Corso di Laurea in Scienza dei Materiali

Cognome e nome: ____________________________________

Numero di Matricola: ____________________________

Data: ____________________________

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (ESONERO)

Esercizio 1. Si consideri la quadrica affine d'equazione

$$\mathbf{Q} : x^2 + y^2 - z^2 + 4yz + 2x + 2z + 2 = 0$$

(1) Si verifichi se è o non è degenere.
(2) Se ne determini il tipo.
(3) Si dica se è o no a centro, e in caso affermativo se ne trovi il centro.

Soluzione. Associamo alla quadrica $\mathbf{Q}$ proposta le matrici completa ed incompleta

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det(A) = -5 \neq 0$ ed i termini sulla diagonale hanno segni sia positivi che negativi, la matrice simmetrica A è indefinita e la quadrica è non vuota ed a centro. Abbiamo (sviluppoando il determinante rispetto alla prima colonna)

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -11 + 5 = -6.$$

(1) Poiché $\det(B) \neq 0$, la quadrica $\mathbf{Q}$ è non degenere.

(2)Poiché $\det(B) < 0$, la quadrica proiettiva corrispondente è un elissoide; la matrice A è non degenere ed indefinita, e quindi la quadrica affine $\mathbf{Q}$ è un iperboloide a due falde, o ellittico.

(3) Poiché $\det(A) = -5 \neq 0$, la quadrica Q è a centro. Il suo centro $\left(-1, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ è la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} x+1=0, \\ y+2z=0, \\ 2y-z+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-1 \\ y=-\frac{2}{5}, \\ z=\frac{1}{5}. \end{cases}$$

$\square$

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 5×5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dica se A è invertibile. Nel caso non lo sia, se ne calcoli il rango; nel caso lo sia, se ne calcoli l'inversa.
(2) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(3) Si dica se A è diagonalizzabile.
(4) Si calcolino A^2 ed il suo rango.
(5) Si determini la forma di Jordan di A.

Soluzione. (1) La terza e la quarta colonna di A sono nulle. Quindi A ha determinante zero, non è invertibile ed ha rango minore o uguale di tre. Il minore formato dalle prima, seconda e quarta riga e dalle prima, seconda e quinta colonna è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

e quindi A ha rango tre.
(2) Abbiamo

$$-p_A(x) = \det(A - x\cdot \mathrm{I}_5) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-x & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -x & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -x & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= -x\cdot \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-x & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -x & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = x^2 \cdot \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 1 & -1-x & -1 \\ -1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= x^2(1-x)\{(-x-1)(1-x) - 1\} = x^4(1-x).$$

Quindi

$$p_A(x) = \det(A - \lambda I) = x^4(x-1)$$

e gli autovalori di A sono 0 e 1, con molteplicità algebriche 4 e 1, rispettivamente. Poiché A ha rango 3, l'autovalore 0 ha molteplicità geometrica 2, mentre 1 ha molteplicità geometrica 1.
(3) Poiché l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica e geometrica differenti, la A non è diagonalizzabile.
(4) Abbiamo

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

di rango due.
(5) Poiché A^2 ha rango due, c'è almeno un blocco di Jordan relativo all'autovalore 0 di ordine tre. Ci saranno quindi, per l'autovalore zero, un blocco di ordine uno ed uno di ordine tre. La forma di Jordan è quindi

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & & \\ & \boxed{0} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

$\square$