PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DELL'11/01/2019
SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1. Si considerino, nello spazio reale a tre dimensioni, i sei punti $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, -1)$, $C = (1, -2, 2)$, $D = (0, 2, -3)$, $E = (2, -1, 0)$, $F = (3, 0, 3)$.

(1) Si dica se le rette AB e CD sono parallele, incidenti o sghembe.
(2) Si drscriva in forma parametrica, se esiste, una retta r parallela alla retta EF ed incidente con entrambe le rette AB e CD.

Soluzione. (1) La condizione necessaria e sufficiente affinché le due rette siano sghembe è che la matrice dei vettori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}$ abbia determinante diverso da zero. Abbiamo

$$V = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

e questo dimostra che le due rette sono sghembe.

(2) Se il vettore $\overrightarrow{EF}$ è linearmente indipendente da $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ allora la retta r è univocamente determinata come l'intersezione dei piani α e β che hanno $\overrightarrow{EF}$ come vettore tangente e contengono, rispettivamente, la retta AB e CD. È

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Vettori perpendicolari ai piani α e β sono

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Le equazioni cartesiane dei due piani sono quindi:

$$\begin{aligned} \alpha: &\quad 5x - 2y - z = 2, \\ \beta: &\quad 17x - 2y - 5z = 11. \end{aligned}$$

Possiamo ottenere un'equazione parametrica della retta r considerando, ad esempio, x come un parametro. Abbiamo allora

$$r: \quad \begin{cases} x = t, \\ y = t + \frac{1}{8}, \\ z = 3t - \frac{9}{4}. \end{cases}$$

□

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 5×5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dica se A è invertibile e, in caso non lo sia, se ne calcoli il rango.
(2) Se ne calcolino gli autovalori e le loro molteplicità algebrica e geometrica.
(3) Si calcoli la forma di Jordan di A.

Soluzione. □

Calcoliamo il rango di A. Indicando con "$\sim$" il fatto che due matrici abbiano lo stesso rango, abbiamo

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi A ha rango due perché il minore delle prime due righe dell'ultima matrice è $(-1) \neq 0$. In particolare, A non è invertibile.
(2) Utilizzando le due colonne indipendenti (prima e terza) possiamo rappresentare A come prodotto di matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = BC.$$

Calcoliamo il prodotto

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori non nulli di A sono anche autovalori di CB. Il polinomio caratteristico di CB è

$$p_{CB}(x) = x^2 - 5x + 1,$$

che ha radici reali $\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{21})$. Ciascuna di queste due radici reali distinte è un autovalore di A con molteplicità algebrica e geometrica entrambe uguali ad 1.

L'autovalore 0 ha molteplicità algebrica 3, uguale alla sua molteplicità geometrica.

(3) Poiché le molteplicità algebrica e geometrica coincidono, la matrice A è diagonalizzabile e la sua forma di Jordan coincide quindi con la forma

diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5-\sqrt{21}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5+\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Si consideri la quadrica affine $\mathcal{Q}'$ di equazione

$$xy - y^2 + 2z^2 - yz + 2x - 4y + 3 = 0$$

(1) Se ne determini il tipo.
(2) Si dica se è a centro, e, nel caso, se ne trovi il centro.

Soluzione. Possiamo riscrivere l'equazione della quadrica nella forma

$$2xy - 2y^2 + 4z^2 - 2yz + 4x - 8y + 6 = 0.$$

A questa corrispondono le matrici completa B ed incompleta A

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 14 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 14 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 14 \end{vmatrix}$$
$$= -52 < 0.$$

La quadrica proiettiva $\mathcal{Q}$ è perciò ellittica. È poi

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

e quindi l'intersezione di $\mathcal{Q}$ con il piano all'infinito è una conica non degenere.

Ne segue che $\mathcal{Q}'$ è un iperboloide a due falde (ellittico).

La quadrica è poi a centro. Le coordinate del centro verificano il sistema

$$\begin{cases} y + 2 = 0, \\ x - 2y - z - 4 = 0, \\ -y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ z = -\frac{1}{2}, \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Il centro è quindi il punto $\left(-\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}\right)$. □