PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 27/11/2018
SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1. Si considerino, nello spazio reale a tre dimensioni, i quattro punti $A = (0, 1, 2)$, $B = (-1, 1, -1)$, $C = (2, -3, 0)$, $D = (1, 4, -2)$.

(1) Si dica se le rette AB e CD sono parallele, incidenti o sghembe.
(2) Si trovino le equazioni cartesiane di un piano α che contenga AB e sia parallelo a CD e di un piano β che contenga CD e sia parallelo ad AB.
(3) Si calcoli la distanza tra le rette AB e CD o, nel caso in cui fossero incidenti, il loro punto in comune.

Soluzione. (1) La condizione necessaria e sufficiente affinché le due rette siano sghembe è che i vettori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}$ abbia determinante diverso da zero. Abbiamo

$$V = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -4 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 \\ 3 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 52 \neq 0$$

e questo dimostra che le due rette sono sghembe.

(2) La direzione perpendicolare ai due piani si ottiene facendo il prodotto vettore $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$ dei vettori che definiscono le direzioni delle due rette. È

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Imponendo la condizione che α contenga il punto A e β il punto C otteniamo le equazioni cartesiane

$$\alpha: \; 21\,x + y - 7\,z = -13,$$
$$\beta: \; 21\,x + y - 7\,z = 39.$$

(3) La distanza tra le due rette sghembe AB e CD è l'altezza del parallelogrammo di vertici $A, B, A+\overrightarrow{CD}, B+\overrightarrow{CD}, C, D, C+\overrightarrow{AB}, D+\overrightarrow{AB}$ rispetto alla base formata dai primi quattro. Il volume del parallelogrammo è il modulo del determinante V calcolato in (1). L'area della base è il modulo del prodotto vettore di $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$. Poiché

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\| = \sqrt{21^2 + 1^2 + 7^2} = \sqrt{441 + 1 + 49} = \sqrt{491}.$$

Otteniamo perciò

$$\text{dsistanza}(AB, CD) = \frac{52}{\sqrt{491}}.$$

□

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 4×4

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & -3 \\ 22 & 20 & 2 & -3 \\ 17 & 12 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si dica se A è invertibile e, in caso non lo sia, se ne calcoli il rango.

Soluzione. La matrice A è invertibile se e soltanto se ha rango 4. Indicando con "$\sim$" la relazione di avere lo stesso rango, abbiamo

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 36 & 36 & 2 & -9 \\ 52 & 52 & 5 & -13 \\ 12 & 12 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -9 \\ 52 & 0 & 0 & -13 \\ 12 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = B$$

La matrice B ha rango minore o uguale di due perché ha le prime due colonne nulle ed ha rango esattamente due perché il minore delle prime due righe e delle ultime due colonne è $9 \neq 0$. La matrice A ha quindi rango $2 < 4$ e perciò non è invertibile. □

Esercizio 3. Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sia invertibile e, nel caso lo sia, se ne calcoli l'inversa.

Proof. Abbiamo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

e quindi A è invertibile. Utilizziamo il metodo matriciale per la risoluzione di sistemi lineari.

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right|$$

$$\sim \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right|$$

ci dice che

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□