GEOMETRIA 4
PROVE D'ESAME

1. (09/06/2008)

Esercizio 1.1. Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico connesso e sia $\mathbf{H}$ un suo sottogruppo normale discreto. Si dimostri che $\mathbf{H}$ è contenuto nel centro di $\mathbf{G}$.

SOLUZIONE. Per ogni $h \in \mathbf{H}$, l'applicazione $f_h : \mathbf{G} \ni g \to \mathrm{ad}(g)(h) = ghg^{-1} \in \mathbf{G}$ è un'applicazione continua a valori in $\mathbf{H}$. Poiché $\mathbf{G}$ è connesso, l'immagine è connessa. Poiché $\mathbf{H}$ è discreto, è un sottospazio totalmente disconnesso di $\mathbf{G}$. Quindi l'immagine $f_h(\mathbf{G})$ è un punto. Poiché $f_h(\mathbf{G}) \supset \{h = f_h(e)\}$, risulta allora $ghg^{-1} = h$, cioè $gh = hg$ per ogni $h \in \mathbf{H}$ e questo dimostra che $\mathbf{H}$ è contenuto nel centro di $\mathbf{G}$.

Esercizio 1.2. Sia X il sottoinsieme del piano proiettivo complesso $\mathbb{CP}^2$ definito, nelle coordinate omogenee z_0, z_1, z_2, dall'equazione

$$z_2^4 + z_0 z_1^3 + z_0^4 = 0.$$

Si verifichi che X è una sottovarietà differenziabile connessa e compatta di dimensione reale due di $\mathbb{CP}^2$. Sia x_0 il punto di coordinate omogenee $(0,1,0)$. Si calcolino, per ogni intero positivo h, i gruppi di omotopia $\pi_h(X)$.

SOLUZIONE. X è compatto perché è un sottospazio chiuso dello spazio compatto di Hausdorff $\mathbb{CP}^1$. Il sottoinsieme X è contenuto nell'unione dei due aperti coordinati $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ ed $U_1 = \{z_1 \neq 0\}$. Nelle coordinate $y = (z_2/z_0)$, $x = (z_1/z_0)$ di U_0, la X ha equazione

$$F(x,y) = y^4 + x^3 + 1 = 0.$$

Poiché $(x,y) \neq (0,0)$ nei punti di $X \cap U_0$, il differenziale di $dF(x,y) = 4y^3dy + 3x^2dx : \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ è surgettivo in tutti i punti in cui $F(x,y) = 0$.

Nelle coordinate $v = (z_2/z_1)$, $u = (z_0/z_1)$ di U_1, la X è definita dall'equazione

$$G(u,v) = v^4 + u + u^4 = 0.$$

Abbiamo $X \backslash U_0 = \{(0,1,0)\}$, che corrisponde al punto $(0,0)$ delle coordinate in U_1. Il differenziale $dG(0,0) = du : \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ è surgettivo. Ne segue che la X è una sottovarietà differenziabile di dimensione due di $\mathbb{CP}^2$.

Consideriamo la proiezione $p : X \ni (z_0, z_1, z_2) \to (z_0, z_1) \in \mathbb{CP}^1$. Su $X \cap U_0$, la X è il grafico della funzione algebrica $y = \sqrt[4]{-x^3 - 1}$. La restrizione della proiezione $p : X \to \mathbb{CP}^1$ a $X \setminus U_0$ è quindi un rivestimento a quattro fogli al di fuori dei punti di diramazione, che sono le tre radici complesse di -1 (cioè i punti $\exp\left(i\frac{\pi+2h\pi}{3}\right)$, per $h = 0,1,2$). La controimmagine di ciascuno dei tre punti di diramazione è un unico punto di X.

Vicino al punto all'infinito, cioè al punto $(0,1,0)$, nelle coordinate di U_1 è $v = \sqrt[4]{u + u^3}$, ed a questo punto corrisponde un solo punto di X. Consideriamo su $\mathbb{CP}^1$ la partizione cellulare data da:

quattro celle di dimensione 0: $A_1 = \{(1, -1)\}$, $A_2 = \{(1, \exp(i\pi/3)\}$, $A_3 = \{(1, \exp(2i\pi/3)\}$, $A_4 = \{(0, 1)\}$;
tre celle di dimensione 1: $B_1 = \{(1, -t + 1 + t \exp i\pi/3) \mid 0 < t < 1\}$, $B_2 = \{(1, -t + 1 + t \exp i2\pi/3) \mid 0 < t < 1\}$, $B_3 = \{(1, -t) \mid t > 1\}$;
una cella di dimensione 2: $C = \mathbb{CP}^1 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3)$.

Mediante la proiezione p rialziamo questa partizione cellulare ad una partizione cellulare di X con:

4 celle di dimensione 0,
12 celle di dimensione 1,
4 celle di dimensione 2.

La X è connessa perché le chiusure delle quattro celle di dimensione due sono connessi che contengono tutti il punto $(0, 1, 0)$. La X è quindi una superficie differenziabile connessa ed orientabile di genere $g(X)$ con

$$2 - 2g(X) = 4 - 12 + 4 = -4, \quad \text{cioè} \quad g(X) = 3.$$

Quindi X è omeomorfa alla sfera con tre manici. Ha perciò rivestimento universale omeomorfo a $\mathbb{R}^2$ e dunque $\pi_h(X, (0, 1, 0)) = 0$ per ogni intero $h > 1$, mentre $\pi_1(X, (0, 1, 0))$ è il quoziente del gruppo gruppo libero con 6 generatori $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$, rispetto alla relazione

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} a_3 b_3 a_3^{-1} b_3^{-1} = 1.$$

Esercizio 1.3. Consideriamo su $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la relazione

$$z \sim w \iff (z - w)(z\bar{w} + 1) = 0.$$

Si verifichi che $\sim$ è una relazione d'equivalenza su X. Si consideri il quoziente $Y = X/_\sim$. Si verifichi che è possibile definire una struttura di varietà differenziabile su Y che renda la proiezione nel quoziente $p : X \to Y$ un diffeomorfismo locale. La varietà Y così ottenuta è orientabile? Si calcoli $\pi_h(Y, p(1))$ per ogni intero non negativo h.

Soluzione. L'applicazione $\sigma : X \ni z \to -1/\bar{z} \in X$ è un'involuzione di X priva di punti fissi. Ne segue che $\sim$ è la relazione d'equivalenza definita dall'azione propriamente discontinua su X del gruppo $\{\mathrm{id}_X, \sigma\} \simeq \mathbb{Z}_2$. In particolare $p : X \to Y$ è un rivestimento a due fogli e vi è su Y un'unica struttura di varietà differenziabile di dimensione reale due che rende la p un diffeomorfismo locale. Scriviamo l'applicazione σ nelle coordinate reali $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Abbiamo $\sigma(x + iy) = -\dfrac{x + iy}{x^2 + y^2}$. Quindi lo Jacobiamo della σ è dato da:

$$\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

ed ha in tutti i punti determinante negativo. Ne segue che la varietà Y non è orientabile.

L'applicazione

$$F : X \times I \ni (z, t) \to z \cdot |z|^{-t} \in X$$

è una retrazione di deformazione di X sulla circonferenza S^1. Poiché

$$F(\sigma(z), t) = \sigma(F(z, t)) \quad \text{per ogni} \quad (z, t) \in X \times I,$$

la F per passaggio al quoziente definisce una retrazione di deformazione di Y sull'immagine di $p(S^1)$ in Y della circonferenza. Poiché il rivestimento a due fogli della circonferenza è ancora la circonferenza, $p(S^1)$ è omeomorfo ad S^1. Quindi $\pi_h(Y, p(1)) \simeq \pi_h(S^1, 1)$ per ogni intero non negativo h e quindi

$$\pi_h(Y, p(1)) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad h \neq 1, \\ \mathbb{Z} & \text{se} \quad h = 1. \end{cases}$$

Altra soluzione. L'applicazione $\sigma : X \ni z \to -1/\bar{z} \in X$ è un'involuzione di X priva di punti fissi. Essa si estende in modo unico a un'involuzione di $\mathbb{CP}^1$ facendo corrispondere tra loro il punto 0 e il punto ∞. Si riconosce che la σ è allora la mappa antipodale della sfera S^2. Il quoziente di S^2 rispetto all'azione di σ è allora il piano proiettivo reale $\mathbb{RP}^2$ ed Y è omeomorfa ad $\mathbb{RP}^2$ meno un punto, cioè a un nastro di Moebius.

2. (02/07/2008)

Esercizio 2.1. Sia X il sottospazio dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$ che si ottiene come unione

$$\begin{aligned} X &= S^2 \cup \ell_y \cup \ell_x \cup \kappa_{x,y}, \quad \text{ove} \\ S^2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \\ \ell_y &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, \ z = 0\}, \\ \ell_z &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, \ y = 0\}, \\ \kappa_{x,y} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0, \ z = 0\}. \end{aligned}$$

Si dimostri che X è connesso ed omotopicamente equivalente ad un complesso cellulare finito Y. Si scelga un punto base e si calcoli il gruppo fondamentale di X.

Soluzione. Ciascuno degli insiemi S^2, ℓ_y. ℓ_z, $\kappa_{x,y}$ è connesso per archi. Inoltre

$$S^2 \cap \ell_y = \{(0, \pm 1, 0\} \neq \emptyset, \quad S^2 \cap \ell_z = \{(0,0,\pm 1\} \neq \emptyset, \quad S^2 \cap \kappa_{x,y} = \{(1,0,0)\} \neq \emptyset.$$

Quindi X è connesso per archi, perché unione di connessi per archi che intersecano tutti uno stesso connesso assegnato. L'applicazione $F : X \times I \to X$, definita da

$$F(x,y,z;t) = \begin{cases} (x, (1-t)y + t, z) & \text{se } y > 1, \\ (x, (1-t)y - t, z) & \text{se } y < -1, \\ (x, y, (1-t)z + 1) & \text{se } z > 1, \\ (x, y, (1-t)z - 1) & \text{se } z < -1, \\ (x, y, z) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una retrazione di deformazione di X su

$$Y = S^2 \cup \{(0,y,0) \mid -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(0,0,z) \mid -1 \leq z \leq 1\} \cup \kappa_{x,y}.$$

Lo spazio Y è compatto ed è un complesso cellulare, essendo il bouquet del sottospazio Y_1 e della circonferenza $\kappa_{x,y}$, ove

$$Y_1 = S^2 \cup \{(0,y,0) \mid -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(0,0,z) \mid -1 \leq z \leq 1\}.$$

Per Y_1 abbiamo una partizione cellulare che consiste in

(1) due celle di dimensione due $\epsilon_1^2 = S^2 \cap \{x < 0\}$ ed $\epsilon_2^2 = S^2 \cap \{x > 0\}$,
(2) otto celle di dimensione uno

$$\begin{aligned}
\epsilon_1^1 &= \{(0, y, 0) \mid 0 < y < 1\},\\
\epsilon_2^1 &= \{(0, y, 0) \mid -1 < y < 0\},\\
\epsilon_3^1 &= \{(0, 0, z) \mid 0 < z < 1\},\\
\epsilon_4^1 &= \{(0, 0, z) \mid -1 < z < 0\},\\
\epsilon_5^1 &= \{z = 0, z > 0,\ y > 0\} \cap S^2,\\
\epsilon_6^1 &= \{z = 0, z > 0,\ y < 0\} \cap S^2,\\
\epsilon_7^1 &= \{z = 0, z < 0,\ y > 0\} \cap S^2,\\
\epsilon_8^1 &= \{z = 0, z < 0,\ y < 0\} \cap S^2,
\end{aligned}$$

(3) cinque celle di dimensione zero:

$$\begin{aligned}
e_1^0 &= \{(0, 1, 0)\},\\
e_2^0 &= \{(0, -1, 0)\},\\
e_3^0 &= \{(0, 0, 1)\},\\
e_4^0 &= \{(0, 0, -1)\},\\
e_5^0 &= \{(0, 0, 0)\}.
\end{aligned}$$

Retraendo a un punto la croce $\{(0, y, 0) \mid |y| \leq 1\} \cup \{(0, 0, z) \mid |z| \leq 1\}$, troviamo che lo scheletro uno dimensionale di Y_1 è omeomorfo a un bouquet di quattro circonferenze. Indicano con a_1, a_2, a_3, a_4 le classi di omotopia relative ad un orientamento opportuno delle quattro circonferenze, troviamo che il gruppo fondamentale di Y_1 è il quoziente del gruppo libero con i quattro generatori a_1, a_2, a_3, a_4, rispetto alla relazione di equivalenza $a_1a_2a_3a_4 = 1$, e quindi al gruppo libero con tre generatori. Abbiamo perciò

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

□

Esercizio 2.2. Sia X il sottospazio dello spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^2$ descritto in coordinate omogenee dall'equazione

$$z_0^2 z_1^2 + z_1^2 z_2^2 + z_0^2 z_2^2 = 0.$$

Si consideri l'applicazione

$$f : X \ni (z_0 : z_1 : z_2) \to (z_0^2, z_1^2, z_2^2) \in \mathbb{CP}^2.$$

Si dimostri che $f(X)$ è una varietà differenziabile, diffeomorfa alla sfera S^2. L'applicazione f è differenziabile? In quali punti la

$$(*) \qquad \varpi : X \ni p \to f(p) \in f(X)$$

è una sommersione differenziabile? La $(*)$ è un rivestimento? Si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(X, (1 : 0 : 0))$.

Soluzione. L'applicazione $f : X \to \mathbb{CP}^2$ ha come immagine la conica di $\mathbb{CP}^2$, definita in coordinate omogenee da

$$z_0z_1 + z_0z_2 + z_1z_2 = (z_0 + z_2)(z_1 + z_2) - z_2^2 = 0.$$

L'applicazione

$$\phi : \mathbb{CP}^1 \ni (u : v) \to f(X)$$

definita da

$$\begin{cases} z_0 + z_2 = u^2 \\ z_1 + z_2 = v^2 \\ z_2 = uv \end{cases}, \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} z_0 = u^2 - uv \\ z_1 = v^2 - uv \\ z_2 = uv \end{cases}$$

è un diffeomorfismo di $\mathbb{CP}^1$ su $f(X)$. Infatti, in coordinate locali $t = v/u$ (su $\{u \neq 0\}$) e $x = (z_1 + z_2)/(z_0 + z_2)$, $y = z_2/(z_0 + z_2)$ (su $\{z_0 + z_2 \neq 0\}$):

$$\phi : \mathbb{C} \ni t \to (t^2, t) \in \mathbb{C}^2;$$

per $s = u/v$ (su $\{v \neq 0\}$) e $x' = (z_0 + z_2)/(z_1 + z_2)$, $y = z_2/(z_1 + z_2)$ (su $\{z_1 + z_2 \neq 0\}$):

$$\phi : \mathbb{C} \ni t \to (s^2, s) \in \mathbb{C}^2.$$

L'applicazione $f : X \to f(X)$ è la restrizione ad X dell'applicazione

$$F : \mathbb{CP}^2 \ni (z_0, z_1, z_2) \to (z_0^2, z_1^2, z_2^2) \in \mathbb{CP}^2,$$

che si scrive, utilizzando sia per il dominio che per il codominio l'aperto coordinato $U_j = \{z_j \neq 0\}$, mediante

$$F(x, y) = (x^2, y^2).$$

Essa è una sommersione in tutti e soli i punti di $\{xy \neq 0\}$.

Nelle coordinate di U_j, la X soddisfa l'equazione $x^2 + y^2 + x^2y^2 = 0$. Il differenziale di $h(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y^2$ si annulla per $x = y = 0$ ed è diverso da zero in tutti gli altri punti di $X \cap U_j$. Quindi F è una sommersione su $\{z_0z_1z_2 \neq 0\}$. Ne segue che la $(*)$ è una sommersione nei punti di $X \cap \{z_0z_1z_2 \neq 0\}$. Osserviamo che X non contiene punti in cui una sola coordinata omogenea sia nulla. Quindi la $(*)$ è una sommersione in tutti i punti di X, con l'eccezione dei tre punti $p_0 = (1 : 0 : 0)$, $p_1 = (0 : 1 : 0)$, $p_2 = (0 : 0 : 1)$. La restrizione di ϖ ad $X \setminus \{p_0, p_1, p_2\} \to f(X) \setminus \{p_0, p_1, p_2\}$ è un rivestimento a 4 fogli. La ϖ non è un rivestimento perché i tre punti p_0, p_1, p_2 hanno $\varpi^{-1}(p_j) = \{p_j\}$.

Siano x, y coordinate vicino ad uno dei punti p_j. Su X abbiamo:

$$y = \frac{\pm i\, x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

e quindi nella curva regolare $\tilde{X}$ corrispondente ad X a ciascuno dei punti p_j corrispondono due punti distinti. Il genere g di $\tilde{X}$ si ricava quindi dalla caratteristica di Eulero-Poincaré:

$$\chi(\tilde{X}) = 2 - 2g = 4 - 8 + 6 = 2.$$

Dunque $g = 0$ ed $\tilde{X}$ è diffeomorfa ad una sfera. Quindi X è ottenuto dalla sfera $\tilde{X}$ identificando tra loro i punti di tre coppie distinte. Il suo gruppo fondamentale è allora isomorfo a quello del bouquet di una sfera e di tre circonferenze. Quindi $\pi_1(X, (1 : 0 : 0)) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. $\square$

Esercizio 2.3. Sia $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ l'appicazione esponenziale ed $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Si mostri che

a) X è diagonalizzabile se e solo se lo è $\exp(X)$;

b) se v è un autovettore per X, allora lo è anche per $\exp(X)$;
c) $\exp(X) \in \mathbf{U}(n)$ se e solo se $X \in \mathfrak{u}(n)$.

Soluzione. a) Se X è diagonalizzabile, ed $aXa^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, allora $a(\exp X)a^{-1} = \exp(aXa^{-1}) = \mathrm{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n))$. Quindi $\exp(X)$ è sempre diagonalizzabile quando lo sia X.

Supponiamo ora che $\exp X$ sia diagonalizzabile. Se X non lo fosse, potremmo considerare la sua canonica di Jordan: possiamo cioè fissare una a invertibile tale che $aXa^{-1} = D + N$, con D diagonale, N nilpotente e [D,N]=0. Considerando allora un singolo blocco di Jordan non diagonale ci si accorge che $A(\exp X)A^{-1} = \exp D \exp N$ non è diagonalizzabile, ottenendo una contraddizione.

b) Detto λ l'autovalore associato a v, basta osservare che

$$(\exp X)v = \sum \frac{1}{n!} X^n v = \sum \frac{1}{n!} \lambda^n v = e^{\lambda} v\,.$$

c) Un'implicazione è immediata. Assumiamo allora che $\exp X$ sia in $U(n)$ e pertanto diagonalizzabile rispetto ad una base ortonormale per il prodotto hermitiano canonico. Allora da a) segue che la matrice X è diagonalizzabile e da b) che ha gli stessi autovettori di $\exp X$. Dunque esiste u unitaria e D diagonale tale che $uXu^{-1} = D$. In particolare $\exp D = u \exp X u^{-1}$ è unitaria. Ne consegue che D è immaginaria pura e quindi $X = u^{-1}Du$ risulta essere in $\mathfrak{u}(n)$.

$\square$