# PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DELL'25/01/2019
# SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

**Esercizio 1.** Si considerino, nello spazio reale a tre dimensioni, i tre punti $A = (1, -3, 0)$, $B = (3, 1, -2)$, $C = (-1, 5, -2)$.

(1) Si calcoli l'area del triangolo $ABC$.
(2) Si trovino le equazioni parametriche della retta $r$ dei punti equidistanti da $A, B, C$.
(3) Si determini la distanza tra la retta $r$ e la retta $AB$.

*Soluzione.* (1) L'area del triangolo è la metà della norma del prodotto vettore $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. È $\overrightarrow{AB} = (2, 4, -2)^\intercal$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 8, -2)^\intercal$ e quindi

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 24 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

L'area del triangolo è quindi

$$\text{area di } \triangle(ABC) = 4\sqrt{11}.$$

(2) La retta $r$ è l'intersezione del piano perpendicolare ad $\overrightarrow{AB}$ per il punto medio $(2, -1, -1)$ del segmento $AB$ e del piano perpendicolare ad $\overrightarrow{AC}$ per il punto medio $(0, 1, -1)$ del segmento $AC$. Otteniamo così l'equazione cartesiana di $r$ nella forma

$$r : \begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ x - 4y + z = -5. \end{cases}$$

Per trovare l'equazione parametrica, osserviamo che la direzione della retta è data dal vettore $v = (1, -1, 3)^\intercal$, che è proporzionale al prodotto vettore $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Basta quindi utilizzare l'equazione cartesiana per determinare un punto di $r$. Posto ad esempio $y$=0, troviamo $x$= − 2 e $z$= − 3. Le equazioni cercate sono allora

$$\begin{cases} x = t - 2, \\ y = t \\ z = 3t - 3. \end{cases}$$

(3) Le rette $r$ ed $AB$ sono sghembe. Fissato il punto $D = (-2, 0, -3)$ su $r$, possiamo utilizzare la formula

$$\operatorname{dist}(r, AB) = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, v, \overrightarrow{AD})|}{\|\overrightarrow{AB} \times v\|}.$$

È

$$\det(\overrightarrow{AB}, v, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -24.$$

Abbiamo ancora

$$\overrightarrow{AB} \times v = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo perciò

$$\operatorname{dist}(r, AB) = \frac{24}{2\sqrt{56}} = \frac{6}{\sqrt{14}}. \qquad \square$$

**Esercizio 2.** Sia $A$ la matrice reale $5 \times 5$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dica se $A$ è invertibile e, in caso non lo sia, se ne calcoli il rango.
(2) Se ne calcolino gli autovalori e le loro molteplicità algebrica e geometrica.
(3) Si calcoli la forma di Jordan di $A$.

*Soluzione.* (1) La matrice $A$ ha la prima e l'ultima riga uguali e quindi non è invertibile ed ha rango minore di 5. Indicando con "$\sim$" il fatto che due matrici siano simili, abbiamo

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'ultima matrice ha il minore delle prime due righe uguale ad 1 e perciò $A$ ha rango due.
(2) Poiché tutte le colonne della matrice sono combinazione lineare delle prime due, abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = B{\cdot}C.$$

Poiché

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

il polinomio caratteristico di $A$ è $p_A(x) = x^3(x-3)^2$ ed $A$ ha autovalori 0 con molteplicità algebrica tre e 3 con molteplicità algebrica due. Poiché $A$

ha rango due, anche la molteplicità geometrica di 0 è tre. È

$$A - 3 \cdot \mathrm{I}_5 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \mathrm{Id}_4.$$

Quindi la matrice $A - 3 \cdot \mathrm{I}_5$ ha rango quattro e perciò l'autovalore 3 ha molteplicità geometrica uno.
(3) Poiché l'autovalore 3 ha molteplicità geometrica diversa da quella algebrica, la $A$ non è diagonalizzabile ed ha forma di Jordan $A'$ con tre blocchi $1 \times 1$ relativi all'autovalore 0 ed un blocco $2 \times 2$ relativo all'autovalore 3. È quindi (i coefficienti non indicati sono tutti uguali a zero)

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{oppure} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 3 & 0 \\ & & & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

□

**Esercizio 3.** Si consideri la quadrica affine $\mathcal{Q}'$ di equazione

$$2xy + 2xz + yz - 4x - 3y + 8z = 0.$$

(1) Se ne determini il tipo.
(2) Si dica se è a centro, e, nel caso, se ne trovi il centro.

*Soluzione.* (1) Possiamo riscrivere l'equazione della quadrica nella forma

$$4xy + 4xz + 2yz - 8x - 6y + 16z = 0.$$

A questa corrispondono le matrici completa $B$ ed incompleta $A$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \\ -4 & -3 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \\ -4 & -3 & 8 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 10 \\ -4 & -3 & 11 & -6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 10 \\ 4 & -11 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 10 \\ 2 & -11 & 6 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 13 \\ 2 & -13 & 12 \end{vmatrix} = 4 \cdot 125 = 500 > 0.$$

Poiché la matrice $B$ non è definita, perché ha coefficienti nulli sulla diagonale principale, la quadrica proiettiva $\mathcal{Q}$ è una rigata.

È poi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 4 = 8 \neq 0$$

e perciò la $\mathcal{Q}$ interseca il piano all'infinito in una conica non degenere e perciò la conica affine $\mathcal{Q}'$ è un iperboloide a una falda (iperbolico). (2) Poiché $\det(A) \neq 0$, la quadrica $Q'$ è a centro. Le coordinate del centro verificano il sistema

$$\begin{cases} y + z - 2 = 0, \\ 2x + z - 3 = 0, \\ 2x + y + 8 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z - 3 = 0, \\ z + y = 2, \\ z - y = 11, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{4}, \\ y = -\frac{9}{2}, \\ z = \frac{13}{2}. \end{cases}$$

Il centro è quindi il punto $\big(-\frac{7}{4}, -\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\big)$. $\square$