ESERCITAZIONE DI GEOMETRIA

La correzione si svolgerà venerdì 21/6 (ore 09:15) invece di martedì 25/6 come preannunciato.

Compito 1

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Si dica se la matrice A è diagonalizzabile. Si trovino, se possibile, due sottospazi vettoriali V_1 e V_2 di $\mathbb{R}^4$, di dimensione due, tali che $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ed $A(V_1) \subset V_1$, $A(V_2) \subset V_2$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2.$$

Essa ha quindi autovalori ± 1, ciascuno con molteplicità algebrica due. Abbiamo

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

e quindi l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica 1.

Abbiamo

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

e quindi l'autovalore -1 ha molteplicità geometrica 1.

Osserviamo che

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è autovettore rel. a } 1, \quad v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è autovettore rel. a } -1.$$

Abbiamo poi

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 & -5 \\ -2 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad (A+I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

I due sottospazi cercati sono i nuclei di $(A-I)^2$ e di $(A+I)^2$ e quindi

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$\square$

Esercizio 2. Si trovino i valori del parametro reale k per cui il sistema lineare

$$\begin{cases} kx + (5-3k)y + (5-2k)z = k, \\ (2k-3)x + (4k-5)y + (3-k)z = 2-k, \\ (k-1)x + (6-5k)y + (10-5k)z = 2 \end{cases}$$

ammette soluzione e si specifichi in quali di questi casi la soluzione non è unica.

Soluzione. La matrice completa associata al sistema è

$$\begin{pmatrix} k & 5-3k & 5-2k & k \\ 2k-3 & 4k-5 & 3-k & 2-k \\ k-1 & 6-5k & 10-5k & 2 \end{pmatrix}$$

Il sistema è equivalente a quelli di matrice completa

$$\begin{pmatrix} k & 5-3k & 5-2k & k \\ 3k-3 & k & 8-3k & 2 \\ k-1 & 6-5k & 10-5k & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} k & 5-3k & 5-2k & k \\ 3k-3 & k & 8-3k & 2 \\ 2(1-k) & 6(1-k) & 2(1-k) & 0 \end{pmatrix}$$

La terza riga dell'ultima matrice è divisibile per $(k-1)$. Quindi la matrice incompleta ha rango minore di tre se $k=1$, ed in questo caso il sistema è equivalente a quello che ha matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché sia la matrice completa che quella incompleta hanno rango due, il sistema assegnato ammette ∞^1 soluzioni per $k=1$.

Se $k \neq 1$, il sistema è equivalente a quello con matrice completa

$$\begin{pmatrix} k & 5-3k & 5-2k & k \\ 3k-3 & k & 8-3k & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3k-5 & 3k-10 & 5-2k & k \\ 6k-11 & 10k-24 & 8-3k & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Il determinante della sua matrice incompleta è

$$12k^2 - 29k + 10$$

e si annulla per $k = 2, \frac{5}{12}$.

Il sistema assegnato ha quindi una ed una sola che ha le radici $1, 2, \frac{5}{12}$.

Per $k = 2, \frac{5}{12}$ le prime due colonne della matrice incompleta B sono proporzionali e linearmente indipendenti dalla terza. Il sistema ha quindi soluzione, quando $k = 2, \frac{5}{12}$, se e soltanto se B ha rango due e questo avviene se e soltanto se si annulla il determinante

$$\begin{vmatrix} 3k-5 & 5-2k & k \\ 6k-11 & 8-3k & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6k^2 - 17k + 10.$$

Esso si annulla per

$$k = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{12} = \frac{17 \pm 7}{12} = \begin{cases} 2 \\ 5/6. \end{cases}$$

Il sistema ammette quindi ∞^1 soluzioni per $k = 2$ e non ammette soluzioni per $k = \frac{5}{12}$.

Riassumendo il sistema ha

$$\begin{aligned} &\text{una ed una sola soluzione se } k \neq 1, 2, \frac{5}{12}, \\ &\infty^1 \text{ soluzioni per } k = 1, 2, \\ &\text{nessuna soluzione per } k = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

□

Esercizio 3. Si determini l'equazione cartesiana della proiezione ortogonale della retta

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t + 3, \\ z = 2t - 7 \end{cases}$$

sul piano

$$\alpha : \quad 2x + 3y - z = 1.$$

Soluzione. La proiezione ortogonale si ottiene intersecando il piano α con il piano perpendicolare ad α e contente la retta r. La direzione della retta r è data dal vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, quella ortogonale ad α da $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Inoltre la retta r contiene il punto $P = (1, 3, -7)$.

L'equazione del piano β ortogonale ad α e contenente la retta r è

$$\beta : \begin{vmatrix} -1 & 2 & x-1 \\ 1 & 3 & y-3 \\ 2 & -1 & z+7 \end{vmatrix} = -7(x-1) - 5(y-3) - 6(z+7) = 0$$

L'equazione cartesiana della proiezione $\alpha \cap \beta$ della retta r sul piano α è allora

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1, \\ 7x + 5y + 6z = -20. \end{cases}$$

$\square$

COMPITO 2

Esercizio 4. Sia V l'insieme delle coppie (p,q) di polinomi reali di grado minore o uguale a due della variabile x. Si verifichi che V è uno spazio vettoriale reale e se ne calcoli la dimensione. Sia A l'applicazione

$$A : V \ni (p(x), q(x)) \longrightarrow (q(x) + xp'(x), q(x) + xp'(x)) \in V,$$

dove p', q' sono le derivate prime dei polinomi reali p, q. Si verifichi che A è lineare e si dica se è diagonalizzabile.

Soluzione. V è uno spazio vettoriale. Infatti somme di coppie di polinomi di grado minore o uguale a due sono ancora coppie di polinomi di grado minore o uguale a due ed il prodotto di una coppia di polinomi di grado minore o uguale a due per uno scalare è ancora una coppia di polinomi di grado minore o uguale a due.

Poiché sia la derivazione che la moltiplicazione per un polinomio sono applicazioni lineari sullo spazio dei polinomi, la A è lineare.

Lo spazio vettoriale V ha dimensione 6. Infatti i vettori

$$e_1 = (1, 0),\ e_2 = (0, 1),\ e_3 = (x, 0),\ e_4 = (0, x),\ e_5 = (x^2, 0),\ e_6 = (0, x^2)$$

ne formano una base. La matrice asscociata ad A in questa base è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è

$$p_A(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

e quindi gli autovalori di A sono 0, con molteplicità algebrica 3 ed $1, 2, 3$, ciascuno con molteplicità algebrica, e quindi anche geometrica, 1. Poiché

$$e_1,\ e_3 - e_4,\ e_5 - 2e_6$$

sono tre vettori linearmente indipendenti appartenenti al nucleo di A, anche la molteplicità geometrica di 0 è tre e quindi la A è diagonalizzabile. $\square$

Esercizio 5. Si determinino le coordinate di un punto P dello spazio $\mathbb{R}^3$ che sia punto medio di tre segmenti con estremi sulle rette

$$r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t+1, \\ z = t+2, \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = t-1 \\ y = 1-t, \\ z = t+4, \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} x = t+5 \\ y = t-3, \\ z = 1-t. \end{cases}$$

Soluzione. Indichiamo con v_i la velocità lungo la retta r_i e con P_i un punto della retta r_i. Abbiamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \; P_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Indichiamo con $\alpha_{i,j}$ il piano parallelo alle rette r_i ed r_j che taglia a metà tutti i segmenti con un estremo su r_i ed r_j. È il piano perpendicolare al vettore $v_i \times v_j$ e passante per il punto $\frac{1}{2}P_i + \frac{1}{2}P_j$. Otteniamo quindi

$$\begin{cases} \alpha_{12} : \quad 2x - 2z = -7, \\ \alpha_{1,3} : \quad 2x - 2y = 7, \\ \alpha_{2,3} : \quad 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

Il punto cercato è in $\alpha_{1,2} \cap \alpha_{1,3} \cap \alpha_{2,3}$, cioè la soluzione del sistema. Abbiamo

$$\begin{cases} 2z = 2x + 7, \\ 2y = 2x - 7, \\ 4x = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{3}{4}, \\ y = -\frac{11}{4}, \\ z = \frac{17}{4}. \end{cases}$$

Il punto P cercato è quindi univocamente determinato ed ha coordinate $(\frac{3}{4}, \frac{11}{4}, \frac{17}{4})$. $\square$

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale rele di dimensione quattro e v_1, v_2, v_3, v_4 una sua base. Per quali valori del parametro reale k i vettori

$$v_1 + kv_2 + v_3 + v_4, \; v_1 + v_2 + kv_3 - v_4, \; kv_4 - v_1 - v_2 - v_3, \; kv_1 + v_2 + v_3 + v_4,$$

sono ancora una base? Indichiamo con W_k il sottospazio vettoriale da essi generato. Se ne calcoli la dimensione al variare di k.

Soluzione. I valori di k per cui i vettori assegnati sono ancora una base sono quelli per cui la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & -1 & 1 \\ 1 & -1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero ed il rango di questa matrice è la dimensione di W_k. Il determinante della matrice A_k è

$$\det(A_k) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & k-1 \\ k-1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & k-1 & -1 & 0 \\ k+1 & k-1 & k & k+1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ k+1 & k-1 & k+1 \end{vmatrix}$$

$$- (k-1) \begin{vmatrix} k-1 & 0 & -1 \\ 0 & k-1 & -1 \\ k+1 & k-1 & k \end{vmatrix}$$

$$= -(k-1)^2(k+1) - \big\{(k-1)^3(k+1) - (k-1)^2(k+1)\big\}$$

$$= -(k-1)^2(k+1)\{1 + (k-1) + 1\} = -(k+1)^2(k-1)^2.$$

I quattro vettori sono quindi linearmente indipendenti e formano una base se $k \neq \pm 1$. Abbiamo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le prime tre righe sono uguali e non proporzionali alla quarta. Quindi la matrice A_1 e la dimensione di W_1 sono uguali a due.

Abbiamo poi

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le prime due righe sono l'una l'opposta dell'altra e la terza e quarta sono uguali e non proporzinali alla prima. La A_{-1} ha perciò rango 2, e il sottospazio vettoriale W_{-1} dimensione due. □

Compito 3

Esercizio 7. Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 3×3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che l'insieme W delle matrici X di V tali che

$$XA = AX$$

è un sottospazio vettoriale di V e se ne calcoli la dimensione. Si consideri l'applicazione lineare $T : V \to V$ definita da

$$T(X) = AX - XA$$

e se ne calcolino gli autovalori e le loro molteplicità algebrica e geometrica. La T è diagonalizzabile?

Soluzione. Poiché il prodotto righe per colonne di matrici è un'operazione lineare e la somma di applicazioni lineari è ancora un'applicazione lineare, la T è un'applicazione lineare. Il sottospazio W è lineare perché uguale al nucleo dell'applicazione lineare T. Abbiamo

$$T(X) = T\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_{13} & 0 & 0 \\ -x_{23} & 0 & 0 \\ x_{11} - x_{33} & x_{12} & x_{13} \end{pmatrix}$$

Quindi il nucleo di T è costituito dalle matrici con $x_{12} = 0$, $x_{13} = 0$, $x_{23} = 0$, $x_{11} = x_{33}$ ed è quindi un sottospazio di dimensione $9 - 4 = 5$. È poi

$$T^2(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2x_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3(X) = 0.$$

Quindi T è nilpotente, con molteplicità algebrica 9 e molteplicità geometrica 5. Non è perciò diagonalizzabile.

Parte non richiesta: decomposizione di Jordan.

Osserviamo che $\ker T^2$ ha dimensione 8 e $\ker T^3$ ha dimensione 9. Indicando con n_1, n_2, n_3 il numero di blocchi di Jordan di dimensione $1, 2, 3$ rispettivamente abbiamo allora

$$\begin{cases} d_1 + d_2 + d_3 = 5, \\ d_1 + 2d_2 + 2d_3 = 8, \\ d_1 + 2d_2 + 3d_3 = 9. \end{cases} \implies \begin{cases} d_3 = 1, \\ d_2 = 2, \\ d_1 = 2 \end{cases}$$

Quindi una forma di Jordan di T è

$$\begin{pmatrix} 0 &&&&&&&& \\ & 0 &&&&&&& \\ && 0 & 0 &&&&& \\ && 1 & 0 &&&&& \\ &&&& 0 & 0 &&& \\ &&&& 1 & 0 &&& \\ &&&&&& 0 & 0 & 0 \\ &&&&&& 1 & 0 & 0 \\ &&&&&& 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 8. Per quali valori del parametro reale k le rette

$$r : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2t + 3, \\ z = t \end{cases} \qquad \text{ed} \quad r_k : \begin{cases} x = kt + 1, \\ y = t - 3k, \\ z = 16 - 5t \end{cases}$$

sono incidenti?

Soluzione. Indichiamo con v, v_k e P, P_k le velocità lungo le rette r, r_k e due punti delle rette r, r_k, rispettivamente. Abbiamo

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_k = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ P_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -3k \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Poiché le due rette non sono mai parallele, in quanto

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0,$$

condizione necessaria e sufficiene affinché siano incidenti è che il vettore $\vec{PP_k}$ sia combinazione lineare di v e v_k, cioè che si annulli il determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & k & 0 \\ 2 & 1 & -3k-3 \\ 1 & -5 & 16 \end{vmatrix} = -(3k^2 + 20k + 1).$$

Quindi le due rette sono incidenti quando

$$k = \frac{-10 \pm \sqrt{103}}{3}.$$

□

Esercizio 9. Sia V lo spazio vettoriale che consiste delle coppie (p, q) in cui p è un polinomio reale di grado minore o uguale a due e q un polinomio reale di grado minore o uguale a tre. Si calcoli la dimensione di V. Si verifichi che l'applicazione

$$A : V \ni (p, q) \to (q'(x), (x+1)p(x)) \in V$$

è lineare. Se ne calcolino autovalori ed autovettori e si dica se è diagonalizzabile.

Soluzione. La dimensione di V è la somma delle dimensioni dello spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale di due e di quelli di grado minore o uguale di tre, cioè $3 + 4 = 7$. Poiché la derivazione e il prodotto per polinomi sono operazioni lineari sullo spazio dei polinomi, l'applicazione A è lineare su V. Gli autovalori λ di A sono valori per i quali il sistema di equazioni

$$\begin{cases} q'(x) = \lambda p(x), \\ (x+1)p(x) = \lambda q(x) \end{cases}$$

ammette soluzioni non banali.

Osserviamo che, se $p = 0$, otteniamo la soluzione non banale $(0, 1)$, che è autovettore corrispondente all'autovalore 0.

Per ricavare gli autovettori con $p \neq 0$, deriviamo la seconda equazione. Otteniamo

$$p(x) + (x+1)p'(x) = \lambda q'(x) = \lambda^2 p(x).$$

Ci devono cioè essere soluzioni non banali dell'equazione

$$L(p) = (x+1)p'(x) + (1-\lambda^2)p(x) = 0.$$

Consideriamo lo spazio W dei polinomi reali di grado minore o uguale di due. L è un'applicazione lineare su W che, nella base canonica $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2$, ha matrice

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda^2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Questa è invertibile se $\lambda^2 \neq 1, 2, 3$ ed ha rango due per $\lambda^2 = 1, 2, 3$. I possibili autovalori di A sono quindi $\pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$, cui corrispondono i polinomi $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 + x$, $p_3(x) = (1 + x)^2$.

Allora

$(1, 1+x)$ ed $(1, -(1+x))$ sono autovettori per A, corrispondenti agli autovalori 1 e -1;

$(\sqrt{2}(1 + x), (1 + x)^2)$ e $(\sqrt{2}(1 + x), -(1 + x)^2)$ sono autovettori per A, corrispondenti agli autovalori $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$;

$(\sqrt{3}(1+x)2, (1+x)^3)$ e $(\sqrt{3}(1+x)2, -(1+x)^3)$ sono sono autovettori per A, corrispondenti agli autovalori $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$.

Abbiamo trovato quindi che A ha sette autovalori distinti

$$0, \pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$$

e dunque è diagonalizzabile. $\square$