PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 17/02/2017
SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1. Si consideri, la quadrica affine $\mathcal{Q}'$ d'equazione

$$2x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2yz + 4x + 2y + 1 = 0$$

(1) Se ne determini il tipo.
(2) Si dica se è o no a centro, e in caso affermativo se ne trovi il centro.
(3) Si verifichi che il punto $A = (0, -1, 0)$ appartiene a Q' e si trovi l'equazione dell'iperpiano tangente a Q' in A.

Soluzione. Associamo alla quadrica $\mathcal{Q}$ proposta le matrici completa ed incompleta

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

e ci sono sulla diagonale coefficienti positivi, la matrice simmetrica A è indefinita e la quadrica è non vuota ed a centro. Abbiamo

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

(1) La quadrica proiettiva Q è non vuota e, poiché $\det(B) > 0$, ellittica. Poiché A è indefinita, l'iperpiano all'infinito interseca Q in una quadrica e quindi la quadrica affine Q' è un elissoide ellittico, o a due falde.
(2) Poiché $\det(A) = -5 \neq 0$, la quadrica Q' è a centro. Il suo centro è la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0, \\ x + y + z + 1 = 0, \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

(3) Sostituendo le coordinare $x=0$, $y=-1$, $z=0$ nell'equazione della quadrica otteniamo

$$2 \cdot 0^2 + (-1)^2 - 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot (-1) - 4 \cdot (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 1 = 0$$

e quindi il punto A appartiene a Q'. L'equazione del piano tangente è

$$(0,-1,0,1)\cdot B\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=(1,0,-1,0)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=x-z=0.$$

□

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 6×6

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&0&2&1\\1&1&0&1&2&1\\1&1&1&0&2&1\\1&1&0&1&2&1\\1&1&1&0&2&1\\1&1&0&1&2&1\end{pmatrix}.$$

(1) Si dica se A è invertibile e, in caso non lo sia, se ne calcoli il rango.
(2) Si calcolino il suo polinomio caratteristico.
(3) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(4) Si dica se A è diagonalizzabile.
(5) Se ne scriva la forma di Jordan.

Soluzione. (1) La prima, la seconda e la sesta riga di A sono uguali e quindi A ha determinante zero e non è invertibile. La prima colonna è la somma della terza e della quarta, mentre la quinta è il doppio della prima. La matrice A ha quindi rango minore o uguale a due, ed uguale a due perché il minore delle prime due righe e della terza e quarta colonna è diverso da zero.
(2) Utilizzando la terza e la quarta colonna possiamo scrivere A come un prodotto BC con $B\in\mathbb{R}^{6\times 2}$ e $C\in\mathbb{R}^{2\times 6}$ con

$$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&1&1&0&2&1\\1&1&0&1&2&1\end{pmatrix}$$

Per il teorema di Sylvester, $p_A(x)=x^4{\cdot}p_{CB}(x)$. È

$$CB=\begin{pmatrix}4&2\\3&3\end{pmatrix}\quad\text{e quindi}\quad p_{CB}(x)=(x-4)(x-3)-6=x^2-7x+12.$$

È quindi

$$p_A(x)=x^4(x-3)(x-4).$$

(3) Gli autovalori di A sono quindi 0, con molteplicità algebrica 4, e $3, 4$, ciascuno con molteplicità algebrica e geometrica uno. Poiché A ha rango due, la molteplicità geometrica di 0 è uguale a 4.
(4) Poiché le molteplicità algebriche e geometriche di tutti gli autovalori sono uguali, la matrice A è diagonalizzabile. (5) La sua forma di Jordan coincide con la sua forma diagonale:

$$\text{forma di Jordan di } A = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 4 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 3. Siano dati, nello spazio affine $\mathbb{R}^3$, i punti $A = (4, 2, 1)$, $B = (1, 1, -1)$, ed i piani $\alpha = \{x+y+z = 1\}$ e $\beta = \{2x-y = 6\}$. Siano a la retta per A perpendicolare ad α e b la retta per B perpendicolare a β.

(1) Si scrivano equazioni parametriche per le rette a e b.
(2) Si determini se a e b siano sghembe, parallele o incidenti.
(3) Si determinino i punti A' in cui la retta a interseca α e B' in cui b interseca β.
(4) Si dica se i quattro punti A, B, A', B' sono o no complanari e, nel caso non lo siano, si calcoli il volume del tetraedro di cui sono vertici.

Soluzione. (1) Le direzioni delle rette a e b sono le perpendicolari dei piani α, β. Abbiamo quindi

$$a : \begin{cases} x = 4 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = 1 + t \end{cases} , \quad b : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = -1. \end{cases}$$

(2) Indicando con $\vec{v}_a$ e $\vec{v}_b$ le direzioni delle rette a e b e con $\vec{w} = A-B$ il vettore spostamento $(3, 1, 2)^\intercal$, il fatto che le rette a e b siano parallele, incidenti o sghembe dipende dal rango della matrice $(\vec{v}_a, \vec{v}_b, \vec{w})$. È

$$\det(\vec{v}_a, \vec{v}_b, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

e quindi le due rette sono sghembe.
(3) Sostituendo nell'equazione di α le coordinate dei punti di a scritte in forma parametrica otteniamo

$$(4 + t) + (2 + t) + (1 + t) = 1.$$

È quindi $t = -2$ e dunque $A' = (2, 0, -1)$. Analogamente, da

$$2(1 + 2t) - (1 - t) = 6$$

ricaviamo $t = 1$ e quindi $B' = (3, 0, -1)$.
(4) Per verificare che i quattro punti non siano complanari, occorre verificare che il determinante dei tre vettori spostamento $\overrightarrow{w} = A - B$ $\overrightarrow{w}' = A' - B$, $\overrightarrow{w}'' = A' - B$ sia diverso da zero. In questo caso un sesto del suo valore assoluto è il volume cercato. Abbiamo

$$\det(A - B, A' - B, B' - B) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Quindi A, B, A', B' sono i quattro vertici di un tetraedro di volume $\frac{1}{3}$.

$\square$