quadrato e da un quarto di arco di circonferenza. Osserviamo poi che A ha lo stesso tipo di omotopia di un disco in cui si identifichino tra loro cinque punti, cioè il quoziente del gruppo libero con cinque generatori a_1, \dots, a_5 rispetto alla relazione $a_1 a_2 \cdots a_5 = 1$, ovvero è il gruppo libero con quattro generatori. Ancora, B è omeomorfo ad A ed ha quindi gruppo fondamentale isomorfo a quello di A . Poiché la circonferenza di $A \cap B$ ha per immagine un laccetto omotopo al laccetto costante sia in A che in B , otteniamo che $\pi_1(X, e_1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (prodotto libero di quattro copie di \mathbb{Z}).

20.3.3. Altri esempi.

ESEMPIO 20.3.11. Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme formato da una retta e da un punto che non le appartiene. Supponiamo, per fissare le idee, che sia

$$E = \{(2, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \cup \{(-2, 0, 0)\}.$$

Sia $X = \mathbb{R}^3 \setminus E$. Ricopriamo X mediante i due aperti

$$A = \{(x, y, z) \in X \mid x < 1\}, \quad B = \{(x, y, z) \in X \mid x > -1\}.$$

Allora $A \cap B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 < x < 1\}$ è contrattile. L'aperto A si retrae per deformazione su un sottospazio omeomorfo alla sfera S^2 ; l'aperto B si deforma per deformazione ad un sottospazio omeomorfo ad S^1 . Quindi

$$\pi_1(X, 0) \simeq \pi_1(A, 0) * \pi_1(B, 0) \simeq \mathbb{Z}.$$

ESEMPIO 20.3.12. Sia E un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 formato da n punti distinti ed $X_n = \mathbb{R}^2 \setminus E$. X_n è omeomorfo ad $\mathbb{R}^2 \setminus \{1, 2, \dots, n\}$. Osserviamo che $A = \{(x, y) \in X_n \mid x < 2\}$ e $B = \{(x, y) \in X_n \mid x > 1\}$ danno un ricoprimento aperto di X_n con $A \cap B$ contrattile. Poiché A è omeomorfo ad X_1 e B ad X_{n-1} , abbiamo

$$\begin{aligned} \pi_1(X_n, 0) &\simeq \pi_1(X_{n-1}, 0) * \pi_1(X_1, 0) \\ &\simeq \dots \simeq \underbrace{\pi_1(X_1, 0) * \dots * \pi_1(X_1, 0)}_{n \text{ volte}} \\ &\simeq \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}} \end{aligned}$$

perché X_1 si retrae per deformazione su un sottospazio omeomorfo ad S^1 .

ESEMPIO 20.3.13. Sia

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(0, 0, z) \mid -1 < z < 1\}.$$

Ricopriamo X con gli aperti

$$A = X \setminus \{0\}, \quad B = X \setminus \{(1, 0, 0)\}.$$

Allora $A \cap B$ è contrattile, A si retrae per deformazione su S^2 e B si retrae per deformazione su un sottospazio omeomorfo ad S^1 . Quindi

$$\pi_1(X, e_3) \sim \pi_1(S^2, e_0) * \pi_1(S^1, e_0) \simeq \mathbb{Z}.$$

ESEMPIO 20.3.14. Sia $X = S^2 \cup (D^2 \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^3$, la sfera dello spazio ordinario a cui abbiamo aggiunto i punti del cerchio che ha come bordo l'equatore. Siano $A = X \setminus \{e_3\}$, $B = X \setminus \{-e_3\}$. Allora $A \cap B$ è contrattile, mentre A e B si retraggono per deformazione su sottospazi omeomorfi ad S^2 . Quindi $\pi_1(X, e_1) = 0$.

ESEMPIO 20.3.15. Sia $X = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$, ove $S^1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$. Sia $p_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Possiamo ricoprire X mediante i due aperti $A = \{(x, y, z) \in X \mid x^2 + y^2 > 0\}$ e $B = \{(x, y, z) \in X \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Osserviamo che B è contrattile, che A si retrae per deformazione sul toro $T = \{(1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = \frac{1}{4}\}$, che si ottiene facendo ruotare la circonferenza $\{(x-1)^2 + z^2 = \frac{1}{4}\} \subset \mathbb{R}_{x,z}^2$ intorno all'asse z , che $A \cap B$ si retrae per deformazione sul cilindro $\{x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$ e quindi sulla circonferenza $\{x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\} \cap \{z = 0\}$. Poiché $\alpha(t) = (\frac{1}{2} \cos(t), \frac{1}{2} \sin(t), 0)$ definisce sia la classe del generatore di $\pi_1(A \cap B, p_0) \simeq \mathbb{Z}$ che di uno dei due generatori di $\pi_1(A, p_0) \simeq \mathbb{Z}^2$ come prodotto diretto, otteniamo $\pi(X, p_0) = \mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

ESEMPIO 20.3.16. Siano $Y = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\} \cup \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ ed $X = \mathbb{R}^3 \setminus Y$. Poiché X è un retratto di deformazione del toro, $\pi(X, p_0) \simeq \mathbb{Z}^2$.

ESEMPIO 20.3.17. Sia $X = \{xyz \neq 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Mediante una retrazione di deformazione possiamo verificare che X ha lo stesso tipo d'omotopia della sfera S^2 privata di 6 punti, e quindi di \mathbb{R}^2 privato di 5 punti. Abbiamo quindi, fissato $p_0 \in X$, che $\pi_1(X, p_0)$ è isomorfo al prodotto libero di 5 copie di \mathbb{Z} .

ESEMPIO 20.3.18. Sia $D = \{|z| \leq 1\} \subset \mathbb{C}$, sia $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ una suddivisione della frontiera S^1 di D in archi senza punti interni comuni e sia \sim una relazione di equivalenza su D che identifica tra loro tutti gli estremi degli archi $\kappa_1, \dots, \kappa_n$. Sia $X = D / \sim$. Allora il gruppo fondamentale di X è il gruppo libero con $(n - 1)$ generatori.

CAPITOLO XXI

CW-complexi

21.1. Celle e decomposizioni cellulari

Per ogni intero non negativo m indichiamo con D^m , B^m ed S^m rispettivamente le palle chiusa e aperta di raggio 1 in \mathbb{R}^m e la sfera unitaria di dimensione m :

$$\begin{aligned} D^0 &= B^0 = \{0\}, \\ D^m &= \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leq 1\} \supset B^m, \quad \text{se } m > 0, \\ B^m &= \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| < 1\} \subset D^m, \quad \text{se } m > 0, \\ S^0 &= \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}, \\ S^m &= D^{m+1} \setminus B^{m+1} = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid |x| = 1\}, \quad \text{se } m > 0. \end{aligned}$$

Sia X uno spazio topologico.

DEFINIZIONE 21.1.1. Chiamiamo *cella di dimensione m* di X un suo sottospazio A , omeomorfo a B^m mediante un omeomorfismo $\phi : B^m \rightarrow A$ che si estende ad un'applicazione continua $\bar{\phi} : D^m \rightarrow X$:

$$(21.1) \quad \begin{array}{ccc} B^m & \xrightarrow{\text{inclusione}} & D^m \\ \text{omeomorfismo } \phi \downarrow & & \downarrow \bar{\phi} \text{ continua} \\ A & \xrightarrow{\text{inclusione}} & X \end{array}$$

Una funzione ϕ con queste proprietà si dice *caratteristica* della cella A .

La chiusura \bar{A} di una cella A si dice *cella chiusa* di X .

Per l'*invarianza topologica della dimensione*, la dimensione m di una cella è univocamente determinata.

Per ogni punto x di X , il sottospazio $\{x\}$ è una cella di dimensione 0.

Si dice *decomposizione cellulare* di X una partizione \mathcal{P} di X con le proprietà :

- (1) Ogni elemento A di \mathcal{P} è una cella ;
- (2) La frontiera $\partial A = \bar{A} \setminus A$ di ogni cella di \mathcal{P} è unione di un numero finito di celle di \mathcal{P} , di dimensione strettamente minore di m .

ESEMPIO 21.1.2. Consideriamo la sfera

$$S^n = \left\{ x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1 \right\} .$$

Posto $A = \{(1, 0, \dots, 0)\}$, $B = \{x \in S^n \mid x_0 < 1\}$, la $\mathcal{P} = \{A, B\}$ è una decomposizione cellulare di S^n in una cella A di dimensione 0 ed una cella B di dimensione n .

ESEMPIO 21.1.3. Consideriamo il disco $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$. Gli insiemi $A_n = B^n$, $A_{n-1} = S^{n-1} \setminus \{e_1\}$ ed $A_0 = \{e_1\}$ sono le celle di una decomposizione cellulare di D^n , che consiste di una cella A_n di dimensione n , di una cella A_{n-1} di dimensione $(n-1)$ e di una cella A_0 di dimensione 0.

ESEMPIO 21.1.4. Sia $\mathbb{R}P^n$ lo spazio proiettivo reale di dimensione n . Indichiamo con $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ la proiezione canonica nel quoziente. Allora

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathbb{R}P^0 = \pi(e_0), \\ A_1 &= \mathbb{R}P^1 \setminus \mathbb{R}P^0 = \{\pi(x_0, x_1, 0, \dots, 0) \mid x_1 \neq 0\}, \\ &\dots \quad \dots \\ A_k &= \mathbb{R}P^k \setminus \mathbb{R}P^{k-1} = \{\pi(x_0, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \mid x_k \neq 0\}, \\ &\dots \quad \dots \\ A_n &= \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^{n-1} = \{\pi(x_0, \dots, x_n) \mid x_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

sono le celle di una partizione cellulare \mathcal{P} che contiene una cella di dimensione h per ogni $0 \leq h \leq n$.

ESEMPIO 21.1.5. In modo analogo, consideriamo lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{C}P^n$ ed indichiamo con $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ la proiezione nel quoziente. Allora

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathbb{C}P^0 = \pi(e_0), \\ A_2 &= \mathbb{C}P^1 \setminus \mathbb{C}P^0 = \{\pi(z_0, z_1, 0, \dots, 0) \mid z_1 \neq 0\}, \\ &\dots \quad \dots \\ A_{4k} &= \mathbb{C}P^k \setminus \mathbb{C}P^{k-1} = \{\pi(z_0, \dots, z_k, 0, \dots, 0) \mid z_k \neq 0\}, \\ &\dots \quad \dots \\ A_{4n} &= \mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1} = \{\pi(z_0, \dots, z_n) \mid z_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

sono le celle di una partizione \mathcal{P} di $\mathbb{C}P^n$, che contiene esattamente una cella di dimensione $2h$ per ogni $0 \leq h \leq n$.

ESEMPIO 21.1.6. In modo analogo, consideriamo lo spazio proiettivo a sinistra $\mathbb{H}P^n$. I suoi elementi sono le classi di equivalenza delle $(n+1)$ -uple di quaternioni non nulli, rispetto alla relazione

$$(q_0, q_1, \dots, q_n) \sim (u \cdot q_0, u \cdot q_1, \dots, u \cdot q_n), \quad \text{se } u \in \mathbb{H} \setminus \{0\}.$$

Indichiamo con $\pi : \mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{H}P^n$ la proiezione nel quoziente. Allora

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathbb{H}P^0 = \pi(e_0), \\ A_2 &= \mathbb{H}P^1 \setminus \mathbb{H}P^0 = \{\pi(q_0, q_1, 0, \dots, 0) \mid q_1 \neq 0\}, \\ &\dots \quad \dots \\ A_{2k} &= \mathbb{H}P^k \setminus \mathbb{H}P^{k-1} = \{\pi(q_0, \dots, q_k, 0, \dots, 0) \mid q_k \neq 0\}, \\ &\dots \quad \dots \\ A_{2n} &= \mathbb{H}P^n \setminus \mathbb{H}P^{n-1} = \{\pi(q_0, \dots, q_n) \mid q_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

sono le celle di una partizione \mathcal{P} di $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$, che contiene esattamente una cella di dimensione $2h$ per ogni $0 \leq h \leq n$.

ESEMPIO 21.1.7. Sia $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ il toro di dimensione n . Sia $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ ed indichiamo con $\pi : I^n \rightarrow T^n$ la restrizione della proiezione di \mathbb{R}^n sul quoziente T^n . Per ogni sottoinsieme F di $\{1, \dots, n\}$ sia

$$X_F = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in I^n \mid 0 < x_i < 1 \text{ se } i \in F, x_i = 0 \text{ se } i \notin F\}.$$

Allora $\pi(X_F) = A_F$ è una cella, la cui dimensione è il numero $|F|$ di elementi di F e $\mathcal{P} = \{A_F \mid F \subset \{1, \dots, n\}\}$ una decomposizione cellulare di T^n , che, per ogni intero m con $0 \leq m \leq n$, contiene $\binom{n}{m}$ celle di dimensione m .

ESEMPIO 21.1.8. La *Grassmanniana* $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ degli m -piani lineari di \mathbb{R}^n è una varietà analitica di dimensione $m(n-m)$. Una sua carta locale con centro nell' m -piano p_0 si ottiene fissando una base v_1, \dots, v_n di \mathbb{R}^n i cui primi m elementi siano una base di p_0 e facendo corrispondere alla matrice reale

$$M = \begin{pmatrix} x_{m+1,1} & \dots & x_{m+1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m-n) \times m}$$

il piano $p_M = \langle (v_1, \dots, v_m) + (v_{m+1}, \dots, v_n)M \rangle$, cioè

$$p_M = \left\langle v_1 + \sum_{j=m+1}^n x_{j,1} v_j, \dots, v_m + \sum_{j=m+1}^n x_{j,m} v_j \right\rangle.$$

La decomposizione cellulare canonica di $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ utilizza le *celle di Schubert*. Definiamole a partire dalla base canonica e_1, \dots, e_n di \mathbb{R}^n . Per ogni intero h con $1 \leq h \leq n$ indichiamo con $E_h = \langle e_1, \dots, e_h \rangle$ l' h -piano generato dai primi h vettori della base. Per ogni $j = 1, \dots, m$ ed ogni m -piano $p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$, definiamo

$$\mu_j(p) = \inf\{h \mid \dim_{\mathbb{R}}(p \cap E_h) \geq j\}.$$

Risulta così associata ad ogni $p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ una m -upla crescente di numeri interi

$$1 \leq \mu_1(p) < \mu_2(p) < \dots < \mu_m(p) \leq n.$$

Gli insiemi

$$A_{k_1, \dots, k_m} = \{p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \mid \mu_j(p) = k_j\},$$

al variare di (k_1, \dots, k_m) tra le m -uple crescenti d'interi con $1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n$, formano una decomposizione cellulare di $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$. La cella A_{k_1, \dots, k_m} ha dimensione

$$(21.2) \quad d_{k_1, \dots, k_m} = \dim_{\mathbb{R}}(A_{k_1, \dots, k_m}) = \left(\sum_{j=1}^m k_j \right) - \frac{m(m+1)}{2}.$$

Infatti, ogni elemento di p di A_{k_1, \dots, k_m} ha un'unica base della forma

$$\begin{cases} v_1 = e_{k_1} + \sum_{j < k_1} x_{1,j} e_j \\ \dots \\ v_h = e_{k_h} + \sum_{\substack{j < k_h \\ j \notin \{k_i | i < h\}}} x_{h,j} e_j \\ \dots \\ v_m = e_{k_m} + \sum_{\substack{j < k_m \\ j \notin \{k_i | i < m\}}} x_{m,j} e_j. \end{cases}$$

La scelta del vettore v_1 dipende linearmente da $k_1 - 1$ parametri, quella di v_2 da $k_2 - 2$ parametri ed, in generale, quella di v_h da $k_h - h$ parametri. Poiché $\sum_{h=1}^m (k_h - h)$ è la d_{k_1, \dots, k_m} definita dalla (35.2), questa descrizione di una base di $p \in A_{k_1, \dots, k_m}$ definisce un omeomorfismo di $\mathbb{R}^{d_{k_1, \dots, k_m}}$ con A_{k_1, \dots, k_m} .

La $A_{1, \dots, m}$ è l'unica cella di dimensione 0, mentre la $A_{(n-m+1), \dots, n}$ è l'unica di dimensione massima $m(n - m)$.

Questa costruzione generalizza quella descritta nell'Esempio 35.1.4 per lo spazio proiettivo $\mathbb{R}P^n = \mathbb{G}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

ESEMPIO 21.1.9. In modo analogo si possono trovare le decomposizioni cellulari delle grassmanniane complesse $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})$ e quaternioniche $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{H})$. La prima conterrà soltanto celle di dimensione pari, la seconda celle le cui dimensioni sono multipli di quattro.

LEMMA 21.1.10. *Siano A una cella di dimensione m di uno spazio topologico X e $\phi : D^m \rightarrow X$ una sua funzione caratteristica. Allora $\phi(D^m) \subset \bar{A}$. Se X è di Hausdorff, allora $\phi(D^m) = \bar{A}$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché ϕ è continua, $\phi^{-1}(X \setminus \bar{A})$ è un aperto di D^m . Poiché ogni aperto non vuoto di D^m contiene punti di B^m e $B^m \cap \phi^{-1}(X \setminus \bar{A}) = \emptyset$, abbiamo $\phi^{-1}(X \setminus \bar{A}) = \emptyset$ e quindi $\phi(D^m) \subset \bar{A}$. In particolare, $\phi(D^m) = \bar{A}$ se e soltanto se $\phi(D^m)$ è chiuso in X . L'ultima affermazione del lemma è perciò conseguenza del fatto che $\phi(D^m)$ è compatto in X e quindi chiuso in X quando X sia di Hausdorff. \square

21.2. Spazi cellulari

DEFINIZIONE 21.2.1. Si dice *spazio cellulare*, o *CW-complesso*, la coppia (X, \mathcal{P}) di uno spazio topologico di Hausdorff X e di una sua decomposizione cellulare \mathcal{P} che goda delle proprietà¹:

- (C) Per ogni $A \in \mathcal{P}$, l'insieme delle celle $B \in \mathcal{P}$ che intersecano la chiusura di A è finito.

¹La lettera (C) è l'iniziale di *closure finiteness* e (W) di *weak topology*. La topologia debole di un ricoprimento è la topologia meno fine per cui il ricoprimento sia fondamentale, cioè la topologia in cui un sottoinsieme è aperto o chiuso se e soltanto se è tale, per la topologia di sottospazio, la sua intersezione con ogni sottoinsieme del ricoprimento. In questo caso si considera il ricoprimento di X mediante le celle chiuse della sua decomposizione cellulare.

(W) Le celle chiuse formano un ricoprimento fondamentale di X , cioè $F \subset X$ è chiuso in X se e soltanto se $F \cap \bar{A}$ è chiuso per ogni cella $A \in \mathcal{P}$.

Uno spazio cellulare (X, \mathcal{P}) con una partizione cellulare \mathcal{P} formata da un numero finito di celle si dice *finito*.

Dalla definizione di decomposizione cellulare segue che *ogni cella chiusa \bar{A} di un CW-complesso (X, \mathcal{P}) è un'unione finita di celle di \mathcal{P} .*

Gli esempi precedenti ci mostrano che S^n , D^n , $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$, T^n , $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$, $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})$, $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{H})$ sono spazi cellulari finiti.

LEMMA 21.2.2. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso. Per ogni $Q \subset \mathcal{P}$, l'unione di celle chiuse $Y = \bigcup_{A \in Q} \bar{A}$ è chiusa in X .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $C \in \mathcal{P}$. Allora $\bar{C} = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_m$ è l'unione di $C_0 = C$ e di un numero finito di celle $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{P}$ di dimensioni inferiori a quella di C . Poiché Y è unione di celle chiuse, contiene la chiusura di ogni cella che la interseca. Quindi

$$Y \cap \bar{C} = \bigcup \{C_h \mid 0 \leq h \leq m, C_h \subset Y\} = \bigcup \{\bar{C}_h \mid 0 \leq h \leq m, C_h \subset Y\}$$

e perciò l'intersezione di Y con qualsiasi cella chiusa è un chiuso (perché unione finita di chiusi). Poiché per la definizione della topologia di un complesso cellulare $\{\bar{C} \mid C \in \mathcal{P}\}$ è un ricoprimento fondamentale, Y è chiuso in X . \square

DEFINIZIONE 21.2.3. Se \mathcal{P} è una decomposizione cellulare di uno spazio topologico X , possiamo considerare su X la topologia meno fine per cui $\{\bar{C} \mid C \in \mathcal{P}\}$ sia un ricoprimento fondamentale. Questa topologia è in generale più fine della topologia originaria, di cui si dice essere *l'indebolimento cellulare*.

ESEMPIO 21.2.4. Sia X il sottospazio di \mathbb{R}^3 definito da:

$$X = \{x = (x_0, x_1, x_2) \in S^3 \mid mx_1 = nx_2 \text{ con } (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}.$$

Una decomposizione cellulare \mathcal{P} di X consiste delle celle di dimensione 1:

$$\begin{cases} A_{m,n} = \{x \in X \mid mx_1 = nx_2, x_1 > 0\} & m > 0, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, (m : |n|) = 1 \\ B_{m,n} = \{x \in X \mid mx_1 = nx_2, x_1 < 0\} & m > 0, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, (m : |n|) = 1 \\ C_+ = \{x \in X \mid x_2 = 0, x_1 > 0\} \\ C_- = \{x \in X \mid x_2 = 0, x_1 < 0\} \\ D_+ = \{x \in X \mid x_1 = 0, x_2 > 0\} \\ D_- = \{x \in X \mid x_1 = 0, x_2 < 0\} \end{cases}$$

e nelle due celle $\{(1, 0, 0)\}$ e $\{(-1, 0, 0)\}$, di dimensione 0. Osserviamo che la topologia debole di X associata a questa decomposizione cellulare è strettamente più fine di quella di sottospazio. Ad esempio, l'unione Z di una qualsiasi cella di dimensione uno e del sottoinsieme $Y = \{x \in X \mid |x_0| > 1/2\}$ è aperta per la topologia debole, ma non per quella di sottospazio.

PROPOSIZIONE 21.2.5. *Uno spazio cellulare (X, \mathcal{P}) è finito se e soltanto se X è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché tutte le celle chiuse sono compatte, chiaramente uno spazio cellulare finito è compatto perché unione finita di compatti.

Viceversa, supponiamo che X sia compatto. Per ogni cella $A \in \mathcal{P}$ fissiamo un punto $x_A \in A$ e consideriamo l'insieme $K = \{x_A \mid A \in \mathcal{P}\}$. Ogni suo sottoinsieme interseca ogni cella chiusa al più in un numero finito di punti. Quindi ogni sottoinsieme di K è chiuso in X e pertanto K è un sottospazio chiuso di X su cui X induce la topologia discreta. Poiché X è compatto, anche K è compatto perché sottospazio chiuso di uno spazio compatto e quindi finito perché discreto: questo ci dimostra che \mathcal{P} è finito. \square

DEFINIZIONE 21.2.6. La *dimensione* di uno spazio cellulare (X, \mathcal{P}) è l'estremo superiore delle dimensioni delle celle di \mathcal{P} . Conveniamo che \emptyset sia cellulare di dimensione -1 .

Sia (X, \mathcal{P}) uno spazio cellulare. Se $Y \subset X$, indichiamo con $\mathcal{P}(Y)$ l'insieme delle celle di \mathcal{P} contenute in Y :

$$\mathcal{P}(Y) = \{A \in \mathcal{P} \mid A \subset Y\}.$$

Se $Y = \bigcup \mathcal{P}(Y)$ e la $\mathcal{P}(Y)$ è una decomposizione cellulare di Y , diciamo che $(Y, \mathcal{P}(Y))$ è un *sottospazio cellulare* o un *sotto-CW-complesso* di (X, \mathcal{P}) .

Abbiamo:

PROPOSIZIONE 21.2.7. *Sia (X, \mathcal{P}) uno spazio cellulare.*

- (i) *Per ogni $A \in \mathcal{P}$, la coppia $(\bar{A}, \mathcal{P}(\bar{A}))$ è un sottospazio cellulare finito di (X, \mathcal{P}) .*
- (ii) *Sia $Y \subset X$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $(Y, \mathcal{P}(Y))$ sia un sottospazio cellulare di (X, \mathcal{P}) è che, per ogni $y \in Y$, Y contenga la chiusura della cella di \mathcal{P} che contiene y . In particolare, tutti i sottospazi cellulari di X sono chiusi.*
- (iii) *Sia m un intero non negativo e sia $\mathcal{P}_{(m)} = \{A \in \mathcal{P} \mid \dim(A) \leq m\}$ l'insieme delle celle di dimensione minore o uguale ad m . Il sottospazio $X_m = \bigcup \mathcal{P}_{(m)}$ è chiuso in X ed $(X_m, \mathcal{P}_{(m)})$ è un sottospazio cellulare di (X, \mathcal{P}) .*

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue dalla proprietà (2) delle decomposizioni cellulari.

Dimostriamo la (ii). Se $(Y, \mathcal{P}(Y))$ è un sottospazio cellulare di (X, \mathcal{P}) , allora, per la definizione di cella e per il fatto che Y è di Hausdorff, Y deve contenere la chiusura di ogni cella di $\mathcal{P}(Y)$ e quindi di ciascuna cella che contiene un suo punto.

Viceversa, se Y contiene la chiusura di ogni cella che contiene un suo punto, la $\mathcal{P}(Y)$ è una decomposizione cellulare di Y .

Se \bar{A} , con $A \in \mathcal{P}$, è una cella chiusa e $\bar{A} \cap Y \neq \emptyset$, l'intersezione $\bar{A} \cap Y$ è l'unione delle chiusure delle celle di \mathcal{P} contenute in $\bar{A} \cap Y$ ed è quindi chiusa perché unione finita di chiusi. Ne segue che Y è un sottospazio chiuso di X .

La (iii) segue facilmente dalla (ii): infatti la chiusura di ogni cella di dimensione h è unione di celle di dimensione minore o uguale di h e dunque X_m contiene la chiusura di ogni cella che contiene un suo punto. \square

DEFINIZIONE 21.2.8. Il sottospazio cellulare $(X_m, \mathcal{P}_{(m)})$, con
 $\mathcal{P}_{(m)} = \{A \in \mathcal{P} \mid \dim(A) \leq m\}$ ed $X_m = \bigcup \mathcal{P}_{(m)}$,
 si dice lo *scheletro di dimensione m* di (X, \mathcal{P}) .

PROPOSIZIONE 21.2.9. *Ogni spazio cellulare è normale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (X, \mathcal{P}) un CW -complesso. Per ipotesi X è uno spazio di Hausdorff. Basterà quindi dimostrare che ogni coppia di chiusi disgiunti A, B di X ammette una funzione di Urysohn. A questo scopo definiremo per induzione funzioni continue $f_m : X_m \rightarrow I$ sullo scheletro m -dimensionale di X in modo che f_m sia su X_m una funzione di Urysohn della coppia $(A \cap X_m, B \cap X_m)$. Se $m = 0$, poiché X_0 è discreto, possiamo porre $f_0(x)$ uguale a 0 su $A \cap X_0$, a 1 su $B \cap X_0$ e ad $1/2$ sui punti di X_0 che non appartengono né ad A né a B . Supponiamo ora di aver definito $f_m : X_m \rightarrow I$ con le proprietà richieste. Per ogni cella $C \in \mathcal{P}_{m+1}$, definiamo una funzione g_C su $\bar{C} \cap (X_m \cup A \cup B)$ mediante :

$$g_C(x) = \begin{cases} f_m(x) & \text{se } x \in X_m \cap \bar{C} \\ 0 & \text{se } x \in A \cap \bar{C} \\ 1 & \text{se } x \in B \cap \bar{C}. \end{cases}$$

La g_C è ben definita e continua. Poiché \bar{C} è uno spazio normale, in quanto di Hausdorff e compatto, la g_C si estende ad un'applicazione continua $\tilde{g}_C : \bar{A} \rightarrow I$. Possiamo quindi definire f_{m+1} ponendo $f_{m+1}(x) = \tilde{g}_C(x)$ su \bar{C} . Questa è ben definita perché l'intersezione di celle distinte di \mathcal{P}_{m+1} è unione di celle di \mathcal{P}_m e perciò contenuta in X_m . Questo si dice che tutte le \tilde{g}_C sono uguali ad f_m , e quindi uguali tra loro, nei punti in cui si intersecano i loro domini di definizione. Poiché $\{\bar{C} \mid C \in \mathcal{P}_{m+1}\}$ è un ricoprimento fondamentale di X_{m+1} , ne segue che $f_{m+1} : X_{m+1} \rightarrow I$ è continua, coincide con f_m su X_m ed è una funzione di Urysohn della coppia $(A \cap X_{m+1}, B \cap X_{m+1})$.

Infine, utilizzando la successione $\{f_m : X_m \rightarrow I\}$, definiamo $f : X \rightarrow I$ ponendo $f(x) = f_m(x)$ se $x \in X_m$. La f è ben definita ed è continua perché lo è la sua restrizione ad ogni cella chiusa. Questa f è una funzione di Urysohn della coppia (A, B) . \square

PROPOSIZIONE 21.2.10. *Se \mathcal{P} è una decomposizione cellulare localmente finita di uno spazio di Hausdorff X , allora (X, \mathcal{P}) è uno spazio cellulare.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti $\{\bar{A} \mid A \in \mathcal{P}\}$ è in questo caso un ricoprimento chiuso localmente finito e quindi fondamentale. \square

DEFINIZIONE 21.2.11. Uno spazio cellulare (X, \mathcal{P}) si dice *localmente finito* se \mathcal{P} è localmente finita.

Abbiamo :

PROPOSIZIONE 21.2.12. *In uno spazio cellulare localmente finito (X, \mathcal{P}) , ogni unione Y di celle chiuse è un sottoinsieme chiuso di X e $(Y, \mathcal{P}(Y))$ è un sottospazio cellulare di (X, \mathcal{P}) .* \square

PROPOSIZIONE 21.2.13. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso. Ogni compatto K di X interseca al più un numero finito di celle di \mathcal{P} .*

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathcal{P}_K l'insieme delle celle in \mathcal{P} che intersecano K . Per ogni $C \in \mathcal{P}$, scegliamo un punto $x_C \in K \cap C$. Il sottoinsieme $T = \{x_C \mid C \in \mathcal{P}_K\}$ è chiuso e discreto in X . Poiché è contenuto in K è anche compatto. Essendo un compatto con la topologia discreta, è finito, quindi \mathcal{P}_K è finito. \square

PROPOSIZIONE 21.2.14. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso. Allora X è connesso se e soltanto se è connesso per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia x_0 un punto di X e sia Y il sottospazio di X che consiste dei punti che si possono congiungere ad x_0 con un arco. Poiché tutte le celle, sia aperte che chiuse, di X sono connesse per archi, $(Y, \mathcal{P}(Y))$ è un sottospazio cellulare di (X, \mathcal{P}) . In modo analogo si dimostra che $(\bar{C}Y, \mathcal{P}(\bar{C}Y))$ è anch'esso un sottospazio cellulare di (X, \mathcal{P}) , in quanto la chiusura di ogni cella A che non interseca Y non interseca neanche Y . Quindi $\bar{C}Y$ è chiuso ed Y è aperto e chiuso. \square

PROPOSIZIONE 21.2.15. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso.*

- (1) *Un sottospazio Z di X è unione di componenti connesse di X se e soltanto se contiene ogni cella chiusa che lo intersechi.*
- (2) *Per ogni $m \geq 1$ e per ogni componente connessa Y di X , lo scheletro m -dimensionale Y_m di $(Y, \mathcal{P}(Y))$ è connesso.*
- (3) *In particolare, X è connesso se e soltanto se X_1 è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. (1). Se C è un sottoinsieme connesso di X ed $A \in \mathcal{P}$ è una cella con $\bar{A} \cap C \neq \emptyset$, allora anche $C \cup \bar{A}$ è connesso, perché unione di due connessi che s'intersecano. Quindi, se il sottospazio Z di X è unione di componenti connesse di X , contiene ogni cella chiusa che lo intersechi.

Viceversa, se Z contiene ogni cella chiusa che lo intersechi, sia Z che il suo complementare sono chiusi. Quindi Z è aperto e chiuso ed è perciò unione di componenti connesse di X .

(2). Sia T una componente connessa di Y_m e definiamo per ricorrenza :

$$\begin{cases} Z_m = T \\ Z_h = \bigcup \{\bar{A} \mid A \in \mathcal{P}, \bar{A} \cap Z_{h-1} \neq \emptyset\} \quad \text{per } h > m. \end{cases}$$

Allora $Z = \bigcup_{h \geq m} Z_h$ è connesso e $(Z, \mathcal{P}(Z))$ è un sotto-CW-complesso di (X, \mathcal{P}) . Per costruzione Z contiene tutte le celle chiuse che lo intersecano e quindi è unione di componenti connesse di X . Essendo connesso, coincide con una componente connessa di X ed è perciò uguale a Y .

(3). Se X è connesso, per (2) anche X_1 è connesso. Viceversa, poiché la chiusura di ogni cella di dimensione $m \geq 1$ contiene almeno una cella di dimensione 0, la chiusura di ogni cella in \mathcal{P} interseca X_1 . Perciò X è connesso se X_1 è connesso. \square

PROPOSIZIONE 21.2.16. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso.*

- (a) *X è separabile se e soltanto se \mathcal{P} è al più numerabile.*
- (b) *X soddisfa al primo assioma di numerabilità se e soltanto se \mathcal{P} è localmente finita.*

- (c) X è metrizzabile se e soltanto se \mathcal{P} è localmente finita.
 (d) X è a base numerabile se e soltanto se \mathcal{P} è al più numerabile e localmente finito.

DIMOSTRAZIONE. (a). Supponiamo che X sia separabile e sia D un suo sottoinsieme denso e numerabile. Per ogni $x \in D$ sia A_x la cella in \mathcal{P} che contiene x . Dico che $X = \bigcup_{x \in D} \bar{A}_x$. Infatti il secondo membro è un chiuso (perché unione di celle chiuse) che contiene D e coincide quindi con X . Poiché ogni cella chiusa si decompone in un numero finito di celle, ne segue che \mathcal{P} è al più numerabile.

Supponiamo viceversa che \mathcal{P} sia al più numerabile. Per ogni $A \in \mathcal{P}$ possiamo fissare un sottoinsieme D_A di A al più numerabile e denso in A . Allora $D = \bigcup_{A \in \mathcal{P}} D_A$ è numerabile ed è denso in X perché è denso in ciascuna cella e quindi in ciascuna cella chiusa di X .

(b). Supponiamo che \mathcal{P} sia localmente finita. Sia Q l'insieme degli $A \in \mathcal{P}$ per cui $\bar{A} \ni x$. L'insieme Q è finito. Dico che l'unione $U = \bigcup Q$ di tutte le celle la cui chiusura contiene x è un aperto di X . Sia infatti C una qualsiasi cella in \mathcal{P} . Se $x \notin \bar{C}$, allora $\bar{C} \cap U = \emptyset$. Se $x \in \bar{C}$, allora $\bar{C} \cap U \supset C$. Il complementare di C in \bar{C} è un'unione finita $C_1 \cup \dots \cup C_m$ di celle in \mathcal{P} , ciascuna di dimensione minore di quella di C . Abbiamo allora $U \cap \bar{C} = \bar{C} \setminus \bigcup \{C_i \mid 1 \leq i \leq m, C_i \not\ni x\}$ e quindi $U \cap \bar{C}$ è aperto in \bar{C} . Questo dimostra che U è un aperto di X . Osserviamo ora che $(\bar{U}, \mathcal{P}(\bar{U}))$ è un sottospazio cellulare finito di (X, \mathcal{P}) . In particolare è uno spazio compatto di Hausdorff separabile (per il punto (a)). Ne segue che \bar{U} , e a maggior ragione il suo sottospazio aperto U , sono a base numerabile. In particolare x ha in U , e perciò anche in X , un sistema fondamentale d'intorni numerabile.

Supponiamo viceversa che $x \in X$ ammetta un sistema fondamentale d'intorni numerabile $\{U_n\}$ e supponiamo per assurdo che \mathcal{P} non sia localmente finito in x , che cioè ogni intorno U_n intersechi un numero infinito di celle di \mathcal{P} . Possiamo allora costruire una successione x_n con $x_n \in U_n \setminus \{x\}$ tale che elementi della successione corrispondenti ad indici distinti appartengano a celle distinte. Ogni cella chiusa conterrà allora al più un numero finito di elementi della successione $\{x_n\}$. Quindi l'insieme S degli elementi della successione è un sottoinsieme chiuso di X e $X \setminus S$ un intorno aperto di x in X che non contiene nessuno degli intorni $\{U_n\}$, contraddicendo il fatto che questo fosse un sistema fondamentale d'intorni di x in X . Quindi \mathcal{P} dev'essere localmente finita in x , e questo completa la dimostrazione del punto (b).

(c). Se X è metrizzabile soddisfa al primo assioma di numerabilità e quindi un CW -complesso (X, \mathcal{P}) con X metrizzabile ha una decomposizione cellulare \mathcal{P} localmente finita per il punto (b).

Per dimostrare il viceversa, possiamo limitarci a considerare il caso in cui X sia connesso. Dimostriamo innanzi tutto che \mathcal{P} è al più numerabile. A questo scopo fissiamo $x \in X$ e definiamo per ricorrenza:

$$\begin{cases} Y_0 = \bigcup \{\bar{A} \mid A \in \mathcal{P}, \bar{A} \ni x\} \\ Y_m = \bigcup \{\bar{A} \mid A \in \mathcal{P}, \bar{A} \cap Y_{m-1} \neq \emptyset\} & \text{se } m > 0. \end{cases}$$

Abbiamo $Y_m \subset Y_{m+1}$ per ogni m e l'ipotesi della finitezza locale implica che ciascuno degli $(Y_m, \mathcal{P}(Y_m))$ è un sottospazio cellulare finito di (X, \mathcal{P}) . Inoltre, per costruzione, $Y = \bigcup Y_m$ è un sottospazio cellulare di (X, \mathcal{P}) e Y , essendo una componente connessa di X , coincide con X . Poiché ogni $(Y_m, \mathcal{P}(Y_m))$ è finito, $(Y, \mathcal{P}(Y)) = (X, \mathcal{P})$ è numerabile. Quindi X è metrizzabile perché è uno spazio normale a base numerabile (è separabile per (a) e soddisfa al primo assioma di numerabilità per (b), onde soddisfa anche al secondo assioma di numerabilità). \square

21.3. Attaccamenti

Descriviamo in questo paragrafo la costruzione topologica dell'attaccamento, che utilizzeremo nel seguito per descrivere le proprietà dei CW-compleksi.

DEFINIZIONE 21.3.1. Siano X_1 ed X_2 due spazi topologici, A un sottospazio di X_1 e $\phi : A \rightarrow X_2$ un'applicazione continua. Definiamo sull'unione disgiunta $X_1 \sqcup X_2$ una relazione d'equivalenza identificando i punti di A con quelli di X_2 che ad essi corrispondono mediante l'applicazione ϕ :

$$x \sim y \iff \begin{cases} x = y, & \text{oppure} \\ x \in A \text{ ed } y = \phi(x), & \text{oppure} \\ y \in A \text{ ed } x = \phi(y). \end{cases}$$

Il quoziente $(X_1 \sqcup X_2) / \sim$ si indica con $X_2 \cup_{\phi} X_1$ e si dice *ottenuto attaccando X_1 ad X_2 mediante l'applicazione ϕ* .

Le applicazioni canoniche $p_1 : X_1 \rightarrow X_2 \cup_{\phi} X_1$ e $j_2 : X_2 \rightarrow X_2 \cup_{\phi} X_1$, ottenute componendo l'inclusione naturale con la proiezione nel quoziente, sono entrambe continue. La seconda è un'immersione topologica (cioè un omeomorfismo con l'immagine).

LEMMA 21.3.2. Siano X_1 ed X_2 due spazi topologici, sia A un sottospazio di X_1 e $\phi : A \rightarrow X_2$ un'applicazione continua. Allora $\{p_1(X_1), j_2(X_2)\}$ è un ricoprimento fondamentale di $X_2 \cup_{\phi} X_1$.

DIMOSTRAZIONE. Sia U un sottoinsieme di $X_2 \cup_{\phi} X_1$ tale che $U \cap p_1(X_1)$ sia un aperto di $p_1(X_1)$ ed $U \cap j_2(X_2)$ un aperto di $j_2(X_2)$ per le topologie di sottospazio. Allora $p_1^{-1}(U)$ è aperto in X_1 e $j_2^{-1}(U)$ è aperto in X_2 . Quindi $p_1^{-1}(U) \sqcup j_2^{-1}(U)$ è un aperto di $X_1 \sqcup X_2$, saturo rispetto alla relazione d'equivalenza " \sim " e perciò U , immagine d'un aperto saturo nella proiezione sul quoziente, è aperto in $X_2 \cup_{\phi} X_1$. Ciò dimostra che il ricoprimento $\{p_1(X_1), j_2(X_2)\}$ è fondamentale. \square

PROPOSIZIONE 21.3.3. Se X_1, X_2 sono spazi normali, $A \subset X_1$ un chiuso e $\phi : A \rightarrow X_2$ un'applicazione continua, allora $X_2 \cup_{\phi} X_1$ è uno spazio normale.

DIMOSTRAZIONE. L'immagine inversa in $X_2 \sqcup X_1$ di un punto p di $X_2 \cup_{\phi} X_1$ è l'unione disgiunta $j_2^{-1}(p) \sqcup p_1^{-1}(p)$. Per verificare che i punti sono chiusi è quindi sufficiente verificare separatamente che sono chiuse le sue immagini inverse mediante j_2 e p_1 . Abbiamo:

$$j_2^{-1}(p) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } p \in (X_2 \cup_{\phi} X_1) \setminus j_2(X_2), \\ \text{un punto}, & \text{se } p \in j_2(X_2), \end{cases}$$

$$p_1^{-1}(p) = \begin{cases} \text{un punto} & \text{se } p \in (X_2 \cup_{\phi} X_1) \setminus J_2(X_2) \\ \phi^{-1}(J_2^{-1}(p)) & \text{se } p \in J_2(X_2). \end{cases}$$

Ciò dimostra che, se $\pi : X_1 \sqcup X_2 \rightarrow X_2 \cup_{\phi} X_1$ è la proiezione nel quoziente, allora $\pi^{-1}(p) = p_1^{-1}(p) \sqcup J_2^{-1}(p)$ è chiuso in $X_1 \sqcup X_2$. Quindi $\{p\}$ è chiuso: ciò dimostra che $X_2 \cup_{\phi} X_1$ soddisfa l'assioma T_1 .

Per la normalità, è allora sufficiente verificare che ogni coppia (F_0, F_1) di chiusi disgiunti di $X_2 \cup_{\phi} X_1$ ammette una funzione di Uryshon. Poiché X_2 è normale, esiste una funzione continua $f_2 : X_2 \rightarrow I$ con $J_2^{-1}(F_0) \subset f_2^{-1}(0)$ e $J_2^{-1}(F_1) \subset f_2^{-1}(1)$.

Il sottoinsieme $F = A \cup p_1^{-1}(F_0 \cup F_1)$ è chiuso in X_1 e la funzione:

$$f_1(x) = \begin{cases} f_2(\phi(x)), & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \in p_1^{-1}(F_0), \\ 1, & \text{se } x \in p_1^{-1}(F_1), \end{cases}$$

è continua sul chiuso F . Per il teorema d'estensione di Uryshon, esiste una funzione continua $\tilde{f}_1 : X_1 \rightarrow I$ che prolunga f_1 . Definiamo allora una funzione di Uryshon della coppia (F_0, F_1) mediante:

$$f(x) = \begin{cases} f_2(y) & \text{se } x = J_2(y) \text{ con } y \in X_2, \\ \tilde{f}_1(y) & \text{se } x = p_1(y) \text{ con } y \in X_1. \end{cases}$$

La f è ben definita perché, per costruzione, le due definizioni coincidono quando $x \in \phi(A)$. Infine, poiché $p_1^*f = \tilde{f}_1$ e $J_2^*f = f_2$ sono continue, anche f è continua ed è quindi una funzione di Uryshon della coppia (F_0, F_1) . \square

Nel seguito, per semplicità di notazione, identificheremo X_2 e il sottospazio $J_2(X_2)$ di $X_2 \cup_{\phi} X_1$.

21.4. Applicazioni cellulari ed attaccamenti di celle

Siano (X, \mathcal{P}) ed (Y, \mathcal{Q}) due CW-compleksi.

DEFINIZIONE 21.4.1. Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice *cellulare* se è continua e trasforma lo scheletro k -dimensionale di X nello scheletro k -dimensionale di Y : $f(X_k) \subset Y_k$ per ogni intero $k \geq 0$.

Come conseguenza immediata della Proposizione 35.2.13 otteniamo:

LEMMA 21.4.2. *Siano (X, \mathcal{P}) ed (Y, \mathcal{Q}) due CW-compleksi ed $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione cellulare. Allora l'immagine di una cella di dimensione m di (X, \mathcal{P}) è unione di un numero finito di celle di dimensione minore o uguale ad m di Y .* \square

Siano (X, \mathcal{P}) un CW-complesso, A una sua cella m -dimensionale, $\phi_A : B^m \rightarrow X$ la sua funzione caratteristica, $\bar{\phi}_A : D^m \rightarrow X$ quella della cella chiusa \bar{A} . La restrizione di $\bar{\phi}_A$ alla frontiera S^{m-1} di D^m è un'applicazione $S^{m-1} \ni x \rightarrow \bar{\phi}_A(x) \in X_{m-1}$. Sarà conveniente nel seguito scrivere B_A^m , D_A^m ed S_A^m per indicare la palla, il disco e la frontiera del disco associati alla cella A .

Gli spazi cellulari si possono ottenere per attaccamenti successivi di celle. Esprimiamo questo fatto nel seguente enunciato

TEOREMA 21.4.3. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso. Indichiamo con \mathcal{P}_m l'insieme delle sue celle di dimensione m e, per ogni $A \in \mathcal{P}_m$, fissiamo una funzione caratteristica $\phi_A : B_A^m \rightarrow X$ di A . Indichiamo ancora con $\chi_A : S_A^{m-1} \rightarrow X_{m-1}$ la restrizione alla frontiera della $\bar{\phi}_A : D^m \rightarrow X$. Indichiamo con*

$$(21.3) \quad \chi_{m-1} : \bigsqcup_{A \in \mathcal{P}_m} S_A^{m-1} \rightarrow X_{m-1}$$

l'applicazione, definita sulla somma disgiunta di tante sfere $(m-1)$ dimensionali quante sono le celle di \mathcal{P}_m , che coincide con χ_A sull'elemento S_A^{m-1} dell'unione disgiunta. L'applicazione

$$(21.4) \quad X_{m-1} \cup_{\chi_{m-1}} \bigsqcup_{A \in \mathcal{P}_m} D_A^m \longrightarrow X_m$$

definita come l'inclusione $X_{m-1} \hookrightarrow X_m$ su X_{m-1} , e che coincide con l'applicazione caratteristica ϕ_A su $B_A^m \subset D_A^m$, è un omeomorfismo. \square

21.5. Prolungamenti differenziabili di funzioni continue

Dimostriamo in questo paragrafo un risultato di prolungamento che ci sarà utile per lo studio dell'omotopia degli spazi cellulari.

LEMMA 21.5.1. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^m ed F un chiuso di Ω . Esiste allora una funzione $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ con $\psi = 0$ su F e $\psi > 0$ su $\Omega \setminus F$.*

DIMOSTRAZIONE. I punti con coordinate razionali che appartengono ad $\Omega \cap \mathbb{C}F$ sono un'infinità numerabile. Elenchiamoli in una successione $\{x_n\}_{n \geq 1}$. Per ogni n sia $r_n = \text{dist}(x_n, F \cup \mathbb{C}\Omega)$ e sia χ_n la funzione di classe \mathcal{C}^∞

$$\chi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\exp(|x - x_n|^2 - r_n^2)} & \text{se } |x - x_n| < r_n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Possiamo poi scegliere una successione di interi strettamente positivi $\{c_n\}$ tale che, per ogni n ,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} \sum_{|\alpha| \leq n} |D^\alpha \chi_n(x)| < 2^{-n} c_n^{-1}.$$

Chiaramente la somma della serie $\chi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(x)$ definisce una funzione di classe \mathcal{C}^∞ su Ω , nulla su F e positiva sul suo complementare. \square

Dimostriamo ora un complemento del Lemma di estensione di Uryshon per funzioni a valori in \mathbb{R}^n .

LEMMA 21.5.2. *Sia X uno spazio topologico normale, A un chiuso di X ed $f : A \rightarrow C$ una funzione continua a valori in un convesso localmente chiuso C di \mathbb{R}^n . Esiste allora un'applicazione continua $\tilde{f} : X \rightarrow C$ tale che $\tilde{f} = f$ su A .*

DIMOSTRAZIONE. A meno di sostituire ad \mathbb{R}^n il suo più piccolo sottospazio affine che contiene C , possiamo supporre che C abbia parte interna non vuota. Se $C = \mathbb{R}^n$, allora otteniamo la tesi applicando il lemma di estensione di Uryshon ad ogni componente scalare dell'applicazione f . In generale, possiamo definire

un'immersione $\phi : C \rightarrow I^n$ la cui immagine $\phi(C)$ sia un aperto di I^n che contiene $\{x \in I^n \mid 0 < x_j < 1 \text{ per } j = 1, \dots, n\}$. Applicando il Lemma di estensione Urysohn a ciascuna componente di $\phi \circ f$, otteniamo una $g \in \mathcal{C}(X, I^n)$ con $g|_A = \phi \circ f$. Osserviamo ora che $B = g^{-1}(I^n \cap \mathring{C}\phi(C))$ è un chiuso di X disgiunto da A . Se $\chi \in \mathcal{C}(X, I)$ è una funzione che vale 0 su A ed 1 su B , ed η è un punto interno di I^n , allora la

$$\tilde{g}_A(x) = g(x) + \chi(x)(\eta - g(x))$$

è una funzione continua su X , che coincide con $\phi \circ f$ su A e la cui immagine è contenuta in $\phi(C)$. Possiamo quindi definire $\tilde{f} = \phi^{-1} \circ \tilde{g}$. \square

LEMMA 21.5.3. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^m , F un chiuso di Ω , C un convesso localmente chiuso di \mathbb{R}^n ed $f : F \rightarrow C$ una funzione continua a valori in C . Esiste allora una funzione continua $\tilde{f} : \Omega \rightarrow C$, con $\tilde{f}|_F = f$ e la cui restrizione ad $\Omega \cap \mathring{C}F$ sia di classe \mathcal{C}^∞ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $A = \Omega \cap \mathring{C}F$. Per il Lemma d'estensione di Uryshon, possiamo prolungare f a una funzione F continua su Ω ed a valori in C . Fissiamo poi una funzione $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ con $\psi > 0$ su A e $\psi = 0$ su $F \cup \mathring{C}\Omega$ e poniamo, per $x \in \Omega$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in F \\ [\psi(x)]^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} F(y) \chi([\psi(x)]^{-1}(x-y)) dy & \text{se } x \in A, \end{cases}$$

dove la χ è una funzione non negativa, di classe \mathcal{C}^∞ su \mathbb{R}^m , con supporto in D^m e $\int_{\mathbb{R}^m} \chi(y) dy = 1$. Per i teoremi di derivazione sotto il segno d'integrale, la \tilde{f} così definita è di classe \mathcal{C}^∞ su A . Resta da verificare che è continua nei punti di bA . Osserviamo a questo scopo che la F , essendo continua, è uniformemente continua su \bar{A} . Quindi, fissato un numero reale $\epsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che $|F(x) - F(y)| < \epsilon$ se $|x - y| < \delta$ e $x, y \in \bar{A}$. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x) - F(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} g(x)^{-m} [F(y) - F(x)] \chi([g(x)]^{-1}(x-y)) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m} g(x)^{-m} |F(y) - F(x)| \chi([g(x)]^{-1}(x-y)) dy \\ &< \epsilon \quad \text{se } 0 < g(x) < \delta. \end{aligned}$$

Quindi, se $\{x_n\}$ è una successione di punti di A che converge ad un punto $x \in bA$, abbiamo:

$$|f(x) - \tilde{f}(x_n)| \leq |f(x) - F(x_n)| + |F(x_n) - \tilde{f}(x_n)| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

in quanto il primo addendo a secondo membro tende a zero perché F è un'estensione continua di f , mentre il secondo tende a zero perché $g(x_n)$ converge a zero per $x_n \rightarrow x \in bA$. Ciò completa la dimostrazione. \square

21.6. Approssimazione cellulare

Dimostriamo un lemma relativo all'attaccamento di celle.

LEMMA 21.6.1. *Sia Y uno spazio topologico, m un intero positivo, $\phi : S^{m-1} \rightarrow Y$ un'applicazione continua ed $X = Y \cup_{\phi} D^m$. Se k è un intero positivo con $k < m$, allora ogni $f \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X, Y)$ è S^{k-1} -omotopa ad un'applicazione a valori in Y .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varpi : D^m \rightarrow X$ la restrizione a D^m della proiezione nel quoziente $D^m \sqcup Y \rightarrow X$. Essa definisce un omeomorfismo di B^m sull'aperto $\Omega = \mathring{C}Y$ di X . Sia $f \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X, Y)$. Se fosse $f(D^k) \not\supset \Omega$, a meno di omeomorfismi potremmo ricondurci al caso in cui $\varpi(0) \notin f(D^k)$. L'applicazione:

$$\phi(y, t) = \begin{cases} \varpi([1-t]z + t[z/|z|]) & \text{se } y = \varpi(z) \text{ con } z \in B^m \setminus \{0\} \\ y & \text{se } y \in Y \end{cases}$$

è una retrazione di deformazione di $X \setminus \{\varpi(0)\}$ su Y . Allora la $F(x, t) = \phi(f(x), t)$ è una S^{k-1} -omotopia di f con un'applicazione a valori in Y .

Consideriamo ora il caso generale.

Poiché $f(S^{k-1}) \subset Y$, l'insieme $A = f^{-1}(\{\varpi(z) \mid |z| < 1/2\})$ è un sottoinsieme aperto relativamente compatto in $B^k \subset D^k$. Per il Lemma 35.5.3 esiste una funzione $g : \bar{A} \rightarrow B^m$, di classe \mathcal{C}^∞ nei punti di A , con $g(x) = \varpi^{-1}(f(x))$ sulla frontiera ∂A di A . La:

$$G(x, t) = \begin{cases} \varpi(tg(x) + [1-t]\varpi^{-1}f(x)) & \text{se } x \in \bar{A}, \\ f(x) & \text{se } x \in D^k \setminus A, \end{cases}$$

è una S^{k-1} -omotopia tra f ed un'applicazione continua

$$h : D^k \rightarrow X, \quad \text{con } h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D^k \setminus A \\ \varpi(g(x)) & \text{se } x \in \bar{A}. \end{cases}$$

Abbiamo perciò $h(D^k) \subset Y \cup \varpi^{-1}(\{|z| \geq 1/2\}) \cup \varpi(g(A))$. Per il Lemma di Sard, poiché abbiamo supposto che $k < m$, l'insieme $\varpi(g(A))$ è di prima categoria in $\Omega = \varpi(B^m)$. Quindi l'immagine di g non contiene $\varpi(\{|z| < 1/2\})$ e quindi non contiene Ω . Allora, per la prima parte della dimostrazione, la h è S^{k-1} -omotopa ad un'applicazione a valori in Y . \square

Da questo lemma ricaviamo la

PROPOSIZIONE 21.6.2. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso. Sia k un intero non negativo. Ogni $f \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X, X_{k-1})$ è S^{k-1} -omotopa ad una $g \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X_k, X_{k-1})$.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo compatto, $f(D^k)$ è contenuto in un sottospazio cellulare finito di (X, \mathcal{P}) . Possiamo quindi supporre che (X, \mathcal{P}) sia finito. Se \mathcal{P} non contiene celle di dimensione maggiore di k , la tesi è banalmente verificata. Supponiamo quindi che \mathcal{P} contenga una cella Ω di dimensione massimale $m > k$. Abbiamo allora, per $Y = X \setminus \Omega$, $X = Y \cup_{\phi} D^m$ per un'opportuna funzione d'attaccamento $\phi : S^{m-1} \rightarrow Y$. Per il Lemma precedente, la nostra f è allora S^{k-1} -omotopa ad un'applicazione continua f_1 a valori in Y . Iterando quest'argomento un numero finito di volte, otteniamo la tesi. \square

Come conseguenza, otteniamo il:

TEOREMA 21.6.3. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso. Fissiamo un punto $x_0 \in X$ per cui $\{x_0\}$ sia una 0-cellula. Allora, per ogni intero $k \geq 0$ l'applicazione (è un omomorfismo di gruppi se $k \geq 1$) indotta dall'inclusione*

$$(21.5) \quad [t_m]_* : \pi_k(X_m, x_0) \rightarrow \pi_k(X, x_0)$$

è surgettiva se $m \geq k$ e bigettiva se $m > k$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un intero $k \geq 0$. Per la proposizione precedente, l'applicazione $[t_m]_*$ è surgettiva per ogni $m \geq k$.

Dobbiamo dimostrare che se $m > k$, la (35.5) è anche iniettiva.

Sia $f \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X_k, x_0)$ un'applicazione S^{k-1} -omotopa in $\mathcal{C}(D^k, X)$ all'applicazione costante.

Sia quindi $F_0 : D^k \times I \rightarrow X$ un'applicazione continua con

$$\begin{cases} F_0(x, 0) = f(x) & \forall x \in D^k, \\ F_0(x, 1) = x_0 & \forall x \in D^k, \\ F_0(x, t) = x_0 & \forall x \in S^{k-1}, \forall t \in I. \end{cases}$$

Quindi la F_0 è un'applicazione continua sul cilindro $D^k \times I$, che vale x_0 in tutti i punti di una delle due basi, $D^k \times \{1\}$, del cilindro, e sulla superficie laterale $S^{k-1} \times I$. Poiché l'immagine di f è contenuta in X_k , la F_0 trasforma tutta la frontiera del cilindro $D^k \times I$ in X_k .

Poiché tutti i convessi chiusi e limitati sono tra loro omeomorfi, mediante un omeomorfismo tra le coppie (D^{k+1}, S^k) e $(D^k \times I, b(D^k \times I))$, possiamo considerare la F_0 come un'applicazione di $\mathcal{C}(D^{k+1}, S^k; X, X_k)$.

Per la Proposizione (35.6.2), la F_0 è S^k -omotopa ad una $F_1 \in \mathcal{C}(D^{k+1}, X_{k+1})$. Abbiamo cioè un'applicazione continua $D^k \times I \times I \ni (x, t, s) \rightarrow F_s(x, t) \in X$ con le proprietà:

$$\begin{cases} F_s(x, 0) = f(x) & \forall x \in D^k, \forall s \in I \\ F_s(x, t) = x_0 & \forall x \in S^{k-1}, \forall t \in I, \forall s \in I \\ F_s(x, 1) = x_0 & \forall x \in D^k, \forall s \in I. \end{cases}$$

In particolare, la $F_1 : D^k \times I \rightarrow M$ è, in $\mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X_{k+1}, x_0)$, una S^{k-1} -omotopia di f con l'applicazione costante. \square

21.7. Una proprietà di omotopia delle coppie cellulari

DEFINIZIONE 21.7.1. Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso e sia Y un sottospazio cellulare di X . Per ogni $C \in \mathcal{P}$ sia $d(C)$ la sua dimensione e $\bar{\phi}_C : D_C^{d(C)} \rightarrow \bar{C} \subset X$, l'estensione al disco chiuso della sua funzioni caratteristica.

Costruiamo per ricorrenza una successione di funzioni continue $h^{(m)} : Y \cup X_m \rightarrow I$, nel modo seguente.

Poniamo

$$\begin{cases} h_Y^{(0)}(x) = 0 & \text{se } x \in Y, \\ h_Y^{(0)}(x) = 1 & \text{se } x \in X_0 \cap \bar{C}Y. \end{cases}$$

Se $m > 0$, ed abbiamo già costruito $h^{(m-1)} : Y \cup X_{m-1} \rightarrow I$, definiamo $h_Y^{(m)} : Y \cup X_m \rightarrow I$ mediante

$$h_Y^{(m)}(x) = \begin{cases} h_Y^{(m-1)}(x) & \text{se } x \in Y \cup X_{m-1} \\ (1 - |\xi|) + |\xi| \cdot h_Y^{(m-1)}\left(\phi_C\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)\right) & \text{se } x = \phi_C(\xi) \text{ con } \xi \in B_C^m \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{se } x = \phi_C(0), \\ \text{quando } x \in \phi_C(B^m), \text{ per una } C \in \mathcal{P}_m \text{ con } C \cap Y = \emptyset. & \end{cases}$$

La $h_Y(x) = h_Y^{(m)}(X)$ su ogni X_m è una funzione continua $h_Y : X \rightarrow I$ con $f^{-1}(0) = Y$. Essa si dice *funzione caratteristica della coppia* (X, Y) .

L'aperto $U_Y = \{x \in X \mid h_Y(x) < 1\}$ si dice un *intorno proprio* di Y in X . Esso si ottiene aggiungendo ad Y , per ogni cella C il cui centro non appartenga ad Y , ma la cui frontiera interseca Y , i raggi che congiungono il centro di C ai punti di $Y \cap bC$.

Vale il

LEMMA 21.7.2. *Ogni sottospazio cellulare Y di un CW-complesso (X, \mathcal{P}) è un retratto di deformazione stretto del suo intorno proprio.*

DIMOSTRAZIONE. Una retrazione di deformazione di U_Y su Y è la :

$$\phi(x, t) = \begin{cases} x & \text{se } x \in Y, \\ \bar{\phi}_C((1-t)(\xi/|\xi|) + t\xi) & \text{se } \begin{cases} C \cap Y = \emptyset, & \bar{C} \cap Y \neq \emptyset, \\ x = \bar{\phi}_C(\xi), & \xi \in D^{d(C)} \setminus \{0\}. \end{cases} \end{cases}$$

Osserviamo che ϕ è ben definita su $U_Y \times I$ perché $h_Y(\phi_C(t\xi)) = 1$ se $\xi \in D^{d(C)} \setminus \{0\}$ e $\bar{\phi}_C(\xi/|\xi|) \notin Y$. \square

COROLLARIO 21.7.3. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso ed Y un suo sottospazio cellulare. Allora per ogni spazio topologico Z , per ogni applicazione continua $f : X \rightarrow Z$ ed ogni omotopia $F : Y \times I \rightarrow Z$ di $f|_Y$, esiste un'omotopia $\tilde{F} : X \times I \rightarrow Z$ di f che prolunga F .*

DIMOSTRAZIONE. Utilizziamo le notazioni introdotte nella discussione svolta finora. Definiamo in primo luogo una $G : U_Y \times I \rightarrow X$ mediante :

$$G(x, t) = \begin{cases} \phi(x, \min\{1, t/h_Y(x)\}) & \text{se } x \in U_Y \setminus Y \\ x & \text{se } x \in Y. \end{cases}$$

La G è un'applicazione continua, che descrive ancora una retrazione di deformazione dell'intorno caratteristico U_Y di Y su Y . Utilizzando la G definiamo una $\Psi : X \times I \rightarrow X \times I$ mediante :

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} (G(x, \max\{0, t - h_Y(x)\}), \max\{0, t - 2h_Y(x)\}) & \text{se } x \in U_Y \\ (x, 0) & \text{se } x \in X \setminus U_Y. \end{cases}$$

La Ψ è continua e definisce una retrazione di $X \times I$ su $(X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$.

Se ora Z è un qualsiasi spazio topologico, $f : X \rightarrow Z$ un'applicazione continua ed $F : Y \times I \rightarrow Z$ un'omotopia di $f|_Y$, allora la:

$$f'(x, t) = \begin{cases} f(x) & \text{se } t = 0, x \in X \\ F(x, t) & \text{se } t \in I, x \in Y \end{cases}$$

è continua e quindi la:

$$\tilde{F}(x, t) = f' \circ \Psi(x, t) \quad \text{per } (x, t) \in X \times I$$

è un'omotopia di f che estende F . \square

Questo corollario ci dice che, se Y è un sottospazio cellulare di uno spazio cellulare X , allora l'inclusione $Y \hookrightarrow X$ è una *cofibratura*. Nel paragrafo successivo discuteremo brevemente il concetto di cofibratura.

21.8. Cofibrazioni

Poiché l'intervallo I è uno spazio di Hausdorff localmente compatto, per ogni coppia di spazi topologici X, Z , l'applicazione canonica $\mathcal{C}(X \times I, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(I, Z))$ è un omeomorfismo. Possiamo identificare quindi un'omotopia F di applicazioni continue di X in Z ad un'applicazione continua $F : X \rightarrow \mathcal{C}(I, Z)$, che ad ogni punto x di X faccia corrispondere un cammino continuo $I \ni t \rightarrow F(x, t) \in Z$ in Z .

Definiamo una *cofibratura* di X come il dato di uno spazio topologico Y e di un'immersione topologica $\iota : Y \rightarrow X$ tale che, per ogni applicazione $f \in \mathcal{C}(X, Z)$ ed ogni omotopia $F \in \mathcal{C}(Y, \mathcal{C}(I, Z))$ di $f \circ \iota$ si possa trovare un'omotopia $\tilde{F} \in \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(I, Z))$ che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xleftarrow{\iota} & X & \xrightarrow{f} & Z \\ \parallel & & \downarrow \tilde{F} & & \parallel \\ Y & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}(I, Z) & \xrightarrow{p_0} & Z \end{array}$$

dove $p_0 : \mathcal{C}(I, Z) \ni \alpha \rightarrow \alpha(0) \in Z$ è l'applicazione che associa ad ogni cammino continuo in Z il suo punto iniziale.

Nel seguito identificheremo per semplicità Y con la sua immagine $\iota(Y) \subset X$.

LEMMA 21.8.1. *Se $\iota : Y \rightarrow X$ è una cofibratura, allora $(X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$ è un retratto del cilindro $X \times I$.*

In particolare, se X è di Hausdorff, Y è un sottospazio chiuso di X .

DIMOSTRAZIONE. Una retrazione

$$\rho : X \times I \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$$

è un'estensione dell'omotopia

$$F : Y \times I \ni (x, t) \rightarrow (x, t) \in (X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$$

della restrizione ad Y dell'immersione

$$X \ni x \rightarrow (x, 0) \in (X \times \{0\}) \cup (Y \times I).$$

Se X è di Hausdorff, anche il prodotto $X \times I$ è uno spazio di Hausdorff e quindi il suo retratto² $(X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$ è chiuso in $X \times I$. L'applicazione $\rho_1 : X \ni x \rightarrow \rho(x, 1) \in X \times I$ è continua e quindi $Y = \rho_1^{-1}([X \times 0] \cup [Y \times I])$ è chiuso perché immagine inversa di un chiuso mediante un'applicazione continua. \square

PROPOSIZIONE 21.8.2. *Se $Y \hookrightarrow X$ è una cofibrazione e Y è contrattile, allora la proiezione $(X, Y) \rightarrow (X/Y, [Y])$ è un'equivalenza omotopica.*

DIMOSTRAZIONE. Siano (X, Y) ed (X', Y') due coppie topologiche. Ricordiamo che esse sono *omotopicamente equivalenti* se esistono due applicazioni $f \in \mathcal{C}(X, Y; X', Y')$ e $g \in \mathcal{C}(X', Y'; X, Y)$ tali che $f \circ g$ sia omotopa all'identità in $\mathcal{C}(X', Y'; X', Y')$ e $g \circ f$ sia omotopa all'identità in $\mathcal{C}(X, Y; X, Y)$.

Sia $F : Y \times I \rightarrow Y$ un'omotopia tra l'identità ed un'applicazione costante. Per l'ipotesi che $\iota : Y \hookrightarrow X$ sia una cofibrazione, la $\iota \circ F$ si estende ad un'omotopia $\tilde{F} : X \times I \rightarrow X$ tra l'identità ed un'applicazione che trasforma Y in un punto. Quindi $\tilde{F}_1 : X \ni x \rightarrow \tilde{F}(x, 1) \in X$ definisce, per passaggio al quoziente, un'applicazione $g : X/Y \rightarrow X$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{F}_1} & X \\ p \downarrow & & \parallel \\ X/Y & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

ove $p : X \rightarrow X/Y$ è la proiezione nel quoziente. La \tilde{F} è allora un'omotopia tra l'identità e $g \circ p$. Poiché $\tilde{F}(Y \times I) \subset Y$, per passaggio al quoziente la \tilde{F} definisce una \hat{F} che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{\tilde{F}} & X \\ p \times \text{id} \downarrow & & \downarrow p \\ (X/Y) \times I & \xrightarrow{\hat{F}} & X/Y \end{array}$$

ed è un'omotopia tra l'identità su X/Y e la $p \circ g$. \square

21.9. Alcune proprietà di omotopia dei CW-complessi

Otteniamo allora la:

PROPOSIZIONE 21.9.1. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso ed Y un sottospazio cellulare di X . Se l'inclusione $Y \hookrightarrow X$ è un'equivalenza omotopica, allora Y è un retratto di deformazione stretta di X .*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che il fatto che Y sia un retratto di deformazione stretto di X significa che l'identità su X è Y -omotopa ad un'applicazione a valori in Y .

²Se A è un retratto dello spazio topologico di Hausdorff B , detta $\rho : B \rightarrow A$ la retrazione, B è chiuso perché immagine inversa della diagonale $\{(b, b) | b \in B\}$ di $B \times B$ mediante l'applicazione continua $B \ni b \rightarrow (b, \rho(b)) \in B \times B$.

Sia $g : X \rightarrow Y$ un'inversa omotopica dell'inclusione $Y \hookrightarrow X$. Sia $F : Y \times I \rightarrow Y$ un'omotopia tra $g|_Y$ e l'identità su Y . Per il corollario precedente, essa si estende ad un'omotopia $\tilde{F} : X \times I \rightarrow A$ tra g e una retrazione $\rho : X \rightarrow Y$.

L'applicazione $f'(x, t)$, definita su $(X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$ mediante:

$$f'(x, t) = \begin{cases} \rho(x) & \text{se } x \in X, t = 0 \\ x & \text{se } x \in Y, t \in I \end{cases}$$

è continua. Consideriamo ora l'applicazione $R : X \ni x \rightarrow \rho(x) \in X$ (ottenuta componendo ρ con l'inclusione $Y \hookrightarrow X$). Per ipotesi essa è omotopa all'identità su X . Sia $G : X \times I \rightarrow X$ un'omotopia tra l'identità su X e l'applicazione ρ . Allora la $G \circ \Psi : X \times I \rightarrow X$ è una retrazione di deformazione di X su A . \square

DEFINIZIONE 21.9.2. Una *coppia topologica* (X, Y) si dice k -connessa se, per ogni $1 \leq h \leq k$, ogni $f \in \mathcal{C}(D^h, S^{h-1}; X, Y)$ è S^{h-1} -omotopa a un'applicazione a valori in Y .

Ad esempio, se Y è un retrato di deformazione stretto di X , la coppia (X, Y) è ∞ -connessa.

La coppia (X, Y) è 0-connessa se tutte le componenti connesse per archi di X contengono punti di Y .

DEFINIZIONE 21.9.3. Chiamiamo *coppia cellulare* una coppia (X, Y) formata da uno spazio cellulare X e da un suo sottospazio cellulare Y .

Vale la seguente:

PROPOSIZIONE 21.9.4. Sia (X, Y) una coppia cellulare e supponiamo, che per un intero positivo k , ovvero per $k = \infty$, tutte le celle contenute in $X \setminus Y$ abbiano dimensione minore o uguale a k . Se (A, B) è una coppia topologica k -connessa, ogni $f \in \mathcal{C}(X, Y; A, B)$ è Y -omotopa ad un'applicazione $g \in \mathcal{C}(X, A)$ che trasforma X in B .

In particolare, se X è uno spazio cellulare di dimensione minore o uguale a k , ogni applicazione continua di X a valori in uno spazio topologico k -connesso A è omotopa ad un'applicazione costante.

DIMOSTRAZIONE. Costruiamo per ricorrenza una successione di Y -omotopie $F_m : (Y \cup X_m) \times I \rightarrow A$, per interi $m = -1, 0, 1, \dots$, in modo che siano verificate le:

- (i) $F_{m+1}(x, t) = F_m(x, t)$ su $(Y \cup X_m) \times I$
- (ii) $F_m(x, t) = f(x)$ su $(Y \cup X_m) \times \{0\}$
- (iii) $F_m((Y \cup X_m) \times [0, 2^{-m-1}]) \subset B$
- (iv) $F_m(x, t) = F_m(x, t')$ se $x \in Y \cup X_m$, $2^{-m-1} \leq t, t' \leq 1$.

La $F : X \times I \rightarrow A$ che coincide con F_m su $X_m \times I$ sarà allora un'omotopia di f con un'applicazione a valori in B .

Definiamo $F_{-1} : Y \times I \rightarrow A$ come l'omotopia costante ($F_{-1}(x, t) = f(x)$ per ogni $x \in Y$ e $t \in I$).

Sia ora r un intero ≥ -1 e supponiamo di aver già costruito F_m per $-1 \leq m \leq r$, in modo che siano verificate le (ii), (iii), (iv) per ogni r con $-1 \leq m \leq r$ ed (i) per $-1 \leq m < r$. Se fosse $r \geq k$, avremmo $Y \cup X_r = X$ e potremmo quindi porre $F_{r+1} = F_r$. Ci limitiamo quindi a considerare il caso in cui $r < k$.

Poiché $Y \cup X_r$ è un sottospazio cellulare di X , per il Corollario 35.7.3, possiamo trovare un'omotopia $G : X \times I \rightarrow A$, con $G(x, 0) = f(x)$ per ogni $x \in X$, che prolunga F_r .

Per ogni cella C della partizione cellulare \mathcal{P} di X , indichiamo con $\phi_C : D^{d(C)} \rightarrow X$ la sua funzione caratteristica. Allora, per ogni cella C di dimensione $(r+1)$ contenuta in $X \setminus Y$, l'applicazione:

$$g_C(y) = G(\phi_C(y), 1 - 2^{-r-1}) \quad \text{per } y \in D^{r+1}$$

manda S^r in B . Poiché la coppia (A, B) è per ipotesi $(r+1)$ -connessa, possiamo trovare una S^r -omotopia $G_C : D^{r+1} \times I \rightarrow A$ tra g_C e un'applicazione continua che trasforma D^{r+1} in B . Definiamo allora:

$$F_{r+1}(x, t) = \begin{cases} F_r(x, t) & \text{se } x \in Y \cup X_r, t \in I \\ G(x, t) & \text{se } x \in Y \cup X_{r+1}, \\ & 0 \leq t \leq 2^{-r-1} \\ G_C(y, 2^{r+2}(t - 1 + 2^{-r-1})) & \text{se } x = \phi_C(y), \\ & 1 - 2^{-r-1} \leq t \leq 1 - 2^{-r-2} \\ G_C(y, 1) & \text{se } x = \phi_C(y), \\ & 1 - 2^{-r-2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che la F_{r+1} è continua e verifica tutte le condizioni (i), (ii), (iii), (iv).

L'ultima affermazione segue dal fatto che, se A è k -connesso e $a_0 \in A$, allora $(A, \{a_0\})$ è una coppia k -connessa. \square

COROLLARIO 21.9.5. *Sia k un intero non negativo o ∞ . Se una coppia cellulare (X, Y) è k -connessa e nessuna cella di dimensione maggiore di k della decomposizione cellulare \mathcal{P} di X è contenuta in $X \setminus Y$, allora Y è un retratto di deformazione stretto di X .*

In particolare, uno spazio cellulare k -connesso di dimensione minore o uguale a k è contrattile. \square

21.10. Coppie cellulari k -connesse ed equivalenza omotopica

Richiamiamo la definizione di equivalenza omotopica per coppie topologiche.

DEFINIZIONE 21.10.1. Due coppie topologiche (X, Y) ed (X', Y') si dicono *omotopicamente equivalenti* se esistono due applicazioni continue $f \in \mathcal{C}(X, Y; X', Y')$ e $g \in \mathcal{C}(X', Y'; X, Y)$ tali che $g \circ f$ sia omotopa all'identità in $\mathcal{C}(X, Y; X, Y)$ ed $f \circ g$ sia omotopa all'identità in $\mathcal{C}(X', Y'; X', Y')$.

La proprietà di essere k -connesse è chiaramente una proprietà delle coppie topologiche invariante per equivalenza omotopica.

Vale il:

LEMMA 21.10.2. *Ogni coppia cellulare k -connessa è omotopa a una coppia cellulare (X, Y) con $X_k \subset Y$.*

DIMOSTRAZIONE. Conveniamo che lo scheletro (-1) -dimensionale di un qualsiasi spazio cellulare sia vuoto. Possiamo ragionare per ricorrenza su k . Supponiamo quindi che sia data una coppia cellulare k -connessa (X', Y') , con $k \geq 0$ e con $X'_{k-1} \subset Y'$ (per $k = 0$ questa condizione è banalmente verificata). Consideriamo l'inclusione $X'_k \hookrightarrow X'$ come un elemento di $\mathcal{C}(X'_k, Y'_k; X', Y')$.

Per la Proposizione 35.9.4, esiste una Y'_k -omotopia $\phi : X'_k \times I \rightarrow X'$ tale che $\phi_1(X'_k) \subset Y'$.

Consideriamo il prodotto topologico

$$X'_k \times I \times I.$$

Possiamo considerarlo in modo ovvio come spazio cellulare, utilizzando le partizioni cellulari standard $(\mathcal{P}_I = \{\{0\}, \{1\}, (0, 1)\})$ dell'intervallo I e la conseguente partizione cellulare

$$Q = \{C' \times C'' \times C''' \mid C' \in \bigcup_{0 \leq h \leq k} \mathcal{P}'_h, C'', C''' \in \mathcal{P}_I\}$$

del prodotto. Abbiamo qui indicato con \mathcal{P}'_h la partizione cellulare di X' e con \mathcal{P}'_h il sottoinsieme delle celle di dimensione h in \mathcal{P}' .

Consideriamo il sottospazio cellulare B di A che si ottiene considerando l'unione della base, di due facce laterali di $X'_k \times I \times I$ e del prodotto $Y'_k \times I \times I$:

$$B = (X'_k \times I \times \{0\}) \cup (X'_k \times \{0\} \times I) \cup (X'_k \times \{1\} \times I) \cup (Y'_k \times I \times I).$$

Definiamo lo spazio cellulare X attaccando A ad X' lungo B , mediante l'applicazione

$$\phi : B \ni (x, t_1, t_2) \rightarrow \phi(x, t_1) \in X'.$$

Poniamo quindi

$$\begin{aligned} X &= X' \cup_{\phi} A, \\ Y &= Y' \cup_j(B), \end{aligned}$$

dove j è la restrizione ad A della proiezione nel quoziente $X' \sqcup A \rightarrow X' \cup_{\phi} A$ ed abbiamo identificato X' ad un sottospazio di $X' \cup_{\phi} A$.

Osserviamo che A, B sono sottospazi cellulari di $X'_k \times I \times I$ e l'applicazione $\phi : B \rightarrow X'$ è cellulare.

Lo spazio topologico X è in modo naturale uno spazio cellulare ed Y un suo sottospazio cellulare, che contiene il suo scheletro k -dimensionale. Per verificare che le coppie (X, Y) ed (X', Y') sono omotopicamente equivalenti, basta osservare che Y' è un retratto di deformazione stretto di Y e che X' è un retratto di deformazione stretto di X . Quindi (X, Y) è omotopicamente equivalente alla coppia (X', Y') . \square

COROLLARIO 21.10.3. *Ogni spazio cellulare k -connesso è omotopicamente equivalente ad uno spazio cellulare X in cui lo scheletro k -dimensionale X_k sia un punto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X' uno spazio cellulare k -connesso e sia $\{x_0\} \subset X$ una sua cella 0-dimensionale. Per la proposizione precedente, la coppia cellulare $(X', \{x_0\})$ è omotopicamente equivalente a una coppia cellulare (X'', Y'') con $Y'' \supset X''_k$. Poniamo $X = X''/Y''$. Poiché, essendo omotopicamente equivalente a un punto, Y'' è contrattile, X è omotopicamente equivalente a X'' , e chiaramente X_k è un punto. \square

LEMMA 21.10.4. *Sia X uno spazio topologico, $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un suo ricoprimento fondamentale con:*

$$X_k \cap X_h = \emptyset \quad \text{se } |h - k| > 1$$

$$X_{k-1} \cap X_k \quad \text{è un retratto di deformazione stretto di } X_k \quad \text{se } k \geq 1.$$

Allora X_0 è un retratto di deformazione stretto di X .

DIMOSTRAZIONE. Per ogni intero positivo k sia $F_k : X_k \times I \rightarrow X_k$ una $X_k \cap X_{k-1}$ -omotopia legata tra l'identità su X_k ed un'applicazione che trasforma X_k nell'intersezione $X_k \cap X_{k-1}$. Definiamo allora un'omotopia $F : X \times I \rightarrow X$ ponendo:

$$F(x, t) = \begin{cases} x & \text{se } x \in X_k \text{ e } 0 \leq t \leq 2^{-k} \\ F_\ell(F_{\ell-1}(\dots (F_k(x, 1), \dots)1), 1), 2^\ell t - 1) & \text{se } x \in X_k \text{ } 2^{-\ell} \leq t \leq 2^{1-\ell}, \ell \leq k. \end{cases}$$

La F è una X_0 -omotopia legata tra l'identità e una retrazione di X su X_0 . \square

Otteniamo allora il seguente:

LEMMA 21.10.5. *Ogni spazio cellulare connesso contiene un sottospazio contrattile di dimensione 1 che contiene il suo scheletro di dimensione zero.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso e sia $\{x_0\} \in \mathcal{P}$ una sua cella di dimensione 0. Sia A_k l'insieme dei punti x tali che $\{x\} \in \mathcal{P}$ sia una cella di dimensione zero e che si possono collegare ad x_0 con un cammino continuo $\alpha : I \rightarrow X_1$ tale che $\alpha(I)$ contenga al più k celle distinte di dimensione 1. Abbiamo $A_0 = \{x_0\}$ e conveniamo di porre $A_{-1} = \emptyset$. Poiché X_1 è connesso, ed un cammino continuo, essendo un compatto, interseca solo un numero finito di celle, avremo $X_0 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Per ogni intero $k \geq 1$ ed ogni cella $\{x\}$ di dimensione 0 contenuta in $A_k \setminus A_{k-1}$ fissiamo una cella chiusa $C_x \in \mathcal{P}$, di dimensione 1, che congiunga x a una cella $\{y\} \in \mathcal{P}$ di dimensione 0, con $y \in A_{k-1} \setminus A_{k-2}$. Definiamo allora:

$$Y_k = \begin{cases} \{x_0\} & \text{se } k = 0 \\ \bigcup_{y \in A_k \setminus A_{k-1}} C_y & \text{se } k > 0. \end{cases}$$

Posto $Y = \bigcup_{k \geq 0} Y_k$, chiaramente Y è un sottospazio cellulare di dimensione 1 di X , che contiene X_0 e che, per il Lemma 35.10.4, $\{x_0\}$ è un retratto di deformazione stretto di Y . In particolare, Y è contrattile. \square

COROLLARIO 21.10.6. *Ogni spazio cellulare connesso X è omotopicamente equivalente a uno spazio cellulare X' con $\dim(X') \leq \dim(X)$, il cui scheletro di dimensione 0 si riduce a un punto.*

In particolare, ogni spazio cellulare di dimensione 1 è equivalente a un bouquet di circonferenze.

DIMOSTRAZIONE. Sia Y un sottospazio cellulare di X contrattile, che contiene lo scheletro di dimensione 0 di X . Allora la coppia (X, Y) è omotopicamente equivalente alla coppia $(X/Y, [Y])$.

Sia infatti $F : Y \times I \rightarrow Y$ un'omotopia tra l'identità ed un'applicazione costante. Per il Corollario 35.7.3 la F si prolunga ad un'omotopia $G : X \times I \rightarrow X$ dell'identità su X . Sia $g(x) = g(x, 1)$. Poiché g è costante su Y , essa definisce per passaggio al quoziente un'applicazione $\hat{g} : X/Y \rightarrow X$. Inoltre, $\hat{g}([A]) \in A$.

Si verifica facilmente che la $\hat{g} \in \mathcal{C}(X/Y, \{[Y]\}; X, Y)$ è un'inversa omotopica di $p \in \mathcal{C}(X, Y; X/Y, \{[A]\})$, ove $p : X \rightarrow X/A$ è la proiezione nel quoziente.

Infatti G definisce un'omotopia tra $\hat{g} \circ p = g$ e l'identità su X ; osserviamo poi che $G(Y, t) \subset Y$ per ogni $t \in I$ e quindi G definisce un'omotopia $\hat{G} : (X/Y) \times I \rightarrow X/Y$ tra $p \circ \hat{g}$ e l'identità su X/Y , costante su $[Y]$. \square

21.11. Gruppi di omotopia degli spazi cellulari di dimensione 1

Uno spazio cellulare connesso di dimensione 1 è omotopicamente equivalente a un bouquet di circonferenze. Dimostriamo la :

PROPOSIZIONE 21.11.1. *Sia I un insieme qualsiasi e sia $X = \bigvee_{i \in I} S_i^1$ il bouquet di I circonferenze. Allora $\pi_1(X, e_0)$ è il gruppo libero delle parole nell'alfabeto I , mentre tutti i gruppi $\pi_m(X, e_0)$ con $h \neq 1$ sono banali.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con \mathbf{G} il gruppo libero delle parole nell'alfabeto I . Consideriamo il bouquet $Y = \bigvee_{i \in I} D_i^1$ di I copie del disco di dimensione uno $D^1 = [-1, 1]$, consideriamo su \mathbf{G} la topologia discreta e definiamo sul prodotto topologico $Y \times \mathbf{G}$ la relazione di equivalenza :

$$(x, g) \sim (x', g') \iff \begin{cases} x = x' & \text{e} & g = g', & \text{oppure} \\ x = 1 \in D_i^1, x' = -1 \in D_i^1 & \text{e} & g' = g \cdot i, & \text{oppure} \\ x = -1 \in D_i^1, x' = 1 \in D_i^1 & \text{e} & g = g' \cdot i. \end{cases}$$

Sia $\tilde{X} = (Y \times \mathbf{G}) / \sim$ il quoziente topologico. Allora \tilde{X} è contrattile.

Questo fatto si può verificare nel modo seguente. Detta \tilde{X}_h l'immagine in \tilde{X} dell'insieme $\{(y, g) \mid y \in Y, \ell(g) = h\}$ (qui $\ell(g)$ è la lunghezza della parola g nell'alfabeto I), si osserva che la successione $\{\tilde{X}_h\}$ soddisfa le condizioni del Lemma 35.10.4, e quindi \tilde{X}_0 è un retratto di deformazione stretto di \tilde{X} . Ma \tilde{X}_0 è omeomorfo a Y , che è contrattile, onde \tilde{X} è contrattile.

L'applicazione $Y \times \mathbf{G} \rightarrow X$ indotta dalle $D_i^1 \times \mathbf{G} \ni (y, g) \rightarrow \exp(it\pi) \in S_i^1$, per passaggio al quoziente, definisce un rivestimento (in senso stretto) $p : \tilde{X} \rightarrow X$. Poiché \tilde{X} è contrattile, il gruppo fondamentale di X è isomorfo al gruppo degli automorfismi del rivestimento $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$, che è isomorfo a \mathbf{G} . Utilizzando poi la successione esatta d'omotopia di un fibrato, otteniamo la tesi³. \square

³ Osserviamo che, nel caso del bouquet di un numero finito di circonferenze, avremmo potuto ottenere lo stesso risultato per ricorrenza, utilizzando il teorema di Seifert-Van Kampen. Questa dimostrazione, che utilizza la teoria dei rivestimenti, ci permette di discutere il caso del bouquet di un insieme qualsiasi (non necessariamente finito) di circonferenze.

21.12. Gruppo fondamentale di uno spazio cellulare

Abbiamo dimostrato che un qualsiasi spazio cellulare connesso è omotopicamente equivalente ad uno spazio cellulare (X, \mathcal{P}) il cui scheletro di dimensione 0 si riduce a un punto: $X_0 = \{x_0\}$. Il suo scheletro di dimensione 1 è allora un bouquet di circonferenze (una per ogni cella di dimensione 1), e l'applicazione naturale $\pi_1(X_1, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ indotta dall'inclusione è un omomorfismo surgettivo. Sappiamo inoltre che la $\pi_1(X_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ è un isomorfismo.

Quindi: $\pi_1(X, x_0)$ è isomorfo al quoziente di $\pi_1(X_1, x_0)$ rispetto al sottogruppo normale generato dalle classi di omotopia dei laccetti $\gamma_C : I \ni t \rightarrow \phi_C(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \in X_1$, ove $\phi_C : D^2 \rightarrow X$ è la funzione caratteristica di una cella chiusa \bar{C} di dimensione due.

Se X_0 non si riduce a un punto, possiamo ancora descrivere $\pi_1(X, x_0)$ come il quoziente di $\pi_1(X_1, x_0)$ (scegliamo il punto base x_0 nello scheletro 0-dimensionale di X) rispetto al sottogruppo normale generato dalle classi di omotopia dei laccetti della forma: $\alpha \cdot \gamma_C \cdot \alpha^{-1}$ dove α è un cammino che congiunge x_0 con il punto $\gamma(0) = \psi_C(e_0)$.

ESEMPIO 21.12.1. Sia m un intero positivo e sia X l'unione della sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e dei raggi $R_h = \{(0, t \cos(2h\pi/m), t \sin(2h\pi/m)) \mid t \in I\}$. Otteniamo una partizione cellulare di X considerando come celle di dimensione 0 il punto $(0, 0, 0)$ ed i punti $(0, \sin(2h\pi/m), \cos(2h\pi/m))$ per $1 \leq h \leq m$, come celle di dimensione 1 i punti interni dei segmenti R_h e degli archi A_h in cui la circonferenza $S^3 \cap \{x_0 = 0\}$ è suddivisa dagli estremi dei raggi R_h , come celle di dimensione due le due semisfere $S^3 \cap \{x_0 > 0\}$ e $S^3 \cap \{x_0 < 0\}$. Osserviamo che $Y = \bigcup R_h$ è un sottospazio cellulare contrattile che contiene X_0 . Quindi X è omotopicamente equivalente allo spazio cellulare $Z = X/Y$. Lo scheletro 0-dimensionale di Z è un punto, mentre Z_1 è un bouquet di m circonferenze. Dette a_1, \dots, a_m le classi di omotopia in $\pi_1(Z_1, [Y])$ generate dalle classi delle immagini dei laccetti:

$$I \ni t \rightarrow (0, \cos(2[h+t]\pi/m), \sin(2[h+t]\pi/m)) \in X,$$

il gruppo fondamentale $\pi_1(Z_1, [Y])$ è il gruppo libero generato da a_1, \dots, a_m . Le relazioni indotte dall'attaccamento delle due celle si riducono entrambe a:

$$a_1 \cdots a_m = 1.$$

Quindi $\pi_1(Z, [Y])$ e $\pi_1(X, x_0)$ sono isomorfi al gruppo libero generato da $(m-1)$ elementi.

Esercizi e Complementi

22.1. Esercizi

1. Dati $n + 1$ punti distinti p_0, p_1, \dots, p_n di \mathbb{R}^2 , si calcoli il gruppo fondamentale di $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ rispetto al punto base p_0 .

2. Siano M_1 ed M_2 due nastri di Moebius, con frontiere $S_1^1 \subset M_1$ ed $S_2^1 \subset M_2$. Dato un intero m , consideriamo la funzione di attaccamento $\phi : S_2^1 \ni z \rightarrow z^m \in S_1^1$ e sia $X = M_1 \cup_\phi M_2$. Si scelga un punto $x_0 \in X$ e si calcoli il gruppo fondamentale di X rispetto ad x_0 .

[Il gruppo fondamentale del nastro di Moebius è il gruppo libero generato dalla sua circonferenza mediana: se $M = I \times I / \sim$, dove la simmetria \sim identifica i punti $(0, t)$ ai punti $(1, 1 - t)$, per $t \in I$, possiamo scegliere come generatore il laccetto che è l'immagine in M del cammino $I \ni t \rightarrow (t, 1/2) \in I \times I$. Indichiamo con α la corrispondente classe di omotopia. Allora la frontiera S^1 del nastro di Moebius, opportunamente orientata, è omotopa ad un laccetto della classe di α^2 .

Usando il teorema di Seifert-Van Kampen, e riportando le classi di omotopia a uno stesso punto base sulle frontiere dei due nastri di Moebius, si può allora verificare che $\pi_1(X, x_0)$ è il quoziente del gruppo libero generato da due elementi a, b , rispetto alla relazione $a^2 b^{2m} = 1$.]

3. Siano M un nastro di Moebius e D^2 un disco bidimensionale, con frontiere $S_1^1 \subset M$ ed $S_2^1 \subset D^2$. Sia n un intero e sia $\phi : S_2^1 \ni z \rightarrow z^n \in S_1^1$. Posto $X = M \cup_\phi D^2$ e scelto $x_0 \in X$, si calcoli $\pi_1(X, x_0)$.

[Indichiamo con a la classe di omotopia corrispondente ad un generatore di $\pi_1(M, x_0)$ e con $b = 1$ quella corrispondente alla frontiera del disco. Poiché la frontiera del nastro di Moebius definisce la classe a^2 , utilizzando Seifert-Van Kampen otteniamo che $\pi_1(X, x_0)$ è il quoziente del gruppo libero generato da un elemento a che soddisfa la relazione $a^2 = b^n = 1$ e quindi è isomorfo a \mathbb{Z}_2 .]

4. Siano D^2 un disco bidimensionale ed M un nastro di Moebius, con frontiere $S_1^1 \subset D^2$ ed $S_2^1 \subset M$. Sia m un intero e sia $\phi : S_1^1 \ni z \rightarrow z^m \in S_2^1$. Posto $X = D^2 \cup_\phi M$ e scelto $x_0 \in X$, si calcoli $\pi_1(X, x_0)$.

[Con le notazioni dell'esercizio precedente: usando ancora Seifert-Van Kampen si verifica che $\pi_1(X, x_0) \simeq \mathbb{Z}_{2m}$, essendo il gruppo libero generato da a con la relazione che $(a^2)^m = a^{2m} = 1$.]

5. Siano a, b, c numeri interi positivi, con $a + b = c$ e tali che b, c siano privi di fattori comuni. Posto $X = \{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \mid z_0^a z_1^b = z_2^c\}$ e scelto un punto $p_0 \in X$, si calcoli $\pi_1(X, p_0)$.

[Si verifichi che l'applicazione $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \ni (w_0, w_1) \rightarrow (w_0^{b+c}, w_0^b w_1^c, w_0^c w_1^b) \in X$ è un omeomorfismo.]

22.2. Le superfici modello

DEFINIZIONE 22.2.1 (Superfici modello elementari). Chiamiamo *sfera con ℓ buchi* la sfera S^2 privata dei punti interni di ℓ calotte. Se $\xi_1, \dots, \xi_\ell \in S^2$ sono punti distinti della sfera ed $\inf_{1 \leq i < j \leq \ell} |\xi_i - \xi_j| = 3\epsilon > 0$, allora

$$(22.1) \quad \{x \in S^2 \mid |x - \xi_j| \geq \epsilon, 1 \leq j \leq \ell\}$$

è una sfera con ℓ buchi.

Si chiama *manico* la sfera a due buchi. La sfera a due buchi è una *varietà a bordo*, omeomorfa al cilindro $S^1 \times I$, e il suo bordo è l'unione disgiunta $S^1 \sqcup S^1$ di due circonferenze, orientate l'una nel verso opposto dell'altra.

Si chiama *nastro di Moebius* il complementare di una palla aperta nel piano proiettivo reale. Possiamo prendere ad esempio

$$(22.2) \quad M = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{RP}^2 \mid x_0^2 \leq x_1^2 + x_2^2\}.$$

Osserviamo che il nastro di Moebius è una *varietà a bordo*, con bordo ∂M omeomorfo ad una circonferenza.

DEFINIZIONE 22.2.2 (Superfici modello). La sfera a g manici e k buchi si ottiene dalla sfera a $2g + k$ buchi mediante l'attaccamento di g manici lungo le frontiere di $2g$ buchi, preservando l'orientazione naturale.

La sfera ad h nastri e k buchi si ottiene dalla sfera ad $h + k$ buchi attaccando ad essa h nastri di Moebius lungo il bordo di h buchi.

ESEMPIO 22.2.3. La sfera con un manico è il *toro*. La sfera ad una banda è il *piano proiettivo reale*. La sfera a due bande è la *bottiglia di Klein*. La sfera con due bande e un buco è un *disco con manico ritorto*.

Nell'elenco delle superfici modello non compaiono sfere che abbiano contemporaneamente bande e manici. Vale infatti il seguente

TEOREMA 22.2.4. *Una sfera con g manici, h bande e k buchi, se $h \geq 1$, è omeomorfa ad una sfera con $2g + h$ bande e k buchi.*

TEOREMA 22.2.5. *Ogni superficie differenziabile con bordo è omeomorfa ad una superficie modello.*

Una superficie modello ammette una decomposizione cellulare in cui vi è un'unica cella di dimensione 0 ed un'unica cella di dimensione 2. Possiamo allora rappresentarla come il quoziente topologico che si ottiene identificando in modo opportuno i punti del bordo di un poligono piano. I punti interni del poligono corrispondono alla cella di dimensione 2; i vertici, tutti identificati tra loro, danno la cella di dimensione 0. I punti interni dei lati corrispondono alle celle di dimensione 1. Si fanno corrispondere ad ogni manico quattro lati del poligono, che vengono identificati secondo lo schema

$$(22.3) \quad aba^{-1}b^{-1}.$$

Questo significa che i punti di ciascun segmento sono identificati con quelli dello stesso nome, ma presi nell'ordine inverso. Ad esempio, se pensiamo di percorrere

la frontiera del poligono in senso anti-orario, punti del lato contrassegnato con a vicini al primo estremo corrispondono a punti vicini al secondo estremo del lato contrassegnato con a^{-1} .

Ad ogni nastro si fanno corrispondere due lati consecutivi del poligono secondo lo schema

$$(22.4) \quad cc.$$

Ciò significa che a punti vicini al primo estremo del lato corrispondente a c si fanno corrispondere punti vicini al primo estremo dell'altro lato contrassegnato con c .

Ad ogni buco si associa un singolo lato, con lo schema semplice

$$(22.5) \quad d.$$

Ogni lato del poligono corrisponde ad un laccetto sulla superficie. Chiaramente, i diversi nomi sui lati corrispondono a generatori del gruppo fondamentale, mentre il perimetro dà, per il teorema di Van Kampen, la relazione che definisce il gruppo fondamentale.

Abbiamo perciò

TEOREMA 22.2.6. (1) *Se X è una sfera con g manici, allora il gruppo fondamentale di X ha $2g$ generatori $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$, legati dalla relazione*

$$(22.6) \quad a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1.$$

(2) *Se X è una sfera con h nastri, allora il gruppo fondamentale di X ha h generatori c_1, \dots, c_h , legati dalla relazione*

$$(22.7) \quad c_1^2 \cdots c_h^2 = 1.$$

(3) *Se X è una sfera a g manici e $k \geq 1$ buchi, allora il gruppo fondamentale di X è un gruppo libero con $2g + k - 1$ generatori.*

(4) *Se X è una sfera con h nastri e $k \geq 1$ buchi, allora il gruppo fondamentale di X è un gruppo libero con $h + k - 1$ generatori.*

La dimostrazione di molti di questi risultati si può ricondurre a manipolazioni algebriche.

Si osserva in primo luogo che è possibile definire una partizione cellulare di X che contenga una sola cella di dimensione 0 ed una sola cella di dimensione 2 e in cui le celle di dimensione 1 siano sottovarietà localmente chiuse di X . Se quindi si rappresenta X come un quoziente di un poligono chiuso P , ottenuto identificandone opportunamente i punti dei lati, a ciascuna cella di dimensione 1 possono corrispondere o un solo lato di P , se essa è contenuta nel bordo ∂X di X , o due lati distinti, se essa è interna ad X , perché una curva semplice piana disconnette localmente il piano in due componenti.

Per ottenere le forme canoniche delle superfici modello, si può allora dimostrare che ogni poligono P con una corrispondenza dei lati ai laccetti su X tale che al più due lati corrispondano ad uno stesso laccetto, o al suo inverso, è *equivalente* ad una della forma (36.6) o (36.7).

Algebricamente, ciò consiste essenzialmente nel trovare un diverso sistema di generatori per il gruppo fondamentale, in modo che la relazione tra di essi si riduca ad una delle (36.6) o (36.7).

L'operazione fondamentale che consente questo passaggio si può descrivere geometricamente nel modo seguente. Si considera una diagonale d di P che divida P in due poligoni, P_1 e P_2 , contenenti uno un lato a e l'altro il suo omologo $a^{\pm 1}$. Si costruisce poi un nuovo poligono P' attaccando P_2 a P_1 lungo i lati omologhi $a, a^{\pm 1}$, avendo cura di preservarne l'orientazione.

Consideriamo ad esempio il perimetro

$$abca^{-1}b^{-1}c = 1,$$

che corrisponde ad una superficie senza bordo con un manico ed un nastro. Tracciare la diagonale che congiunge il primo estremo di a al secondo estremo di c equivale a considerare, come nuovo insieme di generatori del gruppo fondamentale, $\alpha = a^{-1}, \beta = b^{-1}$ e $\gamma = abc$. La relazione diviene allora

$$\gamma a^{-1} b^{-1} b^{-1} a^{-1} \gamma = 1, \quad \text{cioè}$$

$$\gamma \alpha \beta \beta \alpha \gamma = 1, \quad \text{da cui}$$

$$\alpha \beta \beta \alpha \gamma \gamma = 1, \quad \text{che ci dà}$$

$$(\alpha \beta \alpha^{-1})(\alpha \beta \alpha^{-1}) \alpha \alpha \gamma \gamma = 1.$$

Verifichiamo quindi che la nostra superficie è una sfera a tre nastri utilizzando come generatori del gruppo fondamentale $\alpha \beta \alpha^{-1} = a^{-1} b^{-1} a$, $\alpha = a^{-1}$, $\gamma = abc$.

OSSERVAZIONE 22.2.7. La sfera X con h nastri e k buchi ha un rivestimento a due fogli che consiste di una sfera con $h - 1$ manici e $2k$ buchi.

Per $h = 1, k = 0$, otteniamo la sfera come rivestimento a due fogli del piano proiettivo reale; per $h = 2, k = 0$ il toro come rivestimento a due fogli della bottiglia di Klein; per $h = 1, k = 1$, il cilindro come rivestimento a due fogli del nastro di Moebius.

OSSERVAZIONE 22.2.8. Utilizzando i rivestimenti di superfici, otteniamo interessanti omomorfismi di gruppi. Consideriamo ad esempio una sfera con $g \geq 3$ manici. Possiamo rappresentarla come la superficie X che si ottiene dal toro $T = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid \text{dist}((z, t), K) < (1/2)\}$ ove K è la circonferenza $K = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z| = 1, t = 0\}$, ponendo

$$X = \left\{ (z, t) \in T \mid \left| z - \exp\left(\frac{2\pi ki}{g-1}\right) \right| \geq 1/4, k = 1, \dots, g-1 \right\}.$$

Introduciamo la relazione di equivalenza:

$$(z_1, t_1) \sim (z_2, t_2) \iff t_1 = t_2, z_1^{-1} z_2 \in \left\{ \exp\left(\frac{2\pi ki}{g-1}\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Allora $Y = X/\sim$ è omeomorfo alla sfera con due manici e l'omomorfismo iniettivo $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ ci permette di rappresentare il gruppo definito da $2g \geq 6$ generatori, legati dalla relazione (36.6), come un sottogruppo di un gruppo libero con 4

generatori $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, legati dalla relazione

$$\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_2 \beta_2 \alpha_2^{-1} \beta_2^{-1} = 1.$$

OSSERVAZIONE 22.2.9. Se (X, \mathcal{P}) è un CW complesso finito, la somma alternata

$$(22.8) \quad \chi(X) = \sum_m (-1)^m \# \mathcal{P}_m,$$

ove $\# \mathcal{P}_m$ indica il numero delle celle di dimensione m , è un invariante topologico che si dice la *caratteristica di Eulero-Poincaré* di X . Tale numero non dipende dalla partizione cellulare.

In particolare: se X è una sfera con manici, il numero $g(X)$ dei manici (che si dice *genere* di X) è legato alla caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(X)$ di X da

$$(22.9) \quad \chi(X) = 2 - 2g(X).$$

Se X è una sfera con $h(X)$ nastri, allora

$$(22.10) \quad \chi(X) = 2 - h.$$

In particolare, tutte le superfici orientabili hanno caratteristica di Eulero-Poincaré pari.

Osserviamo che, se $X \rightarrow Y$ è un rivestimento ad m fogli di Y , avremo $\chi(X) = m\chi(Y)$.

OSSERVAZIONE 22.2.10. Le sole superfici differenziabili compatte che abbiano gruppo fondamentale finito sono la sfera e il piano proiettivo reale. Il loro rivestimento universale è compatto, ed è omeomorfo alla sfera S^2 . Tutte le altre hanno gruppo fondamentale infinito. La sfera a $g \geq 1$ manici e la sfera ad $h \geq 2$ nastri hanno rivestimento universale omeomorfo a \mathbb{C} .

22.3. Gruppo fondamentale delle curve algebriche piane

DEFINIZIONE 22.3.1. Una curva algebrica piana è il luogo degli zeri in $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ di un polinomio omogeneo $f \in \mathbb{C}_0[z_0, z_1, z_2]$. Se f è un polinomio irriducibile, diremo che anche la curva C_f corrispondente è irriducibile. Chiaramente, se $f = f_1 \cdots f_m$ si decompone nel prodotto di m polinomi, avremo $C_f = C_{f_1} \cup \cdots \cup C_{f_m}$ ed inoltre $C_{f^k} = C_f$ per ogni intero positivo k . Se f non ha fattori multipli, chiameremo il grado di f *grado della curva algebrica* C_f .

Per studiare la struttura topologica di una curva algebrica irriducibile di grado m , osserviamo innanzi tutto che ogni polinomio irriducibile f di grado m si può scrivere, a meno di una proiettività di $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, nella forma:

$$f(z_0, z_1, z_2) = z_2^m + \sum_{\substack{a+b+c=m \\ c < m}} k_{a,b,c} z_0^a z_1^b z_2^c$$

per opportuni coefficienti $k_{a,b,c} \in \mathbb{C}$.

Osserviamo che la curva C_f è contenuta nell'unione dei due aperti coordinati $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ ed $U_1 = \{z_1 \neq 0\}$. In particolare, otteniamo un'applicazione continua e surgettiva:

$$\text{pr} : C_f \ni (z_0, z_1, z_2) \rightarrow (z_0, z_1) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1.$$

In U_0 consideriamo le coordinate non omogenee $y = z_2/z_0$ ed $x = z_1/z_0$. $X \cap U_0$ è descritto nelle coordinate non omogenee da:

$$f_0(x, y) = f(1, x, y) = y^m + \sum_{h=0}^{m-1} y^h p_h(x) = 0 \quad \text{con} \quad p_h \in \mathbb{C}[x].$$

Nell'intorno di ogni punto (x, y) di $U_0 \cap C_f$ in cui $\partial f(x, y)/\partial y \neq 0$, per il teorema delle funzioni implicite la proiezione $\text{pr}_0 : U_0 \cap C_f \ni (x, y) \rightarrow x \in \mathbb{C}$ definisce un omeomorfismo locale. Otteniamo perciò:

LEMMA 22.3.2. Sia $V_0(f)$ l'insieme dei punti $x \in \mathbb{C}$ per cui esiste un $y \in \mathbb{C}$ per cui:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \partial f(x, y)/\partial y = 0. \end{cases}$$

L'insieme $V_0(f)$ è finito e l'applicazione

$$(U_0 \cap C_f) \setminus \text{pr}_0^{-1}(V_0(f)) \ni (x, y) \rightarrow x \in \mathbb{C} \setminus V_0(f)$$

è un rivestimento (in senso stretto) ad m fogli. □

DEFINIZIONE 22.3.3. I punti di $V_0(f)$ si dicono i *punti di diramazione al finito della funzione algebrica* $y = F(x)$ che ha grafico C_f .

Diciamo che anche il punto ∞ è un *punto di diramazione* se, posto:

$$f_1(t, y) = f(t, 1, y) = y^m + \sum_{h=0}^{m-1} y^h q_h(t) = 0 \quad \text{con} \quad q_h \in \mathbb{C}[t],$$

risulta $\partial f_1(0, y)/\partial y = 0$ per qualche soluzione y di $f_1(0, y) = 0$. I punti di \mathbb{CP}^1 di coordinate omogenee $(1, x)$ con $x \in V_0(f)$ ed anche $(0, 1)$ nel caso in cui ∞ sia un punto di diramazione, si dicono i *punti di diramazione* in \mathbb{CP}^1 della funzione algebrica $y = F(x)$. Indichiamo con $V(F) \subset \mathbb{CP}^1$ l'insieme dei punti di diramazione di F .

Osserviamo che, se necessario, mediante un cambiamento di coordinate in \mathbb{CP}^1 , possiamo supporre che ∞ non sia punto di diramazione della funzione algebrica F .

Descriviamo una decomposizione cellulare di C_f . A questo scopo, consideriamo una spezzata semplice aperta¹ L in \mathbb{CP}^1 , di $(k-1)$ lati, che abbia come vertici i punti di diramazione x_1, \dots, x_k . Il complemento $\complement L$ di L in \mathbb{CP}^1 è una 2-cella aperta. Questa cella aperta, insieme alle $(k-1)$ parti interne dei lati della spezzata L e ai k vertici x_1, \dots, x_k , definisce una partizione cellulare \mathcal{P} di \mathbb{CP}^1 .

Otteniamo una partizione cellulare di C_f come immagine inversa della \mathcal{P} mediante la $\text{pr} : C_f \rightarrow \mathbb{CP}^1$.

Poiché la restrizione a $C_f \setminus \text{pr}^{-1}(V(f))$ della proiezione $C_f \xrightarrow{\text{pr}} \mathbb{CP}^1$ è un rivestimento ad m fogli, l'aperto $C_f \setminus \text{pr}^{-1}(L)$ ha m componenti connesse, ciascuna

¹Possiamo supporre infatti che $\{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{CP}$. Possiamo enumerare i punti di diramazione x_1, \dots, x_k in modo che, per un punto $x_0 \in \mathbb{C} \subset \mathbb{CP}$, sia $|x_1 - x_0| < |x_2 - x_0| < \dots < |x_k - x_0|$. Allora la spezzata $L = \bigcup_{h=1}^{k-1} \{x_h + t(x_{h+1} - x_h) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ ha le proprietà richieste.

delle quali è omeomorfa ad una palla B^2 ed è quindi una 2-cella aperta. Otteniamo così m celle di dimensione 2.

Le immagini inverse delle parti interne dei $(k - 1)$ lati della spezzata L sono $m(k - 1)$ celle di dimensione 1, e le immagini inverse dei k punti di diramazione sono le celle di dimensione zero.

Quindi C_f ammette una decomposizione cellulare con m celle di dimensione 2 ed $m(k - 1)$ celle di dimensione 1, mentre il numero di celle di dimensione zero si calcola sommando, per ogni punto di diramazione x_j di F , il numero $N_0(x_j)$ delle soluzioni y distinte dell'equazione $f_0(x_j, y) = 0$.

Per calcolare il gruppo fondamentale di una curva algebrica piana C_f irriducibile, abbiamo bisogno di introdurre un altro invariante, il suo *genere*. Esso si può definire in vari modi equivalenti. Lo definiremo qui in modo affatto topologico. Per ogni punto di diramazione x_j di F in $\mathbb{C}P^1$ fissiamo un disco Δ di centro x_j che non contenga altri punti di diramazione. A questo scopo possiamo scegliere una coordinata non omogenea τ su $\mathbb{C}P^1$ con $\tau(x_j) = 0$ e scegliere $\Delta = \{|\tau| < r\}$ per un numero reale r sufficientemente piccolo, in modo che $|\tau(x)| > r$ per i punti di diramazione $x_h \in V(f)$, con $x_h \neq x_j$. Indichiamo con $\dot{\Delta}$ il disco Δ privato del centro: $\dot{\Delta} = \{x \in \Delta \mid \tau(x) \neq 0\}$. Allora $\text{pr}^{-1}(\dot{\Delta}) \ni p \rightarrow \text{pr}(p) \in \dot{\Delta}$ è un rivestimento. In generale esso *non* sarà un rivestimento in senso stretto, ma sarà formato da $N(x_j)$ componenti connesse distinte.

Osserviamo che, in generale, $N(x_j) \geq N_0(x_j)$.

DEFINIZIONE 22.3.4. Siano x_1, \dots, x_k i punti di diramazione distinti della funzione algebrica F associata alla curva algebrica piana irriducibile C_f . Definiamo il *genere* $g(C_f)$ di C_f come il numero intero che soddisfa l'equazione:

$$2 - 2g(C_f) = m - m(k - 1) + \sum_{j=1}^k N(x_j) = \sum_{j=1}^k N(x_j) - m(k - 2).$$

Se x_j è un punto di diramazione di F , fissiamo un disco Δ_j di centro x_j e consideriamo una componente connessa $U_{j,r}$ ($1 \leq r \leq N(x_j)$) di $\text{pr}^{-1}(\dot{\Delta}_j)$. La $U_{j,r} \rightarrow \dot{\Delta}_j$ è un *rivestimento in senso stretto* con $\nu_{j,r}$ fogli di $\dot{\Delta}_j$. Ora, i rivestimenti in senso stretto con $\nu_{j,r}$ fogli del disco puntato sono tutti e soli quelli della forma:

$$\{t \in \mathbb{C} \mid 0 < |t| < 1\} \ni t \rightarrow t^{\nu_{j,r}} \in \{t \in \mathbb{C} \mid 0 < |t| < 1\}.$$

Si può verificare che i punti $(1, x, y) \in U_{j,r}$ sono parametrizzati mediante:

$$(1, t^{\nu_{j,r}}, \Phi_{j,r}(t))$$

per una funzione analitica di $t \in \Delta$ e la t si dice una *coordinata uniformizzante*².

Possiamo allora costruire una varietà differenziabile orientata \tilde{C}_f di dimensione due, aggiungendo a $C_f \setminus \text{pr}^{-1}(V(f))$ un punto per ogni componente connessa $U_{j,r}$ ed utilizzando come atlante le carte locali date dalla restrizione di pr alle celle aperte di dimensione due e alle componenti connesse delle immagini inverse di

²Il numero intero positivo $\nu_{j,r}$ è un invariante della componente connessa $U_{j,r}$ e si dirà l'*indice di diramazione* del corrispondente punto $p_{j,r}$ della superficie \tilde{C}_f che definiremo più avanti.

dischi che non contengano punti di diramazione, e le coordinate uniformizzanti su ciascuno degli aperti $U_{j,r}$.

Chiaramente è definita un'applicazione surgettiva e continua $\tilde{\text{pr}} : \tilde{C}_f \rightarrow \mathbb{CP}^1$ che coincide con pr su $\tilde{C}_f \setminus \tilde{\text{pr}}^{-1}(V_f) = C_f \setminus \text{pr}^{-1}(V_f)$.

L'immagine inversa mediante $\tilde{\text{pr}}$ della decomposizione cellulare di \mathbb{CP}^1 ci dà una decomposizione cellulare di \tilde{C}_f con m celle di dimensione 2, $m(k-1)$ celle di dimensione 1 e $\sum_j N(x_j)$ celle di dimensione 0. Quindi il genere $g(C_f)$ è:

$$g(C_f) = \frac{2 - \chi(\tilde{C}_f)}{2},$$

dove $\chi(\tilde{C}_f)$ è la *caratteristica di Eulero-Poincaré della varietà differenziabile* \tilde{C}_f .

Infatti, per un CW-complesso finito X di dimensione due la somma alternata:

$$\chi(X) = S(X) - L(X) + V(X)$$

ove

$S(X)$ = numero di celle di dimensione due di X

$L(X)$ = numero di celle di dimensione uno di X

$V(X)$ = numero di celle di dimensione zero di X

è un *invariante topologico*, che si dice la *caratteristica di Eulero-Poincaré* di X . Per tutte le varietà differenziabili compatte orientabili, la caratteristica di Eulero-Poincaré è un numero pari. Il numero $g = (2 - \chi)/2$ si dice il suo *genere* ed è il suo invariante topologico fondamentale: infatti X risulta omeomorfa alla sfera con g manici, ed ha quindi gruppo fondamentale (rispetto ad un suo punto qualsiasi) isomorfo al quoziente del gruppo libero su $2g$ lettere $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ rispetto alla relazione $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$. Indicheremo nel seguito questo gruppo con \mathbf{G}_g (vedi il §36.2).

Ritorniamo alla nostra curva piana irriducibile C_f . Se C_f è una sottovarietà differenziabile di \mathbb{CP}^1 , allora $\tilde{C}_f = C_f$ e quindi il genere determina completamente la topologia di C_f .

In generale, l'applicazione $\tilde{\text{pr}}$ si fattorizza mediante un'applicazione η che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_f & \xrightarrow{\eta} & C_f \\ \tilde{\text{pr}} \downarrow & & \downarrow \text{pr} \\ \mathbb{CP}^1 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{CP}^1 \end{array}$$

La C_f si può ottenere quindi da \tilde{C}_f come quoziente iniettivo della η , identificando cioè i punti distinti di $\tilde{\text{pr}}^{-1}(V_f)$ che corrispondono mediante η ad uno stesso punto di $\text{pr}^{-1}(V_f)$.

Per il calcolo effettivo del gruppo fondamentale, possiamo utilizzare il seguente:

LEMMA 22.3.5. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso connesso e siano $\{a\}, \{b\}$ due celle distinte di dimensione 0 di X . Allora $X/\{a, b\}$ è omotopicamente equivalente al bouquet di $X \vee S^1$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\phi : \{0, 1\} \rightarrow X$ definita da $\phi(0) = a$, $\phi(1) = b$ e sia $\tilde{X} = X \cup_\phi I$. Poiché I è contrattile, la coppia cellulare (\tilde{X}, I) è omotopicamente equivalente a $(\tilde{X}/I, [I])$, che è omeomorfa alla coppia $(X/\{a, b\}, [\{a, b\}])$. Consideriamo ora un sottospazio cellulare contrattile Y di dimensione 1 di X che contenga $\{a, b\}$. Allora $(\tilde{X}/Y, [Y])$ è omotopicamente equivalente al bouquet $(X \vee S^1, \{a\})$ e alla coppia (\tilde{X}, I) . \square

Come conseguenza di questo lemma, otteniamo il risultato seguente :

PROPOSIZIONE 22.3.6. *Il gruppo fondamentale di una curva piana irriducibile C_f di genere g è isomorfo al prodotto libero*

$$\mathbf{G}_g * \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{N-N_0 \text{ volte}}$$

dove :

\mathbf{G}_g è il quoziente del gruppo libero con $2g$ generatori $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$

rispetto alla relazione $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$,

$$N = \sum_{j=1}^k N(x_j) \quad \text{ove} \quad V_f = \{x_1, \dots, x_k\}$$

$$N_0 = \sum_{j=1}^k N_0(x_j) \text{ è la cardinalità di } \text{pr}^{-1}(V_f).$$

22.4. Esempi di curve piane irriducibili (Esercizi)

Di ciascuna delle seguenti curve piane: si definisca una partizione cellulare, se ne calcoli il genere, si dica se la curva è o meno liscia, e se ne calcoli infine il gruppo fondamentale.

6. $X = \{z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.
7. $X = \{z_0 z_1^2 + z_1 z_2^2 + z_2^3 = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.
8. $X = \{z_0 z_1^3 + z_0 z_1 z_2^2 + z_2^4 = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.
9. $X = \{z_0 z_1^5 + z_0 z_1^2 z_2^3 + z_2^6 = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.
10. $X = \{z_2^5 + z_0 z_1 z_2^3 + z_1^4 z_2 + z_1^5 = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.
11. $X = \{z_0^{m-k} z_2^k = (z_1 - a_1 z_0) \cdots (z_1 - a_m z_0)\}$ con $m \geq 2$, $1 \leq k \leq m$, ed a_1, \dots, a_m punti distinti di \mathbb{C} .

22.5. Curve piane riducibili (Esercizi)

Abbiamo già osservato che, se $f_1, \dots, f_\ell \in \mathbb{C}_0[z_0, z_1, z_2]$ sono polinomi irriducibili due a due non proporzionali, allora $C_{f_1 \dots f_\ell} = C_{f_1} \cup \cdots \cup C_{f_\ell}$. Due curve distinte di gradi m, n , si intersecheranno in un numero finito $r \leq mn$ di punti distinti (teorema di Bézout). Per calcolare quindi il gruppo fondamentale di una curva algebrica riducibile, sarà sufficiente osservare che vale il seguente :

LEMMA 22.5.1. *Siano X, Y due spazi cellulari connessi. Siano $x_1 \neq x_2 \in X$ ed $y_1, y_2 \in Y$. Sia $Z = Y \cup_{\phi} X$ ove $\phi : \{x_1, x_2\} \ni x_i \rightarrow y_i \in \{y_1, y_2\}$. Allora $\pi_1(Z, y_1) \simeq \pi_1(X, x_1) * \pi_1(Y, y_1) * \mathbb{Z}$.*

DIMOSTRAZIONE. Lo spazio topologico Z è un CW -complesso omotopicamente equivalente al quoziente del bouquet $(X, x_1) \vee (Y, y_1)$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica i punti x_2 ed y_2 . Applicando il Lemma 36.3.5, otteniamo che Z è omotopicamente equivalente al bouquet $(X, x_1) \vee (Y, y_1) \vee (S^1, e_0)$, e quindi otteniamo la tesi. \square

12. Si calcoli il gruppo fondamentale della curva piana di equazione omogenea:

$$\{(z_0^2 - z_1 z_2)(z_0^2 + z_1^2 + z_2^2) = 0\} \subset \mathbb{CP}^2.$$

13. Si calcoli il gruppo fondamentale della curva piana di equazione omogenea:

$$\{z_0 z_1 z_2 (z_0^4 + z_1^4 + z_2^4) = 0\} \subset \mathbb{CP}^2.$$

14. Si calcoli il gruppo fondamentale della curva piana di equazione omogenea:

$$\{z_0^{a+b} = z_1^a z_2^b\} \subset \mathbb{CP}^2,$$

ove a, b sono interi positivi con massimo comun divisore $d > 1$.

15. Si calcoli il gruppo fondamentale della curva piana di equazione omogenea:

$$\{z_0^6 = (z_0 z_1 + z_2^2)^3\} \subset \mathbb{CP}^2.$$

16. Si calcoli il gruppo fondamentale della curva piana di equazione omogenea:

$$\{z_2^6 - z_0^2 z_1 z_2^3 - z_0 z_1^2 z_2^3 + z_0^3 z_1^3 = 0\} \subset \mathbb{CP}^2.$$

22.6. Altri esercizi

17. Sia M un nastro di Moebius e siano $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ punti distinti interni ad M . Sia $X = M \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$. Si calcoli $\pi_1(X, p_0)$.

18. Siano p_0, p_1, \dots, p_n punti distinti dello spazio proiettivo reale \mathbb{PR}^2 , sia $X = \mathbb{PR}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$. Si calcoli $\pi_1(X, p_0)$.

19. Siano Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 quattro sfere di dimensione due, due a due disgiunte. Fissiamo punti $p_i, q_i \in Y_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$ e sia X il quoziente dell'unione disgiunta $Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup Y_3 \sqcup Y_4$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica il punto p_i al punto q_{i+1} per $1 \leq i \leq 3$ e il punto p_4 al punto q_1 . Si trovi una decomposizione cellulare di X e, scelto un suo punto p_0 , si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(X, p_0)$.

20. Si consideri il cilindro $K = S^1 \times I$ e, fissati due interi $m, n \neq 0$, si consideri la relazione di equivalenza su K :

$$(z, t) \sim (w, s) \iff \begin{cases} (z, t) = (w, s) \\ z^m = w^n, t = 0, s = 1 \\ z^n = w^m, t = 1, s = 0. \end{cases}$$

Sia $X = K/\sim$, sia $\text{pr} : K \rightarrow X$ la proiezione nel quoziente. Siano fissati $(k+1)$ punti distinti z_0, z_1, \dots, z_k di S^1 (con $k \geq 0$) e sia $Y = X \setminus \{\text{pr}(z_1, 1/2), \dots, \text{pr}(z_k, 1/2)\}$.

Si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(Y, \text{pr}(z_0, 1/2))$.

21. Consideriamo il sottogruppo \mathbf{H} di $\mathbf{SU}(2)$ formato dalle matrici

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che lo spazio omogeneo $X = \mathbf{SU}(2)/\mathbf{H}$ è una varietà differenziabile connessa di dimensione 3. Si fissi un punto x_0 di X e si calcolino $\pi_1(X, x_0)$, $\pi_2(X, x_0)$ e $\pi_3(X, x_0)$.

21. Con le notazioni dell'Esercizio 20, si consideri l'immagine \mathbf{G} di $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ in $\mathbf{SO}(4)$ mediante l'omomorfismo che associa a $(g_1, g_2) \in \mathbf{H} \times \mathbf{H}$ l'isometria

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longrightarrow g_1 \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} g_2^{-1}(e_1)$$

di $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$. Si dimostri che $Y = \mathbf{SO}(4)/\mathbf{G}$ è una varietà differenziabile di dimensione 6 e, fissato $y_0 \in Y$, si calcolino i gruppi $\pi_1(Y, y_0)$, $\pi_2(Y, y_0)$, $\pi_3(Y, y_0)$.

22. Sia $E \subset \mathbb{C}$ il sottospazio

$$E = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}} (2a + S^1) = \{2a + z \mid a \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}.$$

Sia $B = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid zw = 0, |z-1| + |w-1| = 2\}$ il bouquet di due circonferenze. Si verifichi che l'applicazione

$$\pi : E \ni (2a + z) \rightarrow \begin{cases} (z^2 - 1, 0) & \text{se } a \text{ è dispari,} \\ (0, z^2 - 1) & \text{se } a \text{ è pari,} \end{cases}$$

è un rivestimento. Si calcoli $\pi_1(E, 1)$ e si descriva l'omomorfismo iniettivo $\pi_* : \pi_1(E, 1) \rightarrow \pi_1(B, (0, 0))$.

Questo esempio mostra che il gruppo libero con due generatori $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ contiene un sottogruppo isomorfo al gruppo libero con un'infinità numerabile di generatori.

22.7. Varietà di Stiefel e di Grassmann reali

DEFINIZIONE 22.7.1. La *varietà di Stiefel reale* $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è l'insieme degli m -riferimenti ortogonali di \mathbb{R}^n . I suoi punti sono cioè le m -uple $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$ di vettori ortonormali di \mathbb{R}^n .

Identificando $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$ alla matrice $n \times m$ con colonne v_1, \dots, v_m otteniamo un'immersione naturale di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ nello spazio Euclideo \mathbb{R}^{nm} , e quindi una struttura topologica di sottospazio di uno spazio Euclideo.

Per $m = 1$, la varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{R})$ è la sfera $(n-1)$ -dimensionale $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$; è poi $\mathbb{V}_{n,n-1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{V}_{n,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbf{SO}(n)$. Le varietà di Stiefel reali generalizzano quindi, allo stesso tempo, le sfere e i gruppi speciali ortogonali.

PROPOSIZIONE 22.7.2. La *varietà di Stiefel* $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è una varietà analitica compatta di dimensione $\frac{m(2n-m-1)}{2}$.

DIMOSTRAZIONE. Innanzi tutto $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è un compatto di \mathbb{R}^{nm} perché chiuso e limitato.

Descriviamo ora un atlante di carte locali di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$. Sia $\vec{e} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ un elemento di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$. Completiamolo, mediante vettori $\epsilon_{m+1}, \dots, \epsilon_n$ ad una base ortonormale di \mathbb{R}^n . Osserviamo che, assegnati

$$\begin{cases} (x_{1,2}, \dots, x_{1,n}) \in B^{n-1} \\ (x_{2,3}, \dots, x_{2,n}) \in B^{n-2} \\ \dots \\ (x_{m,m+1}, \dots, x_{m,n}) \in B^{n-m} \end{cases}$$

risultano univocamente determinati numeri reali $x_{i,j}$, per interi i, j con $1 \leq i \leq j \leq m$ tali che $x_{i,i} > 0$ per ogni $1 \leq i \leq m$ e

$$\left(\sum_{j=1}^n x_{1,j} \epsilon_j, \dots, \sum_{j=1}^n x_{m,j} \epsilon_j \right) \in \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}).$$

Gli $x_{i,j}$ con $1 \leq i < j \leq n$ definiscono quindi una carta locale con centro in \vec{e} . In particolare

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) = \sum_{h=1}^m (n-h) = nm - \frac{m(m+1)}{2}.$$

□

Il gruppo speciale ortogonale $\mathbf{SO}(n)$ opera transitivamente sulle varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ per ogni $1 \leq m \leq n-1$. Lo stabilizzatore di un punto è isomorfo al gruppo $\mathbf{SO}(n-m)$. Quindi:

PROPOSIZIONE 22.7.3. *La varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è connessa per archi ed è omeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-m)$. Abbiamo la successione esatta di omotopia (dove per semplicità omettiamo di indicare il punto base)*

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \pi_h(\mathbf{SO}(n-m)) \longrightarrow \pi_h(\mathbf{SO}(n)) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ &\longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(n-m)) \longrightarrow \dots \\ (22.11) \quad \dots &\longrightarrow \pi_1(\mathbf{SO}(n-m)) \longrightarrow \pi_1(\mathbf{SO}(n)) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Siano k, m, n interi con $1 \leq k < m < n$. L'applicazione

$$(22.12) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{R})$. Otteniamo quindi una successione esatta in omotopia³

$$\begin{aligned} &\dots \longrightarrow \pi_{h+1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) \\ (22.13) \quad &\longrightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) \\ &\longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

³Per semplicità in questa, e nelle altre successioni esatte in questo paragrafo ometteremo di indicare il punto base.

Da questo deduciamo immediatamente

PROPOSIZIONE 22.7.4. *La varietà di Stiefel reale $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$, con $1 \leq m < n$, è $(n - m - 1)$ -connessa e*

$$(22.14) \quad \pi_{n-m}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n - m \text{ è pari, o } m = 1, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } n - m \text{ è dispari ed } m \geq 2. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per ricorrenza su $m \geq 1$. Poiché, come abbiamo osservato in precedenza, $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{R}) = S^{n-1}$, la tesi è vera se $m = 1$. Supponiamo allora che $m > 1$ e che la tesi sia vera per le varietà di Stiefel reali $\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})$ con $1 \leq k < m$. Consideriamo la successione esatta (36.13) con $k = m - 1$. Se $h < n - m$, allora $\pi_h(\mathbb{V}_{n-m+1,1}(\mathbb{R})) = \pi_h(S^{n-m}) = 0$, e $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m-1}(\mathbb{R})) = 0$ per l'ipotesi induttiva. Quindi anche $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) = 0$.

Per dimostrare in generale la (36.14), che sappiamo vera per $m - 1$, cominciamo ad esaminare a parte il caso $m = 2$. Per $m = 2$, $k = 1$ ed $h = n - 2$, la (36.13) dà:

$$(22.15) \quad \mathbb{Z} = \pi_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\Delta_*} \mathbb{Z} = \pi_{n-2}(S^{n-2}) \longrightarrow \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n,2}) \longrightarrow 0.$$

Per calcolare l'applicazione Δ_* in (36.15), osserviamo che abbiamo un diagramma commutativo di fibrazioni

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{SO}(n-1) & \longrightarrow & \mathbf{SO}(n) & \longrightarrow & S^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{V}_{n-1,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S^{n-1}. \end{array}$$

Otteniamo allora un diagramma commutativo

$$(22.16) \quad \begin{array}{ccccc} \pi_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\Delta_*} & \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n-1)) & \longrightarrow & \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n)) \\ \parallel & & \downarrow p_* & & \downarrow \\ \pi_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\Delta_*} & \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n-1,1}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{R})). \end{array}$$

Dimostriamo a questo punto alcuni risultati relativi al gruppo ortogonale.

LEMMA 22.7.5. *Consideriamo l'applicazione $\Psi : S^n \times S^n \rightarrow S^n$ definita da*

$$(22.17) \quad S^n \times S^n \ni (x, y) \rightarrow \Psi(x, y) = y - 2(x|y)x \in S^n.$$

Per ogni $x \in S^n$, la $S^n \ni y \rightarrow F(x, y) \in S^n$ ha grado (-1) . Per ogni $y \in S^n$, la $S^n \ni x \rightarrow F(x, y) \in S^n$ ha grado $1 - (-1)^n$, cioè 2 se n è dispari e 0 se n è pari.

DIMOSTRAZIONE. Fissato $x = e_1$, la $y \rightarrow F(e_0, y)$ è la sospensione della $S^1 \ni (x_0, x_1) \rightarrow (x_0, -x_1) \in S^1$, che possiamo anche scrivere, mediante l'inclusione $S^1 \subset \mathbb{C}$, come $S^1 \ni z \rightarrow \bar{z} = z^{-1} \in S^1$. Quindi la $y \rightarrow F(e_0, y)$ ha grado (-1) e perciò tutte le $y \rightarrow f_x(y) = F(x, y)$ hanno grado (-1) .

Per dimostrare che le $x \rightarrow \psi_y(x) = F(x, y)$ hanno grado $1 - (-1)^n$, poiché S^n è connesso per archi, possiamo limitarci a considerare il caso speciale in cui $y = -e_n$. Scriviamo per semplicità $\psi = \psi_{-e_n}$. Consideriamo quindi l'applicazione

$$S^n \ni x = (x_n, \dots, x_n) \rightarrow \psi(x) = (2x_n x_0, \dots, 2x_n x_{n-1}, 2x_n^2 - 1) = (2x_n) \cdot x - e_n \in S^n.$$

Abbiamo $\psi(x) = \psi(-x)$. Quindi, se $a : S^n \ni x \rightarrow -x \in S^n$ è l'applicazione antipodale, $\psi = \psi \circ a$. Quindi, poiché il grado della mappa antipodale è $(-1)^{n+1}$, da

$$\deg(\psi) = \deg(\psi \circ a) = \deg(\psi) \cdot (-1)^{n+1}$$

otteniamo che $\deg(\psi) = 0$ se n è pari.

Consideriamo ora il caso in cui n sia dispari. Osserviamo che $\psi(S^{n-1}) = \{-e_0\}$. Possiamo quindi definire due applicazioni

$$\psi_+(x) \begin{cases} \psi(x) & \text{se } x \in S_+^n, \\ -e_0 & \text{se } x \in S_-^n, \end{cases}, \quad \psi_-(x) \begin{cases} -e_0 & \text{se } x \in S_+^n, \\ \psi(x) & \text{se } x \in S_-^n. \end{cases}$$

L'elemento definito da ψ in $\pi_n(S^n, e_0)$ è la somma delle classi di omotopia di ψ_+ e ψ_- . Poiché $\psi_- = \psi_+ \circ a$, abbiamo $\deg(\psi_-) = \deg(\psi_+)$, perché la mappa antipodale ha grado 1. Quindi $\deg(\psi) = 2 \deg \deg(\psi_+)$. Osserviamo ora che $\psi_+(x) \neq -x$ per ogni $x \in S^n$. Quindi

$$S^n \times I \ni (x, t) \rightarrow \Psi_+(x, t) = \frac{(1-t)\psi_+(x) + tx}{|(1-t)\psi_+(x) + tx|} \in S^n$$

è un'omotopia di ψ_+ con l'identità. Ciò dimostra che ψ_+ ha grado 1, e quindi ψ ha grado 2. \square

La matrice della simmetria σ_x rispetto al vettore $x = (x_0, \dots, x_n) \in S^n$ è la

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 - 2x_0^2 & -2x_0x_1 & \dots & -2x_0x_n \\ -2x_0x_1 & 1 - 2x_1^2 & \dots & -2x_1x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2x_0x_n & -2x_1x_n & \dots & 1 - 2x_n^2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante della simmetria rispetto a un vettore è (-1) . Otteniamo quindi un'applicazione $\phi_n : S^n \rightarrow \mathbf{SO}(n+1)$, definita da

$$\phi_n : S^{n-1} \ni x \rightarrow \sigma_x \circ \sigma_{e_0}.$$

La restrizione di ϕ_n alla semisfera superiore $S_+^{n+1} = S^n \cap \{x_n \geq 0\}$ trasforma la coppia (S_+^n, S^{n-1}) nella coppia $(\mathbf{SO}(n+1), (\mathbf{SO}(n)))$. Consideriamo l'applicazione $p : \mathbf{SO}(n+1) \ni g \rightarrow g(e_n) \in S^n$. Abbiamo

$$\begin{aligned} p(\phi(x)) &= \phi(x)(e_n) = \sigma_x \circ \sigma_{e_0}(e_n) \\ &= \sigma_x(e_0) = -\psi_+(x) \quad \forall x \in S_+^n. \end{aligned}$$

Possiamo quindi considerare l'estensione di $p \circ \phi$ che si ottiene mandando tutta la semisfera S_-^n nel punto e_n . L'applicazione che si ottiene è la $a \circ \psi_+$, ed ha quindi, poiché ψ_+ ha grado 1, grado uguale a $(-1)^{n+1}$. Osserviamo infine che la restrizione di ϕ_n all'equatore è la ϕ_{n-1} .

Questa applicazione ci permette di descrivere, nella successione esatta

$$\mathbb{Z} = \pi_n(S^n) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(n)) \xrightarrow{\iota_*} \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(n+1)) \longrightarrow 0$$

il nucleo della ι_* . Abbiamo infatti

PROPOSIZIONE 22.7.6. *Il nucleo di ι_* è il sottogruppo ciclico generato da $\alpha = \Delta_*(\text{id}_{S^n})$. L'applicazione $\phi_{n-1} : S^{n-1} \rightarrow \mathbf{SO}(n)$ rappresenta l'elemento $(-1)^{n+1}\alpha$.*

Utilizziamo ora il diagramma commutativo (36.16). Poiché l'immagine $p_* \circ \Delta_*$ della classe di $\text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ è 0 o $2[\text{id}_{\mathbb{S}^{n-2}}]$ a seconda che n sia dispari o pari, otteniamo la (36.14). \square

Studiamo ora i gruppi di omotopia delle varietà di Grassmann. Fissato un prodotto scalare su \mathbb{R}^n , l'applicazione

$$(22.18) \quad \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \ni p \rightarrow p^\perp \in \mathbb{G}_{n,n-m}(\mathbb{R})$$

che associa ad ogni m -piano p l' $(n-m)$ -piano ad esso ortogonale è un omeomorfismo. Possiamo quindi supporre nel seguito che $n \geq 2m$.

Consideriamo l'applicazione naturale

$$(22.19) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$$

che associa ad un sistema $\vec{v} \in \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ di m vettori ortonormali il sottospazio $p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ da essi generato. La (36.19) è una fibrazione localmente banale con fibra omeomorfa al gruppo $\mathbf{O}(m)$. Abbiamo quindi la successione esatta:

$$(22.20) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) & \\ & & & & & & \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{O}(m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{O}(m)) & \longrightarrow & \cdots & \end{array}$$

LEMMA 22.7.7. *Per ogni intero non negativo h ed ogni coppia d'interi positivi m, k , con $m \leq k$, le applicazioni $\iota_* : \pi_h(\mathbf{O}(m)) \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R}))$ hanno immagine nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Rappresentiamo $\mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R})$ come lo spazio delle matrici reali M di tipo $(k+m) \times m$ tali che ${}^t M M = I_m$. Allora l'inclusione $\iota : \mathbf{O}(m) \hookrightarrow \mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R})$ identifica $\mathbf{O}(m)$ al sottospazio delle matrici

$$M_g = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } g \in \mathbf{O}(m).$$

L'omotopia $F : \mathbf{O}(m) \times I \rightarrow \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ definita da

$$F(g, t) = \begin{pmatrix} g \cos^2(t\pi/2) + I_m \sin^2(t\pi/2) \\ (g - I_m) \sin(t\pi/2) \cos(t\pi/2) \\ 0_{n-2m,m} \end{pmatrix}$$

definisce una retrazione di deformazione di $\mathbf{O}(m)$ sul punto base di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$. Da questo segue la tesi. \square

In particolare, dalla successione esatta di Serre otteniamo le successioni esatte corte:

$$(22.21) \quad 0 \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{O}(m)) \rightarrow 0.$$

Abbiamo perciò, tenuto conto dell'omeomorfismo (36.18),

TEOREMA 22.7.8. *Siano $1 \leq m < n$ e $\nu = \min\{n, n-m\}$. Per ogni $h \geq 1$ abbiamo*

$$(22.22) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \pi_h(\mathbb{V}_{n,\nu}(\mathbb{R})) \oplus \pi_{h-1}(\mathbf{O}(\nu)).$$

In particolare, poiché $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è semplicemente connesso per $n - m > 1$, otteniamo che

$$(22.23) \quad \pi_1(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2 \quad \forall n \geq 3 \quad \text{e} \quad 1 \leq m < n$$

e inoltre

$$(22.24) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } 2 \leq h < n - v, \\ \mathbb{Z} \oplus \pi_{n-v-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } h = n - v \text{ è pari o } v = 1, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \pi_{n-v-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } h = n - v \text{ è dispari e } v \geq 3. \end{cases}$$

Se $n' > n$, abbiamo un'inclusione naturale

$$(22.25) \quad \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R}).$$

PROPOSIZIONE 22.7.9. *L'applicazione $\pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \rightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R}))$ indotta dalla (36.25) è un isomorfismo per ogni $h < \min\{m, n - m\}$ ed ogni $n' > n$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $h < n - m$, e consideriamo la partizione cellulare di $\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R})$ data dalle celle di Schubert, lo scheletro $h + 1$ -dimensionale di $\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R})$ è contenuto in $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$. \square

22.8. Varietà di Stiefel e di Grassmann complesse

In modo analogo definiamo le varietà di Stiefel e di Grassmann complesse.

DEFINIZIONE 22.8.1. *La varietà di Stiefel complessa $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è costituita dalle m -uple di vettori ortonormali di \mathbb{C}^n .*

Possiamo identificare $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ all'insieme delle matrici complesse Z , di tipo $n \times m$, che soddisfano $Z^*Z = I_m$. Abbiamo:

PROPOSIZIONE 22.8.2. *Per ogni $0 \leq m \leq n$, la varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è una varietà analitica di Hausdorff, di dimensione reale $m(2n - m)$, compatta e connessa per archi. Essa è omeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-m)$.*

DIMOSTRAZIONE. $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è uno spazio topologico di Hausdorff compatto perché è un sottoinsieme chiuso e limitato di \mathbb{C}^{nm} . Possiamo definire la sua struttura differenziabile descrivendo una carta locale con centro in un punto $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$. Completiamo v_1, \dots, v_m ad una base ortonormale (v_1, \dots, v_n) di \mathbb{C}^n . Assegnamo numeri complessi $z_{h,j}$ per $1 \leq j < h \leq n$ e numeri reali y_j per $j = 1, \dots, m$, tali che $y_j^2 + \sum_{h=j+1}^n |z_{h,j}|^2 < 1$ per ogni $j = 1, \dots, m$. Risulteranno allora univocamente determinati numeri complessi $z_{h,j}$, per $1 \leq h \leq j \leq m$ tali che $\text{Im}(z_{j,j}) = y_j$, $\text{Re}(z_{j,j}) > 0$ e detta Z la matrice $Z = (z_{h,j})_{\substack{1 \leq h \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$, sia $Z^*Z = I_m$. I numeri reali y_j e le parti reali e immaginarie degli $z_{h,j}$ con $1 \leq j < h \leq n$ sono le coordinate di una carta locale con centro in \vec{v} . La dimensione della varietà è quindi

$$\sum_{j=1}^m [2(n - j) + 1] = m(2n + 1) - m(m + 1) = 2nm - m^2 = m(2n - m).$$

Chiaramente il gruppo speciale unitario $\mathbf{SU}(n)$ opera transitivamente su $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$, con isotropia $\mathbf{SU}(n - m)$. Quindi $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è omeomorfo al quoziente $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n - m)$ e perciò compatto e connesso per archi. \square

PROPOSIZIONE 22.8.3. *La varietà di Stiefel complessa $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è $(2n - 2m)$ -connessa e $\pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissato un intero k con $1 \leq k < m$, l'applicazione

$$(22.26) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C}).$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})$. Otteniamo quindi una successione esatta

$$(22.27) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \\ & & & & & & \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \dots & \end{array}$$

Ragioniamo per ricorrenza su $m \geq 1$. Per $m = 1$, $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{C}) = S^{2n-1}$, e sappiamo che la sfera di dimensione $(2n - 1)$ è $(2n - 2)$ -connessa. Supponiamo ora che $m > 1$ e che, per ogni r con $1 \leq r < m$ la varietà di Stiefel complessa $\mathbb{V}_{n,r}(\mathbb{C})$ sia $(2n - 2r)$ -connessa. Utilizziamo la successione esatta (36.27) con $k = 1$. Poiché per l'ipotesi induttiva $\mathbb{V}_{n-1,m-1}(\mathbb{C})$ è $(2n - 2m)$ -connesso e $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{C}) = S^{2n-1}$ è $(2n - 2)$ -connesso, otteniamo che $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}))$ è $(2n - 2)$ -connesso.

Utilizziamo ancora la successione esatta (36.27) con $k = (m - 1)$ ed $h = 2n - 2m$. Poiché $\mathbb{V}_{n,m-1}(\mathbb{C})$ è $(2n - 2m + 2)$ -connessa, otteniamo l'isomorfismo

$$\pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) \simeq \pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n-m+1,1}(\mathbb{C})) = \pi_{2n-2m+1}(S^{2n-2m-1}) = \mathbb{Z}.$$

□

L'applicazione

$$(22.28) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow \langle v_1, \dots, v_m \rangle \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathbf{U}(m)$. Otteniamo quindi una successione esatta d'omotopia

$$(22.29) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) \\ & & & & & & \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{U}(m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{U}(m)) & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) & \longrightarrow \dots \end{array}$$

Con una dimostrazione analoga a quella del Lemma 36.7.7 otteniamo

LEMMA 22.8.4. *Se $1 \leq m < 2m \leq n$, allora l'applicazione $\pi_h(\mathbf{U}(m)) \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}))$ in (36.29) ha immagine nulla.*

Questo dà, per ogni intero $h \geq 1$ e per $1 \leq m < 2m \leq n$, le successioni esatte corte

$$(22.30) \quad 0 \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{U}(m)) \rightarrow 0.$$

Otteniamo perciò il

TEOREMA 22.8.5. *Sia $v = \min\{m, n - m\}$. Allora, per ogni $1 \leq m < n$ ed $h \geq 1$*

$$(22.31) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \pi_h(\mathbb{V}_{n,v}(\mathbb{C})) \oplus \pi_{h-1}(\mathbf{U}(v)).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $2m \leq n$, la tesi segue dalla (36.30). Per completare la dimostrazione, è sufficiente utilizzare l'omeomorfismo

$$(22.32) \quad \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni p \rightarrow p^\perp \in \mathbb{G}_{n,n-m}(\mathbb{C}),$$

dove p^\perp è l' $(n-m)$ -piano ortogonale a p , rispetto ad un prodotto scalare Hermitiano in \mathbb{C}^n . \square

Otteniamo in particolare

$$(22.33) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \begin{cases} \pi_{h-1}(\mathbf{U}(v)) & \text{se } 1 \leq h \leq 2n - 2v, \\ \mathbb{Z} \oplus \pi_{2n-2v}(\mathbf{U}(v)) & \text{se } h = 2n - 2v, \end{cases}$$

e quindi $\pi_1(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = 0$ e $\pi_2(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$ per ogni $1 \leq m < n$.

Appendice: Algebre di Lie

CAPITOLO XXIII

Algebre di Lie

Raccogliamo in questo capitolo alcune delle definizioni generali e delle proprietà più importanti delle algebre di Lie astratte.

23.1. Nozioni fondamentali

Sia \mathbb{k} un campo. Un'algebra di Lie su \mathbb{k} è uno spazio vettoriale \mathfrak{g} su \mathbb{k} su cui è assegnata un'operazione binaria (*commutatore*):

$$(23.1) \quad \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \longrightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$$

che gode delle seguenti proprietà:

$$(23.2) \quad \text{l'operazione } (X, Y) \rightarrow [X, Y] \text{ è } \mathbb{k}\text{-bilineare,}$$

$$(23.3) \quad [X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

$$(23.4) \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

(IDENTITÀ DI JACOBI).

OSSERVAZIONE 23.1.1. Osserviamo che (23.3) implica che

$$(23.5) \quad [X, Y] = -[Y, X] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

e le due condizioni sono equivalenti se \mathbb{k} ha caratteristica $\neq 2$.

ESEMPIO 23.1.2. Sia V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{k} . Se poniamo $[v, w] = 0$ per ogni $v, w \in V$, questo prodotto definisce su V una struttura di algebra di Lie.

In generale

DEFINIZIONE 23.1.3. Chiamiamo algebra di Lie *abeliana* o *commutativa* un'algebra di Lie \mathfrak{g} in cui il commutatore di due qualsiasi elementi sia nullo.

Dati due sottospazi vettoriali $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ di un'algebra di Lie \mathfrak{g} , indichiamo con $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ il sottospazio vettoriale di \mathfrak{g} generato dai vettori della forma $[X, Y]$ con $X \in \mathfrak{A}$, $Y \in \mathfrak{B}$.

Per la (23.5), abbiamo $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = [\mathfrak{B}, \mathfrak{A}]$.

DEFINIZIONE 23.1.4. Un sottoinsieme \mathfrak{a} di \mathfrak{g} si dice una *sottoalgebra di Lie* di \mathfrak{g} se è un sottospazio vettoriale di \mathfrak{g} e $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$; un *ideale* di \mathfrak{g} se è una sottoalgebra ed inoltre $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$.

Osserviamo che $\{0\}$ e \mathfrak{g} sono ideali (banali) di \mathfrak{g} .

LEMMA 23.1.5. Se $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sono ideali di \mathfrak{g} , anche $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ e $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ sono ideali di \mathfrak{g} .

LEMMA 23.1.6. Sono ideali di \mathfrak{g} sono il suo centro $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ e il suo derivato $\mathfrak{g}^{(1)}$, definiti da

$$(23.6) \quad Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\},$$

$$(23.7) \quad \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

LEMMA 23.1.7. Se \mathfrak{a} è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} , il suo normalizzatore in \mathfrak{g}

$$(23.8) \quad N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] \in \mathfrak{a} \quad \forall Y \in \mathfrak{a}\}$$

è ancora una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} : essa contiene \mathfrak{a} ed è la più grande sottoalgebra di \mathfrak{g} che contiene \mathfrak{a} come ideale.

Analogamente il centralizzatore di \mathfrak{a} in \mathfrak{g}

$$(23.9) \quad C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{a}\}$$

è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} .

DEFINIZIONE 23.1.8. Siano $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ due algebre di Lie sullo stesso campo \mathbb{k} . Un'applicazione $\phi : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$ si dice un morfismo di algebre di Lie se è \mathbb{k} -lineare e soddisfa inoltre:

$$(23.10) \quad \phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{f}.$$

LEMMA 23.1.9. Sia $\phi : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$ un morfismo di algebre di Lie su \mathbb{k} . Allora $\phi(\mathfrak{f})$ è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} e $\ker \phi$ è un ideale di \mathfrak{f} .

LEMMA 23.1.10. Se \mathfrak{a} è un ideale dell'algebra di Lie \mathfrak{g} , allora vi è un'unica struttura di algebra di Lie sul quoziente $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ che renda la proiezione naturale $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ un morfismo di algebre di Lie.

DEFINIZIONE 23.1.11. Con questa struttura $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ si dice l'algebra di Lie quoziente di \mathfrak{g} rispetto all'ideale \mathfrak{a} .

DEFINIZIONE 23.1.12. Un'algebra di Lie \mathfrak{g} si dice *semplice* se non è commutativa e non contiene ideali non banali.

23.2. Algebre di Lie lineari, derivazioni, rappresentazione aggiunta

Sia V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{k} . Lo spazio vettoriale $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ di tutti gli endomorfismi \mathbb{k} -lineari di V è un'algebra di Lie con il prodotto definito da

$$(23.11) \quad [A, B] = A \circ B - B \circ A \quad \forall A, B \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V).$$

Con la struttura di algebra di Lie, esso si indica con $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$. Se $V = \mathbb{k}^n$, scriviamo $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ invece di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^n)$. Ogni sottoalgebra di un'algebra di Lie $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ si dice un'algebra di Lie lineare.

Un teorema di Ado-Iwasawa dice che ogni algebra di Lie di dimensione finita è isomorfa a un'algebra di Lie lineare.

Esempi importanti di algebre di Lie lineari sono i seguenti, ove $V = \mathbb{k}^n$, $1 \leq n < \infty$:

$$(A_{\ell}) \quad \mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{k}) = \{X \in \mathfrak{gl}(\ell + 1, \mathbb{k}) \mid \text{tr}(X) = 0\};$$

(B_ℓ) $\mathfrak{so}(\ell, \ell + 1; \mathbb{k})$: trasformazioni antisimmetriche rispetto a una forma bilineare simmetrica con indice di Witt ℓ in uno spazio vettoriale di dimensione dispari $n = 2\ell + 1$; qui dobbiamo supporre che \mathbb{k} abbia caratteristica $\neq 2$;

(C_ℓ) $\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{k})$: trasformazioni simpletiche, cioè che soddisfano

$$a(X(v), w) + a(v, X(w)) = 0 \quad \forall v, w \in V$$

per una forma alternata non degenera a su uno spazio vettoriale V di dimensione pari $n = 2\ell$ su un campo \mathbb{k} di caratteristica $\neq 2$;

(D_ℓ) $\mathfrak{so}(\ell, \ell; \mathbb{k})$: trasformazioni antisimmetriche rispetto a una forma bilineare simmetrica con indice di Witt ℓ in uno spazio vettoriale di dimensione pari $n = 2\ell$; anche qui dobbiamo supporre che caratteristica(\mathbb{k}) $\neq 2$;

- l'algebra $\mathfrak{t}_+(n, \mathbb{k})$ delle matrici triangolari superiori a coefficienti in \mathbb{k} ;
- l'algebra $\mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k})$ delle matrici triangolari superiori a coefficienti in \mathbb{k} con diagonale principale nulla;
- l'algebra $\mathfrak{t}_-(n, \mathbb{k})$ delle matrici triangolari inferiori a coefficienti in \mathbb{k} ;
- l'algebra $\mathfrak{n}_-(n, \mathbb{k})$ delle matrici triangolari inferiori a coefficienti in \mathbb{k} con diagonale principale nulla;
- l'algebra $\mathfrak{d}(n, \mathbb{k})$ delle matrici diagonali a coefficienti in \mathbb{k} .

Notiamo che

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_+(n, \mathbb{k}) &= \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{d}(n, \mathbb{k}), \\ \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k}) &= [\mathfrak{t}_+(n, \mathbb{k}), \mathfrak{t}_+(n, \mathbb{k})], \\ \mathfrak{t}_-(n, \mathbb{k}) &= \mathfrak{n}_-(n, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{d}(n, \mathbb{k}), \\ \mathfrak{n}_-(n, \mathbb{k}) &= [\mathfrak{t}_-(n, \mathbb{k}), \mathfrak{t}_-(n, \mathbb{k})]. \end{aligned}$$

Sia \mathfrak{A} un'algebra su \mathbb{k} , con prodotto $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (a, b) \rightarrow a \cdot b \in \mathfrak{A}$.

DEFINIZIONE 23.2.1. Una *derivazione* di \mathfrak{A} è un'applicazione \mathbb{k} -lineare $D : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ che soddisfa l'*identità di Leibniz*:

$$(23.12) \quad D(a \cdot b) = (D(a)) \cdot b + a \cdot (D(b)) \quad \forall a, b \in \mathfrak{A}.$$

Indichiamo con $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{A})$ l'insieme delle derivazioni di \mathfrak{A} .

Si verifica facilmente che

LEMMA 23.2.2. $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{A})$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{A})$ e quindi un'algebra di Lie lineare.

Consideriamo in particolare l'algebra di Lie delle derivazioni di una \mathbb{k} -algebra di Lie \mathfrak{g} .

LEMMA 23.2.3. Fissato $X \in \mathfrak{g}$, l'applicazione

$$(23.13) \quad \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X) : \mathfrak{g} \ni Y \rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$$

è \mathbb{k} -lineare ed è una derivazione.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo l'identità di Jacobi:

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)([Y, Z]) &= [X, [Y, Z]] = -[Y, [Z, X]] - [Z, [X, Y]] \\ &= [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \\ &= [\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(Y), Z] + [Y, \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(Z)] \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

□

DEFINIZIONE 23.2.4. Le derivazioni della forma $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$, al variare di X in \mathfrak{g} , si dicono *derivazioni interne* di \mathfrak{g} .

LEMMA 23.2.5. *L'applicazione*

$$(23.14) \quad \text{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X) \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$$

è un morfismo di algebre di Lie. Le derivazioni interne formano un ideale dell'algebra di Lie $\text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $D \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ e $X \in \mathfrak{g}$ abbiamo, per ogni $Y \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} [D, \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)](Y) &= D([X, Y]) - [X, D(Y)] \\ &= [D(X), Y] + [X, D(Y)] - [X, D(Y)] \\ &= \text{ad}_{\mathfrak{g}}(D(X))(Y). \end{aligned}$$

Quindi

$$(23.15) \quad [D, \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)] = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(D(X)) \quad \forall D \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}), \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

dimostra che $[\text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}), \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})] \subset \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$.

□

DEFINIZIONE 23.2.6. La (23.14) si dice *rappresentazione aggiunta* di \mathfrak{g} .

LEMMA 23.2.7. *Il nucleo della rappresentazione aggiunta è il centro $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ di \mathfrak{g} .*

DEFINIZIONE 23.2.8. Gli elementi di $\text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ che non appartengono ad $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ si dicono *derivazioni esterne* di \mathfrak{g} .

L'ideale delle derivazioni interne di \mathfrak{g} si indica anche con $\text{int}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$.

Un ideale di \mathfrak{g} è un suo sottospazio vettoriale che è trasformato in sé da tutte le derivazioni interne.

DEFINIZIONE 23.2.9. Un ideale \mathfrak{a} di \mathfrak{g} si dice *caratteristico* se è trasformato in sé da tutte le derivazioni di \mathfrak{g} .

LEMMA 23.2.10. *Il centro $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ e il derivato $\mathfrak{g}^{(1)}$ sono ideali caratteristici di \mathfrak{g} .*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $D \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$, abbiamo

$$\begin{aligned} [D(X), Y] &= D([X, Y]) - [X, D(Y)] = 0, \quad \forall X \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}), \quad \forall Y \in \mathfrak{g} \\ &\implies D(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})) \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D([X, Y]) &= [D(X), Y] + [X, D(Y)] \in \mathfrak{g}^{(1)}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \\ &\implies D(\mathfrak{g}^{(1)}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}. \end{aligned}$$

□

Osserviamo che, se \mathfrak{g} è semplice, allora il morfismo $\text{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{int}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ è un isomorfismo: quindi

PROPOSIZIONE 23.2.11. *Ogni algebra di Lie semplice è isomorfa in modo naturale ad un'algebra di Lie lineare.*

ESEMPIO 23.2.12. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Lo spazio $\mathcal{E}(M; \mathbb{R})$ delle funzioni differenziabili di classe \mathcal{C}^{∞} , a valori reali, definite su M è un'algebra reale per il prodotto di funzioni. L'algebra di Lie reale $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}(M, \mathbb{R}))$ è l'algebra $\mathfrak{X}(M)$ dei campi di vettori (di classe \mathcal{C}^{∞}) su M .

23.3. Rappresentazioni lineari

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie sul campo \mathbb{k} .

DEFINIZIONE 23.3.1. Una *rappresentazione lineare* di \mathfrak{g} è il dato di uno spazio vettoriale V sul campo \mathbb{k} e di un morfismo di algebre di Lie

$$(23.16) \quad \rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V).$$

In questo caso diciamo anche che V , con la struttura data dall'operazione:

$$(23.17) \quad \mathfrak{g} \times V \ni (X, v) \longrightarrow \rho(X)(v) \in V$$

è un \mathfrak{g} -modulo.

Quando ciò non provochi confusione, scriveremo anche $X \cdot v$ oppure Xv invece di $\rho(X)(v)$.

La rappresentazione aggiunta, discussa nel paragrafo precedente, è un esempio di rappresentazione.

Un altro esempio di rappresentazione lineare è la *rappresentazione banale*: dato un qualsiasi spazio vettoriale V su \mathbb{k} si fa corrispondere ad ogni X di \mathfrak{g} l'endomorfismo nullo di V .

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{k} e (23.16) una sua rappresentazione lineare di dimensione finita.

DEFINIZIONE 23.3.2. Diciamo che ρ (o il corrispondente \mathfrak{g} -modulo V) è *riducibile* se esiste un sotto- \mathfrak{g} -modulo proprio non banale W di V ; altrimenti la ρ si dice *irriducibile* o *semplice*.

Diciamo che ρ (o il corrispondente \mathfrak{g} -modulo V) è *decomponibile* se V è somma diretta di due sotto- \mathfrak{g} -moduli W_1, W_2 non banali: $V = W_1 \oplus W_2$ con $W_1, W_2 \neq \{0\}$. È *indecomponibile* se non è decomponibile.

Infine, diciamo che ρ (o il \mathfrak{g} -modulo V) è *completamente riducibile* o *completamente decomponibile* o *semisemplice* se V è somma diretta di sotto- \mathfrak{g} -moduli semplici.

Vale il:

TEOREMA 23.3.3 (Lemma di Schur). *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita n su \mathbb{k} e $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ una sua rappresentazione lineare di dimensione finita irriducibile. Se $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ è diversa da 0 e soddisfa:*

$$(23.18) \quad [A, \rho(X)] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

allora è un endomorfismo semisemplice invertibile.

Se \mathbb{k} è algebricamente chiuso, allora A è un multiplo dell'identità.

In generale, il commutatore di $\rho(\mathfrak{g})$ in $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$

$$(23.19) \quad \mathbb{K}_{\rho} = \{A \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V) \mid [A, \rho(\mathfrak{g})] = 0\}$$

è un corpo (non necessariamente commutativo) ed è un'estensione di dimensione finita di \mathbb{k} .

DIMOSTRAZIONE. Poiché $A \neq 0$, lo spazio vettoriale V ha dimensione positiva. Sia p un fattore primo del polinomio minimo di A e poniamo

$$V_p = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \ker p(A)^h, \quad W = \ker p(A).$$

Allora W e V_p sono sottospazi \mathfrak{g} -invarianti di V , di dimensione positiva, con $W \subset V_p$. Per l'irriducibilità di ρ , deve essere $W = V_p = V$ e questo dimostra che A è semisemplice e il suo spettro contiene un solo ideale primo di $\mathbb{k}[x]$.

Per la prima parte della dimostrazione ogni elemento diverso da 0 di \mathbb{K}_{ρ} è invertibile e quindi \mathbb{K}_{ρ} è un corpo. \square

OSSERVAZIONE 23.3.4. Se $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ è il campo dei numeri complessi e (23.16) una rappresentazione irriducibile di \mathfrak{g} , allora $\mathbb{K}_{\mathfrak{g}} \simeq \mathbb{C}$.

OSSERVAZIONE 23.3.5. Se $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ è il campo dei numeri reali, il commutatore \mathbb{K}_{ρ} per una rappresentazione irriducibile $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ di \mathfrak{g} può essere \mathbb{R} , \mathbb{C} , oppure \mathbb{H} . Le rappresentazioni irriducibili di un'algebra di Lie reale si dividono quindi nei tipi *reale, complesso, quaternionico*.

Ad esempio, le rappresentazioni naturali di

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}(n) &\subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \\ \mathfrak{u}(n) &\subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}), \\ \mathfrak{sp}(n) &\subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(4n, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

sono rispettivamente di tipo reale, complesso e quaternionico.

Per distinguere i diversi casi, si considera la *complessificazione* $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ di \mathfrak{g} e la corrispondente rappresentazione complessa $\tilde{\rho} : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\tilde{V})$, dove $\tilde{V} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ è la complessificazione dello spazio vettoriale reale V .

La ρ è reale se $\tilde{\rho}$ è irriducibile.

Altrimenti la $\tilde{\rho}$ si decompone nella somma diretta di due rappresentazioni complesse irriducibili: se esse sono isomorfe, allora la ρ è di tipo quaternionico; se esse non sono isomorfe, allora la ρ è di tipo complesso.

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita \mathbb{k} e $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ una rappresentazione lineare di dimensione finita. Allora anche la

$$(23.20) \quad \rho^* : \mathfrak{g} \ni X \rightarrow -{}^t\rho(X) \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V^*),$$

ove $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$ è il duale dello spazio vettoriale V , è una rappresentazione lineare di dimensione finita.

DEFINIZIONE 23.3.6. La (23.20) si dice la rappresentazione *controgradiente*, o *duale*, di ρ .

A due rappresentazioni lineari di dimensione finita $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$, $\rho_W : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(W)$ possiamo associare il loro *prodotto tensoriale*

$$(23.21) \quad \rho_V \otimes \rho_W : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V \otimes_{\mathbb{k}} W),$$

definito da

$$\begin{aligned} \rho_V \otimes \rho_W(X)(v \otimes w) &= \rho_V(X)(v) \otimes w + v \otimes \rho_W(X)(w) \\ &\forall X \in \mathfrak{g}, \forall v \in V, \forall w \in W. \end{aligned}$$

Utilizzando la rappresentazione controgradiente e l'identificazione dello spazio $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ con il prodotto tensoriale $W \otimes V^*$, si ottiene la rappresentazione

$$(23.22) \quad \rho_{\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W))$$

definita da

$$(23.23) \quad \begin{aligned} \rho_{\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)}(X) &= \rho_W(X) \circ A - A \circ \rho_V(X) \\ &\forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall A \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W). \end{aligned}$$

In particolare la ρ_V induce una rappresentazione $\rho_{\text{End}_{\mathbb{k}}(V)}$ su $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ definita da

$$(23.24) \quad \begin{aligned} \rho_{\text{End}_{\mathbb{k}}(V)}(X)(A) &= \rho_V(X) \circ A - A \circ \rho_V(X) \\ &\forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall A \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V). \end{aligned}$$

23.4. Forme invarianti

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su \mathbb{k} .

DEFINIZIONE 23.4.1. Una forma bilineare $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$ si dice *invariante* se soddisfa

$$(23.25) \quad \beta([X, Y], Z) + \beta(Y, [X, Z]) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Una forma bilineare $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$ si dice *completamente invariante* se soddisfa

$$(23.26) \quad \beta(D(X), Y) + \beta(X, D(Y)) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall D \in \text{Der}(\mathfrak{g}).$$

ESEMPIO 23.4.2. L'applicazione

$$(23.27) \quad \beta(X, Y) = \text{traccia}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$$

è una forma bilineare simmetrica, invariante su $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$.

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \text{traccia}([X, Y]Z) &= \text{traccia}(XYZ) - \text{traccia}(YXZ) \\ &= \text{traccia}(YZX) - \text{traccia}(YXZ) = -\text{traccia}(Y[X, Z]). \end{aligned}$$

Dalla discussione dell'Esempio 23.4.2 otteniamo subito:

PROPOSIZIONE 23.4.3. Se $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ è una rappresentazione lineare di dimensione finita di \mathfrak{g} , allora

$$(23.28) \quad \kappa_V(X, Y) = \text{traccia}(\rho(X)\rho(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

è una forma bilineare invariante su \mathfrak{g} . □

DEFINIZIONE 23.4.4. Se \mathfrak{g} ha dimensione finita, la forma invariante

$$(23.29) \quad \kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{traccia}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

si dice la *forma di Killing* di \mathfrak{g} .

LEMMA 23.4.5. *Supponiamo che \mathfrak{g} abbia dimensione finita. Se α è un ideale di \mathfrak{g} , allora la forma di Killing κ_{α} di α è la restrizione ad α della forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ di \mathfrak{g} .*

DIMOSTRAZIONE. Se infatti scegliamo una base E_1, \dots, E_n di \mathfrak{g} per cui E_1, \dots, E_m sia una base di α , le trasformazioni $\text{ad}(X)$, con $X \in \alpha$, hanno matrici associate

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con A matrice $m \times m$, e matrici nulle 0 di tipi $m \times (n - m)$, $(n - m) \times m$ ed $(n - m) \times (n - m)$. Poiché la A è la matrice di $\text{ad}_{\alpha}(X)$ nella base E_1, \dots, E_m , la tesi segue facilmente. \square

PROPOSIZIONE 23.4.6. *Supponiamo che \mathfrak{g} abbia dimensione finita. La sua forma di Killing è completamente invariante.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \text{Der}(\mathfrak{g})$. Possiamo definire su $\tilde{\mathfrak{g}}$ una struttura di algebra di Lie con il prodotto definito dalle:

$$\begin{cases} \llbracket X, Y \rrbracket = [X, Y] & \text{se } X, Y \in \mathfrak{g}, \\ \llbracket D, X \rrbracket = D(X) & \text{se } X \in \mathfrak{g}, D \in \text{Der}(\mathfrak{g}), \\ \llbracket D_1, D_2 \rrbracket = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 & \text{se } D_1, D_2 \in \text{Der}(\mathfrak{g}). \end{cases}$$

Poiché \mathfrak{g} è allora un ideale di $\tilde{\mathfrak{g}}$, la tesi segue dalla Proposizione 23.4.3 e dal Lemma 23.4.5. \square

23.5. Automorfismi

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su \mathbb{k} .

DEFINIZIONE 23.5.1. Un automorfismo α di \mathfrak{g} è un isomorfismo dell'algebra di Lie \mathfrak{g} con se stessa. Con il prodotto di composizione, gli automorfismi dell'algebra di Lie \mathfrak{g} formano un gruppo, che indicheremo con $\text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$.

DEFINIZIONE 23.5.2. Un elemento X dell'algebra di Lie \mathfrak{g} si dice *ad-nilpotente* se $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ è nilpotente.

Se il campo \mathbb{k} ha caratteristica 0 , ed $X \in \mathfrak{g}$ è ad-nilpotente possiamo definire l'*esponenziale* di $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ mediante:

$$(23.30) \quad \exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X))^h}{h!}.$$

Poiché abbiamo supposto X ad-nilpotente, la somma a secondo membro della (23.30) contiene solo un numero finito di termini non nulli. Essa definisce quindi un'applicazione \mathbb{k} -lineare su \mathfrak{g} , che è un automorfismo di \mathfrak{g} .

Più in generale vale il:

LEMMA 23.5.3. Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie sul campo \mathbb{k} di caratteristica 0 e D una derivazione nilpotente di \mathfrak{g} . Allora

$$(23.31) \quad \exp(D) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{D^h}{h!}$$

è un automorfismo di \mathfrak{g} .

DIMOSTRAZIONE. Vale la formula di Leibnitz:

$$D^n([X, Y]) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} [D^m(X), D^{n-m}(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \exp(D)([X, Y]) &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{D^h([X, Y])}{h!} \\ &= \sum_{h', h''=0}^{\infty} \frac{1}{h'! h''!} [D^{h'}(X), D^{h''}(Y)] \\ &= [\exp(D)(X), \exp(D)(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

ove tutte le sommatorie hanno significato perché contengono soltanto un numero finito di termini non nulli.

Infine $\exp(D)$ è invertibile ed $\exp(D)^{-1} = \exp(-D)$ mostra che anche l'inversa è un morfismo dell'algebra di Lie \mathfrak{g} in sé. \square

DEFINIZIONE 23.5.4. Gli automorfismi che sono composizione di un numero finito di automorfismi della forma $\exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X))$, con X elemento ad-nilpotente di \mathfrak{g} , si dicono *elementari*.

Indicheremo con $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$ il gruppo degli automorfismi elementari di \mathfrak{g} .

LEMMA 23.5.5. Il gruppo $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$ degli automorfismi elementari di \mathfrak{g} è un sottogruppo normale di $\text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $X \in \mathfrak{g}$ è un elemento ad-nilpotente ed $\alpha \in \text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$, allora $\alpha(X)$ è ancora un elemento ad-nilpotente di \mathfrak{g} e

$$\alpha \circ \exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)) \circ \alpha^{-1} = \exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\alpha(X))).$$

\square

23.6. Algebre di Lie risolubili

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{k} .

DEFINIZIONE 23.6.1. La sequenza decrescente di ideali

$$(23.32) \quad \mathfrak{g} = D^0\mathfrak{g} \supset D^1\mathfrak{g} \supset \cdots \supset D^h\mathfrak{g} \supset D^{h+1}\mathfrak{g} \supset \cdots$$

definita da

$$(23.33) \quad \begin{cases} D^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \\ D^{m+1}\mathfrak{g} = [D^m\mathfrak{g}, D^m\mathfrak{g}] \end{cases} \quad \forall m \geq 0.$$

si dice *serie derivata* di \mathfrak{g} .

DEFINIZIONE 23.6.2. Diciamo che \mathfrak{g} è *risolubile* se $D^n \mathfrak{g} = \{0\}$ per qualche intero non negativo n .

Ad esempio, l'algebra $\mathfrak{t}(n, \mathbb{k})$ delle matrici triangolari superiori con coefficienti nel campo \mathbb{k} è un'algebra di Lie risolubile.

TEOREMA 23.6.3. Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{k} .

- (1) Se \mathfrak{g} è risolubile, allora ogni sottoalgebra \mathfrak{a} di \mathfrak{g} è risolubile ed ogni immagine di \mathfrak{g} mediante un morfismo di algebre di Lie è un'algebra di Lie risolubile.
- (2) Se \mathfrak{a} è un ideale risolubile di \mathfrak{g} e l'algebra quoziente $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ è risolubile, allora \mathfrak{g} è risolubile.
- (3) Se $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sono ideali risolubili di \mathfrak{g} , allora $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ è un ideale risolubile di \mathfrak{g} .

DEFINIZIONE 23.6.4. In particolare, ogni algebra di Lie \mathfrak{g} di dimensione finita contiene un ideale risolubile massimale rispetto all'inclusione. Esso si dice il *radicale* di \mathfrak{g} e si indica con $\text{rad}(\mathfrak{g})$.

23.7. Algebre di Lie semisemplici

DEFINIZIONE 23.7.1. Un'algebra di Lie di dimensione finita \mathfrak{g} per cui sia $\text{rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ si dice *semisemplice*.

Osserviamo che l'algebra quoziente $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$ è semisemplice.

Vale il fondamentale risultato:

TEOREMA 23.7.2 (Decomposizione di Levi-Malcev). Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita. Allora \mathfrak{g} contiene una sottoalgebra semisemplice \mathfrak{l} tale che

$$(23.34) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \text{rad}(\mathfrak{g})$$

DEFINIZIONE 23.7.3. Una sottoalgebra semisemplice \mathfrak{l} di \mathfrak{g} per cui valga la (23.34) si dice una *sottoalgebra di Levi* di \mathfrak{g} .

23.8. Algebre di Lie nilpotenti

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo \mathbb{k} . Si dice *serie centrale discendente* di \mathfrak{g} la sequenza di ideali di \mathfrak{g}

$$(23.35) \quad \mathfrak{g} = C^0 \mathfrak{g} \supset C^1 \mathfrak{g} \supset \cdots \supset C^h \mathfrak{g} \supset C^{h+1} \mathfrak{g} \supset \cdots$$

definiti per ricorrenza da:

$$(23.36) \quad \begin{cases} C^0 \mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \\ C^{h+1} \mathfrak{g} = [C^h \mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \end{cases} \quad \text{per } h \geq 0.$$

Diciamo che \mathfrak{g} è *nilpotente* se $C^n \mathfrak{g} = \{0\}$ per qualche intero non negativo n . Poiché $D^m \mathfrak{g} \subset C^m \mathfrak{g}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, un'algebra di Lie nilpotente è anche risolubile.

L'algebra di Lie lineare $\mathfrak{n}(n, \mathbb{k})$ è un esempio di algebra di Lie nilpotente.

TEOREMA 23.8.1. Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{k} .

- (1) Se \mathfrak{g} è nilpotente, allora ogni sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} ed ogni immagine di \mathfrak{g} mediante un morfismo di algebre di Lie è nilpotente.

(2) \mathfrak{g} è nilpotente se e soltanto se $\mathfrak{g}/Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ è nilpotente.

(3) Se $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ ed è nilpotente, allora $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.

DIMOSTRAZIONE. La (1) e la (2) sono immediate. Per la (3) osserviamo che se \mathfrak{g} è nilpotente ed h è il più grande intero non negativo per cui $C^h \mathfrak{g} \neq \{0\}$, allora $C^h \mathfrak{g} \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. \square

23.9. Il teorema di Engel

LEMMA 23.9.1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{k} . Se $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ è nilpotente, allora anche $\text{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)}(A)$ è nilpotente.

DIMOSTRAZIONE. Siano L_A e R_A gli endomorfismi di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ definiti rispettivamente da:

$$\begin{cases} L_A(X) = A \circ X & \forall X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V) \\ R_A(X) = X \circ A & \forall X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V). \end{cases}$$

Chiaramente L_A ed R_A sono nilpotenti e commutano tra loro. Quindi anche

$$\text{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)}(A) = L_A - R_A$$

è nilpotente. \square

TEOREMA 23.9.2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 1$ su \mathbb{k} . Sia α una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ formata da elementi nilpotenti. Allora esiste un vettore $v \in V \setminus \{0\}$ tale che $A(v) = 0$ per ogni $A \in \alpha$.

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per induzione su $m = \dim_{\mathbb{k}}(\alpha)$. Se $m \leq 1$, la tesi è banalmente vera. Supponiamo quindi $m > 1$ e il teorema valido per algebre di Lie di dimensione $< m$ di endomorfismi nilpotenti di uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Sia \mathfrak{b} , con $\{0\} \subsetneq \mathfrak{b} \subsetneq \alpha$, una sottoalgebra di Lie di α . Per il Lemma 23.9.1, $\text{ad}_{\alpha}(\mathfrak{b})$ è un'algebra di Lie di endomorfismi nilpotenti di α . Per passaggio al quoziente, gli elementi di \mathfrak{b} definiscono un'algebra di Lie di endomorfismi nilpotenti di α/\mathfrak{b} . Per l'ipotesi induttiva esiste allora $A \in \alpha \setminus \mathfrak{b}$ tale che $[\mathfrak{b}, A] \subset \mathfrak{b}$. In particolare $N_{\alpha}(\mathfrak{b}) \supseteq \mathfrak{b}$.

Scegliamo ora la sottoalgebra \mathfrak{b} massimale tra le sottoalgebre di Lie propriamente contenute in α . Per le considerazioni precedenti deve essere $N_{\alpha}(\mathfrak{b}) = \alpha$ e quindi \mathfrak{b} è un ideale di α . Consideriamo il morfismo di algebre di Lie $\pi : \alpha \rightarrow \alpha/\mathfrak{b}$. Se α/\mathfrak{b} avesse dimensione maggiore di 1, l'immagine inversa $\pi^{-1}(1)$ di una retta 1 di α/\mathfrak{b} sarebbe una sottoalgebra di α con $\mathfrak{b} \subsetneq \pi^{-1}(1) \subsetneq \alpha$. Questo è assurdo per la massimalità di \mathfrak{b} e quindi $\dim_{\mathbb{k}} \alpha/\mathfrak{b} = 1$.

Dunque, se $A \in \alpha \setminus \mathfrak{b}$, abbiamo

$$\alpha = \mathfrak{b} \oplus \mathbb{k}A.$$

Sia $W = \{v \in V \mid B(v) = 0, \forall B \in \mathfrak{b}\}$. Per l'ipotesi induttiva $\dim_{\mathbb{k}} W > 0$. Inoltre, poiché \mathfrak{b} è un ideale di α , abbiamo $A(W) \subset W$. Infatti $B(A(w)) = A(B(w)) + [B, A](w) = 0$ per ogni $w \in W$ e $B \in \mathfrak{b}$. La restrizione di A a W è ancora nilpotente e quindi esiste $v \in W \setminus \{0\}$ tale che $A(v) = 0$. Questo implica che $X(v) = 0$ per ogni $X \in \alpha$. La dimostrazione è completa. \square

Dal Teorema 23.9.2 si ottiene il

TEOREMA 23.9.3 (Engel). *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{k} . Condizione necessaria e sufficiente affinché \mathfrak{g} sia nilpotente è che tutti i suoi elementi siano ad-nilpotenti.*

DIMOSTRAZIONE. La necessità è ovvia. Per dimostrare la sufficienza ragioniamo per ricorrenza su $m = \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$. Se $m \leq 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo $m > 1$. Per il teorema precedente esiste $X \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ tale che $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)(X) = 0$ per ogni $Y \in \mathfrak{g}$. In particolare $X \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$. Osserviamo a questo punto che $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}/Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ ha dimensione $< m$ ed ogni elemento di \mathfrak{a} è ad-nilpotente. Per l'ipotesi induttiva \mathfrak{a} è nilpotente e questo implica che \mathfrak{g} è nilpotente. \square

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su \mathbb{k} . Una *bandiera completa* in V è una successione di sottospazi vettoriali di V :

$$(23.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n \\ \text{con } \dim_{\mathbb{k}} V_i = i \text{ per } 0 \leq i \leq n. \end{array} \right.$$

Vale il seguente:

TEOREMA 23.9.4. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{k} e sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di endomorfismi nilpotenti di V . Allora esiste una bandiera completa $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$ tale che $X(V_i) \subset V_{i-1}$ per ogni $1 \leq i \leq n$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\dim_{\mathbb{k}} V = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi $\dim_{\mathbb{k}}(V) = n > 0$ e il teorema vero per algebre di Lie nilpotenti di endomorfismi di uno spazio vettoriale di dimensione $< n$ su \mathbb{k} . Per il Teorema 23.9.2, esiste $v_1 \in V \setminus \{0\}$ tale che $X(v_1) = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Sia $V_1 = \mathbb{k} \cdot v_1$ e consideriamo la rappresentazione ρ di \mathfrak{g} su $W = V/V_1$ ottenuta per passaggio al quoziente. Sia $\pi : V \rightarrow W$ la proiezione nel quoziente. Poiché $\rho(\mathfrak{g})$ consiste di endomorfismi nilpotenti di W , esiste per l'ipotesi induttiva una bandiera completa $\{W_i\}_{0 \leq i \leq n-1}$ di W tale che $\rho(X)(W_i) \subset W_{i-1}$. Otteniamo allora la bandiera completa $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$ desiderata aggiungendo a $\{0\} = V_0$ e a $V_1 = \mathbb{k} \cdot v_1$ i sottospazi $V_i = \pi^{-1}(W_{i-1})$ per $2 \leq i \leq n$. \square

Applicando questo risultato alla rappresentazione aggiunta otteniamo:

TEOREMA 23.9.5. *Se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie nilpotente, allora esiste una successione di ideali di \mathfrak{g} :*

$$\mathfrak{a}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{m-1} \subset \mathfrak{a}_m = \mathfrak{g}$$

tale che, per ogni $1 \leq h \leq m$, l'algebra di Lie $\mathfrak{a}_h/\mathfrak{a}_{h-1}$ sia abeliana e di dimensione uno.

TEOREMA 23.9.6. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo \mathbb{k} e sia \mathfrak{g} una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ formata da endomorfismi nilpotenti. Allora \mathfrak{g} è un'algebra di Lie nilpotente.*

DIMOSTRAZIONE. Sia infatti $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$ una bandiera completa tale che $X(V_i) \subset V_{i-1}$ per $1 \leq i \leq n$, per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Scegliamo una base e_1, \dots, e_n di V tale che $e_i \in V_i \setminus V_{i-1}$. In tale base ogni elemento di \mathfrak{g} si rappresenta con una matrice di $n(n, \mathbb{k})$. Da questa osservazione segue la tesi. \square

LEMMA 23.9.7. *Se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie nilpotente di dimensione finita ed α un ideale di \mathfrak{g} , allora $\alpha \cap Z_{\mathfrak{g}} \neq \{0\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Facciamo operare \mathfrak{g} su α mediante la rappresentazione aggiunta. Tutti gli $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)|_{\alpha}$, per $X \in \mathfrak{g}$, sono nilpotenti e quindi esiste $A \in \alpha$ tale che $[\mathfrak{g}, A] = \{0\}$. È quindi $A \in \alpha \cap Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. \square

23.10. Il Teorema di Lie

TEOREMA 23.10.1. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita $n > 0$ su un campo \mathbb{k} , di caratteristica 0 e algebricamente chiuso. Sia \mathfrak{g} una sottoalgebra di Lie risolubile di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$. Esiste allora un vettore $v \in V \setminus \{0\}$ tale che*

$$(23.38) \quad \forall A \in \mathfrak{g} \quad \exists \lambda(A) \in \mathbb{k} \quad \text{tale che} \quad A(v) = \lambda(A)v.$$

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per induzione su $m = \dim_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$. La tesi è banale se $m \leq 1$. Supponiamo quindi $m > 1$ ed il teorema vero per algebre risolubili, di dimensione minore di m , di endomorfismi lineari di uno spazio di dimensione finita positiva sul campo \mathbb{k} .

Osserviamo che \mathfrak{g} contiene un ideale α di codimensione 1: a questo scopo basta scegliere α uguale a un qualsiasi iperpiano di \mathfrak{g} contenente $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Per l'ipotesi induttiva, esiste una forma lineare $\lambda : \alpha \rightarrow \mathbb{k}$ tale che il sottospazio

$$W = \{v \in V \mid \forall A \in \alpha, \exists \lambda_v(A) \in \mathbb{k} \text{ tale che } A(v) = \lambda_v(A)v\}$$

abbia dimensione positiva.

Dimostriamo ora che $X(W) \subset W$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Siano $w \in W$ ed $X \in \mathfrak{g}$. Se $Y \in \alpha$ abbiamo:

$$Y(X(w)) = X(Y(w)) + [Y, X](w) = \lambda_w(Y)(X(w)) + \lambda_w([Y, X])(w).$$

Basterà quindi dimostrare che $\lambda_w([X, Y]) = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$ ed $Y \in \alpha$. Fissiamo $X \in \mathfrak{g}$ e $w \in W$. Sia k il più grande intero non negativo tale che

$$(23.39) \quad w, X(w), \dots, X^k(w)$$

siano linearmente indipendenti. Indichiamo con W_i il sottospazio vettoriale di dimensione i generato da $w, X(w), \dots, X^{i-1}(w)$, per $1 \leq i \leq k+1$ e poniamo $W_0 = \{0\}$. Ogni $Y \in \alpha$ lascia i sottospazi W_i invarianti e quindi la sua restrizione a W_{k+1} si scrive come una matrice triangolare superiore nella base (23.39). Verifichiamo, per ricorrenza su $i = 0, \dots, k$ che

$$(23.40) \quad w_{i,Y} = Y(X^i(w)) - \lambda_w(Y)X^i(w) \in W_i \quad \forall Y \in \alpha,$$

per $i = 0, \dots, k$.

Per $i = 0$ questo è conseguenza della definizione di W . Supponiamo ora che la (23.40) valga per $i = h$, con $0 \leq h < k$ e dimostriamo che vale per $i = h + 1$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
 Y(X^{h+1}(w)) &= Y(X(X^h(w))) \\
 &= XY(X^h(w)) - [X, Y](X^h(w)) \\
 &= X(\lambda_w(Y)X^h(w) + w_{h,Y}) - \lambda_w([X, Y])X^h(w) - w_{h,[X,Y]} \\
 &= \lambda_w(Y)X^{h+1}(w) + X(w_{h,Y}) - \lambda_w([X, Y])X^h(w) - w_{h,[X,Y]} \\
 &= \lambda_w(Y)X^{h+1}(w) + w_{h+1,Y}
 \end{aligned}$$

e $w_{h+1,Y} \in W_{h+1}$ perché $X(w_{h,Y}) \in X(W_h) \subset W_{h+1}$, $X^h(w) \in W_{h+1}$ e $w_{h,[X,Y]} \in W_h \subset W_{h+1}$. In particolare, per ogni Y possiamo considerare la traccia $\text{tr}_{W_{k+1}}(Y)$ della restrizione di Y a W_{k+1} e

$$\text{tr}_{W_{k+1}}(Y) = (k+1)\lambda_w(Y).$$

Ora, anche X opera su W_{k+1} e la traccia della restrizione a W_{k+1} del commutatore $[X, Y]$ è nulla. Da

$$0 = \text{tr}_{W_{k+1}}([X, Y]) = (k+1)\lambda_w([X, Y])$$

segue che $\lambda_w([X, Y]) = 0$ perché \mathbb{k} ha caratteristica zero.

Quindi W è \mathfrak{g} -invariante. Se $A \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{a}$, abbiamo $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathbb{k}A$. Osserviamo che, essendo \mathbb{k} algebricamente chiuso, $W \ni w \rightarrow A(w) \in W$ ha un autovettore $v \in W \setminus \{0\}$. Tale $v \neq 0$ soddisfa la tesi del teorema. \square

Come corollario del Teorema 23.10.1, otteniamo il TEOREMA DI LIE:

TEOREMA 23.10.2 (Lie). *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo algebricamente chiuso \mathbb{k} di caratteristica 0. Sia \mathfrak{g} un'algebra risolubile di endomorfismi di V . Allora esiste una bandiera completa $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$ di V tale che $A(V_i) \subset V_i$ per ogni $A \in \mathfrak{g}$.*

Se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie risolubile (di dimensione finita su un campo \mathbb{k} algebricamente chiuso di caratteristica zero) e $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ una sua rappresentazione lineare di dimensione finita, $\rho(\mathfrak{g})$ è risolubile e quindi stabilizza una bandiera completa di V . Applicando questa osservazione alla rappresentazione aggiunta di \mathfrak{g} otteniamo:

TEOREMA 23.10.3. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie risolubile di dimensione finita n su un campo \mathbb{k} algebricamente chiuso di caratteristica zero. Allora esiste una catena di ideali*

$$(23.41) \quad \{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{n-1} \subset \mathfrak{a}_n = \mathfrak{g}$$

di \mathfrak{g} con $\dim_{\mathbb{k}}(\mathfrak{a}_i) = i$ per $i = 0, 1, \dots, n-1, n$.

Vale il seguente risultato relativo al cambiamento del campo di base:

LEMMA 23.10.4. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo \mathbb{k} . Sia $\tilde{\mathbb{k}}$ un'estensione del campo \mathbb{k} . Sia $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathbb{k}} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di dimensione finita su $\tilde{\mathbb{k}}$ ottenuta per estensione $\tilde{\mathbb{k}}$ -bilinare del commutatore di \mathfrak{g} . Allora*

- (1) $\tilde{\mathfrak{g}}$ è risolubile se e soltanto se \mathfrak{g} è risolubile.
- (2) $\tilde{\mathfrak{g}}$ è nilpotente se e soltanto se \mathfrak{g} è nilpotente.

Utilizzando il lemma, dimostriamo il seguente:

TEOREMA 23.10.5. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo \mathbb{k} di caratteristica zero. L'algebra \mathfrak{g} è risolubile se e soltanto se il suo ideale derivato $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è nilpotente.*

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente, se $\mathfrak{g}^{(1)}$ è nilpotente, \mathfrak{g} è risolubile. Dimostriamo il viceversa.

Per il lemma precedente, possiamo supporre che il campo \mathbb{k} sia algebricamente chiuso: infatti, detta $\tilde{\mathbb{k}}$ la chiusura algebrica di \mathbb{k} e posto $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathbb{k}} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$, abbiamo $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)} = \tilde{\mathbb{k}} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}^{(1)}$.

Sia dunque \mathbb{k} algebricamente chiuso; sia $\{\alpha_i\}_{0 \leq i \leq n}$ una catena crescente di ideali di \mathfrak{g} con $\dim_{\mathbb{k}} \alpha_i = i$. Fissiamo una base X_1, \dots, X_n di \mathfrak{g} con $X_i \in \alpha_i \setminus \alpha_{i-1}$ per $1 \leq i \leq n$. Per ogni $X \in \mathfrak{g}$, l'endomorfismo $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ si rappresenta nella base X_1, \dots, X_n mediante una matrice di $t(n, \mathbb{k})$. Poiché $\text{ad}_{\mathfrak{g}}([X, Y]) = [\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X), \text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)]$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$, gli elementi di $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{(1)})$ si rappresentano nella base X_1, \dots, X_n come matrici di $n(n, \mathbb{k})$ e sono quindi nilpotenti. Ne segue che $\mathfrak{g}^{(1)}$ è nilpotente per il teorema di Engel. \square

Come corollario deduciamo il seguente:

TEOREMA 23.10.6. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie risolubile su un campo \mathbb{k} di caratteristica zero. Allora possiamo costruire una successione crescente di sottoalgebre di \mathfrak{g}*

$$\{0\} = \alpha_0 \subset \alpha_1 \subset \dots \subset \alpha_{m-1} \subset \alpha_m = \mathfrak{g},$$

tali che, per ogni h con $1 \leq h \leq m$, α_{h-1} sia un'ideale in α_h ed il quoziente α_h/α_{h-1} sia un'algebra di Lie abeliana di dimensione uno.

DIMOSTRAZIONE. Siano $m = \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$, $m' = \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}^{(1)}$ e $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ la proiezione nel quoziente. Poiché $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ è abeliana, se

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{m-m'} = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$$

è una qualsiasi bandiera completa, le $\alpha_h = \pi^{-1}(V_{h-m'})$, per $h = m', \dots, m$ sono sottoalgebre di \mathfrak{g} di dimensione h . Ciascuna è un'ideale di codimensione uno nella successiva e α_h/α_{h-1} è abeliana di dimensione uno per $h = m' + 1, \dots, m$.

Per concludere la dimostrazione basta osservare che $\alpha_{m'} = \mathfrak{g}^{(1)}$ è un'algebra di Lie nilpotente e quindi per il teorema di Engel contiene una sequenza di ideali

$$\{0\} = \alpha_0 \subset \alpha_1 \subset \dots \subset \alpha_{m'-1} \subset \alpha_{m'} = \mathfrak{g}^{(1)},$$

tali che α_h/α_{h-1} sia un'algebra di Lie abeliana di dimensione uno, per $h = 1, \dots, m'$. \square

Osserviamo che, a differenza del caso in cui avevamo supposto che \mathbb{k} fosse algebricamente chiuso, qui non possiamo in generale ottenere che gli α_h siano ideali in \mathfrak{g} , ma soltanto ciascuno un ideale nella successiva sottoalgebra α_{h+1} di \mathfrak{g} .

23.11. Il più grande ideale di nilpotenza di una rappresentazione

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su un campo \mathbb{k} .

LEMMA 23.11.1. *Sia α un ideale di \mathfrak{g} e $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ una rappresentazione lineare irriducibile, di dimensione finita, di \mathfrak{g} , tale che, per ogni $X \in \alpha$, $\rho_V(X)$ sia nilpotente su V . Allora $\rho_V(\alpha) = \{0\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $W = \{v \in V \mid \rho_V(X)(v) = 0, \forall X \in \alpha\}$. Per il teorema di Engel, $W \neq \{0\}$. D'altra parte, poiché α è un ideale, W è un sottospazio $\rho_V(\mathfrak{g})$ -invariante di V . Per l'irriducibilità, $W = V$. \square

LEMMA 23.11.2. *Sia $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ una rappresentazione lineare di \mathfrak{g} , e sia*

$$(23.42) \quad \{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_\nu = V$$

una sua serie di Jordan-Hölder¹. Per un ideale α di \mathfrak{g} sono equivalenti

- (1) *per ogni $X \in \alpha$, $\rho_V(X)$ è un endomorfismo nilpotente di V ;*
- (2) *$\rho(X)(W_h) \subset W_{h-1}$ per ogni $X \in \alpha$ ed ogni $h = 1, \dots, \nu$.*

DIMOSTRAZIONE. L'implicazione (2) \Rightarrow (1) è ovvia. Mostriamo che vale anche l'implicazione opposta.

Sia α un ideale di \mathfrak{g} tale che $\rho_V(\alpha)$ sia un'algebra di endomorfismi nilpotenti di V .

Per tutte le rappresentazioni $\rho_{W_h/W_{h-1}}$ indotte dalla ρ_V per passaggio al quoziente gli endomorfismi di $\rho_{W_h/W_{h-1}}(\alpha)$ sono nilpotenti su W/W_{h-1} . Poiché le rappresentazioni $\rho_{W_h/W_{h-1}}$ sono irriducibili, per il lemma precedente $\rho_{W_h/W_{h-1}}(X) = 0$ per ogni $X \in \alpha$, e ciò equivale alla (2). \square

Sia $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ una rappresentazione lineare di \mathfrak{g} , e sia (23.42) una sua serie di Jordan-Hölder. L'insieme

$$(23.43) \quad \pi_V = \{X \in \mathfrak{g} \mid \rho_V(X)(W_h) \subset W_{h-1}, \forall h = 1, \dots, \nu\}$$

è un ideale di \mathfrak{g} , che non dipende dalla particolare scelta della serie di Jordan-Hölder utilizzata nella sua definizione.

DEFINIZIONE 23.11.3. L'ideale π_V definito dalla (23.43) si dice il *più grande ideale di nilpotenza* della rappresentazione ρ_V .

¹Ogni sottospazio W_h è $\rho_V(\mathfrak{g})$ -invariante e le rappresentazioni indotte sui quozienti W_h/W_{h-1} sono irriducibili.

23.12. Il radicale nilpotente e il nilradicale

In tutto questo paragrafo supporremo che il campo \mathbb{k} abbia caratteristica zero. Tutte le algebre di Lie considerate saranno algebre di Lie su \mathbb{k} di dimensione finita.

DEFINIZIONE 23.12.1. Si dice *radicale nilpotente* dell'algebra di Lie \mathfrak{g} l'intersezione $\text{nil}(\mathfrak{g})$ dei nuclei delle sue rappresentazioni lineari irriducibili di dimensione finita.

LEMMA 23.12.2. Sia $V \neq \{0\}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{k} e \mathfrak{g} una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$. Supponiamo che V sia un \mathfrak{g} -modulo irriducibile. Se \mathfrak{a} è un ideale abeliano di \mathfrak{g} , allora $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}^{(1)} = \{0\}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathcal{A} la sottoalgebra unitaria (commutativa) di $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ generata da 1_V ed \mathfrak{a} . Dimostriamo che

se \mathfrak{b} è un ideale di \mathfrak{g} contenuto in \mathfrak{a} e $\text{tr}_V(AB) = 0$ per ogni $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathfrak{b}$, allora $\mathfrak{b} = \{0\}$.

Abbiamo infatti, se $B \in \mathfrak{b}$,

$$\text{tr}_V(B^n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > 0,$$

e quindi ogni elemento $B \in \mathfrak{b}$ è nilpotente. Per il teorema di Engel,

$$W = \bigcap_{B \in \mathfrak{b}} \ker B \neq \{0\}.$$

Poiché \mathfrak{b} è un ideale di \mathfrak{g} abbiamo

$$B(X(v)) = X(B(v)) - [X, B](v) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall B \in \mathfrak{b}, \quad \forall v \in W.$$

Quindi W è \mathfrak{g} -invariante e perciò $W = V$ in quanto avevamo supposto che V fosse un \mathfrak{g} -modulo irriducibile. Ciò implica che $\mathfrak{b} = \{0\}$.

Possiamo applicare questo risultato a $\mathfrak{b} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$. Infatti: se $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{a}$ ed $A \in \mathcal{A}$, otteniamo:

$$\text{tr}_V([X, Y]A) = \text{tr}_V(XYA - YXA) = \text{tr}_V(XYA - XAY) = \text{tr}_V(X[Y, A]) = 0$$

perché \mathcal{A} è una sottoalgebra commutativa di $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$. Quindi $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = 0$. Da ciò segue che gli endomorfismi di \mathfrak{g} commutano con quelli di \mathcal{A} . Fissiamo quindi $X, Y \in \mathfrak{g}$ ed $A \in \mathcal{A}$. Abbiamo:

$$\text{tr}_V([X, Y]A) = \text{tr}_V(X[Y, A]) = 0$$

perché $[Y, A] = 0$. Quindi $\text{tr}_V(ZA) = 0$ per ogni $Z \in \mathfrak{g}^{(1)}$, $A \in \mathcal{A}$. Applicando quindi le considerazioni svolte all'inizio della dimostrazione all'ideale $\mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$, otteniamo che $\mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{a} = \{0\}$. \square

Dal Lemma 23.12.2 otteniamo la seguente caratterizzazione del radicale nilpotente:

TEOREMA 23.12.3. Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo \mathbb{k} di caratteristica zero. Allora

$$(23.44) \quad \text{nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g}).$$

DIMOSTRAZIONE. Ogni funzionale lineare $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$ che si annulla su $\mathfrak{g}^{(1)}$ definisce una rappresentazione unidimensionale, e quindi irriducibile, di \mathfrak{g} . Quindi $\text{nil}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}$.

Consideriamo la rappresentazione aggiunta di \mathfrak{g} . Possiamo determinare una sequenza di sottospazi vettoriali $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ -invarianti di \mathfrak{g} :

$$\mathfrak{g}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_m = \mathfrak{g}$$

tali che la rappresentazione indotta su ciascuno dei quozienti $\mathfrak{g}_h/\mathfrak{g}_{h-1}$, per $1 \leq h \leq m$, sia irriducibile. In particolare $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ è nilpotente per ogni $X \in \text{nil}(\mathfrak{g})$, in quanto $[X, \mathfrak{g}_h] \subset \mathfrak{g}_{h-1}$ per ogni $h = 1, \dots, m$ se $X \in \text{nil}(\mathfrak{g})$. Per il teorema di Engel $\text{nil}(\mathfrak{g})$ è un ideale nilpotente di \mathfrak{g} e quindi è contenuto in $\text{rad}(\mathfrak{g})$.

Abbiamo quindi ottenuto l'inclusione

$$\text{nil}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g}).$$

Per dimostrare l'inclusione opposta, consideriamo una qualsiasi rappresentazione lineare irriducibile di dimensione finita $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$.

Sia $k \geq 0$ il più piccolo numero naturale tale che $\rho(D^{k+1}\text{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$. Poniamo $\mathfrak{g}' = \rho(\mathfrak{g})$ ed $\alpha = \rho(D^k\text{rad}(\mathfrak{g}))$. Allora V è un \mathfrak{g}' -modulo irriducibile ed α un ideale abeliano di \mathfrak{g}' . Per il Lemma 23.12.2,

$$\rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap D^k\text{rad}(\mathfrak{g})) \subset D\mathfrak{g}' \cap \alpha = \{0\}.$$

Se fosse $k > 0$, avremmo $D^k\text{rad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}$ e quindi $\rho(D^k\text{rad}(\mathfrak{g})) = \rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap D^k\text{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$ contraddirebbe la scelta di k . Deve essere perciò $k = 0$ e quindi $\rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$. Dunque $\ker \rho \supset \mathfrak{g}^{(1)} \cap \text{rad}(\mathfrak{g})$ per ogni rappresentazione ρ irriducibile di dimensione finita: la dimostrazione è completa. \square

COROLLARIO 23.12.4. *Il radicale nilpotente $\text{nil}(\mathfrak{g})$ è un ideale caratteristico di \mathfrak{g} .*

COROLLARIO 23.12.5. *Se \mathfrak{g} è risolubile, allora il suo radicale nilpotente coincide con il suo ideale derivato $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

Per ogni rappresentazione semplice di dimensione finita $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ di un'algebra di Lie risolubile \mathfrak{g} , la $\rho(\mathfrak{g})$ è commutativa e la sottoalgebra associativa di $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ generata dall'identità I_V e da $\rho(\mathfrak{g})$ è un'estensione algebrica di \mathbb{k} .

DIMOSTRAZIONE. Poiché \mathfrak{g} coincide con il proprio radicale \mathfrak{r} , abbiamo $\text{nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{g}^{(1)}$. Quindi $[\rho(\mathfrak{g}), \rho(\mathfrak{g})] = \rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \{0\}$ e $\rho(\mathfrak{g})$ è commutativa. La sottoalgebra associativa \mathbb{K}_{ρ} di $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ generata da $\rho(\mathfrak{g})$ e da I_V è quindi un'algebra commutativa in cui ogni elemento diverso da zero è invertibile per il lemma di Schur. Quindi \mathbb{K}_{ρ} è un campo. Poiché è uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{k} , esso ne è un'estensione algebrica. \square

COROLLARIO 23.12.6. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su \mathbb{k} , con radicale \mathfrak{r} . Allora i seguenti insiemi sono uguali:*

- (1) *il più grande ideale nilpotente di \mathfrak{g} ;*
- (2) *il più grande ideale nilpotente di \mathfrak{r} ;*
- (3) *l'insieme degli $X \in \mathfrak{r}$ tali che $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ sia nilpotente;*
- (4) *l'insieme degli $X \in \mathfrak{r}$ tali che $\text{ad}_{\mathfrak{r}}(X)$ sia nilpotente.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con a, b, c, d gli ideali descritti rispettivamente nei punti (1), (2), (3) (4). Abbiamo chiaramente $a \subset b \subset c \subset d$. Poiché $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{r}$ per ogni $X \in \mathfrak{r}$, vale anche l'inclusione $d \subset c$ e quindi $c = d$. Per dimostrare che i quattro ideali sono uguali basterà quindi verificare che $c \subset a$. Consideriamo la rappresentazione aggiunta di \mathfrak{r} in \mathfrak{g} e sia

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{m-1} \subset V_m = \mathfrak{g}$$

una serie di Jordan-Hölder per $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$, cioè una catena massimale di sottospazi vettoriali $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ -invarianti di \mathfrak{g} . Indichiamo con ρ_h la rappresentazione indotta sul quoziente V_h/V_{h-1} dalla restrizione a \mathfrak{r} della rappresentazione aggiunta. Poiché essa è irriducibile, abbiamo $\rho_h(X) = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{r}$ per cui $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ è nilpotente. Quindi $d = \bigcap_h \ker \rho_h$ è un ideale nilpotente di \mathfrak{g} e quindi è contenuto in a . \square

DEFINIZIONE 23.12.7. L'ideale \mathfrak{n} formato dagli elementi $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -nilpotenti del radicale \mathfrak{r} di \mathfrak{g} si dice il *nilradicale* o il *più grande ideale nilpotente* di \mathfrak{g} .

COROLLARIO 23.12.8. *Il nilradicale di \mathfrak{g} è un suo ideale caratteristico.*

Se indichiamo con \mathfrak{n}_0 il radicale nilpotente² $\text{nil}(\mathfrak{g})$ di \mathfrak{g} , abbiamo la catena di inclusioni

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{r} \supset \mathfrak{n} \supset \mathfrak{n}_0.$$

23.13. Automorfismi speciali

PROPOSIZIONE 23.13.1. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su un campo \mathbb{k} di caratteristica zero e siano \mathfrak{n} il suo ideale nilpotente massimale ed \mathfrak{n}_0 il suo radicale nilpotente. Allora*

$$\text{Aut}_{\mathfrak{n}} = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{n}\} \quad \text{ed} \quad \text{Aut}_{\mathfrak{n}_0} = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{n}_0\}$$

sono sottogruppi normali di $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ contenuti in $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che sia \mathfrak{n} che \mathfrak{n}_0 sono ideali caratteristici di \mathfrak{g} , cioè invarianti per automorfismi di \mathfrak{g} . \square

DEFINIZIONE 23.13.2. Gli elementi di $\text{Aut}_{\mathfrak{n}_0}(\mathfrak{g})$ si dicono *automorfismi speciali* di \mathfrak{g} .

Vale la seguente precisazione del Teorema 23.7.2:

TEOREMA 23.13.3. *Se I, I' sono due sottoalgebre di Levi di un'algebra di Lie \mathfrak{g} su un campo \mathbb{k} di caratteristica zero, allora esiste un automorfismo speciale $a \in \text{Aut}_{\mathfrak{n}_0}(\mathfrak{g})$ tale che $I' = a(I)$.*

² Anche l'inclusione $\mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}$ può essere propria. Ad esempio, se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie abeliana, abbiamo $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{n}_0 = \{0\}$.

Parte 5

Gruppi ed algebre di Lie e spazi omogenei

Gruppi e algebre di Lie

24.1. Nozioni fondamentali

DEFINIZIONE 24.1.1. Un'algebra di Lie¹ \mathfrak{g} su un campo \mathbb{k} è uno spazio vettoriale su \mathbb{k} su cui è assegnato un prodotto bilineare $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$ tale che

- (1) $[X, X] = 0, \forall X \in \mathfrak{g},$ (antisimmetria),
 (2) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ (identità di Jacobi).

DEFINIZIONE 24.1.2. Un *gruppo di Lie* è un gruppo \mathbf{G} su cui è fissata una struttura di varietà differenziabile per cui l'operazione di gruppo $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (a, b) \rightarrow ab^{-1} \in \mathbf{G}$ sia differenziabile.

Poiché \mathbf{G} è localmente connesso, la componente connessa dell'identità \mathbf{G}^0 di \mathbf{G} è connessa per archi ed è un sottogruppo normale aperto e chiuso in \mathbf{G} .

\mathbf{G}^0 è numerabile all'infinito e quindi condizione necessaria e sufficiente affinché lo sia anche \mathbf{G} è che il quoziente \mathbf{G}/\mathbf{G}^0 sia al più numerabile.

Per ogni elemento a di \mathbf{G} ,

$$\begin{aligned} \text{le traslazioni a sinistra :} & \quad L_a : \mathbf{G} \ni g \rightarrow ag \in \mathbf{G}, \\ \text{le traslazioni a destra :} & \quad R_a : \mathbf{G} \ni g \rightarrow ga \in \mathbf{G}, \\ \text{gli automorfismi interni :} & \quad \text{ad}(a) : \mathbf{G} \ni g \rightarrow aga^{-1} \in \mathbf{G}, \end{aligned}$$

sono diffeomorfismi di \mathbf{G} in sé.

A volte scriveremo per semplicità

$$aX \text{ per } L_{a*}(X) \text{ ed } Xa \text{ per } R_{a*}(X), \text{ se } a \in \mathbf{G}, X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G}).$$

DEFINIZIONE 24.1.3. Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$ si dice *invariante a sinistra* se $aX = L_{a*}(X) = X$, per ogni $a \in \mathbf{G}$.

PROPOSIZIONE 24.1.4. I campi di vettori invarianti a sinistra formano una sottoalgebra di Lie reale $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$ di $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$. L'applicazione

$$(24.1) \quad T_e \mathbf{G} \ni X_e \rightarrow \{X_a = L_{a*}(X_e) \mid a \in \mathbf{G}\} \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$$

è un isomorfismo lineare. □

DEFINIZIONE 24.1.5. Indichiamo con \mathfrak{g} , e chiamiamo *algebra di Lie* di \mathbf{G} , lo spazio vettoriale $T_e \mathbf{G}$, con la struttura di algebra di Lie reale che rende (24.1) un isomorfismo di algebre di Lie.

¹Vedi il Capitolo XXIII.

NOTAZIONE 24.1.6. Denoteremo con $X^* \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$ il campo di vettori invariante a sinistra corrispondente all'elemento X di \mathfrak{g} .

PROPOSIZIONE 24.1.7. *Il campo $X^* \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$ genera un gruppo a un parametro $\phi_X(t)$ di diffeomorfismi di \mathbf{G} .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $X \in \mathfrak{g}$. Se $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{G})$ è una curva integrale di X^* , abbiamo $\dot{\gamma} = \gamma \cdot X$. Il flusso $\phi_X(a, t)$ di X^* soddisfa quindi la

$$\phi_X(a, t) = ab^{-1}\phi_X(b, t) \quad \forall a, b \in \mathbf{G},$$

ed, a priori, per $|t|$ sufficientemente piccolo. Questa formula ci permette di estendere la definizione di $\phi_X(a, t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se infatti $\phi_X(e, t)$ è definita per $|t| < \epsilon$, dalla

$$\phi_X(a, t + s) = \phi_X(\phi_X(a, t), s) = \phi_X(a, t)\phi_X(e, s)$$

ricaviamo che la $\phi_X(a, t)$ definita su un intervallo $(t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$, si può estendere all'intervallo $(t_1 - \epsilon, t_2 + \epsilon)$ ponendo

$$\phi_X(a, t) = \phi_X(a, t')\phi_X(e, t''), \quad \text{se } t' \in (t_1, t_2), \quad |t''| < \epsilon, \quad t = t' + t''. \quad \square$$

DEFINIZIONE 24.1.8. L'applicazione

$$(24.2) \quad \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \exp(X) = \phi_X(e, 1) \in \mathbf{G}$$

si dice l'*applicazione esponenziale* di \mathbf{G} .

Poiché

$$(24.3) \quad \exp((t_1 + t_2)X) = \exp(t_1X)\exp(t_2X) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

l'insieme $\{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo abeliano di \mathbf{G} .

DEFINIZIONE 24.1.9. $\{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}$ si dice *il sottogruppo a un parametro di \mathbf{G} generato da $X \in \mathfrak{g}$* .

PROPOSIZIONE 24.1.10. *Il gruppo a un parametro di diffeomorfismi di \mathbf{G} generato dal campo di vettori invariante a sinistra $X^* \in \mathfrak{g}$ associato ad $X \in \mathfrak{g}$ è descritto dalla*

$$(24.4) \quad \mathbf{G} \times \mathbb{R} \ni (a, t) \longrightarrow \phi_X(a, t) = a \cdot \exp(tX) \in \mathbf{G}. \quad \square$$

PROPOSIZIONE 24.1.11 (coordinate di prima specie). *L'applicazione esponenziale definisce un diffeomorfismo di un intorno aperto di 0 in \mathfrak{g} su un intorno aperto di e in \mathbf{G} .*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, il differenziale in 0 dell'applicazione esponenziale è l'identità e quindi la tesi è conseguenza del teorema dell'applicazione inversa. \square

ESEMPIO 24.1.12. Il gruppo delle matrici reali $n \times n$ invertibili $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie, di dimensione n^2 . La sua algebra di Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali $n \times n$ e l'esponenziale coincide con quello definito per le matrici :

$$(24.5) \quad \exp(X) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} X^h.$$

Il suo sottogruppo $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ delle matrici con determinante 1 è anch'esso un gruppo di Lie. Ha dimensione $(n^2 - 1)$ e la sua algebra di Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ è formata dalle matrici reali con traccia nulla.

ESEMPIO 24.1.13. Il gruppo delle matrici complesse $n \times n$ invertibili $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ è un gruppo di Lie di dimensione $2n^2$. La sua algebra di Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ consiste di tutte le matrici complesse $n \times n$. L'esponenziale anche in questo caso coincide con l'esponenziale di matrici.

Il suo sottogruppo normale

$$(24.6) \quad \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det a = 1\}$$

è un gruppo di Lie di dimensione $2n^2 - 1$, con algebra di Lie

$$(24.7) \quad \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}.$$

ESEMPIO 24.1.14. Il gruppo ortogonale

$$(24.8) \quad \mathbf{O}(n) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t a = a^{-1}\}$$

è un gruppo di Lie compatto di dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$. La sua algebra di Lie

$$(24.9) \quad \mathfrak{o}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid A + {}^t A = 0\}$$

consiste delle matrici reali antisimmetriche.

Il suo sottogruppo normale

$$(24.10) \quad \mathbf{SO}(n) = \{a \in \mathbf{O}(n) \mid \det a = 1\}$$

ha indice due in $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$ hanno la stessa algebra di Lie $\mathfrak{o}(n)$.

Se $n \geq 3$, il gruppo fondamentale di $\mathbf{SO}(n)$ è isomorfo a \mathbb{Z}_2 . Il suo rivestimento fondamentale, a due fogli, è un gruppo di Lie compatto, che si indica con $\mathbf{Spin}(n)$ e si dice *gruppo di spin*.

ESEMPIO 24.1.15. Il *gruppo unitario* è il gruppo

$$(24.11) \quad \mathbf{U}(n) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid a^* = a^{-1}\}$$

è un gruppo di Lie compatto di dimensione n^2 , con algebra di Lie

$$(24.12) \quad \mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid A + A^* = 0\}.$$

Il *gruppo speciale unitario*

$$(24.13) \quad \mathbf{SU}(n) = \{a \in \mathbf{U}(n) \mid \det a = 1\}$$

è un suo sottogruppo di Lie normale, di dimensione $n^2 - 1$, con algebra di Lie

$$(24.14) \quad \mathfrak{su}(n) = \{A \in \mathfrak{u}(n) \mid \operatorname{tr} A = 0\}.$$

Abbiamo un isomorfismo di gruppi di Lie $\mathbf{SU}(2) \simeq \mathbf{Spin}(3)$.

ESEMPIO 24.1.16. Indichiamo con J_n la matrice $(2n) \times (2n)$

$$(24.15) \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Il gruppo

$$(24.16) \quad \mathbf{Sp}(n) = \{a \in \mathbf{U}(2n) \mid a^\dagger J_n a = J_n\}$$

si dice il *gruppo simplettico compatto*, o *simplettico unitario*, o *simplettico ortogonale*. Ha dimensione $n(2n + 1)$ ed algebra di Lie

$$(24.17) \quad \mathfrak{sp}(n) = \{A \in \mathfrak{u}(2n) \mid AJ_n + J_n \bar{A} = 0\}.$$

24.1.1. La rappresentazione aggiunta.

PROPOSIZIONE 24.1.17. *Per ogni $a \in \mathbf{G}$, il differenziale nell'identità $\text{Ad}(a)$ dell'automorfismo $\text{ad}(a)$ di \mathbf{G} definisce un automorfismo dell'algebra di Lie \mathfrak{g} .*

DIMOSTRAZIONE. Siano $X \in \mathfrak{g}$ ed $a \in \mathbf{G}$. Abbiamo, con le notazioni introdotte in precedenza per i differenziali delle traslazioni a destra ed a sinistra,

$$[\text{ad}_a]_*(X_x^*) = aX^*a^{-1} = axXa^{-1} = axa^{-1}(aXa^{-1}) = [\text{ad}(a)(X)]_{\text{ad}(a)(x)}^*.$$

Questo dimostra che i campi X^* ed $(\text{Ad}(a)(X))^*$ sono $\text{ad}(a)$ -correlati e perciò

$$[(\text{ad}(a))_*X^*, (\text{ad}(a))_*Y^*] = (\text{ad}(a))_*([X^*, Y^*]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Qundi il diffeomorfismo $\text{ad}(a)$ definisce un automorfismo dell'algebra di Lie $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$. La tesi segue perché, per definizione, $[X^*, Y^*] = [X, Y]^*$. \square

Indichiamo con $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ il gruppo

$$(24.18) \quad \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{\lambda \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \mid [\lambda(X), \lambda(Y)] = \lambda([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}\}.$$

degli automorfismi dell'algebra di Lie reale \mathfrak{g} .

Si verifica immediatamente che

PROPOSIZIONE 24.1.18. *L'applicazione $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{Ad}(a) \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ è un omomorfismo di gruppi.* \square

DEFINIZIONE 24.1.19. L'omomorfismo $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{Ad}(a) \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ si dice la *rappresentazione aggiunta di \mathbf{G}* .

24.1.2. Campi di vettori invarianti a destra. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie.

DEFINIZIONE 24.1.20. Un campo di vettori $X_* \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$ si dice *invariante a destra* se $dR_a(X_*) = X_*$ per ogni $a \in \mathbf{G}$.

Ad ogni elemento X dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} associamo l'unico campo di vettori invariante a destra X_* che assume il valore X in e : $X_{*x} = dR_x(X) = Xx$. In questo modo abbiamo definito una corrispondenza lineare biunivoca

$$(24.19) \quad \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow X_* = \{x \rightarrow dR_x(X)\} \in \mathfrak{R}(\mathbf{G})$$

di \mathfrak{g} con lo spazio $\mathfrak{R}(\mathbf{G})$ dei campi di vettori invarianti a destra su \mathbf{G} . Abbiamo

PROPOSIZIONE 24.1.21. $\mathfrak{R}(\mathbf{G})$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$ e l'applicazione (24.19) è un antiisomorfismo di algebre di Lie.

DIMOSTRAZIONE. Poiché le traslazioni a destra sono diffeomorfismi di \mathbf{G} , è

$$[R_a(\underline{X}), R_a(\underline{Y})] = R_a([\underline{X}, \underline{Y}]), \quad \text{per ogni } a \in \mathbf{G} \text{ ed } \underline{X}, \underline{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbf{G}).$$

Da questo segue immediatamente che $\mathfrak{R}(\mathbf{G})$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$.

L'involuzione $J : \mathbf{G} \ni x \rightarrow x^{-1} \in \mathbf{G}$ di \mathbf{G} è un diffeomorfismo che trasforma campi di vettori invarianti a sinistra in campi di vettori invarianti a destra, con $dJ :$

$\mathfrak{L}(\mathbf{G}) \ni X^* \longrightarrow -X_* \in \mathfrak{R}(\mathbf{G})$, se X^* ed X_* sono i campi di vettori, rispettivamente invariante a sinistra e a destra, associati allo stesso elemento $X \in \mathfrak{g}$. In particolare, abbiamo

$$[X_*, Y_*] = -[X, Y]_*, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

□

24.2. Alcune osservazioni sull'applicazione esponenziale

Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} . L'immagine dell'applicazione esponenziale $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{G}$ non è in generale surgettiva sulla sua componente connessa dell'identità \mathbf{G}^0 .

ESEMPIO 24.2.1. *L'immagine di $\exp : \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ non è surgettiva sulla sua componente connessa dell'identità $\mathbf{G}^0 = \{x \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det x > 0\}$.*

Sia $x \in \mathbf{G}^0$. Consideriamo dapprima il caso in cui x sia diagonalizzabile. A meno di coniugio possiamo supporre che $x = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ con $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. Se $X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$, poiché il polinomio caratteristico di X ha grado due, è

$$(24.20) \quad \exp(X) = k_1 X + k_2 I_2, \quad \text{con } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

In particolare, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora $k_1 \neq 0$ e la matrice X è quindi diagonale. Poiché gli autovalori dell'esponenziale di una matrice X diagonalizzabile sono gli esponenziali degli autovalori di X , ne segue che $x \in \exp(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}))$ se e soltanto se $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Analogamente, se x ha un autovalore reale con molteplicità algebrica due e molteplicità geometrica uno, possiamo supporre a meno di coniugio che x abbia la forma

$$x = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Allora per la (24.20) anche X deve essere una matrice triangolare superiore e quindi x appartiene all'immagine dell'esponenziale se e soltanto se $\lambda > 0$.

Resta da considerare il caso in cui x abbia due autovalori complessi coniugati $\lambda, \bar{\lambda}$, oppure sia diagonalizzabile con un autovalore λ reale e negativo con molteplicità due. Se scriviamo $\lambda = \rho e^{i\theta}$, con $\rho > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$, allora la x è coniugata ad una matrice della forma

$$x = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} = \exp \left[\log \rho \begin{pmatrix} & -\theta \\ \theta & \end{pmatrix} \right].$$

In conclusione: $\exp(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}))$ è l'insieme delle matrici reali 2×2 con determinante positivo che non hanno un autovalore reale negativo con molteplicità geometrica uno.

Questo esempio mostra che, in generale, l'immagine dell'applicazione esponenziale può non essere né aperta né chiusa.

Ci sono due classi importanti di gruppi di Lie per cui l'esponenziale è surgettivo. Abbiamo:

TEOREMA 24.2.2. *Se \mathbf{G} è un gruppo di Lie connesso e compatto, con algebra di Lie \mathfrak{g} , allora $\exp(\mathfrak{g}) = \mathbf{G}$.* □

DEFINIZIONE 24.2.3. Chiamiamo *unipotente* un sottogruppo di Lie \mathbf{G} del gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ i cui elementi siano tutti unipotenti. Gli elementi x di \mathbf{G} hanno cioè tutti polinomio caratteristico $(\lambda - 1)^n$.

TEOREMA 24.2.4. Se \mathbf{G} è unipotente, allora $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{G}$ è un diffeomorfismo. \square

OSSERVAZIONE 24.2.5. I gruppi unipotenti sono particolari gruppi *nilpotenti*. Ricordiamo che un gruppo \mathbf{G} si dice nilpotente se, per ogni $a \in \mathbf{G}$ l'applicazione di commutazione $c_a : \mathbf{G} \ni x \rightarrow [a, x] = axa^{-1}x^{-1}$ ha un'iterata banale. Se esiste cioè un intero k tale che $c_a^k(x) = e$ per ogni $a, x \in \mathbf{G}$. Si verifica che questa condizione equivale al fatto che \mathbf{G} ammetta una serie di composizione

$$\mathbf{1} = \mathbf{G}_0 < \mathbf{G}_1 < \cdots < \mathbf{G}_n = \mathbf{G}, \quad \text{con} \quad [\mathbf{G}, \mathbf{G}_k] \subset \mathbf{G}_{k-1}, \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

24.3. Sottogruppi di Lie

DEFINIZIONE 24.3.1. Un sottogruppo \mathbf{H} di \mathbf{G} è un suo *sottogruppo di Lie* se è anche una sottovarietà differenziabile di \mathbf{G} , e con tale struttura differenziabile è un gruppo di Lie.

In questo caso, l'algebra di Lie \mathfrak{h} di \mathbf{H} è una sottoalgebra dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} , perché i campi di vettori invarianti a sinistra su \mathbf{H} sono restrizioni di campi di vettori invarianti a sinistra di \mathbf{G} .

Viceversa, per ogni sottoalgebra di Lie \mathfrak{h} di \mathfrak{g} , il sottogruppo \mathbf{H} di \mathbf{G} generato da $\exp(\mathfrak{h})$ è un sottogruppo di Lie connesso di \mathbf{G} . Questo è conseguenza del fatto che i campi di vettori invarianti a sinistra corrispondenti agli elementi di \mathfrak{h} generano una distribuzione vettoriale di rango costante formalmente (e quindi totalmente) integrabile in \mathbf{G} .

Ogni omorfismo differenziabile $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ di gruppi di Lie determina un omomorfismo $d\phi(e) : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ delle loro algebre di Lie. Il viceversa non è sempre vero; lo è quando \mathbf{G}_1 è semplicemente connesso.

In particolare, la $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{ad}(a) \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ definisce un'applicazione

$$\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{Ad}(a) \in \text{Aut}(\mathfrak{g}),$$

che si dice la *rappresentazione lineare aggiunta* di \mathbf{G} . Vale il

TEOREMA 24.3.2. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie, con algebra di Lie \mathfrak{g} .

(1) Se \mathbf{H} è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} , la sua algebra di Lie è

$$(24.21) \quad \mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp(tX) \in \mathbf{H}, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

(2) Ogni sottogruppo chiuso \mathbf{H} di \mathbf{G} è un suo sottogruppo di Lie. \square

ESEMPIO 24.3.3 (Gruppi lineari). Un *gruppo lineare* è un sottogruppo chiuso di un gruppo $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Per il *teorema di Ado*², ogni algebra di Lie su un campo \mathbb{k} è isomorfa ad una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$.

²Matrix representations of Lie algebras, Usp. Mat. Nauk 2 (1947), pp. 159-173.

La rappresentazione $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ permette di realizzare ogni algebra di Lie reale come l'algebra di Lie di un sottogruppo di un gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Per un teorema di Djokovic³, ogni algebra di Lie reale è l'algebra di Lie di un sottogruppo *chiuso* di un $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, cioè di un gruppo lineare.

Tutti i gruppi di Lie compatti sono isomorfi a gruppi lineari.

Si può definire sul rivestimento universale $\tilde{\mathbf{G}}$ di un gruppo di Lie connesso una struttura di gruppo di Lie per cui la proiezione canonica $\tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ sia un omomorfismo di gruppi di Lie.

I rivestimenti universali $\widetilde{\mathbf{SL}}(n, \mathbb{R})$ dei gruppi di Lie $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ sono gruppi di Lie che non sono isomorfi a gruppi lineari.

24.4. La forma di Maurer-Cartan

24.4.1. Forme differenziali a valori vettoriali. Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita ed M una varietà differenziabile. Indichiamo con $\Omega^h(M, V)$ lo spazio delle forme differenziali alternate di grado h a valori in V . Esse sono le applicazioni $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineari alternate :

$$\alpha: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{h \text{ volte}} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, V).$$

Ad esse si estende in modo naturale la definizione del differenziale. Naturalmente, se V non ha una struttura di algebra reale, non ha senso considerare il prodotto esterno di due forme a valori in V . Nel caso in cui V sia un'algebra, possiamo estendere la definizione del prodotto esterno in modo che, sulle forme di grado zero, coincida puntualmente con il prodotto definito in V . In particolare, nel caso delle algebre di Lie, possiamo dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE 24.4.1. Sui \mathfrak{g} un'algebra di Lie reale. Il *prodotto esterno* di due forme differenziali $\alpha \in \Omega^p(M, \mathfrak{g})$, $\beta \in \Omega^q(M, \mathfrak{g})$, è la forma $[\alpha \wedge \beta] \in \Omega^{p+q}(M, \mathfrak{g})$ definita da:

$$[\alpha \wedge \beta](X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q} \\ 1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_p \leq p+q \\ 1 \leq \sigma_{p+1} < \dots < \sigma_{p+q} \leq p+q}} \varepsilon(\sigma) [\alpha(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_p}), \beta(X_{\sigma_{p+1}}, \dots, X_{\sigma_{p+q}})].$$

Il prodotto si estende poi per bilinearità a tutto $\Omega^*(M, \mathfrak{g})$.

In particolare, se α e β sono 1-forme a valori in \mathfrak{g} , abbiamo:

$$\begin{aligned} [\alpha \wedge \beta](X, Y) &= [\alpha(X), \beta(Y)] - [\alpha(Y), \beta(X)], \\ [\alpha \wedge \alpha](X, Y) &= 2[\alpha(X), \alpha(Y)], \end{aligned} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

³A closure theorem for analytic subgroups of a real Lie group, Can.Math. Bull. **19** (1976), pp. 435-439.

24.4.2. Forme differenziali invarianti. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} e V uno spazio vettoriale reale.

DEFINIZIONE 24.4.2. Una forma differenziale $\omega \in \Omega^*(\mathbf{G}, V)$ si dice *invariante a sinistra* se $L_a^* \omega = \omega$ per ogni $a \in \mathbf{G}$.

Per una forma di grado uno $\omega \in \Omega^1(\mathbf{G}, V)$ essere invariante a sinistra è equivalente al fatto che, per ogni campo di vettori $X \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$ invariante a sinistra su \mathbf{G} , la $\omega(X)$ sia una funzione, a valori in V , costante. Analogamente, una forma omogenea $\alpha \in \Omega^q(\mathbf{G}, V)$ è invariante a sinistra se, e soltanto se, per ogni scelta di $X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$, la funzione $\alpha(X_1, \dots, X_q)$ è costante.

24.4.3. La forma di Maurer-Cartan. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} .

TEOREMA 24.4.3. *L'applicazione*

$$(24.22) \quad \mathbf{G} \times \mathfrak{g} \ni (a, X) \longrightarrow aX \in T\mathbf{G}$$

è un diffeomorfismo.

In particolare, i gruppi di Lie sono varietà differenziabili parallelizzabili ed $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$ è il $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{G})$ -modulo generato da $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$.

DIMOSTRAZIONE. La $T\mathbf{G} \ni v \rightarrow (\pi(v), \pi(v)^{-1} \cdot v) \in \mathbf{G} \times \mathfrak{g}$, ove $\pi : T\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ è la proiezione canonica sulla base, è differenziabile ed inverte la (24.22). \square

PROPOSIZIONE 24.4.4. *L'applicazione*

$$(24.23) \quad \omega_{\mathbf{G}} : T\mathbf{G} \ni v \longrightarrow \pi(v)^{-1} \cdot v \in \mathfrak{g}$$

è una forma differenziale invariante a sinistra a valori in \mathfrak{g} . \square

Essa è caratterizzata dall'equazione

$$(24.24) \quad \omega_{\mathbf{G}}(X_a^*) = X, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall a \in \mathbf{G}.$$

DEFINIZIONE 24.4.5. Chiamiamo la $\omega_{\mathbf{G}}$ *forma di Maurer⁴-Cartan* di \mathbf{G} .

PROPOSIZIONE 24.4.6. *La forma di Maurer-Cartan $\omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^1(\mathbf{G}, \mathfrak{g})$ è invariante a sinistra e soddisfa l'equazione di Maurer-Cartan*

$$(24.25) \quad d\omega_{\mathbf{G}} + \frac{1}{2} [\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}] = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $X, Y \in \mathfrak{g}$. Allora :

$$\begin{aligned} d\omega_{\mathbf{G}}(X^*, Y^*) &= X^* \omega_{\mathbf{G}}(Y^*) - Y^* \omega_{\mathbf{G}}(X^*) - \omega_{\mathbf{G}}([X^*, Y^*]) \\ &= -[\omega_{\mathbf{G}}(X^*), \omega_{\mathbf{G}}(Y^*)] = -\frac{1}{2} [\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}](X^*, Y^*). \end{aligned}$$

Poiché $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$ genera $\mathfrak{X}(M)$ come $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{G})$ -modulo, otteniamo la tesi. \square

⁴Ludwig Maurer (1859-1927) matematico tedesco, professore all'Università di Tübingen, ha contribuito allo studio dei gruppi di matrici.

LEMMA 24.4.7. *La forma di Maurer-Cartan $\omega_{\mathbf{G}}$ di \mathbf{G} soddisfa:*

$$(24.26) \quad R_a^* \omega_{\mathbf{G}} = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega_{\mathbf{G}}.$$

Ogni forma differenziale $\eta \in \Omega^1(\mathbf{G}, V)$, invariante a sinistra su \mathbf{G} è della forma $\eta = T \circ \omega_{\mathbf{G}}$, per un'applicazione lineare $T : \mathfrak{g} \rightarrow V$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché le traslazioni a destra e a sinistra commutano, il traslato a destra di un campo di vettori invariante a sinistra è ancora invariante a sinistra. Quindi, se $X \in \mathfrak{g}$ ed $a \in \mathbf{G}$, il campo $R_{a*}X^*$ è ancora invariante a sinistra. Esso è il campo Y^* corrispondente ad

$$L_{a^{-1}*}R_{a*}X^* = \text{ad}(a^{-1})_*(X^*) = [\text{Ad}(a^{-1})(X)]^* = \text{Ad}(a^{-1})(\omega_{\mathbf{G}}(X^*)).$$

Questo dimostra la (24.26).

Se $\eta \in \Omega^1(\mathbf{G}, V)$ è invariante a sinistra, abbiamo $\eta = T \circ \omega_{\mathbf{G}}$ con

$$T = \eta(e) : \mathfrak{g} = T_e \mathbf{G} \rightarrow V. \quad \square$$

ESEMPIO 24.4.8. Consideriamo $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ come un aperto dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^{n \times n}$ delle matrici reali $n \times n$, che possiamo ancora identificare con la sua algebra di Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. Poiché $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ è un aperto di $\mathbb{R}^{n \times n}$, possiamo identificare il suo spazio tangente al prodotto cartesiano $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n \times n}$. In particolare, abbiamo l'identificazione $\mathfrak{X}(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})) \simeq \mathcal{C}^\infty(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}^{n \times n})$. I campi di vettori invarianti a sinistra sono allora gli X^* con $X_x^* = x \cdot X$, per $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. Quindi, con questa notazione, la forma di Maurer Cartan di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ è

$$(24.27) \quad \omega_{\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})} = x^{-1} dx,$$

ove al solito dx indica l'identità, in questo caso su $\mathbb{R}^{n \times n}$.

In modo analogo, i campi di vettori invarianti a destra su $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ si scrivono nella forma

$$\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \ni x \longrightarrow {}^*X_x = X \cdot x \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

al variare di X in $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

La forma che associa ad ogni vettore v tangente in x a $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ il valore X in e del campo di vettori invariante a destra *X che assume in x il valore v è dato da

$$dx \circ x^{-1} = \text{ad}(x) \circ \omega_{\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})}.$$

La discussione nell'Esempio 24.4.8 giustifica la

NOTAZIONE 24.4.9. Se $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{G})$ è un arco differenziabile in \mathbf{G} , poniamo

$$\alpha^{-1}(t) \cdot \dot{\alpha}(t) = \omega_{\mathbf{G}}(\dot{\alpha}(t)), \quad \dot{\alpha}(t) \cdot \alpha^{-1}(t) = \text{ad}(\alpha(t)) \omega_{\mathbf{G}}(\dot{\alpha}(t)).$$

Concludiamo questo paragrafo con una costruzione che generalizza l'esponenziale.

PROPOSIZIONE 24.4.10. *Siano \mathbf{G} un gruppo di Lie, con algebra di Lie \mathfrak{g} .*

Sia I un connesso di \mathbb{R} , $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbf{G}$ ed $X \in \mathcal{C}^k(I, \mathfrak{g})$, con $k \geq 0$. Allora sono univocamente determinati $a, b \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbf{G})$ tali che

$$(24.28) \quad \begin{cases} a^{-1}(t) \cdot \dot{a}(t) = X(t) & \forall t \in I, \\ a(t_0) = x_0, \end{cases}$$

$$(24.29) \quad \begin{cases} \dot{b}(t) \cdot b^{-1}(t) = X(t), & \forall t \in I, \\ b(t_0) = x_0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che, se $a(t)$ è una soluzione di (24.28) ed $x_1 \in \mathbf{G}$, allora $x_1 \cdot a(t)$ risolve lo stesso sistema differenziale, con valore iniziale $x_1 \cdot x_0$. Possiamo quindi limitarci a risolvere (24.28) nel caso in cui $x_0 = e_{\mathbf{G}}$ sia l'identità del gruppo. Possiamo quindi supporre che \mathbf{G} sia connesso. Consideriamo innanzi tutto il caso in cui \mathbf{G} sia un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. L'equazione

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = a(t)X(t), \\ a(t_0) = I_n \end{cases} \quad \text{con } a, X \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^{n \times n}),$$

è lineare ed ammette quindi una ed una sola soluzione, definita e di classe \mathcal{C}^{k+1} su tutto l'intervallo I . Analogamente, anche il sistema

$$\begin{cases} \dot{\beta}(t) = -X(t)\beta(t), & \forall t \in I, \\ \beta(t_0) = I_n, \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione, di classe \mathcal{C}^{k+1} , definita sull'intervallo I . Abbiamo allora

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(a(t)\beta(t)) = \dot{a}(t) \cdot \beta(t) + a(t) \cdot \dot{\beta}(t) = a(t)X(t)\beta(t) - a(t)X(t)\beta(t) = 0, \\ a(t_0) \cdot \beta(t_0) = I_n. \end{cases}$$

Questo implica che $a(t) \cdot \beta(t) = I_n$ per ogni t e quindi che $a \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}))$. Resta da dimostrare che a è a valori in \mathbf{G} se $x_0 \in \mathbf{G}$. Questo si ottiene perché, se ad esempio $t \in I$ con $t > t_0$, allora $a(t)$ è il limite dei prodotti

$\exp((t - t_0)X(t_0)) \exp((t_1 - t_0)X(t_1)) \cdots \exp((t_m - t_{m-1})X(t_{m-1})) \exp((t - t_m)X(t_m))$,
con $t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t = t_{m+1}$ e $\sup |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$. Questi prodotti sono elementi di \mathbf{G} e quindi il limite appartiene a \mathbf{G} perché abbiamo supposto che fosse chiuso in $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Ci riconduciamo al caso generale osservando che ogni gruppo di Lie \mathbf{G} è localmente diffeomorfo ad un sottogruppo chiuso \mathbf{G}' di un gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Come abbiamo osservato possiamo limitarci a considerare il caso in cui \mathbf{G} , e quindi anche \mathbf{G}' , siano connessi. I gruppi \mathbf{G} e \mathbf{G}' hanno lo stesso rivestimento universale $\tilde{\mathbf{G}}$. Indichiamo con $\pi : \tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ e con $\pi' : \tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}'$ le funzioni di rivestimento. Per la prima parte della dimostrazione, vi è un unico cammino $a' \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbf{G}')$ per cui

$$\begin{cases} \dot{a}'(t) = a'(t)X(t), & \forall t \in I, \\ a'(t_0) = I_n. \end{cases}$$

Esso si rialza ad un unico cammino $\tilde{a} \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \tilde{\mathbf{G}})$ con

$$\pi'(\tilde{a}(t)) = a'(t), \quad \forall t \in I, \quad \tilde{a}(t_0) = e_{\tilde{\mathbf{G}}}.$$

Allora $a = \pi \circ \tilde{a} \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbf{G})$ è la soluzione di (24.28). L'unicità segue dal teorema di unicità della soluzione dei sistemi di equazioni differenziali.

In modo analogo possiamo discutere l'equazione (24.29). \square

24.5. Applicazioni a valori in un gruppo di Lie

Siano \mathbf{G} un gruppo di Lie, con algebra di Lie \mathfrak{g} , ed M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ , di dimensione m .

DEFINIZIONE 24.5.1. La *derivata di Darboux* di $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$ è il pullback $\omega_f = f^* \omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ della forma di Maurer-Cartan di \mathbf{G} .

La f si dice un *integrale*, o una *primitiva* di ω_f , o *mappa dei periodi* associata ad ω_f .

PROPOSIZIONE 24.5.2. Se $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$ ed $\omega_{f_1} = \omega_{f_2}$, allora esiste un elemento $a \in \mathbf{G}$ tale che $f_1(p) = a f_2(p)$ per ogni $p \in M$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'applicazione $\phi : M \ni p \rightarrow f_1(p)[f_2(p)]^{-1} \in \mathbf{G}$. Poiché $\phi f_2 = f_1$, abbiamo

$$d\phi = (df_1)[f_2]^{-1} - \phi(df_2)[f_2]^{-1} = (df_1)[f_2]^{-1} - f_1[f_2]^{-1}(df_2)[f_2]^{-1}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \omega_\phi &= \phi^{-1} d\phi = f_2[f_1]^{-1}((df_1)[f_2]^{-1} - f_1[f_2]^{-1}(df_2)[f_2]^{-1}) \\ &= f_2([f_1]^{-1} df_1 - [f_2]^{-1} df_2)[f_2]^{-1} = \text{ad}(f_2)(\omega_{f_1} - \omega_{f_2}) = 0. \end{aligned}$$

Questa relazione implica che $d\phi = 0$, e quindi $f_1[f_2]^{-1} = \text{costante} = a \in \mathbf{G}$. \square

La derivata di Darboux $\omega = \omega_f$ di una $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$ soddisfa l'*equazione di struttura*

$$(24.30) \quad d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] = 0.$$

Viceversa, abbiamo

TEOREMA 24.5.3. *Supponiamo M connessa e semplicemente connessa. Fissiamo un punto $p_0 \in M$ ed un elemento a_0 di \mathbf{G} . Se $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ soddisfa (24.30), allora esiste una ed una sola $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$ tale che*

$$(24.31) \quad \omega_f = \omega \quad \text{ed} \quad f(p_0) = a_0.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la varietà prodotto $M \times \mathbf{G}$ ed indichiamo con

$$\pi_M : M \times \mathbf{G} \rightarrow M \quad \text{e} \quad \pi_{\mathbf{G}} : M \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$$

le proiezioni sui singoli fattori. Consideriamo su $M \times \mathbf{G}$ la forma

$$\alpha = \pi_M^* \omega - \pi_{\mathbf{G}}^* \omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^1(M \times \mathbf{G}, \mathfrak{g}).$$

Dico che $\ker \alpha$ è una distribuzione di rango m totalmente integrabile. Infatti, se $p \in M$ ed $x \in \mathbf{G}$, l'applicazione che fa corrispondere a $v \in T_p M$ il vettore $(v, x \cdot \omega(v)) \in T_{(p,x)}(M \times \mathbf{G}) = T_p M \oplus T_x \mathbf{G}$ è lineare e bigettiva da $T_p M$ a $\ker \alpha_{(p,x)}$. Se poi X, Y sono campi di vettori su $M \times \mathbf{G}$ con coefficienti in $\ker \alpha$, allora

$$\begin{aligned} \alpha([X, Y]) &= -d\alpha(X, Y) = -d(\pi_M^* \omega - \pi_{\mathbf{G}}^* \omega_{\mathbf{G}})(X, Y) = \pi_{\mathbf{G}}^*(d\omega_{\mathbf{G}}) - \pi_M^*(d\omega)(X, Y) \\ &= [\omega_{\mathbf{G}}(d\pi_{\mathbf{G}}(X)), \omega_{\mathbf{G}}(d\pi_{\mathbf{G}}(Y))] - [\omega(d\pi_M(X)), \omega(d\pi_M(Y))] = 0 \end{aligned}$$

perché $\omega_{\mathbf{G}}(d\pi_{\mathbf{G}}(X)) = \omega(d\pi_M(X))$ ed $\omega_{\mathbf{G}}(d\pi_{\mathbf{G}}(Y)) = \omega(d\pi_M(Y))$, in quanto X ed Y hanno valori in $\ker \alpha$.

Per il teorema di Frobenius vi è una ed una sola varietà integrale N di $\ker \alpha$ che passi per il punto (p_0, a_0) . La restrizione ad N della π_M è un diffeomorfismo

locale. Esso è surgettivo per la Proposizione 24.4.10: infatti essa ci dice che ogni cammino in M , di punto iniziale p_0 , si rialza ad un cammino in N di punto iniziale (p_0, a_0) . Poiché abbiamo supposto che M fosse connessa, la $N \ni (p, x) \rightarrow p \in M$ è surgettiva e quindi un rivestimento. Se M è anche semplicemente connessa, il rivestimento è ad un solo foglio e quindi il grafico di un'applicazione $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$. Per costruzione abbiamo allora $\omega_f = \omega$. \square

24.6. Omomorfismi di gruppi ed algebre di Lie

Siano \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 due algebre di Lie sullo stesso campo \mathbb{k} .

DEFINIZIONE 24.6.1. Un omomorfismo $\Phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ è un'applicazione \mathbb{k} -lineare tale che

$$\Phi([X_1, X_2]) = [\Phi(X_1), \Phi(X_2)], \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1.$$

Siano \mathbf{G}_1 e \mathbf{G}_2 due gruppi di Lie, con algebre di Lie \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 , rispettivamente.

DEFINIZIONE 24.6.2. Un omomorfismo di gruppi di Lie $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ è un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^ω tale che

$$\phi(x_1^{-1}x_2) = [\phi(x_1)]^{-1}\phi(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}_1.$$

PROPOSIZIONE 24.6.3. (1) Se $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ è un omomorfismo di gruppi di Lie, allora il suo differenziale nell'identità $\Phi = d\phi(e_{\mathbf{G}_1}) : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ è un omomorfismo di algebre di Lie reali.

(2) Se \mathbf{G}_1 è connesso, due omomorfismi di gruppi di Lie $\phi_1, \phi_2 : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ con $d\phi_1(e_{\mathbf{G}_1}) = d\phi_2(e_{\mathbf{G}_1})$ sono uguali.

(3) Se \mathbf{G}_1 è connesso e semplicemente connesso, ad ogni omomorfismo di algebre di Lie $\Phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ corrisponde uno ed un solo omomorfismo di gruppi di Lie $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ con $d\phi(e_{\mathbf{G}_1}) = \Phi$.

DIMOSTRAZIONE. (1). Per ogni $X \in \mathfrak{g}_1$, i campi di vettori invarianti a sinistra X^* su \mathbf{G}_1 e $[\Phi(X)]^*$ su \mathbf{G}_2 sono ϕ -correlati. Da questo segue che

$$[[\Phi(X_1)]^*, [\Phi(X_2)]^*] = [\Phi([X_1, X_2])]^*, \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1,$$

perché $[[\Phi(X_1)]^*, [\Phi(X_2)]^*]$ e $[\Phi([X_1, X_2])]^*$ sono ϕ -correlati ad $[X_1^*, X_2^*]$ ed $[X_1, X_2]^*$, rispettivamente. Ne segue che Φ è un omomorfismo di algebre di Lie.

(2). Per (1) è $\phi_1(\exp(X)) = \exp(\Phi(X)) = \phi_2(X)$ per ogni $X \in \mathfrak{g}_1$. In particolare, ϕ_1 e ϕ_2 coincidono su un intorno aperto di $e_{\mathbf{G}_1}$ in \mathbf{G}_1 . Quindi l'insieme $\{x \in \mathbf{G}_1 \mid \phi_1(x) = \phi_2(x)\}$ degli x in cui ϕ_1 e ϕ_2 assumono gli stessi valori è un sottogruppo di \mathbf{G}_1 che contiene un intorno aperto di $e_{\mathbf{G}_1}$ e quindi coincide con \mathbf{G}_1 , perché avevamo supposto che \mathbf{G}_1 fosse connesso.

(3). Consideriamo il gruppo di Lie prodotto diretto $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$, con algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Il sottospazio $\mathfrak{h} = \{(X, \Phi(X)) \mid X \in \mathfrak{g}_1\}$ è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} e quindi genera un sottogruppo di Lie analitico \mathbf{H} di \mathbf{G} . La restrizione ad \mathbf{H} della proiezione canonica $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}_1$ è un omomorfismo di gruppi di Lie il cui nucleo ha algebra di Lie $\{0\}$. È quindi un rivestimento, e perciò un diffeomorfismo, in quanto avevamo supposto che \mathbf{G}_1 fosse semplicemente connesso. \square

24.7. Rappresentazioni lineari

Siano \mathbf{G} un gruppo di Lie, e V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{k} , con \mathbb{k} uguale ad \mathbb{R} o \mathbb{C} .

DEFINIZIONE 24.7.1. Una *rappresentazione lineare* di \mathbf{G} su V è un omomorfismo di gruppi di Lie $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V)$.

Una rappresentazione lineare (ρ, V) è quindi un'applicazione $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V))$ tale che

$$\rho(x_1^{-1}x_2) = [\rho(x_1)]^{-1} \circ \rho(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}.$$

Siano \mathfrak{g} un'algebra di Lie e V uno spazio vettoriale sullo stesso campo \mathbb{k} .

DEFINIZIONE 24.7.2. Una *rappresentazione lineare* di \mathfrak{g} su V è un omomorfismo di algebre di Lie $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$.

Ciò significa che ρ_* è \mathbb{k} -lineare e che

$$\rho_*([X, Y]) = [\rho_*(X), \rho_*(Y)] = \rho_*(X) \circ \rho_*(Y) - \rho_*(Y) \circ \rho_*(X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Dalla Proposizione 24.6.3 abbiamo:

PROPOSIZIONE 24.7.3. Se (ρ, V) è una rappresentazione lineare di dimensione finita di \mathbf{G} , allora $\rho_* = d\rho(e_{\mathbf{G}}) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ è una rappresentazione lineare di \mathfrak{g} .

Se \mathbf{G} è connesso e semplicemente connesso, allora ogni rappresentazione lineare della sua algebra di Lie \mathfrak{g} su V è il differenziale di una rappresentazione lineare di \mathbf{G} su V .

24.8. Spazi omogenei

Gli spazi omogenei separati di un gruppo di Lie sono varietà analitiche.

TEOREMA 24.8.1. Siano \mathbf{G} un gruppo di Lie ed \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso. Vi è allora sul quoziente $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ un'unica struttura di varietà differenziabile \mathcal{C}^ω per cui $\xi = (\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M)$, ove π è la proiezione sul quoziente, sia un fibrato differenziabile localmente banale, con fibra tipica \mathbf{H} . Inoltre, \mathbf{G} opera su M mediante diffeomorfismi.

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario 3.2.19, M è uno spazio di Hausdorff e la proiezione $\pi : \mathbf{G} \rightarrow M$ aperta. Per il Teorema 24.3.2, \mathbf{H} è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} . Siano \mathfrak{g} l'algebra di Lie di \mathbf{G} ed $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ quella di \mathbf{H} .

Scegliamo un complemento lineare \mathfrak{m} di \mathfrak{h} in \mathfrak{g} , di modo che

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}.$$

L'applicazione

$$f : \mathfrak{m} \times \mathbf{H} \ni (X, x) \longrightarrow \exp(X) \cdot x \in \mathbf{G}$$

è analitica. Lo spazio tangente di $\mathfrak{m} \times \mathbf{H}$ in $(0, e_{\mathbf{H}})$ è $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ ed il differenziale $df(0, e_{\mathbf{H}})$ è l'identità su \mathfrak{g} .

Per il teorema delle funzioni implicite esistono allora intorno aperti N'_0 di 0 in \mathfrak{m} , V' di $e_{\mathbf{H}}$ in \mathbf{H} , ed U' di $e_{\mathbf{G}}$ in \mathbf{G} tali che la restrizione di f ad $N'_0 \times V'$ sia un diffeomorfismo su un intorno aperto U' di $e_{\mathbf{G}}$ in \mathbf{G} .

Poiché \mathbf{H} è chiuso, possiamo scegliere gli intorni U', V', N'_0 sufficientemente piccoli in modo che risulti

$$V' = U' \cap \mathbf{H}, \quad \exp(N'_0) \cap \mathbf{H} = f(N'_0 \times \{e_{\mathbf{H}}\}) \cap \mathbf{H} = \{e_{\mathbf{G}}\}.$$

A questo punto scegliamo intorni $N_0 \subset N'_0$ di 0 in \mathfrak{m} e $V \subset V'$ di e in \mathbf{H} in modo che, con $U = f(N_0 \times V)$, sia $U^2 \cup U^{-2} \subset U'$ e poniamo $W = \pi(U) \subset M$.

Dico che allora

$$f_0 : N_0 \times \mathbf{H} \ni (X, x) \longrightarrow f(X, x) = \exp(X)x \in \pi^{-1}(W) \quad \text{è un diffeomorfismo.}$$

Infatti, poiché le traslazioni a destra mediante elementi di \mathbf{H} sono diffeomorfismi, e la f_0 commuta con le traslazioni a destra mediante elementi di \mathbf{H} , essendo per costruzione un diffeomorfismo locale su $N_0 \times V$, lo è anche in tutti i punti di $N_0 \times \mathbf{H}$.

Basta quindi verificare che sia bigettiva. Poiché $\pi^{-1}(W) = \bigcup_{x \in \mathbf{H}} Ux$, la f è senz'altro surgettiva. Mostriamo che è anche iniettiva. Siano $X_1, X_2 \in N_0$ ed $x_1, x_2 \in \mathbf{H}$ tali che $\exp(X_1)x_1 = \exp(X_2)x_2$. Abbiamo allora $\exp(-X_2)\exp(X_1) = x_1x_2^{-1}$. Poiché abbiamo supposto che $U^2 \cup U^{-2} \subset U'$, abbiamo

$$x_2x_1^{-1} = \exp(-X_2)\exp(X_1) \in U' \cap \mathbf{H} = V',$$

perché $\exp(X_1), \exp(X_2) \in U$ ed $x_1x_2^{-1} \in \mathbf{H}$. Quindi $\exp(X_1) = \exp(X_2)(x_2x_1^{-1})$ con $X_1, X_2 \in N_0, x_2x_1^{-1} \in V'$. Poiché $f : N'_0 \times V' \rightarrow U'$ è un diffeomorfismo, ricaviamo che $X_1 = X_2$ ed $x_2x_1^{-1} = e_{\mathbf{H}}$, cioè $x_1 = x_2$.

Per ogni $a \in \mathbf{G}$ l'applicazione

$$\gamma_a : N_0 \ni X \longrightarrow \pi(a \exp(X)) \in a(W) = W_a$$

è un omeomorfismo di N_0 su un aperto W_a di M . Le $\zeta_a = \gamma_a^{-1}$ sono le carte locali di un atlante di classe \mathcal{C}^ω su M . Infatti

$$\zeta_a \circ \zeta_b^{-1}(X) = \zeta_a \circ \gamma_b(X) = \text{pr}_{\mathfrak{m}} \circ f_0^{-1}(a^{-1}b \exp(X)),$$

$$\forall X \in \zeta_a(W_a \cap W_b) = \{X \mid a^{-1}b \exp(X) \in U\}.$$

Osserviamo infine che le

$$W_a \times \mathbf{H} \ni (p, y) \rightarrow a \exp(\zeta_a(p))y \in \pi^{-1}(W_a), \quad a \in \mathbf{G},$$

definiscono un atlante di trivializzazione per il fibrato differenziabile $\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M$. \square

DEFINIZIONE 24.8.2. Con la struttura differenziale descritta dal Teorema 24.8.1, chiamiamo \mathbf{G}/\mathbf{H} lo spazio omogeneo del gruppo di Lie \mathbf{G} con stabilizzatore \mathbf{H} .

24.9. Gruppi di Lie di trasformazioni

Per generalità sulle azioni di gruppo insiemistiche e topologiche rimandiamo al §3.1. Specializziamo qui quelle nozioni al caso differenziabile.

Siano \mathbf{G} un gruppo di Lie ed M una varietà differenziabile.

DEFINIZIONE 24.9.1. Un'azione differenziabile a sinistra di \mathbf{G} su M è un'applicazione differenziabile

$$(24.32) \quad \mathbf{G} \times M \ni (x, p) \longrightarrow xp \in M \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} e_{\mathbf{G}}p = p, \\ x_1(x_2p) = (x_1x_2)p, \\ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}, \forall p \in M. \end{cases}$$

Gli elementi x di \mathbf{G} definiscono diffeomorfismi di M in sé

$$\ell_x : M \ni p \longrightarrow x \cdot p \in M \quad (\text{TRASLAZIONI A SINISTRA}).$$

DEFINIZIONE 24.9.2. L'azione (24.32) si dice

- *effettiva* se $\ell_x = \text{id}_M \iff x = e_{\mathbf{G}}$;
- *libera* se le ℓ_x con $x \neq e_{\mathbf{G}}$ non hanno punti fissi;
- *transitiva* se per ogni coppia di punti p_1, p_2 di M esiste un $x \in \mathbf{G}$ tale che $x \cdot p_1 = p_2$.

DEFINIZIONE 24.9.3. Sia $p_0 \in M$.

Il sottogruppo $\mathbf{G}_{p_0} = \{x \in \mathbf{G} \mid xp_0 = p_0\}$ si dice lo *stabilizzatore* di p_0 in \mathbf{G} .

Il sottoinsieme $\mathbf{G}(p_0) = \{xp_0 \mid x \in \mathbf{G}\}$ si dice l'*orbita* di \mathbf{G} in M per p_0 .

Lo stabilizzatore \mathbf{G}_{p_0} è un sottogruppo chiuso e quindi un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} . Indicheremo con \mathfrak{g}_{p_0} la sua algebra di Lie.

Ad ogni elemento X dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} associamo il gruppo a un parametro

$$\mathbb{R} \times M \ni (t, p) \longrightarrow \exp(tX) \cdot p \in M$$

di diffeomorfismi di M . Indichiamo con X_{\star} il suo generatore infinitesimale. La curva $\gamma(t) = \exp(tX) \cdot p$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X_{\star \gamma(t)}, \\ \gamma(0) = p. \end{cases}$$

LEMMA 24.9.4. È $X_{\star p} = 0$ se e soltanto se X appartiene all'algebra di Lie \mathfrak{g}_p dello stabilizzatore \mathbf{G}_p di p in \mathbf{G} .

DIMOSTRAZIONE. Infatti $X_{\star p} = 0$ se e soltanto se $\exp(tX) \in \mathbf{G}_p$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e l'affermazione è quindi conseguenza della caratterizzazione dell'algebra di Lie di un sottogruppo di Lie, che abbiamo descritto col Teorema 24.3.2. \square

PROPOSIZIONE 24.9.5. I campi di vettori X_{\star} formano una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(M)$. L'applicazione $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_{\star} \in \mathfrak{X}(M)$ è un anti-omomorfismo di algebre di Lie. Abbiamo cioè

$$[X, Y]_{\star} = -[X_{\star}, Y_{\star}], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Per ogni $p_0 \in M$, il differenziale nell'identità dell'applicazione

$$\lambda_{p_0} : \mathbf{G} \ni x \longrightarrow x \cdot p_0 \in M$$

associa ad $X \in \mathfrak{g}$ il valore in p_0 del campo X_{\star} .

Il campo X_{\star} è λ_{p_0} -correlato al campo di vettori invariante a destra X_{\star} associato all'elemento X di \mathfrak{g} .

L'algebra di Lie \mathfrak{g}_{p_0} di \mathbf{G}_{p_0} è il nucleo del differenziale $d\lambda_{p_0}(e_{\mathbf{G}}) : \mathfrak{g} \rightarrow T_{p_0}M$.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione λ_{p_0} trasforma il gruppo a un parametro

$$\mathbb{R} \times \mathbf{G} \ni (t, x) \rightarrow \exp(tX) \cdot x \in \mathbf{G}$$

nel gruppo a un parametro

$$\mathbb{R} \times M \ni (t, p) \rightarrow \exp(tX) \cdot p \in M$$

e quindi il generatore infinitesimale X_* del primo, nel generatore infinitesimale X_* del secondo. In particolare, i campi di vettori X_* ed X_* sono λ_{p_0} -correlati. Da questa osservazione seguono tutte le affermazioni della proposizione. \square

OSSERVAZIONE 24.9.6. Se $M = \mathbf{G}$ ed (24.32) è la moltiplicazione del gruppo, allora X_* è il campo di vettori invariante a destra associato ad $X \in \mathfrak{g}$.

COROLLARIO 24.9.7. Se (24.32) è effettiva, allora l'applicazione $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_* \in \mathfrak{X}(M)$ è iniettiva.

Se (24.32) è libera, allora l'applicazione $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_{*p} \in T_p M$ è iniettiva per ogni $p \in M$. \square

DEFINIZIONE 24.9.8. I campi X_* si dicono *trasformazioni \mathbf{G} -infinitesime* di M .

TEOREMA 24.9.9. Sia (24.32) un'azione differenziabile a sinistra di \mathbf{G} su M . Fissiamo un punto p_0 di M e siano \mathbf{G}_{p_0} lo stabilizzatore di p_0 in \mathbf{G} e $\mathbf{G}(p_0)$ l'orbita di \mathbf{G} per il punto p_0 . Allora $\mathbf{G}(p_0)$ una sottovarietà analitica di M , e l'applicazione f , definita dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \xrightarrow{\lambda_{p_0}} & \mathbf{G}(p_0) \\ \pi \downarrow & \nearrow f & \\ \mathbf{G}/\mathbf{G}_{p_0} & & \end{array}$$

un diffeomorfismo \mathbf{G} -equivariante (commuta cioè con le traslazioni a sinistra per elementi di \mathbf{G}) di classe \mathcal{C}^ω dello spazio omogeneo $\mathbf{G}/\mathbf{G}_{p_0}$ su $\mathbf{G}(p_0)$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla Proposizione 24.9.5 e dalla descrizione della struttura differenziale di $\mathbf{G}/\mathbf{G}_{p_0}$ data dal Teorema 24.8.1, segue che il quoziente iniettivo di λ_{p_0} è un'immersione differenziabile \mathbf{G} -equivariante di classe \mathcal{C}^ω . Da questo fatto, seguono le affermazioni del Teorema. \square

COROLLARIO 24.9.10. Se l'azione (24.32) è transitiva, M è diffeomorfa, in modo \mathbf{G} -equivariante, a uno spazio omogeneo di \mathbf{G} . \square

ESEMPIO 24.9.11. L'applicazione $\pi : \mathbf{SO}(n+1) \ni a \rightarrow a \cdot e_0 \in S^n$, ove e_0 è un vettore di lunghezza unitaria in \mathbb{R}^{n+1} , definisce un diffeomorfismo $\mathbf{SO}(n+1)$ -equivariante tra la sfera S^n e lo spazio omogeneo $\mathbf{SO}(n+1)/\mathbf{SO}(n)$.

ESEMPIO 24.9.12. Sia n un intero positivo. Il gruppo $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{R})$ delle matrici diagonali superiori con determinante diverso da zero è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Lo spazio omogeneo $F = \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})/\mathbf{T}_n^+(\mathbb{R})$ è una varietà differenziabile compatta di dimensione $n(n-1)/2$, che si dice *varietà bandiera reale completa* e che è diffeomorfo al sottospazio di $\mathbb{G}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathbb{G}_{n,n-1}(\mathbb{R})$ che consiste delle $(n-1)$ -uple $(\ell_1, \dots, \ell_m, \dots, \ell_{n-1})$ di sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n con $\{0\} \subsetneq \ell_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \ell_m \subsetneq \cdots \subsetneq \ell_{n-1} \subsetneq \mathbb{R}^n$.

OSSERVAZIONE 24.9.13. In generale, se un gruppo di Lie \mathbf{G} opera transitivamente su un insieme M , possiamo definire su M un'unica struttura di varietà \mathcal{C}^ω per cui l'azione di \mathbf{G} su M sia differenziabile.

ESEMPIO 24.9.14. Fissiamo una forma bilineare alternata non degenera ω su \mathbb{C}^{2n} e sia M il sottoinsieme della Grassmanniana $\mathbb{G}_{2n,n}(\mathbb{C})$ formato dai sottospazi Lagrangiani di \mathbb{C}^{2n} , cioè dai $p \in \mathbb{G}_{2n,n}(\mathbb{C})$ tali che $\omega(z, w) = 0$ per ogni $z, w \in p$. Dico che p è una varietà connessa e compatta.

Identifichiamo \mathbb{C}^{2n} con lo spazio \mathbb{H}^n delle n -uple di quaternioni, facendo corrispondere ad $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ l'elemento $x + jy$. Ricordiamo che $\overline{x + jy} = \bar{x} - jy$. Possiamo scegliere le coordinate in modo che il prodotto scalare standard su \mathbb{H}^n sia definito da

$$\begin{aligned} (q_1 | q_2)_{\mathbb{H}} &= (x_2^* - jy_2^\dagger)(x_1 + jy_1) = x_2^*x_1 + y_2^*y_1 + j(x_2^\dagger y_1 - y_2^\dagger x_1) \\ &= (q_1 | q_2)_{\mathbb{C}^n} + j\omega(q_1, q_2), \\ \text{ove } q_1 &= x_1 + jy_1, q_2 = x_2 + iy_2, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

Ragionando come nell'esempio precedente, possiamo identificare gli n -piani Lagrangiani agli n -piani complessi generati da una base ortonormale di \mathbb{H}^n . Quindi il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ opera transitivamente su M . Lo stabilizzatore di $p_0 = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{C}}$ in $\mathbf{Sp}(n)$ è il gruppo unitario $\mathbf{U}(n)$. Quindi $M \simeq \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{U}(n)$ è una varietà connessa e compatta di dimensione $n(2n+1) - n^2 = n(n+1)$. Osserviamo che M ha dimensione pari ed in effetti è una varietà complessa compatta di dimensione $n(n+1)/2$.

In modo del tutto analogo possiamo definire e discutere il concetto di azione differenziabile a destra. Siano P è una varietà differenziabile e \mathbf{G} un gruppo di Lie.

DEFINIZIONE 24.9.15. Un'azione differenziabile a destra di \mathbf{G} su P è un'applicazione differenziabile

$$(24.33) \quad P \times \mathbf{G} \ni (\sigma, x) \longrightarrow \sigma x \in P \text{ tale che } \begin{cases} \sigma e_{\mathbf{G}} = \sigma, \\ (\sigma x_1)x_2 = \sigma(x_1x_2), \\ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}, \forall \sigma \in P. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 24.9.16. Se (24.32) è un'azione differenziabile a sinistra, la $M \times \mathbf{G} \ni (p, x) \rightarrow x^{-1}p \in M$ è un'azione differenziabile a destra su M e, viceversa, se (24.33) è un'azione differenziabile a destra, la $\mathbf{G} \times P \ni (x, \sigma) \rightarrow \sigma x^{-1} \in P$ è un'azione differenziabile a sinistra su P .

Sarà comunque conveniente nel seguito considerare i due tipi di azione in modo distinto. L'azione a sinistra sarà spesso transitiva ed effettiva e coinciderà con le traslazioni a sinistra su uno spazio omogeneo. L'azione a destra sarà di solito libera ed effettiva, ed agirà tipicamente in modo transitivo sulle fibre di un fibrato differenziabile. L'esempio tipico è quello degli spazi omogenei $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ e dell'azione a sinistra di \mathbf{G} come gruppo di traslazioni sulla base M del fibrato $\xi = (\pi : \mathbf{G} \rightarrow M)$ e di \mathbf{H} a destra su \mathbf{G} , pensato come spazio totale di ξ .

Fissata un'azione a destra (24.33), ad ogni elemento X dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} associamo il generatore infinitesimale X^* del gruppo a un parametro di trasformazioni

$$(24.34) \quad P \times \mathbb{R} \ni (\sigma, t) \longrightarrow \sigma \exp(tX) \in P.$$

La curva $\gamma(t) = \sigma \exp(tX)$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$(24.35) \quad \begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}^*, & t \in \mathbb{R}, \\ \gamma(0) = \sigma. \end{cases}$$

In particolare, X^* si annulla in un punto $\sigma \in P$ se e soltanto se X appartiene all'algebra di Lie dello stabilizzatore \mathbf{G}_σ di σ in \mathbf{G} .

OSSERVAZIONE 24.9.17. Se $P = \mathbf{G}$ e (24.33) la moltiplicazione del gruppo, allora $X^* = X^*$ è il campo di vettori invariante a destra associato ad $X \in \mathfrak{g}$.

Fissata $\sigma \in P$, consideriamo l'applicazione differenziabile

$$(24.36) \quad \ell_\sigma : \mathbf{G} \ni x \longrightarrow \sigma x \in P.$$

Come nel caso delle azioni a sinistra, abbiamo

PROPOSIZIONE 24.9.18. Sia (24.33) un'azione differenziabile a destra. Allora

- (1) $X_\sigma^* = d\ell_\sigma(e)(X)$, $\forall \sigma \in P$, $\forall X \in \mathfrak{g}$;
- (2) $\ker d\ell_\sigma(e)$ è l'algebra di Lie dello stabilizzatore di σ in \mathbf{G} . □

Gli elementi a di \mathbf{G} definiscono diffeomorfismi di M in sé

$$r_a : P \ni \sigma \longrightarrow \sigma a \in P \quad (\text{TRASLAZIONI A DESTRA}).$$

DEFINIZIONE 24.9.19. L'azione (24.33) si dice

- *effettiva* se $r_a = \text{id}_P \iff a = e_{\mathbf{G}}$;
- *libera* se le r_a con $a \neq e_{\mathbf{G}}$ non hanno punti fissi;
- *transitiva* se per ogni coppia di punti σ_1, σ_2 di P esiste un $a \in \mathbf{G}$ tale che $\sigma_1 a = \sigma_2$.

Dalla Proposizione 24.9.18 otteniamo immediatamente

COROLLARIO 24.9.20. Se l'azione (24.33) è libera, allora, per ogni $\sigma \in P$, l'applicazione $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_\sigma^* \in T_\sigma P$ è iniettiva. □

Studio di alcuni gruppi classici

25.1. I quaternioni e la struttura differenziale di $SU(2)$, $SO(3)$, $SO(4)$

I *quaternioni* formano un'algebra di divisione reale, associativa e normata, di dimensione reale quattro, che denotiamo con \mathbb{H} . Indichiamo con 1 l'identità del prodotto e con i, j, κ le sue *unità immaginarie standard*. Gli elementi $1, i, j, \kappa$ formano una base di \mathbb{H} come spazio vettoriale reale. Una qualsiasi coppia di unità immaginarie, ad esempio i, j , generano \mathbb{H} come algebra reale. Il prodotto dei quaternioni si può rappresentare mediante:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & i & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \kappa & & j \\
 \nwarrow & & \nearrow \\
 & &
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \text{cioè} \quad
 \begin{cases}
 i \cdot j = -j \cdot i = \kappa, \\
 j \cdot \kappa = -\kappa \cdot j = i, \\
 \kappa \cdot i = -i \cdot \kappa = j.
 \end{cases}$$

La $a \rightarrow a \cdot 1$ identifica i reali ad una sottoalgebra di \mathbb{H} . Il prodotto di quaternioni non è commutativo ed i numeri reali sono tutti e soli gli elementi del centro di \mathbb{H} .

Il *coniugio* è l'involuzione \mathbb{R} -lineare

$$\mathbb{H} \ni q \longrightarrow \bar{q} \in \mathbb{H} \quad \text{tale che} \quad \bar{1} = 1, \bar{i} = -i, \bar{j} = -j, \bar{\kappa} = -\kappa.$$

I quaternioni lasciati fissi dal coniugio sono i reali, mentre un quaternione q con $\bar{q} = -q$ si dice *immaginario*. I quaternioni immaginari formano un sottospazio reale V di dimensione tre (lo spazio dei *vettori* secondo Hamilton). Valgono le proprietà

$$\begin{aligned}
 \overline{q_1 \cdot q_2} &= \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1, & q \cdot \bar{q} &= \|q\|^2 \in \mathbb{R}_+ \text{ e } \|q\| = 0 \Leftrightarrow q = 0, \\
 \|q_1 \cdot q_2\| &= \|q_1\| \cdot \|q_2\|, & (q_1 | q_2) &= \Re(q_1 \cdot \bar{q}_2) \text{ è il prodotto scalare su } \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4.
 \end{aligned}$$

in particolare:

LEMMA 25.1.1. *Con la restrizione del prodotto di quaternioni*

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$$

è un gruppo di Lie compatto. □

Un quaternione q si scrive in modo unico come una somma $q = a + v$ di un numero reale a e di un quaternione immaginario $v \in V$. Otteniamo

$$\Re(q_1 \cdot q_2) = \Re(q_2 \cdot q_1) = a_1 a_2 - v_1 \cdot v_2, \quad \text{Im}(q_1 \cdot q_2) = a_1 v_2 + a_2 v_1 + v_1 \times v_2$$

e quindi la parte reale del prodotto di due quaternioni è un prodotto di Minkowski (di segnatura $(1, 3)$) su $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$, mentre la parte immaginaria è un'espressione in cui compare il prodotto vettore.

Possiamo identificare i numeri complessi alla sottoalgebra di \mathbb{H} generata da un qualsiasi quaternioni non reale. In particolare, $\mathbb{C} \simeq \{a \cdot 1 + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Poiché la moltiplicazione di un quaternioni per un numero complesso non è commutativa, quando considereremo \mathbb{H} come uno spazio vettoriale complesso di dimensione due sarà necessario distinguere lo spazio vettoriale *a destra* (possiamo moltiplicare a destra per uno scalare complesso) dallo spazio vettoriale *a sinistra* (possiamo moltiplicare a sinistra per uno scalare complesso). Fissato un quaternioni a , la $\mathbb{H} \ni q \rightarrow a \cdot q \in \mathbb{H}$ è \mathbb{C} -lineare a destra, mentre la $\mathbb{H} \ni q \rightarrow q \cdot a \in \mathbb{H}$ è \mathbb{C} -lineare a sinistra.

Dati due quaternioni $a, b \in \mathbb{H}$, definiamo l'applicazione

$$(25.1) \quad \rho_{a,b} : \mathbb{H} \ni q \longrightarrow a \cdot q \cdot b \in \mathbb{H}.$$

LEMMA 25.1.2. *Se $a \in S^3$, allora $\sigma_a(q) = -a \cdot \bar{q} \cdot a$ è la simmetria ortogonale di $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$ di vettore a .*

DIMOSTRAZIONE. La σ_a è \mathbb{R} -lineare. Abbiamo $\sigma_a(a) = -a \cdot \bar{a} \cdot a = -a$. Se $\Re(a \cdot \bar{q}) = 0$, allora $a \cdot \bar{q}$ è un quaternioni immaginario e perciò

$$\Re(a \cdot \bar{q}) = 0 \implies a \cdot \bar{q} = -\overline{a \cdot \bar{q}} = -q \cdot \bar{a} \implies -a \cdot \bar{q} \cdot a = q \cdot \bar{a} \cdot a = q.$$

Quindi σ_a lascia fisso l'iperpiano dei quaternioni ortogonali ad a e trasforma il a nel suo opposto: è perciò la simmetria euclidea di vettore a di $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$. \square

PROPOSIZIONE 25.1.3. *L'applicazione*

$$\pi : S^3 \times S^3 \ni (a, b) \longrightarrow \rho_{a,\bar{b}} \in \mathbf{SO}(4)$$

è un omomorfismo surgettivo di gruppi di Lie ed un rivestimento a due fogli.

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che π sia un omomorfismo di gruppi segue subito dal fatto che $\rho_{a_1, b_1} \circ \rho_{a_2, b_2} = \rho_{a_1 \cdot a_2, b_2 \cdot b_1}$, per ogni $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{H}$. Poiché \mathbb{H} è un'algebra normata, è $\|\rho_{a,\bar{b}}(q)\| = \|q\|$ per ogni $q \in \mathbb{H}$ se $a, b \in S^3$. Quindi $\pi(S^3 \times S^3) \subset \mathbf{O}(4)$ ed in effetti $\pi(S^3 \times S^3) \subset \mathbf{SO}(4)$ perché $\pi(S^3 \times S^3)$ è connesso. Poiché ogni elemento di $\mathbf{SO}(4)$ è un prodotto di un numero pari di simmetrie vettoriali, la π è surgettiva per il Lemma 25.1.2. Infine, se $\rho_{a,\bar{b}} = \text{id}$, allora $a \cdot q = q \cdot b$ per ogni quaternioni q . Perciò $a = b \in S^3$ è un quaternioni che commuta con ogni altro quaternioni ed è perciò un numero reale di norma 1, cioè ± 1 . \square

PROPOSIZIONE 25.1.4. *L'applicazione*

$$\pi : S^3 \ni a \longrightarrow \rho_{a,\bar{a}} \in \mathbf{SO}(3)$$

è un omomorfismo surgettivo di gruppi di Lie ed un rivestimento a due fogli.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo identificare $\mathbf{SO}(3)$ al sottogruppo di $\mathbf{SO}(4)$ delle trasformazioni che fissano tutti i punti della retta reale in \mathbb{H} . Osserviamo che, se $a, b \in S^3$, allora

$$\rho_{a,\bar{b}}(1) = 1 \iff a \cdot \bar{b} = 1 \iff a = b.$$

La tesi è quindi conseguenza della Proposizione 25.1.3. \square

Consideriamo su \mathbb{H} la struttura di spazio vettoriale complesso a destra. Osserviamo che la norma soddisfa $\|q \cdot \tau\| = |\tau| \cdot \|q\|$ per ogni $q \in \mathbb{H}$ ed ogni $\tau \in \mathbb{C}$ ed è dunque associata ad un prodotto scalare Hermitiano. Il gruppo $\mathbf{U}(2)$ delle trasformazioni unitarie di $\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^2$ si identifica allora al gruppo delle trasformazioni \mathbb{C} -lineari di $\mathbf{SO}(4)$.

PROPOSIZIONE 25.1.5. *L'applicazione*

$$\pi : \mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^1 \ni (a, \tau) \longrightarrow \rho_{a,\tau} \in \mathbf{U}(2)$$

è un omomorfismo surgettivo di gruppi di Lie ed un rivestimento a due fogli. Essa definisce per restrizione un isomorfismo di gruppi di Lie

$$\mathbf{S}^3 \ni a \longleftarrow \rho_{a,1} \in \mathbf{SU}(2).$$

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue dal fatto che $\rho_{a,b}$ è \mathbb{C} -lineare a destra se e soltanto se τ è un numero complesso. Se indichiamo con $R_{a,\tau}$ l'applicazione \mathbb{C} -lineare corrispondente a $\rho_{a,\tau}$, si verifica facilmente che $\det(R_{a,\tau}) = \|a\|^2 \cdot \tau^2 = \tau^2$ se $(a, \tau) \in \mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^1$. Da questa osservazione segue la seconda affermazione della proposizione. \square

COROLLARIO 25.1.6. *Abbiamo i seguenti diffeomorfismi di classe \mathcal{C}^ω :*

$$\mathbf{SO}(3) \simeq \mathbb{RP}^3, \quad \mathbf{SO}(4) \simeq \mathbf{S}^3 \times \mathbb{RP}^3, \quad \mathbf{SU}(2) \simeq \mathbf{S}^3, \quad \mathbf{U}(2) \simeq \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^3. \quad \square$$

25.2. I gruppi $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(1, \mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$, $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$, $\mathbf{SO}(1, 2)$

Sia e_1, e_2 la base canonica di \mathbb{C}^2 . Definiamo una forma alternata non degenera ω su \mathbb{C}^2 ponendo

$$(25.2) \quad v \wedge w = \omega(v, w) \cdot e_1 \wedge e_2, \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^2.$$

Il gruppo $\mathbf{Sp}(1, \mathbb{C})$ consiste delle trasformazioni lineari di \mathbb{C}^2 che lasciano invariata la forma ω e dunque coincide con $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$.

La traccia del prodotto

$$(25.3) \quad \mathrm{tr}(XY) = \sum_{i,j=1}^n x_{i,j} y_{j,i}, \quad X = (x_{i,j}), Y = (y_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

è una forma bilineare e simmetrica non degenera sullo spazio vettoriale $\mathbb{C}^{n \times n}$ delle matrici complesse $n \times n$.

Consideriamo il caso $n = 2$ e la restrizione della traccia al suo sottospazio $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, di dimensione tre, delle matrici di $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ con traccia nulla. Una sua base consiste delle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed in tale base la matrice associata alla restrizione κ della forma (25.3) ad $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché κ è simmetrica non degenera, il gruppo delle trasformazioni lineari di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ che lasciano κ invariante si può identificare al gruppo ortogonale complesso $\mathbf{O}(3, \mathbb{C})$.

Per ogni $a \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$, l'applicazione¹

$$\text{Ad}(a) : \mathbb{C}^{2 \times 2} \ni X \rightarrow aXa^{-1} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

è un isomorfismo dell'anello degli endomorfismi lineari di \mathbb{C}^2 che preserva le tracce. Trasforma quindi $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ in sé e preserva la forma κ .

PROPOSIZIONE 25.2.1. *L'applicazione*

$$(25.4) \quad \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \ni a \longrightarrow \text{Ad}(a) \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$$

è un epimorfismo di gruppi di Lie con nucleo $\{\pm I_2\}$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo $\kappa(X^2) = -2 \det(X)$, per ogni $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Infatti, se $a, b, c \in \mathbb{C}$, allora risulta

$$\kappa\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\right) = \text{tr}\begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = 2(a^2 + bc) = -2 \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Quindi una trasformazione \mathbb{C} -lineare T di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ che preservi la forma κ preserva sia la traccia che il determinante delle matrici di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e quindi i loro autovalori. A meno di comporre la T con un'opportuna $\text{Ad}(a)$, con $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, possiamo supporre che T lasci fissa la matrice $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e quindi il suo κ -ortogonale

$$H = \Omega^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Inoltre, poiché H è un piano iperbolico, la τ o lascia invariante o scambia tra loro le sue due rette isotrope

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Se $T \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$ allora lascia invariante ciascuna delle due rette isotrope ed è quindi della forma

$$T \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \mu b & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{per ogni } a, b \in \mathbb{C}, \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Da

$$2ab = \kappa\left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\right) = \kappa\left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \mu b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \lambda b & 0 \end{pmatrix}\right) = 2\lambda\mu ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

segue che $0 \neq \mu = \lambda^{-1}$. Se η è un numero complesso con $\eta^2 = \lambda$, abbiamo allora

$$T = \text{Ad}\begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix}.$$

¹La corrispondenza che associa ad ogni $a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ la trasformazione lineare $\text{Ad}(a) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$ definita da $\text{Ad}(a)(X) = aXa^{-1}$ per $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è la *rappresentazione aggiunta* di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Il nucleo della rappresentazione aggiunta è costituito dai multipli dell'identità in $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ e il luogo dei punti fissi di Ad dai multipli dell'identità in $\mathbb{C}^{n \times n}$.

Questo dimostra che la (25.4) è un omomorfismo surgettivo e, considerando il caso in cui $\lambda = \mu = 1$, che il suo nucleo è $\pm I$. \square

Restringendoci alle matrici a coefficienti reali, otteniamo analogamente

PROPOSIZIONE 25.2.2. *L'applicazione*

$$(25.5) \quad \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \ni a \longrightarrow \text{Ad}(a) \in \mathbf{SO}(1, 2)$$

definisce un omomorfismo surgettivo di $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ sulla componente connessa dell'identità di $\mathbf{SO}(1, 2)$, con nucleo $\{\pm I_2\}$. \square

OSSERVAZIONE 25.2.3. Sia $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matrice reale simmetrica di segnatura $(1, 2)$. Allora $\mathbf{SO}(1, 2) \simeq \mathbf{SO}_B(\mathbb{R})$. Gli elementi di $\mathbf{SO}_B(\mathbb{R})$ trasformano in sé il cono $C = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v^\top B v > 0\}$. Esso è formato da due componenti connesse, che possiamo indicare con C_+ e C_- . La componente connessa dell'identità di $\mathbf{SO}_B(\mathbb{R})$ consiste delle trasformazioni x per cui $x(C_+) = C_+$ ed $x(C_-) = C_-$.

Le due componenti connesse si possono evidenziare anche utilizzando la decomposizione di Cartan (Teorema ??). Infatti, posto $B = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}$, il sottogruppo $\mathbf{SO}(1, 2) \cap \mathbf{U}(3)$ di $\mathbf{SO}(1, 2)$, è un suo sottogruppo compatto massimale, e quindi un suo retratto di deformazione, e consiste delle matrici

$$\begin{pmatrix} \epsilon & \\ & a \end{pmatrix} \quad \text{con } \epsilon = \pm 1, a \in \mathbf{O}(2) \quad \text{e } \det a = \epsilon.$$

OSSERVAZIONE 25.2.4. Se $n > 2$, possiamo ancora considerare $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ come uno spazio ortogonale complesso di dimensione $n^2 - 1$, con la forma bilineare simmetrica κ definita dalla traccia del prodotto di matrici. L'applicazione aggiunta

$$\text{Ad} : \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{SO}_\kappa(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})) \simeq \mathbf{SO}_{n^2-1}(\mathbb{C})$$

è ancora un omomorfismo di gruppi di Lie, che induce un isomorfismo di $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ (se n è dispari), o di $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\{\pm I\}$ (se n è pari), con un sottogruppo di $\mathbf{SO}_\kappa(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$.

25.3. La quadrica di \mathbb{CP}^5 ed alcuni omomorfismi di gruppi ($\mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$, $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$, $\mathbf{SO}^+(3, 3)$, $\mathbf{SU}(4)$, $\mathbf{SO}(6)$)

Lo spazio vettoriale complesso $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ dei due-vettori complessi alternati ha dimensione sei. Siano e_1, e_2, e_3, e_4 i vettori della base canonica di \mathbb{C}^4 e definiamo una forma bilineare simmetrica b su $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ ponendo

$$(25.6) \quad \alpha \wedge \beta = b(\alpha, \beta) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4),$$

Nella base canonica

$$(25.7) \quad e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4$$

di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ la matrice associata alla forma b è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi la forma è non degenera.

La b ci permette di rappresentare la grassmanniana $Gr_{2,4}(\mathbb{C})$ dei piani per l'origine di \mathbb{C}^4 come i punti di una quadrica proiettiva. Ricordiamo che ogni elemento di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ ha rango pari. L'elemento nullo ha rango 0, gli elementi di rango due sono tutti e soli quelli che si possono scrivere nella forma $v_1 \wedge v_2$ con v_1 e v_2 linearmente indipendenti, mentre quelli di rango quattro si possono scrivere nella forma $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$ per una base v_1, v_2, v_3, v_4 di \mathbb{C}^4 .

LEMMA 25.3.1. *Sia $0 \neq \alpha \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. Allora*

- (1) α è isotropo, cioè $b(\alpha, \alpha) = 0$ se e soltanto se α ha rango due;
- (2) α è anisotropo, cioè $b(\alpha, \alpha) \neq 0$ se e soltanto se α ha rango quattro;
- (3) se $\alpha = v_1 \wedge v_2$ e $\beta = w_1 \wedge w_2$ sono due elementi di rango due linearmente indipendenti in $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, allora $b(\alpha, \beta) = 0$ se e soltanto se i due piani $\langle v_1, v_2 \rangle$ e $\langle w_1, w_2 \rangle$ hanno una retta in comune. \square

Un due-piano di \mathbb{C}^4 si identifica, a meno di un fattore complesso, ad un elemento di rango due di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. Quindi, come conseguenza del Lemma 25.3.1, possiamo enunciare il

COROLLARIO 25.3.2. *La Grassmanniana $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ dei due-piani di \mathbb{C}^4 si può identificare alla quadrica proiettiva complessa non degenera di $\mathbb{C}P^5$. \square*

OSSERVAZIONE 25.3.3. In particolare $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ è una sottovarietà analitica compatta di dimensione reale otto. È anche una *varietà complessa compatta liscia di dimensione quattro*.

Il gruppo delle trasformazioni \mathbb{C} -lineari di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4) \simeq \mathbb{C}^6$ che preservano la forma bilineare simmetrica b è il gruppo ortogonale complesso $\mathbf{O}(6, \mathbb{C})$. Le matrici di $\mathbf{O}(6, \mathbb{C})$ hanno determinante ± 1 . Quelle di determinante 1 formano il sottogruppo normale di indice due $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$. Più in generale, possiamo considerare il gruppo $\mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$ delle matrici *conformi*, quelle cioè che trasformano la forma b in un suo multiplo per uno scalare diverso da zero.

Abbiamo

PROPOSIZIONE 25.3.4. *Per ogni $a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$, l'applicazione \mathbb{C} -lineare*

$$(25.8) \quad \lambda(a) : \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{C}^4), \text{ t.c. } \lambda(a)(v_1 \wedge v_2) = a(v_1) \wedge a(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}^4$$

soddisfa la condizione

$$(25.9) \quad b(\lambda(a)(\alpha), \lambda(a)(\beta)) = \det(a) b(\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$$

ed è quindi conforme per b .

L'applicazione

$$(25.10) \quad \lambda : \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$$

è un epimorfismo di gruppi con nucleo $\{\pm I_4\}$. Per restrizione otteniamo epimorfismi di gruppi, entrambi con nucleo $\{\pm I_4\}$,

$$(25.11) \quad \{a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \mid \det a = \pm 1\} \xrightarrow{\lambda} \mathbf{O}(6, \mathbb{C}),$$

$$(25.12) \quad \mathbf{SL}_4(\mathbb{C}) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{SO}(6, \mathbb{C}).$$

DIMOSTRAZIONE. La (25.9) ed il fatto che $\lambda : \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$ sia un omomorfismo di gruppi seguono dalle proprietà del determinante. Dimostriamo ora che tale omomorfismo è surgettivo. Sia $\tau \in \mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$. Poiché la τ trasforma elementi isotropi di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ in elementi isotropi di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, possiamo pensarla come una trasformazione che manda piani di \mathbb{C}^4 in piani di \mathbb{C}^4 . Inoltre, poiché due piani che si intersecano in una retta sono elementi isotropi non nulli distinti di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ tra loro ortogonali rispetto alla forma b , la τ definisce una trasformazione dello spazio proiettivo \mathbb{CP}^3 delle rette per l'origine di \mathbb{C}^4 che preserva le collineazioni. Per il teorema fondamentale della geometria proiettiva l'applicazione è un'omografia, che si ottiene per passaggio al quoziente da un'applicazione $b \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$. Riscalando, otteniamo una $a = k \cdot b$, con $0 \neq k \in \mathbb{C}$, tale che $\lambda(a) = \tau$.

Una trasformazione $a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$ per cui $\lambda(a) = I_6$ definisce l'omografia proiettiva identica ed è quindi un multiplo dell'identità. Da questa osservazione seguono tutte le altre affermazioni della proposizione. \square

OSSERVAZIONE 25.3.5. $\mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$ e $\mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$ sono varietà analitiche reali di dimensione 32 (e varietà analitiche complesse di dimensione 16) e la (25.10) un rivestimento differenziabile a due fogli.

$\mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$ ed $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$ sono varietà analitiche di dimensione reale 30 (e varietà analitiche complesse di dimensione 15) e la (25.12) un rivestimento differenziabile a due fogli. Essendo semplicemente connesso, $\mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$ è il rivestimento universale di $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$, che ha quindi gruppo fondamentale \mathbb{Z}_2 .

La restrizione di b al sottospazio reale $\Lambda^2(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{R}^6$ è non degenera di segnatura (3, 3). Il gruppo delle trasformazioni \mathbb{R} -lineari che la lasciano invariante è quindi il gruppo ortogonale reale di segnatura (3, 3) ed otteniamo perciò

PROPOSIZIONE 25.3.6. *L'applicazione*

$$(25.13) \quad \mathbf{SL}_4(\mathbb{R}) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{SO}(3, 3)$$

è un epimorfismo di $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$ sulla componente connessa dell'identità $\mathbf{SO}^+(3, 3)$ di $\mathbf{SO}(3, 3)$, con nucleo $\{\pm I_4\}$. \square

OSSERVAZIONE 25.3.7. Il gruppo $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$ è connesso, ma non semplicemente connesso (ha gruppo fondamentale \mathbb{Z}_2). Il gruppo $\mathbf{SO}(3, 3)$ ha due componenti connesse. $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$ ed $\mathbf{SO}(3, 3)$ sono varietà analitiche reali di dimensione 15 e la (25.13) un rivestimento differenziabile a due fogli della componente connessa dell'identità $\mathbf{SO}^+(3, 3)$ di $\mathbf{SO}(3, 3)$. Il gruppo fondamentale di $\mathbf{SO}^+(3, 3)$ è $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Consideriamo su $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ l'involutione anti- \mathbb{C} -lineare \star , definita sugli elementi della base (25.7) mediante

$$\begin{aligned}\star e_1 \wedge e_2 &= e_3 \wedge e_4, & \star e_1 \wedge e_3 &= e_4 \wedge e_2, & \star e_1 \wedge e_4 &= e_2 \wedge e_3, \\ \star e_2 \wedge e_3 &= e_1 \wedge e_4, & \star e_4 \wedge e_2 &= e_1 \wedge e_3, & \star e_3 \wedge e_4 &= e_1 \wedge e_2.\end{aligned}$$

Sugli elementi della base (25.7) la matrice associata alla forma Hermitiana simmetrica

$$(25.14) \quad \mathfrak{g}(\alpha, \beta) = b(\alpha, \star\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$$

è l'identità.

LEMMA 25.3.8. *Il gruppo delle trasformazioni \mathbb{C} -lineari di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ che preservano sia la forma simmetrica b che la forma Hermitiana simmetrica \mathfrak{g} è isomorfo al gruppo ortogonale reale $\mathbf{O}(6)$.*

DIMOSTRAZIONE. Il sottospazio

$$V = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \mid \star\alpha = \alpha\}$$

è una forma reale² di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. Le restrizioni a V di b e \mathfrak{g} coincidono e definiscono un prodotto scalare su V . Una trasformazione \mathbb{C} -lineare τ di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ che preservi sia b che \mathfrak{g} verifica

$$\begin{aligned}b(\tau(\alpha), \tau(\star\beta)) &= b(\alpha, \star\beta) = \mathfrak{g}(\alpha, \beta) = \mathfrak{g}(\tau(\alpha), \tau(\beta)) \\ &= \mathfrak{g}(\tau(\alpha), \star\tau(\beta)), \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4).\end{aligned}$$

Questo implica che $\star\tau = \tau\star$ e quindi che $\tau(V) = V$, e la restrizione di τ a V definisce un elemento di $\mathbf{O}(6)$. Viceversa, una trasformazione ortogonale su V si estende in modo unico ad una trasformazione \mathbb{C} -lineare su $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, che preserva sia b che \mathfrak{g} . \square

PROPOSIZIONE 25.3.9. *Per restrizione, la trasformazione λ in (25.10), definisce epimorfismi di gruppi di Lie*

$$(25.15) \quad \{a \in \mathbf{U}(4) \mid \det(a) = \pm 1\} \xrightarrow{\lambda} \mathbf{O}(6),$$

$$(25.16) \quad \mathbf{SU}(4) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{SO}(6),$$

con nucleo $\{\pm I_4\}$.

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente verificare che, se $a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$ e $\lambda(a)$ preserva sia b che \mathfrak{g} , allora $a \in \mathbf{U}(4)$ e ha determinante ± 1 . Il fatto che $\det(a) = \pm 1$ segue dalla (25.9). Inoltre, poiché $\lambda(a)$ commuta con l'operatore \star , la a trasforma due-piani ortogonali in due-piani ortogonali di \mathbb{C}^4 . Da questo ricaviamo che è una trasformazione \mathbb{C} -lineare di \mathbb{C}^4 che preserva l'ortogonalità e quindi conforme per il prodotto scalare Hermitiano di \mathbb{C}^4 . Avendo determinante ± 1 è allora unitaria. \square

²Una forma reale V di uno spazio complesso W è un suo sottospazio vettoriale reale tale che $V \cap iV = \{0\}$ e $W = V \oplus iV$.

OSSERVAZIONE 25.3.10. $\mathbf{SU}(4)$ ed $\mathbf{SO}(6)$ sono varietà differenziabili analitiche reali connesse e compatte di dimensione 15. Il gruppo $\mathbf{SU}(4)$ è semplicemente connesso e la (25.16) il rivestimento universale, a due fogli, di $\mathbf{SO}(6)$.

25.4. I gruppi $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(5)$

Fissiamo una forma alternata non degenere $\omega \in \Lambda^2([\mathbb{C}^4]^*)$. Possiamo ad esempio scegliere la forma a coefficienti reali

$$(25.17) \quad \omega = dx^1 \wedge dx^3 + dx^2 \wedge dx^4,$$

dove abbiamo indicato con dx^1, dx^2, dx^3, dx^4 gli elementi della duale della base canonica e_1, e_2, e_3, e_4 di \mathbb{C}^4 .

Ricordiamo che il gruppo simplettico complesso $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$ si può identificare al gruppo delle trasformazioni \mathbb{C} -lineari di \mathbb{C}^4 che preservano la forma alternata ω :

$$\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \mid \omega(a(v_1), a(v_2)) = \omega(v_1, v_2), \forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}^4\}.$$

Possiamo considerare la ω come una forma lineare su $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. In particolare,

$$(25.18) \quad W = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \mid \omega(\alpha) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale complesso, di dimensione cinque, di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, ed

$$(25.19) \quad e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4$$

ne definiscono una base. La restrizione a W della forma simmetrica b definita dalla (25.6) ha in questa base la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ed è quindi non degenere. Osserviamo ancora che W è l'ortogonale, rispetto a b , di $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$.

Quindi, le trasformazioni \mathbb{C} -lineari di W che preservano b formano il gruppo ortogonale complesso $\mathbf{O}(5, \mathbb{C})$. Ogni $\tau \in \mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$ si estende in modo unico ad una $\tilde{\tau} \in \mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$, che coincide con τ su W e lascia fisso l'elemento $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$. D'altra parte, una $a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$ la cui $\lambda(a)$ lasci fisso $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$ appartiene al sottogruppo $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$. Otteniamo perciò

LEMMA 25.4.1. *L'applicazione*

$$(25.20) \quad \mathbf{Sp}(2, \mathbb{C}) \ni a \longrightarrow \lambda(a)|_W \in \mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$$

è un epimorfismo con nucleo $\{\pm I_4\}$. □

OSSERVAZIONE 25.4.2. $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$ ed $\mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$ sono varietà analitiche reali connesse di dimensione 20; $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$ è semplicemente connesso e la (25.20) un rivestimento universale, differenziabile e a due fogli, di $\mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$, che ha gruppo fondamentale \mathbb{Z}_2 .

La restrizione della forma bilineare simmetrica b al sottospazio reale

$$W_{\mathbb{R}} = W \cap \Lambda^2(\mathbb{R}^4) = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4) \mid \omega(\alpha) = 0\} \simeq \mathbb{R}^5$$

è non degenera ed ha segnatura $(3, 2)$. Poiché il gruppo delle trasformazioni che preservano una forma bilineare simmetrica di segnatura $(3, 2)$ è il gruppo ortogonale $\mathbf{O}(2, 3)$, otteniamo

PROPOSIZIONE 25.4.3. *La restrizione dell'applicazione λ in (25.10) definisce un omomorfismo di gruppi*

$$(25.21) \quad \mathbf{Sp}(2, \mathbb{R}) \ni a \longrightarrow \lambda(a)|_{W_{\mathbb{R}}} \in \mathbf{SO}(2, 3),$$

la cui immagine è la componente connessa dell'identità $\mathbf{SO}^+(2, 3)$ di $\mathbf{SO}(2, 3)$, con nucleo $\{\pm I_4\}$. \square

OSSERVAZIONE 25.4.4. $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{R})$ ed $\mathbf{SO}(2, 3)$ sono varietà analitiche reali di dimensione 10. Il gruppo $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{R})$ è connesso ed $\mathbf{SO}(2, 3)$ consiste di due componenti connesse. La (25.21) è un rivestimento differenziabile a due fogli della sua componente connessa dell'identità. Il gruppo fondamentale di $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{R})$ è \mathbb{Z} e quello di $\mathbf{SO}(2, 3)$ è $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

L'involutione anti- \mathbb{C} -lineare \star lascia invariante il sottospazio W e trasforma l'elemento $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$ nel suo opposto. In particolare, gli elementi di W che sono lasciati fissi da \star formano un sottospazio vettoriale reale $L_{\mathbb{R}}$ di dimensione cinque su cui la b definisce un prodotto scalare Euclideo. Otteniamo perciò:

PROPOSIZIONE 25.4.5. *La restrizione dell'applicazione λ in (25.10) definisce un epimorfismo di gruppi*

$$(25.22) \quad \mathbf{Sp}(2) \ni a \longrightarrow \lambda(a)|_{L_{\mathbb{R}}} \in \mathbf{SO}(5),$$

con nucleo $\{\pm I_4\}$. \square

OSSERVAZIONE 25.4.6. I gruppi di Lie $\mathbf{Sp}(2)$ e $\mathbf{SO}(5)$ sono varietà analitiche reali connesse e compatte di dimensione 10; $\mathbf{Sp}(2)$ è semplicemente connesso e la (25.22) è il rivestimento universale, differenziabile e a due fogli, di $\mathbf{SO}(5)$, che ha gruppo fondamentale \mathbb{Z}_2 .

OSSERVAZIONE 25.4.7. In questo e nei precedenti paragrafi abbiamo dimostrato i seguenti rivestimenti a due fogli:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{SL}_4(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{SO}(6, \mathbb{C}), & \mathbf{SL}_4(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SO}^+(3, 3), & \mathbf{SU}(4) \longrightarrow \mathbf{SO}(6), \\ \mathbf{Sp}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{SO}(5, \mathbb{C}), & \mathbf{Sp}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SO}^+(2, 3), & \mathbf{Sp}(2) \longrightarrow \mathbf{SO}(5). \end{array}$$

In ciascuna delle due righe, il primo è la *forma complessa*, il secondo la *forma split* ed il terzo la *forma compatta* dell'omomorfismo.

25.5. Rappresentazione spinoriale di alcuni gruppi di Lorentz

Le rappresentazioni spinoriali di $\mathbf{SO}^+(1, 2)$, $\mathbf{SO}^+(1, 3)$, $\mathbf{SO}^+(1, 5)$, $\mathbf{SO}^+(1, 9)$ si ottengono, al variare dell'algebra di divisione normata \mathbb{k} , facendo agire il gruppo $\mathbf{SL}_2(\mathbb{k})$ sullo spazio $\mathfrak{p}_2(\mathbb{k})$ delle matrici Hermitiane simmetriche di ordine due con

coefficienti in \mathbb{k} . I quattro casi possibili³ per \mathbb{k} sono \mathbb{R} (reali), \mathbb{C} (complessi), \mathbb{H} (quaternioni di Hamilton), \mathbb{O} (ottonioni o ottave di Cayley) e ciascuno corrisponde ad uno dei gruppi sopra elencati. Il punto centrale è osservare che, nonostante \mathbb{H} ed \mathbb{O} non siano commutative ed \mathbb{O} nemmeno associativa, i determinanti delle matrici 2×2 Hermitiane simmetriche con coefficienti in \mathbb{k} sono ben definiti, e descrivono una forma quadratica reale di segnatura Lorentziana. Per il teorema di Binet, le azioni aggiunte Hermitiane dei gruppi lineari $\mathbf{SL}_2(\mathbb{k})$ su $\mathfrak{p}_2(\mathbb{k})$ definiscono rivestimenti a due fogli dei gruppi di Lorentz, che ci permettono di identificare i *gruppi spinoriali*, definiti come rivestimenti dei corrispondenti gruppi di Lorentz, ai corrispondenti gruppi lineari speciali:

$$\mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SO}^+(1, 2),$$

$$\mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{SO}^+(1, 3),$$

$$\mathbf{SL}_2(\mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{SO}^+(1, 6),$$

$$\mathbf{SL}_2(\mathbb{O}) \longrightarrow \mathbf{SO}^+(1, 9).$$

25.5.1. Il caso $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. Sia $\mathfrak{p}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche reali di ordine due. Il determinante

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = ac - b^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

è su $\mathfrak{p}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$ una forma quadratica di segnatura $(1, 2)$, che definisce su di esso la struttura di uno spazio di Minkowski di dimensione tre. I suoi vettori di tipo tempo sono le matrici simmetriche con determinante positivo, unione dei due coni convessi

$$C^+ = \{X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{R}) \mid \det(X) > 0, \operatorname{tr}(X) > 0\}, \quad C^- = \{X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{R}) \mid \det(X) > 0, \operatorname{tr}(X) < 0\},$$

ed il gruppo $\mathbf{O}(1, 2)$ delle trasformazioni lineari di $\mathfrak{p}_2(\mathbb{R})$ che lasciano invariante la forma del determinante ha i sottogruppi normali

$$\mathbf{SO}(1, 2) = \{\psi \in \mathbf{O}(1, 2) \mid \det(\psi) = 1\} \quad \text{di indice 2,}$$

$$\mathbf{O}^+(1, 2) = \{\psi \in \mathbf{O}(1, 2) \mid \psi(C^+) = C^+\} \quad \text{di indice 2,}$$

$$\mathbf{SO}^+(1, 2) = \mathbf{SO}(1, 2) \cap \mathbf{O}^+(1, 2) \quad \text{di indice 4.}$$

Il gruppo $\mathbf{O}(1, 2)$ ha quattro componenti connesse ed $\mathbf{SO}^+(1, 2)$ è la componente connessa dell'identità.

Il sottospazio $\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{R})$ delle matrici reali simmetriche 2×2 con traccia nulla ha dimensione due e su di esso il determinante definisce una forma definita negativa e quindi una struttura Euclidea. Ogni trasformazione lineare ortogonale di $\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{R})$ si estende in modo unico ad una trasformazione di $\mathbf{O}^+(1, 2)$ che lascia fissa la matrice

³La classificazione delle algebre di divisione normate fu ottenuta da Adolph Hurwitz, *Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen*, Nachr. Ges. Wiss., Göttingen (1898), pp. 309-316.

$\sigma_0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le trasformazioni $\psi \in \mathbf{O}(1, 2)$ che lasciano fissa σ_0 sono quelle che preservano la traccia. È allora:

$$\mathbf{O}(2) \simeq \{\psi \in \mathbf{O}^+(1, 2) \mid \text{tr}(\psi(X)) = \text{tr}(X), \forall X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{R})\}.$$

PROPOSIZIONE 25.5.1. Per ogni $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$,

$$(25.23) \quad \{\phi_a : \mathfrak{p}_2(\mathbb{R}) \ni X \longrightarrow aXa^* \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{R})\} \in \mathbf{SO}^+(1, 2).$$

La

$$(25.24) \quad \phi : \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \ni a \longrightarrow \phi_a \in \mathbf{SO}^+(1, 2),$$

è un epimorfismo di gruppi di Lie ed un rivestimento differenziabile a due fogli.

DIMOSTRAZIONE. La aXa^* è simmetrica per ogni $X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{R})$ ed $a \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$. Quindi $\phi_a \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{p}_2(\mathbb{R}))$. Per il teorema di Binet, $\phi_a \in \mathbf{O}(1, 2)$ se $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ e ϕ è a valori in $\mathbf{SO}^+(1, 2)$ perché ϕ è continua ed $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ connesso.

Verifichiamo che $\phi(\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})) = \mathbf{SO}^+(1, 2)$. Fissiamo la base ortonormale

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{di } \mathfrak{p}_2(\mathbb{R}).$$

Sia $\psi \in \mathbf{SO}^+(1, 2)$. La $\sigma'_0 = \psi(\sigma_0)$ è una matrice simmetrica di determinante uno e traccia positiva. Ha quindi due autovalori positivi, uno reciproco dell'altro, ed esiste quindi una matrice $u_0 \in \mathbf{SO}(2)$ tale che

$$\phi_{u_0}(\sigma'_0) = u_0 \sigma'_0 u_0^* = u_0 \sigma'_0 u_0^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda > 0.$$

Allora

$$a_0 = \begin{pmatrix} \lambda^{-1/2} & \\ & \lambda^{1/2} \end{pmatrix} u_0 \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \phi_{a_0}(\sigma'_0) = \sigma_0$$

e $\psi_0 = \phi_{a_0} \circ \psi \in \mathbf{SO}^+(1, 2)$. Abbiamo $\psi_0((\sigma_i)) = \sigma''_i$, per $i = 0, 1, 2$, con $\sigma''_0 = \sigma_0$. La ψ_0 lascia fissa σ_0 e quindi conserva le tracce. In particolare σ''_1 ha traccia nulla e determinante -1 e σ''_2 si ottiene ruotando σ''_1 , sul piano $\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{R})$, di un angolo $\pi/2$. Risulta quindi determinata una $a_1 \in \mathbf{SO}(2)$ tale che

$$\phi_{a_1}(\sigma''_1) = a_1 \sigma''_1 a_1^* = a_1 \sigma''_1 a_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \phi_{a_1}(\sigma''_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

È perciò $\text{Id}_{\mathfrak{p}_2(\mathbb{R})} = \phi_{a_1} \circ \phi_{a_0} \circ \psi = \phi_{a_1 a_0} \circ \psi$. Quindi $\psi = \phi_{a_0^{-1} a_1^{-1}}$ e ciò prova che ϕ è surgettiva su $\mathbf{SO}^+(1, 2)$. Se $\phi_a = \text{Id}_{\mathfrak{p}_2(\mathbb{R})}$, allora da $\phi_a(\sigma_0) = \sigma_0$ ricaviamo che $a \in \mathbf{SO}(2)$. Poi, da $\phi_a(\sigma_1) = a\sigma_1 a^* = a\sigma_1 a^{-1}$ deduciamo che a è diagonale e quindi uguale a $\pm \text{Id}_2$. \square

OSSERVAZIONE 25.5.2. La restrizione della (25.24) ad $\mathbf{SO}(2)$ dà un epimorfismo

$$\mathbf{SO}_2 \ni a \longrightarrow \{\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{R}) \ni X \rightarrow aXa^* \in \mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{R})\} \in \mathbf{SO}(2)$$

che è un rivestimento differenziabile a due fogli di $\mathbf{SO}(2) \simeq S^1$.

25.5.2. Il caso $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. Indichiamo con $\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici complesse 2×2 Hermitiane simmetriche: è uno spazio vettoriale reale di dimensione quattro, su cui il determinante

$$\det \begin{pmatrix} x & z \\ \bar{z} & y \end{pmatrix} = xy - |z|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C},$$

definisce una forma quadratica di segnatura $(1, 3)$. Possiamo quindi identificare lo spazio di Minkowski di dimensione quattro con lo spazio vettoriale $\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$, in cui la forma quadratica fondamentale è data dal determinante. Il gruppo $\mathbf{O}(1, 3)$ delle trasformazioni reali ortogonali rispetto a una forma simmetrica di segnatura $(1, 3)$ si identifica così al gruppo delle $\phi \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{p}_2(\mathbb{C}))$ tali che $\det(\phi(X)) = \det(X)$ per ogni $X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$.

Ricordiamo che il determinante di un elemento di $\mathbf{O}(1, 3)$ è uguale a ± 1 . I suoi elementi di determinante uno formano il sottogruppo normale di indice due $\mathbf{SO}(1, 3)$. Denotiamo con

$$C = \{X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{C}) \mid \det X > 0\}$$

il cono aperto dei vettori di tipo tempo. Gli X di C hanno le componenti sulla diagonale reali, non nulle e dello stesso segno. Il cono C è unione di due componenti connesse e convesse

$$C = C^+ \cup C^-, \quad \text{con } C^+ = \{X \in C \mid \text{tr}(X) > 0\}, \quad C^- = \{X \in C \mid \text{tr}(X) < 0\}$$

ed un elemento ϕ di $\mathbf{O}(1, 3)$ o preserva o scambia tra loro C^+ e C^- . Abbiamo quindi un altro sottogruppo di indice due

$$\mathbf{O}^+(1, 3) = \{\phi \in \mathbf{O}(1, 3) \mid \phi(C^+) = C^+, \phi(C^-) = C^-\}.$$

L'intersezione

$$\mathbf{SO}^+(1, 3) = \mathbf{SO}(1, 3) \cap \mathbf{O}^+(1, 3)$$

è la componente connessa dell'identità di $\mathbf{O}(1, 3)$ ed è un sottogruppo normale di $\mathbf{O}(1, 3)$ di indice quattro. Il gruppo $\mathbf{SO}^+(1, 3)$ è il *gruppo di Lorentz* che definisce la simmetria della relatività ristretta.

Possiamo identificare lo spazio Euclideo \mathbb{R}^3 al sottospazio $\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{C})$ delle matrici Hermitiane simmetriche a traccia nulla. La restrizione a $\mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{C})$ della forma fondamentale è l'opposto della norma Euclidea usuale. Questo ci permette di identificare il gruppo $\mathbf{O}(3)$ delle trasformazioni ortogonali di \mathbb{R}^3 al sottogruppo di $\mathbf{O}(1, 3)$ delle trasformazioni che conservano al tempo stesso il determinante e la traccia:

$$\mathbf{O}(3) = \{\phi \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})) \mid \det(\phi(X)) = \det(X), \text{tr}(\phi(X)) = \text{tr}(X), \forall X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{C})\}.$$

PROPOSIZIONE 25.5.3. *Ogni $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ definisce un'applicazione*

$$(25.25) \quad \phi_a : \mathfrak{p}_2(\mathbb{C}) \ni X \longrightarrow \phi_a(X) = aXa^* \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{C}) \quad \text{con} \quad \phi_a \in \mathbf{SO}^+(1, 3).$$

La corrispondenza

$$(25.26) \quad \phi : \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \ni a \longrightarrow \phi_a \in \mathbf{SO}^+(1, 3)$$

è un epimorfismo di gruppi con nucleo $\{\pm \mathbf{I}\}$ ed un rivestimento differenziabile a due fogli.

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di Binet, $\phi_a \in \mathbf{O}(1, 3)$ se $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$. Poiché $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ è connesso ed $a \mapsto \phi_a$ continua, l'immagine $\phi(\mathbf{SL}_2(\mathbb{C}))$ è contenuta nella componente connessa dell'identità $\mathbf{SO}^+(1, 3)$ di $\mathbf{O}(1, 3)$.

Dimostriamo ora che (25.26) è surgettiva. A questo scopo fissiamo la base ortonormale di $\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$ formata dalle matrici

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $\psi \in \mathbf{SO}^+(1, 3)$ e poniamo $\sigma'_i = \psi(\sigma_i)$, per $i = 0, 1, 2, 3$. Basterà dimostrare che possiamo trovare $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ tale che $\phi_a(\sigma'_i) = \sigma_i$ per $i = 0, 1, 2, 3$. La matrice σ'_0 ha determinante uno e traccia positiva ed è diagonalizzabile in una base ortonormale di \mathbb{C}^2 . Possiamo quindi trovare un numero reale positivo λ ed un $u_0 \in \mathbf{SU}(2)$ tale che

$$u_0 \sigma'_0 u_0^* = u_0 \sigma'_0 u_0^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\sigma_0 = \phi_{a_0}(\sigma'_0) \quad \text{con} \quad a_0 = \begin{pmatrix} \lambda^{-1/2} & \\ & \lambda^{1/2} \end{pmatrix} u_0 \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}).$$

I $\phi_{a_0}(\sigma'_i) = \sigma''_i$ formano una nuova base ortonormale di $\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$, con $\sigma''_0 = \sigma_0$. In particolare, σ''_1 ha determinante -1 e traccia nulla: è quindi Hermitiana simmetrica con autovalori $1, -1$ e perciò possiamo trovare una $a_1 \in \mathbf{SU}(2)$ tale che

$$\phi_{a_1}(\sigma''_1) = a_1 \sigma''_1 a_1^* = a_1 \sigma''_1 a_1^{-1} = \sigma_1.$$

I $\sigma'''_i = \phi_{a_1} \circ \phi_{a_0}(\sigma'_i) = \phi_{a_1 a_0}(\sigma'_i)$, per $i = 0, 1, 2, 3$ formano una base ortonormale di $\mathfrak{p}_2(\mathbb{C})$ con $\sigma'''_0 = \sigma_0$ e $\sigma'''_1 = \sigma_1$. Poiché $\phi_{a_1 a_0} \circ \psi \in \mathbf{SO}^+(1, 3)$ e lascia fissi σ_0 e σ_1 , è una rotazione di $\pi/2$ nel piano euclideo formato dalle matrici Hermitiane simmetriche con diagonale principale nulla. Abbiamo allora

$$\sigma'''_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \bar{\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma'''_3 = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha \\ -i\bar{\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1.$$

Se β è una radice quadrata di α , allora

$$a_2 = \begin{pmatrix} \bar{\beta} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} \phi_{a_2}(\sigma_0) = \sigma_0, \quad \phi_{a_2}(\sigma_1) = \sigma_1, \\ \phi_{a_2}(\sigma'''_2) = \sigma_2, \quad \phi_{a_2}(\sigma'''_3) = \sigma_3. \end{array}$$

Otteniamo così che $\phi_a(\sigma'_i) = \sigma_i$ per $i = 0, 1, 2, 3$ se $a = a_2 a_1 a_0$; quindi $\psi = \phi_{a^{-1}}$ e ciò completa la dimostrazione del fatto che (25.26) sia surgettiva.

Sia ora $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ tale che ϕ_a sia l'identità. Da $\phi_a(\sigma_0) = \sigma_0$ abbiamo che $aa^* = \sigma_0 \text{Id}$ e quindi $a \in \mathbf{SU}(2)$. Da $\phi_a(\sigma_1) = \sigma_1$ ricaviamo allora che a commuta con σ_1 ed è quindi diagonale. Da $\phi_a(\sigma_2) = \sigma_2$ otteniamo infine che gli elementi sulla diagonale di a hanno quadrato uguale ad 1 e perciò $a = \pm \text{Id}$. \square

Per la caratterizzazione di $\mathbf{SO}(3)$ come il sottogruppo di $\mathbf{SO}^+(1, 3)$ delle trasformazioni che preservano la traccia (con la notazione introdotta nella dimostrazione della Proposizione 25.5.3 sono le $\psi \in \mathbf{SO}^+(1, 3)$ che lasciano fissa σ_0), otteniamo (vedi le Proposizioni 25.1.4, 25.1.5) il

COROLLARIO 25.5.4. *L'applicazione*

$$\phi : \mathbf{SU}(2) \ni a \longrightarrow \phi_a \in \mathbf{SO}(3), \quad \text{definita da } \phi(X) = aXa^*, \quad \forall X \in \mathfrak{p}_{2,0}(\mathbb{C}),$$

è un epimorfismo di gruppi, con nucleo $\{\pm \text{Id}\}$ ed un rivestimento differenziabile a due fogli. \square

25.5.3. Il caso $\mathbb{k} = \mathbb{H}$. Sia $\mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$ lo spazio delle matrici Hermitiane 2×2 a coefficienti quaternioni. È

$$\mathfrak{p}_2(\mathbb{H}) = \left\{ X = \begin{pmatrix} \lambda_X & q_X \\ \bar{q}_X & \mu_X \end{pmatrix} \middle| \lambda_X, \mu_X \in \mathbb{R}, q_X \in \mathbb{H} \right\} \simeq \mathbb{R}^6.$$

Data una matrice $X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$, il suo *determinante quaternionico*

$$\det_{\mathbb{H}}(X) = \lambda_X \mu_X - q_X \bar{q}_X \in \mathbb{R}$$

definisce una forma quadratica reale di segnatura $(1, 5)$ su $\mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$. Indichiamo con $\mathbf{SO}(1, 5)$ il gruppo delle trasformazioni lineari di $\mathbf{SL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{p}_2(\mathbb{H}))$ che preservano il determinante quaternionico e con $\mathbf{SO}^+(1, 5)$ la sua componente connessa dell'identità.

PROPOSIZIONE 25.5.5. *Ogni $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$ definisce un'applicazione lineare*

$$(25.27) \quad T_a : \mathfrak{p}_2(\mathbb{H}) \ni X \rightarrow aXa^* \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$$

che preserva il determinante quaternionico ed appartiene ad $\mathbf{SO}^+(1, 5)$.

L'applicazione

$$(25.28) \quad \mathbf{SL}_2(\mathbb{H}) \ni a \rightarrow T_a \in \mathbf{SO}^+(1, 5)$$

è un epimorfismo di gruppi di Lie con nucleo $\{\pm \mathbf{I}\}$ ed un rivestimento a due fogli.

Poiché $\mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$ è semplicemente connesso, la (25.28) è il rivestimento universale di $\mathbf{SO}^+(1, 5)$.

DIMOSTRAZIONE. Utilizziamo la rappresentazione matriciale complessa dei quaternioni:

$$\mathbb{H} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \middle| z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Per ogni $X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{H})$, indichiamo con \hat{X} la matrice di $\mathfrak{gl}_4(\mathbb{C})$ ottenuta sostituendo a ciascun coefficiente quaternionico la matrice complessa 2×2 che lo rappresenta. La corrispondenza $X \leftrightarrow \hat{X}$ è un isomorfismo dei corrispondenti anelli associativi. Abbiamo inoltre

$$\det_{\mathbb{C}}(X) = \det(\hat{X}) = \det_{\mathbb{H}}^2(X), \quad \forall X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H}),$$

$$\widehat{aXa^*} = \hat{a}\hat{X}\hat{a}^*, \quad \forall a, X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{H}).$$

Poiché $\hat{a} \in \mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$ se $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$, otteniamo allora che

$$\det_{\mathbb{C}}(aXa^*) = \det_{\mathbb{C}}(X), \quad \forall X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H}), \quad \forall a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H}).$$

Per verificare che

$$(*) \quad \det_{\mathbb{H}}(aXa^*) = \det_{\mathbb{H}}(X), \quad \forall X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H}), \quad \forall a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H}),$$

osserviamo in primo luogo che dall'identità precedente segue che i due membri di quest'uguaglianza sono o uguali od opposti. Sull'aperto delle coppie (a, X) con $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$ ed X definita positiva, deve valere l'uguaglianza perché vale per $X = \text{Id}$ e le matrici definite positive di $\mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$ formano un aperto convesso su cui $\det_{\mathbb{H}}$ è sempre positivo. Poiché $(*)$ è algebrica ed è verificata su un aperto, è valida per tutte le coppie $(a, X) \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H}) \times \mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$.

Questo dimostra che $T_a \in \mathbf{O}(1, 5)$ se $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$. Poiché $\mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$ è connesso e $a \mapsto T_a$ continua, le T_a appartengono ad $\mathbf{SO}^+(1, 5)$.

Per dimostrare la surgettività, osserviamo che una $X \in \mathfrak{p}_2(\mathbb{H})$ si può diagonalizzare utilizzando una matrice di $\mathbf{Sp}(2)$. Esiste cioè una $a_1 \in \mathbf{Sp}(2) \subset \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$ tale che

$$a_1 X a_1^* = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$$

con λ, μ autovalori reali. A questo punto si dimostra che, se $\phi \in \mathbf{SO}^+(1, 5)$, fissata la base

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} & i \\ -i & \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} & j \\ -j & \end{pmatrix}, \\ & \sigma_5 = \begin{pmatrix} & \kappa \\ -\kappa & \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e posto $\sigma'_i = \phi(\sigma_i)$, è possibile trovare $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{H})$ tale che $T_a(\sigma'_i) = \sigma_i$ per $i = 0, \dots, 5$. Allora $\phi = T_{a^{-1}}$ mostra che $a \mapsto T_a$ è surgettiva. Si verifica poi facilmente che il nucleo di T è $\{\pm 1\}$. \square

25.5.4. Il caso $\mathbb{k} = \mathbb{O}$. Nel caso degli ottonioni, poiché l'algebra di divisione \mathbb{O} non è associativa, ci sono delle difficoltà supplementari nel definire i gruppi $\mathbf{SL}_n(\mathbb{O})$. Si può procedere considerando dapprima le matrici $n \times n$ a coefficienti ottonioni e somma degli elementi della diagonale nulli. Esse definiscono delle applicazioni \mathbb{R} -lineari di \mathbb{O}^n in sé e quindi delle trasformazioni lineari di \mathbb{R}^{8n} in sé, fissato un isomorfismo \mathbb{R} -lineare $\mathbb{O} \simeq \mathbb{R}^8$. Allora le trasformazioni che possono essere descritte da matrici di ottonioni a traccia nulla formano un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{sl}_{8n}(\mathbb{R})$, che genera una sua sottoalgebra di Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{O})$. Si definisce quindi $\mathbf{SL}_n(\mathbb{O})$ come il corrispondente sottogruppo di Lie di $\mathbf{SL}_{8n}(\mathbb{R})$.

Si verifica che, nel caso $n = 2$, è ancora possibile definire una nozione di *determinante* sullo spazio $\mathfrak{p}_2(\mathbb{O})$ delle matrici hermitiane simmetriche a coefficienti ottonioni: esso è una forma quadratica reale non degenera di segnatura $(1, 9)$.

In modo analogo a quanto fatto nei punti precedenti, possiamo allora utilizzare l'applicazione

$$\mathbf{SL}_2(\mathbb{O}) \ni a \longrightarrow \{X \rightarrow \phi_a(X) = aXa^*\} \in \mathbf{SO}^+(1, 9)$$

per definire un rivestimento a due fogli di $\mathbf{SO}^+(1, 9)$ mediante il gruppo lineare speciale $\mathbf{SL}_2(\mathbb{O})$. Per i dettagli si consiglia la lettura dell'articolo [12] o di [11, §9.3].

Strutture differenziali di alcuni gruppi lineari

26.1. La trasformata di Cayley

Sia $\mathbb{C}^{n \times n}$ lo spazio delle matrici complesse $n \times n$. Indichiamo con

$$(26.1) \quad \mathbb{U}_e = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det(I + X) \neq 0\}$$

l'aperto di $\mathbb{C}^{n \times n} \simeq \mathbb{C}^{n^2}$ delle matrici complesse che non hanno autovalore -1 .

DEFINIZIONE 26.1.1. La *trasformata di Cayley* di una matrice $X \in \mathbb{U}_e$ è la matrice

$$(26.2) \quad \mathbf{c}(X) = (I + X)^{-1}(I - X).$$

Vale il

TEOREMA 26.1.2. *La trasformata di Cayley (26.2) definisce un'involuzione differenziabile di classe \mathcal{C}^ω di \mathbb{U}_e in sé. La trasformata di Cayley di una matrice $X \in \mathbb{U}_e$ è reale se e soltanto se X è reale.*

DIMOSTRAZIONE. La \mathbf{c} è una funzione razionale, e quindi differenziabile di classe \mathcal{C}^ω , sul suo dominio di definizione. Verifichiamo che l'immagine di \mathbf{c} è ancora contenuta in \mathbb{U}_e . Abbiamo¹ infatti, se $v \in \mathbb{C}^n$,

$$v + \mathbf{c}(X)v = 0 \iff (I + X)v + (I - X)v = 2v = 0 \iff v = 0.$$

Possiamo quindi definire l'iterata \mathbf{c}^2 di \mathbf{c} , ed abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^2(X) &= (I + (I + X)^{-1}(I - X))^{-1}(I - (I + X)^{-1}(I - X)) \\ &= ((I + X) + (I - X))^{-1}((I + X) - (I - X)) = X, \quad \forall X \in \mathbb{U}_e. \end{aligned}$$

Chiaramente \mathbf{c} si restringe ad un'involuzione di $\mathbb{U}_e \cap \mathbb{R}^{n \times n}$. □

La trasformata di Cayley è uno strumento utile nello studio della struttura di gruppi di matrici, perché ci permette, in molti casi, di definire la loro struttura differenziabile mediante atlanti *razionali*.

Definiamo alcuni gruppi di matrici.

Sia H una matrice complessa $n \times n$ non singolare. Poniamo

$$\mathbf{O}_H(\mathbb{C}) = \{a \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid a^T H a = H\}, \quad \mathfrak{o}_H(\mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^T H + H X = 0\},$$

$$\mathbf{O}_H(\mathbb{R}) = \{a \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid a^T H a = H\}, \quad \mathfrak{o}_H(\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^T H + H X = 0\},$$

¹Possiamo anche osservare che $\mathbf{c}(X)$ ha autovalori $\mu = (1 + \lambda)^{-1}(1 - \lambda)$, al variare di λ tra gli autovalori di X e $(1 + \lambda)^{-1}(1 - \lambda) \neq -1$ se λ è un numero complesso $\neq -1$. Osserviamo che $\lambda \mapsto \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ è l'involuzione di Moebius di $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ che scambia -1 ed ∞ .

$$\mathbf{U}_H = \{a \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid a^* H a = H\}, \quad \mathfrak{u}_H = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^* H + H X = 0\}.$$

Essendo sottogruppi chiusi del gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, i gruppi $\mathbf{O}_H(\mathbb{C})$, $\mathbf{O}_H(\mathbb{R})$ ed \mathbf{U}_H sono gruppi di Lie e si verifica facilmente che $\mathfrak{o}_H(\mathbb{C})$, $\mathfrak{o}_H(\mathbb{R})$ ed \mathfrak{u}_H sono le loro algebre di Lie.

PROPOSIZIONE 26.1.3. *La trasformata di Cayley definisce omeomorfismi*

$$\mathbf{U}_e \cap \mathbf{O}_H(\mathbb{C}) \xrightarrow{\mathbf{c}} \mathbf{U}_e \cap \mathfrak{o}_H(\mathbb{C}),$$

$$\mathbf{U}_e \cap \mathbf{O}_H(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathbf{c}} \mathbf{U}_e \cap \mathfrak{o}_H(\mathbb{R}),$$

$$\mathbf{U}_e \cap \mathbf{U}_H \xrightarrow{\mathbf{c}} \mathbf{U}_e \cap \mathfrak{u}_H.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $a \in \mathbf{U}_e$ ed $X = \mathbf{c}(a)$, abbiamo

$$\begin{aligned} X^T H + H X = 0 &\iff (I - a^T)H(I + a) + (I + a^T)H(I - a) = 0 \\ &\iff (H - a^T H + Ha - a^T Ha) + (H + a^T H - Ha - a^T Ha) = 0 \\ &\iff H - a^T H a = 0 \end{aligned}$$

Da queste equivalenze ricaviamo il primo isomorfismo. Il secondo segue dal fatto che la trasformata di Cayley trasforma matrici reali in matrici reali.

Analogamente se $a \in \mathbf{U}_e$ ed $X = \mathbf{c}(a)$, abbiamo

$$\begin{aligned} X^* H + H X = 0 &\iff (I - a^*)H(I + a) + (I + a^*)H(I - a) = 0 \\ &\iff (H - a^* H + Ha - a^* Ha) + (H + a^* H - Ha - a^* Ha) = 0 \\ &\iff H - a^* H a = 0, \end{aligned}$$

e quindi $a \in \mathbf{U}_H$ se e soltanto se $X \in \mathfrak{u}_H$. \square

Le algebre di Lie $\mathfrak{o}_H(\mathbb{C})$, $\mathfrak{o}_H(\mathbb{R})$ ed \mathfrak{u}_H sono spazi vettoriali di dimensione finita. La trasformata di Cayley ci permette quindi di definire diffeomorfismi *razionali* tra intorni dell'identità nei gruppi $\mathbf{O}_H(\mathbb{C})$, $\mathbf{O}_H(\mathbb{R})$, \mathbf{U}_H ed aperti di spazi vettoriali reali.

TEOREMA 26.1.4. *Siano $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice invertibile e \mathbf{G} uno dei gruppi $\mathbf{O}_H(\mathbb{C})$, $\mathbf{O}_H(\mathbb{R})$, \mathbf{U}_H . Indichiamo con \mathfrak{g} la corrispondente algebra di Lie $\mathfrak{o}_H(\mathbb{C})$, $\mathfrak{o}_H(\mathbb{R})$, \mathfrak{u}_H , rispettivamente. Con la topologia di sottospazio di $\mathbb{C}^{n \times n}$, il gruppo \mathbf{G} è una varietà topologica ed ammette un'unica struttura differenziale di classe \mathcal{C}^ω per cui:*

- (1) $\mathbf{c} : \mathbf{U}_e \cap \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{U}_e \cap \mathfrak{g}$ è una carta locale con centro in I_n ;
- (2) per ogni $a \in \mathbf{G}$ la traslazione a sinistra $\mathbf{G} \ni x \rightarrow ax \in \mathbf{G}$ è un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^ω .

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 26.1.3 l'insieme $\mathbf{U}_e \cap \mathbf{G}$, che è un intorno aperto di I_n in \mathbf{G} per la topologia di sottospazio, è omeomorfo ad un aperto dello spazio vettoriale reale \mathfrak{g} . Poiché le traslazioni a sinistra $L_a : \mathbb{C}^{n \times n} \ni x \rightarrow ax \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mediante gli elementi a di \mathbf{G} sono omeomorfismi, ogni punto a di \mathbf{G} ha un intorno $U_a = a \cdot (\mathbf{U}_e \cap \mathbf{G})$ omeomorfo ad un aperto di \mathfrak{g} . Consideriamo il corrispondente atlante $\mathcal{A} = \{(U_a, X_a) \mid a \in \mathbf{G}_H(\mathbb{k})\}$, con $X_a(x) = \mathbf{c}(a^{-1}x)$ per $x \in U_a$. Esso definisce su $\mathbf{G}_H(\mathbb{k})$ una struttura differenziale di classe \mathcal{C}^ω per cui valgono le condizioni

(1) e (2). Infatti le funzioni di transizione

$$\psi_{a,b} : \mathbf{c}(U_a \cap U_b) \ni X \rightarrow \mathbf{c}(b^{-1}a \cdot \mathbf{c}(X)) \in \mathbf{c}(U_a \cap U_b)$$

sono analitiche reali. \square

OSSERVAZIONE 26.1.5. Le $\psi_{a,b}$ sono funzioni *razionali*: si possono esprimere cioè come rapporti di polinomi nei coefficienti delle matrici X .

26.2. Alcuni gruppi lineari

È conveniente introdurre le notazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{p,q} &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & \\ & -\mathbf{I}_q \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{(p+q) \times (p+q)}, & \check{\mathbf{I}}_n &= \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & \cdot & \cdot & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n \times n}, \\ \mathbf{j}_n &= \begin{pmatrix} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2n \times 2n}, & \check{\mathbf{j}}_n &= \begin{pmatrix} & \check{\mathbf{I}}_n \\ -\check{\mathbf{I}}_n & \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2n \times 2n}. \end{aligned}$$

Le \mathbf{j}_n e $\check{\mathbf{j}}_n$ sono matrici $(2n) \times (2n)$ antisimmetriche non degeneri, mentre le $\mathbf{I}_{p,q}$, $\check{\mathbf{I}}_n$, sono Hermitiane simmetriche non degeneri. Useremo le notazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}(n) &= \{a \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid a^\top a = \mathbf{I}_n\} && \text{(gruppo ortogonale),} \\ \mathbf{SO}(n) &= \{a \in \mathbf{O}(n) \mid \det(a) = 1\} && \text{(gruppo speciale ortogonale),} \\ \mathfrak{o}(n) &= \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^\top + X = 0\} && \text{(algebra delle matrici antisimmetriche reali),} \\ \mathbf{O}(n, \mathbb{C}) &= \{a \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid a^\top a = \mathbf{I}_n\} && \text{(gruppo ortogonale complesso),} \\ \mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) &= \{a \in \mathbf{O}(n, \mathbb{C}) \mid \det(a) = 1\} && \text{(gruppo speciale ortogonale complesso),} \\ \mathfrak{o}(n, \mathbb{C}) &= \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^\top + X = 0\} && \text{(algebra delle matrici antisimmetriche complesse)} \\ \mathbf{U}(n) &= \{a \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid a^* a = \mathbf{I}_n\} && \text{(gruppo unitario),} \\ \mathfrak{u}(n) &= \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^* + X = 0\} && \text{(algebra delle matrici anti-hermitiane),} \\ \mathbf{SU}(n) &= \{a \in \mathbf{U}(n) \mid \det(a) = 1\} && \text{(gruppo speciale unitario)} \\ \mathfrak{su}(n) &= \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \text{traccia}(X) = 0\} && \text{(algebra delle matrici anti-hermitiane a traccia nulla)} \\ \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) &= \{a \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} \mid a^\top \mathbf{j}_n a = \mathbf{j}_n\}, && \text{(gruppo simplettico complesso),} \\ \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) &= \{X \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} \mid X^\top \mathbf{J}_n + \mathbf{j}_n X = 0\}, && \text{(algebra simplettica complessa)} \\ \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) &= \{a \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid a^\top \mathbf{j}_n a = \mathbf{j}_n\}, && \text{(gruppo simplettico reale),} \\ \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid X^\top \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_n X = 0\}, && \text{(algebra simplettica reale)} \\ \mathbf{Sp}(n) &= \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n) && \text{(gruppo unitario quaternionico)} \\ \mathfrak{sp}(n) &= \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(2n) && \text{(algebra anti-hermitiana quaternionica).} \end{aligned}$$

Il gruppo unitario quaternionico si chiama anche *iper-unitario*. Si ottengono definizioni equivalenti dei gruppi simplettici se si sostituisce la matrice $\check{\mathbf{J}}_n$ alla \mathbf{j}_n .

Dal Teorema 26.1.4 ricaviamo immediatamente

TEOREMA 26.2.1.

$\mathbf{SO}(n)$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $n(n-1)/2$.

$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $n(n-1)$.

$\mathbf{U}(n)$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione n^2 .

$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $2n(2n+1)$.

$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $n(2n+1)$.

$\mathbf{Sp}(n)$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $n(2n+1)$.

OSSERVAZIONE 26.2.2. Tutti i gruppi nel Teorema 26.2.1 sono connessi. I gruppi $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{O}(n, \mathbb{C})$ sono formati ciascuno da due componenti connesse, omeomorfe ad $\mathbf{SO}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$, rispettivamente. I gruppi $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{O}(n)$, $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$ sono compatti. I gruppi $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{O}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ non sono compatti.

OSSERVAZIONE 26.2.3. Le matrici antisimmetriche reali e le matrici anti-hermitiane hanno autovalori puramente immaginari. Quindi la trasformata di Cayley è definita su tutte le algebre di Lie $\mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{sp}(n)$.

Oltre ai gruppi di Lie reali e complessi descritti sopra, ricordiamo le definizioni di alcuni gruppi reali non compatti. Poniamo:

$$\mathbf{O}(p, q) = \{x \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid x^T I_{p,q} x = I_{p,q}\} \quad (\text{gruppo ortogonale di segnatura } (p, q)),$$

$$\mathbf{SO}(p, q) = \mathbf{O}(p, q) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \quad (\text{gruppo speciale ortogonale di segnatura } (p, q)),$$

$$\mathbf{U}(p, q) = \{x \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid x^* I_{p,q} x = I_{p,q}\} \quad (\text{gruppo unitario di segnatura } (p, q)),$$

$$\mathbf{SU}(p, q) = \mathbf{U}(p, q) \cap \mathbf{SL}_{p+q}(\mathbb{C}) \quad (\text{gruppo speciale unitario di segnatura } (p, q)).$$

26.3. Decomposizione di Cartan

26.3.1. Esponenziale di matrici hermitiane simmetriche. Indichiamo con

$$\mathfrak{p}(n) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^* = X\}$$

lo spazio vettoriale reale delle matrici hermitiane simmetriche di ordine n e con

$$\mathcal{P}(n) = \{x \in \mathfrak{p}(n) \mid x > 0\}$$

il cono convesso delle hermitiane simmetriche definite positive. Poniamo ancora

$$\mathfrak{p}_0(n) = \mathfrak{p}(n) \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}), \quad \mathcal{P}_0(n) = \mathcal{P}(n) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}),$$

$$\mathfrak{p}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{p}(n) \cap \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathcal{P}(n, \mathbb{R}) = \mathcal{P}(n) \cap \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$\mathfrak{p}_0(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{p}(n, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}), \quad \mathcal{P}_0(n, \mathbb{R}) = \mathcal{P}(n, \mathbb{R}) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}).$$

PROPOSIZIONE 26.3.1. *L'esponenziale di matrici definisce un diffeomorfismo*

$$(26.3) \quad \exp : \mathfrak{p}(n) \longrightarrow \mathcal{P}(n)$$

che si restringe a diffeomorfismi di $\mathfrak{p}_0(n)$ su $\mathcal{P}_0(n)$, di $\mathfrak{p}(n, \mathbb{R})$ su $\mathcal{P}(n, \mathbb{R})$ e di $\mathfrak{p}_0(n, \mathbb{R})$ su $\mathcal{P}_0(n, \mathbb{R})$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\mathcal{P}(n)$ è un cono convesso, possiamo definire il *logaritmo* di una matrice Hermitiana definita positiva mediante la fomula

$$(26.4) \quad \log(x) = \int_0^1 [(1-t)I_n + tx]^{-1}(x - I_n) dt.$$

Per verificare che questa sia l'inversa di (26.3), osserviamo che ogni $x \in \mathcal{P}(n)$ si può diagonalizzare in una base ortonormale: vi è quindi una matrice $u \in \mathbf{U}(n)$ tale che

$$(*) \quad u^{-1}xu = u^*xu = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \text{con } \lambda_i > 0 \text{ per } 1 \leq i \leq n.$$

Allora, per la linearità dell'integrale,

$$\begin{aligned} u^* \log(x) u &= \int_0^1 \text{diag} \left(\frac{\lambda_1 - 1}{(1 + t(\lambda_1 - 1))}, \dots, \frac{\lambda_n - 1}{1 + t(\lambda_n - 1)} \right) dt \\ &= \text{diag}(\log \lambda_1, \dots, \log \lambda_n) \end{aligned}$$

e quindi $\exp(\log(x)) = x$ per ogni $x \in \mathcal{P}(n)$. Viceversa, una $X \in \mathfrak{p}(n)$, si diagonalizza in una base ortonormale: possiamo cioè trovare $u \in \mathbf{U}(n)$ tale che

$$u^{-1}Xu = u^*Xu = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n), \quad \text{con } \mu_i \in \mathbb{R}, \text{ per } 1 \leq i \leq n.$$

Abbiamo allora

$$u^* \log(\exp(X))u = \int_0^1 \text{diag} \left(\frac{e^{\mu_1} - 1}{1 + t(e^{\mu_1} - 1)}, \dots, \frac{e^{\mu_n} - 1}{1 + t(e^{\mu_n} - 1)} \right) dt = u^*Xu,$$

e quindi $\log(\exp(X)) = X$ per ogni $X \in \mathfrak{p}(n)$. Le ultime affermazioni seguono dal fatto che $\det(\exp(X)) = e^{\text{traccia}(X)}$ e che l'esponenziale trasforma matrici reali in matrici reali. \square

26.3.2. Gruppo lineare e gruppo lineare speciale.

TEOREMA 26.3.2. *Le applicazioni*

$$(26.5) \quad \begin{cases} \mathbf{U}(n) \times \mathfrak{p}(n) \ni (u, X) & \longrightarrow u \cdot \exp(X) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}), \\ \mathbf{SU}(n) \times \mathfrak{p}_0(n) \ni (u, X) & \longrightarrow u \cdot \exp(X) \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}), \\ \mathbf{O}(n) \times \mathfrak{p}(n, \mathbb{R}) \ni (u, X) & \longrightarrow u \cdot \exp(X) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \\ \mathbf{SO}(n) \times \mathfrak{p}_0(n, \mathbb{R}) \ni (u, X) & \longrightarrow u \cdot \exp(X) \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}), \end{cases}$$

sono diffeomorfismi di classe \mathcal{C}^ω .

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Allora $x^*x \in \mathcal{P}(n)$ e $\sqrt{x^*x} = \exp(\frac{1}{2} \log(x))$ è la sua unica radice quadrata in $\mathcal{P}(n)$. La $u = x \cdot [\sqrt{x^*x}]^{-1/2}$ soddisfa

$$u^*u = [\sqrt{x^*x}]^{-1/2} \cdot x^*x \cdot [\sqrt{x^*x}]^{-1/2} = I_n$$

ed è quindi un elemento di $\mathbf{U}(n)$. Abbiamo quindi

$$x = u \cdot \exp(X) \text{ con } u = x \cdot [\sqrt{x^*x}]^{-1/2} \text{ ed } X = \frac{1}{2} \log(x^*x) \text{ e la}$$

$$(*) \quad \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \ni x \longrightarrow (x \cdot [\sqrt{x^*x}]^{-1/2}, \frac{1}{2} \log(x)) \in \mathbf{U}(n) \times \mathfrak{p}(n)$$

è differenziabile di classe \mathcal{C}^ω ed inverte la prima delle (26.5). Le inverse delle altre si ottengono (*) per restrizione. \square

26.3.3. Gruppi autoaggiunti pseudoalgebrici.

DEFINIZIONE 26.3.3. Un sottogruppo \mathbf{G} di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ si dice *pseudo-algebrico* se può essere definito mediante un sistema di equazioni:

$$(*) \quad f_1(g, g^*) = \dots = f_N(g, g^*) = 0$$

dove f_1, \dots, f_N sono polinomi a coefficienti reali delle parti reali e immaginarie dei coefficienti di $g \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. I sottogruppi pseudoalgebrici sono ovviamente chiusi.

I gruppi classici della lista di Cartan sono tutti pseudoalgebrici.

Il seguente teorema ci dà un metodo per calcolare la loro decomposizione di Cartan come prodotto del sottogruppo compatto $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ e di uno spazio euclideo \mathbb{R}^k .

TEOREMA 26.3.4. *Sia \mathbf{G} un sottogruppo pseudo-algebrico di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, con algebra di Lie \mathfrak{g} , tale che*

$$x \in \mathbf{G} \implies x^* \in \mathbf{G}.$$

Allora l'applicazione

$$(26.6) \quad (\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)) \ni (u, X) \longrightarrow u \cdot \exp(X) \in \mathbf{G}$$

è un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^ω .

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 26.3.2, ogni elemento x di $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ si decompone in modo unico nel prodotto

$$x = u \circ p \quad \text{con} \quad u \in \mathbf{U}(n), \quad p \in \mathcal{P}(n).$$

Poiché per ipotesi anche

$$x^* = p \circ u^* = p \circ u^{-1} \in \mathbf{G},$$

il gruppo \mathbf{G} contiene l'elemento

$$x^* x = p^2.$$

Per la Proposizione 26.3.1, vi è un unico elemento $X \in \mathfrak{p}(n)$ per cui

$$p = \exp(X).$$

Dobbiamo dimostrare che $X \in \mathfrak{g}$.

Sia $a \in \mathbf{U}(n)$ tale che $a \circ X \circ a^*$ sia in forma diagonale:

$$\text{Ad}(a)(X) = a \circ X \circ a^* = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \theta_n \end{pmatrix}$$

con $\theta_j \in \mathbb{R}$ per $j = 1, \dots, n$. Il sottogruppo $\text{ad}(a)(\mathbf{G})$ è ancora pseudo-algebrico in $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Le sue matrici diagonali reali formano un sottogruppo pseudo-algebrico

\mathbf{Q} di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Possiamo perciò trovare un insieme finito di polinomi f_1, \dots, f_N di $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ tali che una matrice diagonale reale

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$$

appartenga a \mathbf{Q} se e soltanto se

$$f_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0 \quad \text{per } j = 1, \dots, N.$$

Poiché $p^{\pm 2}, p^{\pm 4}, \dots, p^{\pm 2k}, \dots$ appartengono ancora a \mathbf{G} , abbiamo

$$f_j(e^{2k\theta_1}, e^{2k\theta_2}, \dots, e^{2k\theta_n}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j = 1, \dots, N.$$

Per concludere la dimostrazione utilizziamo il seguente

LEMMA 26.3.5. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione esponenziale-polinomiale della forma:

$$f(t) = \sum_{j=1}^N c_j e^{b_j t} \quad t \in \mathbb{R}$$

con $c_j, b_j \in \mathbb{R}$ e $b_i \neq b_j$ se $i \neq j$. Se f si annulla per ogni $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, allora f si annulla per ogni $t \in \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $\exp(b_j) = \xi_j$ e consideriamo la matrice

$$M(\xi_1, \dots, \xi_N) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_N \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \dots & \xi_N^2 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 & \xi_3^3 & \dots & \xi_N^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^N & \xi_2^N & \xi_3^N & \dots & \xi_N^N \end{pmatrix}.$$

Dico che

$$\det M(\xi_1, \dots, \xi_N) = \xi_1 \cdots \xi_N \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\xi_j - \xi_i).$$

Per dimostrare questa formula osserviamo che

$$\det M(\xi_1, \dots, \xi_N) = \xi_1 \cdots \xi_N \cdot \det V(\xi_1, \dots, \xi_N)$$

dove $V(\xi_1, \dots, \xi_N)$ è la matrice di Vandermonde di ordine N :

$$V(\xi_1, \dots, \xi_N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_N \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \dots & \xi_N^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{N-1} & \xi_2^{N-1} & \xi_3^{N-1} & \dots & \xi_N^{N-1} \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$(\tau) \quad \det V(\xi_1, \dots, \xi_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\xi_j - \xi_i).$$

Per verificare la (Υ), ragioniamo per ricorrenza su N . La formula del determinante di Vandermonde è facilmente verificata nel caso $N = 2$. Supponiamo quindi $N > 2$ e la formula vera per determinanti di Vandermonde di ordine $N - 1$. Sottraendo alla $j + 1$ -esima riga ξ_1 volte la j -esima, per $j = 1, \dots, N - 1$, otteniamo:

$$\det(V(\xi_1, \dots, \xi_N)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \xi_2 - \xi_1 & \xi_3 - \xi_1 & \dots & \xi_N - \xi_1 \\ 0 & \xi_2(\xi_2 - \xi_1) & \xi_3(\xi_3 - \xi_1) & \dots & \xi_N(\xi_N - \xi_1) \\ 0 & \xi_2^2(\xi_2 - \xi_1) & \xi_3^2(\xi_3 - \xi_1) & \dots & \xi_N^2(\xi_N - \xi_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \xi_2^{N-2}(\xi_2 - \xi_1) & \xi_3^{N-2}(\xi_3 - \xi_1) & \dots & \xi_N^{N-2}(\xi_N - \xi_1) \end{pmatrix}$$

Raccogliendo il fattore $(\xi_j - \xi_1)$ nella j -esima colonna, per $j = 2, \dots, N$, si ottiene

$$\det V(\xi_1, \dots, \xi_N) = (\xi_2 - \xi_1) \cdot \dots \cdot (\xi_N - \xi_1) \cdot \det V(\xi_2, \dots, \xi_N).$$

La formula segue allora dall'ipotesi di ricorrenza.

In particolare, $M(\xi_1, \dots, \xi_N)$ è una matrice invertibile e la relazione

$$(c_1, \dots, c_N)M(\xi_1, \dots, \xi_N) = 0,$$

che equivale all'annullarsi di $f(t)$ per $t = 1, \dots, N$, implica che tutti i coefficienti c_1, \dots, c_N , e quindi $f(t)$, siano uguali a 0. \square

Concludiamo ora la dimostrazione del teorema. Per il lemma appena dimostrato,

$$f_j(e^{t\theta_1}, \dots, e^{t\theta_n}) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, N.$$

Quindi $\exp(2t(a X a^*)) \in \mathbf{Q}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e ciò mostra che

$$X \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n).$$

Allora $p \in \mathbf{G}$ e perciò $u = g \circ p^{-1} \in \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$. L'applicazione

$$(\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)) \ni (u, X) \rightarrow u \exp(X) \in \mathbf{G}$$

è quindi surgettiva e di classe \mathcal{C}^ω . Anche la sua inversa

$$\mathbf{G} \ni x \rightarrow (x \circ (x^* x)^{-1/2}, \frac{1}{2} \log(x^* x)) \in (\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n))$$

è di classe \mathcal{C}^ω e quindi la (26.6) è un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^ω . \square

Nella ricerca di una decomposizione di Cartan di un sottogruppo chiuso \mathbf{G} di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, con algebra di Lie \mathfrak{g} , potremo quindi seguire il seguente procedimento:

- (1) Verificheremo che esso contenga l'aggiunto di ogni suo elemento;
- (2) Calcoleremo $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)$;
- (3) Studieremo il sottogruppo compatto $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$.

Osserviamo ancora che l'algebra di Lie di $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ è $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n)$ e che l'applicazione esponenziale

$$\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$$

ha come immagine la componente connessa dell'identità in $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$. Abbiamo infatti

TEOREMA 26.3.6 (Cartan-Weyl-Hopf). *Se \mathbf{G} è un sottogruppo compatto e connesso di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, con algebra di Lie \mathfrak{g} . Allora*

$$\mathfrak{g} \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{G}$$

è surgettiva. □

Non diamo qui la dimostrazione di questo teorema², la cui validità si può verificare in modo diretto per ciascuno dei gruppi classici compatti $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{SU}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$.

26.4. Connessione di alcuni gruppi di matrici

Per dimostrare la connessione di alcuni gruppi lineari, possiamo utilizzare un semplice lemma sulle fibrazioni.

Ricordiamo che un'applicazione continua $\pi : E \rightarrow B$ tra due spazi topologici si dice *decomponibile* se è surgettiva ed il suo quoziente iniettivo è un omeomorfismo.

LEMMA 26.4.1. *Sia $\pi : E \rightarrow B$ un'applicazione continua decomponibile. Se B è connesso e $\pi^{-1}(b)$ è connesso per ogni b in B , allora anche E è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che E sia unione di due aperti non vuoti e disgiunti U e W . Per ogni $v \in U$, il sottoinsieme $\pi^{-1}(\pi(v))$, essendo connesso, deve essere tutto contenuto in U . Quindi $U = \pi^{-1}(\pi(U))$ ed, analogamente, $W = \pi^{-1}(\pi(W))$ e quindi $\pi(U)$ e $\pi(W)$ sarebbero aperti non vuoti e disgiunti di B , contraddicendo l'ipotesi che B fosse connesso. □

Da questo ricaviamo

PROPOSIZIONE 26.4.2. *I gruppi $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathbf{SO}^+(p, q)$, $\mathbf{SU}(p, q)$, $\mathbf{U}(p, q)$, $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$, $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(n)$ sono tutti connessi.*

DIMOSTRAZIONE. Diamo la dimostrazione per il gruppo $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$. La dimostrazione negli altri casi è analoga.

Per ricorrenza su n : $\mathbf{SL}_1(\mathbb{R}) = \{1\}$ contiene solo l'identità ed è quindi connesso. Sia $n > 1$. L'applicazione $\pi : \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, che associa alla matrice a la sua prima colonna, è decomponibile perché aperta. Poiché $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ agisce transitivamente su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, le immagini inverse dei punti di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sono tutte omeomorfe tra loro ed omeomorfe a

$$\pi^{-1}(e_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & w^t \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| w \in \mathbb{R}^{n-1}, b \in \mathbf{SL}_{n-1}(\mathbb{R}) \right\} \simeq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbf{SL}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Poiché $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è connesso, per il Lemma 26.4.1 il gruppo $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ è connesso se lo è $\mathbf{SL}_{n-1}(\mathbb{R})$. La tesi segue perciò per ricorrenza. □

²Possiamo introdurre su \mathbf{G} una metrica Riemanniana invariante per le traslazioni a destra e a sinistra; allora le geodetiche per l'origine sono tutti e soli i sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} . La tesi segue allora dal fatto che l'identità e di \mathbf{G} si può congiungere a un qualsiasi punto $g \in \mathbf{G}$ mediante una geodetica $\gamma : [0, 1] \ni t \rightarrow \exp(tX) \in \mathbf{G}$ di lunghezza minima per cui $\gamma(0) = e$ e $\gamma(1) = g$.

26.5. Gruppi $GL_n(\mathbb{H})$, $SL_{\mathbb{H}}(n)$, $Sp(n)$, $U^*(2n)$, $SU^*(2n)$

Introduciamo in questo paragrafo alcuni gruppi di matrici che sono legati all'algebra dei quaternioni.

LEMMA 26.5.1. *Siano m, n interi positivi. Ogni applicazione $T : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^m$ che sia \mathbb{H} -lineare a destra, tale cioè che*

$$T(v \cdot q) = T(v) \cdot q, \quad \forall v \in \mathbb{H}^n, \forall q \in \mathbb{H},$$

determina univocamente una matrice $Q_T = (q_{i,j}) \in \mathbb{H}^{m \times n}$ tale che

$$(*) \quad T(v) = Q_T v \quad (\text{prodotto righe per colonne di matrici}).$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché le proiezioni di \mathbb{H}^m sulle singole coordinate sono applicazioni \mathbb{H} -lineari a destra (e a sinistra) possiamo ricondurre la discussione al caso $m = 1$. Sia $e_i \in \mathbb{H}^n$ il vettore che ha componente i -esima uguale ad $\mathbf{1}$ e le altre uguali a zero. Allora otteniamo (*) ponendo $q_i = A(e_i) \in \mathbb{H}$ e $Q_T = (q_1, \dots, q_n)$. \square

OSSERVAZIONE 26.5.2. In modo del tutto analogo si può dimostrare che anche le trasformazioni \mathbb{H} -lineari a sinistra si possono rappresentare con matrici. Per tener conto della non commutatività dei quaternioni, si può convenire di considerare i vettori colonna come elementi di uno spazio vettoriale a destra e quelli riga di uno spazio vettoriale a sinistra su \mathbb{H} .

Le definizioni che daremo dei gruppi lineari sui quaternioni caratterizzano gli stessi gruppi sia se si considerano applicazioni \mathbb{H} -lineari a sinistra che a destra.

Identifichiamo il campo dei numeri complessi alla sottoalgebra reale unitaria di \mathbb{H} generata dall'unità immaginaria i ed \mathbb{H}^n a $\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}_z \oplus \mathbb{C}_w$ mediante l'isomorfismo³

$$(26.7) \quad \phi : \mathbb{C}^{2n} \ni \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \longrightarrow \phi \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = z + j \cdot w \in \mathbb{H}^n.$$

Ad ogni matrice $X \in \mathbb{H}^{m \times n}$ corrisponde allora una matrice $\hat{X} \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$, che rende commutativo il diagramma

$$(26.8) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \xrightarrow{X} & \mathbb{H}^m \\ \phi \uparrow & & \uparrow \phi \\ \mathbb{C}^{2n} & \xrightarrow{\hat{X}} & \mathbb{C}^{2m} \end{array}$$

Introduciamo le matrici

$$(26.9) \quad j_n = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}.$$

Si verifica

LEMMA 26.5.3. *Sia $Y \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $Y = \hat{X}$ per qualche $X \in \mathbb{H}^{m \times n}$ è che*

$$(26.10) \quad Y j_n = j_m \bar{Y}.$$

³In questa corrispondenza alla coppia $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ in \mathbb{C}^2 corrisponde il quaternionone di matrice $\begin{pmatrix} z & \bar{w} \\ -w & \bar{z} \end{pmatrix}$.

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo una matrice $X \in \mathbb{H}^{m \times n}$ nella forma $X = A + j \cdot B$ con $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Se $v, w \in \mathbb{C}^n$, abbiamo

$$X \cdot (v + j \cdot w) = (A + j \cdot B)(v + j \cdot w) = (Av - \bar{B}w) + j \cdot (Bv + \bar{A}w).$$

Quindi

$$\hat{X} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\{Y \in \mathbb{C}^{2m \times 2n} \mid Yj_n = j_n \bar{Y}\} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \mid A, B \in \mathbb{C}^{m \times n} \right\},$$

questo completa la dimostrazione. \square

DEFINIZIONE 26.5.4. Una matrice $Y \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$ si dice di tipo quaternionico se soddisfa (26.10).

- LEMMA 26.5.5.** (1) Una matrice $Y \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$ è di tipo quaternionico se e soltanto se lo sono la sua coniugata, la sua aggiunta, la sua trasposta.
 (2) Se $Y \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$ e $Z \in \mathbb{C}^{2n \times 2k}$ sono di tipo quaternionico, anche il loro prodotto righe per colonne $YZ \in \mathbb{C}^{2m \times 2k}$ è di tipo quaternionico.
 (3) Una $a \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ è di tipo quaternionico se e soltanto se lo è la sua inversa a^{-1} .

DIMOSTRAZIONE. Il punto (1) segue dal fatto che le j_k (con k intero positivo) sono delle antiinvoluzioni ($j_k^2 = -I_{2k}$) reali ($\bar{j}_k = j_k$) antisimmetriche ($j_k^T = -j_k$). La verifica di (2) e (3) è anch'essa immediata. \square

In particolare gli endomorfismi di tipo quaternionico formano una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C})$ e quelli invertibili un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C})$.

DEFINIZIONE 26.5.6. Indichiamo con $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$ il gruppo delle matrici di $\mathbb{H}^{n \times n}$ per cui la corrispondente matrice complessa $\hat{A} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ è invertibile.

Indichiamo con $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{H})$ l'algebra di Lie delle matrici di $\mathbb{H}^{n \times n}$.

Indichiamo con $\mathbf{U}^*(2n)$ il gruppo di matrici complesse corrispondente:

$$(26.11) \quad \mathbf{U}^*(2n) = \{a \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \mid aj_n = j_n \bar{a}\}$$

e con

$$(26.12) \quad \mathfrak{u}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C}) \mid Xj_n = j_n \bar{X}\}$$

la sua algebra di Lie. Indichiamo con $\mathbf{SU}^*(2n)$ il sottogruppo di $\mathbf{U}^*(2n)$ delle matrici con determinante 1:

$$(26.13) \quad \mathbf{SU}^*(2n) = \mathbf{U}^*(2n) \cap \mathbf{SL}_{2n}(\mathbb{C})$$

e con

$$(26.14) \quad \mathfrak{su}^*(2n) = \mathfrak{u}^*(2n) \cap \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C})$$

la sua algebra di Lie.

LEMMA 26.5.7. Per ogni $v \in \mathbb{C}^{2n} \setminus \{0\}$ i vettori v e $j_n \bar{v}$ sono linearmente indipendenti.

DIMOSTRAZIONE. È conseguenza del fatto che la $\mathbb{C}^{2n} \ni v \rightarrow j_n \bar{v}$ è un'antiinvoluzione anti- \mathbb{C} -lineare di \mathbb{C}^{2n} . \square

LEMMA 26.5.8. Sia $X \in u^*(2n)$. Allora

- (1) Se λ è un autovalore di X con autovettore λ , allora $\bar{\lambda}$ è autovalore di X con autovettore $j_n \bar{v}$;
- (2) possiamo trovare $a \in \mathbf{SU}^*(2n)$ tale che

$$(26.15) \quad aXa^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda & * \\ & \bar{\Lambda} \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

sia in forma triangolare.

DIMOSTRAZIONE. Sia $v \in \mathbb{C}^{2n}$ un autovettore corrispondente ad un autovalore λ di $X \in u^*(2n)$. Allora

$$X(j_n \bar{v}) = j_n \bar{X} \bar{v} = j_n \bar{\lambda} \bar{v} = \bar{\lambda}(j_n \bar{v}).$$

Questo dimostra (1).

La (2) si ottiene dimostrando per ricorrenza che possiamo trovare vettori $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^{2n}$ e numeri complessi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che $v_1, j_n \bar{v}_1, \dots, v_n, j_n \bar{v}_n$ sia una base di \mathbb{C}^{2n} con $Xv_1 = \lambda_1 v_1$ ed $Xv_i - \lambda_i v_i \in \langle v_1, j_n \bar{v}_1, \dots, v_{i-1}, j_n \bar{v}_{i-1} \rangle$ se $1 < i \leq n$. Ciò si ottiene a partire da (1), considerando, per $i > 1$ l'elemento $X_i \in u^*(2n - 2i)$ definito da X su $\mathbb{C}^{2n-2i} \simeq \mathbb{C}^{2n} / \langle v_1, j_n \bar{v}_1, \dots, v_{i-1}, j_n \bar{v}_{i-1} \rangle$. \square

Otteniamo allora

PROPOSIZIONE 26.5.9. Se $X \in u^*(2n)$, allora $\text{tr}(X) \in \mathbb{R}$ e $\det(X) \geq 0$.

DEFINIZIONE 26.5.10. Definiamo i seguenti gruppi lineari ed algebre di Lie reali:

$$\begin{aligned} \mathbf{SL}_n(\mathbb{H}) &= \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{H}) \mid \hat{a} \in \mathbf{SL}_{2n}(\mathbb{C})\} && \text{(gruppo lineare speciale quaternionico),} \\ \mathbf{Sp}_n &= \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{H}) \mid \hat{a} \in \mathbf{U}(2n)\} && \text{(gruppo simplettico compatto),} \\ \mathfrak{sl}_n(\mathbb{H}) &= \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{H}) \mid \text{tr}(\hat{X}) = 0\} && \text{(matrici quaternioniche a traccia nulla),} \\ \mathfrak{sp}_n &= \mathfrak{gl}_n(\mathbb{H}) \cap \mathfrak{su}_{2n}(\mathbb{C}) && \text{(matrici anti-Hermitiane quaternioniche).} \end{aligned}$$

Si verifica che

PROPOSIZIONE 26.5.11.

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}_n(\mathbb{H}) &\text{ è l'algebra di Lie di } \mathbf{GL}_n(\mathbb{H}), \\ \mathfrak{sl}_n(\mathbb{H}) &\text{ è l'algebra di Lie di } \mathbf{SL}_n(\mathbb{H}), \\ \mathfrak{sp}_n &\text{ è l'algebra di Lie di } \mathbf{Sp}_n. \end{aligned} \quad \square$$

Gruppi classici compatti

Esamineremo in questo capitolo la struttura dei principali gruppi lineari compatti. Ricordiamo la loro definizione:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(n) &= \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid a^* a = I_n\} && \text{(gruppo unitario)} \\ \mathbf{SU}(n) &= \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}) && \text{(gruppo speciale unitario)} \\ \mathbf{O}(n) &= \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t a a = I_n\} && \text{(gruppo ortogonale)} \\ \mathbf{SO}(n) &= \mathbf{O}(n) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) && \text{(gruppo speciale ortogonale)} \\ \mathbf{Sp}(n) &= \{a \in \mathbf{U}(2n) \mid {}^t a j_n a = j_n\} && \left(\begin{array}{l} \text{gruppo simplettico compatto,} \\ \text{o unitario quaternionico, o iper-unitario} \end{array} \right) \end{aligned}$$

ove I_n è la matrice unità $n \times n$, $j_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$. Ricordiamo che vale il teorema:

TEOREMA 27.0.12. *Se \mathbf{G} è un gruppo lineare compatto e \mathfrak{g} la sua algebra di Lie, l'applicazione esponenziale $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{G}$ ha come immagine la componente connessa \mathbf{G}_e dell'identità di \mathbf{G} . \square*

27.1. Il gruppo unitario $\mathbf{U}(n)$

LEMMA 27.1.1. *Ogni matrice di $\mathbf{U}(n)$ è diagonalizzabile in una base ortonormale di \mathbb{C}^n . I suoi autovalori hanno tutti modulo uguale a 1.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $u \in \mathbf{U}(n)$. Poiché il campo \mathbb{C} è algebricamente chiuso, u ha almeno un autovalore $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, con autovettore ϵ_1 che possiamo prendere di norma unitaria: $\|\epsilon_1\| = 1$. Da $1 = \|\epsilon_1\|^2 = \|u(\epsilon_1)\|^2 = \|\lambda_1 \epsilon_1\|^2 = |\lambda_1|^2$ ricaviamo che $|\lambda_1| = 1$, cioè $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1^{-1}$. Se $v \in \epsilon_1^\perp$, allora

$$(u(v)|\epsilon_1) = \lambda^{-1}(u(v)|u(\epsilon_1)) = \lambda^{-1}(v|\epsilon_1) = 0.$$

Quindi $u(\epsilon_1^\perp) = \epsilon_1^\perp$ e la restrizione di u all'iperpiano ϵ_1^\perp è ancora un'applicazione unitaria su uno spazio vettoriale complesso di dimensione $n - 1$. La tesi segue per ricorrenza sulla dimensione n . \square

TEOREMA 27.1.2. *Il gruppo $\mathbf{U}(n)$ è un sottogruppo chiuso, compatto e connesso per archi di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, con algebra di Lie*

$$(27.1) \quad \mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\}$$

di dimensione reale n^2 . L'applicazione esponenziale $\mathfrak{u}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{U}(n)$ è surgettiva.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione $\phi : \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \ni x \rightarrow x^*x \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ è continua e quindi $U(n) = \phi^{-1}(e)$ è un chiuso, contenuto nel compatto $\{x \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \|x\| = 1\}$ e perciò compatto.

È $[\exp(X)]^* = \exp(X^*)$ per ogni $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Fissata $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, la

$$\alpha_X : \mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tX^*) \exp(tX) = [\exp(tX)]^* \exp(tX) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

è differenziabile e

$$\alpha'_X(t) = \exp(tX^*) (X^* + X) \exp(tX) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Da questa si verifica facilmente che $X \in \mathfrak{u}(n)$ se e soltanto se $X + X^* = 0$.

Verifichiamo ora che $\exp : \mathfrak{u}(n) \rightarrow \mathbf{U}(n)$ è surgettiva. Fissiamo $u \in \mathbf{U}(n)$. Per il Lemma 27.1.1, possiamo trovare una base ortonormale di \mathbb{C}^n , e quindi una matrice $a \in \mathbf{U}(n)$, tale che

$$a u a^{-1} = a u a^* = \text{diag}(\exp(i\theta_1), \dots, \exp(i\theta_n)).$$

Allora $Y = \text{diag}(i\theta_1, \dots, i\theta_n) \in \mathfrak{u}(n)$ ed

$$\exp(a^* Y a) = a^* \exp(Y) a = a^* \text{diag}(\exp(i\theta_1), \dots, \exp(i\theta_n)) a = u.$$

Essendo l'immagine di $\mathfrak{u}(n)$ mediante l'applicazione esponenziale, $\mathbf{U}(n)$ è connesso per archi. \square

27.2. Il gruppo speciale unitario $\mathbf{SU}(n)$

L'applicazione $\det : \mathbf{U}(n) \rightarrow S^1$ è un omomorfismo di classe \mathcal{C}^ω di $\mathbf{U}(n)$ nel gruppo moltiplicativo S^1 . Il suo nucleo $\mathbf{SU}(n)$ è un sottogruppo chiuso normale di $\mathbf{U}(n)$.

TEOREMA 27.2.1. *L'algebra di Lie di $\mathbf{SU}(n)$ è la sottoalgebra $\mathfrak{su}(n)$ delle matrici di $\mathfrak{u}(n)$ che hanno traccia nulla:*

$$(27.2) \quad \mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \text{traccia}(X) = 0\}.$$

L'applicazione esponenziale $\mathfrak{su}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{SU}(n)$ è surgettiva. $\mathbf{SU}(n)$ è un gruppo di Lie compatto e connesso per archi, di dimensione reale $(n^2 - 1)$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\det(\exp(X)) = e^{\text{traccia}(X)}$, se $X \in \mathfrak{su}(n)$, da $\exp(tX) \in \mathbf{SU}(n)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ segue che

$$\begin{cases} X + X^* = 0 \\ \text{traccia}(tX) = t \cdot \text{traccia}(X) = 2k\pi i \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{con } k = k(t) \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La seconda relazione implica che X ha traccia nulla.

Fissata $u \in \mathbf{SU}(n)$, sia $a \in \mathbf{U}(n)$ tale che

$$a u a^{-1} = a u a^* = \text{diag}(\exp(i\theta_1), \dots, \exp(i\theta_n)), \quad \text{con } \theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}.$$

La condizione $\det(u) = 1$ dà allora

$$\exp(i(\theta_1 + \dots + \theta_n)) = 1$$

e quindi

$$\exp(-i\theta_n) = \exp(i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1})).$$

Posto

$$Y = \text{diag}(i\theta_1, \dots, i\theta_{n-1}, -i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1})) \in \mathfrak{su}(n),$$

è $X = aYa^* = aYa^{-1} \in \mathfrak{su}(n)$ ed $\exp(X) = u$. L'applicazione $X \rightarrow \text{traccia}(X)$ è lineare e non identicamente nulla su $\mathfrak{u}(n)$ e quindi $\mathfrak{su}(n)$ ed $\mathbf{SU}(n)$ hanno dimensione (n^2-1) . Il gruppo $\mathbf{SU}(n)$ è compatto perché è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{U}(n)$ e connesso per archi perché immagine continua, mediante l'applicazione esponenziale, della propria algebra di Lie $\mathfrak{su}(n)$. \square

PROPOSIZIONE 27.2.2. *Il gruppo unitario $\mathbf{U}(n)$ è \mathcal{C}^ω -diffeomorfo al prodotto $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{SU}(n)$.*

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione

$$\mathbf{S}^1 \times \mathbf{SU}(n) \ni (\lambda, x) \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix} \cdot x \in \mathbf{U}(n)$$

è di classe \mathcal{C}^ω ed ha inversa

$$\mathbf{U}(n) \ni x \longrightarrow \left(\det(x), \begin{pmatrix} [\det(x)]^{-1} & \\ & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix} \cdot x \right) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{SU}(n),$$

anch'essa di classe \mathcal{C}^ω . \square

27.3. I gruppi ortogonali $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$

Il gruppo $\mathbf{O}(n)$ (*gruppo ortogonale di ordine n*) è il gruppo delle isometrie lineari ed $\mathbf{SO}(n)$ (*gruppo speciale ortogonale o gruppo delle rotazioni di ordine n*) quello delle isometrie lineari che preservano l'orientazione dello spazio euclideo \mathbb{R}^n . $\mathbf{SO}(n)$ è un sottogruppo normale di indice 2 di $\mathbf{O}(n)$. Poiché $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, anche $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$ sono sottogruppi chiusi di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Essendo

$$\mathbf{O}(n) = \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{ed} \quad \mathbf{SO}(n) = \mathbf{SU}(n) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}),$$

$\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$ sono compatti perché sottogruppi chiusi del gruppo compatto $\mathbf{U}(n)$.

TEOREMA 27.3.1. *$\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$ hanno la stessa algebra di Lie*

$$\mathfrak{so}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid X + X^\top = 0\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia X un elemento dell'algebra di Lie $\mathfrak{so}(n)$ di $\mathbf{O}(n)$. Poiché $\exp(tX) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{U}(n)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, il determinante di $\exp(tX)$ sarà reale e di modulo 1. Poiché il determinante dell'esponenziale di una matrice reale è un numero reale positivo, è allora $\det(\exp(\mathfrak{so}(n))) = \{1\}$ e quindi

$$\exp(tX) \in \mathbf{SO}(n) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

dimostra che $\mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{SO}(n)$ hanno la stessa algebra di Lie. Poiché

$$\frac{d}{dt} \{[\exp(tX)]^\top \exp(tX)\} = \exp(tX^\top) (X^\top + X) \exp(tX) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

la condizione ${}^t X + X = 0$ è necessaria e sufficiente affinché $X \in \mathfrak{so}(n)$. \square

TEOREMA 27.3.2. *L'applicazione esponenziale $\mathfrak{so}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{SO}(n)$ è surgettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni rotazione $a \in \mathbf{SO}(n)$, possiamo trovare una decomposizione di \mathbb{R}^n in somma diretta di sottospazi a -invarianti e due a due ortogonali

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$$

tale che ogni sottospazio V_j abbia dimensione minore o uguale a 2 e la restrizione di a ai sottospazi V_j della decomposizione che hanno dimensione 1 sia l'identità.

Su ciascuno dei sottospazi V_j di dimensione 2 la a definisce una rotazione dello spazio Euclideo \mathbb{R}^2 . Sarà quindi sufficiente dimostrare che

$$\mathfrak{so}(2) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{SO}(2)$$

è surgettiva. Basta dunque osservare che

$$\mathfrak{so}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} & -\theta \\ \theta & \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathbf{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

e che

$$\exp \begin{pmatrix} & -\theta \\ \theta & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La dimostrazione è completa. \square

TEOREMA 27.3.3. $\mathbf{SO}(n)$ è un gruppo compatto e connesso per archi di dimensione $n(n-1)/2$. Il gruppo $\mathbf{O}(n)$ è unione di due componenti connesse, omeomorfe ad $\mathbf{SO}(n)$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già osservato che $\mathbf{SO}(n)$ ed $\mathbf{O}(n)$ sono compatti, in quanto sottogruppi chiusi di $\mathbf{U}(n)$. Inoltre $\mathbf{SO}(n)$ è connesso per archi perché immagine mediante l'esponenziale della sua algebra di Lie $\mathfrak{so}(n)$. Questa ha dimensione $n(n-1)/2$, in quanto $\mathfrak{so}(n)$ consiste delle matrici reali antisimmetriche, e queste si parametrizzano con i coefficienti che sono al di sopra della diagonale principale.

In quanto immagine della sua algebra di Lie mediante l'esponenziale, $\mathbf{SO}(n)$ è la componente dell'identità di $\mathbf{O}(n)$. La moltiplicazione a sinistra per la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & \\ & I_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{O}(n)$$

è un omeomorfismo di $\mathbf{SO}(n)$ su $\mathbf{O}(n) \setminus \mathbf{SO}(n)$ e quindi $\mathbf{O}(n)$ ha esattamente due componenti connesse, omeomorfe ad $\mathbf{SO}(n)$. \square

Osserviamo che $\mathbf{SO}(1)$ è un punto, mentre l'applicazione

$$\mathbf{SO}(2) \ni x \rightarrow x(e_1) \in S^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\|^2 = 1\}$$

definisce un omeomorfismo di $\mathbf{SO}(2)$ su S^1 . Abbiamo studiato $\mathbf{SO}(3)$ ed $\mathbf{SO}(4)$ e le loro relazioni con $\mathbf{SU}(2)$ ed $\mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2)$ in §25.1.

OSSERVAZIONE 27.3.4 (Angoli di Eulero). Diamo qui una descrizione dell'omomorfismo surgettivo

$$\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$$

descritto in §25.1, a partire dalla rappresentazione di $\mathbf{SO}(3)$ mediante gli *angoli di Eulero*, utilizzati in meccanica per descrivere il movimento delle trottole. Consideriamo gli omomorfismi

$$\tau, \sigma : S^1 \rightarrow \mathbf{SO}(3)$$

definiti da

$$\tau(e^{i\phi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \sigma(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(rotazioni intorno all'asse x e rotazioni intorno all'asse y).

LEMMA 27.3.5. *L'applicazione*

$$\alpha : S^1 \times S^1 \times S^1 \ni (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) \rightarrow \tau(e^{i\theta_1}) \circ \sigma(e^{i\theta_2}) \circ \tau(e^{i\theta_3}) \in \mathbf{SO}(3)$$

è surgettiva.

DIMOSTRAZIONE. Sia e_1, e_2, e_3 la base canonica di \mathbb{R}^3 . Una $x \in \mathbf{SO}(3)$ è completamente determinata dall'immagine dei vettori e_1, e_2 . Poniamo $\epsilon_j = x(e_j)$ per $j = 1, 2$. Poiché $|\epsilon_1| = 1$, abbiamo per opportuni $\phi, \psi \in \mathbb{R}$:

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \phi \sin \psi \\ \cos \phi \sin \psi \end{pmatrix}$$

(coordinate polari in \mathbb{R}^3). Una base ortogonale di ϵ_1^\perp è data dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \sin \phi \cos \psi \\ \cos \phi \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Quindi $\epsilon_2 = v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta$ per un opportuno $\theta \in \mathbb{R}$. Chiaramente

$$x = \alpha(e^{-i\phi}, e^{i\psi}, e^{i\theta}). \quad \square$$

OSSERVAZIONE 27.3.6. In generale gli angoli di Eulero si riferiscono a una scelta di ϕ, ψ, θ con $0 \leq \psi < \pi$ e $0 \leq \phi, \theta < 2\pi$.

Definiamo ora

$$\hat{\tau}, \hat{\sigma} : S^1 \rightarrow \mathbf{SU}(2)$$

mediante

$$\hat{\tau}(e^{i\phi}) = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Sia

$$\hat{\alpha} : S^1 \times S^1 \times S^1 \ni (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) \rightarrow \hat{\tau}(e^{i\theta_1}) \circ \hat{\sigma}(e^{i\theta_2}) \circ \hat{\tau}(e^{i\theta_3}) \in \mathbf{SU}(2).$$

Otteniamo allora il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 \times S^1 & \xrightarrow{=} & S^1 \times S^1 \times S^1 \\ \hat{\alpha} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \mathbf{SU}(2) & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{SO}(3). \end{array}$$

27.4. Il gruppo unitario simplettico $\mathbf{Sp}(n)$

Abbiamo definito $\mathbf{Sp}(n)$ come il gruppo delle matrici complesse unitarie a di ordine $2n$ che soddisfano $a^T j_n a = j_n$, ove $j_n = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$.

PROPOSIZIONE 27.4.1. *Il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ si può identificare al gruppo delle matrici $n \times n$ a coefficienti quaternioni che preservano il prodotto scalare canonico di \mathbb{H}^n .*

DIMOSTRAZIONE. Ogni vettore u di \mathbb{H}^n si decompone in modo unico in una somma $v + j \cdot w$, con $v, w \in \mathbb{C}^n$. L'applicazione $\phi : \mathbb{C}^{2n} \ni (v, w) \rightarrow v + j \cdot w \in \mathbb{H}^n$ è \mathbb{C} -lineare a destra, e quindi, se $Q \in \mathbb{H}^{n \times n}$ è una matrice a coefficienti quaternioni, risulta determinata un'unica matrice $[Q]$ a coefficienti complessi che renda commutativo il diagramma (le frecce orizzontali sono prodotti righe per colonne di matrici)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \xrightarrow{Q} & \mathbb{H}^n \\ \phi \uparrow & & \uparrow \phi \\ \mathbb{C}^{2n} & \xrightarrow{[Q]} & \mathbb{C}^{2n} \end{array}$$

Se scriviamo $Q = A + j \cdot B$ con $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, abbiamo

$$Qu = (A + j \cdot B)(v + j \cdot w) = (Av - \bar{B}w) + j \cdot (Bv + \bar{A}w), \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^n.$$

Otteniamo perciò

$$(27.3) \quad [A + j \cdot B] = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}, \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Possiamo riassumere questa discussione con il

LEMMA 27.4.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice complessa $X \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ rappresenti una trasformazione \mathbb{H} -lineare a destra è che*

$$(27.4) \quad j_n X = \bar{X} j_n. \quad \square$$

Se $a \in \mathbf{U}(2n)$, allora $a^\top = \bar{a}^{-1}$ e la condizione $a^\top j_n a = j_n$ equivale al fatto che a rappresenti una trasformazione \mathbb{H} -lineare a destra su \mathbb{H}^n .

Siano $u_1 = v_1 + w_1 \cdot j$, $u_2 = v_2 + w_2 \cdot j \in \mathbb{H}^n$, con $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}^n$. Il loro prodotto scalare quaternionio è¹

$$\begin{aligned} \langle u_1 | u_2 \rangle_{\mathbb{H}} &= \langle \bar{u}_2 | u_1 \rangle = \langle \bar{v}_2 - j \cdot \bar{w}_2 | v_1 + j \cdot w_1 \rangle \\ &= (\langle v_2 | v_1 \rangle + \langle \bar{w}_2 | w_1 \rangle) + j \cdot (\langle w_2 | v_1 \rangle - \langle v_2 | w_1 \rangle) \\ &= \left((v_1^\top, w_1^\top) \cdot \begin{pmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{w}_2 \end{pmatrix} \right) + j \cdot \left((v_1^\top, w_1^\top) \cdot j_n \cdot \begin{pmatrix} v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Da questo segue la caratterizzazione di $\mathbf{Sp}(n)$ data dall'enunciato. □

TEOREMA 27.4.3. $\mathbf{Sp}(n)$ (per $n \geq 1$) è un gruppo di Lie compatto e connesso per archi. La sua algebra di Lie è

$$\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}) \mid X^\top j_n + j_n X = 0, X^* + X = 0\}.$$

L'esponenziale definisce un'applicazione surgettiva $\exp : \mathfrak{sp}(n) \rightarrow \mathbf{Sp}(n)$.

DIMOSTRAZIONE. $\mathbf{Sp}(n)$ è compatto perché è un sottospazio chiuso del compatto $\mathbf{U}(2n)$. La caratterizzazione della sua algebra di Lie $\mathfrak{sp}(n)$ si ottiene con argomenti simili a quelli utilizzati in precedenza: si osserva che $\mathfrak{sp}(n) \subset \mathfrak{u}(2n)$ e che, posto $\gamma(t) = \exp(X^\top) j_n \exp(tX)$, risulta:

¹Se $u_i = (u_i^h)_{1 \leq h \leq n} \in \mathbb{K}^n$, poniamo $\langle u_1 | u_2 \rangle = \sum_{h=1}^n u_1^h u_2^h$.

$$\gamma'(t) = \exp(tX^\top)(j_n X^\top + X j_n) \exp(tX).$$

Da questa si ottiene facilmente che la condizione $j_n X^\top + X j_n = 0$ è necessaria e sufficiente affinché una $X \in \mathfrak{u}(2n)$ appartenga ad $\mathfrak{sp}(n)$. Poiché $j_n^{-1} = -j_n$, moltiplicando a sinistra per $(-j_n)$ e calcolando la traccia troviamo che $\text{traccia}(X) = 0$ (e quindi $X \in \mathfrak{su}(2n)$) e moltiplicando a destra e a sinistra per j_n troviamo la condizione equivalente $X^\top j_n + j_n X = 0$.

Per verificare la surgettività dell'esponenziale, osserviamo che ogni x in $\mathbf{Sp}(n)$ è coniugata ad una matrice diagonale: possiamo cioè trovare una $a \in \mathbf{Sp}(n)$ tale che

$$(*) \quad a x a^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & e^{i\theta_n} & & \\ & & & e^{-i\theta_1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & e^{-i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

Siano infatti λ_1 un autovalore di x e v_1 un suo corrispondente autovettore in \mathbb{C}^{2n} , con $\|v_1\| = 1$. Abbiamo allora:

$$x(j_n \bar{v}_1) = j_n \bar{x}(\bar{v}_1) = j_n (\bar{\lambda}_1 \bar{v}_1) = \bar{\lambda}_1 (j_n \bar{v}_1).$$

I vettori v_1 e $j_n \bar{v}_1$ sono ortogonali in \mathbb{C}^{2n} perché $(v_1 | j_n \bar{v}_1)_{\mathbb{C}^{2n}} = v_1^\top j_n v_1 = 0$, in quanto j_n è antisimmetrica.

Ragionando per ricorrenza, troviamo una base ortonormale di \mathbb{C}^{2n} della forma:

$$v_1, \dots, v_n, j_n(\bar{v}_1), \dots, j_n(\bar{v}_n).$$

I suoi vettori formano le colonne della matrice $a \in \mathbf{Sp}(n)$ per cui $a^{-1} x a$ ha la forma diagonale (*).

La matrice $X = a^{-1} \text{diag}(i\theta_1, \dots, i\theta_n, -i\theta_1, \dots, -i\theta_n) a$ appartiene a $\mathfrak{sp}(n)$ ed $\exp(X) = x$. Ciò dimostra la surgettività dell'esponenziale, da cui segue che $\mathbf{Sp}(n)$ è connesso per archi. \square

27.5. Sfere e gruppi compatti

Sia \mathbb{k} uno dei corpi $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Indichiamo con e_1, e_2, \dots, e_n la base canonica di \mathbb{k}^n . Possiamo allora identificare $\mathbf{O}(n-1), \mathbf{SO}(n-1), \mathbf{U}(n-1), \mathbf{SU}(n-1), \mathbf{Sp}(n-1)$ ai $\mathbf{O}(n), \mathbf{SO}(n), \mathbf{U}(n), \mathbf{SU}(n), \mathbf{Sp}(n)$, delle trasformazioni delle sfere $S^{n-1}, S^{2n-1}, S^{4n-1}$, che lasciano fisso il vettore e_n . Poiché questi gruppi operano sulle sfere in modo transitivo, otteniamo:

TEOREMA 27.5.1. *Abbiamo i diffeomorfismi*

$$\mathbf{U}(1) \simeq \mathbf{SO}(2) \simeq S^1$$

$$\mathbf{SU}(2) \simeq \mathbf{Sp}(1) \simeq S^3$$

$$\mathbf{O}(n)/\mathbf{O}(n-1) \simeq \mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-1) \simeq S^{n-1} \quad (n > 1)$$

$$\mathbf{U}(n)/\mathbf{U}(n-1) \simeq \mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-1) \simeq S^{2n-1} \quad (n > 1)$$

$$\mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-1) \simeq S^{4n-1} \quad (n > 1)$$

DIMOSTRAZIONE. In ciascuno dei casi l'omeomorfismo cercato è il quoziente iniettivo dell'applicazione $g \rightarrow g(e_n)$. \square

Abbiamo le successioni esatte di omotopia dei fibrati:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \cdots \rightarrow \pi_2(S^n) & \longrightarrow & \\
 \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^n) & \longrightarrow \mathbf{1} \\
 & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_2(S^{2n+1}) & \longrightarrow \\
 \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SU}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SU}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^{2n+1}) & \longrightarrow \mathbf{1} \\
 & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_2(S^{4n+3}) & \longrightarrow \\
 \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{Sp}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{Sp}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^{4n+3}) & \longrightarrow \mathbf{1}
 \end{array}$$

da cui si deduce:

TEOREMA 27.5.2. *I gruppi $\mathbf{SU}(n)$ e $\mathbf{Sp}(n)$ sono semplicemente connessi.*

Il gruppo speciale ortogonale non è semplicemente connesso e $\pi_1(\mathbf{SO}(2)) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbf{SO}(n)) \simeq \mathbb{Z}_2$ per ogni $n \geq 3$.

Il rivestimento universale di $\mathbf{SO}(n)$, per $n \geq 3$, è un gruppo di Lie compatto, che si indica con $\mathbf{Spin}(n)$ e si dice il *gruppo degli spinori di ordine n* . Il rivestimento $\mathbf{Spin}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SO}(n)$ è a due fogli ed è un omomorfismo di gruppi. Nel Capitolo XXV abbiamo dimostrato che

$\mathbf{Spin}(3) \simeq \mathbf{SU}(2)$, $\mathbf{Spin}(4) \simeq \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2)$, $\mathbf{Spin}(5) \simeq \mathbf{Sp}(2)$, $\mathbf{Spin}(6) \simeq \mathbf{SU}(4)$.

Questi isomorfismi sono detti a volte *accidentali*: i gruppi di spin di ordine superiore a sei non sono isomorfi a prodotti di gruppi compatti $\mathbf{SU}(n)$ ed $\mathbf{Sp}(n)$.

27.6. Gruppi di omotopia dei gruppi classici

I gruppi classici connessi sono prodotti topologici di fattori compatti, omeomorfi ai gruppi compatti $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{SU}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$, e di fattori non compatti, omeomorfi a spazi Euclidei. Sarà sufficiente quindi considerare i gruppi di omotopia dei gruppi compatti.

27.6.1. Gruppi di omotopia di $\mathbf{SO}(n)$. Abbiamo già osservato che valgono gli omeomorfismi:

$$\begin{cases} \mathbf{SO}(2) \simeq S^1 \\ \mathbf{SO}(3) \simeq \mathbb{RP}^3 \\ \mathbf{SO}(4) \simeq S^3 \times \mathbb{RP}^3. \end{cases}$$

Abbiamo perciò

$$\begin{aligned}
 \pi_n(\mathbf{SO}(2), e) &\simeq \pi_n(S^1, e_0), \\
 \pi_n(\mathbf{SO}(3), e) &\simeq \pi_n(\mathbb{RP}^3, p_0), \\
 \pi_n(\mathbf{SO}(4), e) &\simeq \pi_n(S^3, e_0) \times \pi_n(\mathbb{RP}^3, p_0), \\
 &\forall n = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Se $n \geq 2$ l'applicazione:

$$\mathbf{SO}(n) \ni g \rightarrow g(e_0) \in \mathbf{S}^{n-1}$$

definisce un fibrato localmente banale con fibra omeomorfa a $\mathbf{SO}(n-1)$. Abbiamo quindi la successione esatta:

$$(27.5) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{m+1}(\mathbf{S}^{n-1}, e_0) \\ \longrightarrow & \pi_m(\mathbf{SO}(n-1), e) & \longrightarrow & \pi_m(\mathbf{SO}(n), e) & \longrightarrow & \pi_m(\mathbf{S}^{n-1}, e_0) \\ & \longrightarrow & & \cdots & & & \end{array}$$

In particolare, poiché $\pi_m(\mathbf{S}^{n-1}, e_0) = 0$ se $m < n-1$ e $\pi_{n-1}(\mathbf{S}^{n-1}, e_0) \simeq \mathbb{Z}$, otteniamo:

$$(27.6) \quad \pi_m(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_m(\mathbf{SO}(n-1), e) \quad \text{se } m < n-2$$

e un omomorfismo surgettivo:

$$(27.7) \quad \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n-1)) \rightarrow \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n)) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \geq 2.$$

Osserviamo che questo omomorfismo è banale se $n = 2, 4$, in quanto sono $\pi_0(\mathbf{SO}(2), e) \simeq \pi_0(\mathbf{S}^1, e_0) = 0$ e $\pi_2(\mathbf{SO}(4), e) \simeq \pi_2(\mathbf{S}^3 \times \mathbb{RP}^3 \times \mathbf{S}^3, (p_0, e_0)) = 0$. Per $n = 3$ abbiamo un omomorfismo $\mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbf{SO}(2), e) \rightarrow \pi_1(\mathbf{SO}(3), e) = \mathbb{Z}_2$.

Abbiamo perciò

$$(27.8) \quad \pi_m(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_m(\mathbf{SO}(m+2), e) \quad \forall n \geq m+2.$$

In particolare

$$(27.9) \quad \pi_1(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_1(\mathbf{SO}(3), e) \simeq \mathbb{Z}_2 \quad \forall n \geq 3,$$

$$(27.10) \quad \pi_2(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_2(\mathbf{SO}(4), e) \simeq 0 \quad \forall n \geq 4,$$

$$(27.11) \quad \pi_3(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_3(\mathbf{SO}(5), e) \simeq \mathbb{Z} \quad \forall n \geq 5,$$

$$(27.12) \quad \pi_4(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_4(\mathbf{SO}(6), e) \simeq 0 \quad \forall n \geq 6.$$

Ad esempio nel caso $n = 5, m = 3$, abbiamo la successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z} \simeq \pi_4(\mathbf{S}^4, e_0) \\ \longrightarrow & \pi_3(\mathbf{SO}(4), e) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_3(\mathbf{SO}(5), e) & \longrightarrow & 0 \simeq \pi_3(\mathbf{S}^4, e_0) \\ & \longrightarrow & & \cdots & & & \end{array}$$

da cui possiamo dedurre che $\pi_3(\mathbf{SO}(n), e)$ è, per ogni $n \geq 5$, un quoziente di \mathbb{Z}^2 rispetto a un sottogruppo abeliano libero.

OSSERVAZIONE 27.6.1. Sono tutti calcolati i gruppi di omotopia stabile dei gruppi ortogonali: è

$$\begin{aligned} \Pi_k &= \pi_{n+k}(\mathbf{SO}(n), e) \quad \forall n > k+1, \\ \Pi_k &= \Pi_{k+8} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ \Pi_0 &= \mathbb{Z}_2 \quad \Pi_1 = \mathbb{Z}_2 \quad \Pi_2 = 0 \quad \Pi_3 = \mathbb{Z} \\ \Pi_4 &= 0 \quad \Pi_5 = 0 \quad \Pi_6 = 0 \quad \Pi_7 = \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

27.6.2. Gruppi di omotopia di $SU(m)$. Il gruppo $SU(2)$ è omeomorfo a S^3 . Per $m \geq 3$, l'applicazione

$$(27.13) \quad SU(m) \ni g \rightarrow g(e_0) \in S^{2m-1}$$

definisce un fibrato localmente banale con fibra omeomorfa a $SU(m-1)$. Otteniamo quindi la successione esatta:

$$(27.14) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(S^{2m-1}, e_0) \\ & & & & & & \\ \longrightarrow & \pi_n(SU(m-1), e) & \longrightarrow & \pi_n(SU(m), e) & \longrightarrow & \pi_n(S^{2m-1}, e_0) & \\ & \longrightarrow & & \cdots & & & \end{array}$$

da cui ricaviamo che:

$$(27.15) \quad \pi_n(SU(m), e) \simeq \pi_n(SU(m-1), e) \quad \text{se } n < 2m-2$$

e l'omomorfismo $\pi_n(SU(m-1), e) \rightarrow \pi_n(SU(m), e)$ è surgettivo per $n = 2m-2$.

In particolare

$$(27.16) \quad \pi_n(SU(m)) \simeq \begin{cases} \pi_n(SU(\lfloor n+1 \rfloor/2), e) & \text{se } n \notin 2\mathbb{N}, 2m > n+2, \\ \pi_n(SU(\lfloor n+2 \rfloor/2), e) & \text{se } n \in 2\mathbb{N}, 2m > n+2. \end{cases}$$

Abbiamo, per $m \geq 2$:

$$(27.17) \quad \begin{aligned} \pi_1(SU(m), e) &= 0, \\ \pi_2(SU(m), e) &= 0, \\ \pi_3(SU(m), e) &= \mathbb{Z}, \\ \pi_4(SU(2), e) &= \mathbb{Z}_2, \\ \pi_4(SU(m), e) &= 0 \quad \text{se } m \geq 3 \\ \pi_5(SU(2), e) &= \mathbb{Z}_2, \\ \pi_5(SU(m), e) &= \mathbb{Z} \quad \text{se } m \geq 3. \end{aligned}$$

Ricaviamo i gruppi di omotopia di ordine 1, 2, 3 della tabella. È

$$\pi_1(SU(m), e) \simeq \pi_1(SU(2), e) \simeq \pi_1(S^3, e_0) = 0.$$

Abbiamo poi

$$\begin{aligned} \pi_2(SU(2), e) &\simeq \pi_2(S^3, e_0) = 0 \\ \text{e } \pi_2(SU(m), e) &\simeq \pi_2(SU(3), e) \quad \text{per } m \geq 3. \end{aligned}$$

Dalla successione esatta

$$0 = \pi_2(SU(2), e) \longrightarrow \pi_2(SU(3), e) \longrightarrow \pi_2(S^5, e_0) = 0$$

ricaviamo che $\pi_2(SU(3), e) = 0$ e quindi $\pi_2(SU(m), e) = 0$ per ogni m .

Abbiamo ancora $\pi_3(SU(2), e) \simeq \pi_3(S^3, e_0) = \mathbb{Z}$ e quindi dalla successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_4(S^5, e_0) & \longrightarrow & \pi_3(SU(2), e) & \longrightarrow & \pi_3(SU(3), e) & \longrightarrow & \pi_3(S^5, e_0) \\ = 0 & & = \mathbb{Z} & & & & = 0 \end{array}$$

ricaviamo che anche $\pi_3(SU(3), e) = \mathbb{Z}$ e quindi $\pi_3(SU(m), e) \simeq \pi_3(SU(3), e) = \mathbb{Z}$ per ogni $m \geq 3$.

27.6.3. Gruppi di omotopia di $\mathbf{Sp}(m)$. Abbiamo $\mathbf{Sp}(1) \simeq S^3$. L'applicazione:

$$(27.18) \quad \mathbf{Sp}(m) \ni g \rightarrow g(e_0) \in S^{4m-1}$$

definisce un fibrato localmente banale con fibra $\mathbf{Sp}(m-1)$. Otteniamo perciò una successione esatta:

$$(27.19) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(S^{4m-1}, e_0) \\ \longrightarrow & \pi_n(\mathbf{Sp}(m-1), e) & \longrightarrow & \pi_n(\mathbf{Sp}(m), e) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(S^{4m-1}, e_0) \\ & \longrightarrow & & \cdots & & & \end{array}$$

Quindi:

$$(27.20) \quad \pi_n(\mathbf{Sp}(m), e) \simeq \pi_n(\mathbf{Sp}(m-1), e) \quad \text{se } n \leq 4m-3.$$

Per $m=2$, poiché $\pi_n(S^7, e_0) = 0$ per $0 \leq n \leq 6$, otteniamo che

$$\pi_n(\mathbf{Sp}(2), e) \simeq \pi_n(\mathbf{Sp}(1), e) \simeq \pi_n(S^3, e_0) \quad \text{per } 0 \leq n \leq 5.$$

Per ricorrenza, abbiamo quindi

$$(27.21) \quad \pi_n(\mathbf{Sp}(m), e) \simeq \pi_n(S^3, e_0) \quad \text{se } n \leq 5.$$

In generale:

$$(27.22) \quad \pi_n(\mathbf{Sp}(m), e) \simeq \begin{cases} \pi_n(\mathbf{Sp}([n-1]/4), e) & \text{se } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \pi_n(\mathbf{Sp}(n/4), e) & \text{se } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \pi_n(\mathbf{Sp}([n+2]/4), e) & \text{se } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \pi_n(\mathbf{Sp}([n+1]/4), e) & \text{se } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Gruppi classici non compatti

Ogni gruppo di Lie \mathbf{G} con un numero finito di componenti connesse è omeomorfo al prodotto topologico $\mathbf{K} \times \mathbb{R}^k$ di un gruppo di Lie compatto \mathbf{K} e di uno spazio Euclideo \mathbb{R}^k (vedi §26.3). Il gruppo \mathbf{G} contiene un sottogruppo compatto massimale omeomorfo a \mathbf{K} , e tutti i sottogruppi compatti massimali di \mathbf{G} sono tra loro omeomorfi. La decomposizione $\mathbf{G} = \mathbf{K} \times \mathbb{R}^k$ si dice la *decomposizione di Cartan* di \mathbf{G} .

In questo capitolo descriviamo i gruppi lineari della lista di Cartan, che si dicono anche *i gruppi classici* non compatti, e per ciascuno di essi diamo la relativa *decomposizione di Cartan*.

Per un sottogruppo lineare \mathbf{G} di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ invariante rispetto all'aggiunzione, potremo scegliere come suo sottogruppo compatto massimale \mathbf{K} la sua intersezione $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ di \mathbf{G} con il gruppo delle matrici unitarie.

28.1. La lista dei gruppi classici non compatti

Nel Capitolo XXVII abbiamo esaminato i gruppi classici compatti. Completiamo ora la *lista di Cartan* con l'elenco dei gruppi classici non compatti. Per ciascuno di essi descriveremo anche la rispettiva algebra di Lie.

$\mathbf{U}(p, q)$ (*gruppo unitario di segnatura* (p, q)) è il gruppo delle matrici complesse $a \in \mathbf{GL}(p+q, \mathbb{C})$ che soddisfano $a \mathbf{K} a^* = \mathbf{K}$ per una matrice Hermitiana simmetrica \mathbf{K} con segnatura (p, q) . Ad esempio, possiamo scegliere $\mathbf{K} = \mathbf{I}_{p,q} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & \\ & -\mathbf{I}_q \end{pmatrix}$. La sua algebra di Lie è

$$\mathfrak{u}(p, q) = \{X \in \mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{C}) \mid X^* \mathbf{K} + \mathbf{K} X = 0\}.$$

$\mathbf{SU}(p, q)$ (*gruppo speciale unitario di segnatura* (p, q)) è il gruppo $\mathbf{SU}(p, q) = \mathbf{U}(p, q) \cap \mathbf{SL}_{p+q}(\mathbb{C})$ delle matrici complesse a di $\mathbf{U}(p, q)$ con determinante 1. La sua algebra di Lie è

$$\mathfrak{su}(p, q) = \{X \in \mathfrak{u}(p, q) \mid \text{trac}(X) = 0\} = \mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{C}).$$

$\mathbf{SU}^*(2n)$, che si indica anche con $\mathbf{SL}_n(\mathbb{H})$, (*gruppo lineare speciale quaternionico*) è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{SL}_{2n}(\mathbb{C})$ tali che

$$a \mathbf{J} = \mathbf{J} \bar{a}$$

dove \bar{a} è la matrice i cui coefficienti sono i coniugati dei coefficienti di a e \mathbf{J} una matrice reale antisimmetrica di rango $2n$. Ad esempio possiamo

fissare $J = j_n = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$. La sua algebra di Lie, che si indica anche con $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{H})$, è:

$$\mathfrak{su}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C}) \mid XJ = J\bar{X}\}.$$

SO(n, \mathbb{C}) (*gruppo ortogonale complesso*) è il gruppo delle matrici a di $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ che lasciano invariata una matrice complessa simmetrica non degenera Q :

$$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}) \mid a^T Q a = Q\}.$$

La sua algebra di Lie è:

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid X^T Q + QX = 0\}.$$

SO(p, q) (*gruppo ortogonale di segnatura* (p, q)) è il gruppo delle matrici reali $a \in \mathbf{SL}(p+q, \mathbb{R})$ tali che $a^T K a = K$ per una matrice $(p+q) \times (p+q)$ reale e simmetrica K , di segnatura (p, q) . La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{so}(p, q) = \{X \in \mathfrak{sl}_{p+q}(\mathbb{R}) \mid X^T K + KX = 0\}.$$

SO^{*}($2n$) (*gruppo complesso ortogonale simplettico*) è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{SL}_{2n}(\mathbb{C})$ tali che

$$a^* J a = J \quad \text{e} \quad a^T a = K$$

ove J è una matrice antihermitiana di rango $2n$ e K è una matrice simmetrica di rango $2n$ con $JK = KJ$. Possiamo ad esempio fissare $K = I_{2n}$ e $J = j_n = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$. L'algebra di Lie corrispondente è:

$$\mathfrak{so}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}) \mid X^* J + JX = 0, \quad X^T K + KX = 0\}.$$

Sp(n, \mathbb{C}) (*gruppo simplettico complesso*) è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ tali che $a^T J a = J$ per una matrice antisimmetrica $J \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ di rango $2n$. La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \mid X^T J + JX = 0\}.$$

Sp(n, \mathbb{R}) (*gruppo simplettico*) è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ con $a^T J a = J$ per una matrice antisimmetrica $J \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ di rango $2n$. La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) \mid X^T J + JX = 0\}.$$

Sp(p, q) (*gruppo unitario simplettico di segnatura* (p, q)) è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{Sp}(p+q, \mathbb{C})$ tali che $a^* K a = K$ per una matrice Hermitiana simmetrica K di segnatura $(2p, 2q)$ che commuta con J . Se $J = j_{p+q} = \begin{pmatrix} & I_{p+q} \\ -I_{p+q} & \end{pmatrix}$, possiamo fissare ad esempio

$$K = \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & \\ & & I_p & \\ & & & -I_q \end{pmatrix}.$$

La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(p, q) = \{X \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \mid X^* K + KX = 0\}.$$

Osserviamo che $\mathbf{Sp}(n) = \mathbf{Sp}(n, 0) = \mathbf{Sp}(0, n) = \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n)$.

28.2. I gruppi $U(p, q)$ e $SU(p, q)$

Fissiamo $K = I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$ e poniamo $n = p + q$.

LEMMA 28.2.1. *Se $x \in U(p, q)$, allora $x^* \in U(p, q)$. Se $x \in SU(p, q)$, allora $x^* \in SU(p, q)$.*

DIMOSTRAZIONE. Per la definizione di $U(p, q)$, abbiamo, poiché $I_{p,q}^{-1} = I_{p,q}$,

$$\begin{aligned} x \in U(p, q) &\Leftrightarrow x^* I_{p,q} = I_{p,q} x^{-1} \Leftrightarrow x I_{p,q} = I_{p,q} [x^*]^{-1} \\ &\Leftrightarrow (x^*)^* I_{p,q} (x^*) = I_{p,q} \Leftrightarrow x^* \in U(p, q). \end{aligned}$$

Inoltre, se $\det(x) = 1$, anche $\det(x^*) = \overline{\det(x)} = 1$. □

LEMMA 28.2.2. $U(p, q) \cap U(n) \cong U(p) \times U(q)$.

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo un elemento $x \in U(p, q) \cap U(n)$ nella forma

$$x = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{C}^{p \times p}$, $b \in \mathbb{C}^{q \times q}$, $c \in \mathbb{C}^{q \times p}$, $d \in \mathbb{C}^{p \times q}$. Poiché $x \in U(p, q)$, abbiamo

$$a^* a - d^* d = I_p, \quad a^* c = d^* b, \quad b^* b - c^* c = I_q.$$

Essendo $x \in U(n)$, abbiamo anche:

$$a^* a + d^* d = I_p, \quad a^* c + d^* b = 0, \quad b^* b + c^* c = I_q.$$

Da queste uguaglianze ricaviamo $c = 0$, $d = 0$, da cui segue la tesi. □

COROLLARIO 28.2.3. $SU(p, q) \cap U(n) \simeq SU(p) \times SU(q) \times S^1$.

DIMOSTRAZIONE. Ad ogni numero complesso σ ed ogni intero positivo h associamo la matrice diagonale $D_h(\sigma) = \text{diag}(\sigma, 1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^{h \times h}$.

Per il Lemma 28.2.2, l'applicazione

$$SU(p) \times SU(q) \times S^1 \ni (a, b, \sigma) \longrightarrow \begin{pmatrix} D_p(\sigma) a & 0 \\ 0 & D_q(\sigma^{-1}) b \end{pmatrix} \in SU(p, q) \cap U(n)$$

è continua e bigettiva e dunque un omeomorfismo perché i due spazi sono compatti di Hausdorff. □

TEOREMA 28.2.4. *Il gruppo $SU(p, q)$ è diffeomorfo al prodotto:*

$$SU(p, q) \simeq SU(p) \times SU(q) \times S^1 \times \mathbb{C}^{pq}.$$

Il gruppo $U(p, q)$ è diffeomorfo al prodotto topologico $SU(p, q) \times S^1$:

$$U(p, q) \simeq SU(p) \times SU(q) \times S^1 \times S^1 \times \mathbb{C}^{pq}.$$

I due gruppi sono pertanto connessi per archi, ma non compatti se $pq \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Calcoliamo l'intersezione $\mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n)$. Scriviamo un suo elemento X nella forma $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{pmatrix}$ con $X_{11} \in \mathfrak{p}(p)$, $X_{22} \in \mathfrak{p}(q)$ ed $X_{12} \in \mathbb{C}^{p \times q}$.

Allora:

$$0 = X^* I_{p,q} + I_{p,q} X = X I_{p,q} + I_{p,q} X = \begin{pmatrix} 2X_{11} & 0 \\ 0 & 2X_{22} \end{pmatrix} \implies X_{1,1} = 0, X_{2,2} = 0.$$

Quindi

$$\mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n) = \mathfrak{su}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{12}^* & 0 \end{pmatrix} \mid X_{12} \in \mathbb{C}^{p \times q}(\mathbb{C}) \right\} \simeq \mathbb{C}^{pq}.$$

La tesi è perciò conseguenza dei lemmi precedenti e del Teorema 26.3.4. \square

28.3. I gruppi $\mathbf{SO}(p, q)$

TEOREMA 28.3.1. *Siano p, q due interi positivi. Il gruppo $\mathbf{SO}(p, q)$ è diffeomorfo a $\{-1, 1\} \times \mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.*

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo come nella dimostrazione dei teoremi precedenti. Si verifica facilmente che

$$\mathbf{SO}(p, q) = \{x \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \mid x^T K x = K\}, \quad \text{con } K = I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$$

contiene l'aggiunta di ogni sua matrice. È quindi un gruppo pseudoalgebrico cui possiamo applicare il Teorema 26.3.4. Ricaviamo in primo luogo che $\mathbf{SO}(p, q) \cap \mathbf{U}(n)$ è formato dalle matrici:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

con $x_1 \in \mathbf{O}(p)$, $x_2 \in \mathbf{O}(q)$ e $\det(x_1) \cdot \det(x_2) = 1$. Quindi abbiamo l'omeomorfismo:

$$\mathbf{SO}(p, q) \cap \mathbf{U}(n) \cong \{-1, 1\} \times \mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(q).$$

D'altra parte $\mathfrak{so}(p, q) \cap \mathfrak{p}(p+q)$ è lo spazio delle matrici

$$X = \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } X_{1,2} \in \mathbb{R}^{p \times q} \simeq \mathbb{R}^{pq}.$$

La tesi segue dalla decomposizione di Cartan

$$(\mathbf{SO}(p, q) \cap \mathbf{U}(p+q)) \times (\mathfrak{so}(p, q) \cap \mathfrak{p}(p+1)) \ni (x, X) \longleftrightarrow x \cdot \exp(X) \in \mathbf{SO}(p, q).$$

\square

28.4. I gruppi $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ e $\mathbf{SU}^*(2n)$

LEMMA 28.4.1. *Se $J = j_n$, allora $x^* \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ per ogni $x \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\bar{J} = J$, abbiamo:

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) &\Leftrightarrow x^T J x = J \Leftrightarrow J x = (x^T)^{-1} J \Leftrightarrow x^{-1} J = J x^T \\ &\Leftrightarrow \bar{x}^{-1} J = J x^* \Leftrightarrow \bar{x} J x^* = J \Leftrightarrow (x^*)^T J (x^*) = J \iff x^* \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}), \end{aligned}$$

perché $\bar{x} = (x^*)^T$. Otteniamo quindi la tesi. \square

TEOREMA 28.4.2. *Il gruppo $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ è diffeomorfo a $\mathbf{Sp}(n) \times \mathbb{R}^{n(2n+1)}$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 28.4.1 ed il Teorema 26.3.4, ogni $x \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ si decompone in modo unico nel prodotto

$$x = a \cdot \exp(X) \quad \text{con } a \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n) = \mathbf{Sp}(n) \quad \text{ed } X \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2n).$$

Scriviamo X nella forma

$$X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{1,2}^* & X_{2,2} \end{pmatrix}$$

con $X_{h,k} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ed $X_{1,1}, X_{2,2}$ hermitiane simmetriche. Da $X^\top J + JX = 0$ otteniamo le uguaglianze:

$$X_{2,2} = -X_{1,1}^\top, \quad X_{1,2} = X_{1,2}^\top.$$

La X è dunque della forma

$$(*) \quad X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{1,2}^* & -X_{1,1}^\top \end{pmatrix}$$

con $X_{1,1}$ Hermitiana simmetrica ed $X_{1,2}$ simmetrica. Quindi $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2n)$ è quindi lo spazio vettoriale reale delle matrici Hermitiane simmetriche della forma (*). Esso ha quindi dimensione reale $n^2 + n(n+1) = n(2n+1)$. La tesi segue dal Teorema 26.3.4. \square

TEOREMA 28.4.3. *Il gruppo $\mathbf{SU}^*(2n) \simeq \mathbf{SL}_n(\mathbb{H})$ è diffeomorfo a $\mathbf{Sp}(n) \times \mathbb{R}^{2n^2-n-1}$.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che $x \in \mathbf{SU}^*(2n)$ se $x \in \mathbf{SL}_{2n}(\mathbb{C})$ e $Jx = \bar{x}J$. Poiché $J^\top = -J$, per trasposizione otteniamo $\bar{x}^*J = x^\top J = Jx^*$, e quindi $x^* \in \mathbf{SU}^*(2n)$ se $x \in \mathbf{SU}^*(2n)$.

Se $x \in \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n)$, allora $x^\top Jx = x^\top \bar{x}J = J$, cioè $x \in \mathbf{Sp}(n)$. Viceversa, $\mathbf{Sp}(n) \subset \mathbf{SU}^*(2n)$, perché, se $x^*x = I_{2n}$ e $x^\top Jx = J$, abbiamo anche $x^*J\bar{x} = J$ perché J è reale e dunque $xJ = x(x^*J\bar{x}) = J\bar{x}$.

Per il Teorema 26.3.4, abbiamo la decomposizione di Cartan

$$\mathbf{Sp}(n) \times (\mathfrak{su}^*(2n) \cap \mathfrak{p}(2n)) \ni (x, X) \longleftrightarrow x \cdot \exp(X) \in \mathbf{SU}^*(2n).$$

L'intersezione $\mathfrak{su}^*(2n) \cap \mathfrak{p}(2n)$ è lo spazio vettoriale reale delle matrici della forma:

$$X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{1,2}^* & \bar{X}_{1,1} \end{pmatrix}$$

con $X_{1,1}$ matrice di $\mathfrak{p}(n)$ con traccia nulla ed $X_{1,2} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ antisimmetrica: $X_{1,2}^\top = -X_{1,2}$. Esso ha quindi dimensione reale $(n^2 - 1) + n(n-1) = 2n^2 - n - 1$. Da qui segue la tesi. \square

28.5. I gruppi $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ ed $\mathbf{SO}^*(2n)$

TEOREMA 28.5.1. *Il gruppo $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ è diffeomorfo a $\mathbf{SO}(n) \times \mathbb{R}^{(n^2-n)/2}$.*

DIMOSTRAZIONE. Gli x di $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ sono caratterizzati da:

$$\det(x) = 1, \quad x^\top x = I_n, \quad \text{cioè } g^\top = g^{-1}.$$

Se $x \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$, coniugando la $x^\top = x^{-1}$ otteniamo che $x^* = \bar{x}^{-1} = [(x^*)^\top]^{-1}$, da cui $(x^*)^\top = (x^*)^{-1}$ e possiamo utilizzare il Teorema 26.3.4 per ottenere la decomposizione di Cartan di $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$.

Un elemento x di $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n)$ soddisfa $x^\top = x^{-1} = x^*$ ed è quindi una matrice a coefficienti reali. Poiché $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n) = \mathbf{SO}(n)$, otteniamo il diffeomorfismo

$$\mathbf{SO}(n) \times (\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(n)) \ni (x, X) \longleftrightarrow x \cdot \exp(X) \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C}).$$

Lo spazio vettoriale $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(n)$ consiste delle matrici hermitiane simmetriche X con $X^\top + X = 0$, cioè delle matrici antisimmetriche puramente immaginarie. Esse formano uno spazio vettoriale reale di dimensione $n(n-1)/2$. Abbiamo allora un omeomorfismo

$$\mathbf{SO}(n) \times \mathfrak{so}(n) \ni (x, X) \longleftrightarrow x \cdot \exp(iX) \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C}). \quad \square$$

TEOREMA 28.5.2. *Il gruppo $\mathbf{SO}^*(2n)$ è omeomorfo a $\mathbf{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-n}$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mathbf{K} = \mathbf{I}_{2n} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}$ e $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \end{pmatrix}$. Poiché $\mathbf{SO}^*(2n) = \mathbf{SO}(2n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{SU}^*(2n)$, ed abbiamo già verificato che sia $\mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$ che $\mathbf{SU}^*(2n)$ sono invarianti per aggiunzione, anche $\mathbf{SO}^*(2n)$ è invariante per aggiunzione. Possiamo quindi utilizzare il Teorema 26.3.4 per ottenere la decomposizione di Cartan di $\mathbf{SO}^*(2n)$.

Verifichiamo in primo luogo che il gruppo $\mathbf{K} = \mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n)$ è isomorfo, come gruppo di Lie, ad $\mathbf{U}(n)$. Le matrici $x \in \mathbf{K}$ sono caratterizzate dalle equazioni

$$x^\top x = \mathbf{I}_{2n}, \quad x^* \mathbf{J} x = \mathbf{J}, \quad x^* x = \mathbf{I}_{2n}, \quad \det(x) = 1.$$

La prima e la terza ci dicono che x è una matrice reale di $\mathbf{SO}(2n)$. La seconda ci dice allora che x commuta con \mathbf{J} e dunque è \mathbb{C} -lineare per la struttura complessa su \mathbb{R}^{2n} definita da \mathbf{J} . Infatti, se definiamo l'isomorfismo \mathbb{R} -lineare $\sigma : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ mediante

$$\sigma(e_k) = e_k \quad \text{e} \quad \sigma(\mathbf{J}e_k) = \sigma(e_{k+n}) = i e_k, \quad \text{per } 1 \leq k \leq n,$$

l'applicazione

$$\mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n) \ni x \longrightarrow \sigma \circ x \circ \sigma^{-1} \in \mathbf{U}(n)$$

è un isomorfismo di gruppi di Lie.

Calcoliamo ora l'intersezione $\mathfrak{so}^*(2n) \cap \mathfrak{p}(2n)$. Essa consiste delle matrici X della forma

$$X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ -\bar{X}_{1,2} & \bar{X}_{1,1} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad X_{1,1}, X_{1,2} \in i \cdot \mathfrak{so}(n).$$

Abbiamo allora la decomposizione di Cartan

$$\mathbf{SU}(n) \times (\mathfrak{so}^*(2n) \cap \mathfrak{p}(2n)) \ni (x, X) \longleftrightarrow x \cdot \exp(X) \in \mathbf{SO}^*(2n),$$

da cui segue l'enunciato del teorema. □

28.6. I gruppi $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$

TEOREMA 28.6.1. *Abbiamo il diffeomorfismo*

$$\mathbf{Sp}(p, q) \cong \mathbf{Sp}(p) \times \mathbf{Sp}(q) \times \mathbb{R}^{4pq}.$$

DIMOSTRAZIONE. Le matrici x di $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$ sono caratterizzate dalle equazioni:

$$x^\top J x = J \quad \text{ed} \quad x^* \begin{pmatrix} I_{p,q} & \\ & I_{p,q} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} I_{p,q} & \\ & I_{p,q} \end{pmatrix}.$$

Quindi $\mathbf{Sp}(p, q) = \mathbf{Sp}(p+q, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2p, 2q)$, ove $\mathbf{U}(2p, 2q)$ è definito in questo caso come il gruppo delle matrici x per cui $x^* K x = K$, per la matrice

$$K = \begin{pmatrix} I_{p,q} & \\ & I_{p,q} \end{pmatrix}.$$

Poiché $K = K^* = K^{-1}$, otteniamo

$$x \in \mathbf{U}(2p, 2q) \Leftrightarrow K x^* K = x^{-1} \Leftrightarrow K x^{**} K = [x^*]^{-1} \Leftrightarrow x^* \in \mathbf{U}(2p, 2q).$$

Quindi, poiché sia $\mathbf{Sp}(p+q, \mathbb{C})$ che $\mathbf{U}(2p, 2q) = \{g \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \mid g^* K g = K\}$ sono invarianti rispetto all'aggiunzione, anche $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$ è invariante rispetto all'aggiunzione.

Possiamo quindi utilizzare il Teorema 26.3.4 per trovare la decomposizione di Cartan di $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$. È $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n) \subset \mathbf{Sp}(n) \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$. Indichiamo con \tilde{x} la matrice a coefficienti quaternioni corrispondente ad x . Troviamo allora: se $x \in \mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$, allora

$$\tilde{x}^* \tilde{x} = I_{p+q}, \quad \tilde{x}^* I_{p,q} \tilde{x} = I_{p,q}.$$

Si ottiene quindi

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 & \\ & \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad x_1 \in \mathbf{Sp}(p), \quad x_2 \in \mathbf{Sp}(q).$$

La decomposizione di Cartan ci dà quindi un diffeomorfismo

$$\mathbf{Sp}(p) \times \mathbf{Sp}(q) \times (\mathfrak{sp}(p, q; \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2p+2q)) \longrightarrow \mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$$

$$\text{definito da:} \quad (x_1, x_2, X) \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & \\ & x_2 \end{pmatrix} \exp(X)$$

L'intersezione $\mathfrak{sp}(p, q; \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2n)$ è lo spazio vettoriale reale di dimensione $4pq$ delle matrici Hermitiane della forma:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & X_{1,2} & 0 & X_{1,4} \\ X_{1,2}^* & 0 & {}^t X_{1,4} & 0 \\ 0 & \bar{X}_{1,4} & 0 & -\bar{X}_{1,2} \\ X_{1,4}^* & 0 & -{}^t X_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$$

con $X_{1,2}$ e $X_{1,4}$ matrici complesse di tipo $p \times q$. □

Appendice: Complementi di geometria differenziale

y

Il lemma di Morse-Sard

Il Lemma di Morse-Sard descrive alcune importanti proprietà delle applicazioni differenziabili. Esso ha conseguenze importanti sia nella geometria che nella topologia differenziale. Ad esempio, utilizzando il Lemma di Sard, dimostreremo nel Capitolo XXX il teorema d'immersione di Whitney¹, che ci dice che ogni varietà differenziabile paracompatta di classe \mathcal{C}^∞ e di dimensione m è diffeomorfa ad una sottovarietà, che è anche un sottospazio topologico chiuso, di \mathbb{R}^{2m+1} . Tra i diversi argomenti di cui il Lemma di Sard costituisce un'indispensabile premessa, citiamo la trasversalità, la teoria delle singolarità, la teoria di Morse.

Il *Lemma* fu dimostrato da Anthony P. Morse nel 1939 per funzioni a valori scalari e generalizzato da Arthur Sard al caso di funzioni a valori in una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ nel 1942. In letteratura il risultato è citato come *Teorema di Sard*, o *Lemma di Sard*, o *Teorema di Morse-Sard*.

29.1. Il caso degli spazi Euclidei

29.1.1. Applicazioni differenziabili $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $m < n$. Dimostriamo innanzi tutto il :

LEMMA 29.1.1. *Siano m, n , due interi positivi con $m < n$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^1 , definita su un aperto A di \mathbb{R}^m . Allora $f(A)$ è di prima categoria ed ha misura di Lebesgue nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni intero positivo N ed ogni $\alpha \in \mathbf{Z}^m$ indichiamo con $Q(\alpha, N)$ il cubo m -dimensionale di lato $1/N$ e centro nel punto α/N :

$$Q(\alpha, N) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |Nx^i - \alpha^i| \leq 1/2 \text{ per } i = 1, \dots, m\}.$$

La famiglia:

$$\{Q(\alpha, N) \mid \alpha \in \mathbf{Z}^m, N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

è numerabile e le sue sottofamiglie formate dai cubi di lato $1/N$ sono ricoprimenti chiusi localmente finiti (quadrettature) di \mathbb{R}^m . L'insieme A è l'unione numerabile $\bigcup_\nu Q_\nu$ della famiglia $\{Q_\nu = Q(\alpha_\nu, N_\nu) \subset A\}$ dei cubi $Q(\alpha, N)$ in esso contenuti. Allora

$$f(A) = \bigcup f(Q_\nu)$$

è una rappresentazione di $f(A)$ come unione numerabile di insiemi compatti.

Basterà dimostrare che ogni $f(Q_\nu)$ ha parte interna vuota e misura di Lebesgue nulla.

¹Hassler Whitney, *Differentiable manifolds*, Ann. of Math. (2) 37 (1936), no. 3, 645–680.

Fissiamo un indice ν . Le derivate parziali prime di f sono uniformemente limitate su Q_ν . Per il teorema della media, la f è Lipschitziana su Q_ν . Abbiamo cioè, per una costante $L_\nu > 0$,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L_\nu |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in Q_\nu.$$

Quindi l'immagine $f(E)$ di un sottoinsieme E di Q_ν di diametro δ ha diametro minore o uguale a $L_\nu \cdot \delta$. L'insieme $f(Q_\nu)$ è compatto e quindi misurabile secondo Lebesgue in \mathbb{R}^n .

Poiché Q_ν è unione di N^m cubi m -dimensionali di lato $1/(N \cdot N_\nu)$ di \mathbb{R}^m , la sua immagine $f(Q_\nu)$ è contenuta in un'unione di N^m cubi n -dimensionali di lato $L_\nu \sqrt{m}/(N \cdot N_\nu)$ di \mathbb{R}^n . Per la subaddittività della misura, otteniamo

$$(29.1) \quad \text{vol}(f(Q_\nu)) \leq N^m \left(\frac{L_\nu \sqrt{m}}{N \cdot N_\nu} \right)^n = \frac{L_\nu^n m^{n/2}}{N_\nu^n} N^{m-n}, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Facendo tendere N all'infinito, otteniamo che $f(Q_\nu)$ ha misura di Lebesgue nulla. Ne segue che $f(A)$, essendo unione numerabile di sottoinsiemi misurabili di misura nulla è misurabile ed ha misura di Lebesgue nulla in \mathbb{R}^n .

Per dimostrare che $f(A)$ è un sottoinsieme della prima categoria di Baire, basta verificare che ciascuno dei compatti $f(Q_\nu)$ ha parte interna vuota. Questo segue dalla prima parte della dimostrazione, perché un compatto di \mathbb{R}^n con parte interna non vuota ha misura di Lebesgue positiva. La dimostrazione è completa. \square

29.1.2. Punti e valori regolari e critici. Ricordiamo le nozioni di punti e valori regolari e critici per applicazioni differenziabili negli spazi Euclidei.

DEFINIZIONE 29.1.2. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile, di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, definita su un aperto A di \mathbb{R}^m .

Un punto $x_0 \in A$ si dice *regolare* se f è una sommersione differenziabile in x_0 , se cioè $df(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è surgettiva.

Il punto $x_0 \in A$ si dice *critico* se l'applicazione \mathbb{R} -lineare $df(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ha rango $< n$.

Il corrispondente punto $f(x_0) \in \mathbb{R}^n$ si dice *valore critico* di f .

Indichiamo con $C(f)$ e $CV(f)$ rispettivamente l'insieme dei punti critici e dei valori critici di f .

I punti di $f(A) \setminus CV(f)$ si dicono *valori regolari* di f .

I punti critici di f sono cioè tutti e soli i punti $x \in A$ in cui f non è una sommersione. Se y è un valore regolare di f , allora $f^{-1}(y)$ è una sottovarietà differenziabile di dimensione $m - n$ di A , globalmente chiusa in A .

Possiamo riformulare il teorema delle funzioni implicite utilizzando la nozione di punto critico:

TEOREMA 29.1.3 (delle funzioni implicite). Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, definita su un aperto A di \mathbb{R}^m . Se $x_0 \in A$ è un punto regolare, possiamo trovare un intorno aperto V di $f(x_0)$ in \mathbb{R}^n , un intorno aperto W di 0 in \mathbb{R}^{m-n} , un intorno U di x_0 in A ed un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^k

$$g : V \times W \rightarrow U$$

che non abbia punti critici in $V \times W$ e soddisfi l'identità

$$f(g(y, z)) = y \quad \forall (y, z) \in V \times W.$$

In particolare, se $m = n$, la g è un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^k di V su un aperto $g(V)$ di A . In questo caso diciamo che la f definisce un *sistema di coordinate* di classe \mathcal{C}^k in $g(V)$.

Dal teorema delle funzioni implicite deduciamo immediatamente il seguente :

LEMMA 29.1.4. *Sia A un aperto di \mathbb{R}^n ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^1 . Se y è un valore regolare di f , allora $f^{-1}(y)$ è un sottospazio discreto di A .*

DIMOSTRAZIONE. Dal teorema delle funzioni implicite segue che ogni punto x di $f^{-1}(y)$ ha un intorno aperto U tale che $f^{-1}(y) \cap U = \{x\}$. \square

29.1.3. Il lemma di Morse-Sard.

TEOREMA 29.1.5 (Lemma di Morse-Sard). *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ , definita su un aperto A di \mathbb{R}^m . Allora $CV(f)$ è di prima categoria ed ha misura di Lebesgue nulla.*

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato del teorema è banalmente vero quando $n = 0$, perché in questo caso l'insieme dei punti critici di f è vuoto. Possiamo quindi supporre $n > 0$ ed il teorema vero per applicazioni di classe \mathcal{C}^∞ a valori in \mathbb{R}^{n-1} . Se $m < n$, tutti i punti di A sono critici e dunque $CV(f) = f(A)$. In questo caso, la tesi è conseguenza del Lemma 29.1.1.

Consideriamo quindi, nel resto della dimostrazione, il caso in cui $m, n \geq 1$, supponendo per ricorrenza che la tesi sia vera per applicazioni differenziabili di classe \mathcal{C}^∞ definite su aperti di \mathbb{R}^k con $k < m$.

Posto $C = C(f)$, per ogni intero positivo k sia C_k il sottoinsieme di C in cui si annullano tutte le derivate parziali di f di ordine positivo minore o uguale di k :

$$C_k = \{x \in A \mid D^\alpha f(x) = 0 \quad \text{se } 0 < |\alpha| \leq k\},$$

e poniamo

$$C_\infty = \bigcap_k C_k.$$

L'insieme C è chiuso in A e, per ogni $0 < k \leq \infty$, i C_k sono sottoinsiemi chiusi di C e quindi di A .

Dimostreremo separatamente che le immagini mediante f di $C \setminus C_1$, di $C_k \setminus C_{k+1}$ e di C_∞ sono di prima categoria ed hanno misura di Lebesgue nulla in \mathbb{R}^n .

Poiché

$$CV(f) = f(C \setminus C_1) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} f(C_k \setminus C_{k+1}) \cup f(C_\infty),$$

da ciò seguirà che $CV(f)$ è anch'esso di prima categoria ed ha misura di Lebesgue nulla, perché unione numerabile d'insiemi di prima categoria con misura di Lebesgue nulla.

Sia x_0 un punto di $C \setminus C_1$. Mostriamo che esso ammette un intorno compatto B in A tale che $f(B \cap C)$ abbia misura di Lebesgue nulla e non abbia quindi punti interni. Possiamo supporre, per semplicità, che siano

$$x_0 = 0, \quad f(0) = 0, \quad \frac{\partial f(0)}{\partial x^1} \neq 0.$$

Mediante un cambiamento di coordinate di classe \mathcal{C}^∞ in un intorno W di 0 in A , possiamo ricondurci al caso in cui la restrizione di f a W si possa scrivere nella forma²:

$$f(x) = f(x^1, x^2, \dots, x^m) = (x^1, f^2(x), \dots, f^n(x)) = (x^1, g(x)),$$

con $g \in \mathcal{C}^\infty(W, \mathbb{R}^{n-1})$. Lo Jacobiano di f si scrive in queste coordinate come

$$Jf = \frac{\partial f}{\partial(x^1, \dots, x^m)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x^1} & \frac{\partial g}{\partial(x^2, \dots, x^m)} \end{pmatrix}$$

e quindi i punti critici di f in W sono un sottoinsieme dell'insieme dei punti critici di g in W . Sia B un intorno compatto di 0 in W . Per l'ipotesi induttiva $g(B \cap CV(g))$ è un compatto di \mathbb{R}^{n-1} con parte interna vuota e misura di Lebesgue nulla. Poiché

$$g(B \cap C(g)) \supset \pi_{n-1}(f(B \cap C(f))),$$

$$\text{ove } \pi_{n-1} : \mathbb{R}^n \ni (y^1, \dots, y^n) \rightarrow (y^2, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^{n-1},$$

e la proiezione π_{n-1} è aperta, ne segue che anche il compatto $f(B \cap C(f))$ è privo di punti interni. Inoltre, $f(B \cap C(f))$ è contenuto in $[-r, r] \times g(B \cap C(g))$ per qualche $r > 0$. Quindi anche $f(B \cap C(f))$ ha misura nulla per il teorema di Fubini.

Ripetendo questo ragionamento per i diversi punti di $C \setminus C_1$, dimostriamo che è possibile ricoprire $C \setminus C_1$ con una famiglia numerabile di compatti $\{B_\ell\}$ tali che $f(C \cap B_\ell)$ sia privo di punti interni e di misura di Lebesgue nulla. Dunque

$$f(C \setminus C_1) = \bigcup_{\ell} f(C \cap B_\ell)$$

è di prima categoria ed ha misura di Lebesgue nulla in \mathbb{R}^n .

Siano ora $k \geq 1$ ed $x_0 \in C_k \setminus C_{k+1}$. Per semplicità, possiamo supporre che $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$. Indichiamo con φ una derivata parziale di f di ordine k , per cui sia $d\varphi(0) \neq 0$. A meno di restringerci ad un intorno aperto W di 0 in \mathbb{R}^m , e di cambiare le coordinate in W ed in \mathbb{R}^n , possiamo supporre che $\varphi(x) = x^1$.

Allora $C_k \cap W$ è contenuto in $\{x^1 = 0\}$ e quindi $f(C_k \cap W)$ è contenuto nell'insieme dei valori critici dell'applicazione

$$g(x^2, \dots, x^m) = f(0, x^2, \dots, x^m),$$

definita e di classe \mathcal{C}^∞ in un intorno W' di 0 in \mathbb{R}^{m-1} . L'insieme $f(C_k \cap W')$ è allora di prima categoria ed ha misura di Lebesgue nulla per l'ipotesi induttiva su m .

Ricopriamo $C_k \setminus C_{k+1}$ con una famiglia numerabile di tali intorni W e dimostriamo così che $f(C_k \setminus C_{k+1})$ è di prima categoria ed ha misura di Lebesgue nulla

²Se, ad esempio, risulta $\partial f^1 / \partial x^1 \neq 0$, risolvendo l'equazione implicita $x^1 = f^1(t^1, \dots, t^m)$ in un intorno di 0, troviamo una funzione $t^1 = h(x^1, t^2, \dots, t^m)$ ed allora $x^1 = f^1$, $x^2 = t^2$, ..., $x^m = t^m$ sono nuove coordinate in un intorno di 0 in cui la f ha la forma desiderata.

perché unione numerabile di insiemi di prima categoria con misura di Lebesgue nulla.

Dimostriamo ora che $f(C_\infty)$ è di prima categoria ed ha misura di Lebesgue nulla in \mathbb{R}^n .

Fissiamo un cubo Q , di lato $r > 0$, contenuto in A e sia $\{Q_{i,N}\}_{1 \leq i \leq N^m}$ una sua suddivisione in N^m cubi di lato r/N . Per ogni N sia I_N l'insieme degli indici i per cui $Q_{i,N} \cap C_\infty \neq \emptyset$.

Fissiamo un intero positivo ℓ con $n(\ell + 1) > m$. Poiché tutte le derivate parziali di f si annullano identicamente su C_∞ , per ogni intero positivo ℓ possiamo trovare³ un intorno aperto U_ℓ di $Q \cap C_\infty$ in A tale che:

$$(29.2) \quad |\nabla f(x)| \leq \text{dist}(x, Q \cap C_\infty)^\ell, \quad \forall x \in U_\ell.$$

Poiché $\text{dist}(Q \cap C_\infty, \complement U_\ell) = \delta > 0$,

$$Q_{i,N} \subset U_\ell, \quad \forall N > r/\delta, \quad i \in I_N,$$

e perciò otteniamo che

$$|\nabla f(x)| \leq (r\sqrt{m}/N)^\ell, \quad \text{se } N > r/\delta, \quad \text{ed } x \in \bigcup_{i \in I_N} Q_{i,N}.$$

Da questa disuguaglianza ricaviamo che

$$\text{diam}(f(Q_{i,N})) \leq (r\sqrt{m}/N)^{\ell+1} \quad \text{se } N > r/\delta, \quad i \in I_N.$$

Quindi, se ω_n è il volume della palla unitaria di \mathbb{R}^n , abbiamo, per ogni $N > r/\delta$,

$$\text{vol}(f(Q \cap C_\infty)) \leq \sum_{i \in I_N} \text{vol}(f(Q_{i,N})) \leq N^m \omega_n (r\sqrt{m}/N)^{n(\ell+1)}.$$

Poiché $n(\ell + 1) > m$, il secondo membro di questa disuguaglianza tende a 0 per $N \rightarrow \infty$. Quindi $\text{vol}(f(Q \cap C_\infty)) = 0$ e perciò $f(Q \cap C_\infty)$ è un chiuso con parte interna vuota.

Poiché C_∞ è unione numerabile di compatti $Q \cap C_\infty$, con Q cubo chiuso in A , l'insieme $f(C_\infty)$ è di prima categoria ed ha misura di Lebesgue nulla, perché unione numerabile di insiemi di prima categoria con misura di Lebesgue nulla. La dimostrazione è completa. \square

OSSERVAZIONE 29.1.6. Dalla dimostrazione si può osservare come il teorema rimanga valido sotto l'ipotesi più debole che f sia di classe \mathcal{C}^k con $kn > m$.

³Se $\psi \in \mathcal{C}^{k+1}((-a, a), \mathbb{R})$ si annulla in 0 con tutte le sue derivate fino all'ordine k , allora

$$\psi(x) = \frac{1}{k!} \int_0^x (x-t)^k \psi^{(k+1)}(t) dt, \quad \forall x \in (-a, a).$$

In particolare, se $|\psi^{(k+1)}(x)| \leq L$ per $|x| \leq b < a$, abbiamo

$$|\psi(x)| \leq L|x|^k, \quad \forall x \in (-b, b).$$

Otteniamo la disuguaglianza (29.2) applicandola alla restrizione di ciascuna derivata parziale prima di f ai segmenti uscenti da un punto di C_∞ .

29.2. Il teorema di Sard per varietà differenziabili

Siano M, N varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, di dimensioni m, n rispettivamente, ed $f \in \mathcal{C}^k(M, N)$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^k . Un punto p che sia critico per la rappresentazione di f in un sistema di coordinate locali in p ed in $f(p)$, lo è anche per la sua rappresentazione rispetto a qualsiasi altro sistema di coordinate locali.

Possiamo quindi definire senza ambiguità l'insieme $C(f)$ dei punti critici di f in M e l'insieme $CV(f)$ dei valori critici di f in N .

DEFINIZIONE 29.2.1. Diciamo che un punto $p \in M$ è un *punto critico* (rispettivamente *punto regolare*) di un'applicazione differenziabile $f : M \rightarrow N$, di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, se, rispetto a coordinate locali x in un intorno U di p in M ed y in un intorno V di $f(U)$ in N , il punto $x(p)$ è critico (rispettivamente regolare) per la

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n.$$

L'insieme dei *valori regolari* di f è il complementare in $f(M)$ dell'insieme $CV(f)$ dei valori critici.

Se $q \in f(M) \subset N$ è un *valore regolare*, allora $f^{-1}(q)$ è una *sottovarietà (globalmente) chiusa* di M , differenziabile di classe \mathcal{C}^k , di dimensione $m - n$.

Usando atlanti formati da un insieme al più numerabile di elementi otteniamo immediatamente:

LEMMA 29.2.2. Sia $f : M \rightarrow N$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^1 tra due varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, di dimensioni m ed n , rispettivamente. Se $m < n$, allora $f(M)$ è un sottoinsieme di prima categoria di N .

TEOREMA 29.2.3 (Lemma di Sard). Siano M ed N varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^∞ . Allora, per ogni applicazione $f : M \rightarrow N$ di classe \mathcal{C}^∞ , $CV(f)$ è un insieme di prima categoria in N .

OSSERVAZIONE 29.2.4. Possiamo introdurre sulla varietà differenziabile N una *misura* positiva n dimensionale μ , con la condizione che il suo pull-back rispetto a ciascuna carta locale sia un multiplo, rispetto ad una funzione di densità di classe \mathcal{C}^∞ , della misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n . Un modo per costruire la μ è il seguente. Fissiamo un ricoprimento aperto localmente finito $\{U_i\}_{i \in I}$ di N mediante gli aperti di un atlante $\{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$ di N , di classe \mathcal{C}^∞ . Sia $\{\phi_i\}$ una partizione dell'unità su N , con funzioni $\phi_i \geq 0$, subordinata al ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$. Definiamo la misura μ mediante l'integrale delle funzioni continue a supporto compatto, ponendo:

$$\int_N g d\mu = \sum_{i \in I} \int_{x_i(U_i)} g(x_i^{-1}) \phi_i(x_i^{-1}) d\lambda_n, \quad \forall g \in \mathcal{C}_c^0(N, \mathbb{R}),$$

ove λ_n è la misura di Lebesgue n -dimensionale in \mathbb{R}^n .

Vale allora il Lemma di Sard nella formulazione:

TEOREMA 29.2.5. Se $f : M \rightarrow N$ è un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ , allora l'insieme $CV(f)$ dei valori critici di f è μ -misurabile ed ha misura nulla.

Teoremi di approssimazione e d'immersione

30.1. Il teorema d'immersione di Whitney

Dimostriamo in questo paragrafo che ogni varietà differenziabile M di dimensione m è diffeomorfa ad una sottovarietà propria di \mathbb{R}^{2m+1} .

Premettiamo alcuni risultati relativi ad applicazioni differenziabili tra spazi Euclidei.

30.2. Alcuni teoremi di approssimazione per applicazioni differenziabili

Premettiamo alcuni risultati relativi ad applicazioni differenziabili tra spazi Euclidei.

Ricordiamo che

$$\|A\| = \sqrt{\text{traccia}(A^*A)}$$

è una norma Hermitiana sullo spazio $\mathfrak{M}(n, m; \mathbb{C})$ delle matrici complesse $n \times m$ e la sua restrizione al sottospazio $\mathfrak{M}(n, m; \mathbb{R})$ delle matrici reali una norma Euclidea. L'applicazione $\mathfrak{M}(n, m; \mathbb{C}) \ni A \rightarrow A^* \in \mathfrak{M}(m, n; \mathbb{C})$ è un'isometria anti- \mathbb{C} -lineare.

LEMMA 30.2.1. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^m , n un intero $\geq 2m$, ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^2 . L'insieme delle matrici reali $A \in \mathfrak{M}(n, m; \mathbb{R})$ per cui l'applicazione*

$$\Omega \ni x \rightarrow f_A(x) = f(x) + Ax \in \mathbb{R}^n$$

sia un'immersione differenziabile in ogni punto $x \in \Omega$ è un sottoinsieme denso di seconda categoria in $\mathfrak{M}(n, m; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{mn}$.

DIMOSTRAZIONE. Nei punti $x \in \Omega$ in cui la f_A non è un'immersione, la matrice $B = Jf(x) + A$ ha rango minore di m , cioè $A = B - Jf(x)$ per una matrice B di rango minore di m . Per ogni $0 \leq k < m$, le matrici $n \times m$ di rango k formano una sottovarietà differenziabile localmente chiusa $\mathfrak{M}(n, m; k; \mathbb{R})$ di $\mathfrak{M}(n, m; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{mn}$, di dimensione $k(n + m - k)$ (vedi l'esempio ?? del Capitolo ??). L'applicazione:

$$F_k : \Omega \times \mathfrak{M}(n, m; k; \mathbb{R}) \ni (x, B) \rightarrow A = B - Jf(x) \in \mathfrak{M}(n, m; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{mn}$$

è differenziabile di classe \mathcal{C}^1 , definita su una varietà differenziabile di dimensione $m + k(n + m - k)$ ed a valori in una varietà differenziabile di dimensione mn .

La $k \rightarrow m + k(n + m - k)$ è crescente per $2k < n + m$ ed, in particolare, per $k < m$. Perciò, poiché abbiamo supposto che $n \geq 2m$, abbiamo

$$m + k(n + m - k) \leq m + (m - 1)(n + 1) = mn + 2m - n - 1 < mn, \quad \text{per } 0 \leq k < m.$$

Per il Lemma 29.2.2 del Capitolo XXIX, l'immagine di F_k è di prima categoria in \mathbb{R}^{mn} . Quindi anche l'unione delle immagini delle F_k , per $0 \leq k < m$, è un sottoinsieme di prima categoria in $\mathfrak{M}(n, m; \mathbb{R})$. Ne segue che le $A \in \mathfrak{M}(n, m; \mathbb{R})$ per cui f_A sia un'immersione in ogni punto $x \in \Omega$ è il complementare di un insieme di prima categoria, ed in particolare è denso in ogni aperto di $\mathfrak{M}(n, m; \mathbb{R})$. \square

LEMMA 30.2.2. *Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^m , n un intero $\geq m$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^1 , K e K' compatti con*

$$\begin{aligned} K' &\subset K \subset \Omega, \\ \text{rank } Jf(x) &= m, \quad \forall x \in K, \\ f(x_1) &\neq f(x_2), \quad \text{se } x_1, x_2 \in K' \text{ ed } x_1 \neq x_2. \end{aligned}$$

Allora, possiamo trovare reali $\epsilon > 0$, $\epsilon' > 0$, e, fissato r con $0 < r < \text{dist}(K, \mathbb{C}\Omega)$, un $\epsilon'' > 0$ tali che

- (1) se $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $\|Jg(x)\| < \epsilon$ per ogni $x \in K$, allora $f + g$ è un'immersione differenziabile in tutti i punti di K ;
- (2) Se $g \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ soddisfa la disuguaglianza $|g(x) - g(y)| \leq \epsilon'|x - y|$ per $x, y \in K'$, allora la restrizione di $(f + g)$ a K' è iniettiva;
- (3) se $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $|g(x)| + \|Jg(x)\| < \epsilon''$ quando $\text{dist}(x, K) < r$, allora $f + g$ è un'immersione in tutti i punti di K ed iniettiva su K' .

DIMOSTRAZIONE. (1) Il minimo autovalore $\mu(x)$ della matrice simmetrica

$$(Jf(x))^* Jf(x)$$

è una funzione continua e, per ipotesi, positiva in ogni punto x di K . Sarà quindi

$$|Jf(x)v|^2 \geq \mu_0|v|^2, \quad \forall x \in K, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m,$$

con

$$\mu_0 = \min_{x \in K} \mu(x) > 0.$$

Fissiamo $\epsilon = \sqrt{\mu_0/4}$. Se $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $\|Jg(x)\| < \epsilon$ per ogni $x \in K$, allora $|Jg(x)v|^2 \leq (\mu_0/4)|v|^2$ per $x \in K$ e $v \in \mathbb{R}^m$ ed otteniamo quindi

$$|(Jf(x) + Jg(x))v| \geq |Jf(x)v| - |Jg(x)v| \geq \epsilon|v|, \quad \forall x \in K, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m,$$

e dunque $f + g$ è un'immersione differenziabile in ogni $x \in K$. Questo dimostra il punto (1).

Premettiamo alla dimostrazione di (2) il

LEMMA 30.2.3. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^m ed $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'immersione differenziabile di classe \mathcal{C}^1 in tutti i punti di un compatto K contenuto in Ω . Esistono allora due costanti positive c, r tali che*

$$\text{posto } K_r = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \text{dist}(x, K) < r\} \Subset \Omega, \text{ risulti}$$

$$(*) \quad |f(x_1) - f(x_0)| \geq c|x_1 - x_0|, \quad \forall x_0, x_1 \in K_r, \quad \text{con } |x_1 - x_0| \leq r.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mu_0 > 0$ un limite inferiore per il minimo autovalore $\mu(x)$ della matrice simmetrica $(Jf(x))^*Jf(x)$ sul compatto K ed $r_0 > 0$ una costante positiva tale che $K_{2r_0} \subseteq \Omega$ e $\mu(x) > \mu_0/4$ se $x \in K_{2r_0}$. Siano $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^m$. Se $x_0 \in K_{r_0}$ ed $|x_0 - x_1| < r_0$, allora tutto il segmento di estremi x_0 ed x_1 è contenuto in $K_{2r_0} \subset \Omega$ ed abbiamo, con $x_t = x_0 + t(x_1 - x_0)$,

$$f(x_1) - f(x_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_t) dt = \int_0^1 Jf(x_t)(x_1 - x_0) dt.$$

Poiché $Jf(x)$ è uniformemente continua su C_0 , potremo ancora trovare un numero reale r , con $0 < r \leq r_0$, tale che

$$\|Jf(x) - Jf(x')\| < \frac{\sqrt{\mu_0}}{16}, \quad \text{se } x, x' \in K_{2r_0}, \quad |x - x'| < r.$$

Otteniamo quindi che, se $x_0, x_1 \in K_r$ ed $|x_1 - x_0| < r$, allora

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_0)| &= \left| \int_0^1 Jf(x_t)(x_1 - x_0) dt \right| \\ &\geq |Jf(x_0)(x_1 - x_0)| - \int_0^1 \|Jf(x_t) - Jf(x_0)\| \cdot |x_1 - x_0| dt \\ &\geq \frac{\sqrt{\mu_0}}{4} |x_1 - x_0|, \end{aligned}$$

e quindi la (*), con $c = \frac{\sqrt{\mu_0}}{4}$. □

Dimostriamo ora la (2) del Lemma 30.2.2. Per il Lemma 30.3.3 esistono $c > 0$ ed $r > 0$ tali che valga la (*). L'insieme

$$E = \{(x_0, x_1) \in K' \times K' \mid |x_0 - x_1| \geq r\}$$

è compatto in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ e quindi la funzione continua

$$F(x_0, x_1) = |f(x_1) - f(x_0)|/|x_1 - x_0|,$$

che è definita e continua su E , ammette un minimo positivo c' . Otteniamo quindi, con $\kappa = \min\{c, c'\} > 0$,

$$|f(x_1) - f(x_0)| \geq \kappa |x_1 - x_0|, \quad \forall x_0, x_1 \in K'.$$

Se $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ soddisfa $|g(x_1) - g(x_0)| < \kappa |x_1 - x_0|$ per $x_0, x_1 \in K'$, avremo, per $x_0 \neq x_1 \in K'$:

$$\begin{aligned} |(f(x_1) + g(x_1)) - (f(x_0) + g(x_0))| &\geq |f(x_1) - f(x_0)| - |g(x_1) - g(x_0)| \\ &\geq \kappa |x_1 - x_0| - |g(x_1) - g(x_0)| > 0, \end{aligned}$$

che mostra come $(f + g)$ sia ancora iniettiva su K' . Premettiamo alla dimostrazione del punto (3) dell' enunciato del Lemma 30.2.2 il seguente

LEMMA 30.2.4. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^m , K un compatto contenuto in Ω ed r un numero reale positivo tale che $K_r = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \text{dist}(x, K) < r\} \subseteq \Omega$. Allora:*

- (1) esiste una costante $L > 0$ tale che, per ogni coppia di punti $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^m$ che appartengano alla stessa componente connessa di K esista una successione finita di punti $x_0, x_1, \dots, x_k \in K$ tali che

$$\begin{aligned} x_0 &= p_0, \quad x_k = p_1, \\ [x_{j-1}, x_j] &\subset K_r \subset \Omega, \quad \text{per } j = 1, \dots, k, \\ \sum_{j=1}^k |x_j - x_{j-1}| &\leq L|p_1 - p_0|. \end{aligned}$$

- (2) Fissato $\epsilon > 0$, esiste un $\epsilon'' > 0$ tale che, per ogni $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ con $\|Jg(x)\| < \epsilon''$ per $x \in K_r$, risulti

$$|g(p_1) - g(p_0)| < \epsilon|p_1 - p_0|$$

se p_0, p_1 appartengono alla stessa componente connessa di K .

DIMOSTRAZIONE. (1) Se $0 < \delta < r/2$, l'insieme $\bar{K}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \text{dist}(x, K) \leq \delta\}$ è un compatto contenuto in K_r ed ha solo un numero finito di componenti connesse. Sostituendo quindi \bar{K}_δ a K , se necessario, possiamo supporre che K abbia un numero finito di componenti connesse, e limitare ancora la discussione al caso in cui K sia connesso. Allora K_r è connesso per archi e quindi ogni coppia di punti di K può essere congiunta da una spezzata poligonale contenuta in K_r . La

$$(*) \quad \delta(p, q) = \inf \sum_{j=1}^k |x_j - x_{j-1}|,$$

dove l'estremo inferiore è calcolato su tutte le poligonali spezzate

$$[x_0, x_1, \dots, x_k], \quad \text{con } x_0 = p, \quad x_k = q, \quad [x_{j-1}, x_j] \subset K_r \quad \text{per } j = 1, \dots, k,$$

definisce una distanza su K . Abbiamo

$$\delta(p, q) = |p - q| \quad \text{se } p, q \in K \text{ e } |p - q| < r.$$

Pertanto la funzione

$$F(p, q) = \frac{\delta(p, q)}{|p - q|}$$

è definita e continua, e quindi limitata superiormente da una costante $L > 1$ sul compatto $\{(p, q) \in K \times K \mid |p - q| \geq r\}$. Per (*), otteniamo allora la (1).

La (2) segue dalla (1), scegliendo $\epsilon'' > 0$ in modo che sia $L\epsilon'' < \epsilon$. \square

Dimostriamo infine la (3) del Lemma 30.2.2. Fissati due numeri reali $\epsilon', r > 0$, con $r > \text{dist}(K', \mathbb{C}\Omega)$, possiamo trovare un $\epsilon'' > 0$ sufficientemente piccolo affinché ogni funzione $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe \mathcal{C}^1 che soddisfi $\|Jg(x)\| < \epsilon''$ se $\text{dist}(x, K') \leq r$, soddisfi anche la disuguaglianza $|g(x) - g(y)| \leq \epsilon'|x - y|$ quando x, y appartengano alla stessa componente connessa di K' . Fisseremo inoltre ϵ'' in modo tale che $|f(x) - f(y)| > 3\epsilon''$ se x, y appartengono a diverse componenti connesse di K' . Poiché $|g(x)| < \epsilon''$ se $x \in K'$, avremo allora

$$|(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))| \geq |f(x) - f(y)| - |g(x)| - |g(y)| > \epsilon'' > 0$$

se x ed y appartengono a diverse componenti connesse di K' . In questo modo anche l'ultima affermazione del Lemma risulterà verificata. \square

30.3. Il teorema d'immersione di Whitney

Prima di enunciare e dimostrare il Teorema d'immersione di Whitney, è conveniente definire un'opportuna topologia sullo spazio vettoriale reale $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ delle applicazioni differenziabili di una varietà differenziabile M nello spazio Euclideo \mathbb{R}^n .

Definiamo innanzi tutto la topologia di $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, nel caso in cui Ω sia un aperto dello spazio Euclideo \mathbb{R}^m . Per ogni compatto $K \subset \Omega$ ed ogni intero non negativo m introduciamo la seminorma¹:

$$\|f\|_{K,m} = \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha f(x)|.$$

Fissiamo ora una successione $\{K_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ di compatti di Ω , con $K_\nu \subset \text{int}(K_{\nu+1})$, $\bigcup_\nu K_\nu = \Omega$ e definiamo, per $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$:

$$\text{dist}(f, g) = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \frac{\|f - g\|_{K_\nu, \nu}}{1 + \|f - g\|_{K_\nu, \nu}}.$$

Si verifica che questa è una distanza su $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, che induce la topologia della convergenza uniforme delle funzioni con tutte le loro derivate parziali sui compatti di Ω , e che, con questa distanza, $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ è uno spazio metrico completo e quindi, in particolare, uno spazio di Baire.

Dal Lemma 30.2.1 ricaviamo

COROLLARIO 30.3.1. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^m ed n un intero $\geq 2m$. Allora l'insieme delle $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ che non sono immersioni differenziabili è di prima categoria.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{K_\nu\}$ una successione di compatti con $\bigcup_\nu K_\nu = \Omega$. Per ogni intero positivo k l'insieme

$$\mathcal{G}_\nu = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \exists x \in K_\nu \text{ t.c. } \text{rank } Jf(x) < m\}$$

è chiuso. Sia infatti $\{f_a \mid a \in \mathbb{N}\}$ una successione di \mathcal{G}_ν convergente in $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Per ogni $a \in \mathbb{N}$ esistono un punto $x_a \in K_\nu$ ed un vettore $v_a \in \mathbb{R}^m$ con $|v_a| = 1$ e $df_a(x_a)v_a = 0$. Poiché $K_\nu \times S^{m-1}$ è compatto, a meno di passare ad una sottosuccessione possiamo supporre che $x_a \rightarrow x_\infty \in K_\nu$ e $v_a \rightarrow v_\infty \in S^{m-1}$. Se f_∞ è il limite di $\{f_a\}$ in $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, avremo $Jf_\infty(x_\infty)v_\infty = 0$. Questo dimostra che $f_\infty \in \mathcal{G}_\nu$. Perciò \mathcal{G}_ν è chiuso in $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Per il Lemma 30.2.1 l'insieme \mathcal{G}_ν non ha punti interni e quindi l'insieme delle f di $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ che non sono immersioni differenziabili in qualche punto di Ω , essendo uguale all'unione numerabile $\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_\nu$, è della prima categoria di Baire. \square

Consideriamo ora il caso in cui M sia una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ , numerabile all'infinito. Fissiamo un atlante localmente finito $\{U_\alpha, x_\alpha\} \mid \alpha \in I\}$ di

¹Una *seminorma* su uno spazio vettoriale reale V è un'applicazione $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ a valori non negativi, positivamente omogenea di grado uno e subadditiva. A differenza della norma, non si richiede a una seminorma la proprietà che $p(v) = 0$ implichi $v = 0$.

M , con $I \subset \mathbb{N}$, e gli U_α localmente compatti in M , ed un raffinamento $\{U'_\alpha\}$ di $\{U_\alpha\}$ con $U'_\alpha \Subset U_\alpha$. Poniamo $K_\alpha = x_\alpha(\bar{U}'_\alpha)$. Possiamo allora definire una distanza su $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ mediante

$$\text{dist}(f, g) = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \frac{\sum_{\alpha \leq \nu} \|f \circ x_\alpha^{-1} - g \circ x_\alpha^{-1}\|_{K_{\alpha, \nu}}}{1 + \sum_{\alpha \leq \nu} \|f \circ x_\alpha^{-1} - g \circ x_\alpha^{-1}\|_{K_{\alpha, \nu}}}, \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n).$$

Si verifica che con questa distanza $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ è uno spazio metrico completo, e quindi di Baire. La topologia indotta dalla distanza è, per la rappresentazione delle applicazioni nelle carte locali, quella della convergenza uniforme sui compatti delle funzioni e di tutte le loro derivate.

Otteniamo allora:

COROLLARIO 30.3.2. *Siano M una varietà differenziabile di dimensione m ed n un intero $\geq 2m$. Per ogni compatto K di M , l'insieme delle applicazioni $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ che sono immersioni differenziabili in ogni punto di K formano un aperto denso.*

Se inoltre M è numerabile all'infinito, allora l'insieme delle applicazioni $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ che sono immersioni differenziabili in tutti i punti di M è un sottoinsieme denso di seconda categoria.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{A} = \{U_\alpha, x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un atlante di M , con $U_\alpha \Subset M$ per ogni α , ed $\{U_\alpha\}$ localmente finita. Fissiamo un raffinamento $\{U'_\alpha\}$ di U_α con $U'_\alpha \Subset U_\alpha$ e sia $K_\alpha = \bar{U}'_\alpha$. Allora l'insieme \mathcal{G}_α delle $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ che non sono immersioni differenziabili in qualche punto $p \in K_\alpha$ formano un sottoinsieme chiuso di $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$. Dimostriamo che \mathcal{G}_α non ha punti interni. A questo scopo, se $f_0 \in \mathcal{G}_\alpha$, applichiamo il Lemma 30.2.1 alla funzione

$$f_{0, \alpha} : x_\alpha(U_\alpha) \ni x \rightarrow f_0 \circ x_\alpha^{-1} \in \mathbb{R}^n.$$

Per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare una matrice reale A_ϵ , di tipo $n \times m$, con $\|A_\epsilon\| < \epsilon$, tale che la

$$x_\alpha(U_\alpha) \ni x \rightarrow f_{0, \alpha} + A_\epsilon x \in \mathbb{R}^n$$

sia un'immersione differenziabile in ogni punto x di $x_\alpha(U_\alpha)$. Introduciamo una funzione reale χ , di classe \mathcal{C}^∞ in \mathbb{R}^m , costantemente uguale ad 1 in un intorno di $x_\alpha(K_\alpha)$ ed uguale a 0 fuori di un altro intorno compatto di $x_\alpha(K_\alpha)$ in $x_\alpha(U_\alpha)$. Poniamo allora

$$f_\epsilon(p) = \begin{cases} f_0(p) & \text{se } p \in \mathring{U}_\alpha, \\ f_0(p) + \chi(x_\alpha(p))A_\epsilon x_\alpha(p) & \text{se } p \in U_\alpha. \end{cases}$$

Allora le f_ϵ non appartengono a \mathcal{G}_α se $\epsilon > 0$ e $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon = f_0$ in $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$. Ciò dimostra che, per ogni $\alpha \in I$, i chiusi \mathcal{G}_α hanno parte interna vuota.

Se K è un compatto di M , l'insieme \mathcal{F}_K delle $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ che non sono immersioni differenziabili in qualche punto di K è un chiuso di $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ contenuto in $\mathcal{F}'_K = \bigcup_{U_\alpha \cap K \neq \emptyset} \mathcal{G}_\alpha$. Poiché \mathcal{F}'_K è un'unione finita di chiusi con parte interna vuota, è esso stesso un chiuso con parte interna vuota. Questo dimostra la prima affermazione del corollario.

Supponiamo ora che M sia numerabile all'infinito. Allora il ricoprimento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è numerabile e l'insieme delle $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ che non sono immersioni differenziabili in qualche punto di M è l'unione numerabile $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{G}_\alpha$, e dunque della prima categoria di Baire. \square

Vale ancora il seguente

LEMMA 30.3.3. *Siano M una varietà differenziabile di dimensione m ed n un intero con $n > 2m$. Per ogni $v \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ sia $\pi_v : \mathbb{R}^n \rightarrow v^\perp \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ la proiezione ortogonale.*

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ è un'immersione differenziabile, allora l'insieme dei vettori $v \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ per cui $\pi_v \circ f$ non sia un'immersione differenziabile è di prima categoria in S^{n-1} .

DIMOSTRAZIONE. Se (U, x) è una carta locale in $p \in M$, la $f \circ x^{-1}$ definisce una sottovarietà parametrica m -dimensionale $f(U)$ di \mathbb{R}^n . Sia V_p lo spazio tangente ad $f(U)$ in $f(p)$. Esso non dipende dalla scelta della carta locale. Si verifica che l'unione disgiunta $N = \bigsqcup_{p \in M} (V_p \cap S^{n-1})$ è una varietà differenziabile² di dimensione $2m - 1$. Consideriamo l'applicazione differenziabile

$$\psi : N \ni (p, v) \longrightarrow v \in S^{n-1}.$$

La condizione che $\pi_v \circ f$ non sia un'immersione equivale al fatto che v appartenga a $\psi(N)$. Poiché $n > 2m$, l'immagine di ψ è di prima categoria in S^{n-1} . \square

Dimostriamo ora il :

TEOREMA 30.3.4 (Whitney). *Sia M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ , paracompatta, numerabile all'infinito, di dimensione reale m . Esiste allora un'immersione differenziabile $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$, che è anche un'applicazione propria, ed un diffeomorfismo $g : M \rightarrow N \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ di M su una sottovarietà propria N di \mathbb{R}^{2m+1} .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $n \geq 2m$.

Per il Corollario 30.3.2 le funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ che sono immersioni differenziabili in ogni punto di M formano un sottoinsieme denso della seconda categoria di Baire in $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$.

Se M è compatta, ogni applicazione differenziabile $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ è propria³. Se M non è compatta, fissiamo una successione $\{K_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ di compatti di M , con $K_\nu \subset \overset{\circ}{K}_{\nu+1}$ ed $M = \bigcup_\nu K_\nu$. Sia $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ una funzione reale con

$$h(p) > \nu + \sup_{K_\nu} |f| \quad \text{se } p \in K_\nu \setminus \overset{\circ}{K}_{\nu-1}.$$

²Possiamo definire su $\tilde{M} = \bigsqcup_{p \in M} V_p$ una struttura di varietà differenziabile di dimensione $2m$ associando ad ogni carta locale (U, x) di M una carta locale (\tilde{U}, \tilde{x}) di \tilde{M} definita come l'inversa dell'applicazione

$$x(U) \times \mathbb{R}^m \ni (x^1, \dots, x^m, v^1, \dots, v^m) \rightarrow (x^{-1}(x^1, \dots, x^m), \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x^i}) \in \tilde{U} \subset \tilde{M}.$$

Osserviamo che \tilde{M} si può considerare una sottovarietà del prodotto $M \times \mathbb{R}^n$ ed N è l'intersezione di \tilde{M} con $M \times S^{n-1}$. La varietà \tilde{M} è diffeomorfa allo spazio tangente TM definito nel Capitolo XXXI.

³Chiamiamo propria un'applicazione continua $\Phi : X \rightarrow Y$ tra due spazi topologici X ed Y che trasformi chiusi di X in chiusi di Y e per cui $\Phi^{-1}(K)$ sia compatto per ogni compatto K di Y .

La

$$g : M \ni p \longrightarrow (f(p), h(p)) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

è ancora un'immersione differenziabile. Per il Lemma 30.3.3 possiamo trovare un vettore $w = (w', w^{n+1}) \in S^n$ tale che $|w'| > \frac{4}{5}$ e $\pi_w \circ g$ sia ancora un'immersione differenziabile. L'ortogonale w^\perp contiene il vettore

$$v = (v', v^{n+1}) = \left(-w^{n+1} \frac{w'}{|w'|}, |w'| \right) \in S^n,$$

con $v^{n+1} > \frac{4}{5}$, $|v'| < \frac{3}{5}$. Otteniamo perciò

$$(g(p)|v) = \sum_{i=1}^n f^i(p)v^i + h(p)v^{n+1} > \frac{4}{5}h(p) - \frac{3}{5} \sup_{K_\nu} |f| > \frac{4}{5}\nu \quad \text{su } K_\nu \setminus \overset{\circ}{K}_{\nu-1},$$

e quindi la $\pi_w \circ g$ è propria.

Sia ora $n > 2m$.

Fissiamo un'immersione differenziabile propria $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ ed un atlante numerabile localmente finito $\mathcal{A} = \{(U_a, x_a)_{a \in A}\}$, $A \subset \mathbb{N}$, di M , con aperti U_a relativamente compatti in M , ed una successione $\{U'_a\}$ aperti di M con $U'_a \Subset U_a$ ed $\bigcup_a U'_a = M$.

Per il Lemma 30.2.3, possiamo scegliere l'atlante \mathcal{A} in modo che la restrizione di f a ciascuno dei compatti \bar{U}_a sia iniettiva.

Poiché f è propria, abbiamo una successione crescente di numeri reali $\{r_\nu\}$ con $\sup_\nu r_\nu = +\infty$ ed

$$|f(p)| > r_a, \quad \forall p \in \bar{U}_a, \quad \forall a \in A.$$

Poniamo

$$F_\nu = \bigcup_{a < \nu} \bar{U}'_a$$

e fissiamo una partizione dell'unità $\{\chi_a\}$ di classe \mathcal{C}^∞ di M , subordinata al ricoprimento $\{U_a\}$, con $\chi_a > 0$ su \bar{U}'_a .

Dico che è possibile determinare una successione di vettori $\{v_a\} \subset \mathbb{R}^n$ tale che per ogni intero positivo ν , la

$$f_\nu = f + \sum_{a < \nu} v_a \chi_a$$

sia

- un'immersione in ogni punto di M ;
- iniettiva su F_ν e su ogni \bar{U}_a , per $a \in A$;
- soddisfi $|f_\nu(p)| > r_a$ per $p \in \bar{U}_a$, $a \in A$.

Ragioniamo per ricorrenza su ν . Per $\nu = 0$, abbiamo $F_\nu = \emptyset$ e quindi $f_0 = f$ soddisfa le condizioni richieste.

Supponiamo di aver costruito f_ν , per qualche $\nu \geq 0$, $\nu \in A$. L'insieme

$$D_\nu = \{(p, q) \in M \times M \mid \chi_\nu(p) \neq \chi_\nu(q)\}$$

è un aperto di $M \times M$ e quindi una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ e di dimensione $2m$. Poiché $2m < n$, per il Lemma di Sard l'applicazione

$$D_v \ni (p, q) \rightarrow \frac{f_v(p) - f_v(q)}{\chi_v(q) - \chi_v(p)} \in \mathbb{R}^n$$

ha immagine di prima categoria in \mathbb{R}^n ed è dunque possibile trovare un v_v arbitrariamente piccolo tale che

$$\frac{f_v(p) - f_v(q)}{\chi_v(p) - \chi_v(q)} \neq v_v, \quad \forall (p, q) \in D.$$

Pur di scegliere v_v sufficientemente piccolo, per il Lemma 30.2.2 la funzione $f_{v+1} = f_v + v_v \chi_v$ sarà ancora un'immersione differenziabile in ogni punto di M , iniettiva su F_v e su tutte le \bar{U}_a e soddisferà ancora la $|f_{v+1}| > r_a$ su \bar{U}_a .

Resta da verificare che f_{v+1} sia iniettiva su F_{v+1} . Siano $p, q \in F_{v+1}$ con $f_{v+1}(p) = f_{v+1}(q)$. Consideriamo i diversi casi possibili.

$\chi_v(p) = 0, \chi_v(q) = 0$. In questo caso $p, q \in F_v$ ed $f_v(p) = f_{v+1}(p), f_{v+1}(q) = f_v(q)$ e quindi

$$(p, q \in F_v, f_{v+1}(p) = f_{v+1}(q)) \Rightarrow (p, q \in F_v, f_v(p) = f_v(q)) \Rightarrow (p = q)$$

perché f_v è iniettiva su F_v .

$\chi_v(p) = 0, \chi_v(q) > 0$. In questo caso è ovvio che $p \neq q$ perché la funzione χ_v assume nei due punti valori distinti.

$\chi_v(p) > 0, \chi_v(q) > 0$. Allora $p, q \in U_v$ e quindi $p = q$ perché abbiamo scelto v_v sufficientemente piccolo perché f_{v+1} fosse iniettiva su \bar{U}_v .

Poniamo

$$f_\infty = \sum_{a \in A} v_a \chi_a(p).$$

La f_∞ così definita è un'immersione iniettiva e propria (un'inclusione differenziabile propria) di M in \mathbb{R}^n . \square

OSSERVAZIONE 30.3.5. Utilizzando il Teorema d'immersione di Whitney, è possibile definire una topologia metrizzabile sullo spazio $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ delle applicazioni differenziabili definite sulla varietà differenziabile M ed a valori nella varietà differenziabile N nel modo seguente.

Fissata un'immersione differenziabile iniettiva e propria $N \hookrightarrow \mathbb{R}^\ell$, che ci permetta di identificare N ad una sottovarietà propria di \mathbb{R}^ℓ , potremo considerare $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ come il sottospazio chiuso di $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^\ell)$ formato dalle f per cui $f(M) \subset N$.

30.4. Retratti differenziabili d'intorno

Introduciamo innanzi tutto la definizione di retratto differenziabile d'intorno.

DEFINIZIONE 30.4.1. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m ed N una sua sottovarietà differenziabile localmente chiusa, di dimensione $n \leq m$.

Diciamo che N è un *retrato d'intorno* in M se vi sono un intorno aperto U di N in M ed una sommersione differenziabile $\varpi : U \rightarrow N$ tale che $\varpi(p) = p$ per ogni $p \in N$.

Consideriamo innanzi tutto il caso di una sottovarietà di uno spazio Euclideo.

PROPOSIZIONE 30.4.2 (intorno tubolare). *Sia N una sottovarietà differenziabile propria di \mathbb{R}^m , di dimensione $n < m$. Per ogni intorno aperto U di N in \mathbb{R}^m esiste una funzione reale positiva $\rho \in \mathcal{C}^\infty(N)$ tale che*

$$U_\rho = \bigcup_{x \in M} \{y \in \mathbb{R}^m \mid |y - x| < \rho(x)\} \subset U,$$

$$\forall x \in U_\rho, \exists ! y = \varpi(x) \in N_0 \text{ tale che } |x - y| = \text{dist}(x, N_0),$$

$$\varpi \in \mathcal{C}^\infty(U_\rho, N_0).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $k = m - n$. Per ogni punto $p \in N$ esiste un intorno aperto U_p di p in \mathbb{R}^m e funzioni $f^1, \dots, f^k \in \mathcal{C}^\infty(U_p)$ tali che

$$N \cap U_p = \{x \in U_p \mid f^1(x) = 0, \dots, f^k(x) = 0\}.$$

L'applicazione

$$U_p \times \mathbb{R}^k \ni (x; t_1, \dots, t_k) \longrightarrow x + \sum_{i=1}^k t_i \frac{\partial f^i}{\partial x} \in \mathbb{R}^m$$

ha differenziale invertibile in $(p, 0)$. Per il teorema delle funzioni implicite essa definisce quindi un diffeomorfismo ψ_p di un intorno $W_p \times \omega_p$ di $(p, 0)$ in $N \times \mathbb{R}^k$ su un intorno U_p di p in \mathbb{R}^m . La sua inversa, composta con la proiezione $p_N : N \times \mathbb{R}^k \rightarrow N$, è un'applicazione $\varpi_p : U_p \rightarrow W_p$, che coincide con la proiezione ortogonale su N in un intorno V_p di p in U_p . È cioè

$$\forall x \in V_p, \quad |x - \varpi_p(x)| = \text{dist}(x, N) \quad \text{e} \quad |x - y| > \text{dist}(x, N), \quad \forall y \in N.$$

Risulta quindi definita su $\Omega = \bigcup_{p \in N} V_p$ la proiezione ortogonale $\varpi : \Omega \rightarrow N$ mediante $\varpi(x) = \varpi_p(x)$ su V_p . Per la scelta delle V_p , abbiamo $|x - \varpi(x)| = \text{dist}(x, N)$ per ogni $x \in \Omega$.

La funzione $\delta(x) = \text{dist}(x, \mathbb{C}(\Omega \cap U))$ è continua e positiva su N . Per il Teorema ?? del Capitolo ?? esiste allora una funzione $\rho \in \mathcal{C}^\infty(N_0)$ tale che $\frac{1}{2}\delta(x) < \rho(x) < \delta(x)$ su N_0 . La funzione ρ soddisfa la tesi. \square

Utilizzando il teorema d'immersione di Whitney e la Proposizione 30.4.2, dimostriamo

TEOREMA 30.4.3. *Sia M una varietà differenziabile di dimensione m ed N una sua sottovarietà differenziabile di dimensione $n < m$, localmente chiusa in M . Allora N è un retratto differenziabile d'intorno in M .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché una sottovarietà localmente chiusa di M è una sottovarietà propria di un aperto M_0 di M , possiamo supporre nella dimostrazione che N sia una sottovarietà propria di M .

Per il teorema d'immersione di Whitney, possiamo trovare un intero ℓ , con $m \leq \ell \leq 2m + 1$, ed un diffeomorfismo $\psi : M \rightarrow M_0 \subset \mathbb{R}^\ell$ di M con una sottovarietà propria M_0 di \mathbb{R}^ℓ . Allora $N_0 = \psi(N)$ è una sottovarietà propria di M_0 e quindi di \mathbb{R}^ℓ .

Per la Proposizione 30.4.2, N_0 ha un intorno tubolare W in \mathbb{R}^ℓ in cui la proiezione ortogonale $\pi_N : W \rightarrow N$ è ben definita ed è una sommersione differenziabile. Posto $U = \psi^{-1}(W)$, possiamo allora definire una retrazione differenziabile

$\varpi : U \rightarrow N$ mediante il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\psi} & W \\ \varpi \downarrow & & \downarrow \pi_{N_0} \\ N & \xrightarrow{\psi} & N_0. \end{array}$$

□

30.5. Alcuni teoremi d'approssimazione

Il teorema d'immersione di Whitney e il Teorema 30.4.3 ci permettono di dimostrare il seguente teorema di approssimazione:

TEOREMA 30.5.1 (di approssimazione). *Siano M ed N due varietà differenziabili ed $f : M \rightarrow N$ un'applicazione continua. Allora esiste un'omotopia*

$$F : M \times [0, 1] \longrightarrow N, \quad \text{tale che}$$

$$\begin{cases} F(p, 0) = f(p), & \forall p \in M, \\ F|_{M \times (0, 1]} \in \mathcal{C}^\infty(M \times (0, 1], N). \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema d'immersione di Whitney, M ed N ammettono inclusioni differenziabili

$$M \xrightarrow{\phi} \phi(M) = M_0 \hookrightarrow \mathbb{R}^{m_0}, \quad N \xrightarrow{\psi} \psi(N) = N_0 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n_0},$$

con $m \leq m_0 \leq 2m+1$, $n \leq n_0 \leq 2n+1$.

Possiamo estendere $f_0 = \psi \circ f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^0(M_0, N_0)$ ad una funzione continua $\tilde{f}_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{m_0}, \mathbb{R}^{n_0})$.

Per la Proposizione 30.4.2, esiste una funzione positiva $r \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tale che, posto

$$V_r = \bigcup_{y \in N_0} B(y, r(y)),$$

vi sia una sommersione differenziabile $\pi \in \mathcal{C}^\infty(V_r, N_0)$ con $|y - \pi(y)| = \text{dist}(y, N_0)$ per ogni $y \in V_r$.

Per ogni $x \in M_0$ sia $\tau(x)$ un numero reale positivo tale che

$$\tilde{f}_0(\xi) \in B(f_0(x), \frac{1}{3}r(f_0(x))) \quad \text{se} \quad |\xi - x| < \tau(x).$$

Per la Proposizione 30.4.2, possiamo trovare una funzione positiva $\rho \in \mathcal{C}^\infty(M_0)$ tale che

$$U_\rho = \bigcup_{x \in M_0} B(x, \rho(x)) \subset \bigcup_{x \in M_0} B(x, \tau(x))$$

e vi sia una sommersione differenziabile $\varpi \in \mathcal{C}^\infty(U_\rho, M_0)$ con $|x - \varpi(x)| = \text{dist}(x, M_0)$ per ogni $x \in U_\rho$.

Sia $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{m_0})$, con $\chi \geq 0$, $\text{supp} \chi \subset B(0, 1)$, $\int \chi dx = 1$.

Poniamo $G(0, x) = f(x)$ e, per ogni $0 < t \leq 1$ definiamo

$$G(x, t) = (t\rho(x))^{-m_0} \int_{\mathbb{R}^{m_0}} \tilde{f}_0(x - \xi) \chi\left(\frac{\xi}{t\rho(x)}\right) d\xi = (t\rho(x))^{-m_0} \int_{\mathbb{R}^{m_0}} \tilde{f}_0(\xi) \chi\left(\frac{x - \xi}{t\rho(x)}\right) d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{m_0}} \tilde{f}_0(x - t\rho(x)\xi)\chi(\xi)d\xi.$$

Otteniamo così una funzione $G \in \mathcal{C}^0(M \times I, \mathbb{R}^{n_0}) \cap \mathcal{C}^\infty(M \times (0, 1], \mathbb{R}^{n_0})$. Inoltre, per la scelta di ρ , $G(x, t) \in V_r$ per ogni $(x, t) \in M \times I$. La $\Phi(x, t) = \pi \circ G(x, t)$ è quindi un'omotopia di f_0 differenziabile su $M \times (0, 1]$. La $F = \psi^{-1} \circ \Phi \circ \phi$ definisce l'omotopia cercata. \square

ESEMPIO 30.5.2. Come conseguenza del teorema di approssimazione, in una varietà differenziabile connessa due punti qualsiasi possono essere congiunti con un cammino di classe \mathcal{C}^∞ .

Abbiamo ancora

TEOREMA 30.5.3 (regolarizzazione dell'omotopia). *Siano M ed N due varietà differenziabili numerabili all'infinito, ed $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ un'omotopia continua tra due applicazioni differenziabili $f_0, f_1 : M \rightarrow N$. Allora esiste un'omotopia $\Phi : M \times [0, 1] \rightarrow N$ tra f_0 ed f_1 con $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N)$.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che M ed N siano sottovarietà proprie di spazi Euclidei. Costruiamo allora una $\tilde{F} : M \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow N$, come nella dimostrazione del Teorema 30.5.1, mediante l'uso di mollificatori. Allora la $\Phi(x, t) = \tilde{F}(x, t, t - t^2)$ soddisfa le proprietà richieste. \square

Dall'esistenza degli intorni tubolari negli spazi Euclidei, ricaviamo:

TEOREMA 30.5.4. *Siano M, S due varietà differenziabili e sia d una metrica che definisce la topologia di M .*

- (1) *Esiste una funzione positiva $\delta \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tale che se $f, g \in \mathcal{C}^0(S, M)$ e $d(f(p), g(p)) < \delta(f(p))$ per ogni $p \in S$, allora f e g sono omotope tra loro.*
- (2) *Per ogni funzione positiva $\epsilon \in \mathcal{C}^0(S)$ ed ogni $f \in \mathcal{C}^0(S, M)$ esiste una $g \in \mathcal{C}^\infty(S, M)$ tale che $d(f(x), g(x)) < \epsilon(p)$ per ogni $p \in S$.*

Campi di vettori e spazio tangente

In questo e nel prossimo capitolo richiameremo qualche nozione generale di geometria differenziale, che ci sarà utile nel seguito.

31.1. Campi di vettori e curve integrali

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m , di classe \mathcal{C}^∞ , numerabile all'infinito. Denotiamo con $\mathcal{E}(M)$ l'algebra reale ed anello commutativo unitario delle funzioni \mathcal{C}^∞ , a valori reali, definite su M .

DEFINIZIONE 31.1.1. Un *campo di vettori* su M è una *derivazione* dell'algebra $\mathcal{E}(M)$, cioè un'applicazione \mathbb{R} -lineare

$$X : \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M)$$

che soddisfi l'identità di Leibnitz:

$$(31.1) \quad X(fg) = gX(f) + fX(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{E}(M).$$

L'insieme $\mathfrak{X}(M)$ dei campi di vettori su M è un $\mathcal{E}(M)$ -modulo unitario a sinistra, con il prodotto definito da

$$(31.2) \quad (fX)(g) = f(X(g)), \quad \text{per } f, g \in \mathcal{E}(M), X \in \mathfrak{X}(M),$$

ed un'algebra di Lie reale con il prodotto di commutazione

$$(31.3) \quad [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{X}(M), f \in \mathcal{E}(M).$$

LEMMA 31.1.2. I campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ si annullano sulle funzioni costanti.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con c , per $c \in \mathbb{R}$, la funzione costante che vale c su M . Abbiamo:

$$X(c) = X(c \cdot 1) = c \cdot X(1) + 1 \cdot X(c) = 2 \cdot X(c)$$

e quindi $X(c) = 0$. □

LEMMA 31.1.3. Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se $f \in \mathcal{E}(M)$ ed $f(p) = 0$ per tutti i punti p di un aperto A di M , allora $X(f)(p) = 0$ per ogni $p \in A$. Abbiamo quindi:

$$(31.4) \quad \text{supp}(X(f)) \subset \text{supp}(f) \quad \forall f \in \mathcal{E}(M), \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Fissato un punto $p \in A$, siano U e V due aperti di M con $p \in U \Subset V \Subset A$, e sia ϕ una funzione di $\mathcal{E}(M)$ uguale a 0 in \overline{U} ed uguale ad 1 su $M \setminus V$. Allora $f = \phi f$ e quindi:

$$X(f)(p) = X(\phi f)(p) = \phi(p)X(f)(p) + f(p)X(\phi)(p) = 0.$$

□

Da questo lemma si ricava immediatamente:

LEMMA 31.1.4. *Sia X un campo di vettori su M ; se f, g sono due funzioni di $\mathcal{E}(M)$ che assumono gli stessi valori su tutti i punti di un aperto A di M , allora :*

$$X(f)(p) = X(g)(p) \quad \forall p \in A.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti $f - g$ si annulla su A e quindi:

$$X(f)(p) - X(g)(p) = X(f - g)(p) = 0 \quad \forall p \in A.$$

□

COROLLARIO 31.1.5. *Se A è un aperto di M , per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ vi è uno ed un solo campo di vettori $X|_A \in \mathfrak{X}(A)$ tale che $X|_A f|_A = (Xf)|_A$ per ogni $f \in \mathcal{E}(M)$.*

□

Ad ogni carta locale (U, x) in M possiamo associare campi di vettori $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m$ in $\mathfrak{X}(U)$, definiti da :

$$(31.5) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) f = \frac{\partial[f \circ x^{-1}]}{\partial x^i} \circ x, \quad \forall f \in \mathcal{E}(U).$$

In una carta locale, un campo di vettori si rappresenta come un operatore differenziale alle derivate parziali, omogeneo del prim'ordine. Vale infatti il

LEMMA 31.1.6. *Siano $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed (U, x) una carta locale in M . Allora :*

$$(31.6) \quad X|_U = \sum_{i=1}^m X(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right).$$

DIMOSTRAZIONE. Data $f \in \mathcal{E}(U)$, sia $f^* = f \circ x^{-1} \in \mathcal{E}(x(U))$. Se $x_0 \in x(U)$, per ogni punto x di un intorno aperto $V_{x_0} \subset x(U)$ di x_0 , stellato rispetto ad x_0 :

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f^*(x_0) + \int_0^1 \frac{df^*(x_0 + t(x - x_0))}{dt} dt \\ &= f^*(x_0) + \sum_{i=1}^m (x^i - x_0^i) f_i^*(x), \quad \text{con} \\ f_i^*(x) &= \int_0^1 \frac{\partial f^*}{\partial x^i}(x_0 + t(x - x_0)) dt \in \mathcal{E}(V_{x_0}). \end{aligned}$$

Con $x_0 = x(p_0)$ abbiamo

$$f_i^*(x_0) = \frac{\partial f^*(x_0)}{\partial x^i} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \right] (p_0)$$

e quindi :

$$\begin{aligned}
 [X|_U f](p_0) &= \left[X \Big|_{v_{x_0}} f \right] (p_0) \\
 &= \left[X \Big|_{v_{x_0}} f(p_0) \right] (p_0) + \left[X \Big|_{v_{x_0}} \sum_{i=1}^m (x^i - x_0^i) f_i^* \circ x \right] (p_0) \\
 &= \sum_{i=1}^m f_i^*(x_0) \left[X \Big|_{v_{x_0}} (x^i - x_0^i) \right] (p_0) \\
 &= \sum_{i=1}^m \left[X(x^i) \right] (p_0) \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \right] (p_0). \quad \square
 \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 31.1.7. Dato un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed un punto $p \in M$, indichiamo con X_p la derivazione :

$$(31.7) \quad \mathcal{E}(M) \ni f \rightarrow X_p f := (Xf)(p) \in \mathbb{R}$$

dell'algebra reale $\mathcal{E}(M)$. Diciamo anche che X_p è un *vettore tangente ad M nel punto p* .

DEFINIZIONE 31.1.8. Una curva $\phi : (a, b) \rightarrow M$ di classe \mathcal{C}^1 è una *curva integrale del campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$* se :

$$(31.8) \quad \frac{d\phi \circ \phi(t)}{dt} = X_{\phi(t)} f, \quad \forall f \in \mathcal{E}(M), \quad \forall t \in (a, b).$$

Se (U, x) è una carta locale in M ed $X = \sum_{i=1}^m a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ in U , allora gli integrali ϕ in U del campo di vettori X sono soluzioni $x(t) = x(\phi(t))$ del sistema autonomo di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine :

$$(31.9) \quad \dot{x}^i = a^i(x) \quad \text{per } i = 1, \dots, m.$$

Dai teoremi di esistenza e unicità per sistemi di equazioni differenziali ordinarie abbiamo allora :

TEOREMA 31.1.9. *Siano $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo di vettori in M e p_0 un punto di M . Esiste allora un'unica curva integrale $\phi : (a, b) \rightarrow M$ di X , con $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$, con $\phi(0) = p_0$, tale che, se $a > -\infty$, allora $\phi(t)$ non ha limite in M per $t \rightarrow a$; se $b < +\infty$, allora $\phi(t)$ non ha limite in M per $t \rightarrow b$.*

31.2. Vettori tangenti e fibrato tangente

DEFINIZIONE 31.2.1. Fissato un punto $p \in M$, chiamiamo *vettore tangente ad M in p* un'applicazione \mathbb{R} -lineare $v : \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfi l'identità di Leibnitz :

$$(31.10) \quad v(fg) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{E}(M).$$

I vettori tangenti in un punto $p \in M$ formano uno spazio vettoriale reale, che indicheremo con $T_p M$.

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, o più in generale $X \in \mathfrak{X}(U)$ per un intorno aperto U di p in M , allora X_p è un vettore tangente ad M in p .

TEOREMA 31.2.2. Per ogni punto $p \in M$ l'applicazione lineare

$$(31.11) \quad \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow X_p \in T_p M$$

è surgettiva.

Se M ha dimensione m ed (U, x) è una carta locale di M in p , allora i vettori tangenti

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p$$

formano una base di $T_p M$. □

DEFINIZIONE 31.2.3. Indichiamo con TM l'unione disgiunta degli spazi vettoriali $T_p M$, al variare di p in M e con $\pi : TM \rightarrow M$ l'applicazione che fa corrispondere al vettore tangente $v \in T_p M$ il suo punto d'applicazione p . Possiamo definire su TM una struttura di varietà differenziabile nel modo seguente. Per ogni carta locale (U, x) di M , definiamo una carta locale $(\pi^{-1}(U), x \times dx)$ di TM ponendo :

$$(31.12) \quad \begin{cases} \pi^{-1}(U) \ni v \longrightarrow (x(\pi(v)), v(x)) \in x(U) \times \mathbb{R}^m, \\ \text{con } v(x) = (v(x^1), \dots, v(x^m)) \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Se (V, y) è un'altra carta locale di M , per $p \in U \cap V$ abbiamo :

$$(31.13) \quad v(y^i) = \sum_{h=1}^m v(x^h) \frac{\partial y^i}{\partial x^h},$$

cioè $v(y) = (\partial y / \partial x)v(x)$, ove $\partial y / \partial x$ è la matrice Jacobiana del cambiamento di coordinate. Questa relazione si esprime anche dicendo che *le componenti di un vettore tangente sono covarianti rispetto ai cambiamenti di coordinate*.

Quindi, se $y = \phi(x)$, per $x \in x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ è la funzione di transizione delle due carte (U, x) e (V, y) , il cambiamento di coordinate dalla carta $(\pi^{-1}U, x \times dx)$ alla carta $(\pi^{-1}V, y \times dy)$ è $(\phi \times d\phi)$.

Abbiamo perciò :

PROPOSIZIONE 31.2.4. Dato un atlante $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i)\}$ di M , con funzioni di transizione¹ $x_{i,j}$, allora $T\mathcal{A} = \{\pi^{-1}(U_i), x_i \times dx_i\}$ è un atlante di TM , con funzioni di transizione $x_{i,j} \times dx_{i,j}$.

Lo spazio tangente è un esempio di *fibrato differenziabile*.

DEFINIZIONE 31.2.5. Un fibrato differenziabile è il dato $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ di due varietà differenziabili B, E e di una sommersione differenziabile $E \xrightarrow{\pi} B$. La varietà E si dice lo *spazio totale*, B la *base* e π la *proiezione* del fibrato ξ .

Indichiamo con $\Gamma_\pi(B, E)$, od anche con $\Gamma(B, E)$ quando non vi sia pericolo di confusione, lo spazio delle *sezioni differenziabili* di B in E , cioè l'insieme delle applicazioni $s \in \mathcal{C}^\infty(B, E)$ che sono inverse destre della proiezione π :

$$(31.14) \quad \Gamma(B, E) = \{s \in \mathcal{C}^\infty(B, E) \mid \pi \circ s(p) = p, \forall p \in B\}.$$

¹abbiamo cioè $x_{i,j} = x_i \circ x_j^{-1}$ su $x_j(U_j \cap U_i)$.

31.3. Differenziale di un'applicazione differenziabile

DEFINIZIONE 31.3.1. Siano M ed N due varietà differenziabili ed $f : M \rightarrow N$ un'applicazione di classe \mathcal{C}^∞ . Essa induce un'applicazione (il *pullback di funzioni*):

$$(31.15) \quad f^* : \mathcal{E}(N) \ni \phi \rightarrow f^*(\phi) = \phi \circ f \in \mathcal{E}(M).$$

Il *differenziale* di f in un punto $p \in M$, che indicheremo con $f_*(p)$ o con $df(p)$, è l'applicazione

$$(31.16) \quad \begin{aligned} f_*(p) &= df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \quad \text{definita da:} \\ f_*(p)(v)(\phi) &= df_p(v)(\phi) = v(f^*(\phi)) = v(f \circ \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{E}(N). \end{aligned}$$

Se (U, x) e (V, y) sono carte locali in M ed N rispettivamente, con $p \in U$ ed $f(p) \in V$, abbiamo:

$$(31.17) \quad f_*(p) \left(\sum_{i=1}^m v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{f(p)}.$$

Possiamo definire in questo modo un'applicazione differenziabile:

$$(31.18) \quad f_* = df : TM \ni v \rightarrow df_{\pi(v)}(v) \in TN,$$

ove abbiamo indicato con $\pi : TM \rightarrow M$ la proiezione canonica. La f_* (o df) si dice il *differenziale* dell'applicazione f , o il suo *sollevamento* allo spazio tangente.

31.4. Alcune osservazioni sul teorema d'immersione di Whitney

Diamo qui una dimostrazione del teorema d'immersione di Whitney utilizzando la nozione di varietà tangente di una varietà differenziabile.

Per semplicità svolgeremo l'argomento per il caso di varietà compatte.

Sia M una varietà differenziabile compatta, di dimensione m e sia $\mathcal{A} = \{(U_a, x_a) \mid 1 \leq a \leq k\}$ un suo atlante finito, con $x_a(U_a) = \mathbb{R}^m$ e tale che, posto $U'_a = \{p \in U_a \mid |x_a(p)| < 1\}$, la famiglia $\{U'_a \mid 1 \leq a \leq k\}$ sia ancora un ricoprimento di M .

Per ogni a , sia $\psi_a \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$ una funzione uguale ad 1 su U'_a e nulla in un intorno di $\complement U_a$. Definiamo quindi le funzioni $\tilde{x}_a : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ponendo

$$\tilde{x}_a = \begin{cases} \psi_a x_a & \text{su } U_a, \\ 0 & \text{su } \complement U_a. \end{cases}$$

Allora

$$\psi : M \ni p \rightarrow ((\tilde{x}_a^i(p))_{\substack{1 \leq a \leq k \\ 1 \leq i \leq m}}, (\psi_a(p))_{1 \leq a \leq k}) \in \mathbb{R}^{k(m+1)}$$

è un diffeomorfismo di M su una sottovarietà compatta di \mathbb{R}^{km} . Abbiamo ottenuto così un'immersione di M in uno spazio Euclideo \mathbb{R}^ℓ che è anche un diffeomorfismo con una sottovarietà differenziabile M_0 di \mathbb{R}^ℓ .

Identifichiamo lo spazio tangente TM_0 ad un sottospazio del prodotto cartesiano $M_0 \times \mathbb{R}^\ell$ ed indichiamo con $\text{pr}_2 : TM_0 \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ l'applicazione che fa corrispondere alla coppia $(p, v) \in TM_0 \subset M_0 \times \mathbb{R}^\ell$ il vettore v .

Sia $v \in \mathbb{R}^\ell$ un vettore non nullo e $\langle v \rangle$ il sottospazio vettoriale di dimensione 1 generato da v . Sia $\pi_v : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^\ell / \langle v \rangle \cong \mathbb{R}^{\ell-1}$ la proiezione nel quoziente. La condizione necessaria e sufficiente affinché $\pi_v|_{M_0} : M_0 \rightarrow \mathbb{R}^{\ell-1}$ sia un'immersione differenziabile è che $v \notin \text{pr}_2(TM_0)$. Se $2m < \ell$, per il Lemma di Sard l'immagine di pr_2 è di prima categoria e quindi la $\pi_v \circ \psi$ è un'immersione differenziabile in uno spazio Euclideo di dimensione $\ell - 1$. Per ricorrenza, otteniamo un'immersione differenziabile di M in uno spazio Euclideo di dimensione $\leq 2m$.

Osserviamo poi che $\pi_v : M_0 \rightarrow \mathbb{R}^\ell / \langle v \rangle$ è iniettiva se e soltanto se non vi sono due punti distinti $p_1, p_2 \in M_0$ con $p_2 - p_1 \in \langle v \rangle$. Ciò equivale al fatto che v non appartenga all'immagine dell'applicazione

$$\{(p_1, p_2) \in M_0 \times M_0 \mid p_1 \neq p_2\} \times \mathbb{R} \ni (p_1, p_2, t) \rightarrow p_1 + t(p_2 - p_1) \in \mathbb{R}^\ell.$$

Questa è un'applicazione differenziabile di una varietà differenziabile di dimensione $2m + 1$ in \mathbb{R}^ℓ . Quindi, se $2m + 1 < \ell$, per il Lemma di Sard ha immagine di prima categoria e dunque potremo scegliere $v \in \mathbb{R}^\ell \setminus \{0\}$ in modo che la $\pi_v \circ \psi$ sia ancora un'immersione differenziabile iniettiva e quindi un diffeomorfismo di M con una sottovarietà di $\mathbb{R}^{2\ell-1}$. Per ricorrenza otteniamo un'immersione topologica iniettiva di M su una sottovarietà differenziabile di uno spazio Euclideo di dimensione $\leq 2m + 1$.

Nel caso in cui M non sia compatta, ma numerabile all'infinito, utilizziamo il ragionamento precedente per dimostrare che l'insieme \mathcal{F}_v delle applicazioni $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^{2m+1})$ la cui restrizione ad $\text{int} K_v$ siano delle immersioni differenziabili iniettive è un aperto denso di seconda categoria. Allora $\psi \in \bigcap_v \mathcal{F}_v$ dà un'immersione differenziabile iniettiva di M nello spazio Euclideo \mathbb{R}^{2m+1} . Per ottenere un'immersione propria, sarà sufficiente considerare una $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ con $h(p) > v$ se $p \in \bigcup K_v$ e la $(\psi, h) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^{2m+2})$. Potremo poi comporre quest'immersione con un'opportuna proiezione π_v rispetto a un vettore non nullo $v \notin \langle e_{2m+2} \rangle$, per ottenere un'immersione differenziabile di M in \mathbb{R}^{2m+1} che sia un diffeomorfismo con una sottovarietà propria di \mathbb{R}^{2m+1} .

31.5. Gruppi a un parametro di diffeomorfismi

DEFINIZIONE 31.5.1. Un *gruppo a un parametro di diffeomorfismi di M* è un'applicazione differenziabile

$$(31.19) \quad \Phi : M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \rightarrow \Phi(p, t) \in M$$

che goda delle proprietà:

- (i) $\Phi(p, 0) = p \quad \forall p \in M$
- (ii) $\Phi(p, t + s) = \Phi(\Phi(p, t), s) \quad \forall p \in M, \forall t, s \in \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 31.5.2. Chiamiamo *gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di M* il dato di un intorno U^* di $M \times \{0\}$ in $M \times \mathbb{R}$ e di un'applicazione

$$(31.20) \quad \Phi : U^* \subset M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \rightarrow \Phi(p, t) \in M$$

che goda delle proprietà :

- (i) $\Phi(p, 0) = p \quad \forall p \in M$
- (ii) $\Phi(p, t + s) = \Phi(\Phi(p, t), s) \quad \text{se } (p, t + s) \text{ e } (\Phi(p, t), s) \in U^*$.

Vale il :

TEOREMA 31.5.3. *Ad un gruppo locale a un parametro $\Phi : U^* \rightarrow M$ di diffeomorfismi di M corrisponde un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ tale che*

$$(31.21) \quad (Xf)(p) = \left. \frac{df(\Phi(p, t))}{dt} \right|_{t=0} \quad \forall f \in \mathcal{E}(M), \quad \forall p \in M.$$

Viceversa, dato un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ esiste un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di $\Phi : U^ \rightarrow M$ di M per cui sia verificata la (31.21). Due gruppi a un parametro $\Phi_1 : U_1^* \rightarrow M$ e $\Phi_2 : U_2^* \rightarrow M$ per cui sia verificata (31.21) per lo stesso campo X coincidono su tutte le componenti connesse di $U_1^* \cap U_2^*$ che intersecano $M \times \{0\}$.*

DIMOSTRAZIONE. L'esistenza e unicità di un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi associato ad un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ è conseguenza del teorema d'esistenza locale, unicità e dipendenza \mathcal{C}^∞ dai dati iniziali per il sistema di equazioni differenziali ordinarie (31.9). Il fatto che la soluzione generale del problema di Cauchy definisca un gruppo locale a un parametro è conseguenza del fatto che il sistema (31.9) è *autonomo*, che cioè le funzioni a secondo membro in (31.9) non dipendono dalla variabile t e quindi che, se $t \rightarrow \Phi(p, t)$ è soluzione in un intervallo $t \in (a, b)$, con $a < 0 < b$, con dato iniziale $\Phi(p, 0) = p$, allora, per ogni $t_0 \in (a, b)$ fissato, $t \rightarrow \Phi(p, t + t_0)$ è soluzione nell'intervallo $(a - t_0, b - t_0)$, con dato iniziale $\Phi(p, t_0)$, e coincide quindi con $\Phi(\Phi(p, t_0), t)$.

Si verifica poi facilmente, utilizzando la formula di Leibnitz per la derivata del prodotto di funzioni reali di una variabile reale, che la (31.21) definisce un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$. \square

Il caso delle varietà con bordo. Possiamo estendere senza difficoltà la definizione dei campi di vettori anche al caso delle varietà a bordo.

DEFINIZIONE 31.5.4. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m , con bordo, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $p_0 \in \partial M$. Fissiamo una carta locale (U, x) con centro in p_0

$$U \ni p \rightarrow x \in X(U) \subset \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^m \geq 0\}, \quad x(p_0) = 0.$$

Diciamo che X nel punto p_0 è

diretto verso l'esterno se $X_p x^m|_{x=0} < 0$,

tangente se $X_p x^m|_{x=0} = 0$,

diretto verso l'interno se $X_p x^m|_{x=0} > 0$.

La definizione non dipende dalla scelta della carta locale, perché la componente $\partial y^m / \partial x^m$ dello Jacobiano della funzione di transizione è positiva su $U \cap V \cap \partial M$ per ogni coppia di carte locali (U, x) e (V, y) di M .

Abbiamo allora

PROPOSIZIONE 31.5.5. Sia M una varietà differenziabile con bordo ed $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo di vettori che non è tangente a ∂M in nessun punto. Esistono allora due funzioni continue non negative $\delta, \varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} \delta(p) > 0, \quad \varepsilon(p) > 0 & \text{se } p \in \text{int}(M), \\ \delta(p) > 0, \quad \varepsilon(p) = 0 & \text{se } p \in \partial M \text{ ed } X_p \text{ è diretto all'esterno,} \\ \delta(p) = 0, \quad \varepsilon(p) > 0 & \text{se } p \in \partial M \text{ ed } X_p \text{ è diretto all'interno,} \end{cases}$$

ed un'applicazione continua ed infinitamente differenziabile fino al bordo di U^* tale che

$$\Phi : U^* = \{(p, t) \in M \times \mathbb{R} \mid -\delta(p) \leq t \leq \varepsilon(p)\}$$

tale che

$$\frac{\partial \Phi(p, t)}{\partial t} = X_{\Phi(p, t)}, \quad \forall (p, t) \in U^*,$$

$$\Phi(p, t + s) = \Phi(\Phi(p, s), t), \quad \text{se } (p, s), (p, t + s), (\Phi(p, s), t) \in U^*. \quad \square$$

31.6. Inclusioni isotope

Definiamo in questo paragrafo una nozione di equivalenza di inclusioni differenziabili.

DEFINIZIONE 31.6.1. Siano $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ due inclusioni differenziabili. Una isotopia tra f_0 ed f_1 è un'applicazione $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N)$ tale che

- (a) $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$ per ogni $x \in M$;
- (b) $f_t = F(\cdot, t) \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ è un'inclusione differenziabile per ogni $t \in [0, 1]$.

La relazione di isotopia tra inclusioni differenziabili è una relazione d'equivalenza.

LEMMA 31.6.2. Per ogni isotopia $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N)$ di inclusioni differenziabili l'applicazione

$$(31.22) \quad \tilde{F} : M \times [0, 1] \ni (x, t) \longrightarrow (F(x, t), t) \in N \times [0, 1]$$

è un'inclusione differenziabile che preserva i livelli.

Viceversa, se $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N \times [0, 1])$ è un'inclusione differenziabile che preserva i livelli, allora $F(x, t) = \pi_N(\tilde{F}(x, t))$ è un'isotopia di inclusioni differenziabili.

DIMOSTRAZIONE. Fissando un'inclusione differenziabile propria $\psi : N \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ e considerando le applicazioni $\psi \circ F$ e $\psi \circ G$ possiamo ricondurci al caso in cui $N = \mathbb{R}^\ell$. Fissata una carta locale (U, x) in M , poiché $G(p, t) = (F(p, t), t)$, lo Jacobiano di G è dato da

$$\frac{\partial G}{\partial(x, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

È chiaro quindi che G è un'immersione differenziabile se e soltanto se F_t è un'immersione differenziabile per ogni $t \in [0, 1]$. Inoltre, G è iniettiva se e soltanto se ciascuna delle F_t , per $t \in [0, 1]$, è iniettiva. \square

OSSERVAZIONE 31.6.3. Sia $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ una funzione reale con

$$\begin{cases} \chi(t) = 0 & \text{se } t \leq 0, \\ 0 < \chi(t) < 1 & \text{se } 0 < t < 1, \\ \chi(t) = 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Possiamo prendere ad esempio

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0, \\ \exp\left(-\frac{1}{t} \exp\left(\frac{1}{t-1}\right)\right) & \text{se } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Se $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N)$, allora $G(p, t) = F(p, \chi(t)) \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ e $G_t = F_0$ per $t \leq 0$, $G_t = F_1$ per $t \geq 1$. Potremo quindi nel seguito supporre che le isotopie siano definite per tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$, e localmente costanti fuori dall'intervallo $[0, 1]$.

NOTAZIONE 31.6.4. Se $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ indicheremo nel seguito con $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$ l'applicazione

$$M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \longrightarrow \tilde{F}(p, t) = (F(p, t), t) \in N \times \mathbb{R}.$$

31.7. Campi completi

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m .

DEFINIZIONE 31.7.1. Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ si dice *completo* se per ogni $x_0 \in M$ la soluzione del problema di Cauchy

$$(31.23) \quad \begin{cases} \dot{x} = X_x, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Vale il criterio

PROPOSIZIONE 31.7.2. *Ogni campo di vettori a supporto compatto è completo.* \square

TEOREMA 31.7.3. *Indichiamo con $\text{pr} : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la proiezione sulla seconda coordinata. Ogni campo di vettori completo X su $M \times \mathbb{R}$, con $d\text{pr}(X) = \partial/\partial t$ induce un'isotopia dell'identità su M .*

Viceversa, se $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, M)$ è un'isotopia dell'identità, allora $d\tilde{F}(\partial/\partial t)$ è un campo di vettori completo su $M \times \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $X \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$ un campo completo e denotiamo con $\Phi \in \mathcal{C}^\infty((M \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, M \times \mathbb{R})$ il flusso in $M \times \mathbb{R}$ da esso definito. Scriviamo

$$\Phi(p, s; t) = (\phi(p, s; t), \tau(p, s; t)), \quad \text{con } \phi \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, M), \quad \tau \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Abbiamo

$$\phi(p, s; 0) = p, \quad \tau(p, s; 0) = s, \quad \forall p \in M, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Poiché $X = (Y, \partial/\partial s)$ con $Y \in \Gamma(M \times \mathbb{R}, TM)$, è

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = 1,$$

che, tenuto conto dei dati iniziali, ci dà $\tau(p, s; t) = s + t$.

Posto

$$\tilde{F}(p, t) = \Phi(p, 0; t),$$

abbiamo

$$\tilde{F}(p, 0) = \Phi(p, 0; 0) = (p, 0).$$

La \tilde{F} è della forma

$$\tilde{F}(p, t) = (F(p, t), t), \quad \text{con } F(p, t) = \phi(p, 0; t)$$

e quindi preserva i livelli. Osserviamo che l'applicazione

$$M \ni p \rightarrow \pi_M \circ \Phi(p, t; -t) \in M$$

inverta $F_t : M \ni p \rightarrow F(p, t) \in M$. Infatti

$$\Phi(F(p, t), t; -t) = \Phi(\Phi(p, 0; t), -t) = (p, 0), \quad \forall p \in M, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quindi, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $F_t : p \rightarrow F(p, t)$ è un automorfismo di M .

Viceversa, ad un'isotopia $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, M)$ dell'identità possiamo associare il campo di vettori completo $X = d\tilde{F}(\partial/\partial t)$ su $M \times \mathbb{R}$. \square

OSSERVAZIONE 31.7.4. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ è completo, allora $(X, \partial/\partial t)$ è un campo completo in $M \times \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE 31.7.5. Se $X \in \Gamma(M \times \mathbb{R}, TM)$ ha supporto compatto, allora $(X, \partial/\partial t)$ è un campo di vettori completo su $M \times \mathbb{R}$.

ESEMPIO 31.7.6. Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ un diffeomorfismo, con $f(0) = 0$. Possiamo scrivere f nella forma

$$f^i(x) = \sum_{j=1}^n a_j^i(x) x^j \quad \text{per } i = 1, \dots, n, \quad \text{con } a_j^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n),$$

con

$$a_j^i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(tx) dt \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

La $F(x, t) = t^{-1} f(tx)$ è un'isotopia tra il diffeomorfismo lineare

$$f_0(x) = \frac{\partial f(0)}{\partial x} x$$

ed f . Quindi ogni diffeomorfismo di \mathbb{R}^n è isotopo ad un diffeomorfismo lineare. Infine, poiché $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ ha esattamente due componenti connesse per archi, possiamo concludere che ogni diffeomorfismo di \mathbb{R}^n è isotopo o all'identità o alla simmetria rispetto ad un iperpiano.

Nel suo lavoro del 1936, H. Whitney dimostrò anche il

TEOREMA 31.7.7 (isotopia delle immersioni). *Se $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ sono due inclusioni differenziabili omotope di una varietà compatta m -dimensionale M in una varietà differenziabile N di dimensione $n \geq 2m + 2$, allora f_0 ed f_1 sono isotope come inclusioni differenziabili.*

TRACCIA DELLA DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un'omotopia $F : M \times I \rightarrow N$ tra f_0 ed f_1 . Per l'Osservazione 31.6.3, possiamo supporre che l'omotopia sia restrizione di una $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$. Consideriamo allora la $\tilde{F}(p, t) = (F(p, t), t)$. Questa è un'applicazione in $\mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$. Poiché $\dim(M \times \mathbb{R}) = m + 1$ e $\dim(N \times \mathbb{R}) = n + 1 \geq 2m + 3 = 2(m + 1) + 1$, possiamo approssimare \tilde{F} con un'inclusione differenziabile $\tilde{G} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$. Poiché $M \times [0, 1]$ è compatto, se \tilde{G} è sufficientemente vicina ad \tilde{F} in $\mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$, possiamo, con un cambiamento di variabili, ottenere che $\tilde{G}(p, t) = (G(p, t), t)$ per t in un intorno di $[0, 1]$. Inoltre, poiché inclusioni differenziabili di una varietà compatta che siano vicine sono isotope, G_0 sarà isotopa ad f_0 e G_1 ad f_1 . Poiché l'isotopia è una relazione d'equivalenza, anche f_0 ed f_1 sono isotope. \square

OSSERVAZIONE 31.7.8. Chiamiamo *nodo* in \mathbb{R}^n un'inclusione differenziabile di S^1 in \mathbb{R}^n ($n \geq 3$). Sciogliere un nodo $\nu : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ significa trovare un'isotopia di ν con il nodo banale

$$S^1 \ni e^{i\theta} \longrightarrow (\cos \theta, \sin \theta, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Sappiamo che ci sono in \mathbb{R}^3 nodi chiusi non scioglibili. Per il Teorema 31.7.7 tutti i nodi chiusi in \mathbb{R}^n con $n \geq 4$ sono scioglibili.

In generale, possiamo considerare delle *catene di m nodi*, o *m-link*, cioè inclusioni differenziabili

$$\lambda : \underbrace{S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{m \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Sciogliere una catena λ di m nodi vuol dire trovare un'isotopia di λ con la catena banale

$$\underbrace{S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{m \text{ volte}} \ni (e^{it})_j \longrightarrow (\cos \theta, \sin \theta, j, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Per il Teorema 31.7.7 tutte le catene di m nodi in uno spazio Euclideo \mathbb{R}^n , con $n \geq 4$, si possono sciogliere.

31.8. Isotopie dello spazio ambiente

Due inclusioni differenziabili $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ possono essere isotope senza che i complementi $N \setminus f_0(M)$ ed $N \setminus f_1(M)$ siano omeomorfi. Un semplice esempio è l'inclusione in \mathbb{R}^2 di un segmento aperto e di una circonferenza privata di un punto. Introduciamo una nozione più restrittiva di isotopia:

DEFINIZIONE 31.8.1. Un'*isotopia ambientale* tra due inclusioni differenziabili $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ è un'isotopia $F \in \mathcal{C}^\infty(N \times [0, 1], N)$ di diffeomorfismi di N tale che

$$\begin{cases} F_0(q) = q, & \forall q \in N, \\ F_1(f_0(p), 1) = f_1(p), & \forall p \in M. \end{cases}$$

Diremo allora che f_0 ed f_1 sono *isotope nello spazio ambiente* o *ambientalmente isotope*.

In generale l'isotopia ambientale, che implica l'omeomorfismo dei complementi delle immagini, è più restrittiva dell'isotopia. Le due relazioni coincidono per le inclusioni differenziabili di varietà compatte. Vale infatti il seguente²:

TEOREMA 31.8.2 (R. Thom). *Sia $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N)$ un'isotopia di inclusioni differenziabili di una varietà M in una varietà N . Per ogni compatto K contenuto in M esiste un'isotopia $G \in \mathcal{C}^\infty(N \times I, N)$ dell'identità su N tale che*

$$G(f_0(p), 1) = f_1(p), \quad \forall p \in K.$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ con $F_t = f_0$ per $t \leq 0$ ed $F_t = f_1$ per $t \geq 1$. Definiamo $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$ mediante

$$\tilde{F}(p, t) = (F(p, t), t) \in N \times \mathbb{R}, \quad \text{per } p \in M, \quad t \in \mathbb{R}.$$

L'immagine $\tilde{M} = \tilde{F}(M \times \mathbb{R})$ è una sottovarietà differenziabile di $N \times \mathbb{R}$. Consideriamo il campo di vettori $(X, \partial/\partial t) = d\tilde{F}(\partial/\partial t)$, con $X \in \Gamma(\tilde{M}, TN)$, su \tilde{M} . Il supporto di X è contenuto in $\tilde{F}(M \times [0, 1])$. Possiamo trovare allora un campo di vettori $(Y, \partial/\partial t) \in \mathfrak{X}(N \times \mathbb{R})$, con

$$Y \in \Gamma(N \times \mathbb{R}, TN), \quad \text{supp } Y \subseteq N \times \mathbb{R},$$

$$Y = X \quad \text{su } \tilde{F}(K \times [0, 1]).$$

Il campo $(Y, \partial/\partial t)$ è completo e quindi genera un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di $N \times \mathbb{R}$ che preservano i livelli. Ad esso corrisponde quindi un'isotopia dello spazio ambiente che trasforma f_0 in f_1 . \square

OSSERVAZIONE 31.8.3. Il teorema 31.8.2 ci dice che inclusioni isotope di una varietà compatta sono ambientalmente isotope. Questo non è vero in generale per inclusioni di una varietà M non compatta.

Consideriamo ad esempio due nodi $\nu_0, \nu_1 : S^1 \rightarrow S^3$ con $\nu_0(-1) = \nu_1(-1) = (0, 0, 1)$. Le loro restrizioni $f_0, f_1 : S^1 \setminus \{-1\} \rightarrow S^3 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ sono isotope, ma possono non essere ambientalmente isotope.

COROLLARIO 31.8.4. *Se M è una varietà connessa, per ogni coppia di punti $p_0, p_1 \in M$ esiste un'isotopia $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], M)$ dell'identità su M con $F(p_0, 1) = p_1$.* \square

COROLLARIO 31.8.5. *Ogni inclusione differenziabile $f \in \mathcal{C}^\infty(S^m, S^n)$, con $n \geq 2m+2$, si estende ad una inclusione differenziabile $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(D^{m+1}, S^n)$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $n > m$, f è omotopa all'inclusione differenziabile standard

$$\iota : S^m \ni (x^0, \dots, x^m) \longrightarrow (x^0, \dots, x^m, 0, \dots, 0) \in S^n.$$

Questa si estende all'inclusione differenziabile

$$D^{m+1} \ni (x^0, \dots, x^m) \longrightarrow (x^0, \dots, x^m, \sqrt{1 - |x^0|^2 - \dots - |x^m|^2}, 0, \dots, 0) \in S^n.$$

Per il Teorema 31.7.7, f e ι sono isotope e per il Teorema 31.8.2 lo sono con un'isotopia dello spazio ambiente. Ne segue che anche f si estende ad un'inclusione differenziabile di D^{m+1} . \square

²RÉNÉ THOM: *La classification des immersions*, Sémin. Bourbaki **157**, 1957-58

31.9. k -celle differenziabili

In questo paragrafo esponiamo alcuni risultati³ relativi alle applicazioni differenziabili di dischi.

Premettiamo un'osservazione sulle applicazioni differenziabili.

LEMMA 31.9.1. *Siano M, N due varietà differenziabili, di dimensione m, n , rispettivamente, e $\phi \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$ un'applicazione differenziabile. Se K è un compatto di N tale che*

- (1) $\phi|_K$ sia iniettiva;
- (2) $d\phi(q) : T_q N \rightarrow T_{\phi(q)} M$ sia iniettiva per ogni $q \in K$,

allora esiste un intorno aperto U di K in N tale che $\phi|_U$ sia un'inclusione differenziabile.

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando il teorema d'immersione di Whitney, possiamo ridurci al caso in cui $M = \mathbb{R}^m$ ed N sia una sottovarietà propria di uno spazio euclideo \mathbb{R}^ℓ . In particolare, possiamo considerare l'aggiunta $d\phi^*(q)$ dell'applicazione $d\phi(q) : T_q N \rightarrow T_{\phi(q)} \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^\ell$, rispetto al prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^m e a quello indotto su $T_q N$ dalla restrizione del prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^ℓ . La composta $d\phi^*(q) \circ d\phi(q)$ è un endomorfismo iniettivo di $T_q N$ ed abbiamo perciò, nella norma degli operatori, $\inf_K \|d\phi^*(q) \circ d\phi(q)\|^2 = \mu > 0$. Per continuità otteniamo che esiste un intorno relativamente compatto W di K in N tale che $\|d\phi^*(q) \circ d\phi(q)\|^2 \geq (\mu/2) > 0$ per ogni $q \in \bar{W}$. Allora, applicando l'argomento del Lemma 30.2.4 del Capitolo XXX ad un numero finito di carte coordinate che ricoprono \bar{W} , otteniamo che esistono costanti positive δ, c tali che

$$|\phi(q_1) - \phi(q_2)| \geq c|q_1 - q_2|, \quad \forall q_1, q_2 \in \bar{W} \quad \text{con } |q_1 - q_2| \leq \delta.$$

Questo segue dal fatto che la distanza euclidea su ciascun sottoinsieme compatto di una carta coordinata è equivalente alla restrizione della distanza euclidea su \mathbb{R}^ℓ .

Consideriamo ora il compatto $F = \{(q_1, q_2) \in \bar{W} \times \bar{W} \mid |q_1 - q_2| \geq \delta\}$. La funzione reale

$$\gamma(q_1, q_2) = \frac{|\phi(q_1) - \phi(q_2)|}{|q_1 - q_2|}$$

è definita e continua su F ed è positiva nei punti di $F \cap (K \times K)$. Essa sarà allora ancora positiva in tutti i punti di un intorno A di $F \cap (K \times K)$ in F . L'insieme

$U = K \cup \overset{\circ}{(\pi_1(A) \cap \pi_2(A))}$ è un intorno aperto di K in N , tale che la restrizione ad U di ϕ sia un'inclusione differenziabile. \square

NOTAZIONE 31.9.2. Se A è un qualsiasi sottoinsieme della varietà differenziabile N , indicheremo con $\mathcal{C}^\infty(A, M)$ l'insieme di tutte le funzioni continue $f : A \rightarrow M$ per cui esista un intorno aperto U di A in N ed un'applicazione differenziabile $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(U, M)$ tale che $\tilde{f}|_A = f$.

DEFINIZIONE 31.9.3. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m e k un intero con $0 \leq k \leq m$. Una k -cella differenziabile di M è un'inclusione differenziabile $\phi \in \mathcal{C}^\infty(D^k, M)$.

³Richard S. Palais, *Extending diffeomorphisms*. Proc. Amer. Math. Soc. **11**, 1960 pp. 274-277

L'applicazione ϕ è cioè un'inclusione topologica ed è la restrizione a $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x| \leq 1\}$ di un'applicazione di classe \mathcal{C}^∞ , definita su un intorno aperto U di D^k in \mathbb{R}^k , ed a valori in M , con differenziale iniettivo in ogni punto di D^k .

Per il Lemma 31.9.1 la ϕ è la restrizione dell'inclusione differenziabile di un disco aperto $B(r)$, con $r > 1$, in M .

Vale il

TEOREMA 31.9.4 (estensione ad un' n -cella). *Se $\phi \in \mathcal{C}^\infty(D^k, M)$ è una k -cella di M , con $0 \leq k < m$, ed U un intorno aperto di $\phi(D^k)$ in M , allora esiste una n -cella $\psi \in \mathcal{C}^\infty(D^m, M)$, con $\psi|_{D^k} = \phi$ e $\psi((D^m) \subset U)$.*

Se M è orientata, possiamo scegliere ψ in modo che mantenga l'orientazione.

DIMOSTRAZIONE. Il teorema è una conseguenza del Corollario 32.6.4 del Capitolo XXXII. \square

Vale allora il

TEOREMA 31.9.5 (Transitività). *Se $\phi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(D^k, M)$ sono due k -celle differenziabili di M , allora esiste un diffeomorfismo $F \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$ tale che $\psi = F \circ \phi$.*

Se M è orientata, e o $k < m$, oppure $k = m$ e le due celle sono equi-orientate, allora possiamo scegliere il diffeomorfismo F in modo che mantenga l'orientazione.

OSSERVAZIONE 31.9.6. Il diffeomorfismo F del Teorema 31.9.5 può essere scelto isotopo all'identità, in un'isotopia costante al di fuori di un compatto di M .

TEOREMA 31.9.7 (di estensione). *Se $\phi \in \mathcal{C}^\infty(D^k, M)$ è una k -cella differenziabile in M ed f un'inclusione differenziabile di un intorno di $\phi(D^k)$ in M , allora esiste un diffeomorfismo F di M in sé, uguale ad f in un intorno di $\phi(D^k)$.*

Se M è orientabile e ϕ ed f preservano l'orientazione, allora si può ottenere una F che preservi l'orientazione e sia isotopa all'identità in un'isotopia costante al di fuori di un sottoinsieme compatto.

Fibrati vettoriali

32.1. Fibrati differenziabili

Il *fibrato tangente* è un esempio della struttura più generale di *fibrato vettoriale* che definiamo ed esaminiamo in questo paragrafo. A loro volta, i fibrati vettoriali sono particolari fibrati differenziabili localmente banali:

DEFINIZIONE 32.1.1. Un fibrato differenziabile ξ è il dato di una varietà differenziabile $E = E(\xi)$, che si dice il suo *spazio totale*, di una varietà differenziabile $B = B(\xi)$, che si dice la sua *base*, e di una sommersione differenziabile $\pi = \pi_\xi : E \rightarrow B$, che si dice la sua *proiezione sulla base*.

Per ogni punto $p \in B$, l'insieme $E_p = E_p(\xi) = \pi^{-1}(p)$ è una sottovarietà differenziabile di E , che si dice la *fibra* di ξ su p .

DEFINIZIONE 32.1.2. Diciamo che un fibrato differenziabile ξ è *localmente banale con fibra tipica* F se

- (a) F è una varietà differenziabile;
- (b) per ogni $p \in B$ esistono un intorno aperto U di p in B ed un'applicazione $\phi_U \in \mathcal{C}^\infty(\pi^{-1}(U), F)$ che renda commutativo il diagramma

$$(32.1) \quad \begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\pi \times \phi_U} & U \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_U \\ & U & \end{array}$$

Un diffeomorfismo ϕ_U che renda commutativo il diagramma (32.1) si dice una *trivializzazione* di ξ su U .

Un *atlante di trivializzazione* di ξ è una collezione $\mathcal{A} = \{(U_a, \phi_a) \mid a \in A\}$ di aperti U_a di B e di trivializzazioni locali

$$E|_{U_a} = \pi^{-1}(U_a) \ni q \longrightarrow (\pi(q), \phi_U(q)) \in U_a \times F,$$

con $B = \bigcup_{a \in A} U_a$.

A volte scriveremo $E \xrightarrow{\pi} B$ per il fibrato differenziabile ξ con $E(\xi) = E$, $B(\xi) = B$ e $\pi_\xi = \pi$. La notazione $E \xrightarrow[F]{\pi} B$ significherà che, inoltre, il fibrato ξ è localmente banale, con fibra tipica F .

DEFINIZIONE 32.1.3. Una *sezione differenziabile* di ξ su un aperto U di $B(\xi)$ è un'applicazione $s \in \mathcal{C}^\infty(U, E(\xi))$ tale che $\pi(\xi) \circ s(x) = x$ per ogni $x \in U$. L'insieme

di tutte le sezioni differenziabili di ξ su U si indica con

$$(32.2) \quad \Gamma_{\xi}(U, E) = \{s \in \mathcal{C}^{\infty}(U, E(\xi)) \mid \pi(\xi) \circ s(p) = p, \forall p \in U\}.$$

LEMMA 32.1.4. *Sia ξ un fibrato differenziabile, $\tau_0 \in E(\xi)$ e $p_0 = \pi_{\xi}(\tau_0)$. Allora esistono un intorno aperto U di p_0 in $B(\xi)$ ed una sezione $s \in \Gamma_{\xi}(U, E(\xi))$ con $s(p_0) = \tau_0$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché π_{ξ} è una sommersione differenziabile in tutti i punti di $E(\xi)$, la tesi segue dal teorema delle funzioni implicite. \square

PROPOSIZIONE 32.1.5 (un criterio di banalità locale). *Siano E e B varietà differenziabili, con B connessa. Allora ogni sommersione differenziabile propria $\pi : E \rightarrow B$ definisce un fibrato differenziabile localmente banale.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che il fatto che π sia propria significa che π è continua, chiusa, e che $\pi^{-1}(K)$ è compatto in E per ogni compatto K di B .

Fissiamo un punto $p_0 \in B$. L'insieme $E_{p_0} = \pi^{-1}(p_0)$ è una sottovarietà compatta di E . Essa è un retratto differenziabile d'intorno. Possiamo trovare cioè un intorno aperto W di E_{p_0} in E ed un'applicazione differenziabile $r : W \rightarrow E_{p_0}$ con $r(v) = v$ per ogni $v \in E_{p_0}$. Poiché $\pi(E \setminus W)$ è un chiuso di B che non contiene p_0 , possiamo supporre che W sia un aperto della forma $W = \pi^{-1}(U_0)$, per un intorno aperto U_0 di p_0 in B . Possiamo allora definire

$$\Phi : E_{U_0} = \pi^{-1}(U_0) \ni v \rightarrow (\pi(v), r(v)) \in U_0 \times E_{p_0}.$$

Poiché π è una sommersione differenziabile, la Φ è un diffeomorfismo locale in tutti i punti $v \in E_{p_0}$. L'insieme dei punti di E_{U_0} in cui Φ è un diffeomorfismo locale è un aperto. Quindi, a meno di sostituire ad U_0 un intorno più piccolo di p_0 in B , possiamo supporre che la Φ sia un diffeomorfismo locale in tutti i punti di E_{U_0} .

Dico che esiste un intorno aperto U di p_0 in U_0 tale che

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \ni v \rightarrow \Phi(v) = (\pi(v), r(v)) \in U \times E_{p_0}$$

sia un diffeomorfismo.

Indichiamo con $\text{pr}_2 : U_0 \times E_{p_0} \rightarrow E_{p_0}$ la proiezione sul secondo fattore. L'insieme dei punti $p \in U_0$ tali che $\text{pr}_2(\Phi(E_p)) = E_{p_0}$ è un intorno aperto di p_0 . Possiamo quindi supporre, a meno di sostituire ad U_0 un intorno più piccolo di p_0 , che la Φ sia un diffeomorfismo locale surgettivo.

Ci resta da verificare che, se U è sufficientemente piccolo, la ϕ_U è anche iniettiva. A questo scopo osserviamo che, poiché Φ è un diffeomorfismo locale, l'insieme $Q = \{(v, w) \in E_{U_0} \times E_{U_0} \mid v \neq w, \Phi(v) = \Phi(w)\}$ è in $E_{U_0} \times E_{U_0}$ un chiuso disgiunto da $E_{p_0} \times E_{p_0}$. Sia infatti $\{U_{\nu} \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ un sistema fondamentale di interni relativamente compatti di p_0 in U_0 , con $U_{\nu+1} \Subset U_{\nu}$ per ogni intero $\nu \geq 0$. Per la proprietà dell'intersezione finita, esisterà un indice ν_1 tale che $\pi^{-1}(\bar{U}_{\nu_1}) \times \pi^{-1}(\bar{U}_{\nu_1})$ non intersechi Q .

Per completare la dimostrazione, basterà osservare che le fibre $E_p = \pi^{-1}(p)$ sono tutte diffeomorfe tra loro. Ciò segue dalla connessione di B e dal fatto che dalla prima parte della dimostrazione si ricava che, fissato un punto $p_0 \in B$, l'insieme dei $p \in B$ per cui la fibra E_p è diffeomorfa ad E_{p_0} è aperto e chiuso in B . \square

PROPOSIZIONE 32.1.6. Sia ξ un fibrato differenziabile ed M una sottovarietà differenziabile di $B(\xi)$. Definiamo

$$(32.3) \quad E|_M = \pi_\xi^{-1}(M), \quad \pi|_M : E|_M \ni \tau \rightarrow \pi_\xi(\tau) \in M.$$

Allora $\xi|_M = (E|_M \xrightarrow{\pi|_M} M)$ è un fibrato differenziabile con base M . \square

DEFINIZIONE 32.1.7. Il fibrato $\xi|_M$ descritto nella Proposizione 32.1.6 si dice la *restrizione ad M* del fibrato ξ .

PROPOSIZIONE 32.1.8. Se ξ e ζ sono fibrati differenziabili, allora, posto

$$\begin{aligned} E(\xi \times \zeta) &= E(\xi) \times E(\zeta), \\ B(\xi \times \zeta) &= B(\xi) \times B(\zeta), \\ \pi_{\xi \times \zeta} : E(\xi \times \zeta) \ni (\alpha, \beta) &\rightarrow (\pi_\xi(\alpha), \pi_\zeta(\beta)) \in B(\xi \times \zeta), \end{aligned}$$

$\xi \times \zeta = (E(\xi \times \zeta) \xrightarrow{\pi_{\xi \times \zeta}} B(\xi \times \zeta))$ è un fibrato differenziabile.

Se ξ e ζ sono localmente banali con fibre tipiche $F(\xi)$ ed $F(\zeta)$ rispettivamente, allora anche $\xi \times \zeta$ è localmente banale, con fibra tipica $F(\xi) \times F(\zeta)$.

DEFINIZIONE 32.1.9. Il fibrato differenziabile $\xi \times \zeta$ descritto nella Proposizione 32.1.8 si dice *prodotto cartesiano* dei fibrati ξ e ζ .

PROPOSIZIONE 32.1.10 (pullback). Sia ξ un fibrato differenziabile, M una varietà differenziabile ed $f : M \rightarrow B(\xi)$ un'applicazione differenziabile. Poniamo

$$\begin{aligned} E(f^*\xi) &= \{(p, \tau) \in M \times E(\xi) \mid f(p) = \pi_\xi(\tau)\}, \\ \pi(f^*\xi) : E \ni (p, \tau) &\longrightarrow p \in M. \end{aligned}$$

Allora $f^*\xi = (E(f^*\xi) \xrightarrow{\pi(f^*\xi)} M)$ è un fibrato differenziabile con base M .

Se ξ è localmente banale con fibra tipica F , anche $f^*\xi$ è localmente banale con fibra tipica F .

DEFINIZIONE 32.1.11. Il fibrato $f^*\xi$ descritto nella Proposizione 32.1.10 si dice *immagine inversa*, o *pullback*, di ξ mediante l'applicazione f .

DEFINIZIONE 32.1.12. Siano ξ_1 e ξ_2 due fibrati differenziabili sulla stessa base $B(\xi_1) = B(\xi_2) = M$. Chiamiamo *somma di Whitney* dei fibrati ξ_1 e ξ_2 , ed indichiamo con $\xi_1 \oplus_M \xi_2$, l'immagine inversa del fibrato $\xi_1 \times \xi_2$ mediante l'immersione canonica $\iota : M \ni p \rightarrow (p, p) \in M \times M$ di M nella diagonale di $M \times M$.

Abbiamo, in modo canonico,

$$\begin{aligned} E(\xi_1 \oplus_M \xi_2) &\simeq \{(\tau_1, \tau_2) \in E(\xi_1) \times E(\xi_2) \mid \pi(\xi_1)(\tau_1) = \pi(\xi_2)(\tau_2)\}, \\ \pi(\xi_1 \oplus_M \xi_2)(\tau_1, \tau_2) &= \pi(\xi_1)(\tau_1) = \pi(\xi_2)(\tau_2), \quad \forall (\tau_1, \tau_2) \in E(\xi_1 \oplus_M \xi_2). \end{aligned}$$

Osserviamo che, per le Proposizioni 32.1.6, 32.1.8, 32.1.10, se ξ_1 e ξ_2 sono localmente banali con fibre tipiche F_1 ed F_2 rispettivamente, la loro somma di Whitney $\xi_1 \oplus_M \xi_2$ è ancora localmente banale, con fibra tipica $F_1 \times F_2$.

DEFINIZIONE 32.1.13. Siano ξ_1 e ξ_2 due fibrati differenziabili. Un morfismo di fibrati differenziabili $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è il dato di una coppia di applicazioni differenziabili $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ e $\phi : B(\xi_1) \rightarrow B(\xi_2)$ che rendano commutativo il diagramma

$$(32.4) \quad \begin{array}{ccc} E(\xi_1) & \xrightarrow{f} & E(\xi_2) \\ \pi(\xi_1) \downarrow & & \downarrow \pi(\xi_2) \\ B(\xi_1) & \xrightarrow{\phi} & B(\xi_2). \end{array}$$

Abbiamo

LEMMA 32.1.14. Siano ξ_1 e ξ_2 due fibrati differenziabili.

Se $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ è un'applicazione differenziabile ed

$$f(E(\xi_1)_p) \subset E(\xi_2)_{f(p)}, \quad \forall p \in B(\xi_1),$$

allora esiste un unico morfismo di fibrati differenziabili $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ che induca f sugli spazi totali.

DIMOSTRAZIONE. L'unicità è ovvia, in quanto la ϕ si ottiene per passaggio al quoziente rispetto alle proiezioni sulle basi. Per dimostrare che ϕ è differenziabile, basta osservare che, se $s \in \Gamma_{\xi_1}(U, E(\xi_1))$ per un aperto U di $B(\xi_1)$, allora $\phi|_U = \pi(\xi_2) \circ s$, onde ϕ è differenziabile su U . \square

PROPOSIZIONE 32.1.15. Sia $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ un morfismo di fibrati differenziabili. Se $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ è un diffeomorfismo, anche $\phi : B(\xi_1) \rightarrow B(\xi_2)$ è un diffeomorfismo, e la $(f^{-1}, \phi^{-1}) : \xi_2 \rightarrow \xi_1$ è un morfismo di fibrati differenziabili.

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente ϕ è bigettiva. Se W è un aperto di $B(\xi_2)$ ed $s_2 \in \Gamma_{\xi_2}(W, E(\xi_2))$, allora $\phi^{-1}|_W = f^{-1} \circ s_2$ dimostra che ϕ^{-1} è anche differenziabile. \square

DEFINIZIONE 32.1.16. Un isomorfismo di fibrati differenziabili è un morfismo $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ per cui $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ sia un diffeomorfismo.

Un isomorfismo di fibrati differenziabili $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ con $B(\xi_1) = B(\xi_2) = M$ e $\phi = \text{id}_M$ si dice un'equivalenza.

32.2. Fibrati vettoriali differenziabili

DEFINIZIONE 32.2.1. Un fibrato vettoriale differenziabile di rango n è il dato di un fibrato differenziabile $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$ di rango n e di una struttura di spazio vettoriale reale di dimensione n su ogni fibra $E_x := \pi^{-1}(x)$, compatibile con la struttura differenziabile. Ciò significa che le applicazioni

$$\begin{cases} E \oplus_M E \ni (v, w) \rightarrow v + w \in E, \\ \mathbb{R} \times E \ni (k, v) \rightarrow k \cdot v \in E \end{cases}$$

sono differenziabili.

PROPOSIZIONE 32.2.2. *Ogni fibrato vettoriale differenziabile di rango n è localmente banale con fibra tipica \mathbb{R}^n .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$ un fibrato differenziabile vettoriale di rango n . Dato un punto $p_0 \in B$, fissiamo una \mathbb{R} -base e_1, \dots, e_n di E_{p_0} . Per il Lemma 32.1.4 possiamo trovare un intorno aperto U di p_0 in B e sezioni $\eta_i \in \Gamma_\xi(U, E)$ con $\eta_i(p_0) = e_i$ per $i = 1, \dots, n$. Per continuità, l'insieme U_0 dei punti p di U in cui $\eta_1(p), \dots, \eta_n(p)$ sono ancora linearmente indipendenti è un intorno aperto di p_0 in B . Allora la

$$U_0 \times \mathbb{R}^n \ni (p; v^1, \dots, v^n) \longrightarrow \sum_{i=1}^n v^i \eta_i(p) \in \pi^{-1}(U_0)$$

è una trivializzazione locale differenziabile di ξ in un intorno aperto del punto p_0 . \square

Se V, W sono spazi vettoriali reali della stessa dimensione n , indichiamo con $\text{Iso}_{\mathbb{R}}(V, W)$ l'insieme degli isomorfismi \mathbb{R} -lineari di V in W .

DEFINIZIONE 32.2.3. Una *trivializzazione locale di un fibrato vettoriale differenziabile* $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ è una trivializzazione locale

$$(32.5) \quad \phi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow E|_U$$

di ξ compatibile con la struttura lineare, che sia cioè lineare sulle fibre.

Potremo quindi scrivere¹

$$(32.6) \quad \phi(p, v) = \phi(p)v, \quad \text{con } \sigma(p) \in \text{Iso}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, E_p) \quad \forall p \in U.$$

Un *atlante di trivializzazione* di un fibrato vettoriale differenziabile ξ è un atlante di trivializzazione di ξ in cui tutte le trivializzazioni locali siano compatibili con la struttura lineare.

Chiameremo *funzioni di transizione* dell'atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ del fibrato vettoriale differenziabile $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$, le applicazioni² $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}))$, definite da

$$(32.7) \quad g_{\alpha\beta}(p) = \phi_\alpha(p)^{-1} \circ \phi_\beta(p), \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$$

si dicono le *funzioni di transizione* dell'atlante \mathcal{A} .

32.3. Morfismi e operazioni di fibrati vettoriali

Siano ξ_1 e ξ_2 due fibrati vettoriali differenziabili.

DEFINIZIONE 32.3.1. Un morfismo di fibrati differenziabili $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ si dice un *morfismo di fibrati vettoriali reali differenziabili* se è lineare sulle fibre, se cioè per ogni $p \in B(\xi_1)$ l'applicazione $E(\xi_1)_p \ni v \rightarrow f(v) \in E(\xi_2)_{\phi(p)}$ è lineare.

Se inoltre la $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ è un diffeomorfismo, allora anche $(f^{-1}, \phi^{-1}) : \xi_2 \rightarrow \xi_1$ è un morfismo di fibrati vettoriali differenziabili.

¹Le $p \rightarrow \phi(p)$ sono *sezioni* del fibrato vettoriale $\xi \otimes_B \xi^*$, che sarà definito nel paragrafo successivo.

²Osserviamo che $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ è un aperto di \mathbb{R}^{n^2} , e quindi una varietà differenziabile di dimensione n^2 .

In questo caso diremo che $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è un *isomorfismo di fibrati vettoriali reali differenziabili*.

Se, ancora, $B(\xi_1) = B(\xi_2) = M$ e $\phi = \text{id}_M$, diremo che la $(f, \text{id}_M) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è un' *equivalenza di fibrati vettoriali reali*.

Dire che un fibrato differenziabile ξ di rango n è *trivializzabile* equivale dunque a dire che è isomorfo al fibrato differenziale triviale $B(\xi) \times V$, con V spazio vettoriale reale di dimensione n .

Le costruzioni dell'algebra lineare si estendono in modo naturale ai fibrati vettoriali.

Fibrato duale. Sia $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$ un fibrato vettoriale reale di rango n . Sia

$$E^* = \bigsqcup_{p \in B} E_p^*$$

l'unione disgiunta dei duali degli spazi vettoriali E_p , al variare di p nella base B .

Indichiamo ancora con $\pi : E^* \rightarrow B$ l'applicazione che associa il punto $p \in B$ ad $\eta \in E_p^* \subset E^*$.

Se $\mathcal{A} = \{(U_a, \psi_a) \mid a \in A\}$ è un atlante di trivializzazione per ξ , per ogni punto $p \in U_a$ la

$$\psi_a(p) : \mathbb{R}^n \ni v \rightarrow \psi_a(p, v) \in E_p$$

è un isomorfismo lineare. La sua trasposta $(\psi(p))^* : E_p^* \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$ è ancora un isomorfismo lineare.

Possiamo così definire su $\xi^* = E^* \xrightarrow{\pi} B$ un'unica struttura di fibrato vettoriale differenziabile, per cui $\mathcal{A}^* = \{(U_a, \psi_a^*) \mid a \in A\}$, ove

$$\psi_a^* : U_a \times \mathbb{R}^n \ni (p, v^*) \rightarrow [(\psi_a(p))^*]^{-1} v^* \in E^*|_{U_a},$$

sia un atlante di trivializzazione.

DEFINIZIONE 32.3.2. Dato un fibrato vettoriale differenziabile ξ , il fibrato vettoriale differenziabile ξ^* definito sopra si dice il *fibrato duale* di ξ .

PROPOSIZIONE 32.3.3. *Ogni fibrato vettoriale è equivalente al suo fibrato duale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia ξ un fibrato vettoriale di rango n ed $\mathcal{A} = \{(U_a, \psi_a) \mid a \in A\}$ un suo atlante di trivializzazione. Sia $\{\phi_a\}$ una partizione dell'unità subordinata ad $\{U_a \mid a \in A\}$ con $\phi_a \in \mathcal{C}^\infty(B(\xi))$ e $\phi_a \geq 0$ su $B(\xi)$. Definiamo un prodotto scalare sulle fibre di ξ mediante

$$(v_1 | v_2) = \sum_{p \in U_a} \phi_a(p) \cdot (\text{pr}_{\mathbb{R}^n}(\psi_a(v_1)) | \text{pr}_{\mathbb{R}^n}(\psi_a(v_2)))_{\mathbb{R}^n},$$

$$\forall p \in B(\xi), \forall v_1, v_2 \in E(\xi)_p.$$

Il prodotto scalare definisce un isomorfismo (di Riesz) $\rho_p : E_p \rightarrow E_p^*$ per ogni $p \in M$, che ci dà un'equivalenza $(\rho, \text{id}_B) : \xi \rightarrow \xi^*$. \square

DEFINIZIONE 32.3.4. Sia M una varietà differenziabile e $TM \xrightarrow{\pi} M$ il suo fibrato tangente. Il fibrato duale $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ del fibrato tangente si dice il *fibrato cotangente* su M .

Somma diretta. Se ξ_1, ξ_2 sono fibrati vettoriali, di ranghi n_1 ed n_2 rispettivamente, allora il prodotto $\xi_1 \times \xi_2$ ha una struttura naturale di fibrato vettoriale di rango $n_1 + n_2$, con fibra sopra il punto $(p_1, p_2) \in B(\xi_1) \times B(\xi_2)$ uguale allo spazio vettoriale somma diretta $E(\xi_1)_{p_1} \oplus E(\xi_2)_{p_2}$.

Se ξ_1 e ξ_2 hanno la stessa base $B(\xi_1) = B(\xi_2) = M$, allora la somma di Whitney $\xi_1 \oplus_M \xi_2$ è un fibrato vettoriale differenziabile di rango $n_1 + n_2$.

Prodotto tensoriale. Dati due fibrati vettoriali differenziabili ξ_1, ξ_2 , di ranghi n_1 ed n_2 rispettivamente, con basi $B(\xi_1) = B_1$ e $B(\xi_2) = B_2$, definiamo il loro *prodotto tensoriale* $\xi_1 \otimes \xi_2$ come il fibrato vettoriale differenziabile di rango $n_1 n_2$ con base $B_1 \times B_2$ e fibra su $E(\xi_1)_{p_1} \otimes_{\mathbb{R}} E(\xi_2)_{p_2}$ sul punto $(p_1, p_2) \in B_1 \times B_2$. Se $B_1 = B_2 = M$, indichiamo con $\xi \otimes_M \xi_2$ l'immagine inversa di $\xi_1 \otimes \xi_2$ rispetto all'immersione $p \rightarrow (p, p)$ di M nella diagonale di $M \times M$. Esso si dice *prodotto di Whitney* dei fibrati ξ_1 e ξ_2 .

Fibrati tensoriali. Le operazioni di somme dirette, prodotti tensoriali, somme e prodotti di Whitney di fibrati vettoriali differenziabili sono associative e commutative, a meno di equivalenze.

In particolare, fissati due interi non negativi r, s possiamo definire, a partire da un fibrato vettoriale reale $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$ di rango n , un fibrato vettoriale differenziabile $\tau^{r,s}(\xi)$ sulla stessa base B , di rango $n(r + s)$, con spazio totale

$$\mathcal{T}^{r,s}(E) = \bigsqcup_{p \in B} \underbrace{E_p \otimes \cdots \otimes E_p}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{E_p^* \otimes \cdots \otimes E_p^*}_{s \text{ volte}}$$

Possiamo descrivere la sua struttura di fibrato vettoriale differenziabile a partire da un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_a, \psi_a) \mid a \in A\}$ di ξ . L'atlante corrispondente $\mathcal{T}^{r,s}\mathcal{A} = \{(U_a, \psi_a^{(r,s)}) \mid a \in A\}$ di $\tau^{r,s}(\xi)$ consiste delle carte

$$U_a \times (\mathbb{R}^n)^{\otimes r} \otimes (\mathbb{R}^n)^{\otimes s} \ni (p, t, \sigma) \rightarrow (\psi_a(p))^{\otimes r} t \otimes ([\psi_a(p)^*]^{-1})^{\otimes s} \sigma \in \mathcal{T}^{r,s}(E)|_{U_a}.$$

Il fibrato vettoriale $\tau^{r,s}(\xi)$ ha rango $n(r + s)$ e si dice la *potenza tensoriale r -covariante ed s -controvariante* di ξ .

DEFINIZIONE 32.3.5. Se M è una varietà differenziabile di dimensione m , il fibrato $\tau^{r,s}(TM \xrightarrow{\pi} M)$ si indica con $T^{r,s}M \xrightarrow{\pi} M$ e si dice il fibrato dei tensori r -covarianti ed s -controvarianti su M .

32.4. Fibrati vettoriali e fibrato tangente

DEFINIZIONE 32.4.1. Sia $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato differenziabile. Il *fibrato verticale* su E è il nucleo del differenziale della proiezione sulla base:

$$(32.8) \quad VE = \{v \in TE \mid d\pi(v) = 0\}.$$

Supponiamo ora che $E \xrightarrow{\pi} M$ sia un fibrato vettoriale. Possiamo identificare M alla sezione nulla di E , mediante l'applicazione

$$(32.9) \quad \iota : M \ni x \rightarrow 0_x \in E.$$

Abbiamo allora

PROPOSIZIONE 32.4.2. *Ogni fibrato vettoriale $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$ è equivalente al pullback su M , mediante l'inclusione (32.9), del suo fibrato verticale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in M$ e $v \in E$. Associamo a v il vettore $\vec{v} \in V_{0,x}E$ definito da

$$\vec{v}f = \frac{d}{dt}f(tv)|_{t=0}.$$

Otteniamo così un'applicazione $E \rightarrow VE|_M = \iota^*(VE)$, che si verifica facilmente essere un'equivalenza di fibrati vettoriali. \square

PROPOSIZIONE 32.4.3. *Se $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$ è un fibrato vettoriale differenziabile, allora la restrizione di TE ad M (cioè il suo pullback mediante l'inclusione (32.9)) è equivalente alla somma diretta di TM e della restrizione ad M del fibrato verticale:*

$$(32.10) \quad TE|_M \simeq TM \oplus_M VE|_M. \quad \square$$

Utilizzando le proposizioni 32.4.2 e 32.4.3 ed il teorema d'immersione di Whitney otteniamo il

TEOREMA 32.4.4. *Sia $\xi_1 = E_1 \xrightarrow{\pi_1} M$ un fibrato vettoriale differenziabile. Possiamo allora trovare un fibrato vettoriale differenziabile $\xi_2 = E_2 \xrightarrow{\pi_2} M$ sulla stessa base M tale che la somma di Whitney $\xi_1 \oplus_M \xi_2$ sia equivalente ad un fibrato banale.*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema d'immersione di Whitney possiamo trovare un diffeomorfismo $\Phi : E_1 \rightarrow Q \subset \mathbb{R}^\ell$ tra E_1 ed una sottovarietà differenziabile propria Q di uno spazio Euclideo \mathbb{R}^ℓ . Per ogni punto $y \in Q$ identifichiamo lo spazio tangente T_yQ ad un sottospazio dello spazio Euclideo \mathbb{R}^ℓ . Definiamo quindi il fibrato vettoriale NQ mediante

$$(32.11) \quad NQ = \{(y, w) \in Q \times \mathbb{R}^\ell \mid w \perp T_yQ\}.$$

In ogni punto y di Q abbiamo allora

$$T_y\mathbb{R}^\ell \simeq \mathbb{R}^\ell = T_yQ \oplus N_yQ.$$

D'altra parte, se $x \in M$, nel punto $y = \Phi(x) \in \Phi(M) \subset Q$, abbiamo

$$T_yQ = d\Phi(T_xM) \oplus \Phi(V_xE_1),$$

da cui ricaviamo che

$$\begin{aligned} \Phi^*(T\mathbb{R}^\ell|_{\Phi(M)}) &\simeq VE_1|_M \oplus_M TM \oplus_M (\Phi^*NQ|_{\Phi(M)}) \\ &\simeq E_1 \oplus_M (TM \oplus_M (\Phi^*NQ|_{\Phi(M)})). \end{aligned}$$

Poiché $T\mathbb{R}^\ell \simeq \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$ è un fibrato banale, ed il pullback di un fibrato banale è ancora banale, questo completa la dimostrazione del teorema. \square

32.5. Norme differenziabili e strutture Euclidee

Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ un fibrato vettoriale. Indichiamo con 0_E la sua sezione nulla.

DEFINIZIONE 32.5.1. Una *norma differenziabile* su ξ è un'applicazione reale continua e non negativa $\| \cdot \|_E \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$ che goda delle proprietà:

$$(32.12) \quad \|q\|_E > 0 \quad \text{se} \quad q \notin 0_E,$$

$$(32.13) \quad \|kq\|_E = |k| \|q\|_E \quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall q \in E,$$

$$(32.14) \quad \|q_1 + q_2\|_E \leq \|q_1\|_E + \|q_2\|_E, \quad \forall p \in B, \forall q_1, q_2 \in E_p, \quad \| \cdot \|_E^2 \in \mathcal{C}^\infty(E).$$

DEFINIZIONE 32.5.2. Una *struttura Euclidea* su ξ è un'applicazione differenziabile

$$E \oplus_B E \ni (q_1, q_2) \longrightarrow (q_1|q_2)_E \in \mathbb{R}$$

bilineare simmetrica, definita positiva. Valgono cioè

$$(32.15) \quad (q_1, q_2)_E = (q_2|q_1)_E, \quad \forall (q_1, q_2) \in E \oplus_B E,$$

$$(32.16) \quad (q_1 + q_2, q_3)_E = (q_1|q_3)_E + (q_2|q_3)_E, \quad \forall p \in B, \forall q_1, q_2, q_3 \in E_p,$$

$$(32.17) \quad (kq_1|q_2)_E = k(q_1|q_2)_E, \quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall (q_1, q_2) \in E \oplus_B E,$$

$$(32.18) \quad (q|q)_E > 0 \quad \forall q \in E \setminus 0_E.$$

Osserviamo che, data una struttura Euclidea $(\cdot | \cdot)_E$ su ξ , la $\|q\|_E = \sqrt{(q|q)_E} \geq 0$ è una norma differenziabile su ξ .

L'esistenza di norme differenziabili è garantita quindi dalla

PROPOSIZIONE 32.5.3. *Ogni fibrato vettoriale ξ ammette una struttura Euclidea.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ un atlante di trivializzazione di ξ . Se ξ ha rango k , per ogni i la

$$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \ni q \longrightarrow (\pi(q), \phi_i(q)) \in U_i \times \mathbb{R}^k$$

è un'equivalenza di fibrati vettoriali. Se $\{\chi_i\} \subset \mathcal{C}^\infty(B)$ è una partizione dell'unità su B subordinata al ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$, la

$$(q_1|q_2)_E = \sum_{\pi(q_1) \in U_i} \chi_i(\pi(q_1)) (\phi_i(q_1)|\phi_i(q_2))_{\mathbb{R}^k}, \quad \forall (q_1, q_2) \in E \oplus_B E,$$

definisce una struttura Euclidea su ξ . □

DEFINIZIONE 32.5.4. Una struttura Euclidea sul fibrato tangente di una varietà M si dice una *struttura Riemanniana* su M .

32.6. Classi di isomorfismo di fibrati vettoriali

Ricordiamo che, se $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$ è un fibrato vettoriale differenziabile di rango k , con base M , data un'altra varietà differenziabile N ed un'applicazione differenziabile $f : N \rightarrow M$ di N nella base di ξ , il pullback $f^*\xi$ è il fibrato differenziabile di rango k su N , con spazio totale f^*E e proiezione π_f definiti da

$$(32.19) \quad \begin{cases} f^*E := E(f^*\xi) = \{(x, v) \in N \times E \mid \pi(v) = f(x)\}, \\ \pi_f := \pi(f^*\xi)(x, v) = x, \quad \forall (x, v) \in E(f^*\xi). \end{cases}$$

Se abbiamo una composizione di applicazioni differenziabili

$$M'' \xrightarrow{g} M' \xrightarrow{f} M$$

ed un fibrato vettoriale $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$ su M , allora

$$(f \circ g)^*\xi \equiv g^*f^*\xi$$

sono canonicamente equivalenti: infatti

$$E((f \circ g)^*\xi) = \{(x, v) \in M'' \times E \mid f(g(x)) = \pi(v)\},$$

$$E(g^*f^*\xi) = \{(x, (y, v)) \in M'' \times M' \times E \mid g(x) = y, f(y) = \pi(v)\}$$

e l'equivalenza è definita dall'applicazione $(x, (y, v)) = (x, (f(x), v)) \rightarrow (x, v)$.

Indichiamo con $\text{Vec}_k(M)$ la collezione delle classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali di rango k sulla varietà M . Possiamo considerarlo come un insieme puntato, ove il punto base è costituito dalla classe d'equivalenza del fibrato banale $M \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\pi_M} M$. L'osservazione che abbiamo fatto sopra si può esprimere mediante la

PROPOSIZIONE 32.6.1. *$\text{Vec}_k(\cdot)$ è un funtore dalla categoria delle varietà ed applicazioni differenziabili alla categoria degli spazi puntati e delle applicazioni che preservano i punti base.*

Abbiamo la

PROPOSIZIONE 32.6.2 (proprietà d'omotopia dei fibrati vettoriali). *Siano M ed N varietà differenziabili, con M compatta. Se $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ sono due applicazioni differenziabili omotope e $\xi = E \xrightarrow{\pi_N} N$ è un fibrato vettoriale su N , allora i fibrati $f_0^*\xi$ ed $f_1^*\xi$ sono isomorfi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $F : M \times I \ni (x, t) \rightarrow f_t(x) \in N$ un'omotopia di classe \mathcal{C}^∞ tra f_0 ed f_1 . Indichiamo con $\text{pr}_M : M \times I \ni (x, t) \rightarrow x \in M$ la proiezione sul primo fattore. Per dimostrare il teorema, sarà sufficiente verificare che, se per un $t_0 \in [0, 1]$ il fibrato $f_{t_0}^*\xi$ è isomorfo ad un fibrato vettoriale ζ su M , ciò è ancora vero per tutti i fibrati $f_t^*\xi$ con $t \in [0, 1]$ e $|t - t_0| < \epsilon$ per qualche $\epsilon > 0$.

Consideriamo sulla varietà compatta con bordo³ $M \times I$ i due fibrati vettoriali $F^*\xi$ e $\text{pr}_M^*\zeta$ e il fibrato principale $\text{Iso}(F^*\xi, \text{pr}_M^*\zeta)$, la cui fibra su (x, t) è l'insieme di tutti gli isomorfismi lineari $\lambda_x : E(f_t^*\xi)_x \rightarrow E(\zeta)_x$. Per ipotesi questo fibrato ha una sezione σ su $M \times \{t_0\}$. Il fibrato principale $\text{Iso}(f^*E, p_M^*F)$ è un aperto del fibrato vettoriale

$$\eta = \text{Hom}(F^*\xi, \text{pr}_M^*\zeta) = (\text{pr}_M^*\zeta)^* \otimes_{M \times I} F^*\xi.$$

La sezione σ si estende a una sezione globale $\tilde{\sigma}$ di η su $M \times I$. La $\tilde{\sigma}$ sarà ancora una sezione di $\text{Iso}(F^*\xi, \text{pr}_M^*\zeta)$ su un intorno aperto di $M \times t_0$. Per la compattezza di M , questo intorno conterrà $M \times t$ per tutti i $t \in [0, 1]$ con $|t - t_0| < \epsilon$ per qualche $\epsilon > 0$. \square

³Per evitare di utilizzare nella dimostrazione la varietà compatta a bordo $M \times I$, possiamo osservare che l'omotopia $F = (f_t) : M \times I \rightarrow N$ si estende ad un'applicazione differenziabile $\tilde{F} : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$, e ragionare sulla varietà differenziabile senza bordo $M \times \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE 32.6.3. La proposizione vale anche senza l'ipotesi di compattezza su M . Ricordiamo che tutte le varietà che consideriamo supponiamo siano *paracompatte*.

COROLLARIO 32.6.4. *Ogni fibrato vettoriale sopra una varietà contrattile è isomorfo al fibrato banale.*

ESEMPIO 32.6.5. $\text{Vec}_k(S^1)$ si può identificare alle classi di omotopia di applicazioni $f : \{\pm 1\} \rightarrow \mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$ che mandano il punto 1 in I_k . Esso consiste quindi di due punti se $k \geq 1$. Nel caso $k = 1$ i due fibrati corrispondono rispettivamente al cilindro (caso orientabile) e al nastro di Möbius (caso non orientabile).

32.7. Fibrati vettoriali sulle sfere

Decomponiamo la sfera

$$S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{h=0}^n x_h^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

nell'unione di due celle chiuse:

$$S^n = D_+^n \cup D_-^n, \quad \text{con} \quad D_+^n = \{x \in S^n \mid x_0 \geq 0\}, \quad D_-^n = \{x \in S^n \mid x_0 \leq 0\}.$$

Sia

$$S^{n-1} = D_+^n \cap D_-^n = \{x \in S^n \mid x_0 = 0\}.$$

Data un'applicazione continua $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$, possiamo definire un fibrato vettoriale di rango r su S^n incollando i fibrati banali $D_+^n \times \mathbb{R}^k$ e $D_-^n \times \mathbb{R}^k$ mediante la funzione d'incollamento che associa ad $(x, v) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^k \subset D_+^n \times \mathbb{R}^k$ l'elemento $(x, f(x)v) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^k \subset D_-^n \times \mathbb{R}^k$. La f è detta la funzione di *clutching*⁴. Si dimostra facilmente che

LEMMA 32.7.1. *Siano $f_0, f_1 : S^{n-1} \rightarrow \mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$ due funzioni di clutching. Se f_0 ed f_1 sono omotope, allora i fibrati vettoriali E_{f_1} ed E_{f_2} sono equivalenti. Abbiamo quindi un'applicazione naturale*

$$(32.20) \quad \pi(S^{n-1}, \mathbf{GL}(k, \mathbb{R})) \longrightarrow \text{Vec}_k(S^n). \quad \square$$

Poiché D_+^n e D_-^n sono contrattili, i fibrati vettoriali con basi D_+^n e D_-^n sono banali. Da questa osservazione segue il

LEMMA 32.7.2. *L'applicazione (32.20) è surgettiva.*

Lo studio dell'applicazione (32.20) è complicato dal fatto che il gruppo $\mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$ ha due componenti connesse. È quindi conveniente considerare dapprima i fibrati vettoriali orientati.

Indichiamo con $\text{Vec}_k^+(M)$ le classi di equivalenza di fibrati vettoriali orientati di rango k sulla varietà differenziabile M . Sia $\mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})$ il gruppo degli endomorfismi lineari di \mathbb{R}^k con determinante positivo. Abbiamo allora

PROPOSIZIONE 32.7.3. *L'applicazione $\pi(S^{n-1}, \mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})) \rightarrow \text{Vec}_k^+(S^n)$ è bigettiva.* □

⁴“clutch” è in inglese la frizione.

Per analizzare $\text{Vec}_k(S^n)$, introduciamo lo spazio $\text{Vec}_k^0(S^n)$ che consiste delle classi di equivalenza di fibrati vettoriali di rango k su S^n che hanno un'orientazione assegnata sul punto $e_1 \in S^{n-1} \subset S^n$. Scegliendo le trivializzazioni su D_\pm^n che mantengono questa orientazione assegnata, le abbiamo fissate entrambe a meno di omotopia. Otteniamo così

LEMMA 32.7.4. *Vi è una bigezione naturale*

$$\pi(S^{n-1}, e_1; \mathbf{GL}(k, \mathbb{R}), \mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})) \rightarrow \text{Vec}_k^0(S^n). \quad \square$$

Se $n \geq 2$, S^{n-1} è connesso ed abbiamo quindi:

LEMMA 32.7.5. *Se $n \geq 2$, vi è una bigezione naturale*

$$\pi(S^{n-1}, \mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})) \rightarrow \text{Vec}_k^0(S^n).$$

Quindi l'applicazione naturale $\text{Vec}_k^+(S^n) \rightarrow \text{Vec}_k^0(S^n)$ è una bigezione. Ne segue che

PROPOSIZIONE 32.7.6. *Se $n \geq 2$, ogni fibrato vettoriale reale su S^n è orientabile, ed ha esattamente due orientazioni, che dipendono dalla scelta dell'orientazione su una singola fibra. L'applicazione (32.20) ha fibre che hanno al più due elementi. Hanno un solo elemento le fibre che corrispondono a fibrati vettoriali che ammettono un automorfismo che inverte l'orientazione delle fibre, due elementi altrimenti.*

OSSERVAZIONE 32.7.7. Poiché $\mathbf{SO}(k)$ è un retratto di deformazione di $\mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})$, abbiamo

$$\pi(S^{n-1}, \mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})) \simeq \pi(S^{n-1}, \mathbf{SO}(k)) \simeq \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(k)).$$

Appendice: Fibrati differenziabili

Fibrati di Steenrod differenziabili

33.1. Definizioni principali

Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie ed F una varietà differenziabile.

DEFINIZIONE 33.1.1. Un'azione differenziabile a sinistra di \mathbf{G} su F è un'applicazione differenziabile

$$(33.1) \quad \mathbf{G} \times F \ni (a, \sigma) \longrightarrow a\sigma \in F$$

tale che

$$\begin{aligned} e\sigma &= \sigma, \quad \forall \sigma \in F, \\ a(b\sigma) &= (ab)\sigma, \quad \forall a, b \in \mathbf{G}, \forall \sigma \in F. \end{aligned}$$

L'azione (33.1) si dice *fedele* (o *effettiva*) se

$$a \in \mathbf{G} \text{ e } a\sigma = \sigma, \forall \sigma \in F \implies a = e.$$

Una varietà differenziabile F su cui sia definita un'azione differenziabile a sinistra fedele di \mathbf{G} si dice un \mathbf{G} -spazio differenziabile fedele.

ESEMPIO 33.1.2. Sia \mathbf{H} un sottogruppo chiuso del gruppo di Lie \mathbf{G} . Lo spazio omogeneo \mathbf{G}/\mathbf{H} è un \mathbf{G} -spazio fedele se e soltanto se \mathbf{H} non contiene sottogruppi normali di \mathbf{G} diversi dal sottogruppo banale $\{e\}$, cioè se $\bigcap_{a \in \mathbf{G}} \text{ad}(g)(\mathbf{H}) = \{e\}$.

Fissiamo un \mathbf{G} -spazio differenziabile fedele F .

DEFINIZIONE 33.1.3. Una F -struttura su una varietà differenziabile W è il dato di un insieme non vuoto P di diffeomorfismi di F in W in tali che per ogni $\alpha, \beta \in P$ esista uno ed un solo elemento $a \in \mathbf{G}$ tale che $\beta = \alpha \circ a$, cioè sia

$$\beta(\sigma) = \alpha(a\sigma), \quad \forall \sigma \in F.$$

Un fibrato differenziabile $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ si dice un F -fibrato in senso debole se ogni fibra E_p possiede una F -struttura.

Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un F -fibrato in senso debole. Indichiamo con $P(E_p)$ la famiglia dei diffeomorfismi di F in E_p che ne definiscono la F -struttura e poniamo

$$P(E) = \{(p, \alpha) \mid \alpha \in P(E_p)\}.$$

Risulta definita in modo naturale un'azione naturale a destra di \mathbf{G} su $P(E)$, da

$$(p, \alpha)a = (p, \alpha \circ a), \quad \forall (p, \alpha) \in P(E), \forall a \in \mathbf{G}.$$

Otteniamo così un fibrato \mathbf{G} -principale $P(\xi) = (P(E) \xrightarrow{\pi} M)$, ove abbiamo indicato ancora con π la proiezione $(p, \alpha) \rightarrow p$ di $P(E)$ su M .

DEFINIZIONE 33.1.4. Un F -fibrato in senso debole ξ si dice un *fibrato di Steenrod*¹ differenziabile se il corrispondente fibrato principale $P(\xi)$ è differenziabile.

OSSERVAZIONE 33.1.5. I fibrati principali e i fibrati vettoriali sono esempi di fibrati di Steenrod.

ESEMPIO 33.1.6. Siano $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$ sottogruppi chiusi di un gruppo di Lie \mathbf{G} , con $\mathbf{G}_1 < \mathbf{G}_2$. Supponiamo inoltre che \mathbf{G}_3 sia contenuto nel commutatore di \mathbf{G}_2 e che $\mathbf{G}_2 \cap \mathbf{G}_3 = \{e\}$. L'inclusione $\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_3 < \mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_3$ definisce una proiezione naturale $\pi : E \rightarrow M$ di $E = \mathbf{G}/(\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_3)$ su $M = \mathbf{G}/(\mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_3)$, con fibra tipica $\mathbf{G}_2/\mathbf{G}_1$. Sia $\mathbf{N} = \bigcap_{a \in \mathbf{G}_2} \text{ad}(a)(\mathbf{G}_1)$ ed $\mathbf{H} = \mathbf{G}_2/\mathbf{N}$. La fibra $F = \mathbf{G}_2/\mathbf{G}_1$ è un \mathbf{H} -spazio fedele e $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un F -fibrato di Steenrod.

33.2. Alcuni esempi

Costruiamo in questo paragrafo alcuni fibrati principali che sono casi particolari dell'Esempio 33.1.6.

Sottogruppi del gruppo ortogonale. Fissiamo due interi positivi m ed n e consideriamo $\mathbf{SO}(m)$ ed $\mathbf{SO}(n)$ come sottogruppi disgiunti di $\mathbf{SO}(m+n)$, ciascuno contenuto nel commutatore dell'altro. Il quoziente $E = \mathbf{SO}(m+n)/\mathbf{SO}(n)$ si può identificare alla varietà di Stiefel delle m -uple ortonormali di \mathbb{R}^{m+n} . Fissiamo un sottogruppo chiuso \mathbf{G} di $\mathbf{SO}(m)$ e poniamo $M = \mathbf{SO}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SO}(n))$. L'inclusione $\{e\} \times \mathbf{SO}(n) < \mathbf{G} \times \mathbf{SO}(n)$ definisce un'applicazione $\mathbf{SO}(m+n)$ -equivariante $\pi : E \rightarrow M$ che definisce un \mathbf{G} -fibrato principale. Ricordiamo che per la varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{R})$ delle m -uple ortonormali di \mathbb{R}^{m+n} sono $(n-1)$ -connesse ed hanno

$$\pi_n(\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

DEFINIZIONE 33.2.1. Chiamiamo

$$(33.2) \quad \mathbf{SO}(m+n)/\mathbf{SO}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SO}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SO}(n))$$

l' n -fibrato principale ortogonale standard con gruppo strutturale $\mathbf{G} \subset \mathbf{SO}(m)$.

Sottogruppi del gruppo speciale unitario. Siano m, n due interi positivi e consideriamo $\mathbf{SU}(m)$ ed $\mathbf{SU}(n)$ come sottogruppi disgiunti di $\mathbf{SU}(m+n)$ contenuti ciascuno nel commutatore dell'altro. Il quoziente $E = \mathbf{SU}(m+n)/\mathbf{SU}(n)$ è la varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{m+n,n}(\mathbb{C})$. È

$$\pi_q(\mathbb{V}_{m+n,n}(\mathbb{C})) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq q < 2n, \\ \mathbb{Z} & \text{se } q = 2n. \end{cases}$$

Se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{SU}(m)$, la proiezione naturale $\pi : E \rightarrow M$ su $M = \mathbf{SU}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SU}(n))$ definita dall'inclusione $\{e\} \times \mathbf{SU}(n) < \mathbf{G} \times \mathbf{SU}(n)$ definisce un \mathbf{G} -fibrato principale.

¹Norman Earl Steenrod (1910 - 1971) fu un matematico americano, allievo di Salomon Lefschetz, che ha dato contributi importanti alla topologia algebrica.

DEFINIZIONE 33.2.2. Chiamiamo

$$(33.3) \quad \mathbf{SU}(m+n)/\mathbf{SU}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SU}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SU}(n))$$

l' n -fibrato principale unitario standard con gruppo strutturale $\mathbf{G} \subset \mathbf{SU}(m)$.

Sottogruppi del gruppo unitario simplettico. Ricordiamo che il gruppo unitario simplettico $\mathbf{Sp}(n)$ è il sottogruppo delle trasformazioni di $\mathbf{U}(2n)$ che lasciano invariante la forma alternata $\omega = dz^1 \wedge dz^{n+1} + \dots + dz^{2n-1} \wedge dz^{2n}$. Siano m, n interi positivi e consideriamo $\mathbf{Sp}(m)$ ed $\mathbf{Sp}(n)$ come sottogruppi di $\mathbf{Sp}(m+n)$, ciascuno contenuto nel commutatore dell'altro. Il quoziente $\mathbf{Sp}(m+n)/\mathbf{Sp}(n)$ è la varietà di Stiefel quaternionica $\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{H})$ delle m -uple ortonormali rispetto al prodotto scalare quaternionico standard di \mathbb{H}^m . Abbiamo

$$\pi_q(\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{H})) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq q < 4n, \\ \mathbb{Z} & \text{se } q = 4n. \end{cases}$$

Se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{Sp}(m)$, la proiezione naturale $\pi : E \rightarrow M$ su $M = \mathbf{Sp}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n))$ definita dall'inclusione $\{e\} \times \mathbf{Sp}(n) < \mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n)$ definisce un \mathbf{G} -fibrato principale.

DEFINIZIONE 33.2.3. Chiamiamo

$$(33.4) \quad \mathbf{Sp}(m+n)/\mathbf{Sp}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{Sp}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n))$$

l' n -fibrato principale quaternionico standard con gruppo strutturale $\mathbf{G} \subset \mathbf{Sp}(m)$.

33.3. Triangolazione delle varietà differenziabili

Per applicare i risultati di §3.8 ai fibrati di Steenrod differenziabili, occorre dimostrare che ogni varietà differenziabile ammette una struttura di CW -complesso. Freudenthal² dimostrò la triangolarizzabilità delle varietà differenziabili³. Esporremo qui una costruzione di Cairns⁴ che prova l'esistenza di una struttura CW . Poiché le celle costruite sono poliedri, da essa si può dedurre la triangolazione.

Per discutere la triangolazione delle varietà differenziabili abbiamo bisogno di richiamare alcune nozioni riguardanti la triangolazione dei politopi convessi e gli angoli principali tra sottospazi affini.

²Hans Freudenthal, *Die Triangulation der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten*. Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 42, (1939). 880-901.

³Il problema della triangolarizzazione di varietà topologiche \mathcal{C}^0 è ancora aperto. Vedi:

Takao Matumoto, *Triangulation of manifolds*. in *Algebraic and geometric topology* (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2, pp. 3-6, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978.

⁴Stewart S. Cairns, *A simple triangulation method for smooth manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc. 67 1961 389-390.

Simplessi Euclidei e politopi convessi compatti. Dati $(k+1)$ punti p_0, \dots, p_k di uno spazio Euclideo \mathbb{R}^n , che non siano contenuti in un sottospazio affine di dimensione minore di k , chiamiamo *simpleso Euclideo* di dimensione k , di vertici p_0, \dots, p_k il loro involucro convesso

$$[p_0, \dots, p_k] = \left\{ \sum_{i=0}^k t_i p_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\}.$$

L'ordinamento dei vertici definisce un ordinamento del simpleso, dimodoché porremo

$$[p_{h_0}, \dots, p_{h_k}] = \epsilon(h)[p_0, \dots, p_k] \quad \text{se } h \in \mathbf{S}_{k+1}.$$

La frontiera del simpleso orientato $[p_0, \dots, p_k]$ è allora

$$\begin{aligned} \partial[p_0, \dots, p_k] = & [p_1, \dots, p_k] + \dots + (-1)^h [p_0, \dots, \widehat{p}_h, \dots, p_k] + \dots \\ & + \dots + (-1)^k [p_0, \dots, p_{k-1}]. \end{aligned}$$

Il simpleso $(k-1)$ -dimensionale $[p_0, \dots, \widehat{p}_h, \dots, p_k]$ è la *faccia* opposta al *vertice* p_h . I punti $\sum_{i=0}^k t_i p_i$ con $t_i > 0$ per ogni i e $\sum_{i=0}^k t_i = 1$ formano la *parte interna* di $[p_0, \dots, p_k]$.

DEFINIZIONE 33.3.1. Un *complesso simpliciale Euclideo* di \mathbb{R}^n è il dato di una famiglia \mathcal{K} di simplessi Euclidei di \mathbb{R}^n che goda delle proprietà:

- (1) Ogni faccia di un simpleso di \mathcal{K} è ancora un simpleso di \mathcal{K} ;
- (2) Se $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{K}$, $\dim \sigma_1 < \dim \sigma_2$ e $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$, allora $\sigma_1 \subset \sigma_2$;
- (3) Se $\sigma_1 \neq \sigma_2 \in \mathcal{K}$, $\dim \sigma_1 = \dim \sigma_2$ e $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$, allora $\sigma_1 \cap \sigma_2$ è una faccia di entrambi i simplessi.

I *vertici* di \mathcal{K} sono i punti contenuti nei suoi simplessi di dimensione 0. Indichiamo con V l'insieme dei vertici di \mathcal{K} . Ogni simpleso di \mathcal{K} è univocamente determinato dai suoi vertici. Il complesso \mathcal{K} è quindi completamente definito dalla famiglia $\mathcal{K}^* = \bigcup_{h=0}^n \mathcal{K}_h^*$ di sottoinsiemi finiti di V , ove \mathcal{K}_k^* è l'insieme delle $(k+1)$ -uple di elementi di V che sono vertici di un k -simpleso di \mathcal{K} . Si pone $\mathcal{K}_{-1}^* = \{\emptyset\}$. Chiamiamo \mathcal{K}^* il *complesso simpliciale astratto* associato a \mathcal{K} .

Introduciamo una definizione formale di questi oggetti.

DEFINIZIONE 33.3.2. Un *complesso simpliciale astratto* è il dato di un insieme non vuoto V (vertici) e di una famiglia \mathcal{K}^* di sottoinsiemi finiti di V gode delle seguenti proprietà:

- (1)
$$V = \bigcup \mathcal{K}^*,$$
- (2)
$$A \in \mathcal{K}^*, B \subset A \implies B \in \mathcal{K}^*.$$

LEMMA 33.3.3. *Ogni complesso simpliciale astratto con un numero finito di vertici si può associare ad un complesso simpliciale Euclideo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{K}^* \subset 2^V$ un complesso simpliciale astratto con insieme di vertici V . Consideriamo lo spazio Euclideo \mathbb{R}^V , di cui gli elementi di V definiscono una base. Per ogni insieme finito p_0, \dots, p_k di elementi distinti di V per cui

$\{p_0, \dots, p_k\} \in \mathcal{K}^*$, sia

$$[p_0, \dots, p_k] = \left\{ \sum_{i=0}^k t_i p_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\}.$$

Allora $\mathcal{K} = \{[p_0, \dots, p_k] \mid \{p_0, \dots, p_k\} \in \mathcal{K}^*\}$ è un complesso simpliciale Euclideo con complesso simpliciale astratto \mathcal{K}^* . \square

DEFINIZIONE 33.3.4. Se P è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , un complesso simpliciale Euclideo \mathcal{K} con $P = \bigcup \mathcal{K}$ si dice una *triangolazione* di P .

DEFINIZIONE 33.3.5. Un *politopo* convesso e compatto in \mathbb{R}^n è l'involuppo convesso di un numero finito di punti.

LEMMA 33.3.6. Sia P è un *politopo compatto, involuppo convesso di un insieme finito di punti* $V = \{p_1, \dots, p_v\}$. Se ϕ è una *funzione convessa su P* , allora

$$\sup_P \phi = \max_V \phi.$$

DIMOSTRAZIONE. Ogni punto di P è combinazione baricentrica dei punti di V . Sia

$$(\dagger) \quad p = \sum_{i=1}^v t_i p_i \in P, \quad \text{con } t_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^v t_i = 1.$$

Poiché ϕ è convessa, otteniamo che

$$\phi(p) \leq \sum_{i=1}^v t_i \phi(p_i) \leq \max_{1 \leq i \leq v} \phi(p_i), \quad \forall p \in P,$$

e quindi ϕ assume il suo valore massimo in un vertice di P . \square

PROPOSIZIONE 33.3.7. Sia P un *politopo convesso di \mathbb{R}^n , ottenuto come involuppo convesso di un insieme finito di punti* $\{p_1, \dots, p_v\}$. Possiamo allora trovare una *triangolazione di P , con vertici* $\{p_1, \dots, p_v\}$.

DIMOSTRAZIONE. Dico che esiste un iperpiano affine H di \mathbb{R}^n che interseca P soltanto in un vertice. Ragioniamo per induzione sulla dimensione n , osservando che il caso $n = 1$ è banale. Supponiamo sia $n \geq 2$. Per il Lemma 33.3.6 la funzione $x \rightarrow x_n$ assume un valore massimo μ in qualche punto di V . L'intersezione $P \cap \{x_n = \mu\}$ è il politopo generato da $V \cap \{x_n = 0\}$. Infatti, scritto un punto $p \in P \cap \{x_n = \mu\}$ nella forma (\dagger) , da

$$\mu = x_n(p) = \sum_{i=1}^v t_i x_n(p_i)$$

segue che $t_i = 0$ se $x_n(p_i) < \mu$. Per l'ipotesi di ricorrenza esiste un funzionale lineare $\psi = \psi(x_1, \dots, x_{n-1})$ ed un vertice $p_{i_0} \in V \cap \{x_n = 0\}$ tale che

$$\psi(p) < \psi(p_{i_0}) \quad \text{se } p \in P \cap \{x_n = \mu\} \text{ e } p \neq p_{i_0}.$$

Sia $\phi = x_n + \epsilon \psi$. Scegliamo $\epsilon > 0$ in modo che risulti

$$\max\{x_n(p_i) \mid p_i \in V, x_n(p_i) < \mu\} + \epsilon \max\{\psi(p_i) \mid p_i \in V\} < \mu.$$

Allora

$$\phi(p) < \phi(p_{i_0}), \quad \forall p \in P \setminus \{p_{i_0}\}.$$

Infatti il funzionale lineare ϕ , ristretto a P , assume il valore massimo in un punto di V per il Lemma 33.3.6, e p_{i_0} è un punto di massimo isolato perché, se $p \in P$ è espresso dalla (\dagger), abbiamo

$$\phi(p) = \sum_{i=1}^{\nu} t_i \phi(p_i) < \phi_i(p_{i_0}) \quad \text{se } t_{i_0} < 1.$$

A meno di sostituire ad \mathbb{R}^n l'involuppo affine di P , possiamo supporre che P contenga dei punti interni.

Ragioniamo per induzione sul numero ν di vertici di P . Deve essere $\nu > n$, perché altrimenti P sarebbe contenuto in un sottospazio affine di dimensione minore di n . Se fosse $\nu = n + 1$, allora P sarebbe un simpleso di dimensione n e quindi banalmente triangolabile.

Supponiamo quindi $\nu > n + 1$ ed il risultato vero per politopi definiti come involuppi convessi di insiemi di meno di ν punti. Per la prima parte della dimostrazione, a meno di cambiare gli indici, possiamo supporre che p_ν sia un punto di V per cui esista un funzionale lineare ϕ su \mathbb{R}^n tale che

$$\phi(p_\nu) > \phi(p), \quad \forall p \in P \setminus \{p_\nu\}.$$

Per l'ipotesi induttiva, il politopo P' , involuppo convesso di $V' = \{p_1, \dots, p_{\nu-1}\}$, ammette una triangolazione \mathcal{K}' con insieme dei vertici V' . Per ogni simpleso $[p_{i_0}, \dots, p_{i_k}] \in \mathcal{K}'$, indichiamo con

$$b_{i_0, \dots, i_k} = (k+1)^{-1}(p_{i_0} + \dots + p_{i_k})$$

il suo baricentro. Costruiamo \mathcal{K} aggiungendo a \mathcal{K}' il simpleso $[p_\nu]$ e tutti i semplici $[p_{i_0}, \dots, p_{i_k}, p_\nu]$ per cui il simpleso $[b_{i_0, \dots, i_k}, p_\nu]$ intersechi P' nel solo punto b_{i_0, \dots, i_k} .

Dimostriamo che \mathcal{K} è una triangolazione di P . Sia $[p_{i_0}, \dots, p_{i_k}, p_\nu] \in \mathcal{K}$. Per dimostrare che le sue facce appartengono ancora a \mathcal{K} , a meno di permutare i primi $(k+1)$ indici è sufficiente verificare che $[p_{i_1}, \dots, p_{i_k}, p_\nu] \in \mathcal{K}$. Se per assurdo $[b_{i_1, \dots, i_k}, p_\nu]$ contenesse un punto di P' distinto da b_{i_1, \dots, i_k} , esso sarebbe della forma $\tau b_{i_1, \dots, i_k} + (1-\tau)p_\nu$ con $0 < \tau < 1$. Allora P' conterrebbe anche il punto

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{k}{k+\tau}\right)p_{i_0} + \frac{k}{k+\tau} \left(\frac{\tau}{k}(p_{i_1} + \dots + p_{i_k}) + (1-\tau)p_\nu\right) \\ &= \frac{\tau}{k+\tau}(p_{i_0} + \dots + p_{i_k}) + \frac{k(1-\tau)}{k+\tau}p_\nu \\ &= \frac{(k+1)\tau}{k+\tau}b_{i_0, \dots, i_k} + \frac{k(1-\tau)}{k+\tau}p_\nu, \end{aligned}$$

contraddicendo il fatto che $[b_{i_0, \dots, i_k}, p_\nu] \cap P' = \{b_{i_0, \dots, i_k}\}$. Questo dimostra che \mathcal{K} è un complesso simpliciale euclideo.

Resta da dimostrare che $\bigcup \mathcal{K} = P$. Basterà a questo scopo verificare che P contiene tutti i punti p che si scrivono nella forma (\dagger) con $0 < t_\nu < 1$. Sia

$$\bar{p} = t_\nu^{-1} \sum_{i=1}^{\nu-1} t_i p_i \in P'.$$

L'intersezione $[\bar{p}, p_\nu] \cap P'$ è o uguale a \bar{p} , o è un segmento $[\bar{p}, q]$. Vi è dunque un segmento $[q, p_\nu]$ che contiene p ed interseca P' nel solo punto q . Sia $[p_{i_0}, \dots, p_{i_k}] \in \mathcal{K}'$ un simpleso di \mathcal{K}' che contiene q al suo interno. Basterà

dimostrare che $[b_{i_0, \dots, i_k}, p_\nu]$ interseca P' nel solo punto b_{i_0, \dots, i_k} . La semiretta con origine b_{i_0, \dots, i_k} e passante per q interseca la frontiera del semplice $[p_{i_0}, \dots, p_{i_k}]$ in un punto p' . Consideriamo il triangolo $\Delta(p_\nu, b_{i_0, \dots, i_k}, p')$. Se il lato $[p_\nu, b_{i_0, \dots, i_k}]$ intersecasse P' in un punto p'' distinto da b_{i_0, \dots, i_k} , il segmento $[p'', p']$, contenuto in P' , intersecherebbe $[q, p_\nu]$ in un punto distinto da q . Questa contraddizione prova che $[b_{i_0, \dots, i_k}, p_\nu] \cap P' = \{b_{i_0, \dots, i_k}\}$, e che quindi $p \in [p_{i_0}, \dots, p_{i_k}, p_\nu] \in \mathcal{K}$. La dimostrazione è completa. \square

Convessi proiettivi e politopi convessi generali. La nozione di convessità si estende in modo naturale ai sottoinsiemi dello spazio proiettivo $\mathbb{R}P^n$.

DEFINIZIONE 33.3.8. Un sottoinsieme K dello spazio proiettivo $\mathbb{R}P^n$ si dice *proiettivamente convesso* se la sua intersezione con ogni retta proiettiva è connessa.

La retta proiettiva reale è omeomorfa ad S^1 . Quindi il complementare in una retta proiettiva reale di una sua parte connessa è ancora un connesso. Abbiamo quindi

LEMMA 33.3.9. *Il complementare in $\mathbb{R}P^n$ di un suo sottoinsieme convesso è ancora un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}P^n$.* \square

Poiché la chiusura di un connesso è ancora connessa, abbiamo

LEMMA 33.3.10. *Se K è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}P^n$, allora ogni sottoinsieme K' di $\mathbb{R}P^n$ con $K \subset K' \subset \bar{K}$ è ancora convesso.* \square

OSSERVAZIONE 33.3.11. Come mostra l'esempio dell'intersezione di due archi chiusi opposti di una retta proiettiva, l'intersezione di due sottoinsiemi convessi dello spazio proiettivo può non essere convessa. È convessa l'intersezione di un connesso con un sottospazio proiettivo, come enunciamo nel lemma seguente.

LEMMA 33.3.12. *Se K è un convesso di $\mathbb{R}P^n$ e Π un sottospazio proiettivo di $\mathbb{R}P^n$, allora $K \cap \Pi$ è convesso sia come sottoinsieme di $\mathbb{R}P^n$ che come sottoinsieme di Π .* \square

Come nel caso dei convessi affini vale la

PROPOSIZIONE 33.3.13. *Sia K un convesso di $\mathbb{R}P^n$, che contenga un punto interno p_0 . Sia $p \in K$ ed α un arco della retta $p_0 \vee p$ contenuto in K . Allora tutti i punti di α distinti da p sono interni a K .*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un altro punto p_1 sulla retta $p_0 \vee p$, interno a K , e tale che p_0 sia interno ad un arco di α di estremi p, p_1 contenuto in K . Fissiamo due iperpiani H_0 ed H_1 contenenti i punti p_0 e p_1 rispettivamente e non contenenti la retta $p_0 \vee p$. Possiamo definire un'applicazione continua da H_1 ad H_0 facendo corrispondere ad ogni punto q di H_1 l'intersezione q' di H_0 con la retta $p \vee q$. Fissato un intorno aperto U_0 di p_0 contenuto in K , possiamo trovare un intorno aperto U_1 di p_1 in K tale che per ogni $p' \in U_1 \cap H_1$ la retta $p' \vee p$ intersechi H_0 in un punto p'' di U_0 . Dico che, pur di scegliere l'intorno U_0 sufficientemente piccolo, l'arco di retta di estremi p, p' che contiene p'' è contenuto in K . Se così non fosse, potremmo trovare una successione q'_k di punti di H_0 che converge a p_0

e tale che, detto q'_k il punto in cui $q''_k \vee p$ interseca H_1 , l'arco di estremi q'_k, q''_k che non contiene p contenga un punto r_k che non sta in K .

Fissiamo un punto \bar{q} interno all'arco opposto all'arco α sulla retta $q_1 \vee q_2$. Dico che è possibile determinare intorno aperti U di p_0 in \mathring{K} , e W di \bar{q} in $\mathbb{R}P^n$, che non contengano p e tali che ogni retta $p \vee p'$ con $p' \in U$ intersechi W in un punto q' tale che l'arco di $p \vee p'$ che non contiene q' sia contenuto in K . \square

PROPOSIZIONE 33.3.14. *Sia K un convesso di $\mathbb{R}P^n$, che non sia contenuto in nessun iperpiano. Allora \mathring{K} è denso in K .*

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per induzione su n . Se $n \leq 1$, la proposizione è banalmente vera. Sia $n > 1$ e supponiamo che la tesi sia vera per spazi proiettivi di dimensione minore di n . Fissato un qualsiasi punto p_0 di K , scegliamo una base e_0, e_1, \dots, e_n di \mathbb{R}^{n+1} in modo che p_0 sia immagine di e_0 nella proiezione canonica $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$. Sia $\Pi_j = \{x_j = 0\} \subset \mathbb{R}P^n$. Per l'ipotesi induttiva, i $K_j = \Pi_j \cap K$ sono convessi con parte interna \mathring{K}_j non vuota in Π_j . Quindi

$$U_j = \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathring{K}_j \mid x_j = 0, \prod_{i \neq j} x_i \neq 0 \right\}$$

sono aperti non vuoti di Π_j , contenuti nella parte interna di K_j in Π_j , e che contengono, se $j > 0$, il punto p_0 nella loro chiusura. Inoltre gli U_j sono due a due disgiunti.

Fissati due punti $q_1 \in U_1$ e $q_2 \in U_2$, essi determinano una retta $q_1 \vee q_2$, che interseca in un solo punto $q_{1,2}$ l'iperpiano Π_0 . Siano $q_j \in U_j$, per $j = 1, 2$, e consideriamo la retta $q_1 \vee q_2$ per i due punti. Un suo arco è contenuto in K . Se per ogni scelta di q_1 e q_2 tutta la retta $q_1 \vee q_2$ è contenuta in K , allora K contiene $U_1 \cup U_2$, e quindi p_0 è nella chiusura di $\mathring{K} \supset U_1 \cup U_2$. Altrimenti, se un punto \bar{q} di $q_1 \vee q_2$ non appartiene a K , allora possiamo trovare un intorno aperto W di \bar{q} in $\mathbb{R}P^n$ tale che tutte le rette passanti per un punto di W intersechino sia U_1 che U_2 , e l'arco tra i punti in U_1 ed U_2 che non contiene il punto di W è contenuto in K . Questo dimostra che sia q_1 che q_2 appartengono alla chiusura di \mathring{K} . La dimostrazione è completa. \square

Consideriamo lo spazio affine \mathbb{R}^n come un aperto dello spazio proiettivo $\mathbb{R}P^n$, complementare di un iperpiano all'infinito:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mid x_0 \neq 0\}.$$

Se K è un sottoinsieme convesso di \mathbb{R}^n , allora ogni sottoinsieme K' di $\mathbb{R}P^n$ con $K \subset K' \subset \bar{K}$ è convesso in $\mathbb{R}P^n$.

DEFINIZIONE 33.3.15. Un *politopo convesso* di \mathbb{R}^n è un'intersezione finita di semispazi chiusi di \mathbb{R}^n . Lo diciamo *proprio* se non contiene rette.

Questa definizione più generale di politopo convesso comprende anche insiemi non limitati. I politopi convessi propri si possono ricondurre a quelli compatti nel modo seguente. Consideriamo lo spazio affine \mathbb{R}^n come il complemento di un iperpiano all'infinito dello spazio proiettivo $\mathbb{R}P^n$:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mid x_0 \neq 0\}.$$

LEMMA 33.3.16. *Condizione necessaria e sufficiente affinché P sia un politopo convesso proprio, è che esista un iperpiano H dello spazio proiettivo \mathbb{RP}^n tale che $H \cap \bar{P} = \emptyset$.*

DIMOSTRAZIONE. Se P contiene una retta ℓ , ogni iperpiano di \mathbb{RP}^n incontra la retta proiettiva $\bar{\ell}$, che è contenuta in \bar{P} , almeno in un punto. \square

Supponiamo che $P \neq \mathbb{R}^n$. Allora la chiusura \bar{P} di P è un politopo convesso limitato di uno spazio affine n -dimensionale contenuto in \mathbb{R}^n . Infatti, poiché P è un convesso diverso da \mathbb{R}^n , è contenuto in un semispazio aperto A di \mathbb{R}^n . Se H è l'iperpiano che delimita A , la sua chiusura \bar{H} è un iperpiano di \mathbb{RP}^n ed $\mathbb{RP}^n \setminus \bar{H} \simeq \mathbb{R}^n$ contiene la chiusura \bar{P} di P come un politopo convesso e compatto.

Un politopo convesso P è definito dal dato di un numero finito di funzionali lineari $\phi_1, \dots, \phi_\nu \in (\mathbb{R}^n)^*$ e di numeri reali $a_1, \dots, a_\nu \in \mathbb{R}$ tali che

$$P = \bigcap_{i=1}^{\nu} \{p \in \mathbb{R}^n \mid \phi_i(p) \leq a_i\}.$$

Se la parte interna \mathring{P} di P è non vuota, possiamo associare a P un politopo convesso compatto P^* nel modo seguente. Fissiamo una sfera $S = \{|p - p_0| = r\}$ contenuta in \mathring{P} . Consideriamo lo spazio affine \mathbb{R}^n come un aperto dello spazio proiettivo \mathbb{RP}^n . La quadrica S definisce una polarità su \mathbb{RP}^n . Sia P^0 l'insieme degli iperpiani di \mathbb{RP}^n che non intersecano \mathring{P} . Le loro immagini mediante la polarità formano i punti di un politopo convesso e compatto P^* . Esso è l'involuppo convesso del centro p_0 di S , immagine nella polarità dell'iperpiano all'infinito $\mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{R}^n$, e delle immagini p_i degli iperpiani $\phi_i = a_i$. Il punto p_0 è interno a P^* se e soltanto se P è compatto.

Angoli principali o canonici. Jordan introdusse nel 1875 la nozione di *angoli principali* o *canonici* per definire gli invarianti, rispetto all'azione del gruppo ortogonale, di una coppia di sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n . Essi si definiscono nel modo seguente.

Siano V, W due sottospazi vettoriali di dimensioni h, k , dello spazio Euclideo \mathbb{R}^n . Costruiamo due riferimenti ortonormali v_1, \dots, v_h su V e w_1, \dots, w_k su W , con le proprietà

$$(v_1|w_1) = \max\{(v|w) \mid v \in V, w \in W, |v| = 1, |w| = 1\},$$

$$(v_j|w_j) = \max\{(v|w) \mid v \in V, w \in W, |v| = 1, |w| = 1, v \perp v_i, w \perp w_j, \forall 1 \leq i < j\},$$

$$\forall 1 < j \leq \min\{h, k\}.$$

Gli angoli principali sono

$$\theta_j = \begin{cases} \arccos(v_j|w_j), & 1 \leq j \leq \min\{h, k\}, \\ \pi & \min\{h, k\} < j \leq \max\{h, k\}. \end{cases}$$

I θ_i formano una successione crescente $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \pi$. Il numero dei $\theta_i = 0$ è la dimensione dell'intersezione $V \cap W$ e quello dei $\theta_i = \pi$ la differenza tra le dimensioni dei due sottospazi. Nel caso di una retta incidente ad un sottospazio, l'angolo tra la retta e il sottospazio è il solo angolo principale diverso da π .

Per verificare che questi angoli sono un sistema completo di invarianti indipendenti, possiamo supporre sia $h \leq k$. Indichiamo con π_W la proiezione ortogonale di \mathbb{R}^n su W e consideriamo l'applicazione lineare

$$L : V \ni v \rightarrow \pi_W(v) \in W.$$

Utilizzando la struttura Euclidea di V e W possiamo definire l'aggiunto

$$L^* : W \rightarrow V \text{ mediante } (L^*w, v) = (w|L(v)), \quad \forall v \in V, \forall w \in W.$$

L'applicazione $L^*L : V \rightarrow V$ è simmetrica, semidefinita positiva, e con norma $\|L^*L\| = \sup_{|v| \leq 1} |L^*L(v)| \leq 1$, rispetto al prodotto scalare Euclideo su V ed è quindi diagonalizzabile, con autovalori $1 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_h \geq 0$. Se $v_i \in V$ è un autovettore con $|v_i| = 1$ corrispondente all'autovalore λ_i , allora

$$\lambda_i = (L^*L(v_i)|v_i) = (L(v_i)|L(v_i)) = |L(v_i)|^2 = \sup_{\substack{w \in W \\ |w|=1}} (Lv_i|w)^2 = \sup_{\substack{w \in W \\ |w|=1}} (v_i|w)^2.$$

Ricordiamo che gli autovalori ed autovettori di L^*L sono caratterizzati da

$$\begin{cases} \lambda_1 = (L^*Lv_1|v_1) = \sup_{\substack{v \in V \\ |v|=1}} (L^*Lv|v), \\ \lambda_j = (L^*Lv_j|v_j) = \sup_{\substack{v \in V, \\ (v|v_i)=0, \text{ se } i < j}} (L^*Lv|v), \quad 1 < j \leq h. \end{cases}$$

Da questo segue che i $\{v_i\}$ coincidono con quelli definiti in precedenza e che $(v_i|w_i) = \sqrt{\lambda_i}$ per $i = 1, \dots, h$. L'invarianza segue dal fatto che operatori L^*L ottenuti da coppie di spazi trasformati di V e W mediante un'isometria lineare di \mathbb{R}^n sono coniugati. Se infatti $a \in \mathbf{O}(n)$, allora $\pi_{a(W)} = a \circ \pi_W \circ a^{-1} = a \circ \pi_W \circ a^*$. Quindi, se $L_a : a(V) \ni v \rightarrow \pi_{a(W)}(v) \in a(W)$, allora $L_a^*L_a = a \circ (L^*L) \circ a^*$.

Viceversa, assegnati gli angoli principali $0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_h \leq \pi/2$, con $\theta_i = 0$ per $i \leq d$, possiamo costruire una coppia di sottospazi V, W che formano tali angoli principali definendo le basi ortonormali v_1, \dots, v_h e w_1, \dots, w_k mediante

$$v_i = e_i, \quad 1 \leq i \leq h, \quad w_i = \begin{cases} e_i & 1 \leq i \leq d, \\ e_i \cos \theta_i + e_{h+i-d} \sin \theta_i, & d < i \leq h, \\ e_{h+i-d}, & h < i \leq k. \end{cases}$$

Se E_1 ed E_2 sono sottospazi affini di \mathbb{R}^n , chiameremo *angoli principali* tra E_1 ed E_2 gli angoli principali della coppia dei sottospazi vettoriali associati

$$V = \{p_1 - p_2 \mid p_1, p_2 \in E_1\} \quad \text{e} \quad W = \{p_1 - p_2 \mid p_1, p_2 \in E_2\}.$$

Triangolazione delle varietà differenziabili. Consideriamo dapprima il caso di una varietà differenziabile compatta M . Per il teorema d'immersione di Whitney possiamo supporre che M sia una sottovarietà differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ di \mathbb{R}^n .

Fissiamo un $\epsilon > 0$ e un sottoinsieme finito $\{p_k \mid 1 \leq k \leq \nu\}$ di punti di M , con

$$\inf_k |p - p_k| < \epsilon, \quad \forall p \in M.$$

Gli insiemi

$$\bar{\sigma}_k^n = \{p \in M \mid |p - p_k| \leq |p - p_j|, \quad \forall j \neq k\}$$

formano un ricoprimento di M mediante chiusi due a due senza punti interni in comune. Osserviamo poi che

$$(*) \quad \bar{\sigma}_k^m \subset B_M(p_k, \epsilon) = \{p \in M \mid |p - p_k| < \epsilon\}.$$

Infatti, se $p \notin B_M(p_k, \epsilon)$, esiste un punto p_j con $j \neq k$ e $|p - p_j| < \epsilon \leq |p - p_k|$.

Definiamo poi

$$(33.5) \quad \bar{\sigma}(p) = \bigcap \{\bar{\sigma}_k^m \mid p \in \bar{\sigma}_k^m\}.$$

TEOREMA 33.3.17. *Se $\epsilon > 0$ è sufficientemente piccolo, gli insiemi $\bar{\sigma}(p)$ sono le celle chiuse di una partizione CW di M .*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni coppia di interi j, k con $1 \leq j \neq k \leq \nu$, indichiamo con $L_{j,k} = L_{k,j} = \{p \in \mathbb{R}^n \mid |p - p_j| = |p - p_k|\}$ l'iperpiano ortogonale al segmento $p_j p_k$ per il suo punto medio. Sia poi $S_{j,k} = \{p \in \mathbb{R}^n \mid |p - p_j| < |p - p_k|\}$, il semispazio limitato da $L_{j,k}$ che contiene p_j . Quindi

$$(33.6) \quad \sigma_k = \{p \in \mathbb{R}^n \mid |p - p_k| < |p - p_j|, \forall j \neq k\}$$

è un'intersezione finita di semispazi aperti e quindi è un poliedro convesso aperto, non necessariamente limitato. La chiusura della sua intersezione con M è contenuta nella palla di centro p_k e raggio ϵ , e quindi limitata.

Sia $d = n - m$ ed indichiamo con N_p , per ogni $p \in M$, il d -piano per p dello spazio affine \mathbb{R}^n , ortogonale a $T_p M$.

Supponiamo che, per una coppia j, k di indici distinti, l'iperpiano $L_{j,k}$ e il d -piano N_{p_k} si intersechino in un punto q di \mathbb{R}^n . La sfera $\{p \in \mathbb{R}^n \mid |p - q| = |p_k - q|\}$ è tangente ad M in p_k e contiene il punto p_j . Infatti per costruzione i punti p_j, p_k, q sono i tre vertici di un triangolo isoscele con base $p_j p_k$ (l'altezza dal vertice q interseca la base $p_j p_k$ nel suo punto medio).

Poiché M è una sottovarietà compatta di classe \mathcal{C}^∞ , possiamo scegliere $\epsilon > 0$ in modo tale che nessuna sfera di raggio 2ϵ in \mathbb{R}^n , tangente ad M in un punto p , la intesechi in un altro punto distinto da p . Quindi, se $L_{j,k}$ interseca $\bar{\sigma}_k^m$, allora $L_{j,k} \cap N_{p_k}$ o è vuoto, oppure tutti i suoi punti hanno distanza maggiore di 2ϵ da p_k .

Ancora, scegliendo $\epsilon > 0$ sufficientemene piccolo, possiamo fare in modo che, per ogni $\bar{p} \in M$, la $B_M(\bar{p}, \epsilon) = \{p \in M \mid |p - \bar{p}| < \epsilon\}$ sia una m -cella, che la proiezione ortogonale di $B_M(\bar{p}, \epsilon)$ sul piano tangente $T_{\bar{p}} M$ sia un omeomorfismo con l'immagine, e che ogni secante $p' p''$ con $p', p'' \in B_M(\bar{p}, \epsilon)$ formi un angolo minore o uguale di $\pi/4$ con $T_{\bar{p}} M$.

Un semipiano $d + 1$ -dimensionale Σ_{d+1} , con bordo N_{p_k} , interseca $T_{p_k} M$ in una semiretta chiusa τ e la palla $B_M(p_k, \epsilon)$ in un arco radiale κ che si proietta ortogonalmente su τ . Sia $L_{j,k}$ un semipiano che interseca la frontiera di $\bar{\sigma}_k^m$. L'arco κ interseca $L_{j,k}$ trasversalmente in un unico punto. Altrimenti, $L_{j,k}$ conterrebbe una retta ℓ , secante ad M in due punti tra loro distanti meno di 2ϵ , che formerebbe un angolo minore o uguale di $\pi/4$ con $T_{p_k} M$. Per (*), questa retta intersecherebbe N_{p_k} in un punto a distanza minore di $\epsilon\sqrt{2} < 2\epsilon$ da p_k , contraddicendo la scelta di ϵ . Questo dimostra che ogni arco radiale interseca la frontiera di $\bar{\sigma}_k^m$ in un solo punto, e che quindi $\bar{\sigma}_k^m$ è la chiusura di una m -cella di M .

Se \bar{p} non è punto interno di una cella m -dimensionale $\bar{\sigma}_k^m$, allora appartiene ad un iperpiano $L_{j,k}$. Pur di scegliere ϵ sufficientemente piccolo, possiamo supporre che i primi d angoli principali di $L_{j,k}$ con i sottospazi N_p , per $p \in M$ e $|p - \bar{p}| < 2\epsilon$, abbiano ampiezza minore di $\pi/4$. Fissiamo un sottospazio vettoriale W di dimensione d dello spazio vettoriale tangente di $L_{j,k}$, che formi angoli principali minori di $\pi/4$ con tutti gli N_p con $|p - \bar{p}| < 2\epsilon$. Abbiamo scelto $\epsilon > 0$ in modo che $L_{j,k}$ formi un angolo minore di $\pi/4$ con N_p . La proiezione lungo la direzione di un vettore tangente ad $L_{j,k}$ che formi un angolo minore di $\pi/4$ con N_p definisce un diffeomorfismo di $\bar{\sigma}(p)$ con un convesso di $T_p M$. Questo dimostra che $\bar{\sigma}(p)$ è chiusura di una cella aperta. Questo completa la dimostrazione. \square

Nel caso di una varietà non compatta, dobbiamo utilizzare invece di una costante ϵ , un'opportuna funzione $\epsilon(p)$ a valori positivi. Poiché ogni varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^1 ha un atlante compatibile di classe \mathcal{C}^ω , otteniamo il

TEOREMA 33.3.18. *Ogni varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, è triangolarizzabile.*

Fibrati principali differenziabili

La nozione di fibrato principale generalizza il metodo del riferimento mobile introdotto per lo studio delle curve gobbe ed è fondamentale nell'impostazione di Cartan del problema dell'equivalenza di strutture geometrico-differenziali.

34.1. Prime definizioni

DEFINIZIONE 34.1.1. Siano $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato differenziabile e \mathbf{G} un gruppo di Lie. Un'azione differenziabile a destra di \mathbf{G} su ξ è un'azione differenziabile a destra di \mathbf{G} su P che operi sulle fibre di ξ .

Richiediamo cioè che

$$(34.1) \quad P_p a = P_p, \quad \forall p \in M, \quad \forall a \in \mathbf{G}, \quad \text{ovvero che } \pi \circ R_a = \pi, \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

In particolare, per ogni $a \in \mathbf{G}$, la traslazione a destra R_a su P definisce un'equivalenza di ξ in sé.

DEFINIZIONE 34.1.2. Un fibrato \mathbf{G} -principale è il dato di un fibrato differenziabile ξ , di un gruppo di Lie \mathbf{G} , che si dirà il suo gruppo strutturale, e di un'azione differenziabile a destra di \mathbf{G} su ξ che sia libera e transitiva sulle fibre di ξ .

Richiediamo cioè che valga la (34.1) e che inoltre

$$(34.2) \quad \forall p \in M, \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in P_p, \quad \exists! a \in \mathbf{G} \text{ tale che } \sigma_2 = \sigma_1 \cdot a.$$

Indicheremo nel seguito con $\sigma_1^{-1}\sigma_2$ l'unico elemento $a \in \mathbf{G}$ per cui $\sigma_2 = \sigma_1 \cdot a$.

Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato \mathbf{G} -principale.

Per il teorema delle funzioni implicite, una sommersione differenziabile ammette in ogni punto un'inversa destra locale. Poiché un'inversa destra locale di π è una sezione locale del fibrato ξ , abbiamo:

LEMMA 34.1.3. Per ogni $\sigma_0 \in P$ esiste un intorno aperto U di $p_0 = \pi(\sigma_0)$ in M ed una sezione $\sigma \in \Gamma_\xi(U, P)$ tale che $\sigma(p_0) = \sigma_0$. \square

COROLLARIO 34.1.4. Ogni fibrato principale differenziabile è localmente banale.

DIMOSTRAZIONE. Se U è un aperto di M e $\sigma \in \Gamma_\xi(U, P)$ una sezione di ξ su U , l'applicazione $U \times \mathbf{G} \ni (p, a) \rightarrow \sigma(p)a \in \pi^{-1}(U)$ è una trivializzazione di ξ su U . La tesi segue quindi dal Lemma 34.1.3 \square

COROLLARIO 34.1.5. Un fibrato principale $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ è banale se e soltanto se ammette una sezione globale $\sigma \in \Gamma_\xi(M, P)$. \square

DEFINIZIONE 34.1.6. Un suo atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ è il dato di un ricoprimento aperto $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ di M e, per ogni indice $\alpha \in I$, di una sezione $\sigma_\alpha \in \Gamma_\xi(U_\alpha, P)$.

Alla coppia $(U_\alpha, \sigma_\alpha)$ corrisponde la *trivializzazione locale*

$$(34.3) \quad \tilde{\sigma}_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \ni (p, a) \longrightarrow \sigma_\alpha(p) \cdot a \in P|_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha).$$

Per ogni coppia di indici $\alpha, \beta \in I$, con $U_{\alpha, \beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, otteniamo una funzione $\psi_{\alpha, \beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha, \beta}, \mathbf{G})$, definita da

$$(34.4) \quad \psi_{\alpha, \beta} : U_{\alpha, \beta} \ni p \longrightarrow [\sigma_\alpha(p)]^{-1} \sigma_\beta(p) \in \mathbf{G}.$$

Le $\{\psi_{\alpha, \beta} \mid U_{\alpha, \beta} \neq \emptyset\}$ si dicono le *funzioni di transizione* dell'atlante \mathcal{A} .

PROPOSIZIONE 34.1.7. Siano ξ un fibrato principale ed $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ un suo atlante di trivializzazione. Le sue funzioni di transizione $\{\psi_{\alpha, \beta}\}$ soddisfano le condizioni

$$(34.5) \quad \psi_{\alpha, \alpha}(p) = e, \quad \forall p \in U_{\alpha, \alpha} = U_\alpha,$$

$$(34.6) \quad \psi_{\alpha, \beta} \psi_{\beta, \gamma} = \psi_{\alpha, \gamma} \quad \text{su } U_{\alpha, \beta, \gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma. \quad \square$$

TEOREMA 34.1.8. Siano M una varietà differenziabile, \mathbf{G} un gruppo di Lie, $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di M e $\Psi = \{\psi_{\alpha, \beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha, \beta}, \mathbf{G}) \mid U_{\alpha, \beta} \neq \emptyset\}$ una famiglia di funzioni che soddisfino le (34.5), (34.6). Allora esiste un fibrato principale ξ su M , con gruppo strutturale \mathbf{G} , per cui le $\psi_{\alpha, \beta}$ siano le funzioni di transizione di un atlante di trivializzazione corrispondente al ricoprimento $\{U_\alpha\}$. Tale fibrato è unico, a meno di diffeomorfismi che commutino con l'azione di \mathbf{G} .

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo, a partire dalla famiglia Ψ , l'unione disgiunta

$$P^\sharp = \bigsqcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times \mathbf{G}.$$

Per le (34.5) e (34.6), la

$$U_\alpha \times \mathbf{G} \ni (p, a) \sim (q, b) \in U_\beta \times \mathbf{G} \iff (p = q, a = \psi_{\alpha, \beta}(p)b)$$

è una relazione d'equivalenza su P^\sharp . Poniamo $P = P^\sharp / \sim$ ed indichiamo con $\iota_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \rightarrow P^\sharp$ le applicazioni naturali. Detta $\varpi : P^\sharp \rightarrow P$ la proiezione nel quoziente, otteniamo per ogni α applicazioni

$$\tilde{\sigma}_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \xrightarrow{\iota_\alpha} \iota_\alpha(U_\alpha \times \mathbf{G}) \subset P^\sharp \xrightarrow{\varpi} \varpi \circ \iota_\alpha(U_\alpha \times \mathbf{G}) = P|_{U_\alpha},$$

che sono omeomorfismi su aperti di P . Risulta allora definita su P un'unica struttura di varietà differenziabile che renda le $\tilde{\sigma}_\alpha$ diffeomorfismi.

Definiamo $\pi : P \rightarrow M$ in modo che, per ogni indice α , il diagramma (ove la seconda freccia orizzontale è l'inclusione)

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbf{G} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_\alpha} & P \\ \text{pr}_{U_\alpha} \downarrow & & \downarrow \pi \\ U_\alpha & \longrightarrow & M \end{array}$$

sia commutativo. Otteniamo così un fibrato differenziabile $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$, su cui definiamo un'azione a destra di \mathbf{G} mediante il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbf{G} \times \mathbf{G} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_\alpha \times \text{id}_\mathbf{G}} & P \times \mathbf{G} \\ \downarrow (p,a,b) \rightarrow (p,ab) & & \downarrow (\sigma,a) \rightarrow \sigma \cdot a \\ U_\alpha \times \mathbf{G} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_\alpha} & P. \end{array}$$

Abbiamo cioè
$$\begin{cases} \pi(\tilde{\sigma}_\alpha(p, a)) = p, \\ \tilde{\sigma}_\alpha(p, a) \cdot b = \tilde{\sigma}_\alpha(p, ab). \end{cases}$$

In questo modo $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ acquista una struttura di fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} .

Per ogni α ,

$$\sigma_\alpha : U_\alpha \ni p \longrightarrow \tilde{\sigma}_\alpha(p, e) \in P$$

è una sezione differenziabile di ξ su U_α ed $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$ un suo atlante di trivializzazione, con funzioni di transizione $\{\psi_{\alpha,\beta}\}$.

Se $\xi' = (P' \xrightarrow{\pi'} M)$ è un altro fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} , che ammette un atlante di trivializzazione $\mathcal{A}' = \{(U_\alpha, \sigma'_\alpha) \mid \alpha \in I\}$, con $\sigma'^{-1}_\alpha \sigma'_\beta = \psi_{\alpha,\beta}$, definiamo un'equivalenza $f : P \rightarrow P'$ ponendo

$$f(\tilde{\sigma}_\alpha(p, a)) = \sigma'_\alpha(p) \cdot a, \quad \forall \alpha \in I, \quad p \in U_\alpha, \quad a \in \mathbf{G}.$$

La condizione che le $\{\psi_{\alpha,\beta}\}$ siano le funzioni di transizione di \mathcal{A}' ci dice che la f è ben definita. \square

34.2. L'esempio degli spazi omogenei

Gli spazi omogenei sono una classe fondamentale di fibrati principali. Dal Teorema 24.8.1 segue infatti:

TEOREMA 34.2.1. *Sia M una varietà differenziabile e \mathbf{G} un gruppo di Lie che opera transitivamente su M . Sia \mathbf{H} lo stabilizzatore di un punto $p_0 \in M$ e*

$$\pi : \mathbf{G} \ni x \longrightarrow xp_0 \in M.$$

Allora $\xi = (\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M)$ è un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{H} . \square

34.3. Morfismi di fibrati principali

Siano $\xi_i = (P_i \xrightarrow{\pi_i} M_i)$, $i = 1, 2$, due fibrati principali, con gruppi strutturali \mathbf{G}_i . Saremo interessati essenzialmente ai casi in cui i due gruppi siano o uguali, oppure uno un sottogruppo dell'altro.

DEFINIZIONE 34.3.1. Un *morfismo di fibrati principali* $\Phi : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è una tripletta (f, F, ϕ) in cui la coppia (f, F) definisca un morfismo di fibrati differenziabili

$$(34.7) \quad \begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{F} & P_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2, \end{array}$$

e $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ sia un omomorfismo di gruppi di Lie che renda commutativo il diagramma

$$(34.8) \quad \begin{array}{ccc} P_1 \times \mathbf{G}_1 & \xrightarrow{F \times \phi} & P_2 \times \mathbf{G}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_1 & \xrightarrow{F} & P_2, \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono definite dalle azioni dei gruppi.

Diciamo che $\Phi = (f, F, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ induce f tra le basi, F tra gli spazi totali e ϕ tra i gruppi di Lie.

Diciamo che $\Phi = (f, F, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è un'immersione se F è un'immersione. In questo caso ϕ è un monomorfismo di gruppi.

Se $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}$ e ϕ è l'identità, diciamo che $\Phi : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è un morfismo di \mathbf{G} -fibrati principali.

Se F è un'inclusione, diciamo che $\Phi = (f, F, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è un'inclusione di fibrati principali. In questo caso, se $M_1 = M_2$ ed $f = \text{Id}_M$, diciamo che ξ_1 è un *sottofibrato principale* di ξ_2 , o che è stato ottenuto da ξ_2 mediante una *riduzione del gruppo strutturale*, ovvero che ξ_2 è stato ottenuto da ξ_1 mediante un'estensione del gruppo strutturale.

PROPOSIZIONE 34.3.2. Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} , e \mathbf{G}' un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} . Condizione necessaria e sufficiente affinché ξ ammetta una riduzione del gruppo strutturale a \mathbf{G}' è che ammetta un atlante di trivializzazione con funzioni di transizione a valori in \mathbf{G}' .

DIMOSTRAZIONE. La condizione è ovviamente necessaria. Dimostriamone la sufficienza.

Fissato un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ di ξ con funzioni di transizione $\psi_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, \mathbf{G}')$, sia

$$P' = \bigcup_{\alpha \in I} \{\sigma_\alpha(p) \cdot a \mid p \in U_\alpha, a \in \mathbf{G}'\}.$$

Con la struttura differenziabile per cui le

$$\Psi'_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G}' \ni (p, a) \longrightarrow \sigma(p) \cdot a \in P' \cap P_{U_\alpha}$$

siano diffeomorfismi, P' è una sottovarietà differenziabile di P . La restrizione $\pi' = \pi|_{P'}$ definisce un sottofibrato differenziabile $\xi' = (P' \xrightarrow{\pi'} M)$, che è principale con gruppo strutturale \mathbf{G}' , ed è una riduzione di ξ a \mathbf{G}' . \square

OSSERVAZIONE 34.3.3. Se ξ è un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} , e \mathbf{G} è un sottogruppo di Lie di un gruppo di Lie \mathbf{G}' , esiste unico, a meno di equivalenze, un fibrato principale ξ' che si ottiene da ξ per estensione a \mathbf{G}' del gruppo strutturale. Ciò è facile conseguenza del Teorema 34.1.8.

LEMMA 34.3.4. *Il pullback di un fibrato \mathbf{G} -principale ha un'unica struttura di fibrato \mathbf{G} -principale che rende l'applicazione naturale associata un morfismo di fibrati \mathbf{G} -principali.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\eta = (Q \xrightarrow{\pi_\eta} N)$ un fibrato \mathbf{G} -principale. Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ e consideriamo il pullback $f^*(\eta)$ di η mediante f . Il suo spazio totale è

$$E_{f^*(\eta)} = \{(p, \tau) \mid p \in M, \tau \in Q, \pi_\eta(\tau) = f(p)\}$$

ed è un fibrato \mathbf{G} -principale per l'azione

$$(34.9) \quad (p, \tau) \cdot a = (p, \tau \cdot a), \quad \forall (p, \tau) \in E_{f^*(\eta)}, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Si verifica immediatamente che il morfismo associato, $(f, \hat{f}, \text{id}_{\mathbf{G}}) : f^*(\eta) \rightarrow \eta$, con $\hat{f}(p, \tau) = \tau$, è un morfismo di fibrati \mathbf{G} -principali. \square

DEFINIZIONE 34.3.5. Il pullback $f^*(\eta)$, con la struttura di fibrato \mathbf{G} -principale definita dalla (34.9), si dice il *pullback* o *immagine inversa* del fibrato \mathbf{G} -principale η .

I morfismi di fibrati \mathbf{G} -principali sono completamente determinati dalle applicazioni indotte tra le basi. Vale infatti la

PROPOSIZIONE 34.3.6. *Siano $\xi = (P \xrightarrow{\pi_\xi} M)$, $\eta = (Q \xrightarrow{\pi_\eta} N)$ due fibrati \mathbf{G} -principali ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché esista un'applicazione differenziabile $F \in \mathcal{C}^\infty(P, Q)$ per cui $(f, F, \text{id}_{\mathbf{G}}) : \xi \rightarrow \eta$ sia un morfismo di fibrati \mathbf{G} -principali, è che ξ sia equivalente ad $f^*(\eta)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi_\xi} M)$ un fibrato \mathbf{G} -principale per cui esista un morfismo $(f, F, \text{id}_{\mathbf{G}}) : \xi \rightarrow \eta$ di fibrati \mathbf{G} -principali.

Allora $(\text{id}_M, \check{F}, \text{id}_{\mathbf{G}}) : \xi \rightarrow f^*(\eta)$, con $\check{F}(\sigma) = (\pi_\xi(\sigma), F(\sigma)) \in E_{f^*(\eta)}$ per $\sigma \in P$ è un'equivalenza di fibrati \mathbf{G} -principali. \square

PROPOSIZIONE 34.3.7. *Siano M, N due varietà differenziabili, \mathbf{G} un gruppo di Lie e $\xi = (P \xrightarrow{\pi} N)$ un fibrato principale su N con gruppo strutturale \mathbf{G} . Abbiamo:*

- (1) *Se $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ sono omotope, allora $f_0^*(\xi)$ e $f_1^*(\xi)$ sono equivalenti.*
- (2) *Se M è contrattile, ogni \mathbf{G} -fibrato principale di base M è banale.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Sia $\tilde{f} = \{f_t\} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ un'omotopia tra f_0 ed f_1 e consideriamo il fibrato \mathbf{G} -principale $\tilde{f}^*(\xi)$. L'equivalenza si ottiene utilizzando l'esistenza di una \mathbf{G} -connessione principale sul fibrato $\tilde{f}^*(\xi)$ ed il corrispondente trasporto parallelo¹ (vedi §??) lungo le curve $t \rightarrow (p, t)$ in $M \times \mathbb{R}$.

(2) Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato \mathbf{G} -principale. Supponiamo che M sia contrattile e sia $\tilde{f} = \{f_t\} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, M)$ un'omotopia con $f_1 = \text{id}_M$ ed f_0 costante. Per il punto (1), $\xi \simeq f_1^*(\xi)$ ed $f_0^*(\xi)$, che è un fibrato banale, sono equivalenti. \square

¹Per un argomento topologico, che non faccia uso della struttura differenziabile e dell'esistenza di connessioni principali, si veda il Teorema 3.7.2 nell'appendice.

34.4. Classificazione dei fibrati principali

La Proposizione 34.3.7 è fondamentale per la classificazione dei fibrati principali con base M . John Milnor² ha introdotto la nozione di fibrato universale.

DEFINIZIONE 34.4.1. Un fibrato \mathbf{G} -principale $\zeta = (E_\zeta \xrightarrow{\pi_\zeta} B_\zeta)$ si dice *m-universale* se per ogni fibrato \mathbf{G} -principale $\xi = (E_\xi \xrightarrow{\pi_\xi} B_\xi)$ con una base B_ξ di dimensione minore o uguale ad m esiste un'applicazione $f \in \mathcal{C}^\infty(B_\xi, B_\zeta)$, unica a meno di omotopia, tale che $f^*(\zeta)$ sia equivalente a ξ .

Utilizzando i risultati di §3.8 e quelli relativi all'approssimazione \mathcal{C}^∞ dell'omotopia, ricaviamo dal Teorema 3.8.6 l'enunciato

TEOREMA 34.4.2. *Ogni fibrato $\zeta = (E_\zeta \xrightarrow{\pi_\zeta} B_\zeta)$ il cui spazio totale E_ζ sia m -connesso³ è m -universale.*

34.4.1. Alcuni esempi. Costruiamo in questo paragrafo alcuni fibrati principali m -universali rispetto ad alcuni gruppi classici.

Sottogruppi del gruppo ortogonale. Fissiamo due interi positivi m ed n e consideriamo $\mathbf{SO}(m)$ ed $\mathbf{SO}(n)$ come sottogruppi disgiunti di $\mathbf{SO}(m+n)$, ciascuno contenuto nel commutatore dell'altro. Il quoziente $E = \mathbf{SO}(m+n)/\mathbf{SO}(n)$ si può identificare alla varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{R})$ delle m -uple ortonormali di \mathbb{R}^{m+n} . Fissiamo un sottogruppo chiuso \mathbf{G} di $\mathbf{SO}(m)$ e poniamo $M = \mathbf{SO}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SO}(n))$. L'inclusione $\{e\} \times \mathbf{SO}(n) < \mathbf{G} \times \mathbf{SO}(n)$ definisce un'applicazione $\mathbf{SO}(m+n)$ -equivariante $\pi : E \rightarrow M$ che definisce un \mathbf{G} -fibrato principale. Ricordiamo che la varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{R})$ delle m -uple ortonormali di \mathbb{R}^{m+n} è $(n-1)$ -connessa e che

$$\pi_n(\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

DEFINIZIONE 34.4.3. Chiamiamo

$$(34.10) \quad \mathbf{SO}(m+n)/\mathbf{SO}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SO}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SO}(n))$$

l' n -fibrato principale ortogonale standard con gruppo strutturale $\mathbf{G} \subset \mathbf{SO}(m)$.

Il fibrato (34.10) è \mathbf{G} -principale $(n-1)$ -universale.

Sottogruppi del gruppo speciale unitario. Siano m, n due interi positivi e consideriamo $\mathbf{SU}(m)$ ed $\mathbf{SU}(n)$ come sottogruppi disgiunti di $\mathbf{SU}(m+n)$ contenuti

² John Milnor *Construction of Universal Bundles, I* Annals of Mathematics Second Series, Vol. 63, No. 2 (Mar., 1956), pp. 272-284, e *Construction of Universal Bundles, II*, Annals of Mathematics Second Series, Vol. 63, No. 3 (May, 1956), pp. 430-436.

³Ricordiamo che uno spazio topologico E è m -connesso se è connesso per archi ed i suoi gruppi di omotopia $\pi_i(E)$ sono banali per $1 \leq i \leq n$.

ciascuno nel commutatore dell'altro. Il quoziente $E = \mathbf{SU}(m+n)/\mathbf{SU}(n)$ è la varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{m+n,n}(\mathbb{C})$. È

$$\pi_q(\mathbb{V}_{m+n,n}(\mathbb{C})) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq q < 2n, \\ \mathbb{Z} & \text{se } q = 2n. \end{cases}$$

Se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{SU}(m)$, la proiezione naturale $\pi : E \rightarrow M$ su $M = \mathbf{SU}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SU}(n))$ definita dall'inclusione $\{e\} \times \mathbf{SU}(n) < \mathbf{G} \times \mathbf{SU}(n)$ definisce un \mathbf{G} -fibrato principale.

DEFINIZIONE 34.4.4. Chiamiamo

$$(34.11) \quad \mathbf{SU}(m+n)/\mathbf{SU}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SU}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SU}(n))$$

l' n -fibrato principale unitario standard con gruppo strutturale $\mathbf{G} \subset \mathbf{SU}(m)$.

Il fibrato (34.11) è \mathbf{G} -principale $(2n-1)$ -universale.

Sottogruppi del gruppo unitario simplettico. Ricordiamo che il gruppo unitario simplettico $\mathbf{Sp}(n)$ è il sottogruppo delle trasformazioni di $\mathbf{U}(2n)$ che lasciano invariante la forma alternata $\omega = dz^1 \wedge dz^{n+1} + \dots + dz^{2n-1} \wedge dz^{2n}$. Siano m, n interi positivi e consideriamo $\mathbf{Sp}(m)$ ed $\mathbf{Sp}(n)$ come sottogruppi di $\mathbf{Sp}(m+n)$, ciascuno contenuto nel commutatore dell'altro. Il quoziente $\mathbf{Sp}(m+n)/\mathbf{Sp}(n)$ è la varietà di Stiefel quaternionica $\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{H})$ delle m -uple ortonormali rispetto al prodotto scalare quaternionico standard di \mathbb{H}^n . Abbiamo

$$\pi_q(\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{H})) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq q < 4n, \\ \mathbb{Z} & \text{se } q = 4n. \end{cases}$$

Se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{Sp}(m)$, la proiezione naturale $\pi : E \rightarrow M$ su $M = \mathbf{Sp}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n))$ definita dall'inclusione $\{e\} \times \mathbf{Sp}(n) < \mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n)$ definisce un \mathbf{G} -fibrato principale.

DEFINIZIONE 34.4.5. Chiamiamo

$$(34.12) \quad \mathbf{Sp}(m+n)/\mathbf{Sp}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{Sp}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n))$$

l' n -fibrato principale quaternionico standard con gruppo strutturale $\mathbf{G} \subset \mathbf{Sp}(m)$.

Il fibrato (34.12) è \mathbf{G} -principale $(4n-1)$ -universale.

Sottogruppi del gruppo lineare. Siano m ed n interi positivi. Consideriamo $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ ed $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ come due sottogruppi disgiunti di $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})$ che commutano tra loro. Le loro rappresentazioni in $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})$ sono date rispettivamente da

$$\begin{aligned} \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \ni x &\rightarrow \begin{pmatrix} x & \\ & \text{sgn}(\det x)I_n \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \\ \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \ni x &\rightarrow \begin{pmatrix} I_m & \\ & x \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Per la decomposizione di Cartan, $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ è omotopicamente equivalente al quoziente $\mathbf{SO}(m+n)/\mathbf{SO}(n)$ ed è quindi $(n-1)$ -connesso. Ne segue che, se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$, allora

$$(34.13) \quad \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/(\mathbf{G} \times \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}))$$

è un fibrato \mathbf{G} -principale $(n-1)$ -universale.

Costruzioni analoghe ci permettono di ottenere fibrati \mathbf{G} -principali k -universali per sottogruppi chiusi di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{C})$ e $\mathbf{GL}_m(\mathbb{H})$.

34.5. Il fibrato dei sistemi di riferimento

Sia $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ un fibrato vettoriale di rango n su una varietà differenziabile M di dimensione m . Per ogni punto p di M indichiamo con $F_p(\eta)$ l'insieme di tutti gli isomorfismi lineari $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow E_p$. Su $F_p(\eta)$ il gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ agisce, per composizione a destra, in modo libero e transitivo. L'unione disgiunta $F(\eta) = \sqcup_{p \in M} F_p(\eta)$ è lo spazio totale di un fibrato principale $\mathbb{L}(\eta) = (F(\eta) \xrightarrow{\pi} M)$, con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. La proiezione $\pi : \mathbb{L}(\eta) \rightarrow M$ associa a $\sigma \in \mathbb{L}_p(\eta)$ il punto p .

DEFINIZIONE 34.5.1. Il fibrato principale $F(\eta)$, con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, si dice il *fibrato dei sistemi di riferimento* di η .

Abbiamo un morfismo differenziabile di fibrati vettoriali, associato al diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}(\eta) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{(\sigma, v) \rightarrow \sigma v} & E \\ \text{pr}_{\mathbb{L}(\eta)} \downarrow & & \downarrow \varpi \\ \mathbb{L}(\eta) & \xrightarrow{\pi} & M, \end{array}$$

che ci mostra come il pullback del fibrato vettoriale allo spazio totale dei suoi sistemi di riferimento sia un fibrato vettoriale banale.

Una trivializzazione locale di $\mathbb{L}(\eta)$ è descritta dal dato di n sezioni $s_1, \dots, s_n \in \Gamma_\eta(U, E)$, definite su un aperto U di M , per cui $s_1(p), \dots, s_n(p)$ siano linearmente indipendenti in E_p per ogni $p \in U$. Ad esse associamo la sezione $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{L}(\eta)}(U, \mathbb{L}(\eta))$ definita da

$$\sigma(p) : \mathbb{R}^n \ni (k^1, \dots, k^n) \rightarrow \sum_{i=1}^n k^i s_i(p) \in E_p.$$

Il fibrato dei sistemi di riferimento di η è caratterizzato dal fatto che le sue sezioni locali definiscono trivializzazioni locali di η . Viceversa, vale la

PROPOSIZIONE 34.5.2. *Ad ogni fibrato principale $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$, con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, possiamo associare un fibrato vettoriale $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ di rango n , unico a meno di equivalenza, di cui ξ sia il fibrato dei sistemi di riferimento.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$ un atlante di trivializzazione di ξ . Le sue funzioni di transizione $\psi_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha\beta}, \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}))$ ci permettono di definire un fibrato vettoriale con fibra tipica \mathbb{R}^n nel modo seguente.

Sull'unione disgiunta $\tilde{E} = \bigsqcup_{\alpha} U_{\alpha} \times \mathbb{R}^n$ introduciamo la relazione di equivalenza $U_{\alpha} \times \mathbb{R}^n \ni (p_{\alpha}, v_{\alpha}) \sim (p_{\beta}, v_{\beta}) \in U_{\beta} \times \mathbb{R}^n$ se $p_{\alpha} = p_{\beta}$ e $v_{\alpha} = \psi_{\alpha, \beta}(p_{\beta})v_{\beta}$. Il quoziente $E = \tilde{E}/\sim$ è lo spazio totale di un fibrato vettoriale di rango n di cui ξ è il fibrato dei sistemi di riferimento.

Se $\eta' = (E' \xrightarrow{\sigma'} M)$ è un altro fibrato vettoriale di cui ξ sia il fibrato dei sistemi di riferimento, definiamo un'applicazione $\tilde{E} \rightarrow E'$ associando a $(p, v) \in U_{\alpha} \times \mathbb{R}^n$ l'elemento $\sigma_{\alpha}(p)v \in E'$. Per passaggio al quoziente otteniamo l'equivalenza tra η ed η' . \square

Abbiamo quindi:

TEOREMA 34.5.3. *La $\eta \longleftrightarrow \mathbb{L}(\eta)$ è una corrispondenza biunivoca tra la categoria dei fibrati vettoriali di rango n su M , modulo equivalenza, e quella dei fibrati principali su M con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, modulo equivalenza.*

DEFINIZIONE 34.5.4. Il fibrato dei sistemi di riferimento del fibrato tangente di una varietà differenziabile M si indica con $F(M)$ e si dice il *fibrato dei sistemi di riferimento su M* . Indichiamo con $L(M)$ il suo spazio totale.

Abbiamo

PROPOSIZIONE 34.5.5. *Ogni diffeomorfismo $f : M_1 \rightarrow M_2$ di varietà differenziabili si rialza in modo unico ad un isomorfismo di fibrati principali che renda commutativo il diagramma*

$$(34.14) \quad \begin{array}{ccc} L(M_1) & \xrightarrow{\tilde{f}} & L(M_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2. \end{array}$$

34.6. Jacobiano di un'applicazione differenziabile

Siano M, N due varietà differenziabili, di dimensioni m, n rispettivamente. Siano $\mathbb{L}(M) = (L(M) \xrightarrow{\pi_M} M)$ ed $\mathbb{L}(N) = (L(N) \xrightarrow{\pi_N} N)$ i loro fibrati dei sistemi di riferimento. Ad una $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M, N)$ associamo il fibrato $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ -principale \mathbb{L}_f su M , con spazio totale

$$\mathbb{L}_f = \{(\sigma, \tau) \in L(M) \times L(N) \mid \pi_N(\tau) = f(\pi_M(\sigma))\}$$

e proiezione $\pi(\sigma, \tau) = \pi_M(\tau)$. Al differenziale della f è associato il suo *jacobiano* $\mathcal{J}f : \mathbb{L}_f \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{J}f(\sigma, \tau) = \tau^{-1} \circ df \circ \sigma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

nei sistemi di riferimento σ e τ .

34.7. Riduzione del gruppo strutturale e G-strutture

Il Teorema 34.5.3 stabilisce una corrispondenza biunivoca tra fibrati vettoriali e fibrati principali con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Osserviamo che, se, nella dimostrazione della Proposizione 34.5.2, avessimo ristretto la costruzione ad un sottofibrato principale ξ' di ξ , con gruppo strutturale $\mathbf{G} < \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, avremmo ottenuto un fibrato vettoriale canonicamente isomorfo a quello associato a ξ .

Siano $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ un fibrato vettoriale reale di rango n e \mathbf{G} un sottogruppo di Lie di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

DEFINIZIONE 34.7.1. Un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione di η è un suo atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ con funzioni di transizione $\psi_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha\beta}, \mathbf{G})$.

Due \mathbf{G} -atlanti di trivializzazione \mathcal{A} ed \mathcal{A}' , sono *equivalenti* se $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ è ancora un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione.

L'unione di tutti i \mathbf{G} -atlanti di trivializzazione equivalenti ad un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione assegnato è un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione massimale.

Una \mathbf{G} -struttura, o *riduzione a \mathbf{G} del gruppo strutturale* è il dato di una classe di equivalenza di \mathbf{G} -atlanti di trivializzazione di η , ovvero di un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione massimale.

Una carta locale di trivializzazione (U, σ_U) di η è *compatibile* con la \mathbf{G} -struttura se appartiene al suo \mathbf{G} -atlante di trivializzazione massimale.

Osserviamo che un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ di η determina un fibrato \mathbf{G} -principale $F_{\mathbf{G}}(\eta)$, ottenuto da $F(\eta)$ per riduzione del gruppo strutturale, con spazio totale

$$(34.15) \quad \mathbb{L}_{\mathbf{G}}(\eta) = \bigcup_{\alpha \in I} \{\sigma_\alpha(p)a \mid p \in U_\alpha, a \in \mathbf{G}\} \subset \mathbb{L}(\eta).$$

DEFINIZIONE 34.7.2. Chiamiamo $F_{\mathbf{G}}(\eta)$ un fibrato di \mathbf{G} -sistemi di riferimento di η .

Siano $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ ed $\eta' = (E' \xrightarrow{\varpi'} M')$ due fibrati vettoriali di rango n . Un isomorfismo di fibrati vettoriali

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\ \varpi \downarrow & & \downarrow \varpi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

si rialza ad un isomorfismo dei corrispondenti fibrati dei sistemi di riferimento

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}(\eta) & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & \mathbb{L}(\eta') \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M', \end{array} \quad \text{con } \tilde{f}_*(\sigma) = \tilde{f}' \circ \sigma \in \mathbb{L}_{\pi(\sigma)}(\mathbb{R}^n, E'_{\pi(\sigma)}).$$

DEFINIZIONE 34.7.3. Siano η, η' due fibrati vettoriali dello stesso rango, dotati di una \mathbf{G} -struttura. Un isomorfismo (f, \tilde{f}) di η in η' è un \mathbf{G} -isomorfismo se

$$(34.16) \quad \tilde{f}_*(L_{\mathbf{G}}(\eta)) = L_{\mathbf{G}}(\eta').$$

Se i due fibrati hanno la stessa base ed f è l'identità, chiamiamo il corrispondente \mathbf{G} -isomorfismo una \mathbf{G} -equivalenza.

PROPOSIZIONE 34.7.4. Sia $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ un fibrato vettoriale di rango n . A meno di equivalenza, le \mathbf{G} -strutture su η sono in corrispondenza biunivoca con le \mathbf{G} -riduzioni del fibrato $F(\eta)$ dei suoi sistemi di riferimento. \square

Sia \mathbf{G} un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$. Se $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ è un ricoprimento aperto di M , indichiamo con $\mathfrak{C}^q(\mathcal{U}, \mathbf{G})$ l'insieme delle q -catene di applicazioni di classe \mathcal{C}^∞ del ricoprimento \mathcal{U} , a valori in \mathbf{G} :

$$(34.17) \quad \mathfrak{C}^q(\mathcal{U}, \mathbf{G}) = \{(g_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q} \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q}, \mathbf{G}))\}.$$

Indichiamo poi con

$$(34.18) \quad \mathfrak{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbf{G}) = \{(g_{\alpha, \beta} \in \mathfrak{C}^1(\mathcal{U}, \mathbf{G})) \mid g_{\alpha, \beta} g_{\beta, \gamma} = g_{\alpha, \gamma} \text{ su } U_{\alpha, \beta, \gamma}, \forall \alpha, \beta, \gamma\},$$

e scriviamo

$$(34.19) \quad \delta(g_\alpha) = (g_\alpha \circ g_\beta^{-1}) \in \mathfrak{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbf{G}), \quad \forall (g_\alpha) \in \mathfrak{C}^0(\mathcal{U}, \mathbf{G}).$$

PROPOSIZIONE 34.7.5. Siano $(g_{\alpha, \beta}), (g'_{\alpha, \beta}) \in \mathfrak{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbf{G})$ funzioni di transizione delle trivializzazioni di due fibrati vettoriali di rango n

$$\xi = (E \xrightarrow{\varpi} M) \quad e \quad \xi' = (E' \xrightarrow{\varpi'} M)$$

sulla stessa base M , entrambi con gruppo strutturale \mathbf{G} . Condizione necessaria e sufficiente affinché i due fibrati siano \mathbf{G} -equivalenti è che esista una $(h_\alpha) \in \mathfrak{C}^0(\mathcal{U}, \mathbf{G})$ tale che

$$(34.20) \quad g'_{\alpha, \beta} = h_\alpha g_{\alpha, \beta} h_\beta^{-1} \quad \text{su } U_{\alpha, \beta}, \quad \forall \alpha, \beta.$$

In particolare, il fibrato ξ è \mathbf{G} -equivalente al fibrato banale se, e soltanto se, $(g_{\alpha, \beta}) = \delta(h_\alpha)$ per qualche $(h_\alpha) \in \mathfrak{C}^0(\mathcal{U}, \mathbf{G})$. \square

ESEMPIO 34.7.6. Ogni fibrato vettoriale di rango n ammette una $\mathbf{O}(n)$ -struttura. Sia infatti $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ un fibrato vettoriale di rango n ed $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ un suo atlante di trivializzazione, con $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ ricoprimento aperto localmente finito di M . Sia $\{\chi_\alpha\}$ una partizione differenziabile dell'unità subordinata ad \mathcal{U} . Possiamo allora definire un prodotto scalare sulle fibre di E ponendo

$$g(v_1, v_2) = \sum_{U_\alpha \ni p} \chi_\alpha(p) (\sigma_\alpha^{-1}(v_1) \mid \sigma_\alpha^{-1}(v_2)), \quad \forall p \in M, \quad \forall v_1, v_2 \in E_p.$$

La $\mathbf{O}(n)$ struttura su η associata alla metrica g si può ottenere dall'atlante \mathcal{A} applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alle basi $\sigma_\alpha(p)(e_1), \dots, \sigma_\alpha(p)(e_n)$ di E_p rispetto al prodotto scalare $g_p = g|_{E_p}$.

34.8. G-strutture su una varietà differenziabile

Siano M una varietà differenziabile di dimensione m e \mathbf{G} è un sottogruppo di Lie del gruppo lineare⁴ $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$.

DEFINIZIONE 34.8.1. Una \mathbf{G} -struttura su M è una \mathbf{G} -struttura sul suo fibrato tangente.

OSSERVAZIONE 34.8.2. Il concetto di \mathbf{G} -struttura ci permette di considerare in modo concettualmente unitario diverse geometrie su M . Ad esempio:

- un'orientazione su M è equivalente al dato di una $\mathbf{GL}_m^+(\mathbb{R})$ -struttura;
- una misura di Radon di classe \mathcal{C}^∞ di una $\mathbf{SL}(m, \mathbb{R})$ -struttura;
- una metrica Riemanniana di una $\mathbf{O}(m)$ -struttura;
- una struttura quasi-compessa di una $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ -struttura ($m = 2n$ pari);
- una struttura quasi-Hermitiana⁵ di una $\mathbf{U}(n)$ -struttura ($m = 2n$ pari);
- una struttura quasi-simplettica di una $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ -struttura ($m = 2n$)⁶;
- una struttura iper-unitaria di una $\mathbf{Sp}(n)$ -struttura⁷ ($m = 4n$);
- una $\mathbf{1}$ -struttura si dice un *parallelismo completo*.

ESEMPIO 34.8.3. La fibrazione canonica $\mathbf{SO}(n+1) \rightarrow S^n$ è una $\mathbf{SO}(n)$ -riduzione del fibrato dei sistemi di riferimento di S^n e quindi una $\mathbf{SO}(n)$ -struttura su S^n .

La fibrazione canonica $\mathbf{SO}(n+1) \rightarrow \mathbb{RP}^n$ è una $\mathbf{O}(n)$ -riduzione del fibrato dei sistemi di riferimento di \mathbb{RP}^n e quindi una struttura Riemanniana su \mathbb{RP}^n .

La fibrazione canonica $\mathbf{SU}(n+1) \rightarrow \mathbb{CP}^n$ è una $\mathbf{U}(n)$ -riduzione del fibrato dei sistemi di riferimento su \mathbb{CP}^n e quindi una struttura quasi-Hermitiana su \mathbb{CP}^n .

34.9. Fibrati vettoriali associati a rappresentazioni lineari

34.9.1. Fibrati vettoriali associati. La costruzione della Proposizione 34.5.2 si generalizza al caso di fibrati principali generali e di rappresentazioni lineari del loro gruppo strutturale.

Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale su M , con gruppo strutturale \mathbf{G} .

Fissata una rappresentazione lineare di dimensione finita $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$, definiamo su $P \times V$ una relazione di equivalenza ponendo

$$(34.21) \quad (\sigma, v) \sim (\sigma \cdot a, \rho(a^{-1})(v)) \quad \forall \sigma \in P, \forall v \in V, \forall a \in \mathbf{G}.$$

NOTAZIONE 34.9.1. Indicheremo con E_V il quoziente $(P \times V) / \sim$ e scriveremo per semplicità $\sigma_\rho v$, o anche σv , quando si possa sottintendere la rappresentazione ρ senza creare confusione, per indicare la classe in E_V di $(\sigma, v) \in P \times V$. Se $\alpha = \sigma v$,

⁴La nozione di \mathbf{G} -struttura per una varietà differenziabile è stata introdotta in S.S. Chern, *Pseudo-groups continus infinis*, Colloque de Géométrie différentielle, Strasbourg (1953), pp. 119-136.

⁵Affinché si possa parlare di struttura Hermitiana occorre che si possa definire sul fibrato tangente una struttura quasi-compessa che sia un'isometria per la struttura quasi-Hermitiana.

⁶Ricordiamo che $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathbf{SL}(2n, \mathbb{R}) \mid a\Omega a = \Omega\}$ per una matrice antisimmetrica non degenera Ω di tipo $(2n) \times (2n)$.

⁷Ricordiamo che $\mathbf{Sp}(n) = \mathbf{U}(2n) \cap \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$.

il vettore $v \in V$ è univocamente determinato da α e σ . Possiamo quindi denotarlo con $v = \sigma^{-1}\alpha$.

PROPOSIZIONE 34.9.2. *Il quoziente $E_V = (P \times V)/\sim$ è lo spazio totale di un fibrato vettoriale $\xi_V = (E_V \xrightarrow{\pi_V} M)$ con fibra tipica V . La proiezione nel quoziente $\varpi : P \times V \ni (\sigma, v) \rightarrow \sigma v \in E_V$ definisce un morfismo di fibrati vettoriali che rende commutativo il diagramma*

$$(34.22) \quad \begin{array}{ccc} P \times V & \xrightarrow{\varpi} & E_V \\ \text{pr}_P \downarrow & & \downarrow \pi_V \\ P & \xrightarrow{\pi} & M. \end{array}$$

DEFINIZIONE 34.9.3. $\xi_V = (E_V \xrightarrow{\pi_V} M)$ è il fibrato vettoriale associato a ξ e alla rappresentazione lineare (ρ, V) del suo gruppo strutturale.

Riassumiamo questa costruzione nell'enunciato:

PROPOSIZIONE 34.9.4. *Sia ξ un fibrato principale sulla varietà differenziabile M , con gruppo strutturale \mathbf{G} . Ad ogni rappresentazione lineare ρ di \mathbf{G} su uno spazio vettoriale V risulta associato un fibrato vettoriale ξ_V su M , con fibra tipica V , tale che (34.22) sia un diagramma commutativo di morfismi di fibrati vettoriali. \square*

DEFINIZIONE 34.9.5. Chiamiamo le sezioni differenziabili del fibrato vettoriale ξ_V *quantità di tipo* (ρ, V) .

Scriveremo per semplicità $\Gamma_\xi(M, E_V)$ invece di $\Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$.

Una sezione $s \in \Gamma_\xi(M, E_V)$ del fibrato ξ_V si rialza alla funzione $\tilde{s} \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$, definita da

$$(34.23) \quad \tilde{s}(\sigma) = \sigma^{-1}s(\pi(\sigma)).$$

DEFINIZIONE 34.9.6. Chiamiamo la \tilde{s} il *sollevamento* su P della sezione s .

PROPOSIZIONE 34.9.7. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una $f \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$ sia il sollevamento di una sezione di ξ_V è che risulti*

$$(34.24) \quad f(\sigma a) = \rho(a^{-1})f(\sigma), \quad \forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G}.$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza immediata della (34.21). Infatti

$$(\sigma a)f(\sigma a) = \varpi(\sigma, \rho(a^{-1})f(\sigma)) = \varpi(\sigma, f(\sigma)) = \sigma f(\sigma).$$

Quindi il valore di $\sigma f(\sigma)$ dipende solo da $\pi(\sigma)$ e possiamo perciò definire una sezione differenziabile s di ξ_V ponendo $s(\pi(\sigma)) = \sigma f(\sigma)$ per ogni $\sigma \in P$. \square

NOTAZIONE 34.9.8. Indichiamo con $\mathcal{E}_\rho(P, V)$ lo spazio delle $f \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$ che soddisfano la (34.24).

PROPOSIZIONE 34.9.9. *La (34.23) stabilisce un isomorfismo lineare $s \leftrightarrow \tilde{s}$ tra $\Gamma_\xi(M, E_V)$ ed $\mathcal{E}_\rho(P, V)$. \square*

ESEMPIO 34.9.10. Sia $F(M) = (L(M) \xrightarrow{\pi} M)$ il fibrato dei sistemi di riferimento di una varietà differenziabile M .

Il fibrato associato alla rappresentazione canonica di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ su \mathbb{R}^m è il *fibrato tangente* $TM \rightarrow M$.

Il fibrato associato alla rappresentazione duale

$$\mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \ni a \rightarrow (a^\dagger)^{-1} \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$$

è il *fibrato cotangente* $T^*M \rightarrow M$.

I fibrati tensoriali $T^{p,q}M$ sono associati alle rappresentazioni tensoriali :

$$\begin{aligned} \rho(a)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q) \\ = a(v_1) \otimes \cdots \otimes a(v_p) \otimes {}^t a^{-1}(w_1) \otimes \cdots \otimes {}^t a^{-1}(w_q) \\ \forall v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 34.9.11. La Proposizione 34.9.9 ci permette di associare ad ogni sezione differenziabile del fibrato ξ_V una *funzione* a valori in V . Come abbiamo visto, alle funzioni definite su una varietà differenziabile e a valori in uno spazio vettoriale si possono applicare le diverse operazioni del calcolo differenziale. Ad esempio, possiamo calcolarne il differenziale e le derivate rispetto a campi di vettori.

34.9.2. Forme tensoriali e pseudotensoriali. Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} e $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ una sua rappresentazione lineare reale di dimensione finita.

DEFINIZIONE 34.9.12. Una q -forma alternata $\phi \in \Omega^q(P, V)$ si dice *pseudotensoriale di tipo* (ρ, V) se soddisfa

$$(34.25) \quad R_a^* \phi = \rho(a^{-1}) \cdot \phi \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

La ϕ si dice *tensoriale* se è anche *orizzontale*, cioè se è pseudotensoriale ed inoltre

$$(34.26) \quad \phi(X_1, \dots, X_q) = 0 \quad \text{quando almeno uno degli } X_i \text{ sia verticale.}$$

Indichiamo con $\Omega_{\rho}^q(P, V)$ lo spazio delle q -forme pseudotensoriali di tipo (ρ, V) e con $\Omega_{\rho,0}^q(P, V)$ il sottospazio delle q -forme tensoriali di tipo (ρ, V) .

ESEMPIO 34.9.13. Su $F(M)$ la *forma canonica*⁸

$$(34.27) \quad \theta = \sigma^{-1} d\pi \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m).$$

è una 1-forma tensoriale per la rappresentazione canonica di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$.

Se ξ è un sottofibrato di $F(M)$, con gruppo strutturale $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$, la restrizione di θ a P è ancora una 1-forma tensoriale per la rappresentazione naturale di \mathbf{G} su \mathbb{R}^m .

La definizione del prodotto esterno di forme si estende al caso di forme pseudotensoriali nel caso in cui una di esse sia di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$.

⁸La θ si dice anche forma *tautologica* o di *saldatura* (in inglese: solder form).

DEFINIZIONE 34.9.14. Se (ρ, V) è una rappresentazione lineare di \mathbf{G} , il prodotto esterno di $\phi \in \Omega_{\text{Ad}}^r(P, \mathfrak{g})$ e $\psi \in \Omega_{\rho}^s(P, V)$ è la forma $\phi \wedge_{\rho} \psi \in \Omega_{\rho}^{r+s}(P, V)$ definita da

$$(34.28) \quad \phi \wedge_{\rho} \psi(X_1, \dots, X_{r+s}) = \sum' \varepsilon(k) \rho_*(\phi(X_{k_1}, \dots, X_{k_r}))(\psi(X_{k_{r+1}}, \dots, X_{k_{r+s}})),$$

$$\forall X_1, \dots, X_{r+s} \in \mathfrak{X}(P),$$

dove il simbolo \sum' indica che la somma a secondo membro è fatta su tutte le permutazioni di k di $\{1, \dots, r+s\}$ con

$$1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq r+s \quad \text{ed} \quad 1 \leq k_{r+1} < \dots < k_{r+s} \leq r+s.$$

Se ρ è la rappresentazione aggiunta, scriveremo $[\phi \wedge \psi]$ invece di $\phi \wedge_{\text{Ad}} \psi$ e, se $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ ed ι la rappresentazione canonica su \mathbb{R}^n , scriveremo $\phi \wedge \psi$ invece di $\phi \wedge_{\iota} \psi$.

Abbiamo facilmente

PROPOSIZIONE 34.9.15. Se $\phi \in \Omega_{\text{Ad},0}^r(P, \mathfrak{g})$, $\psi \in \Omega_{\rho,0}^s(P, V)$, allora $\phi \wedge_{\rho} \psi \in \Omega_{\rho,0}^{r+s}(P, V)$. \square

34.9.3. Forme differenziali a valori in un fibrato vettoriale.

Sia $\eta = (E \xrightarrow{\pi_E} M)$ un fibrato vettoriale.

DEFINIZIONE 34.9.16. Lo spazio $\Omega^q(M, E)$ delle q -forme differenziali a valori in E consiste delle q -forme $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineari alternate di grado q

$$f : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{q \text{ volte}} \longrightarrow \Gamma_{\eta}(M, E).$$

In particolare, $\Omega^0(M, E) = \Gamma_{\eta}(M, E)$. Se η è il fibrato banale $M \times V \xrightarrow{\text{pr}_M} M$, gli $\Omega^q(M, E)$ coincidono con gli spazi $\Omega^q(M, V)$ delle forme differenziali a valori in V .

OSSERVAZIONE 34.9.17. Se $f : N \rightarrow M$ è un'applicazione differenziabile, il pullback $f^* \phi$ di $\phi \in \Omega^q(M, E)$, è una q -forma a valori in f^*E .

34.9.4. Forme tensoriali e forme a valori in un fibrato vettoriale.

Una forma a valori in un fibrato vettoriale definisce una forma a valori vettoriali sullo spazio totale dei sistemi di riferimento.

Siano $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale, (ρ, V) una rappresentazione lineare del suo gruppo strutturale \mathbf{G} e $\xi_V = (E_V \xrightarrow{\pi_V} M)$ il corrispondente fibrato vettoriale.

Data una forma $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$ definiamo

$$(34.29) \quad \tilde{\phi}_{\sigma}(X_1, \dots, X_q) = \sigma^{-1} \phi(\pi_* X_{1\sigma}, \dots, \pi_* X_{q\sigma}), \quad \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(P), \quad \sigma \in P.$$

PROPOSIZIONE 34.9.18. Se $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$, la $\tilde{\phi}$ definita dalla (34.29) è una q -forma tensoriale di tipo (ρ, V) . L'applicazione

$$(34.30) \quad \Lambda_V : \Omega^q(M, E_V) \ni \phi \longrightarrow \tilde{\phi} \in \Omega_{\rho,0}^q(P, V)$$

è un isomorfismo lineare. \square

PROPOSIZIONE 34.9.19. Se U è un aperto di M e $\sigma_U \in \Gamma_\xi(U, P)$, allora

$$(34.31) \quad \sigma_U \cdot (\sigma_U^* \tilde{\phi}) = \phi|_U, \quad \forall \phi \in \Omega^q(U, E_V).$$

□

DEFINIZIONE 34.9.20. La forma $\phi_U = \sigma_U^* \tilde{\phi} \in \Omega^q(U, V)$ è il *coefficiente* di ϕ nella carta di trivializzazione (U, σ_U) .

Se $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$ è un atlante di trivializzazione di ξ , possiamo associare a $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$ la famiglia

$$(34.32) \quad \{\phi_\alpha = \sigma_\alpha^{-1} \phi|_{U_\alpha} \in \Omega^q(U_\alpha, V)\}.$$

□

DEFINIZIONE 34.9.21. Le $\{\phi_\alpha\}$ sono i *coefficienti* di ϕ nell'atlante \mathcal{A} .

PROPOSIZIONE 34.9.22. Condizione necessaria e sufficiente affinché le $\{\phi_\alpha \in \Omega^q(U_\alpha, V)\}$ siano i coefficienti di una $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$ è che

$$\phi_\alpha = \rho(\psi_{\alpha,\beta})\phi_\beta \quad \text{su } U_{\alpha,\beta}, \quad \forall \alpha, \beta$$

ove le $\psi_{\alpha,\beta} = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha,\beta}, \mathbf{G})$ sono le funzioni di transizione dell'atlante \mathcal{A} .

Appendice
CW complessi e omotopia

CW-complexi

35.1. Celle e decomposizioni cellulari

Per ogni intero non negativo m indichiamo con D^m , B^m ed S^m rispettivamente le palle chiusa e aperta di raggio 1 in \mathbb{R}^m e la sfera unitaria di dimensione m :

$$\begin{aligned} D^0 &= B^0 = \{0\}, \\ D^m &= \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leq 1\} \supset B^m, \quad \text{se } m > 0, \\ B^m &= \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| < 1\} \subset D^m, \quad \text{se } m > 0, \\ S^0 &= \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}, \\ S^m &= D^{m+1} \setminus B^{m+1} = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid |x| = 1\}, \quad \text{se } m > 0. \end{aligned}$$

Sia X uno spazio topologico.

DEFINIZIONE 35.1.1. Chiamiamo *cella di dimensione m* di X un suo sottospazio A , omeomorfo a B^m mediante un omeomorfismo $\phi : B^m \rightarrow A$ che si estende ad un'applicazione continua $\bar{\phi} : D^m \rightarrow X$:

$$(35.1) \quad \begin{array}{ccc} B^m & \xrightarrow{\text{inclusione}} & D^m \\ \text{omeomorfismo } \phi \downarrow & & \downarrow \bar{\phi} \text{ continua} \\ A & \xrightarrow{\text{inclusione}} & X \end{array}$$

Una funzione ϕ con queste proprietà si dice *caratteristica* della cella A .

La chiusura \bar{A} di una cella A si dice *cella chiusa* di X .

Per l'*invarianza topologica della dimensione*, la dimensione m di una cella è univocamente determinata.

Per ogni punto x di X , il sottospazio $\{x\}$ è una cella di dimensione 0.

Si dice *decomposizione cellulare* di X una partizione \mathcal{P} di X con le proprietà:

- (1) Ogni elemento A di \mathcal{P} è una cella;
- (2) La frontiera $\partial A = \bar{A} \setminus A$ di ogni cella di \mathcal{P} è unione di un numero finito di celle di \mathcal{P} , di dimensione strettamente minore di m .

ESEMPIO 35.1.2. Consideriamo la sfera

$$S^n = \left\{ x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1 \right\}.$$

Posto $A = \{(1, 0, \dots, 0)\}$, $B = \{x \in S^n \mid x_0 < 1\}$, la $\mathcal{P} = \{A, B\}$ è una decomposizione cellulare di S^n in una cella A di dimensione 0 ed una cella B di dimensione n .

ESEMPIO 35.1.3. Consideriamo il disco $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$. Gli insiemi $A_n = B^n$, $A_{n-1} = S^{n-1} \setminus \{e_1\}$ ed $A_0 = \{e_1\}$ sono le celle di una decomposizione cellulare di D^n , che consiste di una cella A_n di dimensione n , di una cella A_{n-1} di dimensione $(n-1)$ e di una cella A_0 di dimensione 0.

ESEMPIO 35.1.4. Sia $\mathbb{R}P^n$ lo spazio proiettivo reale di dimensione n . Indichiamo con $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ la proiezione canonica nel quoziente. Allora

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathbb{R}P^0 = \pi(e_0), \\ A_1 &= \mathbb{R}P^1 \setminus \mathbb{R}P^0 = \{\pi(x_0, x_1, 0, \dots, 0) \mid x_1 \neq 0\}, \\ &\dots \quad \dots \\ A_k &= \mathbb{R}P^k \setminus \mathbb{R}P^{k-1} = \{\pi(x_0, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \mid x_k \neq 0\}, \\ &\dots \quad \dots \\ A_n &= \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^{n-1} = \{\pi(x_0, \dots, x_n) \mid x_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

sono le celle di una partizione cellulare \mathcal{P} che contiene una cella di dimensione h per ogni $0 \leq h \leq n$.

ESEMPIO 35.1.5. In modo analogo, consideriamo lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{C}P^n$ ed indichiamo con $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ la proiezione nel quoziente. Allora

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathbb{C}P^0 = \pi(e_0), \\ A_2 &= \mathbb{C}P^1 \setminus \mathbb{C}P^0 = \{\pi(z_0, z_1, 0, \dots, 0) \mid z_1 \neq 0\}, \\ &\dots \quad \dots \\ A_{4k} &= \mathbb{C}P^k \setminus \mathbb{C}P^{k-1} = \{\pi(z_0, \dots, z_k, 0, \dots, 0) \mid z_k \neq 0\}, \\ &\dots \quad \dots \\ A_{4n} &= \mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1} = \{\pi(z_0, \dots, z_n) \mid z_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

sono le celle di una partizione \mathcal{P} di $\mathbb{C}P^n$, che contiene esattamente una cella di dimensione $2h$ per ogni $0 \leq h \leq n$.

ESEMPIO 35.1.6. In modo analogo, consideriamo lo spazio proiettivo a sinistra $\mathbb{H}P^n$. I suoi elementi sono le classi di equivalenza delle $(n+1)$ -uple di quaternioni non nulli, rispetto alla relazione

$$(q_0, q_1, \dots, q_n) \sim (u \cdot q_0, u \cdot q_1, \dots, u \cdot q_n), \quad \text{se } u \in \mathbb{H} \setminus \{0\}.$$

Indichiamo con $\pi : \mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{H}P^n$ la proiezione nel quoziente. Allora

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathbb{H}P^0 = \pi(e_0), \\ A_2 &= \mathbb{H}P^1 \setminus \mathbb{H}P^0 = \{\pi(q_0, q_1, 0, \dots, 0) \mid q_1 \neq 0\}, \\ &\dots \quad \dots \\ A_{2k} &= \mathbb{H}P^k \setminus \mathbb{H}P^{k-1} = \{\pi(q_0, \dots, q_k, 0, \dots, 0) \mid q_k \neq 0\}, \\ &\dots \quad \dots \\ A_{2n} &= \mathbb{H}P^n \setminus \mathbb{H}P^{n-1} = \{\pi(q_0, \dots, q_n) \mid q_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

sono le celle di una partizione \mathcal{P} di $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$, che contiene esattamente una cella di dimensione $2h$ per ogni $0 \leq h \leq n$.

ESEMPIO 35.1.7. Sia $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ il toro di dimensione n . Sia $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ ed indichiamo con $\pi : I^n \rightarrow T^n$ la restrizione della proiezione di \mathbb{R}^n sul quoziente T^n . Per ogni sottoinsieme F di $\{1, \dots, n\}$ sia

$$X_F = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in I^n \mid 0 < x_i < 1 \text{ se } i \in F, x_i = 0 \text{ se } i \notin F\}.$$

Allora $\pi(X_F) = A_F$ è una cella, la cui dimensione è il numero $|F|$ di elementi di F e $\mathcal{P} = \{A_F \mid F \subset \{1, \dots, n\}\}$ una decomposizione cellulare di T^n , che, per ogni intero m con $0 \leq m \leq n$, contiene $\binom{n}{m}$ celle di dimensione m .

ESEMPIO 35.1.8. La *Grassmanniana* $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ degli m -piani lineari di \mathbb{R}^n è una varietà analitica di dimensione $m(n-m)$. Una sua carta locale con centro nell' m -piano p_0 si ottiene fissando una base v_1, \dots, v_n di \mathbb{R}^n i cui primi m elementi siano una base di p_0 e facendo corrispondere alla matrice reale

$$M = \begin{pmatrix} x_{m+1,1} & \dots & x_{m+1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m-n) \times m}$$

il piano $p_M = \langle (v_1, \dots, v_m) + (v_{m+1}, \dots, v_n)M \rangle$, cioè

$$p_M = \left\langle v_1 + \sum_{j=m+1}^n x_{j,1} v_j, \dots, v_m + \sum_{j=m+1}^n x_{j,m} v_j \right\rangle.$$

La decomposizione cellulare canonica di $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ utilizza le *celle di Schubert*. Definiamole a partire dalla base canonica e_1, \dots, e_n di \mathbb{R}^n . Per ogni intero h con $1 \leq h \leq n$ indichiamo con $E_h = \langle e_1, \dots, e_h \rangle$ l' h -piano generato dai primi h vettori della base. Per ogni $j = 1, \dots, m$ ed ogni m -piano $p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$, definiamo

$$\mu_j(p) = \inf\{h \mid \dim_{\mathbb{R}}(p \cap E_h) \geq j\}.$$

Risulta così associata ad ogni $p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ una m -upla crescente di numeri interi

$$1 \leq \mu_1(p) < \mu_2(p) < \dots < \mu_m(p) \leq n.$$

Gli insiemi

$$A_{k_1, \dots, k_m} = \{p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \mid \mu_j(p) = k_j\},$$

al variare di (k_1, \dots, k_m) tra le m -uple crescenti d'interi con $1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n$, formano una decomposizione cellulare di $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$. La cella A_{k_1, \dots, k_m} ha dimensione

$$(35.2) \quad d_{k_1, \dots, k_m} = \dim_{\mathbb{R}}(A_{k_1, \dots, k_m}) = \left(\sum_{j=1}^m k_j \right) - \frac{m(m+1)}{2}.$$

Infatti, ogni elemento di p di A_{k_1, \dots, k_m} ha un'unica base della forma

$$\begin{cases} v_1 = e_{k_1} + \sum_{j < k_1} x_{1,j} e_j \\ \dots \\ v_h = e_{k_h} + \sum_{\substack{j < k_h \\ j \notin \{k_i | i < h\}}} x_{h,j} e_j \\ \dots \\ v_m = e_{k_m} + \sum_{\substack{j < k_m \\ j \notin \{k_i | i < m\}}} x_{m,j} e_j. \end{cases}$$

La scelta del vettore v_1 dipende linearmente da $k_1 - 1$ parametri, quella di v_2 da $k_2 - 2$ parametri ed, in generale, quella di v_h da $k_h - h$ parametri. Poiché $\sum_{h=1}^m (k_h - h)$ è la d_{k_1, \dots, k_m} definita dalla (35.2), questa descrizione di una base di $p \in A_{k_1, \dots, k_m}$ definisce un omeomorfismo di $\mathbb{R}^{d_{k_1, \dots, k_m}}$ con A_{k_1, \dots, k_m} .

La $A_{1, \dots, m}$ è l'unica cella di dimensione 0, mentre la $A_{(n-m+1), \dots, n}$ è l'unica di dimensione massima $m(n - m)$.

Questa costruzione generalizza quella descritta nell'Esempio 35.1.4 per lo spazio proiettivo $\mathbb{R}P^n = \mathbb{G}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

ESEMPIO 35.1.9. In modo analogo si possono trovare le decomposizioni cellulari delle grassmanniane complesse $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})$ e quaternioniche $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{H})$. La prima conterrà soltanto celle di dimensione pari, la seconda celle le cui dimensioni sono multipli di quattro.

LEMMA 35.1.10. *Siano A una cella di dimensione m di uno spazio topologico X e $\phi : D^m \rightarrow X$ una sua funzione caratteristica. Allora $\phi(D^m) \subset \bar{A}$. Se X è di Hausdorff, allora $\phi(D^m) = \bar{A}$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché ϕ è continua, $\phi^{-1}(X \setminus \bar{A})$ è un aperto di D^m . Poiché ogni aperto non vuoto di D^m contiene punti di B^m e $B^m \cap \phi^{-1}(X \setminus \bar{A}) = \emptyset$, abbiamo $\phi^{-1}(X \setminus \bar{A}) = \emptyset$ e quindi $\phi(D^m) \subset \bar{A}$. In particolare, $\phi(D^m) = \bar{A}$ se e soltanto se $\phi(D^m)$ è chiuso in X . L'ultima affermazione del lemma è perciò conseguenza del fatto che $\phi(D^m)$ è compatto in X e quindi chiuso in X quando X sia di Hausdorff. \square

35.2. Spazi cellulari

DEFINIZIONE 35.2.1. Si dice *spazio cellulare*, o *CW-complesso*, la coppia (X, \mathcal{P}) di uno spazio topologico di Hausdorff X e di una sua decomposizione cellulare \mathcal{P} che goda delle proprietà¹:

- (C) Per ogni $A \in \mathcal{P}$, l'insieme delle celle $B \in \mathcal{P}$ che intersecano la chiusura di A è finito.

¹La lettera (C) è l'iniziale di *closure finiteness* e (W) di *weak topology*. La topologia debole di un ricoprimento è la topologia meno fine per cui il ricoprimento sia fondamentale, cioè la topologia in cui un sottoinsieme è aperto o chiuso se e soltanto se è tale, per la topologia di sottospazio, la sua intersezione con ogni sottoinsieme del ricoprimento. In questo caso si considera il ricoprimento di X mediante le celle chiuse della sua decomposizione cellulare.

(W) Le celle chiuse formano un ricoprimento fondamentale di X , cioè $F \subset X$ è chiuso in X se e soltanto se $F \cap \bar{A}$ è chiuso per ogni cella $A \in \mathcal{P}$.

Uno spazio cellulare (X, \mathcal{P}) con una partizione cellulare \mathcal{P} formata da un numero finito di celle si dice *finito*.

Dalla definizione di decomposizione cellulare segue che *ogni cella chiusa \bar{A} di un CW-complesso (X, \mathcal{P}) è un'unione finita di celle di \mathcal{P} .*

Gli esempi precedenti ci mostrano che $S^n, D^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n, T^n, \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}), \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C}), \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{H})$ sono spazi cellulari finiti.

LEMMA 35.2.2. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso. Per ogni $Q \subset \mathcal{P}$, l'unione di celle chiuse $Y = \bigcup_{A \in Q} \bar{A}$ è chiusa in X .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $C \in \mathcal{P}$. Allora $\bar{C} = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_m$ è l'unione di $C_0 = C$ e di un numero finito di celle $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{P}$ di dimensioni inferiori a quella di C . Poiché Y è unione di celle chiuse, contiene la chiusura di ogni cella che la interseca. Quindi

$$Y \cap \bar{C} = \bigcup \{C_h \mid 0 \leq h \leq m, C_h \subset Y\} = \bigcup \{\bar{C}_h \mid 0 \leq h \leq m, C_h \subset Y\}$$

e perciò l'intersezione di Y con qualsiasi cella chiusa è un chiuso (perché unione finita di chiusi). Poiché per la definizione della topologia di un complesso cellulare $\{\bar{C} \mid C \in \mathcal{P}\}$ è un ricoprimento fondamentale, Y è chiuso in X . \square

DEFINIZIONE 35.2.3. Se \mathcal{P} è una decomposizione cellulare di uno spazio topologico X , possiamo considerare su X la topologia meno fine per cui $\{\bar{C} \mid C \in \mathcal{P}\}$ sia un ricoprimento fondamentale. Questa topologia è in generale più fine della topologia originaria, di cui si dice essere *l'indebolimento cellulare*.

ESEMPIO 35.2.4. Sia X il sottospazio di \mathbb{R}^3 definito da:

$$X = \{x = (x_0, x_1, x_2) \in S^3 \mid mx_1 = nx_2 \text{ con } (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}.$$

Una decomposizione cellulare \mathcal{P} di X consiste delle celle di dimensione 1:

$$\begin{cases} A_{m,n} = \{x \in X \mid mx_1 = nx_2, x_1 > 0\} & m > 0, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, (m : |n|) = 1 \\ B_{m,n} = \{x \in X \mid mx_1 = nx_2, x_1 < 0\} & m > 0, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, (m : |n|) = 1 \\ C_+ = \{x \in X \mid x_2 = 0, x_1 > 0\} \\ C_- = \{x \in X \mid x_2 = 0, x_1 < 0\} \\ D_+ = \{x \in X \mid x_1 = 0, x_2 > 0\} \\ D_- = \{x \in X \mid x_1 = 0, x_2 < 0\} \end{cases}$$

e nelle due celle $\{(1, 0, 0)\}$ e $\{(-1, 0, 0)\}$, di dimensione 0. Osserviamo che la topologia debole di X associata a questa decomposizione cellulare è strettamente più fine di quella di sottospazio. Ad esempio, l'unione Z di una qualsiasi cella di dimensione uno e del sottoinsieme $Y = \{x \in X \mid |x_0| > 1/2\}$ è aperta per la topologia debole, ma non per quella di sottospazio.

PROPOSIZIONE 35.2.5. *Uno spazio cellulare (X, \mathcal{P}) è finito se e soltanto se X è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché tutte le celle chiuse sono compatte, chiaramente uno spazio cellulare finito è compatto perché unione finita di compatti.

Viceversa, supponiamo che X sia compatto. Per ogni cella $A \in \mathcal{P}$ fissiamo un punto $x_A \in A$ e consideriamo l'insieme $K = \{x_A \mid A \in \mathcal{P}\}$. Ogni suo sottoinsieme interseca ogni cella chiusa al più in un numero finito di punti. Quindi ogni sottoinsieme di K è chiuso in X e pertanto K è un sottospazio chiuso di X su cui X induce la topologia discreta. Poiché X è compatto, anche K è compatto perché sottospazio chiuso di uno spazio compatto e quindi finito perché discreto: questo ci dimostra che \mathcal{P} è finito. \square

DEFINIZIONE 35.2.6. La *dimensione* di uno spazio cellulare (X, \mathcal{P}) è l'estremo superiore delle dimensioni delle celle di \mathcal{P} . Conveniamo che \emptyset sia cellulare di dimensione -1 .

Sia (X, \mathcal{P}) uno spazio cellulare. Se $Y \subset X$, indichiamo con $\mathcal{P}(Y)$ l'insieme delle celle di \mathcal{P} contenute in Y :

$$\mathcal{P}(Y) = \{A \in \mathcal{P} \mid A \subset Y\}.$$

Se $Y = \bigcup \mathcal{P}(Y)$ e la $\mathcal{P}(Y)$ è una decomposizione cellulare di Y , diciamo che $(Y, \mathcal{P}(Y))$ è un *sottospazio cellulare* o un *sotto-CW-complesso* di (X, \mathcal{P}) .

Abbiamo:

PROPOSIZIONE 35.2.7. Sia (X, \mathcal{P}) uno spazio cellulare.

- (i) Per ogni $A \in \mathcal{P}$, la coppia $(\bar{A}, \mathcal{P}(\bar{A}))$ è un sottospazio cellulare finito di (X, \mathcal{P}) .
- (ii) Sia $Y \subset X$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $(Y, \mathcal{P}(Y))$ sia un sottospazio cellulare di (X, \mathcal{P}) è che, per ogni $y \in Y$, Y contenga la chiusura della cella di \mathcal{P} che contiene y . In particolare, tutti i sottospazi cellulari di X sono chiusi.
- (iii) Sia m un intero non negativo e sia $\mathcal{P}_{(m)} = \{A \in \mathcal{P} \mid \dim(A) \leq m\}$ l'insieme delle celle di dimensione minore o uguale ad m . Il sottospazio $X_m = \bigcup \mathcal{P}_{(m)}$ è chiuso in X ed $(X_m, \mathcal{P}_{(m)})$ è un sottospazio cellulare di (X, \mathcal{P}) .

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue dalla proprietà (2) delle decomposizioni cellulari.

Dimostriamo la (ii). Se $(Y, \mathcal{P}(Y))$ è un sottospazio cellulare di (X, \mathcal{P}) , allora, per la definizione di cella e per il fatto che Y è di Hausdorff, Y deve contenere la chiusura di ogni cella di $\mathcal{P}(Y)$ e quindi di ciascuna cella che contiene un suo punto.

Viceversa, se Y contiene la chiusura di ogni cella che contiene un suo punto, la $\mathcal{P}(Y)$ è una decomposizione cellulare di Y .

Se \bar{A} , con $A \in \mathcal{P}$, è una cella chiusa e $\bar{A} \cap Y \neq \emptyset$, l'intersezione $\bar{A} \cap Y$ è l'unione delle chiusure delle celle di \mathcal{P} contenute in $\bar{A} \cap Y$ ed è quindi chiusa perché unione finita di chiusi. Ne segue che Y è un sottospazio chiuso di X .

La (iii) segue facilmente dalla (ii): infatti la chiusura di ogni cella di dimensione h è unione di celle di dimensione minore o uguale di h e dunque X_m contiene la chiusura di ogni cella che contiene un suo punto. \square

DEFINIZIONE 35.2.8. Il sottospazio cellulare $(X_m, \mathcal{P}_{(m)})$, con

$$\mathcal{P}_{(m)} = \{A \in \mathcal{P} \mid \dim(A) \leq m\} \quad \text{ed} \quad X_m = \bigcup \mathcal{P}_{(m)},$$
 si dice lo *scheletro di dimensione m* di (X, \mathcal{P}) .

PROPOSIZIONE 35.2.9. *Ogni spazio cellulare è normale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (X, \mathcal{P}) un CW -complesso. Per ipotesi X è uno spazio di Hausdorff. Basterà quindi dimostrare che ogni coppia di chiusi disgiunti A, B di X ammette una funzione di Urysohn. A questo scopo definiremo per induzione funzioni continue $f_m : X_m \rightarrow I$ sullo scheletro m -dimensionale di X in modo che f_m sia su X_m una funzione di Urysohn della coppia $(A \cap X_m, B \cap X_m)$. Se $m = 0$, poiché X_0 è discreto, possiamo porre $f_0(x)$ uguale a 0 su $A \cap X_0$, a 1 su $B \cap X_0$ e ad $1/2$ sui punti di X_0 che non appartengono né ad A né a B . Supponiamo ora di aver definito $f_m : X_m \rightarrow I$ con le proprietà richieste. Per ogni cella $C \in \mathcal{P}_{m+1}$, definiamo una funzione g_C su $\bar{C} \cap (X_m \cup A \cup B)$ mediante :

$$g_C(x) = \begin{cases} f_m(x) & \text{se } x \in X_m \cap \bar{C} \\ 0 & \text{se } x \in A \cap \bar{C} \\ 1 & \text{se } x \in B \cap \bar{C}. \end{cases}$$

La g_C è ben definita e continua. Poiché \bar{C} è uno spazio normale, in quanto di Hausdorff e compatto, la g_C si estende ad un'applicazione continua $\tilde{g}_C : \bar{A} \rightarrow I$. Possiamo quindi definire f_{m+1} ponendo $f_{m+1}(x) = \tilde{g}_C(x)$ su \bar{C} . Questa è ben definita perché l'intersezione di celle distinte di \mathcal{P}_{m+1} è unione di celle di \mathcal{P}_m e perciò contenuta in X_m . Questo si dice che tutte le \tilde{g}_C sono uguali ad f_m , e quindi uguali tra loro, nei punti in cui si intersecano i loro domini di definizione. Poiché $\{\bar{C} \mid C \in \mathcal{P}_{m+1}\}$ è un ricoprimento fondamentale di X_{m+1} , ne segue che $f_{m+1} : X_{m+1} \rightarrow I$ è continua, coincide con f_m su X_m ed è una funzione di Urysohn della coppia $(A \cap X_{m+1}, B \cap X_{m+1})$.

Infine, utilizzando la successione $\{f_m : X_m \rightarrow I\}$, definiamo $f : X \rightarrow I$ ponendo $f(x) = f_m(x)$ se $x \in X_m$. La f è ben definita ed è continua perché lo è la sua restrizione ad ogni cella chiusa. Questa f è una funzione di Urysohn della coppia (A, B) . \square

PROPOSIZIONE 35.2.10. *Se \mathcal{P} è una decomposizione cellulare localmente finita di uno spazio di Hausdorff X , allora (X, \mathcal{P}) è uno spazio cellulare.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti $\{\bar{A} \mid A \in \mathcal{P}\}$ è in questo caso un ricoprimento chiuso localmente finito e quindi fondamentale. \square

DEFINIZIONE 35.2.11. Uno spazio cellulare (X, \mathcal{P}) si dice *localmente finito* se \mathcal{P} è localmente finita.

Abbiamo :

PROPOSIZIONE 35.2.12. *In uno spazio cellulare localmente finito (X, \mathcal{P}) , ogni unione Y di celle chiuse è un sottoinsieme chiuso di X e $(Y, \mathcal{P}(Y))$ è un sottospazio cellulare di (X, \mathcal{P}) .* \square

PROPOSIZIONE 35.2.13. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso. Ogni compatto K di X interseca al più un numero finito di celle di \mathcal{P} .*

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathcal{P}_K l'insieme delle celle in \mathcal{P} che intersecano K . Per ogni $C \in \mathcal{P}$, scegliamo un punto $x_C \in K \cap C$. Il sottoinsieme $T = \{x_C \mid C \in \mathcal{P}_K\}$ è chiuso e discreto in X . Poiché è contenuto in K è anche compatto. Essendo un compatto con la topologia discreta, è finito, quindi \mathcal{P}_K è finito. \square

PROPOSIZIONE 35.2.14. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso. Allora X è connesso se e soltanto se è connesso per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia x_0 un punto di X e sia Y il sottospazio di X che consiste dei punti che si possono congiungere ad x_0 con un arco. Poiché tutte le celle, sia aperte che chiuse, di X sono connesse per archi, $(Y, \mathcal{P}(Y))$ è un sottospazio cellulare di (X, \mathcal{P}) . In modo analogo si dimostra che $(\bar{C}Y, \mathcal{P}(\bar{C}Y))$ è anch'esso un sottospazio cellulare di (X, \mathcal{P}) , in quanto la chiusura di ogni cella A che non interseca Y non interseca neanche Y . Quindi $\bar{C}Y$ è chiuso ed Y è aperto e chiuso. \square

PROPOSIZIONE 35.2.15. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso.*

- (1) *Un sottospazio Z di X è unione di componenti connesse di X se e soltanto se contiene ogni cella chiusa che lo intersechi.*
- (2) *Per ogni $m \geq 1$ e per ogni componente connessa Y di X , lo scheletro m -dimensionale Y_m di $(Y, \mathcal{P}(Y))$ è connesso.*
- (3) *In particolare, X è connesso se e soltanto se X_1 è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. (1). Se C è un sottoinsieme connesso di X ed $A \in \mathcal{P}$ è una cella con $\bar{A} \cap C \neq \emptyset$, allora anche $C \cup \bar{A}$ è connesso, perché unione di due connessi che s'intersecano. Quindi, se il sottospazio Z di X è unione di componenti connesse di X , contiene ogni cella chiusa che lo intersechi.

Viceversa, se Z contiene ogni cella chiusa che lo intersechi, sia Z che il suo complementare sono chiusi. Quindi Z è aperto e chiuso ed è perciò unione di componenti connesse di X .

(2). Sia T una componente connessa di Y_m e definiamo per ricorrenza :

$$\begin{cases} Z_m = T \\ Z_h = \bigcup \{\bar{A} \mid A \in \mathcal{P}, \bar{A} \cap Z_{h-1} \neq \emptyset\} \quad \text{per } h > m. \end{cases}$$

Allora $Z = \bigcup_{h \geq m} Z_h$ è connesso e $(Z, \mathcal{P}(Z))$ è un sotto-CW-complesso di (X, \mathcal{P}) . Per costruzione Z contiene tutte le celle chiuse che lo intersecano e quindi è unione di componenti connesse di X . Essendo connesso, coincide con una componente connessa di X ed è perciò uguale a Y .

(3). Se X è connesso, per (2) anche X_1 è connesso. Viceversa, poiché la chiusura di ogni cella di dimensione $m \geq 1$ contiene almeno una cella di dimensione 0, la chiusura di ogni cella in \mathcal{P} interseca X_1 . Perciò X è connesso se X_1 è connesso. \square

PROPOSIZIONE 35.2.16. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso.*

- (a) *X è separabile se e soltanto se \mathcal{P} è al più numerabile.*
- (b) *X soddisfa al primo assioma di numerabilità se e soltanto se \mathcal{P} è localmente finita.*

- (c) X è metrizzabile se e soltanto se \mathcal{P} è localmente finita.
 (d) X è a base numerabile se e soltanto se \mathcal{P} è al più numerabile e localmente finito.

DIMOSTRAZIONE. (a). Supponiamo che X sia separabile e sia D un suo sottoinsieme denso e numerabile. Per ogni $x \in D$ sia A_x la cella in \mathcal{P} che contiene x . Dico che $X = \bigcup_{x \in D} \bar{A}_x$. Infatti il secondo membro è un chiuso (perché unione di celle chiuse) che contiene D e coincide quindi con X . Poiché ogni cella chiusa si decompone in un numero finito di celle, ne segue che \mathcal{P} è al più numerabile.

Supponiamo viceversa che \mathcal{P} sia al più numerabile. Per ogni $A \in \mathcal{P}$ possiamo fissare un sottoinsieme D_A di A al più numerabile e denso in A . Allora $D = \bigcup_{A \in \mathcal{P}} D_A$ è numerabile ed è denso in X perché è denso in ciascuna cella e quindi in ciascuna cella chiusa di X .

(b). Supponiamo che \mathcal{P} sia localmente finita. Sia Q l'insieme degli $A \in \mathcal{P}$ per cui $\bar{A} \ni x$. L'insieme Q è finito. Dico che l'unione $U = \bigcup Q$ di tutte le celle la cui chiusura contiene x è un aperto di X . Sia infatti C una qualsiasi cella in \mathcal{P} . Se $x \notin \bar{C}$, allora $\bar{C} \cap U = \emptyset$. Se $x \in \bar{C}$, allora $\bar{C} \cap U \supset C$. Il complementare di C in \bar{C} è un'unione finita $C_1 \cup \dots \cup C_m$ di celle in \mathcal{P} , ciascuna di dimensione minore di quella di C . Abbiamo allora $U \cap \bar{C} = \bar{C} \setminus \bigcup \{C_i \mid 1 \leq i \leq m, C_i \not\ni x\}$ e quindi $U \cap \bar{C}$ è aperto in \bar{C} . Questo dimostra che U è un aperto di X . Osserviamo ora che $(\bar{U}, \mathcal{P}(\bar{U}))$ è un sottospazio cellulare finito di (X, \mathcal{P}) . In particolare è uno spazio compatto di Hausdorff separabile (per il punto (a)). Ne segue che \bar{U} , e a maggior ragione il suo sottospazio aperto U , sono a base numerabile. In particolare x ha in U , e perciò anche in X , un sistema fondamentale d'intorni numerabile.

Supponiamo viceversa che $x \in X$ ammetta un sistema fondamentale d'intorni numerabile $\{U_n\}$ e supponiamo per assurdo che \mathcal{P} non sia localmente finito in x , che cioè ogni intorno U_n intersechi un numero infinito di celle di \mathcal{P} . Possiamo allora costruire una successione x_n con $x_n \in U_n \setminus \{x\}$ tale che elementi della successione corrispondenti ad indici distinti appartengano a celle distinte. Ogni cella chiusa conterrà allora al più un numero finito di elementi della successione $\{x_n\}$. Quindi l'insieme S degli elementi della successione è un sottoinsieme chiuso di X e $X \setminus S$ un intorno aperto di x in X che non contiene nessuno degli intorni $\{U_n\}$, contraddicendo il fatto che questo fosse un sistema fondamentale d'intorni di x in X . Quindi \mathcal{P} dev'essere localmente finita in x , e questo completa la dimostrazione del punto (b).

(c). Se X è metrizzabile soddisfa al primo assioma di numerabilità e quindi un CW -complesso (X, \mathcal{P}) con X metrizzabile ha una decomposizione cellulare \mathcal{P} localmente finita per il punto (b).

Per dimostrare il viceversa, possiamo limitarci a considerare il caso in cui X sia connesso. Dimostriamo innanzi tutto che \mathcal{P} è al più numerabile. A questo scopo fissiamo $x \in X$ e definiamo per ricorrenza:

$$\begin{cases} Y_0 = \bigcup \{\bar{A} \mid A \in \mathcal{P}, \bar{A} \ni x\} \\ Y_m = \bigcup \{\bar{A} \mid A \in \mathcal{P}, \bar{A} \cap Y_{m-1} \neq \emptyset\} \quad \text{se } m > 0. \end{cases}$$

Abbiamo $Y_m \subset Y_{m+1}$ per ogni m e l'ipotesi della finitezza locale implica che ciascuno degli $(Y_m, \mathcal{P}(Y_m))$ è un sottospazio cellulare finito di (X, \mathcal{P}) . Inoltre, per costruzione, $Y = \bigcup Y_m$ è un sottospazio cellulare di (X, \mathcal{P}) e Y , essendo una componente connessa di X , coincide con X . Poiché ogni $(Y_m, \mathcal{P}(Y_m))$ è finito, $(Y, \mathcal{P}(Y)) = (X, \mathcal{P})$ è numerabile. Quindi X è metrizzabile perché è uno spazio normale a base numerabile (è separabile per (a) e soddisfa al primo assioma di numerabilità per (b), onde soddisfa anche al secondo assioma di numerabilità). \square

35.3. Attaccamenti

Descriviamo in questo paragrafo la costruzione topologica dell'attaccamento, che utilizzeremo nel seguito per descrivere le proprietà dei CW-compleksi.

DEFINIZIONE 35.3.1. Siano X_1 ed X_2 due spazi topologici, A un sottospazio di X_1 e $\phi : A \rightarrow X_2$ un'applicazione continua. Definiamo sull'unione disgiunta $X_1 \sqcup X_2$ una relazione d'equivalenza identificando i punti di A con quelli di X_2 che ad essi corrispondono mediante l'applicazione ϕ :

$$x \sim y \iff \begin{cases} x = y, & \text{oppure} \\ x \in A \text{ ed } y = \phi(x), & \text{oppure} \\ y \in A \text{ ed } x = \phi(y). \end{cases}$$

Il quoziente $(X_1 \sqcup X_2) / \sim$ si indica con $X_2 \cup_{\phi} X_1$ e si dice *ottenuto attaccando X_1 ad X_2 mediante l'applicazione ϕ* .

Le applicazioni canoniche $p_1 : X_1 \rightarrow X_2 \cup_{\phi} X_1$ e $j_2 : X_2 \rightarrow X_2 \cup_{\phi} X_1$, ottenute componendo l'inclusione naturale con la proiezione nel quoziente, sono entrambe continue. La seconda è un'immersione topologica (cioè un omeomorfismo con l'immagine).

LEMMA 35.3.2. Siano X_1 ed X_2 due spazi topologici, sia A un sottospazio di X_1 e $\phi : A \rightarrow X_2$ un'applicazione continua. Allora $\{p_1(X_1), j_2(X_2)\}$ è un ricoprimento fondamentale di $X_2 \cup_{\phi} X_1$.

DIMOSTRAZIONE. Sia U un sottoinsieme di $X_2 \cup_{\phi} X_1$ tale che $U \cap p_1(X_1)$ sia un aperto di $p_1(X_1)$ ed $U \cap j_2(X_2)$ un aperto di $j_2(X_2)$ per le topologie di sottospazio. Allora $p_1^{-1}(U)$ è aperto in X_1 e $j_2^{-1}(U)$ è aperto in X_2 . Quindi $p_1^{-1}(U) \sqcup j_2^{-1}(U)$ è un aperto di $X_1 \sqcup X_2$, saturo rispetto alla relazione d'equivalenza " \sim " e perciò U , immagine d'un aperto saturo nella proiezione sul quoziente, è aperto in $X_2 \cup_{\phi} X_1$. Ciò dimostra che il ricoprimento $\{p_1(X_1), j_2(X_2)\}$ è fondamentale. \square

PROPOSIZIONE 35.3.3. Se X_1, X_2 sono spazi normali, $A \subset X_1$ un chiuso e $\phi : A \rightarrow X_2$ un'applicazione continua, allora $X_2 \cup_{\phi} X_1$ è uno spazio normale.

DIMOSTRAZIONE. L'immagine inversa in $X_2 \sqcup X_1$ di un punto p di $X_2 \cup_{\phi} X_1$ è l'unione disgiunta $j_2^{-1}(p) \sqcup p_1^{-1}(p)$. Per verificare che i punti sono chiusi è quindi sufficiente verificare separatamente che sono chiuse le sue immagini inverse mediante j_2 e p_1 . Abbiamo:

$$j_2^{-1}(p) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } p \in (X_2 \cup_{\phi} X_1) \setminus j_2(X_2), \\ \text{un punto}, & \text{se } p \in j_2(X_2), \end{cases}$$

$$p_1^{-1}(p) = \begin{cases} \text{un punto} & \text{se } p \in (X_2 \cup_{\phi} X_1) \setminus J_2(X_2) \\ \phi^{-1}(J_2^{-1}(p)) & \text{se } p \in J_2(X_2). \end{cases}$$

Ciò dimostra che, se $\pi : X_1 \sqcup X_2 \rightarrow X_2 \cup_{\phi} X_1$ è la proiezione nel quoziente, allora $\pi^{-1}(p) = p_1^{-1}(p) \sqcup J_2^{-1}(p)$ è chiuso in $X_1 \sqcup X_2$. Quindi $\{p\}$ è chiuso: ciò dimostra che $X_2 \cup_{\phi} X_1$ soddisfa l'assioma T_1 .

Per la normalità, è allora sufficiente verificare che ogni coppia (F_0, F_1) di chiusi disgiunti di $X_2 \cup_{\phi} X_1$ ammette una funzione di Uryshon. Poiché X_2 è normale, esiste una funzione continua $f_2 : X_2 \rightarrow I$ con $J_2^{-1}(F_0) \subset f_2^{-1}(0)$ e $J_2^{-1}(F_1) \subset f_2^{-1}(1)$.

Il sottoinsieme $F = A \cup p_1^{-1}(F_0 \cup F_1)$ è chiuso in X_1 e la funzione:

$$f_1(x) = \begin{cases} f_2(\phi(x)), & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \in p_1^{-1}(F_0), \\ 1, & \text{se } x \in p_1^{-1}(F_1), \end{cases}$$

è continua sul chiuso F . Per il teorema d'estensione di Uryshon, esiste una funzione continua $\tilde{f}_1 : X_1 \rightarrow I$ che prolunga f_1 . Definiamo allora una funzione di Uryshon della coppia (F_0, F_1) mediante:

$$f(x) = \begin{cases} f_2(y) & \text{se } x = J_2(y) \text{ con } y \in X_2, \\ \tilde{f}_1(y) & \text{se } x = p_1(y) \text{ con } y \in X_1. \end{cases}$$

La f è ben definita perché, per costruzione, le due definizioni coincidono quando $x \in \phi(A)$. Infine, poiché $p_1^*f = \tilde{f}_1$ e $J_2^*f = f_2$ sono continue, anche f è continua ed è quindi una funzione di Uryshon della coppia (F_0, F_1) . \square

Nel seguito, per semplicità di notazione, identificheremo X_2 e il sottospazio $J_2(X_2)$ di $X_2 \cup_{\phi} X_1$.

35.4. Applicazioni cellulari ed attaccamenti di celle

Siano (X, \mathcal{P}) ed (Y, \mathcal{Q}) due CW-complessi.

DEFINIZIONE 35.4.1. Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice *cellulare* se è continua e trasforma lo scheletro k -dimensionale di X nello scheletro k -dimensionale di Y : $f(X_k) \subset Y_k$ per ogni intero $k \geq 0$.

Come conseguenza immediata della Proposizione 35.2.13 otteniamo:

LEMMA 35.4.2. *Siano (X, \mathcal{P}) ed (Y, \mathcal{Q}) due CW-complessi ed $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione cellulare. Allora l'immagine di una cella di dimensione m di (X, \mathcal{P}) è unione di un numero finito di celle di dimensione minore o uguale ad m di Y .* \square

Siano (X, \mathcal{P}) un CW-complesso, A una sua cella m -dimensionale, $\phi_A : B^m \rightarrow X$ la sua funzione caratteristica, $\bar{\phi}_A : D^m \rightarrow X$ quella della cella chiusa \bar{A} . La restrizione di $\bar{\phi}_A$ alla frontiera S^{m-1} di D^m è un'applicazione $S^{m-1} \ni x \rightarrow \bar{\phi}_A(x) \in X_{m-1}$. Sarà conveniente nel seguito scrivere B_A^m , D_A^m ed S_A^m per indicare la palla, il disco e la frontiera del disco associati alla cella A .

Gli spazi cellulari si possono ottenere per attaccamenti successivi di celle. Esprimiamo questo fatto nel seguente enunciato

TEOREMA 35.4.3. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso. Indichiamo con \mathcal{P}_m l'insieme delle sue celle di dimensione m e, per ogni $A \in \mathcal{P}_m$, fissiamo una funzione caratteristica $\phi_A : B_A^m \rightarrow X$ di A . Indichiamo ancora con $\chi_A : S_A^{m-1} \rightarrow X_{m-1}$ la restrizione alla frontiera della $\bar{\phi}_A : D^m \rightarrow X$. Indichiamo con*

$$(35.3) \quad \chi_{m-1} : \bigsqcup_{A \in \mathcal{P}_m} S_A^{m-1} \rightarrow X_{m-1}$$

l'applicazione, definita sulla somma disgiunta di tante sfere $(m-1)$ dimensionali quante sono le celle di \mathcal{P}_m , che coincide con χ_A sull'elemento S_A^{m-1} dell'unione disgiunta. L'applicazione

$$(35.4) \quad X_{m-1} \cup_{\chi_{m-1}} \bigsqcup_{A \in \mathcal{P}_m} D_A^m \longrightarrow X_m$$

definita come l'inclusione $X_{m-1} \hookrightarrow X_m$ su X_{m-1} , e che coincide con l'applicazione caratteristica ϕ_A su $B_A^m \subset D_A^m$, è un omeomorfismo. \square

35.5. Prolungamenti differenziabili di funzioni continue

Dimostriamo in questo paragrafo un risultato di prolungamento che ci sarà utile per lo studio dell'omotopia degli spazi cellulari.

LEMMA 35.5.1. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^m ed F un chiuso di Ω . Esiste allora una funzione $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ con $\psi = 0$ su F e $\psi > 0$ su $\Omega \setminus F$.*

DIMOSTRAZIONE. I punti con coordinate razionali che appartengono ad $\Omega \cap \mathbb{C}F$ sono un'infinità numerabile. Elenchiamoli in una successione $\{x_n\}_{n \geq 1}$. Per ogni n sia $r_n = \text{dist}(x_n, F \cup \mathbb{C}\Omega)$ e sia χ_n la funzione di classe \mathcal{C}^∞

$$\chi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\exp(|x - x_n|^2 - r_n^2)} & \text{se } |x - x_n| < r_n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Possiamo poi scegliere una successione di interi strettamente positivi $\{c_n\}$ tale che, per ogni n ,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} \sum_{|\alpha| \leq n} |D^\alpha \chi_n(x)| < 2^{-n} c_n^{-1}.$$

Chiaramente la somma della serie $\chi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(x)$ definisce una funzione di classe \mathcal{C}^∞ su Ω , nulla su F e positiva sul suo complementare. \square

Dimostriamo ora un complemento del Lemma di estensione di Uryshon per funzioni a valori in \mathbb{R}^n .

LEMMA 35.5.2. *Sia X uno spazio topologico normale, A un chiuso di X ed $f : A \rightarrow C$ una funzione continua a valori in un convesso localmente chiuso C di \mathbb{R}^n . Esiste allora un'applicazione continua $\tilde{f} : X \rightarrow C$ tale che $\tilde{f} = f$ su A .*

DIMOSTRAZIONE. A meno di sostituire ad \mathbb{R}^n il suo più piccolo sottospazio affine che contiene C , possiamo supporre che C abbia parte interna non vuota. Se $C = \mathbb{R}^n$, allora otteniamo la tesi applicando il lemma di estensione di Uryshon ad ogni componente scalare dell'applicazione f . In generale, possiamo definire

un'immersione $\phi : C \rightarrow I^n$ la cui immagine $\phi(C)$ sia un aperto di I^n che contiene $\{x \in I^n \mid 0 < x_j < 1 \text{ per } j = 1, \dots, n\}$. Applicando il Lemma di estensione Urysohn a ciascuna componente di $\phi \circ f$, otteniamo una $g \in \mathcal{C}(X, I^n)$ con $g|_A = \phi \circ f$. Osserviamo ora che $B = g^{-1}(I^n \cap \mathring{C}\phi(C))$ è un chiuso di X disgiunto da A . Se $\chi \in \mathcal{C}(X, I)$ è una funzione che vale 0 su A ed 1 su B , ed η è un punto interno di I^n , allora la

$$\tilde{g}_A(x) = g(x) + \chi(x)(\eta - g(x))$$

è una funzione continua su X , che coincide con $\phi \circ f$ su A e la cui immagine è contenuta in $\phi(C)$. Possiamo quindi definire $\tilde{f} = \phi^{-1} \circ \tilde{g}$. \square

LEMMA 35.5.3. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^m , F un chiuso di Ω , C un convesso localmente chiuso di \mathbb{R}^n ed $f : F \rightarrow C$ una funzione continua a valori in C . Esiste allora una funzione continua $\tilde{f} : \Omega \rightarrow C$, con $\tilde{f}|_F = f$ e la cui restrizione ad $\Omega \cap \mathring{C}F$ sia di classe \mathcal{C}^∞ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $A = \Omega \cap \mathring{C}F$. Per il Lemma d'estensione di Uryshon, possiamo prolungare f a una funzione F continua su Ω ed a valori in C . Fissiamo poi una funzione $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ con $\psi > 0$ su A e $\psi = 0$ su $F \cup \mathring{C}\Omega$ e poniamo, per $x \in \Omega$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in F \\ [\psi(x)]^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} F(y) \chi([\psi(x)]^{-1}(x-y)) dy & \text{se } x \in A, \end{cases}$$

dove la χ è una funzione non negativa, di classe \mathcal{C}^∞ su \mathbb{R}^m , con supporto in D^m e $\int_{\mathbb{R}^m} \chi(y) dy = 1$. Per i teoremi di derivazione sotto il segno d'integrale, la \tilde{f} così definita è di classe \mathcal{C}^∞ su A . Resta da verificare che è continua nei punti di bA . Osserviamo a questo scopo che la F , essendo continua, è uniformemente continua su \bar{A} . Quindi, fissato un numero reale $\epsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che $|F(x) - F(y)| < \epsilon$ se $|x - y| < \delta$ e $x, y \in \bar{A}$. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x) - F(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} g(x)^{-m} [F(y) - F(x)] \chi([g(x)]^{-1}(x-y)) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m} g(x)^{-m} |F(y) - F(x)| \chi([g(x)]^{-1}(x-y)) dy \\ &< \epsilon \quad \text{se } 0 < g(x) < \delta. \end{aligned}$$

Quindi, se $\{x_n\}$ è una successione di punti di A che converge ad un punto $x \in bA$, abbiamo:

$$|f(x) - \tilde{f}(x_n)| \leq |f(x) - F(x_n)| + |F(x_n) - \tilde{f}(x_n)| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

in quanto il primo addendo a secondo membro tende a zero perché F è un'estensione continua di f , mentre il secondo tende a zero perché $g(x_n)$ converge a zero per $x_n \rightarrow x \in bA$. Ciò completa la dimostrazione. \square

35.6. Approssimazione cellulare

Dimostriamo un lemma relativo all'attaccamento di celle.

LEMMA 35.6.1. *Sia Y uno spazio topologico, m un intero positivo, $\phi : S^{m-1} \rightarrow Y$ un'applicazione continua ed $X = Y \cup_{\phi} D^m$. Se k è un intero positivo con $k < m$, allora ogni $f \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X, Y)$ è S^{k-1} -omotopa ad un'applicazione a valori in Y .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varpi : D^m \rightarrow X$ la restrizione a D^m della proiezione nel quoziente $D^m \sqcup Y \rightarrow X$. Essa definisce un omeomorfismo di B^m sull'aperto $\Omega = \mathring{C}Y$ di X . Sia $f \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X, Y)$. Se fosse $f(D^k) \not\supset \Omega$, a meno di omeomorfismi potremmo ricondurci al caso in cui $\varpi(0) \notin f(D^k)$. L'applicazione:

$$\phi(y, t) = \begin{cases} \varpi([1-t]z + t[z/|z|]) & \text{se } y = \varpi(z) \text{ con } z \in B^m \setminus \{0\} \\ y & \text{se } y \in Y \end{cases}$$

è una retrazione di deformazione di $X \setminus \{\varpi(0)\}$ su Y . Allora la $F(x, t) = \phi(f(x), t)$ è una S^{k-1} -omotopia di f con un'applicazione a valori in Y .

Consideriamo ora il caso generale.

Poiché $f(S^{k-1}) \subset Y$, l'insieme $A = f^{-1}(\{\varpi(z) \mid |z| < 1/2\})$ è un sottoinsieme aperto relativamente compatto in $B^k \subset D^k$. Per il Lemma 35.5.3 esiste una funzione $g : \bar{A} \rightarrow B^m$, di classe \mathcal{C}^∞ nei punti di A , con $g(x) = \varpi^{-1}(f(x))$ sulla frontiera ∂A di A . La:

$$G(x, t) = \begin{cases} \varpi(tg(x) + [1-t]\varpi^{-1}f(x)) & \text{se } x \in \bar{A}, \\ f(x) & \text{se } x \in D^k \setminus A, \end{cases}$$

è una S^{k-1} -omotopia tra f ed un'applicazione continua

$$h : D^k \rightarrow X, \quad \text{con } h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D^k \setminus A \\ \varpi(g(x)) & \text{se } x \in \bar{A}. \end{cases}$$

Abbiamo perciò $h(D^k) \subset Y \cup \varpi^{-1}(\{|z| \geq 1/2\}) \cup \varpi(g(A))$. Per il Lemma di Sard, poiché abbiamo supposto che $k < m$, l'insieme $\varpi(g(A))$ è di prima categoria in $\Omega = \varpi(B^m)$. Quindi l'immagine di g non contiene $\varpi(\{|z| < 1/2\})$ e quindi non contiene Ω . Allora, per la prima parte della dimostrazione, la h è S^{k-1} -omotopa ad un'applicazione a valori in Y . \square

Da questo lemma ricaviamo la

PROPOSIZIONE 35.6.2. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso. Sia k un intero non negativo. Ogni $f \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X, X_{k-1})$ è S^{k-1} -omotopa ad una $g \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X_k, X_{k-1})$.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo compatto, $f(D^k)$ è contenuto in un sottospazio cellulare finito di (X, \mathcal{P}) . Possiamo quindi supporre che (X, \mathcal{P}) sia finito. Se \mathcal{P} non contiene celle di dimensione maggiore di k , la tesi è banalmente verificata. Supponiamo quindi che \mathcal{P} contenga una cella Ω di dimensione massimale $m > k$. Abbiamo allora, per $Y = X \setminus \Omega$, $X = Y \cup_{\phi} D^m$ per un'opportuna funzione d'attaccamento $\phi : S^{m-1} \rightarrow Y$. Per il Lemma precedente, la nostra f è allora S^{k-1} -omotopa ad un'applicazione continua f_1 a valori in Y . Iterando quest'argomento un numero finito di volte, otteniamo la tesi. \square

Come conseguenza, otteniamo il:

TEOREMA 35.6.3. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso. Fissiamo un punto $x_0 \in X$ per cui $\{x_0\}$ sia una 0-cellula. Allora, per ogni intero $k \geq 0$ l'applicazione (è un omomorfismo di gruppi se $k \geq 1$) indotta dall'inclusione*

$$(35.5) \quad [t_m]_* : \pi_k(X_m, x_0) \rightarrow \pi_k(X, x_0)$$

è surgettiva se $m \geq k$ e bigettiva se $m > k$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un intero $k \geq 0$. Per la proposizione precedente, l'applicazione $[t_m]_*$ è surgettiva per ogni $m \geq k$.

Dobbiamo dimostrare che se $m > k$, la (35.5) è anche iniettiva.

Sia $f \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X_k, x_0)$ un'applicazione S^{k-1} -omotopa in $\mathcal{C}(D^k, X)$ all'applicazione costante.

Sia quindi $F_0 : D^k \times I \rightarrow X$ un'applicazione continua con

$$\begin{cases} F_0(x, 0) = f(x) & \forall x \in D^k, \\ F_0(x, 1) = x_0 & \forall x \in D^k, \\ F_0(x, t) = x_0 & \forall x \in S^{k-1}, \forall t \in I. \end{cases}$$

Quindi la F_0 è un'applicazione continua sul cilindro $D^k \times I$, che vale x_0 in tutti i punti di una delle due basi, $D^k \times \{1\}$, del cilindro, e sulla superficie laterale $S^{k-1} \times I$. Poiché l'immagine di f è contenuta in X_k , la F_0 trasforma tutta la frontiera del cilindro $D^k \times I$ in X_k .

Poiché tutti i convessi chiusi e limitati sono tra loro omeomorfi, mediante un omeomorfismo tra le coppie (D^{k+1}, S^k) e $(D^k \times I, b(D^k \times I))$, possiamo considerare la F_0 come un'applicazione di $\mathcal{C}(D^{k+1}, S^k; X, X_k)$.

Per la Proposizione (35.6.2), la F_0 è S^k -omotopa ad una $F_1 \in \mathcal{C}(D^{k+1}, X_{k+1})$. Abbiamo cioè un'applicazione continua $D^k \times I \times I \ni (x, t, s) \rightarrow F_s(x, t) \in X$ con le proprietà:

$$\begin{cases} F_s(x, 0) = f(x) & \forall x \in D^k, \forall s \in I \\ F_s(x, t) = x_0 & \forall x \in S^{k-1}, \forall t \in I, \forall s \in I \\ F_s(x, 1) = x_0 & \forall x \in D^k, \forall s \in I. \end{cases}$$

In particolare, la $F_1 : D^k \times I \rightarrow M$ è, in $\mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X_{k+1}, x_0)$, una S^{k-1} -omotopia di f con l'applicazione costante. \square

35.7. Una proprietà di omotopia delle coppie cellulari

DEFINIZIONE 35.7.1. Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso e sia Y un sottospazio cellulare di X . Per ogni $C \in \mathcal{P}$ sia $d(C)$ la sua dimensione e $\bar{\phi}_C : D_C^{d(C)} \rightarrow \bar{C} \subset X$, l'estensione al disco chiuso della sua funzioni caratteristica.

Costruiamo per ricorrenza una successione di funzioni continue $h^{(m)} : Y \cup X_m \rightarrow I$, nel modo seguente.

Poniamo

$$\begin{cases} h_Y^{(0)}(x) = 0 & \text{se } x \in Y, \\ h_Y^{(0)}(x) = 1 & \text{se } x \in X_0 \cap \bar{C}Y. \end{cases}$$

Se $m > 0$, ed abbiamo già costruito $h^{(m-1)} : Y \cup X_{m-1} \rightarrow I$, definiamo $h_Y^{(m)} : Y \cup X_m \rightarrow I$ mediante

$$h_Y^{(m)}(x) = \begin{cases} h_Y^{(m-1)}(x) & \text{se } x \in Y \cup X_{m-1} \\ (1 - |\xi|) + |\xi| \cdot h_Y^{(m-1)}\left(\phi_C\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)\right) & \text{se } x = \phi_C(\xi) \text{ con } \xi \in B_C^m \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{se } x = \phi_C(0), \\ \text{quando } x \in \phi_C(B^m), \text{ per una } C \in \mathcal{P}_m \text{ con } C \cap Y = \emptyset. \end{cases}$$

La $h_Y(x) = h_Y^{(m)}(X)$ su ogni X_m è una funzione continua $h_Y : X \rightarrow I$ con $f^{-1}(0) = Y$. Essa si dice *funzione caratteristica della coppia* (X, Y) .

L'aperto $U_Y = \{x \in X \mid h_Y(x) < 1\}$ si dice un *intorno proprio* di Y in X . Esso si ottiene aggiungendo ad Y , per ogni cella C il cui centro non appartenga ad Y , ma la cui frontiera interseca Y , i raggi che congiungono il centro di C ai punti di $Y \cap bC$.

Vale il

LEMMA 35.7.2. *Ogni sottospazio cellulare Y di un CW-complesso (X, \mathcal{P}) è un retratto di deformazione stretto del suo intorno proprio.*

DIMOSTRAZIONE. Una retrazione di deformazione di U_Y su Y è la :

$$\phi(x, t) = \begin{cases} x & \text{se } x \in Y, \\ \bar{\phi}_C((1-t)(\xi/|\xi|) + t\xi) & \text{se } \begin{cases} C \cap Y = \emptyset, \quad \bar{C} \cap Y \neq \emptyset, \\ x = \bar{\phi}_C(\xi), \quad \xi \in D^{d(C)} \setminus \{0\}. \end{cases} \end{cases}$$

Osserviamo che ϕ è ben definita su $U_Y \times I$ perché $h_Y(\phi_C(t\xi)) = 1$ se $\xi \in D^{d(C)} \setminus \{0\}$ e $\bar{\phi}_C(\xi/|\xi|) \notin Y$. \square

COROLLARIO 35.7.3. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso ed Y un suo sottospazio cellulare. Allora per ogni spazio topologico Z , per ogni applicazione continua $f : X \rightarrow Z$ ed ogni omotopia $F : Y \times I \rightarrow Z$ di $f|_Y$, esiste un'omotopia $\tilde{F} : X \times I \rightarrow Z$ di f che prolunga F .*

DIMOSTRAZIONE. Utilizziamo le notazioni introdotte nella discussione svolta finora. Definiamo in primo luogo una $G : U_Y \times I \rightarrow X$ mediante :

$$G(x, t) = \begin{cases} \phi(x, \min\{1, t/h_Y(x)\}) & \text{se } x \in U_Y \setminus Y \\ x & \text{se } x \in Y. \end{cases}$$

La G è un'applicazione continua, che descrive ancora una retrazione di deformazione dell'intorno caratteristico U_Y di Y su Y . Utilizzando la G definiamo una $\Psi : X \times I \rightarrow X \times I$ mediante :

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} (G(x, \max\{0, t - h_Y(x)\}), \max\{0, t - 2h_Y(x)\}) & \text{se } x \in U_Y \\ (x, 0) & \text{se } x \in X \setminus U_Y. \end{cases}$$

La Ψ è continua e definisce una retrazione di $X \times I$ su $(X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$.

Se ora Z è un qualsiasi spazio topologico, $f : X \rightarrow Z$ un'applicazione continua ed $F : Y \times I \rightarrow Z$ un'omotopia di $f|_Y$, allora la:

$$f'(x, t) = \begin{cases} f(x) & \text{se } t = 0, x \in X \\ F(x, t) & \text{se } t \in I, x \in Y \end{cases}$$

è continua e quindi la:

$$\tilde{F}(x, t) = f' \circ \Psi(x, t) \quad \text{per } (x, t) \in X \times I$$

è un'omotopia di f che estende F . \square

Questo corollario ci dice che, se Y è un sottospazio cellulare di uno spazio cellulare X , allora l'inclusione $Y \hookrightarrow X$ è una *cofibratura*. Nel paragrafo successivo discuteremo brevemente il concetto di cofibratura.

35.8. Cofibrazioni

Poiché l'intervallo I è uno spazio di Hausdorff localmente compatto, per ogni coppia di spazi topologici X, Z , l'applicazione canonica $\mathcal{C}(X \times I, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(I, Z))$ è un omeomorfismo. Possiamo identificare quindi un'omotopia F di applicazioni continue di X in Z ad un'applicazione continua $F : X \rightarrow \mathcal{C}(I, Z)$, che ad ogni punto x di X faccia corrispondere un cammino continuo $I \ni t \rightarrow F(x, t) \in Z$ in Z .

Definiamo una *cofibratura* di X come il dato di uno spazio topologico Y e di un'immersione topologica $\iota : Y \rightarrow X$ tale che, per ogni applicazione $f \in \mathcal{C}(X, Z)$ ed ogni omotopia $F \in \mathcal{C}(Y, \mathcal{C}(I, Z))$ di $f \circ \iota$ si possa trovare un'omotopia $\tilde{F} \in \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(I, Z))$ che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xleftarrow{\iota} & X & \xrightarrow{f} & Z \\ \parallel & & \downarrow \tilde{F} & & \parallel \\ Y & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}(I, Z) & \xrightarrow{p_0} & Z \end{array}$$

dove $p_0 : \mathcal{C}(I, Z) \ni \alpha \rightarrow \alpha(0) \in Z$ è l'applicazione che associa ad ogni cammino continuo in Z il suo punto iniziale.

Nel seguito identificheremo per semplicità Y con la sua immagine $\iota(Y) \subset X$.

LEMMA 35.8.1. *Se $\iota : Y \rightarrow X$ è una cofibratura, allora $(X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$ è un retratto del cilindro $X \times I$.*

In particolare, se X è di Hausdorff, Y è un sottospazio chiuso di X .

DIMOSTRAZIONE. Una retrazione

$$\rho : X \times I \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$$

è un'estensione dell'omotopia

$$F : Y \times I \ni (x, t) \rightarrow (x, t) \in (X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$$

della restrizione ad Y dell'immersione

$$X \ni x \rightarrow (x, 0) \in (X \times \{0\}) \cup (Y \times I).$$

Se X è di Hausdorff, anche il prodotto $X \times I$ è uno spazio di Hausdorff e quindi il suo retratto² $(X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$ è chiuso in $X \times I$. L'applicazione $\rho_1 : X \ni x \rightarrow \rho(x, 1) \in X \times I$ è continua e quindi $Y = \rho_1^{-1}([X \times 0] \cup [Y \times I])$ è chiuso perché immagine inversa di un chiuso mediante un'applicazione continua. \square

PROPOSIZIONE 35.8.2. *Se $Y \hookrightarrow X$ è una cofibrazione e Y è contrattile, allora la proiezione $(X, Y) \rightarrow (X/Y, [Y])$ è un'equivalenza omotopica.*

DIMOSTRAZIONE. Siano (X, Y) ed (X', Y') due coppie topologiche. Ricordiamo che esse sono *omotopicamente equivalenti* se esistono due applicazioni $f \in \mathcal{C}(X, Y; X', Y')$ e $g \in \mathcal{C}(X', Y'; X, Y)$ tali che $f \circ g$ sia omotopa all'identità in $\mathcal{C}(X', Y'; X', Y')$ e $g \circ f$ sia omotopa all'identità in $\mathcal{C}(X, Y; X, Y)$.

Sia $F : Y \times I \rightarrow Y$ un'omotopia tra l'identità ed un'applicazione costante. Per l'ipotesi che $\iota : Y \hookrightarrow X$ sia una cofibrazione, la $\iota \circ F$ si estende ad un'omotopia $\tilde{F} : X \times I \rightarrow X$ tra l'identità ed un'applicazione che trasforma Y in un punto. Quindi $\tilde{F}_1 : X \ni x \rightarrow \tilde{F}(x, 1) \in X$ definisce, per passaggio al quoziente, un'applicazione $g : X/Y \rightarrow X$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{F}_1} & X \\ p \downarrow & & \parallel \\ X/Y & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

ove $p : X \rightarrow X/Y$ è la proiezione nel quoziente. La \tilde{F} è allora un'omotopia tra l'identità e $g \circ p$. Poiché $\tilde{F}(Y \times I) \subset Y$, per passaggio al quoziente la \tilde{F} definisce una \hat{F} che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{\tilde{F}} & X \\ p \times \text{id} \downarrow & & \downarrow p \\ (X/Y) \times I & \xrightarrow{\hat{F}} & X/Y \end{array}$$

ed è un'omotopia tra l'identità su X/Y e la $p \circ g$. \square

35.9. Alcune proprietà di omotopia dei CW-complessi

Otteniamo allora la:

PROPOSIZIONE 35.9.1. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso ed Y un sottospazio cellulare di X . Se l'inclusione $Y \hookrightarrow X$ è un'equivalenza omotopica, allora Y è un retratto di deformazione stretta di X .*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che il fatto che Y sia un retratto di deformazione stretto di X significa che l'identità su X è Y -omotopa ad un'applicazione a valori in Y .

²Se A è un retratto dello spazio topologico di Hausdorff B , detta $\rho : B \rightarrow A$ la retrazione, B è chiuso perché immagine inversa della diagonale $\{(b, b) | b \in B\}$ di $B \times B$ mediante l'applicazione continua $B \ni b \rightarrow (b, \rho(b)) \in B \times B$.

Sia $g : X \rightarrow Y$ un'inversa omotopica dell'inclusione $Y \hookrightarrow X$. Sia $F : Y \times I \rightarrow Y$ un'omotopia tra $g|_Y$ e l'identità su Y . Per il corollario precedente, essa si estende ad un'omotopia $\tilde{F} : X \times I \rightarrow A$ tra g e una retrazione $\rho : X \rightarrow Y$.

L'applicazione $f'(x, t)$, definita su $(X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$ mediante:

$$f'(x, t) = \begin{cases} \rho(x) & \text{se } x \in X, t = 0 \\ x & \text{se } x \in Y, t \in I \end{cases}$$

è continua. Consideriamo ora l'applicazione $R : X \ni x \rightarrow \rho(x) \in X$ (ottenuta componendo ρ con l'inclusione $Y \hookrightarrow X$). Per ipotesi essa è omotopa all'identità su X . Sia $G : X \times I \rightarrow X$ un'omotopia tra l'identità su X e l'applicazione ρ . Allora la $G \circ \Psi : X \times I \rightarrow X$ è una retrazione di deformazione di X su A . \square

DEFINIZIONE 35.9.2. Una *coppia topologica* (X, Y) si dice k -connessa se, per ogni $1 \leq h \leq k$, ogni $f \in \mathcal{C}(D^h, S^{h-1}; X, Y)$ è S^{h-1} -omotopa a un'applicazione a valori in Y .

Ad esempio, se Y è un retrato di deformazione stretto di X , la coppia (X, Y) è ∞ -connessa.

La coppia (X, Y) è 0-connessa se tutte le componenti connesse per archi di X contengono punti di Y .

DEFINIZIONE 35.9.3. Chiamiamo *coppia cellulare* una coppia (X, Y) formata da uno spazio cellulare X e da un suo sottospazio cellulare Y .

Vale la seguente:

PROPOSIZIONE 35.9.4. Sia (X, Y) una coppia cellulare e supponiamo, che per un intero positivo k , ovvero per $k = \infty$, tutte le celle contenute in $X \setminus Y$ abbiano dimensione minore o uguale a k . Se (A, B) è una coppia topologica k -connessa, ogni $f \in \mathcal{C}(X, Y; A, B)$ è Y -omotopa ad un'applicazione $g \in \mathcal{C}(X, A)$ che trasforma X in B .

In particolare, se X è uno spazio cellulare di dimensione minore o uguale a k , ogni applicazione continua di X a valori in uno spazio topologico k -connesso A è omotopa ad un'applicazione costante.

DIMOSTRAZIONE. Costruiamo per ricorrenza una successione di Y -omotopie $F_m : (Y \cup X_m) \times I \rightarrow A$, per interi $m = -1, 0, 1, \dots$, in modo che siano verificate le:

- (i) $F_{m+1}(x, t) = F_m(x, t)$ su $(Y \cup X_m) \times I$
- (ii) $F_m(x, t) = f(x)$ su $(Y \cup X_m) \times \{0\}$
- (iii) $F_m((Y \cup X_m) \times [0, 2^{-m-1}]) \subset B$
- (iv) $F_m(x, t) = F_m(x, t')$ se $x \in Y \cup X_m$, $2^{-m-1} \leq t, t' \leq 1$.

La $F : X \times I \rightarrow A$ che coincide con F_m su $X_m \times I$ sarà allora un'omotopia di f con un'applicazione a valori in B .

Definiamo $F_{-1} : Y \times I \rightarrow A$ come l'omotopia costante ($F_{-1}(x, t) = f(x)$ per ogni $x \in Y$ e $t \in I$).

Sia ora r un intero ≥ -1 e supponiamo di aver già costruito F_m per $-1 \leq m \leq r$, in modo che siano verificate le (ii), (iii), (iv) per ogni r con $-1 \leq m \leq r$ ed (i) per $-1 \leq m < r$. Se fosse $r \geq k$, avremmo $Y \cup X_r = X$ e potremmo quindi porre $F_{r+1} = F_r$. Ci limitiamo quindi a considerare il caso in cui $r < k$.

Poiché $Y \cup X_r$ è un sottospazio cellulare di X , per il Corollario 35.7.3, possiamo trovare un'omotopia $G : X \times I \rightarrow A$, con $G(x, 0) = f(x)$ per ogni $x \in X$, che prolunga F_r .

Per ogni cella C della partizione cellulare \mathcal{P} di X , indichiamo con $\phi_C : D^{d(C)} \rightarrow X$ la sua funzione caratteristica. Allora, per ogni cella C di dimensione $(r+1)$ contenuta in $X \setminus Y$, l'applicazione:

$$g_C(y) = G(\phi_C(y), 1 - 2^{-r-1}) \quad \text{per } y \in D^{r+1}$$

manda S^r in B . Poiché la coppia (A, B) è per ipotesi $(r+1)$ -connessa, possiamo trovare una S^r -omotopia $G_C : D^{r+1} \times I \rightarrow A$ tra g_C e un'applicazione continua che trasforma D^{r+1} in B . Definiamo allora:

$$F_{r+1}(x, t) = \begin{cases} F_r(x, t) & \text{se } x \in Y \cup X_r, t \in I \\ G(x, t) & \text{se } x \in Y \cup X_{r+1}, \\ & 0 \leq t \leq 2^{-r-1} \\ G_C(y, 2^{r+2}(t - 1 + 2^{-r-1})) & \text{se } x = \phi_C(y), \\ & 1 - 2^{-r-1} \leq t \leq 1 - 2^{-r-2} \\ G_C(y, 1) & \text{se } x = \phi_C(y), \\ & 1 - 2^{-r-2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che la F_{r+1} è continua e verifica tutte le condizioni (i), (ii), (iii), (iv).

L'ultima affermazione segue dal fatto che, se A è k -connesso e $a_0 \in A$, allora $(A, \{a_0\})$ è una coppia k -connessa. \square

COROLLARIO 35.9.5. *Sia k un intero non negativo o ∞ . Se una coppia cellulare (X, Y) è k connessa e nessuna cella di dimensione maggiore di k della decomposizione cellulare \mathcal{P} di X è contenuta in $X \setminus Y$, allora Y è un retratto di deformazione stretto di X .*

In particolare, uno spazio cellulare k -connesso di dimensione minore o uguale a k è contrattile. \square

35.10. Coppie cellulari k -connesse ed equivalenza omotopica

Richiamiamo la definizione di equivalenza omotopica per coppie topologiche.

DEFINIZIONE 35.10.1. Due coppie topologiche (X, Y) ed (X', Y') si dicono *omotopicamente equivalenti* se esistono due applicazioni continue $f \in \mathcal{C}(X, Y; X', Y')$ e $g \in \mathcal{C}(X', Y'; X, Y)$ tali che $g \circ f$ sia omotopa all'identità in $\mathcal{C}(X, Y; X, Y)$ ed $f \circ g$ sia omotopa all'identità in $\mathcal{C}(X', Y'; X', Y')$.

La proprietà di essere k -connesse è chiaramente una proprietà delle coppie topologiche invariante per equivalenza omotopica.

Vale il:

LEMMA 35.10.2. *Ogni coppia cellulare k -connessa è omotopa a una coppia cellulare (X, Y) con $X_k \subset Y$.*

DIMOSTRAZIONE. Conveniamo che lo scheletro (-1) -dimensionale di un qualsiasi spazio cellulare sia vuoto. Possiamo ragionare per ricorrenza su k . Supponiamo quindi che sia data una coppia cellulare k -connessa (X', Y') , con $k \geq 0$ e con $X'_{k-1} \subset Y'$ (per $k = 0$ questa condizione è banalmente verificata). Consideriamo l'inclusione $X'_k \hookrightarrow X'$ come un elemento di $\mathcal{C}(X'_k, Y'_k; X', Y')$.

Per la Proposizione 35.9.4, esiste una Y'_k -omotopia $\phi : X'_k \times I \rightarrow X'$ tale che $\phi_1(X'_k) \subset Y'$.

Consideriamo il prodotto topologico

$$X'_k \times I \times I.$$

Possiamo considerarlo in modo ovvio come spazio cellulare, utilizzando le partizioni cellulari standard $(\mathcal{P}_I = \{\{0\}, \{1\}, (0, 1)\})$ dell'intervallo I e la conseguente partizione cellulare

$$Q = \{C' \times C'' \times C''' \mid C' \in \bigcup_{0 \leq h \leq k} \mathcal{P}'_h, C'', C''' \in \mathcal{P}_I\}$$

del prodotto. Abbiamo qui indicato con \mathcal{P}'_h la partizione cellulare di X' e con \mathcal{P}'_h il sottoinsieme delle celle di dimensione h in \mathcal{P}' .

Consideriamo il sottospazio cellulare B di A che si ottiene considerando l'unione della base, di due facce laterali di $X'_k \times I \times I$ e del prodotto $Y'_k \times I \times I$:

$$B = (X'_k \times I \times \{0\}) \cup (X'_k \times \{0\} \times I) \cup (X'_k \times \{1\} \times I) \cup (Y'_k \times I \times I).$$

Definiamo lo spazio cellulare X attaccando A ad X' lungo B , mediante l'applicazione

$$\phi : B \ni (x, t_1, t_2) \rightarrow \phi(x, t_1) \in X'.$$

Poniamo quindi

$$\begin{aligned} X &= X' \cup_{\phi} A, \\ Y &= Y' \cup_j(B), \end{aligned}$$

dove j è la restrizione ad A della proiezione nel quoziente $X' \sqcup A \rightarrow X' \cup_{\phi} A$ ed abbiamo identificato X' ad un sottospazio di $X' \cup_{\phi} A$.

Osserviamo che A, B sono sottospazi cellulari di $X'_k \times I \times I$ e l'applicazione $\phi : B \rightarrow X'$ è cellulare.

Lo spazio topologico X è in modo naturale uno spazio cellulare ed Y un suo sottospazio cellulare, che contiene il suo scheletro k -dimensionale. Per verificare che le coppie (X, Y) ed (X', Y') sono omotopicamente equivalenti, basta osservare che Y' è un retratto di deformazione stretto di Y e che X' è un retratto di deformazione stretto di X . Quindi (X, Y) è omotopicamente equivalente alla coppia (X', Y') . \square

COROLLARIO 35.10.3. *Ogni spazio cellulare k -connesso è omotopicamente equivalente ad uno spazio cellulare X in cui lo scheletro k -dimensionale X_k sia un punto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X' uno spazio cellulare k -connesso e sia $\{x_0\} \subset X$ una sua cella 0-dimensionale. Per la proposizione precedente, la coppia cellulare $(X', \{x_0\})$ è omotopicamente equivalente a una coppia cellulare (X'', Y'') con $Y'' \supset X''_k$. Poniamo $X = X''/Y''$. Poiché, essendo omotopicamente equivalente a un punto, Y'' è contrattile, X è omotopicamente equivalente a X'' , e chiaramente X_k è un punto. \square

LEMMA 35.10.4. *Sia X uno spazio topologico, $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un suo ricoprimento fondamentale con:*

$$X_k \cap X_h = \emptyset \quad \text{se } |h - k| > 1$$

$$X_{k-1} \cap X_k \quad \text{è un retratto di deformazione stretto di } X_k \quad \text{se } k \geq 1.$$

Allora X_0 è un retratto di deformazione stretto di X .

DIMOSTRAZIONE. Per ogni intero positivo k sia $F_k : X_k \times I \rightarrow X_k$ una $X_k \cap X_{k-1}$ -omotopia legata tra l'identità su X_k ed un'applicazione che trasforma X_k nell'intersezione $X_k \cap X_{k-1}$. Definiamo allora un'omotopia $F : X \times I \rightarrow X$ ponendo:

$$F(x, t) = \begin{cases} x & \text{se } x \in X_k \text{ e } 0 \leq t \leq 2^{-k} \\ F_\ell(F_{\ell-1}(\dots (F_k(x, 1), \dots)1), 1), 2^\ell t - 1) & \text{se } x \in X_k \text{ } 2^{-\ell} \leq t \leq 2^{1-\ell}, \ell \leq k. \end{cases}$$

La F è una X_0 -omotopia legata tra l'identità e una retrazione di X su X_0 . \square

Otteniamo allora il seguente:

LEMMA 35.10.5. *Ogni spazio cellulare connesso contiene un sottospazio contrattile di dimensione 1 che contiene il suo scheletro di dimensione zero.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso e sia $\{x_0\} \in \mathcal{P}$ una sua cella di dimensione 0. Sia A_k l'insieme dei punti x tali che $\{x\} \in \mathcal{P}$ sia una cella di dimensione zero e che si possono collegare ad x_0 con un cammino continuo $\alpha : I \rightarrow X_1$ tale che $\alpha(I)$ contenga al più k celle distinte di dimensione 1. Abbiamo $A_0 = \{x_0\}$ e conveniamo di porre $A_{-1} = \emptyset$. Poiché X_1 è connesso, ed un cammino continuo, essendo un compatto, interseca solo un numero finito di celle, avremo $X_0 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Per ogni intero $k \geq 1$ ed ogni cella $\{x\}$ di dimensione 0 contenuta in $A_k \setminus A_{k-1}$ fissiamo una cella chiusa $C_x \in \mathcal{P}$, di dimensione 1, che congiunga x a una cella $\{y\} \in \mathcal{P}$ di dimensione 0, con $y \in A_{k-1} \setminus A_{k-2}$. Definiamo allora:

$$Y_k = \begin{cases} \{x_0\} & \text{se } k = 0 \\ \bigcup_{y \in A_k \setminus A_{k-1}} C_y & \text{se } k > 0. \end{cases}$$

Posto $Y = \bigcup_{k \geq 0} Y_k$, chiaramente Y è un sottospazio cellulare di dimensione 1 di X , che contiene X_0 e che, per il Lemma 35.10.4, $\{x_0\}$ è un retratto di deformazione stretto di Y . In particolare, Y è contrattile. \square

COROLLARIO 35.10.6. *Ogni spazio cellulare connesso X è omotopicamente equivalente a uno spazio cellulare X' con $\dim(X') \leq \dim(X)$, il cui scheletro di dimensione 0 si riduce a un punto.*

In particolare, ogni spazio cellulare di dimensione 1 è equivalente a un bouquet di circonferenze.

DIMOSTRAZIONE. Sia Y un sottospazio cellulare di X contrattile, che contiene lo scheletro di dimensione 0 di X . Allora la coppia (X, Y) è omotopicamente equivalente alla coppia $(X/Y, [Y])$.

Sia infatti $F : Y \times I \rightarrow Y$ un'omotopia tra l'identità ed un'applicazione costante. Per il Corollario 35.7.3 la F si prolunga ad un'omotopia $G : X \times I \rightarrow X$ dell'identità su X . Sia $g(x) = g(x, 1)$. Poiché g è costante su Y , essa definisce per passaggio al quoziente un'applicazione $\hat{g} : X/Y \rightarrow X$. Inoltre, $\hat{g}([A]) \in A$.

Si verifica facilmente che la $\hat{g} \in \mathcal{C}(X/Y, \{[Y]\}; X, Y)$ è un'inversa omotopica di $p \in \mathcal{C}(X, Y; X/Y, \{[A]\})$, ove $p : X \rightarrow X/A$ è la proiezione nel quoziente.

Infatti G definisce un'omotopia tra $\hat{g} \circ p = g$ e l'identità su X ; osserviamo poi che $G(Y, t) \subset Y$ per ogni $t \in I$ e quindi G definisce un'omotopia $\hat{G} : (X/Y) \times I \rightarrow X/Y$ tra $p \circ \hat{g}$ e l'identità su X/Y , costante su $[Y]$. \square

35.11. Gruppi di omotopia degli spazi cellulari di dimensione 1

Uno spazio cellulare connesso di dimensione 1 è omotopicamente equivalente a un bouquet di circonferenze. Dimostriamo la :

PROPOSIZIONE 35.11.1. *Sia I un insieme qualsiasi e sia $X = \bigvee_{i \in I} S_i^1$ il bouquet di I circonferenze. Allora $\pi_1(X, e_0)$ è il gruppo libero delle parole nell'alfabeto I , mentre tutti i gruppi $\pi_m(X, e_0)$ con $h \neq 1$ sono banali.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con \mathbf{G} il gruppo libero delle parole nell'alfabeto I . Consideriamo il bouquet $Y = \bigvee_{i \in I} D_i^1$ di I copie del disco di dimensione uno $D^1 = [-1, 1]$, consideriamo su \mathbf{G} la topologia discreta e definiamo sul prodotto topologico $Y \times \mathbf{G}$ la relazione di equivalenza :

$$(x, g) \sim (x', g') \iff \begin{cases} x = x' & \text{e} & g = g', & \text{oppure} \\ x = 1 \in D_i^1, x' = -1 \in D_i^1 & \text{e} & g' = g \cdot i, & \text{oppure} \\ x = -1 \in D_i^1, x' = 1 \in D_i^1 & \text{e} & g = g' \cdot i. \end{cases}$$

Sia $\tilde{X} = (Y \times \mathbf{G}) / \sim$ il quoziente topologico. Allora \tilde{X} è contrattile.

Questo fatto si può verificare nel modo seguente. Detta \tilde{X}_h l'immagine in \tilde{X} dell'insieme $\{(y, g) \mid y \in Y, \ell(g) = h\}$ (qui $\ell(g)$ è la lunghezza della parola g nell'alfabeto I), si osserva che la successione $\{\tilde{X}_h\}$ soddisfa le condizioni del Lemma 35.10.4, e quindi \tilde{X}_0 è un retratto di deformazione stretto di \tilde{X} . Ma \tilde{X}_0 è omeomorfo a Y , che è contrattile, onde \tilde{X} è contrattile.

L'applicazione $Y \times \mathbf{G} \rightarrow X$ indotta dalle $D_i^1 \times \mathbf{G} \ni (y, g) \rightarrow \exp(i\pi y) \in S_i^1$, per passaggio al quoziente, definisce un rivestimento (in senso stretto) $p : \tilde{X} \rightarrow X$. Poiché \tilde{X} è contrattile, il gruppo fondamentale di X è isomorfo al gruppo degli automorfismi del rivestimento $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$, che è isomorfo a \mathbf{G} . Utilizzando poi la successione esatta d'omotopia di un fibrato, otteniamo la tesi³. \square

³ Osserviamo che, nel caso del bouquet di un numero finito di circonferenze, avremmo potuto ottenere lo stesso risultato per ricorrenza, utilizzando il teorema di Seifert-Van Kampen. Questa dimostrazione, che utilizza la teoria dei rivestimenti, ci permette di discutere il caso del bouquet di un insieme qualsiasi (non necessariamente finito) di circonferenze.

35.12. Gruppo fondamentale di uno spazio cellulare

Abbiamo dimostrato che un qualsiasi spazio cellulare connesso è omotopicamente equivalente ad uno spazio cellulare (X, \mathcal{P}) il cui scheletro di dimensione 0 si riduce a un punto: $X_0 = \{x_0\}$. Il suo scheletro di dimensione 1 è allora un bouquet di circonferenze (una per ogni cella di dimensione 1), e l'applicazione naturale $\pi_1(X_1, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ indotta dall'inclusione è un omomorfismo surgettivo. Sappiamo inoltre che la $\pi_1(X_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ è un isomorfismo.

Quindi: $\pi_1(X, x_0)$ è isomorfo al quoziente di $\pi_1(X_1, x_0)$ rispetto al sottogruppo normale generato dalle classi di omotopia dei laccetti $\gamma_C : I \ni t \rightarrow \phi_C(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \in X_1$, ove $\phi_C : D^2 \rightarrow X$ è la funzione caratteristica di una cella chiusa \bar{C} di dimensione due.

Se X_0 non si riduce a un punto, possiamo ancora descrivere $\pi_1(X, x_0)$ come il quoziente di $\pi_1(X_1, x_0)$ (scegliamo il punto base x_0 nello scheletro 0-dimensionale di X) rispetto al sottogruppo normale generato dalle classi di omotopia dei laccetti della forma: $\alpha \cdot \gamma_C \cdot \alpha^{-1}$ dove α è un cammino che congiunge x_0 con il punto $\gamma(0) = \psi_C(e_0)$.

ESEMPIO 35.12.1. Sia m un intero positivo e sia X l'unione della sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e dei raggi $R_h = \{(0, t \cos(2h\pi/m), t \sin(2h\pi/m)) \mid t \in I\}$. Otteniamo una partizione cellulare di X considerando come celle di dimensione 0 il punto $(0, 0, 0)$ ed i punti $(0, \sin(2h\pi/m), \cos(2h\pi/m))$ per $1 \leq h \leq m$, come celle di dimensione 1 i punti interni dei segmenti R_h e degli archi A_h in cui la circonferenza $S^3 \cap \{x_0 = 0\}$ è suddivisa dagli estremi dei raggi R_h , come celle di dimensione due le due semisfere $S^3 \cap \{x_0 > 0\}$ e $S^3 \cap \{x_0 < 0\}$. Osserviamo che $Y = \bigcup R_h$ è un sottospazio cellulare contrattile che contiene X_0 . Quindi X è omotopicamente equivalente allo spazio cellulare $Z = X/Y$. Lo scheletro 0-dimensionale di Z è un punto, mentre Z_1 è un bouquet di m circonferenze. Dette a_1, \dots, a_m le classi di omotopia in $\pi_1(Z_1, [Y])$ generate dalle classi delle immagini dei laccetti:

$$I \ni t \rightarrow (0, \cos(2[h+t]\pi/m), \sin(2[h+t]\pi/m)) \in X,$$

il gruppo fondamentale $\pi_1(Z_1, [Y])$ è il gruppo libero generato da a_1, \dots, a_m . Le relazioni indotte dall'attaccamento delle due celle si riducono entrambe a:

$$a_1 \cdots a_m = 1.$$

Quindi $\pi_1(Z, [Y])$ e $\pi_1(X, x_0)$ sono isomorfi al gruppo libero generato da $(m-1)$ elementi.

Esercizi e Complementi

36.1. Esercizi

1. Dati $n + 1$ punti distinti p_0, p_1, \dots, p_n di \mathbb{R}^2 , si calcoli il gruppo fondamentale di $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ rispetto al punto base p_0 .

2. Siano M_1 ed M_2 due nastri di Moebius, con frontiere $S_1^1 \subset M_1$ ed $S_2^1 \subset M_2$. Dato un intero m , consideriamo la funzione di attaccamento $\phi : S_2^1 \ni z \rightarrow z^m \in S_1^1$ e sia $X = M_1 \cup_\phi M_2$. Si scelga un punto $x_0 \in X$ e si calcoli il gruppo fondamentale di X rispetto ad x_0 .

[Il gruppo fondamentale del nastro di Moebius è il gruppo libero generato dalla sua circonferenza mediana: se $M = I \times I / \sim$, dove la simmetria \sim identifica i punti $(0, t)$ ai punti $(1, 1 - t)$, per $t \in I$, possiamo scegliere come generatore il laccetto che è l'immagine in M del cammino $I \ni t \rightarrow (t, 1/2) \in I \times I$. Indichiamo con α la corrispondente classe di omotopia. Allora la frontiera S^1 del nastro di Moebius, opportunamente orientata, è omotopa ad un laccetto della classe di α^2 .

Usando il teorema di Seifert-Van Kampen, e riportando le classi di omotopia a uno stesso punto base sulle frontiere dei due nastri di Moebius, si può allora verificare che $\pi_1(X, x_0)$ è il quoziente del gruppo libero generato da due elementi a, b , rispetto alla relazione $a^2 b^{2m} = 1$.]

3. Siano M un nastro di Moebius e D^2 un disco bidimensionale, con frontiere $S_1^1 \subset M$ ed $S_2^1 \subset D^2$. Sia n un intero e sia $\phi : S_2^1 \ni z \rightarrow z^n \in S_1^1$. Posto $X = M \cup_\phi D^2$ e scelto $x_0 \in X$, si calcoli $\pi_1(X, x_0)$.

[Indichiamo con a la classe di omotopia corrispondente ad un generatore di $\pi_1(M, x_0)$ e con $b = 1$ quella corrispondente alla frontiera del disco. Poiché la frontiera del nastro di Moebius definisce la classe a^2 , utilizzando Seifert-Van Kampen otteniamo che $\pi_1(X, x_0)$ è il quoziente del gruppo libero generato da un elemento a che soddisfa la relazione $a^2 = b^n = 1$ e quindi è isomorfo a \mathbb{Z}_2 .]

4. Siano D^2 un disco bidimensionale ed M un nastro di Moebius, con frontiere $S_1^1 \subset D^2$ ed $S_2^1 \subset M$. Sia m un intero e sia $\phi : S_1^1 \ni z \rightarrow z^m \in S_2^1$. Posto $X = D^2 \cup_\phi M$ e scelto $x_0 \in X$, si calcoli $\pi_1(X, x_0)$.

[Con le notazioni dell'esercizio precedente: usando ancora Seifert-Van Kampen si verifica che $\pi_1(X, x_0) \simeq \mathbb{Z}_{2m}$, essendo il gruppo libero generato da a con la relazione che $(a^2)^m = a^{2m} = 1$.]

5. Siano a, b, c numeri interi positivi, con $a + b = c$ e tali che b, c siano privi di fattori comuni. Posto $X = \{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \mid z_0^a z_1^b = z_2^c\}$ e scelto un punto $p_0 \in X$, si calcoli $\pi_1(X, p_0)$.

[Si verifichi che l'applicazione $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \ni (w_0, w_1) \rightarrow (w_0^{b+c}, w_0^b w_1^c, w_0^c w_1^b) \in X$ è un omeomorfismo.]

36.2. Le superfici modello

DEFINIZIONE 36.2.1 (Superfici modello elementari). Chiamiamo *sfera con ℓ buchi* la sfera S^2 privata dei punti interni di ℓ calotte. Se $\xi_1, \dots, \xi_\ell \in S^2$ sono punti distinti della sfera ed $\inf_{1 \leq i < j \leq \ell} |\xi_i - \xi_j| = 3\epsilon > 0$, allora

$$(36.1) \quad \{x \in S^2 \mid |x - \xi_j| \geq \epsilon, 1 \leq j \leq \ell\}$$

è una sfera con ℓ buchi.

Si chiama *manico* la sfera a due buchi. La sfera a due buchi è una *varietà a bordo*, omeomorfa al cilindro $S^1 \times I$, e il suo bordo è l'unione disgiunta $S^1 \sqcup S^1$ di due circonferenze, orientate l'una nel verso opposto dell'altra.

Si chiama *nastro di Moebius* il complementare di una palla aperta nel piano proiettivo reale. Possiamo prendere ad esempio

$$(36.2) \quad M = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{RP}^2 \mid x_0^2 \leq x_1^2 + x_2^2\}.$$

Osserviamo che il nastro di Moebius è una *varietà a bordo*, con bordo ∂M omeomorfo ad una circonferenza.

DEFINIZIONE 36.2.2 (Superfici modello). La sfera a g manici e k buchi si ottiene dalla sfera a $2g + k$ buchi mediante l'attaccamento di g manici lungo le frontiere di $2g$ buchi, preservando l'orientazione naturale.

La sfera ad h nastri e k buchi si ottiene dalla sfera ad $h + k$ buchi attaccando ad essa h nastri di Moebius lungo il bordo di h buchi.

ESEMPIO 36.2.3. La sfera con un manico è il *toro*. La sfera ad una banda è il *piano proiettivo reale*. La sfera a due bande è la *bottiglia di Klein*. La sfera con due bande e un buco è un *disco con manico ritorto*.

Nell'elenco delle superfici modello non compaiono sfere che abbiano contemporaneamente bande e manici. Vale infatti il seguente

TEOREMA 36.2.4. *Una sfera con g manici, h bande e k buchi, se $h \geq 1$, è omeomorfa ad una sfera con $2g + h$ bande e k buchi.*

TEOREMA 36.2.5. *Ogni superficie differenziabile con bordo è omeomorfa ad una superficie modello.*

Una superficie modello ammette una decomposizione cellulare in cui vi è un'unica cella di dimensione 0 ed un'unica cella di dimensione 2. Possiamo allora rappresentarla come il quoziente topologico che si ottiene identificando in modo opportuno i punti del bordo di un poligono piano. I punti interni del poligono corrispondono alla cella di dimensione 2; i vertici, tutti identificati tra loro, danno la cella di dimensione 0. I punti interni dei lati corrispondono alle celle di dimensione 1. Si fanno corrispondere ad ogni manico quattro lati del poligono, che vengono identificati secondo lo schema

$$(36.3) \quad aba^{-1}b^{-1}.$$

Questo significa che i punti di ciascun segmento sono identificati con quelli dello stesso nome, ma presi nell'ordine inverso. Ad esempio, se pensiamo di percorrere

la frontiera del poligono in senso anti-orario, punti del lato contrassegnato con a vicini al primo estremo corrispondono a punti vicini al secondo estremo del lato contrassegnato con a^{-1} .

Ad ogni nastro si fanno corrispondere due lati consecutivi del poligono secondo lo schema

$$(36.4) \quad cc.$$

Ciò significa che a punti vicini al primo estremo del lato corrispondente a c si fanno corrispondere punti vicini al primo estremo dell'altro lato contrassegnato con c .

Ad ogni buco si associa un singolo lato, con lo schema semplice

$$(36.5) \quad d.$$

Ogni lato del poligono corrisponde ad un laccetto sulla superficie. Chiaramente, i diversi nomi sui lati corrispondono a generatori del gruppo fondamentale, mentre il perimetro dà, per il teorema di Van Kampen, la relazione che definisce il gruppo fondamentale.

Abbiamo perciò

TEOREMA 36.2.6. (1) *Se X è una sfera con g manici, allora il gruppo fondamentale di X ha $2g$ generatori $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$, legati dalla relazione*

$$(36.6) \quad a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1.$$

(2) *Se X è una sfera con h nastri, allora il gruppo fondamentale di X ha h generatori c_1, \dots, c_h , legati dalla relazione*

$$(36.7) \quad c_1^2 \cdots c_h^2 = 1.$$

(3) *Se X è una sfera a g manici e $k \geq 1$ buchi, allora il gruppo fondamentale di X è un gruppo libero con $2g + k - 1$ generatori.*

(4) *Se X è una sfera con h nastri e $k \geq 1$ buchi, allora il gruppo fondamentale di X è un gruppo libero con $h + k - 1$ generatori.*

La dimostrazione di molti di questi risultati si può ricondurre a manipolazioni algebriche.

Si osserva in primo luogo che è possibile definire una partizione cellulare di X che contenga una sola cella di dimensione 0 ed una sola cella di dimensione 2 e in cui le celle di dimensione 1 siano sottovarietà localmente chiuse di X . Se quindi si rappresenta X come un quoziente di un poligono chiuso P , ottenuto identificandone opportunamente i punti dei lati, a ciascuna cella di dimensione 1 possono corrispondere o un solo lato di P , se essa è contenuta nel bordo ∂X di X , o due lati distinti, se essa è interna ad X , perché una curva semplice piana disconnette localmente il piano in due componenti.

Per ottenere le forme canoniche delle superfici modello, si può allora dimostrare che ogni poligono P con una corrispondenza dei lati ai laccetti su X tale che al più due lati corrispondano ad uno stesso laccetto, o al suo inverso, è *equivalente* ad una della forma (36.6) o (36.7).

Algebricamente, ciò consiste essenzialmente nel trovare un diverso sistema di generatori per il gruppo fondamentale, in modo che la relazione tra di essi si riduca ad una delle (36.6) o (36.7).

L'operazione fondamentale che consente questo passaggio si può descrivere geometricamente nel modo seguente. Si considera una diagonale d di P che divida P in due poligoni, P_1 e P_2 , contenenti uno un lato a e l'altro il suo omologo $a^{\pm 1}$. Si costruisce poi un nuovo poligono P' attaccando P_2 a P_1 lungo i lati omologhi $a, a^{\pm 1}$, avendo cura di preservarne l'orientazione.

Consideriamo ad esempio il perimetro

$$abca^{-1}b^{-1}c = 1,$$

che corrisponde ad una superficie senza bordo con un manico ed un nastro. Tracciare la diagonale che congiunge il primo estremo di a al secondo estremo di c equivale a considerare, come nuovo insieme di generatori del gruppo fondamentale, $\alpha = a^{-1}, \beta = b^{-1}$ e $\gamma = abc$. La relazione diviene allora

$$\gamma a^{-1} b^{-1} b^{-1} a^{-1} \gamma = 1, \quad \text{cioè}$$

$$\gamma \alpha \beta \beta \alpha \gamma = 1, \quad \text{da cui}$$

$$\alpha \beta \beta \alpha \gamma \gamma = 1, \quad \text{che ci dà}$$

$$(\alpha \beta \alpha^{-1})(\alpha \beta \alpha^{-1}) \alpha \alpha \gamma \gamma = 1.$$

Verifichiamo quindi che la nostra superficie è una sfera a tre nastri utilizzando come generatori del gruppo fondamentale $\alpha \beta \alpha^{-1} = a^{-1} b^{-1} a, \alpha = a^{-1}, \gamma = abc$.

OSSERVAZIONE 36.2.7. La sfera X con h nastri e k buchi ha un rivestimento a due fogli che consiste di una sfera con $h - 1$ manici e $2k$ buchi.

Per $h = 1, k = 0$, otteniamo la sfera come rivestimento a due fogli del piano proiettivo reale; per $h = 2, k = 0$ il toro come rivestimento a due fogli della bottiglia di Klein; per $h = 1, k = 1$, il cilindro come rivestimento a due fogli del nastro di Moebius.

OSSERVAZIONE 36.2.8. Utilizzando i rivestimenti di superfici, otteniamo interessanti omomorfismi di gruppi. Consideriamo ad esempio una sfera con $g \geq 3$ manici. Possiamo rappresentarla come la superficie X che si ottiene dal toro $T = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid \text{dist}((z, t), K) < (1/2)\}$ ove K è la circonferenza $K = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z| = 1, t = 0\}$, ponendo

$$X = \left\{ (z, t) \in T \mid \left| z - \exp\left(\frac{2\pi ki}{g-1}\right) \right| \geq 1/4, k = 1, \dots, g-1 \right\}.$$

Introduciamo la relazione di equivalenza:

$$(z_1, t_1) \sim (z_2, t_2) \iff t_1 = t_2, z_1^{-1} z_2 \in \left\{ \exp\left(\frac{2\pi ki}{g-1}\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Allora $Y = X/\sim$ è omeomorfo alla sfera con due manici e l'omomorfismo iniettivo $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ ci permette di rappresentare il gruppo definito da $2g \geq 6$ generatori, legati dalla relazione (36.6), come un sottogruppo di un gruppo libero con 4

generatori $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, legati dalla relazione

$$\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_2 \beta_2 \alpha_2^{-1} \beta_2^{-1} = 1.$$

OSSERVAZIONE 36.2.9. Se (X, \mathcal{P}) è un CW complesso finito, la somma alternata

$$(36.8) \quad \chi(X) = \sum_m (-1)^m \# \mathcal{P}_m,$$

ove $\# \mathcal{P}_m$ indica il numero delle celle di dimensione m , è un invariante topologico che si dice la *caratteristica di Eulero-Poincaré* di X . Tale numero non dipende dalla partizione cellulare.

In particolare: se X è una sfera con manici, il numero $g(X)$ dei manici (che si dice *genere* di X) è legato alla caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(X)$ di X da

$$(36.9) \quad \chi(X) = 2 - 2g(X).$$

Se X è una sfera con $h(X)$ nastri, allora

$$(36.10) \quad \chi(X) = 2 - h.$$

In particolare, tutte le superfici orientabili hanno caratteristica di Eulero-Poincaré pari.

Osserviamo che, se $X \rightarrow Y$ è un rivestimento ad m fogli di Y , avremo $\chi(X) = m\chi(Y)$.

OSSERVAZIONE 36.2.10. Le sole superfici differenziabili compatte che abbiano gruppo fondamentale finito sono la sfera e il piano proiettivo reale. Il loro rivestimento universale è compatto, ed è omeomorfo alla sfera S^2 . Tutte le altre hanno gruppo fondamentale infinito. La sfera a $g \geq 1$ manici e la sfera ad $h \geq 2$ nastri hanno rivestimento universale omeomorfo a \mathbb{C} .

36.3. Gruppo fondamentale delle curve algebriche piane

DEFINIZIONE 36.3.1. Una curva algebrica piana è il luogo degli zeri in $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ di un polinomio omogeneo $f \in \mathbb{C}_0[z_0, z_1, z_2]$. Se f è un polinomio irriducibile, diremo che anche la curva C_f corrispondente è irriducibile. Chiaramente, se $f = f_1 \cdots f_m$ si decompone nel prodotto di m polinomi, avremo $C_f = C_{f_1} \cup \cdots \cup C_{f_m}$ ed inoltre $C_{f^k} = C_f$ per ogni intero positivo k . Se f non ha fattori multipli, chiameremo il grado di f *grado della curva algebrica* C_f .

Per studiare la struttura topologica di una curva algebrica irriducibile di grado m , osserviamo innanzi tutto che ogni polinomio irriducibile f di grado m si può scrivere, a meno di una proiettività di $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, nella forma:

$$f(z_0, z_1, z_2) = z_2^m + \sum_{\substack{a+b+c=m \\ c < m}} k_{a,b,c} z_0^a z_1^b z_2^c$$

per opportuni coefficienti $k_{a,b,c} \in \mathbb{C}$.

Osserviamo che la curva C_f è contenuta nell'unione dei due aperti coordinati $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ ed $U_1 = \{z_1 \neq 0\}$. In particolare, otteniamo un'applicazione continua e surgettiva:

$$\text{pr} : C_f \ni (z_0, z_1, z_2) \rightarrow (z_0, z_1) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1.$$

In U_0 consideriamo le coordinate non omogenee $y = z_2/z_0$ ed $x = z_1/z_0$. $X \cap U_0$ è descritto nelle coordinate non omogenee da:

$$f_0(x, y) = f(1, x, y) = y^m + \sum_{h=0}^{m-1} y^h p_h(x) = 0 \quad \text{con} \quad p_h \in \mathbb{C}[x].$$

Nell'intorno di ogni punto (x, y) di $U_0 \cap C_f$ in cui $\partial f(x, y)/\partial y \neq 0$, per il teorema delle funzioni implicite la proiezione $\text{pr}_0 : U_0 \cap C_f \ni (x, y) \rightarrow x \in \mathbb{C}$ definisce un omeomorfismo locale. Otteniamo perciò:

LEMMA 36.3.2. Sia $V_0(f)$ l'insieme dei punti $x \in \mathbb{C}$ per cui esiste un $y \in \mathbb{C}$ per cui:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \partial f(x, y)/\partial y = 0. \end{cases}$$

L'insieme $V_0(f)$ è finito e l'applicazione

$$(U_0 \cap C_f) \setminus \text{pr}_0^{-1}(V_0(f)) \ni (x, y) \rightarrow x \in \mathbb{C} \setminus V_0(f)$$

è un rivestimento (in senso stretto) ad m fogli. □

DEFINIZIONE 36.3.3. I punti di $V_0(f)$ si dicono i *punti di diramazione al finito* della *funzione algebrica* $y = F(x)$ che ha grafico C_f .

Diciamo che anche il punto ∞ è un *punto di diramazione* se, posto:

$$f_1(t, y) = f(t, 1, y) = y^m + \sum_{h=0}^{m-1} y^h q_h(t) = 0 \quad \text{con} \quad q_h \in \mathbb{C}[t],$$

risulta $\partial f_1(0, y)/\partial y = 0$ per qualche soluzione y di $f_1(0, y) = 0$. I punti di \mathbb{CP}^1 di coordinate omogenee $(1, x)$ con $x \in V_0(f)$ ed anche $(0, 1)$ nel caso in cui ∞ sia un punto di diramazione, si dicono i *punti di diramazione* in \mathbb{CP}^1 della funzione algebrica $y = F(x)$. Indichiamo con $V(F) \subset \mathbb{CP}^1$ l'insieme dei punti di diramazione di F .

Osserviamo che, se necessario, mediante un cambiamento di coordinate in \mathbb{CP}^1 , possiamo supporre che ∞ non sia punto di diramazione della funzione algebrica F .

Descriviamo una decomposizione cellulare di C_f . A questo scopo, consideriamo una spezzata semplice aperta¹ L in \mathbb{CP}^1 , di $(k-1)$ lati, che abbia come vertici i punti di diramazione x_1, \dots, x_k . Il complemento $\complement L$ di L in \mathbb{CP}^1 è una 2-cella aperta. Questa cella aperta, insieme alle $(k-1)$ parti interne dei lati della spezzata L e ai k vertici x_1, \dots, x_k , definisce una partizione cellulare \mathcal{P} di \mathbb{CP}^1 .

Otteniamo una partizione cellulare di C_f come immagine inversa della \mathcal{P} mediante la $\text{pr} : C_f \rightarrow \mathbb{CP}^1$.

Poiché la restrizione a $C_f \setminus \text{pr}^{-1}(V(f))$ della proiezione $C_f \xrightarrow{\text{pr}} \mathbb{CP}^1$ è un rivestimento ad m fogli, l'aperto $C_f \setminus \text{pr}^{-1}(L)$ ha m componenti connesse, ciascuna

¹Possiamo supporre infatti che $\{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{CP}$. Possiamo enumerare i punti di diramazione x_1, \dots, x_k in modo che, per un punto $x_0 \in \mathbb{C} \subset \mathbb{CP}$, sia $|x_1 - x_0| < |x_2 - x_0| < \dots < |x_k - x_0|$. Allora la spezzata $L = \bigcup_{h=1}^{k-1} \{x_h + t(x_{h+1} - x_h) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ ha le proprietà richieste.

delle quali è omeomorfa ad una palla B^2 ed è quindi una 2-cella aperta. Otteniamo così m celle di dimensione 2.

Le immagini inverse delle parti interne dei $(k - 1)$ lati della spezzata L sono $m(k - 1)$ celle di dimensione 1, e le immagini inverse dei k punti di diramazione sono le celle di dimensione zero.

Quindi C_f ammette una decomposizione cellulare con m celle di dimensione 2 ed $m(k - 1)$ celle di dimensione 1, mentre il numero di celle di dimensione zero si calcola sommando, per ogni punto di diramazione x_j di F , il numero $N_0(x_j)$ delle soluzioni y distinte dell'equazione $f_0(x_j, y) = 0$.

Per calcolare il gruppo fondamentale di una curva algebrica piana C_f irriducibile, abbiamo bisogno di introdurre un altro invariante, il suo *genere*. Esso si può definire in vari modi equivalenti. Lo definiremo qui in modo affatto topologico. Per ogni punto di diramazione x_j di F in $\mathbb{C}P^1$ fissiamo un disco Δ di centro x_j che non contenga altri punti di diramazione. A questo scopo possiamo scegliere una coordinata non omogenea τ su $\mathbb{C}P^1$ con $\tau(x_j) = 0$ e scegliere $\Delta = \{|\tau| < r\}$ per un numero reale r sufficientemente piccolo, in modo che $|\tau(x)| > r$ per i punti di diramazione $x_h \in V(f)$, con $x_h \neq x_j$. Indichiamo con $\dot{\Delta}$ il disco Δ privato del centro: $\dot{\Delta} = \{x \in \Delta \mid \tau(x) \neq 0\}$. Allora $\text{pr}^{-1}(\dot{\Delta}) \ni p \rightarrow \text{pr}(p) \in \dot{\Delta}$ è un rivestimento. In generale esso *non* sarà un rivestimento in senso stretto, ma sarà formato da $N(x_j)$ componenti connesse distinte.

Osserviamo che, in generale, $N(x_j) \geq N_0(x_j)$.

DEFINIZIONE 36.3.4. Siano x_1, \dots, x_k i punti di diramazione distinti della funzione algebrica F associata alla curva algebrica piana irriducibile C_f . Definiamo il *genere* $g(C_f)$ di C_f come il numero intero che soddisfa l'equazione:

$$2 - 2g(C_f) = m - m(k - 1) + \sum_{j=1}^k N(x_j) = \sum_{j=1}^k N(x_j) - m(k - 2).$$

Se x_j è un punto di diramazione di F , fissiamo un disco Δ_j di centro x_j e consideriamo una componente connessa $U_{j,r}$ ($1 \leq r \leq N(x_j)$) di $\text{pr}^{-1}(\dot{\Delta}_j)$. La $U_{j,r} \rightarrow \dot{\Delta}_j$ è un *rivestimento in senso stretto* con $\nu_{j,r}$ fogli di $\dot{\Delta}_j$. Ora, i rivestimenti in senso stretto con $\nu_{j,r}$ fogli del disco puntato sono tutti e soli quelli della forma:

$$\{t \in \mathbb{C} \mid 0 < |t| < 1\} \ni t \rightarrow t^{\nu_{j,r}} \in \{t \in \mathbb{C} \mid 0 < |t| < 1\}.$$

Si può verificare che i punti $(1, x, y) \in U_{j,r}$ sono parametrizzati mediante:

$$(1, t^{\nu_{j,r}}, \Phi_{j,r}(t))$$

per una funzione analitica di $t \in \Delta$ e la t si dice una *coordinata uniformizzante*².

Possiamo allora costruire una varietà differenziabile orientata \tilde{C}_f di dimensione due, aggiungendo a $C_f \setminus \text{pr}^{-1}(V(f))$ un punto per ogni componente connessa $U_{j,r}$ ed utilizzando come atlante le carte locali date dalla restrizione di pr alle celle aperte di dimensione due e alle componenti connesse delle immagini inverse di

²Il numero intero positivo $\nu_{j,r}$ è un invariante della componente connessa $U_{j,r}$ e si dirà l'*indice di diramazione* del corrispondente punto $p_{j,r}$ della superficie \tilde{C}_f che definiremo più avanti.

dischi che non contengano punti di diramazione, e le coordinate uniformizzanti su ciascuno degli aperti $U_{j,r}$.

Chiaramente è definita un'applicazione surgettiva e continua $\tilde{\text{pr}} : \tilde{C}_f \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ che coincide con pr su $\tilde{C}_f \setminus \tilde{\text{pr}}^{-1}(V_f) = C_f \setminus \text{pr}^{-1}(V_f)$.

L'immagine inversa mediante $\tilde{\text{pr}}$ della decomposizione cellulare di $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ci dà una decomposizione cellulare di \tilde{C}_f con m celle di dimensione 2, $m(k-1)$ celle di dimensione 1 e $\sum_j N(x_j)$ celle di dimensione 0. Quindi il genere $g(C_f)$ è:

$$g(C_f) = \frac{2 - \chi(\tilde{C}_f)}{2},$$

dove $\chi(\tilde{C}_f)$ è la *caratteristica di Eulero-Poincaré della varietà differenziabile* \tilde{C}_f .

Infatti, per un CW-complesso finito X di dimensione due la somma alternata:

$$\chi(X) = S(X) - L(X) + V(X)$$

ove

$S(X)$ = numero di celle di dimensione due di X

$L(X)$ = numero di celle di dimensione uno di X

$V(X)$ = numero di celle di dimensione zero di X

è un *invariante topologico*, che si dice la *caratteristica di Eulero-Poincaré* di X . Per tutte le varietà differenziabili compatte orientabili, la caratteristica di Eulero-Poincaré è un numero pari. Il numero $g = (2 - \chi)/2$ si dice il suo *genere* ed è il suo invariante topologico fondamentale: infatti X risulta omeomorfa alla sfera con g manici, ed ha quindi gruppo fondamentale (rispetto ad un suo punto qualsiasi) isomorfo al quoziente del gruppo libero su $2g$ lettere $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ rispetto alla relazione $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$. Indicheremo nel seguito questo gruppo con \mathbf{G}_g (vedi il §36.2).

Ritorniamo alla nostra curva piana irriducibile C_f . Se C_f è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, allora $\tilde{C}_f = C_f$ e quindi il genere determina completamente la topologia di C_f .

In generale, l'applicazione $\tilde{\text{pr}}$ si fattorizza mediante un'applicazione η che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_f & \xrightarrow{\eta} & C_f \\ \tilde{\text{pr}} \downarrow & & \downarrow \text{pr} \\ \mathbb{C}\mathbb{P}^1 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \end{array}$$

La C_f si può ottenere quindi da \tilde{C}_f come quoziente iniettivo della η , identificando cioè i punti distinti di $\tilde{\text{pr}}^{-1}(V_f)$ che corrispondono mediante η ad uno stesso punto di $\text{pr}^{-1}(V_f)$.

Per il calcolo effettivo del gruppo fondamentale, possiamo utilizzare il seguente:

LEMMA 36.3.5. *Sia (X, \mathcal{P}) un CW-complesso connesso e siano $\{a\}, \{b\}$ due celle distinte di dimensione 0 di X . Allora $X/\{a, b\}$ è omotopicamente equivalente al bouquet di $X \vee S^1$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\phi : \{0, 1\} \rightarrow X$ definita da $\phi(0) = a$, $\phi(1) = b$ e sia $\tilde{X} = X \cup_\phi I$. Poiché I è contrattile, la coppia cellulare (\tilde{X}, I) è omotopicamente equivalente a $(\tilde{X}/I, [I])$, che è omeomorfa alla coppia $(X/\{a, b\}, [\{a, b\}])$. Consideriamo ora un sottospazio cellulare contrattile Y di dimensione 1 di X che contenga $\{a, b\}$. Allora $(\tilde{X}/Y, [Y])$ è omotopicamente equivalente al bouquet $(X \vee S^1, \{a\})$ e alla coppia (\tilde{X}, I) . \square

Come conseguenza di questo lemma, otteniamo il risultato seguente :

PROPOSIZIONE 36.3.6. *Il gruppo fondamentale di una curva piana irriducibile C_f di genere g è isomorfo al prodotto libero*

$$\mathbf{G}_g * \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{N-N_0 \text{ volte}}$$

dove :

\mathbf{G}_g è il quoziente del gruppo libero con $2g$ generatori $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$

rispetto alla relazione $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$,

$$N = \sum_{j=1}^k N(x_j) \quad \text{ove} \quad V_f = \{x_1, \dots, x_k\}$$

$$N_0 = \sum_{j=1}^k N_0(x_j) \text{ è la cardinalità di } \text{pr}^{-1}(V_f).$$

36.4. Esempi di curve piane irriducibili (Esercizi)

Di ciascuna delle seguenti curve piane: si definisca una partizione cellulare, se ne calcoli il genere, si dica se la curva è o meno liscia, e se ne calcoli infine il gruppo fondamentale.

6. $X = \{z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.
7. $X = \{z_0 z_1^2 + z_1 z_2^2 + z_2^3 = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.
8. $X = \{z_0 z_1^3 + z_0 z_1 z_2^2 + z_2^4 = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.
9. $X = \{z_0 z_1^5 + z_0 z_1^2 z_2^3 + z_2^6 = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.
10. $X = \{z_2^5 + z_0 z_1 z_2^3 + z_1^4 z_2 + z_1^5 = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.
11. $X = \{z_0^{m-k} z_2^k = (z_1 - a_1 z_0) \cdots (z_1 - a_m z_0)\}$ con $m \geq 2$, $1 \leq k \leq m$, ed a_1, \dots, a_m punti distinti di \mathbb{C} .

36.5. Curve piane riducibili (Esercizi)

Abbiamo già osservato che, se $f_1, \dots, f_\ell \in \mathbb{C}_0[z_0, z_1, z_2]$ sono polinomi irriducibili due a due non proporzionali, allora $C_{f_1 \dots f_\ell} = C_{f_1} \cup \cdots \cup C_{f_\ell}$. Due curve distinte di gradi m, n , si intersecheranno in un numero finito $r \leq mn$ di punti distinti (teorema di Bézout). Per calcolare quindi il gruppo fondamentale di una curva algebrica riducibile, sarà sufficiente osservare che vale il seguente :

LEMMA 36.5.1. *Siano X, Y due spazi cellulari connessi. Siano $x_1 \neq x_2 \in X$ ed $y_1, y_2 \in Y$. Sia $Z = Y \cup_{\phi} X$ ove $\phi : \{x_1, x_2\} \ni x_i \rightarrow y_i \in \{y_1, y_2\}$. Allora $\pi_1(Z, y_1) \simeq \pi_1(X, x_1) * \pi_1(Y, y_1) * \mathbb{Z}$.*

DIMOSTRAZIONE. Lo spazio topologico Z è un CW -complesso omotopicamente equivalente al quoziente del bouquet $(X, x_1) \vee (Y, y_1)$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica i punti x_2 ed y_2 . Applicando il Lemma 36.3.5, otteniamo che Z è omotopicamente equivalente al bouquet $(X, x_1) \vee (Y, y_1) \vee (S^1, e_0)$, e quindi otteniamo la tesi. \square

12. Si calcoli il gruppo fondamentale della curva piana di equazione omogenea:

$$\{(z_0^2 - z_1 z_2)(z_0^2 + z_1^2 + z_2^2) = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2.$$

13. Si calcoli il gruppo fondamentale della curva piana di equazione omogenea:

$$\{z_0 z_1 z_2 (z_0^4 + z_1^4 + z_2^4) = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2.$$

14. Si calcoli il gruppo fondamentale della curva piana di equazione omogenea:

$$\{z_0^{a+b} = z_1^a z_2^b\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2,$$

ove a, b sono interi positivi con massimo comun divisore $d > 1$.

15. Si calcoli il gruppo fondamentale della curva piana di equazione omogenea:

$$\{z_0^6 = (z_0 z_1 + z_2^2)^3\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2.$$

16. Si calcoli il gruppo fondamentale della curva piana di equazione omogenea:

$$\{z_2^6 - z_0^2 z_1 z_2^3 - z_0 z_1^2 z_2^3 + z_0^3 z_1^3 = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2.$$

36.6. Altri esercizi

17. Sia M un nastro di Moebius e siano $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ punti distinti interni ad M . Sia $X = M \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$. Si calcoli $\pi_1(X, p_0)$.

18. Siano p_0, p_1, \dots, p_n punti distinti dello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$, sia $X = \mathbb{P}\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$. Si calcoli $\pi_1(X, p_0)$.

19. Siano Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 quattro sfere di dimensione due, due a due disgiunte. Fissiamo punti $p_i, q_i \in Y_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$ e sia X il quoziente dell'unione disgiunta $Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup Y_3 \sqcup Y_4$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica il punto p_i al punto q_{i+1} per $1 \leq i \leq 3$ e il punto p_4 al punto q_1 . Si trovi una decomposizione cellulare di X e, scelto un suo punto p_0 , si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(X, p_0)$.

20. Si consideri il cilindro $K = S^1 \times I$ e, fissati due interi $m, n \neq 0$, si consideri la relazione di equivalenza su K :

$$(z, t) \sim (w, s) \iff \begin{cases} (z, t) = (w, s) \\ z^m = w^n, t = 0, s = 1 \\ z^n = w^m, t = 1, s = 0. \end{cases}$$

Sia $X = K/\sim$, sia $\text{pr} : K \rightarrow X$ la proiezione nel quoziente. Siano fissati $(k+1)$ punti distinti z_0, z_1, \dots, z_k di S^1 (con $k \geq 0$) e sia $Y = X \setminus \{\text{pr}(z_1, 1/2), \dots, \text{pr}(z_k, 1/2)\}$.

Si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(Y, \text{pr}(z_0, 1/2))$.

21. Consideriamo il sottogruppo \mathbf{H} di $\mathbf{SU}(2)$ formato dalle matrici

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che lo spazio omogeneo $X = \mathbf{SU}(2)/\mathbf{H}$ è una varietà differenziabile connessa di dimensione 3. Si fissi un punto x_0 di X e si calcolino $\pi_1(X, x_0)$, $\pi_2(X, x_0)$ e $\pi_3(X, x_0)$.

21. Con le notazioni dell'Esercizio 20, si consideri l'immagine \mathbf{G} di $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ in $\mathbf{SO}(4)$ mediante l'omomorfismo che associa a $(g_1, g_2) \in \mathbf{H} \times \mathbf{H}$ l'isometria

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longrightarrow g_1 \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} g_2^{-1}(e_1)$$

di $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$. Si dimostri che $Y = \mathbf{SO}(4)/\mathbf{G}$ è una varietà differenziabile di dimensione 6 e, fissato $y_0 \in Y$, si calcolino i gruppi $\pi_1(Y, y_0)$, $\pi_2(Y, y_0)$, $\pi_3(Y, y_0)$.

22. Sia $E \subset \mathbb{C}$ il sottospazio

$$E = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}} (2a + S^1) = \{2a + z \mid a \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}.$$

Sia $B = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid zw = 0, |z-1| + |w-1| = 2\}$ il bouquet di due circonferenze. Si verifichi che l'applicazione

$$\pi : E \ni (2a + z) \rightarrow \begin{cases} (z^2 - 1, 0) & \text{se } a \text{ è dispari,} \\ (0, z^2 - 1) & \text{se } a \text{ è pari,} \end{cases}$$

è un rivestimento. Si calcoli $\pi_1(E, 1)$ e si descriva l'omomorfismo iniettivo $\pi_* : \pi_1(E, 1) \rightarrow \pi_1(B, (0, 0))$.

Questo esempio mostra che il gruppo libero con due generatori $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ contiene un sottogruppo isomorfo al gruppo libero con un'infinità numerabile di generatori.

36.7. Varietà di Stiefel e di Grassmann reali

DEFINIZIONE 36.7.1. La *varietà di Stiefel reale* $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è l'insieme degli m -riferimenti ortogonali di \mathbb{R}^n . I suoi punti sono cioè le m -uple $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$ di vettori ortonormali di \mathbb{R}^n .

Identificando $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$ alla matrice $n \times m$ con colonne v_1, \dots, v_m otteniamo un'immersione naturale di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ nello spazio Euclideo \mathbb{R}^{nm} , e quindi una struttura topologica di sottospazio di uno spazio Euclideo.

Per $m = 1$, la varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{R})$ è la sfera $(n-1)$ -dimensionale $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$; è poi $\mathbb{V}_{n,n-1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{V}_{n,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbf{SO}(n)$. Le varietà di Stiefel reali generalizzano quindi, allo stesso tempo, le sfere e i gruppi speciali ortogonali.

PROPOSIZIONE 36.7.2. La *varietà di Stiefel* $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è una varietà analitica compatta di dimensione $\frac{m(2n-m-1)}{2}$.

DIMOSTRAZIONE. Innanzi tutto $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è un compatto di \mathbb{R}^{nm} perché chiuso e limitato.

Descriviamo ora un atlante di carte locali di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$. Sia $\vec{e} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ un elemento di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$. Completiamolo, mediante vettori $\epsilon_{m+1}, \dots, \epsilon_n$ ad una base ortonormale di \mathbb{R}^n . Osserviamo che, assegnati

$$\begin{cases} (x_{1,2}, \dots, x_{1,n}) \in B^{n-1} \\ (x_{2,3}, \dots, x_{2,n}) \in B^{n-2} \\ \dots \\ (x_{m,m+1}, \dots, x_{m,n}) \in B^{n-m} \end{cases}$$

risultano univocamente determinati numeri reali $x_{i,j}$, per interi i, j con $1 \leq i \leq j \leq m$ tali che $x_{i,i} > 0$ per ogni $1 \leq i \leq m$ e

$$\left(\sum_{j=1}^n x_{1,j} \epsilon_j, \dots, \sum_{j=1}^n x_{m,j} \epsilon_j \right) \in \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}).$$

Gli $x_{i,j}$ con $1 \leq i < j \leq n$ definiscono quindi una carta locale con centro in \vec{e} . In particolare

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) = \sum_{h=1}^m (n-h) = nm - \frac{m(m+1)}{2}.$$

□

Il gruppo speciale ortogonale $\mathbf{SO}(n)$ opera transitivamente sulle varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ per ogni $1 \leq m \leq n-1$. Lo stabilizzatore di un punto è isomorfo al gruppo $\mathbf{SO}(n-m)$. Quindi:

PROPOSIZIONE 36.7.3. *La varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è connessa per archi ed è omeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-m)$. Abbiamo la successione esatta di omotopia (dove per semplicità omettiamo di indicare il punto base)*

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \pi_h(\mathbf{SO}(n-m)) \longrightarrow \pi_h(\mathbf{SO}(n)) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ &\longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(n-m)) \longrightarrow \dots \\ (36.11) \quad \dots &\longrightarrow \pi_1(\mathbf{SO}(n-m)) \longrightarrow \pi_1(\mathbf{SO}(n)) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Siano k, m, n interi con $1 \leq k < m < n$. L'applicazione

$$(36.12) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{R})$. Otteniamo quindi una successione esatta in omotopia³

$$\begin{aligned} &\dots \longrightarrow \pi_{h+1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) \\ (36.13) \quad &\longrightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) \\ &\longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

³Per semplicità in questa, e nelle altre successioni esatte in questo paragrafo ometteremo di indicare il punto base.

Da questo deduciamo immediatamente

PROPOSIZIONE 36.7.4. *La varietà di Stiefel reale $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$, con $1 \leq m < n$, è $(n - m - 1)$ -connessa e*

$$(36.14) \quad \pi_{n-m}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n - m \text{ è pari, o } m = 1, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } n - m \text{ è dispari ed } m \geq 2. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per ricorrenza su $m \geq 1$. Poiché, come abbiamo osservato in precedenza, $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{R}) = S^{n-1}$, la tesi è vera se $m = 1$. Supponiamo allora che $m > 1$ e che la tesi sia vera per le varietà di Stiefel reali $\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})$ con $1 \leq k < m$. Consideriamo la successione esatta (36.13) con $k = m - 1$. Se $h < n - m$, allora $\pi_h(\mathbb{V}_{n-m+1,1}(\mathbb{R})) = \pi_h(S^{n-m}) = 0$, e $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m-1}(\mathbb{R})) = 0$ per l'ipotesi induttiva. Quindi anche $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) = 0$.

Per dimostrare in generale la (36.14), che sappiamo vera per $m - 1$, cominciamo ad esaminare a parte il caso $m = 2$. Per $m = 2$, $k = 1$ ed $h = n - 2$, la (36.13) dà:

$$(36.15) \quad \mathbb{Z} = \pi_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\Delta_*} \mathbb{Z} = \pi_{n-2}(S^{n-2}) \longrightarrow \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n,2}) \longrightarrow 0.$$

Per calcolare l'applicazione Δ_* in (36.15), osserviamo che abbiamo un diagramma commutativo di fibrazioni

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{SO}(n-1) & \longrightarrow & \mathbf{SO}(n) & \longrightarrow & S^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{V}_{n-1,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S^{n-1}. \end{array}$$

Otteniamo allora un diagramma commutativo

$$(36.16) \quad \begin{array}{ccccc} \pi_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\Delta_*} & \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n-1)) & \longrightarrow & \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n)) \\ \parallel & & \downarrow p_* & & \downarrow \\ \pi_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\Delta_*} & \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n-1,1}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{R})). \end{array}$$

Dimostriamo a questo punto alcuni risultati relativi al gruppo ortogonale.

LEMMA 36.7.5. *Consideriamo l'applicazione $\Psi : S^n \times S^n \rightarrow S^n$ definita da*

$$(36.17) \quad S^n \times S^n \ni (x, y) \rightarrow \Psi(x, y) = y - 2(x|y)x \in S^n.$$

Per ogni $x \in S^n$, la $S^n \ni y \rightarrow F(x, y) \in S^n$ ha grado (-1) . Per ogni $y \in S^n$, la $S^n \ni x \rightarrow F(x, y) \in S^n$ ha grado $1 - (-1)^n$, cioè 2 se n è dispari e 0 se n è pari.

DIMOSTRAZIONE. Fissato $x = e_1$, la $y \rightarrow F(e_0, y)$ è la sospensione della $S^1 \ni (x_0, x_1) \rightarrow (x_0, -x_1) \in S^1$, che possiamo anche scrivere, mediante l'inclusione $S^1 \subset \mathbb{C}$, come $S^1 \ni z \rightarrow \bar{z} = z^{-1} \in S^1$. Quindi la $y \rightarrow F(e_0, y)$ ha grado (-1) e perciò tutte le $y \rightarrow f_x(y) = F(x, y)$ hanno grado (-1) .

Per dimostrare che le $x \rightarrow \psi_y(x) = F(x, y)$ hanno grado $1 - (-1)^n$, poiché S^n è connesso per archi, possiamo limitarci a considerare il caso speciale in cui $y = -e_n$. Scriviamo per semplicità $\psi = \psi_{-e_n}$. Consideriamo quindi l'applicazione

$$S^n \ni x = (x_n, \dots, x_n) \rightarrow \psi(x) = (2x_n x_0, \dots, 2x_n x_{n-1}, 2x_n^2 - 1) = (2x_n) \cdot x - e_n \in S^n.$$

Abbiamo $\psi(x) = \psi(-x)$. Quindi, se $a : S^n \ni x \rightarrow -x \in S^n$ è l'applicazione antipodale, $\psi = \psi \circ a$. Quindi, poiché il grado della mappa antipodale è $(-1)^{n+1}$, da

$$\deg(\psi) = \deg(\psi \circ a) = \deg(\psi) \cdot (-1)^{n+1}$$

otteniamo che $\deg(\psi) = 0$ se n è pari.

Consideriamo ora il caso in cui n sia dispari. Osserviamo che $\psi(S^{n-1}) = \{-e_0\}$. Possiamo quindi definire due applicazioni

$$\psi_+(x) \begin{cases} \psi(x) & \text{se } x \in S_+^n, \\ -e_0 & \text{se } x \in S_-^n, \end{cases}, \quad \psi_-(x) \begin{cases} -e_0 & \text{se } x \in S_+^n, \\ \psi(x) & \text{se } x \in S_-^n. \end{cases}$$

L'elemento definito da ψ in $\pi_n(S^n, e_0)$ è la somma delle classi di omotopia di ψ_+ e ψ_- . Poiché $\psi_- = \psi_+ \circ a$, abbiamo $\deg(\psi_-) = \deg(\psi_+)$, perché la mappa antipodale ha grado 1. Quindi $\deg(\psi) = 2 \deg(\psi_+)$. Osserviamo ora che $\psi_+(x) \neq -x$ per ogni $x \in S^n$. Quindi

$$S^n \times I \ni (x, t) \rightarrow \Psi_+(x, t) = \frac{(1-t)\psi_+(x) + tx}{|(1-t)\psi_+(x) + tx|} \in S^n$$

è un'omotopia di ψ_+ con l'identità. Ciò dimostra che ψ_+ ha grado 1, e quindi ψ ha grado 2. \square

La matrice della simmetria σ_x rispetto al vettore $x = (x_0, \dots, x_n) \in S^n$ è la

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 - 2x_0^2 & -2x_0x_1 & \dots & -2x_0x_n \\ -2x_0x_1 & 1 - 2x_1^2 & \dots & -2x_1x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2x_0x_n & -2x_1x_n & \dots & 1 - 2x_n^2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante della simmetria rispetto a un vettore è (-1) . Otteniamo quindi un'applicazione $\phi_n : S^n \rightarrow \mathbf{SO}(n+1)$, definita da

$$\phi_n : S^{n-1} \ni x \rightarrow \sigma_x \circ \sigma_{e_0}.$$

La restrizione di ϕ_n alla semisfera superiore $S_+^{n+1} = S^n \cap \{x_n \geq 0\}$ trasforma la coppia (S_+^n, S^{n-1}) nella coppia $(\mathbf{SO}(n+1), (\mathbf{SO}(n)))$. Consideriamo l'applicazione $p : \mathbf{SO}(n+1) \ni g \rightarrow g(e_n) \in S^n$. Abbiamo

$$\begin{aligned} p(\phi(x)) &= \phi(x)(e_n) = \sigma_x \circ \sigma_{e_0}(e_n) \\ &= \sigma_x(e_0) = -\psi_+(x) \quad \forall x \in S_+^n. \end{aligned}$$

Possiamo quindi considerare l'estensione di $p \circ \phi$ che si ottiene mandando tutta la semisfera S_-^n nel punto e_n . L'applicazione che si ottiene è la $a \circ \psi_+$, ed ha quindi, poiché ψ_+ ha grado 1, grado uguale a $(-1)^{n+1}$. Osserviamo infine che la restrizione di ϕ_n all'equatore è la ϕ_{n-1} .

Questa applicazione ci permette di descrivere, nella successione esatta

$$\mathbb{Z} = \pi_n(S^n) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(n)) \xrightarrow{\iota_*} \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(n+1)) \longrightarrow 0$$

il nucleo della ι_* . Abbiamo infatti

PROPOSIZIONE 36.7.6. *Il nucleo di ι_* è il sottogruppo ciclico generato da $\alpha = \Delta_*(\text{id}_{S^n})$. L'applicazione $\phi_{n-1} : S^{n-1} \rightarrow \mathbf{SO}(n)$ rappresenta l'elemento $(-1)^{n+1}\alpha$.*

Utilizziamo ora il diagramma commutativo (36.16). Poiché l'immagine $p_* \circ \Delta_*$ della classe di $\text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ è 0 o $2[\text{id}_{\mathbb{S}^{n-2}}]$ a seconda che n sia dispari o pari, otteniamo la (36.14). \square

Studiamo ora i gruppi di omotopia delle varietà di Grassmann. Fissato un prodotto scalare su \mathbb{R}^n , l'applicazione

$$(36.18) \quad \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \ni p \rightarrow p^\perp \in \mathbb{G}_{n,n-m}(\mathbb{R})$$

che associa ad ogni m -piano p l' $(n-m)$ -piano ad esso ortogonale è un omeomorfismo. Possiamo quindi supporre nel seguito che $n \geq 2m$.

Consideriamo l'applicazione naturale

$$(36.19) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$$

che associa ad un sistema $\vec{v} \in \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ di m vettori ortonormali il sottospazio $p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ da essi generato. La (36.19) è una fibrazione localmente banale con fibra omeomorfa al gruppo $\mathbf{O}(m)$. Abbiamo quindi la successione esatta:

$$(36.20) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) & \\ & & & & & & \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{O}(m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{O}(m)) & \longrightarrow & \cdots & \end{array}$$

LEMMA 36.7.7. *Per ogni intero non negativo h ed ogni coppia d'interi positivi m, k , con $m \leq k$, le applicazioni $\iota_* : \pi_h(\mathbf{O}(m)) \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R}))$ hanno immagine nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Rappresentiamo $\mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R})$ come lo spazio delle matrici reali M di tipo $(k+m) \times m$ tali che ${}^t M M = I_m$. Allora l'inclusione $\iota : \mathbf{O}(m) \hookrightarrow \mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R})$ identifica $\mathbf{O}(m)$ al sottospazio delle matrici

$$M_g = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } g \in \mathbf{O}(m).$$

L'omotopia $F : \mathbf{O}(m) \times I \rightarrow \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ definita da

$$F(g, t) = \begin{pmatrix} g \cos^2(t\pi/2) + I_m \sin^2(t\pi/2) \\ (g - I_m) \sin(t\pi/2) \cos(t\pi/2) \\ 0_{n-2m,m} \end{pmatrix}$$

definisce una retrazione di deformazione di $\mathbf{O}(m)$ sul punto base di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$. Da questo segue la tesi. \square

In particolare, dalla successione esatta di Serre otteniamo le successioni esatte corte:

$$(36.21) \quad 0 \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{O}(m)) \rightarrow 0.$$

Abbiamo perciò, tenuto conto dell'omeomorfismo (36.18),

TEOREMA 36.7.8. *Siano $1 \leq m < n$ e $\nu = \min\{n, n-m\}$. Per ogni $h \geq 1$ abbiamo*

$$(36.22) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \pi_h(\mathbb{V}_{n,\nu}(\mathbb{R})) \oplus \pi_{h-1}(\mathbf{O}(\nu)).$$

In particolare, poiché $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è semplicemente connesso per $n - m > 1$, otteniamo che

$$(36.23) \quad \pi_1(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2 \quad \forall n \geq 3 \quad \text{e} \quad 1 \leq m < n$$

e inoltre

$$(36.24) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } 2 \leq h < n - v, \\ \mathbb{Z} \oplus \pi_{n-v-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } h = n - v \text{ è pari o } v = 1, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \pi_{n-v-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } h = n - v \text{ è dispari e } v \geq 3. \end{cases}$$

Se $n' > n$, abbiamo un'inclusione naturale

$$(36.25) \quad \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R}).$$

PROPOSIZIONE 36.7.9. *L'applicazione $\pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \rightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R}))$ indotta dalla (36.25) è un isomorfismo per ogni $h < \min\{m, n - m\}$ ed ogni $n' > n$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $h < n - m$, e consideriamo la partizione cellulare di $\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R})$ data dalle celle di Schubert, lo scheletro $h + 1$ -dimensionale di $\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R})$ è contenuto in $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$. \square

36.8. Varietà di Stiefel e di Grassmann complesse

In modo analogo definiamo le varietà di Stiefel e di Grassmann complesse.

DEFINIZIONE 36.8.1. *La varietà di Stiefel complessa $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è costituita dalle m -uple di vettori ortonormali di \mathbb{C}^n .*

Possiamo identificare $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ all'insieme delle matrici complesse Z , di tipo $n \times m$, che soddisfano $Z^*Z = I_m$. Abbiamo:

PROPOSIZIONE 36.8.2. *Per ogni $0 \leq m \leq n$, la varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è una varietà analitica di Hausdorff, di dimensione reale $m(2n - m)$, compatta e connessa per archi. Essa è omeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-m)$.*

DIMOSTRAZIONE. $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è uno spazio topologico di Hausdorff compatto perché è un sottoinsieme chiuso e limitato di \mathbb{C}^{nm} . Possiamo definire la sua struttura differenziabile descrivendo una carta locale con centro in un punto $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$. Completiamo v_1, \dots, v_m ad una base ortonormale (v_1, \dots, v_n) di \mathbb{C}^n . Assegnamo numeri complessi $z_{h,j}$ per $1 \leq j < h \leq n$ e numeri reali y_j per $j = 1, \dots, m$, tali che $y_j^2 + \sum_{h=j+1}^n |z_{h,j}|^2 < 1$ per ogni $j = 1, \dots, m$. Risulteranno allora univocamente determinati numeri complessi $z_{h,j}$, per $1 \leq h \leq j \leq m$ tali che $\text{Im}(z_{j,j}) = y_j$, $\text{Re}(z_{j,j}) > 0$ e detta Z la matrice $Z = (z_{h,j})_{\substack{1 \leq h \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$, sia $Z^*Z = I_m$. I numeri reali y_j e le parti reali e immaginarie degli $z_{h,j}$ con $1 \leq j < h \leq n$ sono le coordinate di una carta locale con centro in \vec{v} . La dimensione della varietà è quindi

$$\sum_{j=1}^m [2(n - j) + 1] = m(2n + 1) - m(m + 1) = 2nm - m^2 = m(2n - m).$$

Chiaramente il gruppo speciale unitario $\mathbf{SU}(n)$ opera transitivamente su $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$, con isotropia $\mathbf{SU}(n - m)$. Quindi $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è omeomorfo al quoziente $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n - m)$ e perciò compatto e connesso per archi. \square

PROPOSIZIONE 36.8.3. *La varietà di Stiefel complessa $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è $(2n - 2m)$ -connessa e $\pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissato un intero k con $1 \leq k < m$, l'applicazione

$$(36.26) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C}).$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})$. Otteniamo quindi una successione esatta

$$(36.27) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \dots & \end{array}$$

Ragioniamo per ricorrenza su $m \geq 1$. Per $m = 1$, $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{C}) = S^{2n-1}$, e sappiamo che la sfera di dimensione $(2n - 1)$ è $(2n - 2)$ -connessa. Supponiamo ora che $m > 1$ e che, per ogni r con $1 \leq r < m$ la varietà di Stiefel complessa $\mathbb{V}_{n,r}(\mathbb{C})$ sia $(2n - 2r)$ -connessa. Utilizziamo la successione esatta (36.27) con $k = 1$. Poiché per l'ipotesi induttiva $\mathbb{V}_{n-1,m-1}(\mathbb{C})$ è $(2n - 2m)$ -connesso e $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{C}) = S^{2n-1}$ è $(2n - 2)$ -connesso, otteniamo che $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}))$ è $(2n - 2)$ -connesso.

Utilizziamo ancora la successione esatta (36.27) con $k = (m - 1)$ ed $h = 2n - 2m$. Poiché $\mathbb{V}_{n,m-1}(\mathbb{C})$ è $(2n - 2m + 2)$ -connessa, otteniamo l'isomorfismo

$$\pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) \simeq \pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n-m+1,1}(\mathbb{C})) = \pi_{2n-2m+1}(S^{2n-2m-1}) = \mathbb{Z}.$$

□

L'applicazione

$$(36.28) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow \langle v_1, \dots, v_m \rangle \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathbf{U}(m)$. Otteniamo quindi una successione esatta d'omotopia

$$(36.29) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{U}(m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{U}(m)) & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) & \longrightarrow \dots \end{array}$$

Con una dimostrazione analoga a quella del Lemma 36.7.7 otteniamo

LEMMA 36.8.4. *Se $1 \leq m < 2m \leq n$, allora l'applicazione $\pi_h(\mathbf{U}(m)) \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}))$ in (36.29) ha immagine nulla.*

Questo dà, per ogni intero $h \geq 1$ e per $1 \leq m < 2m \leq n$, le successioni esatte corte

$$(36.30) \quad 0 \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{U}(m)) \rightarrow 0.$$

Otteniamo perciò il

TEOREMA 36.8.5. *Sia $v = \min\{m, n - m\}$. Allora, per ogni $1 \leq m < n$ ed $h \geq 1$*

$$(36.31) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \pi_h(\mathbb{V}_{n,v}(\mathbb{C})) \oplus \pi_{h-1}(\mathbf{U}(v)).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $2m \leq n$, la tesi segue dalla (36.30). Per completare la dimostrazione, è sufficiente utilizzare l'omeomorfismo

$$(36.32) \quad \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni p \rightarrow p^\perp \in \mathbb{G}_{n,n-m}(\mathbb{C}),$$

dove p^\perp è l' $(n-m)$ -piano ortogonale a p , rispetto ad un prodotto scalare Hermitiano in \mathbb{C}^n . \square

Otteniamo in particolare

$$(36.33) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \begin{cases} \pi_{h-1}(\mathbf{U}(v)) & \text{se } 1 \leq h \leq 2n - 2v, \\ \mathbb{Z} \oplus \pi_{2n-2v}(\mathbf{U}(v)) & \text{se } h = 2n - 2v, \end{cases}$$

e quindi $\pi_1(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = 0$ e $\pi_2(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$ per ogni $1 \leq m < n$.

Appendice: Omologia

37.1. Notazione

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ è l'insieme degli interi non negativi.

(X, A) indica una *coppia topologica*, cioè la coppia formata da uno spazio topologico X e da un suo sottospazio A .

La coppia topologica (X, \emptyset) sarà indicata semplicemente con X . Se $A = \{x\}$ è un singleton, scriveremo, per semplicità di notazione, (X, x) invece di $(X, \{x\})$.

Se (X, A) ed (Y, B) sono due coppie topologiche con $X \subset Y$ ed $A \subset B$, indichiamo con $i_{(X,A)}^{(Y,B)}$ l'inclusione $X \hookrightarrow Y$ ed $A \hookrightarrow B$.

Se $A = \emptyset$ scriveremo $i_X^{(Y,B)}$ invece di $i_{(X,\emptyset)}^{(Y,B)}$ e, se anche $B = \emptyset$, i_X^Y invece di $i_{(X,\emptyset)}^{(Y,\emptyset)}$.

Useremo la notazione $h_*(X)$ ed $h_p(X)$ invece di $h_*(X, \emptyset)$ ed $h_p(X, \emptyset)$.

DEFINIZIONE 37.1.1. Una triade $(X; A, B)$ di spazi topologici, con $A \cup B = X$, si dice *excisiva* se

$$X = \text{int}_X(A) \cup \text{int}_X(B).$$

DEFINIZIONE 37.1.2. Un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ è una *n-equivalenza debole* se, per ogni $x \in X$, le applicazioni $f_* : \pi_h(X, x) \rightarrow \pi_h(Y, f(x))$ sono bigettive per $h < n$ ed $f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ è surgettiva.

È un'*equivalenza debole* se è una *n-equivalenza debole* per ogni n .

Un'applicazione continua $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ tra coppie topologiche si dice una *equivalenza debole* se sia $X \ni x \rightarrow f(x) \in Y$ che $A \ni x \rightarrow f(x) \in B$ sono equivalenze deboli.

Alcune costruzioni topologiche. Ricordiamo che uno spazio puntato è uno spazio topologico non vuoto X su cui si sia fissato un punto distinto $x_0 \in X$. Scriveremo nel seguito X , invece che (X, x_0) , sottintendendo il punto base quando non vi sia rischio di confusione.

Se X, Y sono spazi puntati con punti base $x_0 \in X$ ed $y_0 \in Y$ rispettivamente, definiamo:

$$(37.1) \quad X \vee Y = (X \times Y) / ((X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)) \quad (\text{bouquet di } X \text{ e } Y),$$

$$(37.2) \quad X \wedge Y = (X \times Y) / (X \vee Y) \quad (\text{smash di } X \text{ e } Y).$$

Il bouquet e lo smash (che si dice anche *prodotto tensoriale*) sono a loro volta spazi puntati, con punti base corrispondenti alle immagini di $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$ e di $X \vee Y$, rispettivamente.

Siano $I = [0, 1]$, con punto base 0 ed $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, con punto base 1. Dato lo spazio puntato X con punto base x_0 definiamo:

$$(37.3) \quad CX = X \wedge I \quad (\text{cono ridotto di } X)$$

$$(37.4) \quad \Sigma X = X \wedge S^1 \quad (\text{sospensione ridotta di } X).$$

Cofibrazioni. Un'applicazione $\iota : A \rightarrow X$ si dice una *cofibrazione* se ha la proprietà dell'*esensione dell'omotopia*, se cioè, per ogni spazio topologico Y , per ogni applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ ed ogni omotopia $F : A \times I \rightarrow Y$ di $f \circ \iota$, esiste un'omotopia $\tilde{F} : X \times I \rightarrow Y$ che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\iota_0} & A \times I \\
 \downarrow \iota & \searrow f \circ \iota & \swarrow F \\
 & & Y \\
 & \nearrow f & \nwarrow \tilde{F} \\
 X & \xrightarrow{\iota_0} & X \times I \\
 & & \downarrow \iota \times \text{id}
 \end{array}$$

ESEMPIO 37.1.3. Se (X, A) è una coppia cellulare, allora l'inclusione $\iota : A \hookrightarrow X$ è una cofibrazione.

DEFINIZIONE 37.1.4. Diciamo che un punto x_0 di uno spazio topologico X è un suo *punto base non degenere* se l'inclusione $\{x_0\} \hookrightarrow X$ è una cofibrazione.

Chiamiamo *spazio puntato non degenere* uno spazio puntato X il cui punto base sia non degenere.

37.2. Definizione assiomatica

Un'*omologia* è un funtore covariante

$$(37.5) \quad (A, B) \longrightarrow h_*(A, B) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} h_p(A, B)$$

dalla categoria delle coppie topologiche a quella dei gruppi abeliani \mathbb{N} -graduati, che soddisfa gli assiomi 1 – 5 seguenti.

Prima di enunciare gli assiomi, ricordiamo che il fatto che h_* sia un funtore covariante significa:

Funtorialità. Se $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ è un'applicazione continua, allora sono determinati omomorfismi di gruppi abeliani

$$(37.6) \quad f_* : h_*(X, A) \longrightarrow h_*(Y, B), \text{ con } f_*(h_p(X, A)) \subset h_p(Y, B) \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

in modo tale che, se $\text{id}_X : (X, A) \rightarrow (X, A)$ è l'identità ed f, g due applicazioni continue con $(X, A) \xrightarrow{f} (Y, B) \xrightarrow{g} (Z, C)$, allora

$$(37.7) \quad (\text{id}_X)_* = \text{id}_{h_*(X, A)},$$

$$(37.8) \quad (g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Gli assiomi che caratterizzano l'omologia sono i seguenti:

1. Assioma d'omotopia. Se $(X, A) \xrightarrow[f_1]{f_0} (Y, B)$ definiscono la stessa classe di omotopia in $\pi(X, A; Y, B)$, allora $f_{1*} = f_{0*}$.

2. Assioma della frontiera. Ad ogni coppia topologica¹ (X, A) è associato un *omomorfismo frontiera* (che si dice anche *omomorfismo di connessione o differenziale*)

$$(37.9) \quad \partial = \partial_{X,A} : h_p(X, A) \longrightarrow h_{p-1}(A)$$

in modo tale che per ogni applicazione continua $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ed ogni intero positivo p si abbia un diagramma commutativo

$$(37.10) \quad \begin{array}{ccc} h_p(X, A) & \xrightarrow{f_*} & h_p(Y, B) \\ \partial_{X,A} \downarrow & & \downarrow \partial_{Y,B} \\ h_{p-1}(A) & \xrightarrow{f_{A*}} & h_{p-1}(B). \end{array}$$

3. Assioma di excisione. Se $(X; A, B)$ è una triade excisiva, allora

$$(37.11) \quad (\iota_{A, A \cap B}^{X,B})_* : h_p(A, A \cap B) \xrightarrow{\cong} h_p(X, B),$$

è un isomorfismo per ogni $p \in \mathbb{N}$.

4. Assioma di esattezza. Per ogni coppia topologica (X, A) , abbiamo una successione esatta lunga di omologia:

$$(37.12) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & h_{p+1}(A) & \xrightarrow{(\iota_A^X)_*} & h_{p+1}(X) & \xrightarrow{(\iota_X^{(X,A)})_*} & h_{p+1}(X, A) \rightarrow \\ & & \xrightarrow{\partial_{X,A}} & h_p(A) & \xrightarrow{(\iota_A^X)_*} & h_p(X) & \xrightarrow{(\iota_X^{(X,A)})_*} & h_p(X, A) \rightarrow \\ & & \xrightarrow{\partial_{X,A}} & h_{p-1}(A) & \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

5. Assioma dimensionale. Se pt è uno spazio topologico composto di un solo punto, allora

$$(37.13) \quad h_p(\text{pt}) = 0 \quad \forall p > 0.$$

DEFINIZIONE 37.2.1. Il gruppo $\mathbf{G} = h_0(\text{pt})$ si dice il *gruppo dei coefficienti* dell'omologia h_* .

¹Identifichiamo uno spazio topologico X alla coppia topologica (X, \emptyset) . Quindi $h_p(X) := h_p(X, \emptyset)$. Converremo inoltre, per semplicità, che $h_p(X, A)$ sia definito per ogni $p \in \mathbb{Z}$ ed uguale a 0 per ogni p negativo.

OSSERVAZIONE 37.2.2. Possiamo rafforzare l'assioma di omotopia richiedendo in più che, per ogni equivalenza debole $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, la corrispondente

$$f_* : h_*(X, A) \rightarrow h_*(Y, B)$$

sia un isomorfismo. In questo caso, l'omologia h_* è *completamente determinata dal suo gruppo dei coefficienti*. Scriveremo allora

$$(37.14) \quad h_p(X, A) = H_p(X, A; \mathbf{G}) \quad \text{se} \quad h_0(\text{pt}) = \mathbf{G}.$$

Il gruppo $h_*(X, A)$ è comunque completamente determinati dal gruppo dei coefficienti nel caso in cui (X, A) sia una coppia cellulare².

OSSERVAZIONE 37.2.3. Per ogni spazio topologico X ed ogni omologia, abbiamo $h_p(X, X) = h_p(\emptyset) = 0$. L'uguaglianza $h_p(X, X) \simeq h_p(\emptyset)$ segue dall'assioma di excisione, applicato ad $A = \emptyset, B = X$. Applicando l'assioma di esattezza al caso $A = \emptyset, B = \emptyset$, troviamo una successione esatta lunga di omomorfismi di gruppi in cui tutti i termini sono uguali e le applicazioni i_* e j_* sono isomorfismi. Se ne conclude che tutti i gruppi sono banali.

37.3. Prime conseguenze degli assiomi

Si ricava immediatamente dagli assiomi

TEOREMA 37.3.1 (invarianza omotopica). *Se (X, A) ed (Y, B) sono due coppie omotopicamente equivalenti, allora $h_*(X, A) \simeq h_*(Y, B)$.* \square

Abbiamo poi, nel caso dei complessi di celle:

TEOREMA 37.3.2 (quoziente). *Sia (X, A) una coppia cellulare. Allora*

$$(37.15) \quad h_p(X, A) = h_p(X/A, \text{pt}_A), \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

ove pt_A è l'immagine di A nella proiezione sul quoziente $X \rightarrow X/A$.

DIMOSTRAZIONE. Il cono $CA = (A \times [0, 1]) / (A \times \{0\})$ ha lo stesso tipo d'omotopia di un punto. Poiché (X, A) è una coppia cellulare, possiamo estendere un'omotopia che collassa CA ad un punto ad un'omotopia F della somma topologica $X \cup_A CA$. Otteniamo così un'equivalenza omotopica

$$(X \cup_A CA, CA) \simeq (X/A, \text{pt}_A).$$

Per l'assioma di excisione,

$$h_p(X \cup_A CA, CA) \equiv h_p(X, X \cap CA) = h_p(X, A).$$

La tesi segue quindi per l'invarianza omotopica. \square

OSSERVAZIONE 37.3.3. Nell'enunciato del teorema precedente potremmo sostituire all'ipotesi che (X, A) sia una coppia cellulare l'ipotesi che $\iota : A \hookrightarrow X$ sia una cofibrazione.

dove $\iota_0(x) = (x, 0)$.

²Vedi ad esempio il Cap. 13 in [13]: J.P.May: *A concise course in Algebraic Topology*, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1999.

TEOREMA 37.3.4. *Sia X uno spazio topologico non vuoto ed $x_0 \in X$. Allora*

$$\begin{aligned} h_0(\mathbf{X}) &= h_0(\mathbf{X}, x_0) \oplus h_0(\text{pt}), \\ h_p(\mathbf{X}) &= h_p(\mathbf{X}, x_0) \quad \forall p > 0. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando la successione esatta lunga della coppia (X, x_0) si ottiene subito che $h_p(\mathbf{X}) = h_p(\mathbf{X}, x_0)$ per ogni $p \geq 2$. Abbiamo quindi una successione esatta

$$(*) \quad 0 \rightarrow h_1(\mathbf{X}) \rightarrow h_1(\mathbf{X}, x_0) \rightarrow h_0(x_0) \rightarrow h_0(\mathbf{X}) \rightarrow h_0(\mathbf{X}, x_0) \rightarrow 0.$$

Consideriamo l'applicazione costante $f : X \rightarrow \{x_0\}$. Essa induce un omomorfismo $f_* : h_0(\mathbf{X}) \rightarrow h_0(x_0)$. Se $\iota : \{x_0\} \ni x_0 \rightarrow x_0 \in X$, da $f \circ \iota = \text{id}_{x_0}$ otteniamo che la composizione

$$h_0(x_0) \xrightarrow{\iota_*} h_0(\mathbf{X}) \xrightarrow{f_*} h_0(x_0)$$

è l'identità. In particolare, ι_* è iniettiva e quindi la successione esatta (*) si spezza nelle due successioni esatte

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow h_1(\mathbf{X}) \longrightarrow h_1(\mathbf{X}, x_0) \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow h_0(x_0) \xrightarrow{\iota_*} h_0(\mathbf{X}) \longrightarrow h_0(\mathbf{X}, x_0) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Inoltre, $h_0(\mathbf{X}, x_0) \simeq \ker(f_* : h_0(\mathbf{X}) \rightarrow h_0(x_0))$, perché f_* è un'inversa destra di ι_* . Otteniamo così la tesi. \square

DEFINIZIONE 37.3.5. Il gruppo $h_p(\mathbf{X}, x_0)$ non dipende dalla scelta del punto base x_0 . Lo indichiamo con $\tilde{h}_p(\mathbf{X})$ e lo chiamiamo *omologia ridotta* di X .

Se $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$, ed $f : X \rightarrow \{x_0\}$ è l'applicazione costante, abbiamo

$$\tilde{h}_p(\mathbf{X}) = \ker(f_* : h_p(\mathbf{X}) \rightarrow h_p(x_0)), \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Se (X, A) è una coppia con $A \neq \emptyset$, poniamo $\tilde{h}_p(\mathbf{X}, A) = h_p(\mathbf{X}, A)$.

Possiamo allora riformulare il Teorema 37.3.2 nella forma

TEOREMA 37.3.6 (quoziente). *Siano X uno spazio topologico ed A un sottoinsieme non vuoto di X . Se l'inclusione $A \hookrightarrow X$ è una cofibrazione, allora*

$$(37.16) \quad h_p(\mathbf{X}, A) = \tilde{h}_p(\mathbf{X}, A) = \tilde{h}_p(\mathbf{X}/A), \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

PROPOSIZIONE 37.3.7. *Se (X, A) è una coppia topologica, con $A \neq \emptyset$, allora abbiamo anche per l'omologia ridotta la successione esatta lunga:*

$$(37.17) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \tilde{h}_{p+1}(A) & \xrightarrow{\iota_*} & \tilde{h}_{p+1}(\mathbf{X}) & \xrightarrow{J_*} & \tilde{h}_{p+1}(\mathbf{X}, A) \rightarrow \\ & & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_p(A) & \xrightarrow{\iota_*} & \tilde{h}_p(\mathbf{X}) & \xrightarrow{J_*} & \tilde{h}_p(\mathbf{X}, A) \rightarrow \\ & & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_{p-1}(A) & \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

PROPOSIZIONE 37.3.8 (omologia delle sfere). *Per ogni intero $n \geq 0$ abbiamo*

$$(37.18) \quad \tilde{h}_p(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbf{G} & \text{se } p = n, \\ 0 & \text{se } p \neq n. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Calcoliamo l'omologia della sfera $S^0 = \{\pm 1\}$. Per l'excisione, abbiamo $h_p(S^0, -1) \simeq h_p(\text{pt})$ per ogni $p \in \mathbb{N}$. Otteniamo perciò dalla successione esatta della coppia $(S^0, -1)$ che $h_p(S^0) = 0$ se $p > 0$ ed $h_0(S^0) \simeq \mathbf{G} \oplus \mathbf{G}$, che equivale ad $\tilde{h}_0(S^0) \simeq \mathbf{G}$.

Utilizziamo poi il fatto che S^n si ottiene dal disco D^n identificando ad un punto la sua frontiera $\partial D^n = S^{n-1}$. Poiché (D^n, S^{n-1}) è una coppia cellulare, otteniamo che $h_p(S^n) \simeq h_p(D^n, S^{n-1})$ per ogni intero p . Dalla successione esatta della coppia (D^n, S^{n-1}) , poiché D^n ha il tipo di omotopia di un punto, otteniamo che $\tilde{h}_p(S^n) \simeq h_{p-1}(S^{n-1})$ per ogni $n \geq 1$. La tesi segue per ricorrenza su n dal caso $n = 1$. \square

TEOREMA 37.3.9 (omologia della sospensione). *Se X è uno spazio cellulare puntato, allora*

$$(37.19) \quad \tilde{h}_p(X) \simeq \tilde{h}_{p+1}(\Sigma X), \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché il cono CX è contrattile, abbiamo $\tilde{h}_p(CX) = 0$ per ogni $p \in \mathbb{N}$. La successione esatta lunga di omologia della coppia (CX, X) ci dà allora isomorfismi

$$\partial : h_p(X) \xrightarrow{\simeq} h_{p-1}(CX, X), \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Osserviamo ora che, se X è cellulare, allora (CX, X) è una coppia cellulare e quindi, poiché ΣX è omeomorfo al quoziente CX/X ,

$$\tilde{h}_p(CX, X) \simeq \tilde{h}_p(CX/X) \simeq \tilde{h}_p(\Sigma X), \quad \forall p \in \mathbb{Z},$$

da cui segue la tesi. \square

Questo risultato ci permette di calcolare in un altro modo l'omologia ridotta delle sfere, utilizzando il fatto che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo un omeomorfismo $\Sigma S^n \simeq S^{n+1}$.

Data una tripla di spazi topologici $A \subset Y \subset X$ definiamo un differenziale $\partial : h_p(X, Y) \rightarrow h_{p-1}(X, A)$ mediante la composizione

$$(37.20) \quad h_p(X, Y) \xrightarrow{\partial} h_{p-1}(Y) \xrightarrow{J_*} h_{p-1}(Y, A),$$

ove $J = i_Y^{(Y,A)}$ è l'inclusione $(Y, \emptyset) \hookrightarrow (Y, A)$.

TEOREMA 37.3.10 (successione esatta di una tripla). *Sia X uno spazio topologico e siano A, Y due sottospazi di X con $A \subset Y \subset X$. Abbiamo allora una successione esatta lunga*

$$(37.21) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & h_{p+1}(X, Y) \rightarrow \\ & & & & & & \\ \longrightarrow & h_p(Y, A) & \longrightarrow & h_p(X, A) & \longrightarrow & h_p(X, Y) & \rightarrow \\ & & & & & & \\ \longrightarrow & h_{p-1}(Y, A) & \longrightarrow & \cdots & & & \end{array}$$

Definiamo le applicazioni

$$\begin{aligned} \phi : h_p(A \cap B) \ni \gamma &\longrightarrow ((i_{A \cap B}^A)_*(\gamma), (i_{A \cap B}^B)_*(\gamma)) \in h_p(A) \oplus h_p(B), \\ \psi : h_p(A) \oplus h_p(B) \ni (\alpha, \beta) &\longrightarrow (i_A^{A \cup B})_*(\alpha) - (i_B^{A \cup B})_*(\beta) \in h_p(A \cup B), \end{aligned}$$

$$\partial : h_p(A \cup B) \xrightarrow{I_*} h_p(A \cup B, A) \simeq h_p(B, A \cap B) \xrightarrow{\partial} h_{p-1}(A \cap B),$$

cioè

$$\partial = \partial_{B, A \cap B} \circ (I_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_*^{-1} \circ (I_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_*.$$

TEOREMA 37.3.11 (successione di Mayer-Vietoris). *Se A e B sono sottospazi topologici di uno spazio topologico X , abbiamo una successione esatta lunga*

$$(37.22) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \cdots & \longrightarrow & h_{p+1}(A \cup B) & \rightarrow \\ \partial & \longrightarrow & h_p(A \cap B) & \xrightarrow{\phi} & h_p(A) \oplus h_p(B) & \xrightarrow{\psi} & h_p(A \cup B) & \rightarrow \\ \partial & \longrightarrow & h_{p-1}(A \cap B) & \longrightarrow & \cdots & & & \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE.

1. Esattezza in $h_p(A) \oplus h_p(B)$. Chiaramente $\phi \circ \psi = 0$. Sia $(\alpha, \beta) \in h_p(A) \oplus h_p(B)$, con $J_{A*}(\alpha) = J_{B*}(\beta)$. Consideriamo dapprima il caso in cui $\alpha = 0$. Abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} h_{p+1}(A, A \cap B) & \xrightarrow{\partial_{A, A \cap B}} & h_p(A \cap B) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow (I_{A \cap B}^B)_* \\ h_{p+1}(A \cup B, B) & \xrightarrow{\partial_{A \cup B, B}} & h_p(B), \end{array}$$

dove la prima freccia verticale è l'isomorfismo dato dall'excisione. Allora, per l'esattezza della successione

$$h_p(A, A \cap B) \simeq h_p(A \cup B, B) \xrightarrow{\partial_{(A \cup B), B}} h_p(B) \xrightarrow{(I_B^{A \cup B})_*} h_p(A \cup B)$$

esiste un elemento $\delta \in h_p(A, A \cap B)$ tale che

$$\beta = (I_{A \cap B}^B)_* \partial_{A, A \cap B}(\delta).$$

Otteniamo allora

$$\phi(\partial_{A, A \cap B}(\delta)) = ((I_{A \cap B}^A)_*(\partial_{A, A \cap B}(\delta)), (I_{A \cap B}^B)_*(\partial_{A, A \cap B}(\delta))) = (0, \beta).$$

Consideriamo ora il caso generale.

Se $\alpha \in h_p(A)$, $\beta \in h_p(B)$ e $(I_A^{A \cup B})_*(\alpha) = (I_B^{A \cup B})_*(\beta)$, allora

$$(I_{A \cup B}^{(A \cup B, B)})_*((I_A^{A \cup B})_*(\alpha)) = (I_{A \cup B}^{(A \cup B, B)})_*((I_B^{A \cup B})_*(\beta)) = 0.$$

Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} h_p(A) & \xrightarrow{(I_A^{A \cup B})_*} & h_p(A \cup B) \\ (I_A^{(A, A \cap B)})_* \downarrow & & \downarrow (I_{A \cup B}^{(A \cup B, B)})_* \\ h_p(A, A \cap B) & \xrightarrow[\cong]{(I_{(A, A \cap B)}^{(A \cup B, B)})_*} & h_p(A \cup B, B). \end{array}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} (i_{(A,A \cap B)}^{(A \cup B, B)})_* \circ (i_A^{(A, A \cap B)})_*(\alpha) &= (i_{A \cup B}^{(A \cup B, B)})_* \circ (i_A^{A \cup B})_*(\alpha) \\ &= (i_{A \cup B}^{(A \cup B, B)})_* \circ (i_B^{A \cup B})_*(\beta) = 0. \end{aligned}$$

Quindi, per l'excisione, $(i_A^{(A, A \cap B)})_*(\alpha) = 0$. Per l'esattezza della successione

$$h_p(A \cap B) \xrightarrow{(i_{A \cap B}^A)_*} h_p(A) \xrightarrow{(i_A^{(A, A \cap B)})_*} h_p(A, A \cap B)$$

otteniamo che esiste un elemento $\gamma \in h_p(A \cap B)$ tale che $\alpha = (i_{A \cap B}^A)_*(\gamma)$. Abbiamo

$$(\alpha, \beta) - \phi(\gamma) = (0, \beta - (i_{A \cap B}^B)_*(\gamma)) = (0, \beta'), \quad \text{con } \psi(0, \beta') = 0,$$

e ci siamo quindi ricondotti al caso speciale considerato all'inizio.

2. Esattezza in $h_p(A \cup B)$. Osserviamo innanzi tutto che $\partial \circ \psi = 0$. Infatti, se $\alpha \in h_p(A)$, allora $(i_A^{A \cup B})_* \circ (i_{A \cup B}^{(A \cup B, A)}) = 0$ e quindi a maggior ragione

$$\partial_{B, A \cap B} \circ (i_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})^{-1} \circ (i_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_* (i_A^{A \cup B})_*(\alpha) = 0.$$

Se $\beta \in h_p(B)$, utilizziamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} h_p(B) & \xrightarrow{(i_B^{A \cup B})_*} & h_p(A \cup B) \\ (i_B^{(B, A \cap B)})_* \downarrow & & \downarrow (i_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_* \\ h_p(B, A \cap B) & \xrightarrow[\cong]{(i_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_*} & h_p(A \cup B, A). \end{array}$$

Otteniamo

$$\begin{aligned} \partial_{B, A \cap B} \circ (i_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})^{-1} \circ (i_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_* (i_B^{A \cup B})_*(\beta) \\ = \partial_{B, A \cap B} \circ (i_B^{(B, A \cap B)})_*(\beta) = 0 \end{aligned}$$

per l'esattezza della successione

$$(*) \quad h_p(B) \xrightarrow{(i_B^{(B, A \cap B)})_*} h_p(B, A \cap B) \xrightarrow{\partial_{B, A \cap B}} h_{p-1}(A \cap B).$$

Sia ora $\delta \in h_p(A \cup B)$ con $\partial(\delta) = 0$. Per l'esattezza di (*), otteniamo che

$$\exists \beta \in h_q(B) \quad \text{tale che} \quad (i_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_*(\delta) = (i_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_* \circ (i_B^{(B, A \cap B)})_*(\beta).$$

Per la commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccc} h_p(B) & \xrightarrow{(i_B^{(B, A \cap B)})_*} & h_p(A, A \cap B) \\ (i_B^{A \cup B})_* \downarrow & & \cong \downarrow (i_{(A, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_* \\ h_p(A \cup B) & \xrightarrow[\cong]{(i_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_*} & h_p(A \cup B, A) \end{array}$$

otteniamo che

$$(i_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_*(\delta - (i_B^{A \cup B})_*(\beta)) = 0.$$

Per l'esattezza della successione

$$h_p(A) \xrightarrow{(t_A^{A \cup B})_*} h_p(A \cup B) \xrightarrow{(t_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_*} h_p(A \cup B, A)$$

segue che esiste un $\alpha \in h_p(A)$ tale che

$$\delta - (t_B^{A \cup B})_*(\beta) = (t_A^{A \cup B})_*(\alpha), \quad \text{cioè} \quad \delta = \psi(\alpha, \beta).$$

3. Esattezza in $h_p(A \cap B)$. Dimostriamo in primo luogo che $\phi \circ \delta = 0$.
Abbiamo

$$\begin{aligned} (t_{A \cap B}^B)_* \circ \delta &= (t_{A \cap B}^B)_* \circ \partial_{B, A \cap B} \circ (t_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_*^{-1} \circ (t_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_* \\ &= 0 \circ (t_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_*^{-1} \circ (t_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_* = 0. \end{aligned}$$

D'altra parte, dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} h_{p+1}(B, A \cap B) & \xrightarrow{(t_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_*} & h_{p+1}(A \cup B, A) \\ \partial_{B, A \cap B} \downarrow & & \downarrow \partial_{A \cup B, A} \\ h_p(A \cap B) & \xrightarrow{(t_{A \cap B}^A)_*} & h_p(A) \end{array}$$

segue che

$$\begin{aligned} (t_{A \cap B}^A)_* \circ \delta &= (t_{A \cap B}^A)_* \circ \partial_{B, A \cap B} \circ (t_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_*^{-1} \circ (t_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_* \\ &= \partial_{A \cup B, A} \circ (t_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_* \circ (t_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_*^{-1} \circ (t_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_* \\ &= \partial_{A \cup B, A} \circ (t_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_* = 0. \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione del fatto che $\phi \circ \delta = 0$.

Sia ora $\gamma \in h_p(A \cap B)$, con $\phi(\gamma) = 0$. Dalla $(t_{A \cap B}^B)_*(\gamma) = 0$ segue che esiste un elemento $\mu \in h_{p+1}(B, A \cap B)$ tale che $\gamma = \partial_{B, A \cap B}(\mu)$. Sia $\eta = (t_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_*(\mu)$. Poiché

$$\begin{aligned} 0 &= (t_{A \cap B}^A)_*(\gamma) = (t_{A \cap B}^A)_* \circ \partial_{B, A \cap B}(\mu) \\ &= (t_{A \cap B}^A)_* \circ \partial_{B, A \cap B} \circ (t_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_*^{-1}(\eta) \\ &= \partial_{A \cup B, A}(\eta), \end{aligned}$$

abbiamo $\eta = (t_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_*(\delta)$ per un elemento $\delta \in h_{p+1}(A \cup B)$. Quindi

$$\begin{aligned} \gamma &= \partial_{B, A \cap B}(\mu) \\ &= \partial_{B, A \cap B} \circ (t_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_*^{-1}(\eta) \\ &= \partial_{B, A \cap B} \circ (t_{(B, A \cap B)}^{(A \cup B, A)})_*^{-1} \circ (t_{A \cup B}^{(A \cup B, A)})_*(\delta) \\ &= \delta. \end{aligned}$$

La dimostrazione è completa. □

37.4. La formula di Künnet

Definiamo il prodotto di due coppie topologiche nel modo seguente:

$$(37.23) \quad (X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y).$$

Vale il

TEOREMA 37.4.1 (Künnet). *Se (X, A) , (Y, B) sono due coppie topologiche ed $(X \times B, A \times Y)$ è una coppia excisiva, allora, per ogni intero non negativo p , abbiamo*

$$(37.24) \quad h_p((X, A) \times (Y, B)) = \bigoplus_{p_1+p_2=p} h_{p_1}(X, A) \otimes_{\mathbb{Z}} h_{p_2}(Y, B).$$

37.5. Gruppi di omologia dei complessi cellulari

Sia X un complesso cellulare di dimensione m . Indichiamo con X^n lo scheletro n -dimensionale di X , cioè l'unione delle sue celle di dimensione $\leq n$.

Se $\mathbf{G} = h_0(\text{pt})$, definiamo i gruppi abeliani $\mathbf{C}_n(X, \mathbf{G})$ mediante

$$(37.25) \quad \mathbf{C}_n(X, \mathbf{G}) = h_n(X^n, X^{n-1})$$

e consideriamo le applicazioni

$$(37.26) \quad \partial_n = (i_{X^{n-1}}^{(X^{n-1}, X^{n-2})})_* \circ \partial_{X^n, X^{n-1}} : \mathbf{C}_n(X, \mathbf{G}) \longrightarrow \mathbf{C}_{n-1}(X, \mathbf{G}).$$

Otteniamo in questo modo una successione di gruppi abeliani e di omomorfismi:

$$(37.27) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & \mathbf{C}_n(X, \mathbf{G}) & \xrightarrow{\partial_n} & \mathbf{C}_{n-1}(X, \mathbf{G}) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \mathbf{C}_{n-2}(X, \mathbf{G}) \rightarrow \\ \cdots & \rightarrow & \mathbf{C}_2(X, \mathbf{G}) & \xrightarrow{\partial_2} & \mathbf{C}_1(X, \mathbf{G}) & \xrightarrow{\partial_1} & \mathbf{C}_0(X, \mathbf{G}) \rightarrow 0 \end{array}$$

TEOREMA 37.5.1. *Se X è un complesso cellulare, allora (37.28) è un complesso, cioè*

$$(37.28) \quad \partial_{n-1} \circ \partial_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti $\partial_n \circ \partial_{n-1}$ è la composizione

$$\begin{array}{ccccc} h_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_{X^n, X^{n-1}}} & h_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{(i_{X^{n-1}}^{(X^{n-1}, X^{n-2})})_*} & h_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \\ & & \xrightarrow{\partial_{X^{n-1}, X^{n-2}}} & h_{n-2}(X^{n-2}) & \xrightarrow{(i_{X^{n-2}}^{(X^{n-2}, X^{n-3})})_*} & h_{n-1}(X^{n-2}, X^{n-3}), \end{array}$$

che è nulla perché $(i_{X^{n-1}}^{(X^{n-1}, X^{n-2})})_* \circ \partial_{X^{n-1}, X^{n-2}} = 0$. □

PROPOSIZIONE 37.5.2. *Sia X un complesso cellulare finito e sia q_n il numero di celle di dimensione n di X . Se $h_0(\text{pt}) = \mathbf{G}$, allora*

$$(37.29) \quad \mathbf{C}_n(X, \mathbf{G}) \simeq \mathbf{G}^{q_n} = \underbrace{\mathbf{G} \oplus \cdots \oplus \mathbf{G}}_{q_n \text{ volte}}$$

Abbiamo inoltre

$$(37.30) \quad h_p(X^n, X^{n-1}) = 0, \quad \forall p \neq n, \quad p > 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il caso $n = 0$. Poiché $X^{n-1} = \emptyset$, $\mathbf{C}(X, \mathbf{G}) = h_0(X^0) \simeq \mathbf{G}^{q_0}$ perché X^0 è uno spazio discreto con q_0 punti.

Sia ora $n > 0$. Per il Teorema 37.3.2, abbiamo

$$\begin{aligned} h_p(X^n, X^{n-1}) &\simeq h_p(X^n/X^{n-1}, \text{pt}_{X^{n-1}}) = \tilde{h}_p(X^n/X^{n-1}), \quad \forall p, \\ &= h_p(X^n/X^{n-1}) \quad \text{se } p > 0. \end{aligned}$$

Il quoziente X^n/X^{n-1} è un bouquet di q_n sfere S^n . Dalla successione esatta di Mayer-Vietoris ricaviamo immediatamente che $h_p(X^n/X^{n-1}) = 0$ se $p \neq n$, $p > 0$, e che $h_n(X^n/X^{n-1})$ è la somma diretta di q_n copie di $h_n(S^n)$, che, per la Proposizione 37.3.8 è isomorfo a \mathbf{G} . \square

PROPOSIZIONE 37.5.3. *Se X è un complesso cellulare di dimensione finita, abbiamo:*

$$(37.31) \quad h_p(X^n) = 0 \quad \text{se } p > n,$$

$$(37.32) \quad (i_{X^n}^X)_* : h_p(X^n) \longrightarrow h_p(X) \quad \text{è un isomorfismo per } p < n.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo le successioni esatte della coppie cellulari (X^n, X^{n-1}) :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & h_{p+1}(X^n, X^{n-1}) \rightarrow \\ \longrightarrow & h_p(X^{n-1}) & \longrightarrow & h_p(X^n) & \longrightarrow & h_p(X^n, X^{n-1}) \rightarrow \\ & & & & \longrightarrow & h_{p-1}(X^{n-1}) \rightarrow & \cdots \end{array}$$

Se $p > 0$, $p \neq n$, da $h_p(X^n, X^{n-1}) \simeq h_{p+1}(X^n, X^{n-1}) = 0$ ricaviamo che $h_p(X^n) \simeq h_p(X^{n-1})$. Se $p > n$, abbiamo per ricorrenza $h_p(X^n) \simeq (h_p(\text{pt}))^{q_0} \simeq 0$.

Se invece $p < n$, otteniamo per ricorrenza che $h_p(X^{n-1}) \simeq h_p(X^n)$ se $n-1 > p$. Questa dà per ricorrenza un isomorfismo $h_p(X^n) \simeq h_p(X^m)$ per $m, n > p$. Poiché X ha dimensione finita, $X = X^m$ per m sufficientemente grande, ed otteniamo perciò la tesi. \square

DEFINIZIONE 37.5.4. Se

$$(37.33) \quad \cdots \rightarrow \mathbf{C}_n \xrightarrow{D_n} \mathbf{C}_{n-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{D_2} \mathbf{C}_1 \xrightarrow{D_1} \mathbf{C}_0 \longrightarrow 0$$

è un complesso di gruppi abeliani e di omomorfismi, il quoziente

$$(37.34) \quad H_p(\mathbf{C}_*, D_*) = \frac{\ker(D_p : \mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{C}_{p-1})}{\text{Imm}(D_{p+1} : \mathbf{C}_{p+1} \rightarrow \mathbf{C}_p)}$$

si dice il p -esimo gruppo di omologia del complesso (37.33).

Per il Teorema 37.5.1 ad ogni complesso cellulare X e ad ogni gruppo abeliano \mathbf{G} è associato un complesso $(\mathbf{C}_n(X, \mathbf{G}), \partial_*)$ di gruppi abeliani e di omomorfismi (37.28).

TEOREMA 37.5.5. *Se X è un complesso cellulare, abbiamo un isomorfismo naturale*

$$(37.35) \quad h_p(X) \simeq H_p(\mathbf{C}(X; \mathbf{G}), \partial_*).$$

DIMOSTRAZIONE. Formiamo un diagramma commutativo scrivendo in orizzontale la successione esatta della tripla (X^{p+1}, X^p, X^{p-1}) ed in verticale quella della tripla (X^p, X^{p-1}, X^{p-2}) . Poiché $h_p(X^{p+1}, X^p) = 0$, $h_{p+1}(X^{p+1}, X^p) = \mathbf{C}_{p+1}(X, \mathbf{G})$ ed $h_p(X^p, X^{p-1}) = \mathbf{C}_p(X, \mathbf{G})$, abbiamo un diagramma commutativo con righe e colonne esatte:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & & \parallel & & & \\
 & & & h_p(X^{p-1}, X^{p-2}) & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 \mathbf{C}_{p+1}(X, \mathbf{G}) & \longrightarrow & h_p(X^p, X^{p-2}) & \longrightarrow & h_p(X^{p+1}, X^{p-2}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathbf{C}_p(X, \mathbf{G}) & & & & \\
 & & \partial_p \downarrow & & & & \\
 & & \mathbf{C}_{p-1}(X, \mathbf{G}) & & & &
 \end{array}$$

Per l'esattezza della colonna, otteniamo

$$\ker \partial_p = h_p(X^p, X^{p-2}).$$

D'altra parte, $(t_{(X^p, X^{p-2})}^{(X^p, X^{p-1})})_*$ è iniettiva. Quindi, poiché

$$\partial_{p+1} = (t_{(X^p, X^{p-2})}^{(X^p, X^{p-1})})_* \circ (t_{X^p}^{(X^p, X^{p-1})})_* \circ \partial_{X^{p+1}, X^p}$$

abbiamo

$$\text{Imm } \partial_{p+1} \simeq \text{Imm } (t_{X^p}^{(X^p, X^{p-1})})_* \circ \partial_{X^{p+1}, X^p}.$$

Questo ci dà

$$h_p(\mathbf{C}_*(X, \mathbf{G}), \partial_*) \simeq h_p(X^{p+1}, X^{p-2}).$$

Dalla successione esatta

$$0 = h_p(X^{p-2}) \rightarrow h_p(X^{p+1}) \rightarrow h_p(X^{p+1}, X^{p-2}) \rightarrow h_{p-1}(X^{p-2}) = 0$$

otteniamo che $h_p(X^{p+1}, X^{p-2}) \simeq h_p(X^{p+1})$. La tesi segue quindi dalla (37.32) della Proposizione 37.5.3. \square

Calcolo esplicito dei gruppi di omologia a coefficienti in \mathbb{Z} di un complesso cellulare.

Per ogni cella $e_\lambda \in \mathbf{C}_p(X)$ indichiamo con $\langle e_\lambda \rangle$ il generatore 1 corrispondente alla p -cella e_λ . Possiamo scrivere

$$(37.36) \quad \partial_p \langle e_\lambda \rangle = \sum_{e_\mu \in X^{p-1}} [e_\lambda : e_\mu] \langle e_\mu \rangle,$$

per opportuni numeri interi $[e_\lambda, e_\mu]$, che si dicono *numeri d'incidenza*.

Sia

$$h_\lambda : \partial e_\lambda \longrightarrow X^{p-1}$$

la funzione d'attaccamento. Poiché le celle chiuse hanno lo stesso tipo di omotopia del punto, abbiamo, per ogni $p > 0$, un isomorfismo

$$\partial_{\bar{e}_\lambda, \partial e_\lambda} : H_p(\bar{e}_\lambda, \partial e_\lambda; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{p-1}(\partial e_\lambda; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}.$$

Definiamo quindi un omomorfismo

$$\tilde{h}_{\lambda*} = h_{\lambda*} \circ \partial_{\bar{e}_\lambda, \partial e_\lambda} : H_p(\bar{e}_\lambda, \partial e_\lambda; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \longrightarrow H_{p-1}(X^{p-1}, \mathbb{Z}).$$

Inoltre, l'applicazione caratteristica di e_μ

$$\phi_\mu : \bar{e}_\mu \longrightarrow X^{p-1}$$

induce un omomorfismo iniettivo

$$\phi_{\mu*} : H_{p-1}(\bar{e}_\mu, \partial e_\mu; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \longrightarrow H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2}; \mathbb{Z}) = \mathbf{C}_{p-1}(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{q_{p-1}}.$$

Possiamo definire un'inversa destra di $\phi_{\mu*}$ mediante

$$\mathbf{C}_{p-1}(X, \mathbb{Z}) \ni \sum_{e_\nu \in X^{p-1}} k_\nu \langle e_\nu \rangle \longrightarrow k_\mu \in \mathbb{Z} \simeq H_{p-1}(\bar{e}_\mu, \partial e_\mu; \mathbb{Z}).$$

Otteniamo allora

TEOREMA 37.5.6. *Sia X un complesso cellulare, $e_\lambda \in X^p$, $e_\mu \in X^{p-1}$. Il numero d'incidenza $[e_\lambda : e_\mu]$ è definito dalla formula*

$$(37.37) \quad [e_\lambda : e_\mu] = \left((\phi_{\mu*})^{-1} \circ (i_{X^{p-1}}^{(X^{p-1}, X^{p-2})})_* \circ \tilde{h}_{\lambda*} \right) (1) \in \mathbb{Z} \simeq H_{p-1}(\bar{e}_\mu, \partial e_\mu; \mathbb{Z}),$$

ove $1 \in \mathbb{Z} \simeq H_p(\bar{e}_\lambda, \partial e_\lambda; \mathbb{Z})$.

Nel caso di un complesso cellulare *regolare*, per cui cioè le applicazioni caratteristiche $\phi_\lambda : \bar{e}_\lambda \rightarrow X$ siano omeomorfismi con l'immagine, il valore dei numeri d'incidenza $[e_\lambda : e_\mu]$ è 0 se $\phi_\mu(e_\mu)$ non è contenuto in $h_\lambda(\partial e_\lambda)$, altrimenti è uguale a ± 1 , ove il segno dipende dal fatto che l'orientamento di e_μ coincida o sia opposto a quello della frontiera di e_λ .

Appendice: Elementi di algebra omologica

38.1. Complessi

DEFINIZIONE 38.1.1. Chiamiamo *complesso* una coppia (\mathbf{A}, α) formata da un gruppo abeliano \mathbf{A} e da un suo endomorfismo nilpotente $\alpha \in \text{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ con $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha = 0$.

Poniamo

$$(38.1) \quad B(\mathbf{A}, \alpha) = \alpha(\mathbf{A}) = \{\alpha(a) \mid a \in \mathbf{A}\},$$

$$(38.2) \quad Z(\mathbf{A}, \alpha) = \ker \alpha = \{a \in \mathbf{A} \mid \alpha(a) = 0\}.$$

Per la condizione $\alpha^2 = 0$, abbiamo

$$B(\mathbf{A}, \alpha) \subset Z(\mathbf{A}, \alpha)$$

e possiamo quindi considerare il gruppo quoziente

$$(38.3) \quad H(\mathbf{A}, \alpha) = \frac{Z(\mathbf{A}, \alpha)}{B(\mathbf{A}, \alpha)}.$$

DEFINIZIONE 38.1.2. Il gruppo $H(\mathbf{A}, \alpha)$ si dice l'*omologia* del complesso differenziale (\mathbf{A}, α) .

DEFINIZIONE 38.1.3. Siano (\mathbf{A}, α) , (\mathbf{B}, β) due complessi. Un omomorfismo $\phi \in \text{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ è un omomorfismo di complessi se commuta con i differenziali, se cioè il diagramma

$$(38.4) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{A} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbf{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{B} \end{array}$$

è commutativo.

LEMMA 38.1.4. Siano (\mathbf{A}, α) , (\mathbf{B}, β) due complessi e $\phi \in \text{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ un omomorfismo di complessi. Allora

$$\phi(B(\mathbf{A}, \alpha)) \subset B(\mathbf{B}, \beta),$$

$$\phi(Z(\mathbf{A}, \alpha)) \subset Z(\mathbf{B}, \beta),$$

e risulta perciò definito un unico omomorfismo dei gruppi di omologia $[\phi] : H(\mathbf{A}, \alpha) \rightarrow H(\mathbf{B}, \beta)$ tale che

$$[\phi]([a]) = [\phi(a)], \quad \forall a \in Z(\mathbf{A}, \alpha).$$

DEFINIZIONE 38.1.5. Una successione di gruppi abeliani

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\iota} \mathbf{B} \xrightarrow{J} \mathbf{C}$$

è *esatta* se $\text{im } \iota = \ker J$.

Se inoltre ι è iniettiva e J surgettiva, diciamo che

$$(38.5) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\iota} \mathbf{B} \xrightarrow{J} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

è una *successione esatta corta*.

Una *successione esatta corta di omomorfismi di complessi* è il dato di tre complessi di catene (\mathbf{A}, α) , (\mathbf{B}, β) , (\mathbf{C}, γ) e di una successione esatta corta (38.13) in cui ι e J siano omomorfismi di complessi.

38.2. Complessi di catene

DEFINIZIONE 38.2.1. Un *complesso di catene* è il dato di un gruppo abeliano \mathbb{Z} -graduato $\mathbf{C} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathbf{C}_p$ e di un omomorfismo omogeneo di grado (-1) $\delta : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ con $\delta^2 = \delta \circ \delta = 0$, che si dice il *differenziale* od *operatore bordo* del complesso.

Per ogni intero p , la restizione a \mathbf{C}_p del differenziale definisce un omomorfismo $\delta_p : \mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{C}_{p-1}$, e $\delta_{p-1} \circ \delta_p = 0$.

Indichiamo con (\mathbf{C}, δ) il complesso di catene

$$(38.6) \quad \dots \longrightarrow \mathbf{C}_{p+1} \xrightarrow{\delta_{p+1}} \mathbf{C}_p \xrightarrow{\delta_p} \mathbf{C}_{p-1} \xrightarrow{\delta_{p-1}} \mathbf{C}_{p-2} \longrightarrow \dots$$

Anche le δ_p si dicono i *differenziali*, od anche *operatori bordo* del complesso (\mathbf{C}, δ) .

Poiché $\delta^2 = 0$, abbiamo

$$(38.7) \quad \delta(\mathbf{C}) = B(\mathbf{C}, \delta) \subset Z(\mathbf{C}, \delta) = \ker \delta.$$

DEFINIZIONE 38.2.2. Il quoziente

$$(38.8) \quad H(\mathbf{C}, \delta) = \frac{Z(\mathbf{C}, \delta)}{B(\mathbf{C}, \delta)}$$

si dice l'*omologia* del complesso di catene (\mathbf{C}, δ) .

L'omologia di (\mathbf{C}, δ) è un gruppo \mathbb{Z} -graduato: abbiamo

$$(38.9) \quad H(\mathbf{C}, \delta) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(\mathbf{C}, \delta),$$

ove gli $H_p(\mathbf{C}, \delta)$ sono i gruppi quoziente

$$(38.10) \quad H_p(\mathbf{C}, \delta) = \frac{\ker \delta_p : \mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{C}_{p-1}}{\text{im } \delta_{p+1} : \mathbf{C}_{p+1} \rightarrow \mathbf{C}_p}.$$

Chiamiamo gli $H_p(\mathbf{C}, \delta)$ i *gruppi di omologia* del complesso (\mathbf{C}, δ) .

Scriveremo anche

$$\begin{aligned} Z_p(\mathbf{C}, \delta) &= \ker \delta_p : \mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{C}_{p-1}, \\ B_p(\mathbf{C}, \delta) &= \text{im } \delta_{p+1} : \mathbf{C}_{p+1} \rightarrow \mathbf{C}_p, \end{aligned}$$

dimodoché

$$Z(\mathbf{C}, \delta) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} Z_p(\mathbf{C}, \delta),$$

$$B(\mathbf{C}, \delta) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} B_p(\mathbf{C}, \delta),$$

$$H_p(\mathbf{C}, \delta) = \frac{Z_p(\mathbf{C}, \delta)}{B_p(\mathbf{C}, \delta)}.$$

DEFINIZIONE 38.2.3. Siano (\mathbf{A}, α) e (\mathbf{B}, β) due complessi di catene. Un omomorfismo $\phi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ si dice un *omomorfismo di complessi di catene* se è omogeneo di grado zero e commuta con i differenziali, se cioè

$$(38.11) \quad \phi(\mathbf{A}_p) \subset \mathbf{B}_p, \quad \forall p \in \mathbb{Z},$$

$$(38.12) \quad \phi \circ \alpha = \beta \circ \phi.$$

Un omomorfismo di complessi di catene determina un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{A} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbf{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{B}. \end{array}$$

Indicando con $\phi_p : \mathbf{A}_p \ni a_p \rightarrow \phi(a_p) \in \mathbf{B}_p$ gli omomorfismi definiti da ϕ per ogni intero p , possiamo riscrivere il diagramma precedente come:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathbf{A}_{p+1} & \xrightarrow{\alpha_{p+1}} & \mathbf{A}_p & \xrightarrow{\alpha_p} & \mathbf{A}_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \phi_{p+1} \downarrow & & \phi_p \downarrow & & \phi_{p-1} \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & \mathbf{B}_{p+1} & \xrightarrow{\beta_{p+1}} & \mathbf{B}_p & \xrightarrow{\beta_p} & \mathbf{B}_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

LEMMA 38.2.4. Sia $\phi : (\mathbf{A}, \alpha) \rightarrow (\mathbf{B}, \beta)$ un omomorfismo di complessi di catene. Allora, per ogni intero $p \in \mathbb{Z}$,

$$\phi_p(Z_p(\mathbf{A}, \alpha)) \subset Z_p(\mathbf{B}, \beta), \quad \phi_p(B_p(\mathbf{A}, \alpha)) \subset B_p(\mathbf{B}, \beta)$$

e risulta perciò definito un unico omomorfismo dei gruppi di omologia $[\phi]_p : H_p(\mathbf{A}, \alpha) \rightarrow H_p(\mathbf{B}, \beta)$ tale che

$$[\phi]_p([a]) = [\phi_p(a)], \quad \forall a \in Z_p(\mathbf{A}, \alpha).$$

DEFINIZIONE 38.2.5. Una successione di gruppi abeliani

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\iota} \mathbf{B} \xrightarrow{J} \mathbf{C}$$

è *esatta* se $\text{im } \iota = \ker J$.

Se inoltre ι è iniettiva e J surgettiva, diciamo che

$$(38.13) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\iota} \mathbf{B} \xrightarrow{J} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

è una *successione esatta corta*.

Una *successione esatta corta di omomorfismi di complessi* è il dato di tre complessi di catene (\mathbf{A}, α) , (\mathbf{B}, β) , (\mathbf{C}, γ) e di una successione esatta corta (38.13) in cui ι e J siano omomorfismi di complessi di catene.

In particolare

$$0 \longrightarrow \mathbf{A}_p \xrightarrow{\iota_p} \mathbf{B}_p \xrightarrow{J_p} \mathbf{C}_p \longrightarrow 0$$

è, per ogni $p \in \mathbb{Z}$, una successione esatta corta ed abbiamo

$$\beta \circ \iota = \iota \circ \alpha, \quad \gamma \circ J = J \circ \beta,$$

cioè

$$\beta_p \circ \iota_p = \iota_{p-1} \circ \alpha_p, \quad \gamma_p \circ J_p = J_{p-1} \circ \beta_p, \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

L'omomorfismo di connessione. Ad una successione esatta corta di omomorfismi di complessi di catene

$$(38.14) \quad 0 \longrightarrow (\mathbf{A}, \alpha) \xrightarrow{\iota} (\mathbf{B}, \beta) \xrightarrow{J} (\mathbf{C}, \gamma) \longrightarrow 0$$

possiamo associare una corrispondenza

$$(38.15) \quad \iota_{p-1}^{-1} \circ \beta_p \circ J_p^{-1} : Z_p(\mathbf{C}, \gamma) \ni c_p \rightsquigarrow a_{p-1} \in Z_{p-1}(\mathbf{A}, \alpha)$$

nel modo seguente.

Sia $c_p \in Z_p(\mathbf{C}, \gamma)$. Poiché $J_p : \mathbf{B}_p \rightarrow \mathbf{C}_p$ è, per ipotesi, surgettiva, possiamo trovare un elemento

$$b_p \in \mathbf{B}_p \quad \text{tale che} \quad J_p(b_p) = c_p.$$

Abbiamo allora

$$J_{p-1} \circ \beta_p(b_p) = \gamma_p \circ J_p(b_p) = \gamma_p(c_p) = 0$$

e quindi, per ipotesi,

$$\exists! a_{p-1} \in \mathbf{A}_{p-1} \quad \text{tale che} \quad \iota_{p-1}(a_{p-1}) = \beta_p(b_p).$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \iota_{p-2} \circ \alpha_{p-1}(a_{p-1}) &= \beta_{p-1} \circ \iota_{p-1}(a_{p-1}) = \beta_{p-1} \circ \beta_p(b_p) = 0 \\ \implies \alpha_{p-1}(a_{p-1}) &= 0, \quad \text{cioè} \quad a_{p-1} \in Z_{p-1}(\mathbf{A}_*, \alpha_*). \end{aligned}$$

Abbiamo cioè $c_p \rightsquigarrow a_{p-1}$ se:

$$(38.16) \quad \begin{cases} a_{p-1} \in Z_{p-1}(\mathbf{A}_*, \alpha_*), \quad b_p \in \mathbf{B}_p, \quad c_p \in Z_p(\mathbf{C}_*, \gamma_*), \\ J_p(b_p) = c_p, \\ \beta_p(b_p) = \iota_{p-1}(a_{p-1}). \end{cases}$$

Osserviamo che, se fosse $c_p = \gamma_{p+1}(c_{p+1})$ per qualche $c_{p+1} \in \mathbf{C}_{p+1}$, esisterebbero un $b_{p+1} \in \mathbf{B}_{p+1}$ ed $a_p \in \mathbf{A}_p$ tali che

$$\begin{cases} c_p = \gamma_{p+1}(c_{p+1}), \\ J_p b_p = \gamma_{p+1}(c_{p+1}) = \gamma_{p+1} \circ J_{p+1}(b_{p+1}) = J_p \circ \beta_{p+1}(b_{p+1}), \\ b_p - \beta_{p+1}(b_{p+1}) = \iota_p(a_p), \\ \implies \beta_p(b_p) = \beta_p(b_p - \beta_{p+1}(b_{p+1})) = \beta_p \iota_p(a_p) = \iota_{p-1}(\alpha_p(a_p)), \\ \implies a_{p-1} = \alpha_p(a_p) \in B_p(\mathbf{A}_*, \alpha_*). \end{cases}$$

Quindi $\iota_{p-1}^{-1} \circ \beta_p \circ J_p^{-1}(B_p(\mathbf{C}_*, \gamma_*)) \subset B_{p-1}(\mathbf{A}_*, \alpha_*)$ e perciò la corrispondenza (38.15) definisce, per passaggio al quoziente, un'applicazione

$$(38.17) \quad \delta_q = [\iota_{p-1}^{-1} \circ \beta_p \circ J_p^{-1}] : H_p(\mathbf{C}_*, \gamma_*) \rightarrow H_{p-1}(\mathbf{A}_*, \alpha_*).$$

DEFINIZIONE 38.2.6. L'applicazione (38.17) si dice l'*omomorfismo di connessione* associato alla successione esatta corta (38.14).

TEOREMA 38.2.7. *Ad ogni successione esatta corta di complessi di catene*

$$0 \longrightarrow (\mathbf{A}_*, \alpha_*) \xrightarrow{\iota_*} (\mathbf{B}_*, \beta_*) \xrightarrow{J_*} (\mathbf{C}_*, \gamma_*) \longrightarrow 0$$

corrisponde una successione esatta lunga in omologia:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_p(\mathbf{A}_*, \alpha_*) & \xrightarrow{[\iota]_p} & H_p(\mathbf{B}_*, \beta_*) & \xrightarrow{[J]_p} & H_p(\mathbf{C}_*, \gamma_*) \\ & & \delta_p \searrow & & & & \\ & & H_{p-1}(\mathbf{A}_*, \alpha_*) & \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

ove $\delta_p = [\iota_{p-1}^{-1} \circ \beta_p \circ J_p^{-1}]$ è l'*omomorfismo di connessione*.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo in primo luogo che la successione lunga è un complesso.

Abbiamo $[J_p] \circ [\iota_p] = [J_p \circ \iota_p] = [0] = 0$.

Sia poi $b_p \in Z_p(\mathbf{B}_*, \beta_*)$ e sia $c_p = J_p(b_p)$. La (38.16) è verificata da

$$\begin{cases} 0 \in Z_{p-1}(\mathbf{A}_*), & b_p \in Z_p(\mathbf{B}_*, \beta_*), & c_p \in Z_p(\mathbf{C}_*, \gamma_*), \\ c_p = J_p(b_p), \\ 0 = \beta_p(b_p) = \iota_{p-1}(0) \end{cases}$$

e quindi $c_p \rightsquigarrow 0$ e $\delta_p([c_p]) = \delta_p \circ [J_p]([b_p]) = 0$.

Siano ora a_{p-1}, b_p, c_p elementi che soddisfano la (38.16). Allora

$$\iota_{p-1}(a_{p-1}) = \beta_p(b_p) \in B_{p-1}(\mathbf{B}_*, \beta_*)$$

e quindi anche $[\iota_p] \circ \delta_p = 0$.

Dimostriamo ora l'esattezza.

Esattezza in $H_p(\mathbf{A}_, \alpha_*)$.* Sia $a_p \in Z_p(\mathbf{A}_*, \alpha_*)$ e supponiamo che esista $b_{p+1} \in \mathbf{B}_{p+1}$ tale che

$$\beta_{p+1}(b_{p+1}) = \iota_p(a_p).$$

Allora, posto $c_{p+1} = J_{p+1}(b_{p+1}) \in J_{p+1} \circ \beta_{p+1}^{-1} \circ \iota_p(Z_p(\mathbf{A}_*, \alpha_*))$, abbiamo

$$\begin{aligned} \gamma_{p+1}(c_{p+1}) &= \gamma_{p+1} \circ J_{p+1}(b_{p+1}) = J_p \circ \beta_{p+1}(b_{p+1}) = J_p \circ \iota_p(a_p) = 0 \\ &\implies c_{p+1} \in Z_{p+1}(\mathbf{C}_*, \gamma_*). \end{aligned}$$

Quindi $[\alpha_p] = \delta_{p+1}(c_{p+1})$.

Esattezza in $H_p(\mathbf{B}_, \beta_*)$.* Sia $b_p \in Z_p(\mathbf{B}_*, \beta_*)$ e supponiamo che esista un $c_{p+1} \in \mathbf{C}_{p+1}$ tale che

$$c_p = J_p(b_p) = \gamma_{p+1}(c_{p+1}).$$

Sia $b_{p+1} \in \mathbf{B}_{p+1}$ tale che

$$c_{p+1} = J_{p+1}(b_{p+1}).$$

Allora

$$J_p(b_p - \beta_{p+1}(b_{p+1})) = c_p - \gamma_{p+1} \circ J_{p+1}(b_{p+1}) = c_p - \gamma_{p+1}(c_{p+1}) = 0$$

e vi è quindi un unico $a_p \in \mathbf{A}_p$ tale che

$$\iota_p(a_p) = b_p - \beta_{p+1}(b_{p+1})$$

$$\begin{aligned} \implies \iota_{p-1} \circ \alpha_p(a_p) &= \beta_p \circ \iota_p(a_p) = \beta_p(b_p - \beta_{p+1}(b_{p+1})) = 0 \\ \implies \alpha_p(a_p) &= 0, \quad \text{cioè } a_p \in Z_p(\mathbf{A}_*, \alpha_*). \end{aligned}$$

Abbiamo chiaramente $[\iota_p]([a_p]) = [b_p - \beta_{p+1}(b_{p+1})] = [b_p]$.

Esattezza in $H_p(\mathbf{C}_, \gamma_*)$.* Sia $c_p \in Z_p(\mathbf{C}_*, \gamma_*)$. Dire che $\delta_p([c_p]) = 0$ è equivalente ad affermare che se Sa_{p-1}, b_p, c_p soddisfano (38.16), allora vi è $a_p \in \mathbf{A}_p$ tale che

$$a_{p-1} = \alpha_p(a_p).$$

Abbiamo allora

$$\beta_p(b_p) = \iota_{p-1}(a_{p-1}) = \iota_{p-1} \circ \alpha_p(a_p) = \beta_p \circ \iota_p(a_p).$$

Allora $b'_p = b_p - \iota_p(a_p) \in Z_p(\mathbf{B}_*, \beta_*)$ e, poiché $J_p(b'_p) = J_p(b_p - \iota_p(a_p)) = J_p(b_p) = c_p$, otteniamo che $[J_p]([b'_p]) = [c_p]$. \square

DEFINIZIONE 38.2.8. Diciamo che una successione esatta corta

$$(38.18) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\iota} \mathbf{B} \xrightarrow{j} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

si spezza se esiste un endomorfismo di proiezione $\varpi : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ su $\ker j$. Abbiamo cioè:

$$(38.19) \quad \varpi \in \text{Hom}(\mathbf{B}, \mathbf{B}), \quad \varpi^2 = \varpi \circ \varpi = \varpi, \quad j \circ \varpi = 0, \quad \varpi \circ \iota = \iota.$$

LEMMA 38.2.9. Sia (38.18) una successione esatta corta. Sono equivalenti

- (1) (38.18) si spezza;
- (2) ι ammette un'inversa sinistra in $\text{Hom}(\mathbf{B}, \mathbf{A})$;
- (3) j ammette un'inversa destra in $\text{Hom}(\mathbf{C}, \mathbf{B})$;
- (4) esistono un'inversa sinistra $\phi \in \text{Hom}(\mathbf{B}, \mathbf{A})$ di ι ed un'inversa destra $\psi \in \text{Hom}(\mathbf{C}, \mathbf{B})$ di j tali che

$$(38.20) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{C} \xrightarrow{\psi} \mathbf{B} \xrightarrow{\phi} \mathbf{A} \longrightarrow 0$$

sia una successione esatta corta.

DIMOSTRAZIONE. (1) \Rightarrow (2), (3), (4). Abbiamo la decomposizione

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \oplus \mathbf{B}_1, \quad \text{con } \mathbf{B}_0 = \ker \varpi, \quad \mathbf{B}_1 = \text{im } \varpi.$$

Le applicazioni

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbf{A} \ni a &\rightarrow \iota(a) \in \mathbf{B}_0 \quad \text{e} \\ \beta : \mathbf{B}_1 \ni b &\rightarrow j(b) \in \mathbf{C} \end{aligned}$$

sono isomorfismi e le applicazioni

$$\begin{aligned} \phi : \mathbf{B} \ni b &\rightarrow \alpha^{-1}(\varpi(b)) \in \mathbf{A} \quad \text{e} \\ \psi : \mathbf{C} \ni c &\rightarrow \beta^{-1}(c) \in \mathbf{B} \end{aligned}$$

sono, rispettivamente, un'inversa sinistra di ι ed un'inversa destra di j . Inoltre, per costruzione, esse definiscono una successione esatta corta (38.20)

(2) \Rightarrow (1). Se $\phi : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ è un'inversa sinistra di ι , possiamo porre $\varpi = \iota \circ \phi$. Verifichiamo la (38.19). Abbiamo

$$\begin{cases} \varpi^2 = \iota \circ (\phi \circ \iota) \circ \phi = \iota \circ \text{id}_{\mathbf{A}} \circ \phi = \iota \circ \phi = \varpi, \\ J \circ \varpi = (J \circ \iota) \circ \phi = 0 \circ \phi = 0, \\ \varpi \circ \iota = \iota \circ (\phi \circ \iota) = \iota \circ \text{id}_{\mathbf{A}} = \iota. \end{cases}$$

(3) \Rightarrow (1). Se $\psi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B}$ è un'inversa destra di J , possiamo definire ϖ mediante $\mathbf{B} \ni b \rightarrow \varpi(b) = b - \psi(J(b)) \in \mathbf{B}$. Abbiamo

$$\begin{cases} \varpi^2 = \varpi \circ (\text{id}_{\mathbf{B}} - \psi \circ J) = \text{id}_{\mathbf{B}} - \psi \circ J - \psi \circ J \circ (\text{id}_{\mathbf{B}} - \psi \circ J) \\ \quad = \text{id}_{\mathbf{B}} - \psi \circ (J \circ \psi) \circ J = \text{id}_{\mathbf{B}} - \psi \circ \text{id}_{\mathbf{C}} \circ J \\ \quad = \text{id}_{\mathbf{B}} - \psi \circ J = \varpi, \\ J \circ \varpi = J \circ (\text{id}_{\mathbf{B}} - \psi \circ J) = J - (J \circ \psi) \circ J = J - \text{id}_{\mathbf{C}} \circ J = 0, \\ \varpi \circ \iota = (\text{id}_{\mathbf{B}} - \psi \circ J) \circ \iota = \iota - \psi \circ J \circ \iota = \iota - 0 = \iota. \end{cases}$$

□

DEFINIZIONE 38.2.10. La (38.20) si dice *inversa* della (38.18).

Osserviamo che le successioni esatte corte che si spezzano sono esattamente quelle che ammettono un'inversa, in generale non unica. Nello studio dei gruppi di coomologia dei complessi, è spesso utile il seguente lemma algebrico:

TEOREMA 38.2.11 (Lemma dei cinque). *Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe e colonne esatte:*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 & \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow & \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5 & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & & \\ 0 & & 0 & & & & 0 & & & \end{array}$$

Abbiamo supposto cioè che α_1 sia surgettiva, α_2 e α_4 siano isomorfismi ed α_5 sia iniettiva. Allora α_3 è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che α_3 è iniettiva. Sia $a_3 \in \mathbf{A}_3$, con $\alpha_3(a_3) = 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha_4(f_3(a_3)) = g_3(\alpha_3(a_3)) = 0 &\implies f_3(a_3) = 0 \implies \exists a_2 \in \mathbf{A}_2 \text{ t.c. } a_3 = f_2(a_2) \\ &\implies \alpha_3(f_2(a_2)) = g_2(\alpha_2(a_2)) = 0 \implies \exists b_1 \in \mathbf{B}_1 \text{ t.c. } \alpha_2(a_2) = g_1(b_1) \\ &\implies \exists a_1 \in \mathbf{A}_1 \text{ t.c. } \alpha_1(a_1) = b_1, \implies \alpha_2(a_2) = g_1(\alpha_1(a_1)) = \alpha_2(f_1(a_1)) \\ &\implies a_2 = f_1(a_1) \implies a_3 = f_2 \circ f_1(a_1) = 0. \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che α_3 è surgettiva. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \exists a_4 \in \mathbf{A}_4 \text{ t.c. } g_3(b_3) = \alpha_4(a_4) &\implies 0 = g_4 \circ g_3(b_3) = g_4 \circ \alpha_4(a_4) = \alpha_5 \circ f_4(a_4) \\ &\implies f_4(a_4) = 0 \implies \exists a_3 \in \mathbf{A}_3 \text{ t.c. } f_3(a_3) = a_4 \\ &\implies g_3(b_3) = \alpha_4 \circ f_3(a_3) = g_3(\alpha_3(a_3)) \implies g_3(b_3 - \alpha_3(a_3)) = 0 \\ &\implies \exists b_2 \in \mathbf{B}_2 \text{ t.c. } g_2(b_2) = b_3 - \alpha_3(a_3) \implies \exists a_2 \in \mathbf{A}_2 \text{ t.c. } \alpha_2(a_2) = b_2 \\ &\implies b_3 - \alpha_3(a_3) = g_2 \circ \alpha_2(a_2) = \alpha_3(f_2(a_2)) \implies b_3 = \alpha_3(a_3 + f_2(a_2)). \end{aligned}$$

□

Dalla dimostrazione segue che

TEOREMA 38.2.12 (Lemmi dei quattro). *Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe esatte:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Se α_1 è surgettiva ed α_2, α_4 iniettive, allora α_3 è iniettiva.

Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & & & \downarrow \\ \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Se α_5 è iniettiva ed α_2, α_4 surgettive, allora α_3 è surgettiva.

38.3. Complessi di cocatene

DEFINIZIONE 38.3.1. Un *complesso di cocatene*, o *complesso differenziale*, è il dato di uno spazio vettoriale \mathbf{C} su un campo \mathbb{k} , di una sua \mathbb{Z} -gradazione $\mathbf{C} =$

$\bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathbf{C}^q$ e di un omomorfismo $d_C : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, omogeneo di grado 1, con $d_C^2 = 0$. Indichiamo il complesso mediante

$$(38.21) \quad \dots \rightarrow \mathbf{C}^{q-1} \xrightarrow{d_C} \mathbf{C}^q \xrightarrow{d_C} \mathbf{C}^{q+1} \rightarrow \dots$$

La *coomologia* di (38.21) è la somma diretta di spazi vettoriali:

$$(38.22) \quad H(\mathbf{C}, d_C) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^q(\mathbf{C}, d_C),$$

ove $H^q(\mathbf{C}, d_C) = (\ker d_C \cap \mathbf{C}^q) / d_C(\mathbf{C}^{q-1})$.

Lo spazio vettoriale $H^q(\mathbf{C}, d_C)$ si dice anche il q -esimo gruppo di coomologia di (38.21).

Dati due complessi differenziali (\mathbf{A}, d_A) e (\mathbf{B}, d_B) sullo stesso campo \mathbb{k} , un'applicazione lineare $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ si dice un *omomorfismo di complessi* se

$$(38.23) \quad f(\mathbf{A}^q) \subset \mathbf{B}^q, \quad \forall q \in \mathbb{Z},$$

$$(38.24) \quad f \circ d_A = d_B \circ f.$$

Essa induce un'applicazione naturale

$$(38.25) \quad f_* : H^q(\mathbf{A}, d_A) \rightarrow H^q(\mathbf{B}, d_B),$$

che fa corrispondere alla classe $[a_q]$ di $a_q \in \ker d_A \cap \mathbf{A}^q$ la classe $[f(a_q)]$ di $f(a_q) \in \ker d_B \cap \mathbf{B}^q$.

Una successione

$$(38.26) \quad \dots \rightarrow \mathbf{V}^{q-1} \xrightarrow{f_{q-1}} \mathbf{V}^q \xrightarrow{f_q} \mathbf{V}^{q+1} \rightarrow \dots$$

di \mathbb{k} -spazi vettoriali su di applicazioni \mathbb{k} -lineari si dice *esatta* se

$$(38.27) \quad f_{q-1}(\mathbf{V}^{q-1}) = \ker f_q, \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Una successione esatta della forma

$$(38.28) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{B} \xrightarrow{\beta} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

si dice una *successione esatta corta*.

Se (\mathbf{A}, d_A) , (\mathbf{B}, d_B) e (\mathbf{C}, d_C) sono complessi differenziali di spazi vettoriali su \mathbb{k} e la (38.28) è una successione esatta corta di omomorfismi di complessi, possiamo definire delle applicazioni \mathbb{k} -lineari

$$(38.29) \quad \Delta_q : H^q(\mathbf{C}, d_C) \rightarrow H^{q+1}(\mathbf{A}, d_A)$$

nel modo seguente.

Sia $c_q \in \mathbf{C}^q$ con $d_C c_q = 0$. Poiché β è surgettiva, esiste un elemento $b_q \in \mathbf{B}^q$ tale che $c_q = \beta(b_q)$. Abbiamo

$$\beta(d_B b_q) = d_C \beta(b_q) = d_C c_q = 0$$

e quindi, per l'esattezza di (38.28) esiste uno ed un solo $a_{q+1} \in \mathbf{A}^{q+1}$ tale che

$$\alpha(a_{q+1}) = d_B b_q.$$

Poiché

$$\alpha(d_A a_{q+1}) = d_B \alpha(a_{q+1}) = d_B^2 b_q = 0 \implies d_A a_{q+1} = 0$$

per l'esattezza di (38.28), l'elemento a_{q+1} definisce per passaggio al quoziente una classe $[a_{q+1}] \in H^{q+1}(\mathbf{A}, d_A)$.

Siano ora

$$\begin{aligned} c'_q &= c_q + d_C c_{q-1}, & \text{con } c_{q-1} &\in \mathbf{C}^{q-1}, \\ b'_q &\in \mathbf{B}^q & \text{con } \beta(b'_q) &= c'_q = c_q + d_C c_{q-1}, \\ a'_{q+1} &\in \mathbf{A}^{q+1} & \text{con } \alpha(a'_{q+1}) &= d_B b'_q. \end{aligned}$$

Utilizzando ancora l'esattezza di (38.28), otteniamo

$$\begin{aligned} &\exists b_{q-1} \in \mathbf{B}^{q-1} \text{ tale che} \\ \beta(b'_q - b_q) &= c'_q - c_q = d_C c_{q-1} = d_C \beta(b_{q-1}) = \beta(d_B b_{q-1}) \\ \implies \exists a_q \in \mathbf{A}^q &\text{ tale che } b'_q - b_q - d_B b_{q-1} = \alpha(a_q) \\ \implies \alpha(a'_{q+1} - a_{q+1}) &= d_B b'_{q+1} - d_B b_q \\ &= d_B (b'_q - b_q - d_B b_{q-1}) \\ &= d_B \alpha(a_q) = \alpha(d_A a_q) \\ \implies a'_{q+1} - a_{q+1} &= d_A a_q. \end{aligned}$$

Quindi la Δ_q risulta ben definita da

$$(38.30) \quad \Delta([c_q]) = [a_{q+1}].$$

Abbiamo il

TEOREMA 38.3.2. *Se (38.28) è una successione esatta corta di complessi differenziali di spazi vettoriali su \mathbb{k} , allora abbiamo una successione esatta lunga*

$$(38.31) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & & & H^{q-1}(\mathbf{B}, d_B) & \xrightarrow{\beta_*} & H^{q-1}(\mathbf{C}, d_C) \\ & & & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & & & H^q(\mathbf{A}, d_A) & \xrightarrow{\alpha_*} & H^q(\mathbf{B}, d_B) & \xrightarrow{\beta_*} & H^q(\mathbf{C}, d_C) \\ & & & & & & \uparrow & & \uparrow \\ \Delta_{q-1} & \longrightarrow & & & & & H^{q+1}(\mathbf{A}, d_A) & \longrightarrow & \dots & & \end{array}$$

Nello studio dei gruppi di coomologia dei complessi, è spesso utile il seguente lemma algebrico:

TEOREMA 38.3.3 (Lemma dei cinque). *Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe e colonne esatte:*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & & & 0 & & \end{array}$$

Abbiamo supposto cioè che α_1 sia surgettiva, α_2 e α_4 siano isomorfismi ed α_5 sia iniettiva. Allora α_3 è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che α_3 è iniettiva. Sia $a_3 \in \mathbf{A}_3$, con $\alpha_3(a_3) = 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha_4(f_3(a_3)) = g_3(\alpha_3(a_3)) = 0 &\implies f_3(a_3) = 0 \implies \exists a_2 \in \mathbf{A}_2 \text{ t.c. } a_3 = f_2(a_2) \\ &\implies \alpha_3(f_2(a_2)) = g_2(\alpha_2(a_2)) = 0 \implies \exists b_1 \in \mathbf{B}_1 \text{ t.c. } \alpha_2(a_2) = g_1(b_1) \\ &\implies \exists a_1 \in \mathbf{A}_1 \text{ t.c. } \alpha_1(a_1) = b_1, \implies \alpha_2(a_2) = g_1(\alpha_1(a_1)) = \alpha_2(f_1(a_1)) \\ &\implies a_2 = f_1(a_1) \implies a_3 = f_2 \circ f_1(a_1) = 0. \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che α_3 è surgettiva. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \exists a_4 \in \mathbf{A}_4 \text{ t.c. } g_3(b_3) = \alpha_4(a_4) &\implies 0 = g_4 \circ g_3(b_3) = g_4 \circ \alpha_4(a_4) = \alpha_5 \circ f_4(a_4) \\ &\implies f_4(a_4) = 0 \implies \exists a_3 \in \mathbf{A}_3 \text{ t.c. } f_3(a_3) = a_4 \\ &\implies g_3(b_3) = \alpha_4 \circ f_3(a_3) = g_3(\alpha_3(a_3)) \implies g_3(b_3 - \alpha_3(a_3)) = 0 \\ &\implies \exists b_2 \in \mathbf{B}_2 \text{ t.c. } g_2(b_2) = b_3 - \alpha_3(a_3) \implies \exists a_2 \in \mathbf{A}_2 \text{ t.c. } \alpha_2(a_2) = b_2 \\ &\implies b_3 - \alpha_3(a_3) = g_2 \circ \alpha_2(a_2) = \alpha_3(f_2(a_2)) \implies b_3 = \alpha_3(a_3 + f_2(a_2)). \end{aligned}$$

□

Dalla dimostrazione segue che

TEOREMA 38.3.4 (Lemmi dei quattro). *Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe esatte:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & 0 & \\ & & \downarrow & & & \downarrow & \\ \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Se α_1 è surgettiva ed α_2, α_4 iniettive, allora α_3 è iniettiva.

Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\
 \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\
 \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5 \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 0 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

Se α_5 è iniettiva ed α_2, α_4 surgettive, allora α_3 è surgettiva.

38.4. I funtori Hom e Tor

Richiamiamo in questo paragrafo alcuni risultati standard di algebra omologica.

Sia \mathbb{A} un anello commutativo e unitario e siano E_1, E_2 due \mathbb{A} -moduli unitari. Indichiamo con $\text{Hom}(E_1, E_2)$ l' \mathbb{A} -modulo delle applicazioni \mathbb{A} -lineari di E_1 in E_2 e con $E_1 \otimes E_2$ il loro prodotto tensoriale su \mathbb{A} , cioè il quoziente dell' \mathbb{A} -modulo libero generato da $E_1 \times E_2$ rispetto all'ideale bilatero generato dagli elementi

$$\begin{aligned}
 & (a_1u_1 + a_2u_2, b_1v_1 + b_2v_2) - \sum_{i,j=1}^2 a_i b_j (u_i, v_j), \\
 & \text{con } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{A}, u_1, u_2 \in E_1, v_1, v_2 \in E_2.
 \end{aligned}$$

TEOREMA 38.4.1. *Sia E un \mathbb{A} -modulo unitario. Allora*

- (1) $\text{Hom}(\cdot, E)$ è un funtore controvariante esatto a destra sulla categoria degli \mathbb{A} -moduli unitari.
- (2) $\text{Hom}(E, \cdot)$ è un funtore covariante esatto a sinistra sulla categoria degli \mathbb{A} -moduli unitari.
- (3) $E \otimes \cdot$ è un funtore covariante esatto a sinistra sulla categoria degli \mathbb{A} -moduli unitari.

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato del teorema è equivalente all'affermazione che, se

$$(38.32) \quad 0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

è una successione esatta di \mathbb{A} -moduli unitari, allora sono esatte le

$$(38.33) \quad 0 \longrightarrow \text{Hom}(E_3, E) \xrightarrow{\beta^*} \text{Hom}(E_2, E) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Hom}(E_1, E),$$

$$(38.34) \quad 0 \longrightarrow \text{Hom}(E, E_1) \longrightarrow \text{Hom}(E, E_2) \longrightarrow \text{Hom}(E, E_3),$$

$$(38.35) \quad 0 \longrightarrow E_1 \otimes E \longrightarrow E_2 \otimes E \longrightarrow E_3 \otimes E.$$

Dimostriamo l'esattezza della (38.33).

Fissata una $\phi_3 \in \text{Hom}(E_3, E)$ e supponiamo che $\beta^*(\phi_3) = \phi_3 \circ \beta = 0$. Poiché β è surgettiva, questa relazione implica che $\phi_3 = 0$.

Sia ora $\phi_2 \in \text{Hom}(E_2, E)$ e supponiamo che $\alpha^*\phi_2 = \phi_2 \circ \alpha = 0$. \square

38.5. Relazione con l'omologia singolare

Per collegare la coomologia di de Rham e l'omologia singolare, è conveniente restringere la classe dei semplici singolari ai semplici singolari *lisci*. Indichiamo con

$$(38.36) \quad \Delta_k = \left\{ t \in \mathbb{R}^{k+1} \mid t^i \in [0, 1], \sum_{i=0}^k t^i = 1 \right\}$$

il semplice k -dimensionale standard.

DEFINIZIONE 38.5.1. Sia M una varietà differenziabile. Δ_k in M . Gli elementi dello spazio $\mathcal{C}^\infty(\Delta_k, M)$ delle applicazioni di classe \mathcal{C}^∞ di Δ_k in M si dicono *semplici singolari lisci k -dimensionali* in M . Indichiamo poi con $\Delta_k(M)$ l'insieme delle k -catene singolari lisce di M , cioè di quelle della forma $\sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma$ (somme finite) con $n_{\sigma} \in \mathbb{Z}$ e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\Delta_k, M)$.

OSSERVAZIONE 38.5.2. Si possono utilizzare solo semplici lisci per calcolare l'omologia singolare di una varietà differenziabile. Utilizzando l'approssimazione, si può verificare che l'omologia calcolata con i semplici singolari lisci è la stessa che si ottiene utilizzando tutti i semplici singolari.

DEFINIZIONE 38.5.3. Definiamo l'orientazione del semplice standard Δ_k per ricorrenza, fissando l'orientazione positiva per Δ_0 e definendo su Δ_k , per $k > 0$, l'orientazione per cui l'applicazione $\Delta_{k-1} \ni (t^1, \dots, t^k) \rightarrow (t^0, t^1, \dots, t^k) \in \partial\Delta_k$ preserva l'orientazione.

Se $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\Delta_k, M)$, possiamo definire

$$(38.37) \quad \int_{\sigma} \omega = \int_{\Delta_k} \sigma^* \omega.$$

Se $c = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma \in \Delta_k(M)$, porremo

$$(38.38) \quad \int_c \omega = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \int_{\sigma} \omega.$$

Otteniamo così un'applicazione bilineare

$$(38.39) \quad \Delta_k(M) \times \Omega^k(M) \ni (c, \omega) \longrightarrow \langle c, \omega \rangle = \int_c \omega \in \mathbb{R}.$$

LEMMA 38.5.4 (Stokes). Per ogni intero $k \geq 1$ abbiamo¹

$$(38.40) \quad \langle c, d\omega \rangle = \langle \partial c, \omega \rangle, \quad \forall c \in \Delta_k(M), \quad \forall \omega \in \Omega^{k-1}(M).$$

¹Ricordiamo che, se $k \geq 1$,

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \circ F_i, \quad \forall \sigma \in \Sigma_k(M),$$

ove $F_i : \Delta_{k-1} \ni (t^0, \dots, t^{k-1}) \rightarrow (t^0, \dots, t^{i-1}, 0, t^i, \dots, t^{k-1}) \in \partial\Delta_k$.

Abbiamo quindi un diagramma commutativo

$$(38.41) \quad \begin{array}{ccc} \Omega^{k-1}(M) & \longrightarrow & \text{Hom}(\Delta_{k-1}(M), \mathbb{R}) \\ d \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(\mathfrak{d}, 1) \\ \Omega^k(M) & \longrightarrow & \text{Hom}(\Delta_k(M), \mathbb{R}). \end{array}$$

Le applicazioni $\text{Hom}(\mathfrak{d}, 1)$ sono definite per dualità:

$$(38.42) \quad \text{Hom}(\mathfrak{d}, 1)(\phi) = \phi \circ \mathfrak{d}, \quad \forall \phi \in \text{Hom}(\Delta_{k-1}(M), \mathbb{R}).$$

DEFINIZIONE 38.5.5. I gruppi $\text{Hom}(\Delta_k(M), \mathbb{R})$ si dicono i *gruppi delle k -cocatene singolari lisce* di M . La successione

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \text{Hom}(\Delta_0(M), \mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{Hom}(\mathfrak{d}, 1)} & \text{Hom}(\Delta_1(M), \mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{Hom}(\mathfrak{d}, 1)} & \dots & & \\ & & \dots & \longrightarrow & \text{Hom}(\Delta_{k-1}(M), \mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{Hom}(\mathfrak{d}, 1)} & \text{Hom}(\Delta_k(M), \mathbb{R}) \\ & & & & \xrightarrow{\text{Hom}(\mathfrak{d}, 1)} & \text{Hom}(\Delta_{k+1}(M), \mathbb{R}) & \longrightarrow \dots \end{array}$$

è un complesso, che si dice il *complesso delle cocatene singolari* di M .

Appendice
Complementi sulle connessioni

Espressioni in coordinate

39.1. Espressione in coordinate delle equazioni di struttura

Ricordiamo che i tensori di *torsione* $T \in \mathfrak{T}^{1,2}(M)$ e di *curvatura* $R \in \mathfrak{T}^{1,3}(M)$ sono definiti da:

$$(39.1) \quad T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

$$(39.2) \quad R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \\ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Fissiamo un riferimento (X_1, \dots, X_m) su un aperto U di M e consideriamo i simboli di Christoffel e le componenti dei tensori di torsione e di curvatura definiti da:

$$(39.3) \quad \nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k X_k,$$

$$(39.4) \quad T(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^m T^k_{i,j} X_k,$$

$$(39.5) \quad R(X_i, X_j) X_h = \sum_{k=1}^n R^k_{h,i,j} X_k.$$

Definiamo delle 1-forme $\omega^i, \omega_j^i \in \Omega^1(U)$ (per $1 \leq i, j \leq m$) mediante:

$$(39.6) \quad \omega^i(X_j) = \delta_j^i, \quad \omega_j^i = \sum_{k=1}^m \Gamma_{k,j}^i \omega^k.$$

Le forme ω_j^i determinano a loro volta i simboli di Christoffel e quindi la connessione lineare.

Diamo una descrizione più intrinseca delle forme ω^i e ω_j^i . Il dato del sistema di riferimento (X_1, \dots, X_n) definisce una forma differenziale

$$(39.7) \quad B\omega = (\omega^1, \dots, \omega^n) \in \Omega^1(U, \mathbb{R}^m).$$

La differenziazione affine definisce allora una forma $B\Omega = (\omega_j^i) \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ tale che

$$(39.8) \quad B\omega(\nabla_X Y) = d[B\omega(Y)](X) + B\Omega(Y)X.$$

Se X'_1, \dots, X'_n è un altro sistema di riferimento in U , le forme $B\omega' \in \Omega^1(U, \mathbb{R}^m)$ e $B\Omega' \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ ad esso associate sono legate alle $(B\omega, B\Omega)$ del precedente riferimento dalle *equazioni di gauge*:

$$(39.9) \quad \begin{cases} B\omega = aB\omega' & \text{con } a \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})), \\ B\Omega' = a^{-1} \circ da + a^{-1} \circ B\Omega \circ a = a^{-1} \circ da + \text{Ad}(a^{-1})(B\Omega). \end{cases}$$

TEOREMA 39.1.1 (Equazioni di struttura di Cartan). *Le forme ω^i_j soddisfano:*

$$(39.10) \quad d\omega^i = -\sum_{k=1}^m \omega_k^i \wedge \omega^k + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m T^i_{j,k} \omega^j \wedge \omega^k$$

$$(39.11) \quad d\omega^i_j = -\sum_{k=1}^m \omega_k^i \wedge \omega^k_j + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^m R^i_{j,h,k} \omega^h \wedge \omega^k.$$

DIMOSTRAZIONE. Definiamo i coefficienti $c^k_{i,j}$ mediante :

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^m c^k_{i,j} X_k.$$

Useremo nel seguito la convenzione secondo cui indici uguali in alto e in basso si intendono sommati su tutto il loro insieme di definizione. Abbiamo dunque:

$$d\omega^i(X_j, X_k) = X_j(\omega^i(X_k)) - X_k(\omega^i(X_j)) - \omega^i([X_j, X_k]) = -c^i_{j,k}.$$

Abbiamo poi :

$$\begin{aligned} T(X_j, X_k) &= \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_k} X_j - [X_j, X_k] \\ &= \Gamma_{j,k}^i X_i - \Gamma_{k,j}^i X_i - c^i_{j,k} X_i, \end{aligned}$$

cioè

$$T^i_{j,k} = \Gamma_{j,k}^i - \Gamma_{k,j}^i - c^i_{j,k}$$

e quindi :

$$\begin{aligned} &(-\omega_h^i \wedge \omega^h + T^i_{h,\ell} \omega^h \wedge \omega^\ell)(X_j, X_k) \\ &= -\omega_k^i(X_j) + \omega_j^i(X_k) + \frac{1}{2} (T^i_{j,k} - T^i_{k,j}) \\ &= -\Gamma_{j,k}^i + \Gamma_{k,j}^i + \frac{1}{2} ((\Gamma_{j,k}^i - \Gamma_{k,j}^i - c^i_{j,k}) - (\Gamma_{k,j}^i - \Gamma_{j,k}^i - c^i_{k,j})) \\ &= -c^i_{j,k} \end{aligned}$$

e quindi abbiamo verificato la (39.10).

Per i coefficienti del tensore di curvatura abbiamo l'espressione:

$$(39.12) \quad R^i_{j,h,k} = (X_h \Gamma_{k,j}^i) - (X_k \Gamma_{h,j}^i) + \Gamma_{k,j}^\ell \Gamma_{h,\ell}^i - \Gamma_{h,j}^\ell \Gamma_{k,\ell}^i - c^{\ell}_{h,k} \Gamma_{\ell,j}^i.$$

A partire dalla formula per le componenti della curvatura, la verifica della (39.11) è analoga a quella della (39.10). \square

In un riferimento X_1, \dots, X_n su un aperto U di M possiamo associare ai tensori di torsione e di curvatura le *forme di torsione e di curvatura* mediante :

$$(39.13) \quad T = \left(\sum_{j,k=1}^m T^i_{j,k} \omega^j \wedge \omega^k \right)_{i=1, \dots, n} \in \mathcal{Q}^2(U, \mathbb{R}^m),$$

$$(39.14) \quad R = \left(\sum_{h,k=1}^m R^i_{j,h,k} \omega^h \wedge \omega^k \right)_{h,k=1, \dots, n} \in \mathcal{Q}^2(U, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})),$$

dove, se V è uno spazio vettoriale reale, $\Lambda^p(U, V)$ è lo spazio delle p -forme differenziali alternate a valori in V .

Le equazioni di struttura si scrivono allora utilizzando le forme di torsione e di curvatura mediante¹ :

$$(39.15) \quad \begin{cases} d\omega = -\Omega \wedge \omega + \frac{1}{2}T \\ d\Omega = -\Omega \wedge \Omega + \frac{1}{2}R. \end{cases}$$

Supponiamo che il sistema di riferimento X_1, \dots, X_n sia definito su un intorno normale U_p del punto $p \in M$ e consideriamo l'applicazione differenziabile, definita in un intorno aperto V di 0 in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$:

$$(39.16) \quad \Phi : V \ni (t; a^1, \dots, a^m) \rightarrow \exp_p(ta^1 X \dots, ta^m X_n) \in U_p.$$

Abbiamo allora, per forme $\bar{\omega}^i, \bar{\omega}_j^i$ definite su V che sono combinazioni lineari a coefficienti \mathcal{C}^∞ di da^1, \dots, da^m :

$$(39.17) \quad \begin{cases} \Phi^* \omega^i = a^i dt + \bar{\omega}^i \\ \Phi^* \omega_j^i = \bar{\omega}_j^i \\ 1 \leq i, j \leq n \end{cases}$$

Vale la:

PROPOSIZIONE 39.1.2. *Indicando ancora con $T^i_{j,k}$ ed $R^i_{j,h,k}$ i loro rialzamenti a V , le forme $\bar{\omega}^i$ e $\bar{\omega}_j^i$ soddisfano il sistema differenziale:*

$$(39.18) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t} = da^i + a^k \bar{\omega}_k^i + T^i_{h,k} a^h \bar{\omega}^k, & \bar{\omega}^i(0, a^1, \dots, a^m) = 0 \\ \frac{\partial \bar{\omega}_j^i}{\partial t} = R^i_{j,h,k} a^h \bar{\omega}^k, & \bar{\omega}_j^i(0, a^1, \dots, a^m) = 0. \end{cases}$$

In particolare, se il tensore di curvatura è nullo, le forme $\bar{\omega}_j^i$ sono costanti. Se anche la torsione è nulla, l'esponenziale definisce una trasformazione affine di un intorno di 0 in $T_p M$ su un intorno normale di p in M .

39.2. Espressioni locali

In questo paragrafo ricaveremo diverse espressioni locali per il simboli di Christoffel ed i tensori di curvatura per la connessione di Levi-Civita di una metrica Riemanniana g su M .

Espressione in coordinate locali. Siano x^1, \dots, x^m coordinate locali in un aperto U di M e poniamo

$$g_{i,j} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

¹Si può dare una formulazione intrinseca delle equazioni di struttura definendo forme $\tilde{\omega}, \tilde{\Omega}, \tilde{T}$ ed \tilde{R} sul fibrato principale $\mathfrak{F}(M)$ dei sistemi di riferimento di M .

Per la (??) i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita si esprimono in funzione dei coefficienti $g_{i,j}$. Abbiamo infatti

$$2\Gamma_{i,j}^{\ell} g_{\ell,k} = \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i,k}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^k}.$$

Indicando con $g^{i,j}$ i coefficienti della matrice inversa della $(g_{i,j})_{i,j=1,\dots,m}$, otteniamo

$$(39.19) \quad \Gamma_{i,j}^k = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^m g^{k,\ell} \left(\frac{\partial g_{j,\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i,\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^{\ell}} \right).$$

L'assenza di torsione equivale al fatto che i simboli di Christoffel, calcolati in un sistema di coordinate locali, siano simmetrici rispetto ai due indici in basso.

Espressione in un riferimento ortonormale. Sia $(X_1, \dots, X_m) \in \Gamma(U, \mathbf{O}(M))$ un sistema di riferimento ortonormale in un aperto U di M . Poiché le $g(X_i, X_j) = \delta_{i,j}$ sono costanti, i simboli di Christoffel nel riferimento (X_1, \dots, X_m) soddisfano:

$$(39.20) \quad \Gamma_{i,j}^k = \frac{1}{2}(c_{i,j}^k + c_{k,i}^j + c_{k,j}^i) = -\Gamma_{i,k}^j, \quad \text{ove } [X_i, X_j] = c_{i,j}^k X_k,$$

e l'uguaglianza $\Gamma_{i,j}^k = -\Gamma_{i,k}^j$ è conseguenza del fatto che i coefficienti $c_{j,k}^i$ sono antisimmetrici rispetto agli indici in basso.

Per scrivere le *forme di Christoffel* utilizziamo il co-riferimento $(\theta^1, \dots, \theta^m)$ associato ad (X_1, \dots, X_m) . Le forme $\theta^1, \dots, \theta^m \in \mathcal{Q}^1(U)$ sono caratterizzate da $\theta^i(X_j) = \delta_j^i$ per $1 \leq i, j \leq m$, di modo che

$$g = \sum_{i=1}^m (\theta^i)^2 = \sum_{i=1}^m \theta^i \otimes \theta^i.$$

La forma di Christoffel $\omega_U = (\omega_k^j)$ è quindi a valori in $\mathfrak{o}(m)$ e le equazioni di struttura danno

$$(39.21) \quad \begin{cases} d\theta^i + \sum_{j=1}^m \omega_j^i \wedge \theta^j = 0, \\ d\omega_j^i + \sum_{k=1}^m \omega_k^i \wedge \omega_j^k = \sum_{h,k=1}^m R_{j,h,k}^i \theta^h \wedge \theta^k, \end{cases}$$

ove $\sum_{j,k=1}^m R_{j,h,k}^i \theta^h \wedge \theta^k$ è il tensore di curvatura.

Forma polare. Fissiamo un punto $p_0 \in M$ e sia U un intorno suo intorno normale. Possiamo supporre che, per un $r > 0$,

$$\exp_{p_0} : N_{p_0}(r) = \{x \in T_{p_0}M \mid \|x\|_g < r\} \longrightarrow U$$

sia un diffeomorfismo.

Fissiamo una base ortonormale (e_1, \dots, e_m) in $T_{p_0}M$ e costruiamo una sezione $\sigma_U \in \Gamma(U, \mathbf{O}(M))$ mediante il trasporto parallelo di (e_1, \dots, e_m) lungo le geodetiche:

$$\sigma_U(\exp_{p_0}(x)) = (d\exp_{p_0}(x)(e_1), \dots, d\exp_{p_0}(x)(e_m)).$$

Poniamo poi

$$(39.22) \quad \bar{\theta} = (\bar{\theta}^i)_{1 \leq i \leq m} = \sigma_U^* \theta, \quad \bar{\omega} = (\bar{\omega}_j^i)_{1 \leq i, j \leq m} = \sigma_U^* \omega,$$

ove θ ed ω sono, rispettivamente, la forma canonica e la forma di Cartan della connessione di Levi-Civita Γ .

Per calcolare queste forme in modo esplicito, introduciamo coordinate polari in N_0 , ponendo, per le componenti v^i di $v \in T_{p_0}M$,

$$v^i = x^i t, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \sum_{i=1}^m (x^i)^2 = 1.$$

LEMMA 39.2.1. *Abbiamo:*

$$(39.23) \quad \bar{\theta}^i = x^i dt + \phi^i, \quad \text{con } \phi^i \text{ indipendente da } dt,$$

$$(39.24) \quad \text{gli } \bar{\omega}_j^i \text{ sono indipendenti da } dt,$$

$$(39.25) \quad d\phi^i = -(dx^i + \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i x^j) \wedge dt + \dots,$$

$$(39.26) \quad d\bar{\omega}_j^i = -\sum_{h,k=1}^m \bar{R}_{j,h,k}^i x^h \phi^k \wedge dt + \dots$$

dove i puntini stanno per forme indipendenti da dt ed $\bar{R}_{j,h,k}^i$ sono le componenti del tensore di curvatura nel riferimento σ_U .

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la (39.23). Per provare che ϕ^i è indipendente da dt è sufficiente verificare che, se $\gamma_x = \exp_{p_0}(tx)$ è la geodetica uscente da p_0 con velocità x , allora $\bar{\theta}^i(\dot{\gamma}_x) = x^i$. Osserviamo che, per la definizione della forma canonica,

$$\theta\left(\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}_x\right) = \bar{\theta}(\dot{\gamma}_x) = \tilde{\gamma}_x(t)^{-1}(\dot{\gamma}_x(t)),$$

ove $\tilde{\gamma}_x$ è il rialzamento orizzontale di γ_x a partire dal punto (e_1, \dots, e_m) . Poiché $\tilde{\gamma}_x$ è orizzontale e $\dot{\gamma}_x$ parallelo lungo γ_x , ne segue che $\bar{\theta}(\dot{\gamma}_x)$ è costante. Il suo valore in 0 è x e dunque $\bar{\theta}^i(\dot{\gamma}_x) = x^i$ per ogni t .

Poiché $\tilde{\gamma}_x$ e $\dot{\gamma}_x$ sono paralleli lungo la geodetica γ_x , abbiamo

$$\bar{\omega}_j^i(\dot{\gamma}_x) = \omega_j^i\left(\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}_x\right) = 0,$$

perché $\tilde{\gamma}_x$ è orizzontale, e questo ci dà la (39.24).

Poiché la connessione di Levi-Civita ha torsione nulla, abbiamo

$$d\theta = -\omega \wedge \theta.$$

Quindi

$$d\phi^i = -dx^i \wedge dt - d\bar{\theta}^i = -(dx^i + \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i x^j) \wedge dt + \dots$$

ove i puntini stanno per una forma indipendente da dt , in quanto

$$d\bar{\theta} = d\sigma_U^* \theta = \sigma_U^* d\theta = -\sigma_U^*(\omega \wedge \theta) = \bar{\omega} \wedge \bar{\theta}$$

e, per le (39.23), (39.24),

$$\sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i \wedge \bar{\theta}^j = \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i x^j dt + \dots,$$

ove i puntini stanno per una forma indipendente da dt .

Dalle equazioni di struttura, abbiamo

$$d\bar{\theta}^i = d(x^i dt + \phi^i) = \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i \wedge (x^j dt + \phi^j),$$

$$d\bar{\omega}_j^i = -\sum_{k=1}^m \bar{\omega}_k^i \wedge \bar{\omega}_j^k + \bar{\Omega}_j^i,$$

ove

$$\bar{\Omega}_j^i = \sum_{h,k=1}^m \bar{R}_{j,h,k}^i \bar{\theta}^h \wedge \bar{\theta}^k,$$

da cui sostituendo l'espressione di θ^i in (39.23) si ottiene la (39.26). \square

PROPOSIZIONE 39.2.2. *Abbiamo, per il tensore della metrica, l'espressione*

$$(39.27) \quad g = dt \otimes dt + \sum_{i=1}^m \phi^i \otimes \phi^i.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché σ_U è un riferimento ortonormale, abbiamo

$$g = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}^i \otimes \bar{\theta}^i.$$

Da questa risulta

$$g = dt \otimes dt + \sum_{i=1}^m \phi^i \otimes \phi^i + \sum_{i,j=1}^m x^i (\phi^i \otimes dt + dt \otimes \phi^i).$$

Dobbiamo verificare che l'ultima sommatoria a secondo membro è nulla. Poiché $\phi^i = 0$ in p_0 , basterà dimostrare che la forma $\sum_{i=1}^m x^i \phi^i$ è indipendente da t . Abbiamo

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{i=1}^m x^i \phi^i\right) &= -\sum_{i=1}^m x^i d\phi^i \\ &= \sum_{i=1}^m x^i (dx^i + \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i x^j) \wedge dt + \dots, \end{aligned}$$

dove al solito i puntini indicano una forma indipendente da dt . Abbiamo $\sum_{i,j} \bar{\omega}_j^i x^i x^j = 0$ perché la matrice $\bar{\omega}_j^i$ è antisimmetrica. Poi, da $\sum_{j=1}^m |x^j|^2 = 1$ abbiamo $\sum_{j=1}^m x^j dx^j = 0$. Quindi il differenziale della forma $\eta = \sum_{i=1}^m x^i \phi^i$ è indipendente da dt e, dal momento che η non contiene dt , ciò significa che la forma è costante rispetto a t . Questo completa la dimostrazione. \square

39.3. Forme e simboli di Christoffel

Supponiamo fissata su M una connessione lineare Γ , con forma di Cartan ω .

39.3.1. Forme di Christoffel. Ad un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ di $L(M)$ sono associate le *forme di Christoffel*²

$$(39.28) \quad \omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega \in \Omega^2(U_\alpha, \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$$

PROPOSIZIONE 39.3.1. *Abbiamo:*

$$(39.29) \quad \nabla_X Y = \sigma_\alpha(X(\sigma_\alpha^{-1} Y) + \omega_\alpha(X)(\sigma_\alpha^{-1} Y)) \quad \text{su } U_\alpha, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

²Vedi il ??? del Capitolo ??

39.3.2. Espressioni dei simboli di Christoffel in coordinate locali. Ad una carta locale (U, x) di M , con $x = (x^1, \dots, x^m)$, associamo il sistema di riferimento $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m)$.

La corrispondente trivializzazione locale di $L(M)$ su U fa corrispondere ad un riferimento $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ la matrice $(x_j^i) \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ per cui

$$X_j = \sum_{i=1}^m x_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Indichiamo con (X^i) l'inversa della matrice (x_j^i) . Abbiamo cioè

$$\sum_{h=1}^m x_h^i X_h^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Siano e_1, \dots, e_m i vettori della base canonica di \mathbb{R}^m .

LEMMA 39.3.2. *La forma canonica $\theta \in \Omega^1(L(M), \mathbb{R}^m)$ si esprime nelle coordinate locali mediante*

$$(39.30) \quad \theta = \sum \theta^i e_i, \quad \text{con} \quad \theta^i = \sum_{j=1}^m X_j^i dx^j. \quad \square$$

Indichiamo con E_j^i la base canonica di $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$. La E_j^i è la matrice il cui unico coefficiente diverso da 0, ed uguale ad 1, è quello della i -esima riga e j -esima colonna.

La forma di Cartan della connessione lineare Γ si scrive nella forma

$$(39.31) \quad \omega = \sum_{i,j=1}^m \omega_j^i E_i^j, \quad \text{con} \quad \omega_j^i \in \Omega^1(\mathbb{L}_U).$$

Consideriamo $\sigma_U = (\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m)$ come una sezione di $\Gamma(U, L(M))$, e consideriamo la relativa forma di Christoffel $\omega_U = \sigma_U^* \omega \in \Omega(U, \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$. Essa definisce m^3 funzioni $\Gamma_{j,k}^i$ su U , tali che

$$(39.32) \quad \omega_U = \sum_{i,k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \Gamma_{j,k}^i dx^j \right) E_i^k.$$

DEFINIZIONE 39.3.3. Le funzioni $\Gamma_{j,k}^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ si dicono le *componenti dei simboli di Christoffel* di Γ nella carta locale x^1, \dots, x^m .

Le equazioni di gauge danno per i simboli di Christoffel

PROPOSIZIONE 39.3.4. *Se $\bar{\Gamma}_{\beta,\gamma}^\alpha$ sono i simboli di Christoffel di Γ in un'altra carta locale y^1, \dots, y^m su U , abbiamo*

$$(39.33) \quad \bar{\Gamma}_{\beta,\gamma}^\alpha = \sum_{i,j,k=1}^m \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^\beta \partial y^\gamma} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}. \quad \square$$

La forma di Cartan della connessione Γ si esprime anch'essa per mezzo dei simboli di Christoffel. Abbiamo infatti

PROPOSIZIONE 39.3.5. *La forma di Cartan della connessione Γ si esprime, nelle coordinate locali (x^i, x^j) , mediante*

$$(39.34) \quad \omega = \sum_{i,j=1}^m \omega_j^i E_i^j, \quad \text{con} \quad \omega_j^i = \sum_{k=1}^m X_k^i (dx_j^k + \sum_{h,\ell} \Gamma_{h,\ell}^k x_j^\ell dx^h). \quad \square$$

La derivazione covariante si esprime per mezzo dei simboli di Christoffel:

PROPOSIZIONE 39.3.6. *Indicando con ∇_i la derivata covariante rispetto al campo di vettori $\partial/\partial x^i$, abbiamo*

$$(39.35) \quad \nabla_i \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \forall i, j = 1, \dots, m. \quad \square$$

DEFINIZIONE 39.3.7. Definiamo le componenti $T_{j,h}^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ della torsione ed $R_{j,h,k}^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ della curvatura di Γ rispetto alle coordinate locali x^1, \dots, x^m mediante

$$(39.36) \quad T\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^h}\right) = \sum_{i=1}^m T_{j,h}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$(39.37) \quad R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^h}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{i=1}^m R_{j,h,k}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

PROPOSIZIONE 39.3.8. *Le componenti della torsione e della curvatura di Γ si esprimono, per mezzo dei simboli di Christoffel in una carta locale x^1, \dots, x^m in $U \subset M$, mediante le formule*

$$(39.38) \quad T_{j,h}^i = \Gamma_{j,h}^i - \Gamma_{h,j}^i,$$

$$(39.39) \quad R_{j,h,k}^i = \frac{\partial \Gamma_{h,k}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial x^h} + \sum_{\ell=1}^m (\Gamma_{j,\ell}^i \Gamma_{h,k}^\ell - \Gamma_{h,\ell}^i \Gamma_{j,k}^\ell).$$

39.3.3. Espressioni rispetto a sistemi di riferimento arbitrari. Un sistema di riferimento (X_1, \dots, X_m) su un aperto U di M determina funzioni $\Gamma_{j,h}^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tali che

$$(39.40) \quad \nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k X_k \quad \text{per } i, j = 1, \dots, m.$$

DEFINIZIONE 39.3.9. I coefficienti $\Gamma_{i,j}^k$ definiti dalla (39.40) si dicono i *simboli di Christoffel* di ∇ nel sistema di riferimento (X_1, \dots, X_m) .

Ogni campo di vettori $Y \in \mathfrak{X}(U)$ è combinazione lineare a coefficienti in $\mathcal{C}^\infty(U)$ dei campi del sistema di riferimento:

$$Y = \sum_{i=1}^m \phi^i X_i.$$

Le sue derivare covarianti rispetto ai campi di riferimento X_1, \dots, X_m sono allora:

$$(39.41) \quad \nabla_{X_i} Y = \sum_{k=1}^m \left(X_i(\phi^k) + \sum_{j=1}^m \Gamma_{i,j}^k \phi^j \right) X_k.$$

Siano $\bar{\Gamma}_{i,j}^k \in \mathcal{C}^\infty(U)$ i simboli di Christoffel di Γ in un altro riferimento (Y_1, \dots, Y_m) su U . È $Y_i = \sum_{j=1}^m a_i^j X_j$, con $(a_i^j) \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}))$. Indichiamo con (A_i^j) l'inversa della matrice (a_i^j) .

Vale allora la formula di trasformazione per i simboli di Christoffel:

$$(39.42) \quad \bar{\Gamma}_{i,j}^k = \sum_{r,s,t=1}^m \Gamma_{r,s}^t a_i^r a_j^s A_t^k + \sum_{t=1}^m A_t^k Y_i(a_j^t) \quad \text{per } i, j, k = 1, \dots, m.$$

Se $X_i = \partial/\partial x^i$ e $Y_i = \partial/\partial y^i$ questa formula si riduce alla (39.33); infatti le matrici (a_j^i) ed (A_j^i) sono in questo caso gli Jacobiani dei cambiamenti di coordinate.

Un diffeomorfismo $\Phi : M \rightarrow M$ definisce un isomorfismo $\Phi_* : \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow X^\Phi \in \mathfrak{X}(M)$ che fa corrispondere ad un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ il campo di vettori

$$X^\Phi(p) = d\Phi_{\Phi^{-1}(p)}(X_{\Phi^{-1}(p)}) \quad \text{per ogni } p \in M.$$

Il pullback di Γ mediante Φ è una nuova connessione lineare Γ^Φ su M . La corrispondente derivazione covariante ∇^Φ è definita da

$$(39.43) \quad \nabla_X^\Phi Y = \left(\nabla_{X^\Phi} Y^\Phi \right)^{\Phi^{-1}} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

PROPOSIZIONE 39.3.10. *Un diffeomorfismo $\Phi : M \rightarrow M$ è una trasformazione affine per la connessione ∇ se $\nabla^\Phi = \nabla$.*

Indice analitico

- F*-fibrato, 71
- G**-applicazione, 57
- G**-insieme, 57
- ★-algebra, 177
- k*-connesso, 374
- algebra
 - coniugio, 177
 - normata, 174
- algebra di Albert, 190
- algebra di Jordan, 189
 - formalmente reale, 189
- applicazione cellulare, 417, 627
- associato di Serre di un fibrato, 44
- atlante di trivializzazione (di un fibrato di Steenrod), 73
- attaccamento, 416, 626
- automorfismo
 - isotopico, 116
- azione aggiunta, 57
- azione canonica a sinistra, 57
- azione canonica a destra, 57
- azione di gruppo, 55
- azione fedele, 56
- base, 31
- cella, 407, 617
- celle di Schubert, 409, 619
- centralizzatore, 63
- chiralità, 155
- cofibrato, 26
- commutante, 163
- complesso, 45
- complesso di de Rham, 243
 - bordo, 243
 - ciclo, 243
 - gruppo di coomologia, 243
- complesso differenziale, 245
 - gruppo di coomologia, 245
- condizione di Serre forte, 42
- cono topologico, 16
- contrattile, 371
- CW-complesso, 410, 620
- derivata di Darboux, 483
 - integrale, 483
 - mappa dei periodi, 483
 - primitiva, 483
- derivata di Lie di un tensore, 226
- derivazione, 145
- derivazione interna, 145
- differenziale di una forma, 224
- dimensione, 112
- dimensione di uno spazio cellulare, 412, 622
- effettiva, 56
- effettiva., 56
- equivalenza di azioni, 57
- equivariante, 57
- fattori di spin, 190
- fedele, 56
- fibra, 31
- fibrati vettoriali
 - equivalenza stabile, 121
- fibrato, 31
- fibrato **G**-principale, 70
- fibrato di Steenrod, 73
- fibrato principale, 72
- forma di Maurer-Cartan, 480
- funzione caratteristica di una cella, 407, 617
- giunto di spazi topologici, 80
- giunto topologico, 17, 80
- gruppo moltiplicativo, 147
- gruppo separato, 62
- gruppo strutturale, 72
- indebolimento cellulare, 411, 621
- invariante, 57
- inversa omotopica, 370

- isomorfismo di gruppi topologici, 65
- K-teoria
 - gruppo, 121
 - gruppo ridotto, 121
- limite induttivo, 123
- moltiplicazione ortogonale, 128
- moltiplicazione ortogonale
 - equivalente, 129
 - normalizzata, 129
- morfismo di fibrati, 31
- norma compatibile, 177
- normalizzatore, 63
- nucleo d'infedeltà, 56
- omomorfismi distinti, 71
- omologia, 660
 - gruppo dei coefficienti, 661
- omomorfismo associato all'azione, 56
- omomorfismo di gruppi topologici, 65
- omotopia, 369
 - proprietà dell'estensione, 24, 25
- omotopia legata, 372
- omotopia libera, 370
- orbita, 56
- primitiva (azione), 56
- prodotto esterno
 - di forme a valori in g , 479
- proiezione nella base, 31
- propext1, 29
- rango, 190
- rappresentazione
 - tipo complesso, 163
 - tipo quaternionico, 163
 - tipo reale, 163
- retrato di deformazione, 372
- rivestimento, 40
- rivestimento generalizzato, 40
- semplicemente transitiva, 56
- sezione
 - sollevamento, 106
- sezione di un fibrato, 31
- simmetria ortogonale, 144
- simplettico
 - spazio vettoriale complesso, 101
- sollevamento, 38
- sospensione, 17
- sottofibrato, 31
- sottospazio
 - isotropo, 100, 101
 - lagrangiano, 100, 101
- spazio
 - simplettico, 100
- spazio cellulare, 410, 620
- spazio cellulare localmente finito, 413, 623
- spazio delle orbite, 56
- spazio puntato
 - non degenerare, 660
- spazio totale, 31
- spinori, 155
- stabilizzatore, 58
- successione esatta, 45
- transitiva, 56
- trivializzabile, 33
- varietà di Grassmann, 90
- varietà di Stiefel
 - reale, 87

Bibliografia

1. Armand Borel, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, 1991.
2. Raoul Bott, *The periodicity theorem for the classical groups and some of its applications*, Advances in Mathematics **4** (1970), no. 3, 353 – 411.
3. Claude Chevalley, *Theory of spinors and clifford algebras*, Collected Works, vol. 2, Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1997.
4. Manfredo Perdigao do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Boston, MA, USA, 1992.
5. V.V. Fedorchuk, *The fundamentals of dimension theory*, General Topology I (A.V. Arkhangel'skii and L.S. Pontryagin, eds.), Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 17, Springer-Verlag, Berlin, 1990, pp. 91–202.
6. Bruno Harris, *On the homotopy groups of the classical groups*, Annals of Mathematics **74** (1961), no. 2, 407–413.
7. P.J. Hilton and U. Stammbach, *A course in homological algebra*, Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1971.
8. J.E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1975.
9. Hideki Imanishi, *Unstable homotopy groups of classical groups (odd primary components)*, J. Math. Kyoto Univ. **7** (1967), no. 3, 221–243.
10. Max Karoubi, *K-theory. An introduction*, Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1978.
11. Corinne A. Manogue and Tevian Dray, *The geometry of the octonions*, World Scientific, Hackensack, NJ, USA, 2015.
12. Corinne A. Manogue and Jörg Schray, *Finite Lorentz transformations, automorphisms, and division algebras*, Journal of Mathematical Physics **34** (1993), no. 8, 3746–3767.
13. J.P. May, *A concise course in algebraic topology*, Chicago lectures in Mathematics, The University of Chicago press, Chicago, IL, USA, 1999.
14. John Milnor, *Construction of universal bundles, I*, Annals of Mathematics **63** (1956), no. 2, 272–284.
15. ———, *Construction of universal bundles, II*, Annals of Mathematics **63** (1956), no. 3, 430–436.
16. Daniel Quillen, *The adams conjecture*, Topology **10** (1971), no. 1, 67 – 80.
17. Norman Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1965.