PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 18/09/2018
SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1. Si considerino i quattro punti $A = (1, 0, 2)$, $B = (1, 2, 2)$, $C = (-2, 1, -2)$, $D = (0, -1, 4)$ dello spazio affine $\mathbb{R}^3_{\text{aff}}$.

(1) Si determinino equazioni parametriche per descrivere la retta r che passa per i punti medi dei segmenti AB e CD e la retta s che passa per i punti medi di AC e BD.

(2) Si dica se le rette r ed s sono parallele, incidenti o sghembe e se ne calcoli la distanza dell'una dall'altra e, nel caso in cui fossero incidenti, il loro punto in comune.

(3) Si determini l'equazione cartesiana di un piano per il baricentro di A, B, C, D e parallelo alle rette r ed s.

Soluzione. (1) Le coordinate dei punti medi dei segmenti sono la media delle rispettive coordinate. È perciò M_{AB}=$(1, 1, 2)$, M_{CD}=$(-1, 0, 1)$, M_{AC}=$(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, M_{BD}=$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3)$. Possiamo allora descrivere le due rette con le equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 2 + t, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = \frac{-1}{2} + t, \\ y = \frac{1}{2}, \\ z = 3t. \end{cases}$$

(2) Con $\vec{v}_r$=$(2, 1, 1)$, $\vec{v}_s$=$(1, 0, 3)$, $\vec{w} = M_{AB} - M_{AC} = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2)$. I due vettori $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ sono linearmente indipendenti. Quindi le due rette sono o incidenti o sghembe, a seconda che $\vec{w}$ sia linearmente dipendente o indipendente da essi, cioè a seconda che $\det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w})$ sia uguale o diverso da zero. Abbiamo

$$\det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} - 3 - 2 = 0$$

e quindi le due rette sono incidenti. La distanza tra r ed s è quindi zero. Possiamo determinare il punto d'intersezione risolvendo il sistema lineare (indichiamo con t il parametro su r e con u quello su s)

$$\begin{cases} 1 + 2t = \frac{-1}{2} + u, \\ 1 + t = \frac{1}{2}, \\ 2 + t = 3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1}{2}, \\ u = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = \frac{1}{2}, \\ z = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Le due rette r ed s si intersecano quindi nel punto $(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, che è anche il baricentro dei quattro punti A, B, C, D.

(3) Come abbiamo detto nel punto precedente, il baricentro dei quattro punti A, B, C, D è il punto M le cui coordinare sono la media aritmetica delle coordinare di A, B, C, D e quindi

$$M = (0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}).$$

Un vettore perpendicolare al piano cercato è il prodotto vettore di $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le coordinate dei punti del piano soddisfano allora l'equazione cartesiana

$$3x - 5(y - \tfrac{1}{2}) - (z - \tfrac{3}{2}) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y - z + 4 = 0$$

$\square$

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 5×5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dica se A è invertibile e, in caso non lo sia, se ne calcoli il rango.
(2) Si calcoli il suo polinomio caratteristico.
(3) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche e si dica se A è diagonalizzabile.
(4) Se ne scriva la forma di Jordan.

Soluzione. (1) La quarta colonna della A è il doppio della prima e la seconda e la terza sono uguali; Quindi la A ha determinante zero e non è invertibile.

Calcoliamo il rango. Utilizziamo "$\sim$" per indicare che due matrici hanno lo stesso rango. Abbiamo

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango due perché il minore della prima terza colonna è $1 \neq 0$.

Quindi la matrice A ha rango due.

(2) Per calcolare il polinomio caratteristico, possiamo utilizzare il fatto che A ha rango due. Poiché le prime due colonne di A sono linearmente

indipendenti, possiamo rappresentare A come un prodotto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(la i-esima colonna della seconda matrice sono i coefficienti della combinazione lineare delle prime due colonne che servono per dare l'i-esima). Poiché

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e $p_B(x) = x^2-2x-17 = (x-1-3\sqrt{2})(x-1+3\sqrt{2})$, per il teorema di Sylvester il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(x) = x^3 \cdot (x-1-3\sqrt{2})(x-1+3\sqrt{2}).$$

(3) La molteplicità algebrica dell'autovalore 0 è tre, che coincide con la molteplicità geometrica perché A ha rango due. Ciascuno degli autovalori $1+3\sqrt{2}$ ed $1-3\sqrt{2}$ ha molteplicità algebrica, e quindi anche geometrica 1. Poiché tutti gli autovalori di A sono reali ed hanno la stessa molteplicità algebrica e geometrica, la matrice A è diagonalizzabile.
(4) Poiché A è diagonalizzabile, la sua forma di Jordan coincide con la forma diagonale

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Esercizio 3. Sia Q la quadrica affine di $\mathbb{R}^3_{\text{aff}}$, di equazione

$$x^2 - xy + 2xz + 4yz - 2x + 2y - 6z = 0.$$

(1) Se ne determini il tipo.
(2) Si dica se la quadrica è o no a centro e, se lo è, se ne determini il centro.

soluzione. (1) Le matrici incompleta A e completa B associate alla quadrica sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} &= \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\ = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} &= \frac{3}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\ = \frac{3}{4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= \frac{3}{4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ = \frac{9}{4}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} &= \frac{9}{4} > 0, \end{aligned}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1-1-4=-6.$$

Quindi la quadrica è non degenere e, dal momento che la matrice B non è definita ed ha determinante positivo, la quadrica proiettiva è una rigata. Poiché $\det(A)\neq 0$, la conica all'infinito è non degenere e quindi Q è l'iperboloide a una falda, o iperbolico.

(2) Poiché $\det(A)\neq 0$, la quadrica à centro. Il suo centro è la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y + z - 1 = 0, \\ \frac{1}{2}x + 2z + 1 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3-x}{2}, \\ z = -\dfrac{x+2}{4}, \\ x + \dfrac{3-x}{4} - \dfrac{x+2}{4} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = \frac{3}{4}, \\ z = -\frac{7}{8}. \end{cases}$$

Il centro della quadrica è quindi il punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$. $\square$