CAPITOLO XVII

SPAZI SIMMETRICI

§1 Spazi affini localmente simmetrici

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m, con una connessione affine definita dalla derivazione covariante ∇. Fissiamo un punto p di M ed intorni $V_0(p)$ di 0 in T_pM, ed U_p di p in M tali che l'esponenziale in p sia definito su $V_0(p)$ e sia un diffeomorfismo di $V_0(p)$ su U_p. Ricordiamo che l'esponenziale $\exp_p : V_0(p) \longrightarrow U_p$ è definito da $\exp_p(X) = \phi_{p,X}(1)$, se $\phi_{p,X}(t)$ è la geodetica di punto iniziale p e velocità iniziale $X \in T_pM$. Possiamo supporre che $V_0(p)$ sia simmetrico rispetto all'origine e definire quindi la *simmetria geodetica rispetto al punto* p mediante la corrispondenza:

$$U_p \ni q = \exp_p(X) \xrightarrow{\ s_p\ } q' = \exp_p(-X) \in U_p\,. \tag{1.1}$$

Osserviamo che s_p è un diffeomorfismo di U_p, con $ds_p(p) = -I$ (I è qui l'identità su T_pM) ed $s_p^2 = s_p \circ s_p = \mathrm{id}_{U_p}$.

Diciamo che (M, ∇) è una *varietà affine localmente simmetrica* se per ogni punto p di M esiste un intorno aperto U_p di p in M su cui la simmetria affine sia definita e sia una trasformazione affine.

Ricordiamo brevemente la definizione di trasformazione affine. Consideriamo in primo luogo il concetto di trasporto parallelo. Se (M, ∇) è uno spazio affine ed $\alpha : [0,1] \longrightarrow M$, con $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p_1$, una curva differenziabile, per ogni vettore $X_0 \in T_{p_0}M$ indichiamo con $[\alpha]_*(X_0)$ il vettore $X_1 \in T_{p_1}M$, definito dal valore $X_1 = X(1)$ del campo di vettori $[0,1] \ni t \longrightarrow X(t) \in TM$ lungo α, con valore iniziale $X(0) = X_0$, definito dal problema di Cauchy per il sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \dfrac{DX(t)}{dt} = \nabla_{\dot\alpha(t)} X(t) = 0\,, \\ X(0) = X_0\,. \end{cases}$$

Se ora (N, ∇') è un'altra varietà affine, un'applicazione differenziabile $f : M \longrightarrow N$ si dice *affine* se preserva il trasporto parallelo, se cioè, per ogni coppia di punti p_0, p_1 di M che siano estremi di un cammino differenziabile $\alpha : [0,1] \longrightarrow M$, per ogni $X_0 \in T_{p_0}M$ risulta:

$$df(p_1)([\alpha]_*(X_0)) = [f \circ \alpha]_*(df(p_0)(X_0))\,.$$

Se $f : M \longrightarrow N$ è un diffeomorfismo, esso definisce un'applicazione bigettiva $\mathfrak{X}(M) \ni X \longrightarrow f_*(X) \in \mathfrak{X}(N)$. In questo caso, la f è una trasformazione affine se e soltanto se preserva la derivazione covariante, cioè se e soltanto se $f_*(\nabla_X Y) = \nabla'_{f_*(X)} f_*(Y)$ per ogni coppia X, Y di campi di vettori di M.

Teorema 1.1 *Uno spazio affine (M, ∇) è localmente simmetrico se e soltanto se il suo tensore di torsione T e il suo tensore di curvatura R soddisfano le equazioni:*

$$T = 0, \qquad \nabla_X R = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)\,. \tag{1.2}$$

DIM. Supponiamo che (M,∇) sia localmente simmetrica. In particolare, per ogni punto $p\in M$, il differenziale in p della simmetria rispetto al punto p è il differenziale di un'affinità. Preserva quindi torsione e curvatura. Ricordiamo che la torsione T è definita da: $T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$ per ogni $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$. In un qualsiasi punto p avremo, applicando il differenziale $ds_p=-I$:

$$T(X_p,Y_p)=-(T(-X_p,-Y_p))=-T(X_p,Y_p)$$

e quindi $T(X_p,Y_p)=0$ per ogni $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ ed ogni $p\in M$. Ciò dimostra che la torsione è nulla. Analogamente, se $X,Y,Z,T\in\mathfrak{X}(M)$ e $p\in M$, otteniamo:

$$[(\nabla_X R)(Y,Z)T]_p=-\left[(\nabla_{-X}R)(-Y,-Z)(-T)\right]_p=-\left[(\nabla_X R)(Y,Z)T\right]_p$$

e quindi anche $\nabla_X R=0$. □

Per concludere la dimostrazione, proveremo più in generale il:

LEMMA 1.2 *Siano (M,∇) ed (M',∇') due spazi affini. Supponiamo che, dette T ed R torsione e curvatura di (M,∇) e T' ed R' quelle di (M',∇'), risulti:*

$$\nabla_X T=0,\quad \nabla_{X'}T'=0,\quad \nabla_X R=0\ ,\quad \nabla'_{X'}R'=0\quad \forall X\in\mathfrak{X}(M),\ \forall X'\in\mathfrak{X}(N)\,.$$

Siano $p\in M$, $q\in N$ due punti per cui esista un isomorfismo lineare $L:T_pM\longrightarrow T_qN$ tale che:

$$\begin{cases} L(T(v_1,v_2))=T'(L(v_1),L(v_2))\,,\\ L(R(v_1,v_2)v_3)=R'(L(v_1),L(v_2))L(v_3)\\ \quad\forall v_1,v_2,v_3\in T_pM\,.\end{cases}$$

Allora esistono intorni aperti U_p di p in M, W_q di q in N ed un diffeomorfismo affine $f:U_p\longrightarrow U_q$ con $df(p)=L$. Tale f è essenzialmente unica, è cioè univocamente determinata da L nella componente connessa di p dell'intorno aperto di p in M su cui è definita.

DIM. Sia $U_p=\exp_p(V_0(p))$ un intorno normale di p in M. Siano $X_1,\dots,X_m$ campi di vettori in U_p ottenuti mediante il trasporto parallelo, lungo le geodetiche uscenti da p, di una base $X_1(p),\dots,X_m(p)$ di T_pM. L'ipotesi che curvatura e torsione abbiano differenziale covariante nullo ci dice che le componenti della torsione T e della curvatura R, calcolate rispetto ai campi $X_1,\dots,X_m$, sono costanti in U_p.

Siano ora $X'_1,\dots,X'_m$ i campi di vettori, definiti in un intorno normale $U'_{p'}=\exp_{p'}(V'_0(p'))$, paralleli lungo le geodetiche uscenti da p', con $X'_j(p')=L(X_j(p))$. Per l'ipotesi che torsione e curvatura abbiano differenziale covariante nullo, le componenti della torsione T' e della curvatura R', calcolate rispetto ai campi $X'_1,\dots,X'_m$, sono costanti. Poiché tali componenti coincidono con quelle di T e di R in p', esse coincidono, essendo costanti, su tutto $U'_{p'}$. Siano Φ_p e $\Phi_{p'}$ le applicazioni $\Phi_p(t_1,\dots,t_m)=\exp_p(t_1X_1(p)+\ldots+t_mX_m(p))$ e $\Phi_{p'}(t_1,\dots,t_m)=\exp_p(t_1X'_1(p)+\ldots+t_mX'_m(p))$. A meno di restringere gli intorni normali U_p e $U'_{p'}$, posto $A = \{\sum_{i=1}^m t_i^2 < r^2\} \subset \mathbb{R}^m$, l'affinità locale cercata si può definire mediante il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Phi_p"] \arrow[d, "\Phi_{p'}"'] & U_p \\ U'_{p'} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Il fatto che la f così costruita sia un'affinità, segue dall'unicità della soluzione delle equazioni di struttura[1]. $\square$

Diciamo che una varietà Riemanniana (M, g) è localmente simmetrica se ogni punto p di M ammette un intorno normale in cui la simmetria geodetica (rispetto alla connessione di Levi-Civita) sia un'isometria locale.

Teorema 1.3 *Una varietà Riemanniana (M, g) è localmente simmetrica se e soltanto se la sua curvatura sezionale è invariante rispetto al trasporto parallelo.*

Dim. Se (M, g) è localmente simmetrica, allora il suo tensore di curvatura, e quindi a maggior ragione la sua curvatura sezionale, è invariante per trasporto parallelo. Il viceversa segue dalle proprietà algebriche del tensore di curvatura: se s_p è la simmetria geodetica rispetto al punto p, consideriamo il tensore $B(X, Y, Z, T) = R(X, Y, Z, T) - R(s_p(X), s_p(Y), s_p(Z), s_p(T))$, definito quando $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(U_p)$ per un intorno normale simmetrico U_p di $p \in M$. Esso è antisimmetrico rispetto alla prima e alla seconda coppia di indici e simmetrico per lo scambio della prima con la seconda coppia di indici. Quindi esso si annulla identicamente perché, per l'ipotesi dell'invarianza rispetto alla simmetria geodetica della curvatura sezionale, abbiamo $B(X, Y, X, Y) = 0$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(U_p)$. Da questo si deduce l'invarianza di R rispetto al trasporto parallelo. Resta da verificare che le simmetrie geodetiche di una varietà Riemanniana, quando siano trasformazioni affini, sono anche isometrie. Questo è il contenuto del lemma seguente. $\square$

Lemma 1.4 *Sia (M, g) una varietà Riemanniana connessa e sia $\phi : M \longrightarrow M$ un'affinità per la connessione di Levi-Civita. Se, per un punto p_0 di M, il differenziale $d\phi(p_0) : T_{p_0}M \longrightarrow T_{\phi(p_0)}M$ è un'isometria di spazi Euclidei, allora $\phi : M \longrightarrow M$ è un'isometria.*

Dim. Sia q un qualsiasi punto di M e sia $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$ una curva differenziabile con $\gamma(0) = q$, $\gamma(1) = p_0$. Sia $\tau : T_qM \longrightarrow T_{p_0}M$ il trasporto parallelo lungo la curva γ. Se $X, Y \in T_{p_0}M$, abbiamo:

$$g_q(X, Y) = g_{p_0}(\tau(X), \tau(Y))$$

[1] Ricordiamo che le equazioni di struttura sono le:

$$\begin{cases} d\omega^i = -\omega^i_h \wedge \omega^h + \frac{1}{2} T^i_{j,h} \omega^i \wedge \omega^h \\ d\omega^i_j = -\omega^i_h \wedge \omega^h_j + \frac{1}{2} R^i_{j,h,k} \omega^h \wedge \omega^k \end{cases}$$

con $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma^h_{i,j} X_h$, $T(X_i, X_j) = T^h_{i,j} X_h$, $R(X_h, X_k) X_j = R^i_{j,h,k} X_i$, $\omega^i(X_j) = \delta^i_j$, $\omega^i_j = \Gamma^i_{h,j} \omega^h$. Le forme ω^i ci consentono di calcolare le coordinate normali nell'intorno del punto p, quando i campi di vettori X_i siano scelti come nella dimostrazione del lemma.

perché il trasporto parallelo preserva il prodotto scalare,

$$= g_{\phi(p_0)}(d\phi(p_0)(\tau(X)), d\phi(p_0)(\tau(Y)))$$

per l'ipotesi che $d\phi(p_0)$ sia un'isometria,

$$= g_{\phi(q)}(d\phi(q)(X), d\phi(q)(Y))$$

perché, essendo una trasformazione affine, la $d\phi$ commuta con l'operazione di trasporto parallelo, trasporta cioè vettori paralleli lungo la curva γ in vettori paralleli lungo la curva $\phi \circ \gamma$. □

§2 Alcuni risultati sui gruppi di trasformazioni

Premettiamo allo studio del gruppo $\mathbf{O}(M, g)$ delle isometrie di una varietà Riemanniana (M, g) alcuni risultati generali sui gruppi di trasformazioni di una varietà differenziabile. Vale il:

Teorema 2.1 *Sia M una varietà differenziabile numerabile all'infinito e sia $\mathbf{G}$ un sottogruppo del gruppo dei diffeomorfismi di M in sé. Sia $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{X}(M)$ l'insieme di tutti i campi di vettori X di M che generano gruppi a un parametro di trasformazioni di $\mathbf{G}$. Se la sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{X}(M)$ generata da $\mathfrak{G}$ ha dimensione finita, allora $\mathfrak{G}$ è un'algebra di Lie e possiamo definire su $\mathbf{G}$ una struttura di gruppo di Lie di trasformazioni di M, con algebra di Lie (isomorfa a) $\mathfrak{G}$.*

Dim. Indichiamo con $\mathbb{R} \ni t \longrightarrow \exp(tX) \in \mathbf{G}$ il gruppo a un parametro di diffeomorfismi generato da $X \in \mathfrak{G}$. Sia $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ l'algebra di Lie generata da $\mathfrak{G}$ ed indichiamo con $\tilde{\mathbf{G}}$ il gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$. Per ogni $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ possiamo considerare il gruppo locale a un parametro da esso generato: vi è un intorno aperto V_X di $(\{0\} \times M)$ in $(\mathbb{R} \times M)$, in cui è definita un'applicazione differenziabile, che indicheremo con:

$$V_X \ni (t, p) \longrightarrow e^{tX}(p) \in M\,,$$

tale che:

$$(d/dt)\left[e^{tX}(p)\right] = X_{e^{tX}(p)} \quad \text{per ogni} \quad (t, p) \in U_X\,.$$

Osserviamo che possiamo scegliere $V_X = (\mathbb{R} \times M)$, e risulta $e^{tX} = \exp(tX)$, se $X \in \mathfrak{G} \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$.

Poiché abbiamo supposto che $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ sia un'algebra di Lie di dimensione finita, *possiamo trovare un intorno aperto $\mathcal{U}$ di $(\{e\} \times M)$ in $\left(\tilde{\mathbf{G}} \times M\right)$ tale che, se $(g, p) \in \mathcal{U}$, allora vi sono $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ e $t \in \mathbb{R}$ tali che $(t, p) \in V_X$ e $g = \operatorname{Exp}(tX)$.* (Indichiamo qui con $\operatorname{Exp} : \mathfrak{L}(\mathfrak{G}) \to \tilde{\mathbf{G}}$ l'esponenziale, definito sull'algebra di Lie $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$, a valori nel gruppo di Lie $\tilde{\mathbf{G}}$.)

Per dimostrare quest'affermazione, consideriamo un ricoprimento aperto localmente finito $\{U_i\}$ di M mediante aperti relativamente compatti e un suo raffinamento $\{U_i'\}$. Introduciamo poi una norma sullo spazio vettoriale di dimensione finita $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$. Per i teoremi di esistenza, unicità e dipendenza continua dai parametri, potremo allora determinare numeri reali positivi ϵ_i tali che il problema di Cauchy per il sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$(*) \qquad \begin{cases} X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})\,,\ p \in U_i'\,,\ \phi(t,p,X) \in U_i \\ \dfrac{d\phi(t,p,X)}{dt} = X_{\phi(t,p,X)} \\ \phi(0,p,X) = p \end{cases}$$

abbia una ed una sola soluzione, definita per $|t| < \epsilon_i$, se $\|X\| \leq 1$. Potremo allora considerare $\mathcal{U} = \bigcup_i \left(\{\operatorname{Exp}(X) \mid \|X\| < \epsilon_i\} \times U_i'\right)$.

Risulta allora definita un'*azione locale* di $\tilde{\mathbf{G}}$ su M, dalla:

$$\mathcal{U} \ni (\operatorname{Exp}(tX), p) \longrightarrow e^{tX}(p) \in M\,.$$

Osserviamo che quest'applicazione è ben definita per l'unicità della soluzione di $(*)$.

Per completare la dimostrazione, proviamo ora alcuni lemmi.

Lemma 2.2 *Siano $X, Y \in \mathfrak{G}$. Allora $Z = \operatorname{Ad}(\operatorname{Exp}(X))(Y) \in \mathfrak{G}$.*

Dim. Abbiamo

$$e^{tZ}(p) = e^X \circ e^{tY} \circ e^{-X}(p) = \exp(X) \circ \exp(tY) \circ \exp(-X)(p)$$

e quindi $t \longrightarrow e^{tZ}$ è un gruppo a un parametro di trasformazioni di $\mathbf{G}$ e $Z \in \mathfrak{G}$. $\square$

Lemma 2.3 *$\mathfrak{G}$ genera $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.*

Dim. Indichiamo con V il sottospazio vettoriale di $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ generato da $\mathfrak{G}$. Per il lemma precedente, abbiamo $\operatorname{Ad}(\exp(\mathfrak{G}))(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G}$ e quindi, per linearità, abbiamo anche $\operatorname{Ad}(\exp(\mathfrak{G}))(V) \subset V$. Poiché $\mathfrak{G}$ genera $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$, anche $\operatorname{Exp}(\mathfrak{G})$ genera $\tilde{\mathbf{G}}$. Poiché l'insieme degli elementi $g \in \tilde{\mathbf{G}}$ per cui $\operatorname{Ad}(g)(V) \subset V$ è un sottogruppo di $\tilde{\mathbf{G}}$, ne segue che $\operatorname{Ad}(\tilde{\mathbf{G}})(V) \subset V$. Otteniamo in particolare che $\operatorname{Ad}(\operatorname{Exp}(V))(V) \subset V$, che ci dà, differenziando, $[V, V] \subset V$. Quindi V è un'algebra di Lie e perciò coincide con $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$. $\square$

Lemma 2.4 $\mathfrak{L}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$.

Dim. Siano $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{G}$ una base di $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ come spazio vettoriale. Allora l'applicazione:

$$t_1X_1 + \cdots + t_nX_n \longrightarrow \operatorname{Exp}(t_1X_1)\cdots\operatorname{Exp}(t_nX_n)$$

è un diffeomorfismo di un intorno V_0 di 0 in $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ su un intorno W_e dell'identità e di $\tilde{\mathbf{G}}$. Quindi, se $Y \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$, possiamo trovare un $\epsilon > 0$ e funzioni $a_i : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che $\sum_{i=1}^n a_i(t)X_i \in V_0$ e

$$\operatorname{Exp}(tY) = \operatorname{Exp}(a_1(t)X_1)\cdots\operatorname{Exp}(a_n(t)X_n) \quad \text{se} \quad |t| < \epsilon\,.$$

Questa uguaglianza ci dà la:

$$e^{tY} = \exp(a_1(t)X_1) \circ \cdots \circ \exp(a_n(t)X_n) \quad \text{se} \quad |t| < \epsilon\,.$$

Definendo $e^{tY} = \left(e^{(t/N)Y}\right)^N$ se $|t| < N\epsilon$, otteniamo che $Y \in \mathfrak{G}$. Questo completa la dimostrazione del lemma. □

Sia ora $\mathbf{G}^*$ il gruppo di diffeomorfismi di M generato da $\exp(\mathfrak{G})$. Poiché $\mathbf{G}^*$ è generato dai sottogruppi a un parametro contenuti in $\mathbf{G}$, abbiamo $\mathbf{G}^* \subset \mathbf{G}$. Poiché per ogni $g \in \mathbf{G}$ ed ogni sottogruppo a un parametro $\mathbb{R} \ni t \longrightarrow a_t \in \mathbf{G}$ anche $\mathbb{R} \ni t \longrightarrow \mathrm{ad}(g)(a_t) \in \mathbf{G}$ è ancora un sottogruppo a un parametro di $\mathbf{G}$, il sottogruppo $\mathbf{G}^*$ è normale in $\mathbf{G}$. Inoltre, l'applicazione $\mathrm{ad}(g) : \mathbf{G}^* \longrightarrow \mathbf{G}^*$ è continua[2] per la topologia di gruppo di Lie di $\mathbf{G}^*$, perché trasforma sottogruppi a un parametro in sottogruppi a un parametro.

Dimostriamo ora il:

Lemma 2.5 *Sia $\mathbf{G}^*$ un sottogruppo normale di un gruppo $\mathbf{G}$. Se $\mathbf{G}^*$ è un gruppo topologico e le applicazioni $\mathrm{ad}(g) : \mathbf{G}^* \longrightarrow \mathbf{G}^*$ sono continue per ogni $g \in \mathbf{G}$, allora vi è un'unica topologia di gruppo topologico su $\mathbf{G}$ per cui $\mathbf{G}^*$ sia aperto in $\mathbf{G}$.*

Dim. Definiamo su $\mathbf{G}$ la topologia meno fine per cui sono aperti tutti gli insiemi $L_g(A)$ con A aperto di $\mathbf{G}^*$. Si verifica facilmente che questa topologia è l'unica con le proprietà richieste nell'enunciato del lemma. □

Osservazione In generale la topologia su $\mathbf{G}$ è più fine della topologia compatta-aperta. Inoltre, non è detto che le componenti connesse di $\mathbf{G}$, con la topologia che abbiamo definito, formino un insieme di cardinalità al più numerabile. Possiamo ad esempio considerare l'azione sul gruppo additivo $\mathbb{R}$, che identifichiamo alla varietà M, di un qualsiasi suo sottogruppo $\mathbf{G}$ totalmente sconnesso: in questo caso $\mathfrak{G} = \{0\}$ e la costruzione che abbiamo fatto di dà su $\mathbf{G}$ la topologia discreta.

Ricordiamo che un *parallelismo assoluto* su una varietà differenziabile M è una sezione $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{F}(M))$ del fibrato dei suoi sistemi di riferimento. In modo equivalente, è il dato di m campi di vettori $X_1, \ldots, X_m$ che definiscono in ogni punto $p \in M$ una base $(X_1(p), \ldots, X_m(p))$ di T_pM. Un diffeomorfismo $f : M \longrightarrow M$ definisce un diffeomorfismo di fibrati principali $\hat{f} : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$. Se (M, σ) è la coppia formata da una varietà differenziabile M e da un parallelismo assoluto σ assegnato su M, chiameremo *automorfismi* di (M, σ) i diffeomorfismi $f : M \longrightarrow M$ tali che $\hat{f} \circ \sigma = \sigma \circ f$. Gli automorfismi di (M, σ) formano un gruppo, che denoteremo $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$.

Teorema 2.6 *Sia (M, σ) la coppia formata da una varietà differenziabile connessa M numerabile all'infinito e da un parallelismo assoluto σ su M. Allora $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ è un gruppo di Lie di trasformazioni con $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{Aut}(M, \sigma) \leq \dim_{\mathbb{R}} M$. Più precisamente, per ogni $p \in M$, l'applicazione*

$$(*) \qquad \mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni g \longrightarrow g(p) \in M$$

è iniettiva e la sua immagine è una sottovarietà chiusa di M. Vi è un'unica struttura di gruppo di Lie su $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ per cui la $(*)$ sia un diffeomorfismo.

[2] Un teorema di Chevalley ([Theory of Lie groups. Princeton Univ. Press, 1946], p.128) ci dice che, se $\mathbf{G}$ e $\mathbf{G}'$ sono due gruppi di Lie, un omomorfismo algebrico $\phi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}'$ è un omomorfismo di gruppi di Lie se e soltanto se trasforma sottogruppi a un parametro di $\mathbf{G}$ in sottogruppi a un parametro di $\mathbf{G}'$.

Dim. Sia $\sigma(p) = (X_1(p), \ldots, X_m(p))$ e sia $\mathfrak{V}$ il sottospazio vettoriale reale di $\mathfrak{X}(M)$ generato da $X_1, \ldots, X_m$. Per definizione, le trasformazioni di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ lasciano $\mathfrak{V}$ invariante. In particolare gli elementi di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ commutano con gli elementi dei sottogruppi a un parametro $\phi_v(t)$ di diffeomorfismi di M generati dagli elementi v di $\mathfrak{V}$. Poniamo $\tau_v = \phi_v(1)$. Osserviamo che, per ogni punto $p \in M$, $\tau_v(q)$ è definita per v in un intorno di 0 in $\mathfrak{V}$ e q in un intorno di p in M.

Lemma 2.7 *Per ogni $p \in M$ l'applicazione* $\mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni g \to g(p) \in M$ *è iniettiva.*

Dim. Per ogni $g \in \mathbf{Aut}(M, \sigma)$ l'insieme $F_g = \{q \in M \,|\, g(q) = q\}$ dei punti fissi di g è un sottoinsieme chiuso di M. Fissato un punto $q \in M$, al variare di v in un intorno di 0 in $\mathfrak{V}$, gli elementi $\tau_v(q)$ sono definiti e formano un intorno di q in M. Poiché, come abbiamo osservato, $g \circ \tau_v = \tau_v \circ g$, otteniamo che F_g contiene un intorno di q. Dunque F_g risulta aperto e chiuso in M e quindi o è vuoto, o coincide con M per l'ipotesi che M sia connesso. □

Sia $\gamma : [0, T] \longrightarrow M$ $(T > 0)$ una curva differenziabile. Risultano allora determinate m funzioni scalari $a^i_\gamma : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che $\dot\gamma(t) = \sum_{i=1}^m a^i_\gamma(t) X_i(\gamma(t))$ per ogni $t \in [0, T]$. Due curve differenziabili $\gamma_1, \gamma_2 : [0, T] \longrightarrow M$ si diranno *parallele nel parallelismo completo* σ se $a^i_{\gamma_1}(t) = a^i_{\gamma_2}(t)$ per ogni $t \in [0, T]$. Osserviamo che, data una curva differenziabile $\gamma : [0, T] \longrightarrow M$ ed un punto q_0, vi è al più una curva differenziabile γ' parallela a γ ed uscente dal punto q_0; esisterà poi comunque, per qualche $0 < \epsilon \leq T$ sufficientemente piccolo, una $\gamma' : [0, \epsilon] \longrightarrow M$ uscente da p_0 e parallela alla restrizione di γ a $[0, \epsilon]$.

Lemma 2.8 *Per ogni $p_0 \in M$, l'insieme* $\mathbf{Aut}(M, \sigma)(p_0)$ *è chiuso in M.*

Dim. Sia $\{a_k\}$ una successione di elementi di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ tali che $\{a_k(p_0)\}$ converga a un elemento $q_0 \in M$.

Dimostriamo che *ogni curva $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$ uscente dal punto p_0 ammette una parallela $\gamma' : [0, 1] \longrightarrow M$ uscente da q_0.*

A questo scopo, indichiamo con T l'estremo superiore dei numeri reali $a > 0$ per cui la restrizione di γ a $[0, a]$ ammette una parallela γ'_a con punto iniziale q_0. Vogliamo dimostrare che esiste la parallela γ'_T. A questo scopo, osserviamo che esistono le parallele $\gamma'_{T'}$ per ogni $0 < T' < T$ e che per ogni t con $0 \leq t < T$, abbiamo $\lim_{k \longrightarrow \infty} a_k(\gamma(t)) = \gamma'_{T'}(t)$ per $0 \leq t \leq T' < T$.

Fissiamo poi un intorno $\mathfrak{V}_0$ di 0 in $\mathfrak{V}$ e un intorno U di $\gamma(T)$ in M tali che $\tau_v(p)$ sia definita per $v \in \mathfrak{V}_0$ e $p \in U$. Allora τ_v è anche definita, per $v \in \mathfrak{V}_0$, su tutti gli insiemi $a_k(U)$. Sia $t_0 < T$ tale che $a_k(\gamma(t_0)) \in U$ per ogni $k \gg 1$ e $\gamma(T) = \tau_{v_0}(\gamma(t_0))$ per qualche $v_0 \in \mathfrak{V}_0$.

Possiamo allora definire γ'_T ponendo $\gamma'_T(t) = \gamma'_{T'}(t)$ se $0 \leq t \leq T' < T$ e $\gamma'_T(T) = \tau_{v_0}(\gamma'_{T'}(t_0))$ se $t_0 \leq T' < T$.

Se fosse $T < 1$, potremmo prolungare γ'_T con una parallela a $\gamma(t - T)$ uscente dal punto $\gamma'_T(T)$, contraddicendo la definizione di T. Quindi $T = 1$ e questo dimostra l'esistenza della parallela. Poiché $\gamma'(1) = \lim_{k \longrightarrow \infty} a_k(\gamma(1))$, l'estremo $\gamma'(1)$ non dipende dalla scelta del cammino γ, ma soltanto dal suo punto finale $\gamma(1)$.

Dimostriamo in questo modo che $\{a_k(q)\}$ converge per ogni $q \in M$ e otteniamo quindi un'applicazione $a : M \longrightarrow M$ mediante $a(q) = \lim_{k \longrightarrow \infty} a_k(q)$ per ogni $q \in M$. Poiché $\tau_v(a(q)) = a(\tau_v(q))$ per ogni $q \in M$, la a è chiaramente differenziabile. Si può dimostrare che è invertibile, ripetendo i raginamenti appena svolti per la successione delle applicazioni inverse $\{a_k^{-1}\}$. □

Abbiamo facilmente:

Lemma 2.9 *Sia $\mathfrak{l}$ l'algebra di Lie dei campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ tali che $[X, \mathfrak{V}] = \{0\}$. Per ogni $p \in M$, l'applicazione $\mathfrak{l} \ni X \to X(p) \in T_pM$ è iniettiva.*

Dim. I generatori di sottogruppi a un parametro di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ sono gli elementi di $\mathfrak{l}$ che generano sottogruppi a un parametro di diffeomorfismi di M. Quindi, per il Teorema 2.1, il gruppo $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ è un gruppo di Lie, e l'applicazione $\mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni a \to a(p) \in M$ definisce per ogni $p \in M$ un diffeomorfismo di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ con una sottovarietà differenziabile chiusa di M. □

Completiamo ora la dimostrazione del Teorema 2.6. L'insieme $\mathfrak{G}$ dei campi di vettori $X \in \mathfrak{l}$ che generano sottogruppi a un parametro di trasformazioni di M è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{l}$, e quindi ha dimensione finita. Possiamo perciò applicare il Teorema 2.1 al gruppo $\mathbf{G} = \mathbf{Aut}(M, \sigma)$ e a $\mathfrak{G}$, e concludere che $\mathbf{G}$ ha una struttura di gruppo di Lie con algebra di Lie $\mathfrak{G}$. Poiché l'azione $\mathbf{G} \times M \to M$ è differenziabile, fissato un qualsiasi punto $p_0 \in M$, l'immersione differenziabile $\mathbf{G} \ni g \to g(p_0) \in M$ è un diffeomorfismo di $\mathbf{G}$ con una sottovarietà differenziabile chiusa di M. □

Ricordiamo che vale il teorema[3]:

Teorema 2.10 (Bochner-Montgomery) *Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico localmente compatto e numerabile all'infinito di trasformazioni differenziabili di una varietà differenziabile paracompatta M. Allora $\mathbf{G}$ è un gruppo di Lie.*

Ricordiamo ancora[4] il:

Teorema 2.11 (Dantzig-van der Waerden) *Sia (E, d) uno spazio metrico localmente compatto. Sia $\mathbf{Isom}(E, d)$ il gruppo delle isometrie di (M, E) e, per $x \in E$, indichiamo con $\mathbf{Isom}_x(E, d)$ lo stabilizzatore di x in $\mathbf{Isom}(E, d)$. Consideriamo su $\mathbf{Isom}(E, d)$ la topologia compatta-aperta. Allora $\mathbf{Isom}(E, d)$ è localmente compatto e $\mathbf{Isom}_x(E, d)$ è compatto per ogni $x \in M$. Se M è compatto, anche $\mathbf{Isom}(E, d)$ è compatto.*

Osservazione Ricordiamo ancora che, se (M, g) è una varietà Riemanniana e d è la distanza nella metrica corrispondente, allora le isometrie $f : M \to M$ per la metrica d sono applicazioni differenziabili che preservano il tensore g della metrica. Indicheremo nel seguito con $\mathbf{O}(M, g)$ il gruppo delle isometrie della varietà Riemanniana (M, g), cioè:

$$\mathbf{O}(M, g) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, M) \mid f^* g = g\}.$$

Se d è la distanza su M definita dalla metrica g, allora $\mathbf{Isom}(M, d) = \mathbf{O}(M, g)$.

---

[3]S.Bochner, D.Montgomery *Locally compact groups of differentiable transformations*, Ann. of Math. **47** (1946), pp.639-657.

[4]D.Dantzig, B.L.van der Waerden *Über metrish homogene Räume*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6** (1928) pp.374-376. Una dimostrazione completa si può trovare anche in: Kobayashi-Nomizu *Foundations of Differential Geometry*, New York: John Wiley & Sons, vol.1, 1963, alle pagine 46-50.

§3 Automorfismi affini e isometrie

Per utilizzare i risultati del §2 nella discussione del gruppo delle affinità di una varietà affine (M, ∇) e delle isometrie di una varietà Riemanniana (M, g), è conveniente riformulare le nozioni di varietà affini e riemanniane nel contesto della teoria delle $\mathbf{G}$-strutture.

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m. Indichiamo con:

$$\mathfrak{F}(M) \xrightarrow[\mathbf{GL}(m,\mathbb{R})]{\pi} M$$

il fibrato principale dei *sistemi di riferimento* su M.

Gli elementi della fibra $\mathfrak{F}_p(M) = \pi^{-1}(p)$ sono le basi $(v_1, \ldots, v_m)$ di T_pM. Il gruppo $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ opera a destra su $\mathfrak{F}(M)$ mediante:

$$(v_1, \ldots, v_m) \cdot a = \left(\sum_{i=1}^m a_1^i v_i, \ldots, \sum_{i=1}^m a_m^i v_i \right) \quad \text{se} \quad a = \left(a_j^i \right)_{1 \le i,j \le m} \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \, .$$

Se $\sigma = (X_1, \ldots, X_m)$ è una m-upla di campi di vettori che definiscono una base di T_pM in ogni punto p di un aperto U di M, allora l'applicazione:

$$U \times \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \ni (p, a) \longrightarrow \sigma(p) \cdot a \in \pi^{-1}(U)$$

è un diffeomorfismo per la struttura differenziabile di $\mathfrak{F}(M)$.

In modo equivalente, possiamo definire la fibra $\mathfrak{F}_p(M)$ sopra il punto $p \in M$ come l'insieme di tutte le applicazioni lineari invertibili $\xi : \mathbb{R}^m \longrightarrow T_pM$, identificando una base $(v_1, \ldots, v_m)$ di T_pM all'isomorfismo lineare $\xi : \mathbb{R}^m \longrightarrow T_pM$ che associa al vettore $e_i = {}^t(0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$ della base canonica di $\mathbb{R}^m$ il vettore v_i di T_pM. Definiamo allora in modo affatto naturale la *forma canonica* $\theta \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m)$ mediante:

$$\theta(v) = \xi^{-1}(d\pi(v)) \qquad \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \ \forall v \in T_\xi \mathfrak{F}(M) \, .$$

Osserviamo che:

$$(R_a)^* \, \theta \ = \ a^{-1} \circ \theta \quad \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \, .$$

Infatti, se $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$, allora $dR_a(v) \in T_{\xi \cdot a} \mathfrak{F}(M)$ e $d\pi(dR_a(v)) = d\pi(v)$. Quindi:

$$(R_a)^* \, \theta(v) = \theta(dR_a(v)) = (\xi \cdot a)^{-1} \left(d\pi(dR_a(v)) \right) = a^{-1} \circ \xi^{-1}(d\pi(v)) \ = \ a^{-1} \circ \theta(v) \, .$$

Proposizione 3.1 *Ogni diffeomorfismo $f : M \longrightarrow M$ si solleva in modo unico ad un diffeomorfismo $\hat{f} : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ che lascia θ invariante. Viceversa, ogni automorfismo di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$-fibrato principale $F : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ che lasci θ invariante è il sollevamento di un diffeomorfismo $f : M \longrightarrow M$.*

Dim. Sia $f : M \longrightarrow M$ un diffeomorfismo. Definiamo allora il suo sollevamento $\hat{f}$ mediante:

$$\hat{f} \ : \mathfrak{F}(M) \ni \xi \longrightarrow df(\pi(\xi)) \circ \xi \in \mathfrak{F}(M) \, .$$

Abbiamo allora, se $\xi \in \mathfrak{F}(M)$ e $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$:

$$\begin{aligned} \theta(d\hat{f}(v)) &= (df(\pi(\xi)) \circ \xi)^{-1} \left(d\pi(d\hat{f}(\xi)(v)) \right) \\ &= \left(\xi^{-1} \circ (df(\pi(\xi)))^{-1} \right) (df(\pi(\xi)) \circ d\pi(v)) = \theta(v) \, . \end{aligned}$$

Infatti, poiché $\hat{f}$ preserva le fibre, abbiamo $f \circ \pi = \pi \circ \hat{f}$ e quindi $df \circ d\pi = d\pi \circ d\hat{f}$.

Viceversa, se $F : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ preserva le fibre e lascia θ invariante, detto $f : M \longrightarrow M$ il diffeomorfismo definito da $\pi \circ F = f \circ \pi$, osserviamo che $\Phi = \hat{f}^{-1} \circ F$ è un automorfismo differenziabile di $\mathfrak{F}(M)$ che preserva la fibra, lascia θ invariante e induce l'identità su M. Perciò abbiamo:

$$\begin{aligned} \xi^{-1}(d\pi(v)) &= \theta(v) = \Phi^*(\theta(v)) = \theta(d\Phi(v)) \\ &= (\Phi(\xi))^{-1}\,(d\pi(d\Phi(v))) = (\Phi(\xi))^{-1}\,(d\pi(v)) \\ &\quad \forall \xi \in \mathfrak{F}(M)\,,\ \forall v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)\,. \end{aligned}$$

Otteniamo dunque $(\Phi(\xi))^{-1}\,(w) = \xi^{-1}(w)$ per ogni $w \in T_{\pi(\xi)}M$, e questo dimostra che Φ è l'identità su $\mathfrak{F}(M)$. □

Per ogni $A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$, definiamo il *campo di vettori fondamentale* $A^* \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M))$ *associato ad* A come il generatore infinitesimale del gruppo a un parametro di diffeomorfismi $\mathfrak{F}(M) \times \mathbb{R} \ni (\xi, t) \longrightarrow \xi \cdot \exp(tA) \in \mathfrak{F}(M)$.

Una *connessione affine* su M si può definire, oltre che per mezzo della derivazione covariante, mediante l'assegnazione di una *forma di connessione*, cioè di una forma differenziale $\omega \in \Omega^1\,(M, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ che goda delle proprietà:

$$(1) \qquad \omega(A^*) = A \qquad \forall A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$$

$$(2) \qquad R_a^* \omega = \mathrm{Ad}(a^{-1}) \circ \omega \quad \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})\,.$$

Un vettore $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$ con $\omega(v) = 0$ si dice *orizzontale*. Poiché $\omega(\xi) : T_\xi \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ ha rango m^2 e $\ker d\pi(\xi) \cap \ker \omega(\xi) = \{0\}$ per la proprietà (1), la forma di connessione ω ci permette di decomporre lo spazio tangente a $\mathfrak{F}(M)$ in un punto ξ nella somma diretta dei due sottospazi $\mathfrak{V}_\xi(M) = \ker d\pi(\xi)$ dei *vettori verticali in* ξ e $\mathfrak{H}_\xi(M)$ dei[5] *vettori orizzontali in* ξ.

Poiché $d\pi(\xi) : \mathfrak{H}_\xi(M) \longrightarrow T_{\pi(\xi)}M$ è per ogni $\xi \in \mathfrak{F}(M)$ un isomorfismo lineare, possiamo associare ad ogni campo di vettori X definito su un aperto U di M un campo di vettori orizzontale $\tilde{X}$ su $\pi^{-1}(U)$, caratterizzato dalle:

$$\begin{cases} \omega(\tilde{X}) = 0 \\ d\pi(\tilde{X}) = X\,. \end{cases}$$

La derivazione covariante associata alla connessione affine è definita dalla formula:

$$(\dagger) \quad \nabla_X Y(\pi(\xi)) = \xi \circ \tilde{X}_\xi\left(\xi^{-1}(Y)\right) = \xi \circ \tilde{X}(\theta(\tilde{Y})) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)\,,\ \forall \xi \in \mathfrak{F}(M)\,,$$

dove osserviamo che, fissato $Y \in \mathfrak{X}(M)$, la $\xi \longrightarrow \Psi_Y(\xi) = \xi^{-1}(Y(\pi(\xi)))$ è una funzione differenziabile su $\mathfrak{F}(M)$ a valori in $\mathbb{R}^m$. Chiaramente:

$$\begin{cases} R_a^* \Psi_Y(\xi) = \Psi_Y(\xi \cdot a) = (\xi \cdot a)^{-1} Y(\pi(\xi \cdot a)) = a^{-1}\xi^{-1} Y(\pi(\xi)) = a^{-1}\Psi_Y(\xi) \\ \forall Y \in \mathfrak{X}(M)\,,\ \forall \xi \in \mathfrak{F}(M)\,,\ \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})\,, \end{cases}$$

[5] Un modo equivalente di definire una connessione affine è quello di assegnare una distribuzione vettoriale $\mathfrak{H}$ su $\mathfrak{F}(M)$, complementare della distribuzione verticale.

e quindi :

$$\begin{aligned} R_a^*(\xi \circ \tilde{X}(\Psi_Y)) &= (\xi \circ a) \circ \left(R_{a*}\tilde{X}\right)(\Psi_Y) = (\xi \circ a) \circ \tilde{X}(R_a^* \Psi_Y) \\ &= \xi \circ a \circ \tilde{X}\left(a^{-1}\Psi_Y\right) = \xi \circ a \circ a^{-1} \circ \tilde{X}(\Psi_Y) = \xi \circ \tilde{X}(\Psi_Y) \end{aligned}$$

mostra che la derivata covariante $\nabla_X Y$ è ben definita dalla (†), perché il valore del secondo membro è costante quando ξ varia sulla fibra $\mathfrak{F}_p(M)$ del punto $p \in M$.

Viceversa, si può dimostrare che, data di una derivazione covariante ∇, vi è un'unica forma di connessione ω per cui vale la (†).

Abbiamo infatti :

$$\xi \circ (X - [\omega(X)]^*)(\theta(\tilde{Y})) = \nabla_{d\pi(X)} Y \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M))\,,\ \forall Y \in \mathfrak{X}(M)\,.$$

Quindi :

$$(\ddagger) \quad [\omega(X)]^*(\theta(\tilde{Y})) = X(\theta(\tilde{Y})) - \xi^{-1}\nabla_{d\pi(X)} Y \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M))\,,\ \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$$

ci permette di calcolare ω utilizzando la forma canonica θ e la derivazione covariante.

Teorema 3.2 *Sia M una varietà differenziabile, dotata di una connessione affine definita dalla forma di connessione $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$. Un diffeomorfismo $f : M \longrightarrow M$ è un'affinità se e soltanto se il suo sollevamento $\hat{f}$ lascia invariante la forma di connessione ω.*

Viceversa, un diffeomorfismo di fibrati principali $F : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ è il sollevamento di un'affinità se e soltanto se lascia invarianti la forma canonica θ e la forma di connessione ω.

Dim. Le (†) e (‡) ci dicono che le trasformazioni affini di M sono tutte e sole quelle il cui sollevamento lascia ω invariante. L'ultima affermazione segue dal fatto che un diffeomorfismo di $\mathfrak{F}(M)$ in sé è un sollevamento di un diffeomorfismo di M in sé se e soltanto se preserva le fibre e lascia invariante la forma canonica θ. □

Teorema 3.3 *Il gruppo delle affinità di una varietà differenziabile M, dotata di una connessione affine, è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale a $m(m+1)$.*

Dim. Sia $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ la forma della connessione. Allora la forma

$$\theta \oplus \omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$$

definisce un parallelismo completo su $\mathfrak{F}(M)$. La tesi è allora conseguenza del Teorema 2.6. □

Sia $\mathbf{G}$ un sottogruppo *chiuso* del gruppo lineare $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. Una $\mathbf{G}$-struttura su M è il dato di un fibrato principale $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ e di un'immersione differenziabile $\imath : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathfrak{F}(M)$, in modo che sia commutativo il diagramma :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} \times \mathbf{G} & \longrightarrow & \mathfrak{F}(M) \times \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \mathbf{P} & \longrightarrow & \mathfrak{F}(M) \\ \varpi \Big\downarrow & & \Big\downarrow \pi \\ M & = & M \end{array}$$

in cui la prime due frecce orizzontali sono definite dalle inclusioni $\imath : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathfrak{F}(M)$ e $\mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$.

Osserviamo che $\mathbf{P}$ *è una sottovarietà chiusa di* $\mathfrak{F}(M)$. Infatti, fissata una sezione differenziabile σ di $\mathbf{P}$, definita in un aperto U di M, abbiamo $\mathbf{P} \cap \pi^{-1}(U) = \{\xi \in \pi^{-1}(U) \,|\, \xi^{-1} \circ \sigma(\pi(\xi)) \in \mathbf{G}\}$ e l'applicazione $\pi^{-1}(U) \ni \xi \longrightarrow \xi^{-1} \circ \sigma(\pi(\xi)) \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ è continua. Quindi $\mathbf{P} \cap \pi^{-1}(U)$ è chiuso in $\pi^{-1}(U)$ per l'ipotesi che $\mathbf{G}$ fosse chiuso in $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. Poiché gli insiemi $\pi^{-1}(U)$, al variare di U tra gli aperti di trivializzazione di $\mathbf{P}$, formano un ricoprimento aperto di $\mathfrak{F}(M)$, otteniamo che $\mathbf{P}$ è chiuso in $\mathfrak{F}(M)$.

Gli elementi X dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di $\mathbf{G}$ definiscono campi di vettori su $\mathbf{P}$ che sono la restrizione dei corrispondenti campi di vettori verticali X^* definiti su $\mathfrak{F}(M)$, e che indicheremo ancora con X^*.

Una $\mathbf{G}$-connessione affine su M è il dato di una $\mathbf{G}$-struttura $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ su M, e di una forma differenziale $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ con le proprietà:

$$\omega'(A^*) = A \qquad \forall A \in \mathfrak{g} \tag{1}$$

$$R_a^* \omega' = \operatorname{Ad}(a^{-1}) \circ \omega' \quad \forall a \in \mathbf{G}\,. \tag{2}$$

Indichiamo con $\mathfrak{H}' = \ker \omega' \subset \mathfrak{X}(\mathbf{P})$ la distribuzione orizzontale associata alla $\mathbf{G}$-connessione affine. Abbiamo:

$$dR_a(\mathfrak{H}_\xi) = \mathfrak{H}_{\xi \cdot a} \qquad \forall \xi \in \mathbf{P}\,,\ \forall a \in \mathbf{G}\,.$$

Possiamo quindi estendere la distribuzione orizzontale $\mathfrak{H}'$ su $\mathbf{P}$ a una distribuzione orizzontale $\mathfrak{H}$ su $\mathfrak{F}(M)$ ponendo

$$\mathfrak{H}_{\xi \cdot a} = dR_a(\mathfrak{H}'_\xi) \qquad \text{se} \quad \xi \in \mathbf{P}\,,\ a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})\,.$$

Estendiamo così la $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ a una forma di connessione affine di Cartan $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$, ponendo:

$$\omega(X) = A \qquad \text{se } X \in T_\xi \mathfrak{F}(M) \text{ e } X = A^*_\xi + Y \text{ con } A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \text{ e } Y \in \mathfrak{H}_\xi\,.$$

Possiamo quindi definire in modo equivalente una $\mathbf{G}$-connessione affine mediante il dato di una forma di connessione affine ω su $\mathfrak{F}(M)$ tale che, per una $\mathbf{G}$-struttura $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$, detta $\imath : \mathbf{P} \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ l'inclusione, risulti $\imath^* \omega \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$, tale cioè che la sua restrizione a $\mathbf{P}$ sia una forma a valori nell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di $\mathbf{G}$.

Lemma 3.4 *Siano* $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ *una* $\mathbf{G}$*-struttura,* $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ *una* $\mathbf{G}$*-connessione affine e* $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ *la sua estensione a* $\mathfrak{F}(M)$*. Sia* $f : M \longrightarrow M$ *un diffeomorfismo. Supponiamo che* M *sia connessa. Sono equivalenti:*

(a) $\hat{f}^* \omega = \omega$ *ed esiste* $\xi_0 \in \mathbf{P}$ *tale che* $\hat{f}(\xi_0) \in \mathbf{P}$.
(b) $\hat{f}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$ *e, detta* $\hat{f}^{\mathbf{G}} : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ *la restrizione di* $\hat{f}$ a $\mathbf{P}$, *abbiamo*
$$\left(\hat{f}^{\mathbf{G}}\right)^* \omega' = \omega'.$$

Dim. $(a) \Longrightarrow (b)$. Sia $\operatorname{pr} : \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \longrightarrow V = \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) / \mathfrak{g}$ la proiezione nel quoziente. Consideriamo la forma differenziale $\operatorname{pr} \circ \omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), V)$ e la corrispondente distribuzione vettoriale $\mathfrak{D} = \ker(\mathrm{pr} \circ \omega)$ in $\mathfrak{F}(M)$. Ricordiamo che una *varietà integrale* di $\mathfrak{D}$ è una sottovarietà differenziabile N di $\mathfrak{F}(M)$ con $T_\xi N \subset \mathfrak{D}_\xi$ per ogni $\xi \in N$. Poiché $\hat{f}$ lascia fissa la forma ω, essa lascia fissa a maggior ragione la forma $\mathrm{pr} \circ \omega$ e trasforma quindi varietà integrali di $\mathfrak{D}$ in varietà integrali di $\mathfrak{G}$. La tesi segue allora dal fatto che $\mathbf{P}$ è una sottovarietà integrale massimale di $\mathfrak{D}$.

$(b) \Longrightarrow (a)$. Segue dal fatto che $\hat{f}(\xi \cdot a) = \hat{f}^{\mathbf{G}}(\xi) \cdot a$ e $\omega(\xi \cdot a) = R_a^* \omega'(\xi)$ se $\xi \in \mathbf{P}$ e $a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. □

Un diffeomorfismo $f : M \longrightarrow M$ che soddisfi le condizioni equivalenti (a) e (b) del Teorema 3.4 si dice una trasformazione $\mathbf{G}$-affine, o una $\mathbf{G}$-affinità, di M.

Sia $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ una $\mathbf{G}$ struttura su M. Indichiamo ancora con θ la restrizione a $\mathbf{P}$ della forma canonica di $\mathfrak{F}(M)$. La forma di connessione ω' di una $\mathbf{G}$-connessione affine definisce un parallelismo completo, mediante la forma $\theta \oplus \omega \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$.

Per il Teorema 2.6 abbiamo:

Corollario 3.5 *Il gruppo delle trasformazioni* $\mathbf{G}$*-affini di* M*, per un'assegnata connessione affine* $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ *realtiva a una* $\mathbf{G}$*-struttura* $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$*, è un gruppo di Lie di dimensione* $\leq \dim_{\mathbb{R}} M + \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{G}$. □

Corollario 3.6 *Due trasformazioni* $\mathbf{G}$*-affini* f, g *di* M*, per un'assegnata connessione affine* $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ *realtiva a una* $\mathbf{G}$*-struttura* $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$*, coincidono se sono uguali con i loro differenziali in un punto* $p_0 \in M$. □

Una metrica Riemanniana g su M definisce una $\mathbf{O}(m)$-struttura $\mathfrak{O}(M)$ su M, in cui gli elementi della fibra $\mathfrak{O}_p(M)$ sono le basi ortonormali di T_pM rispetto al prodotto scalare g_p. Viceversa, una $\mathbf{O}(m)$-struttura su M definisce univocamente una metrica Riemanniana g su M.

Il Lemma 1.4 ci dice che le isometrie di (M, g) sono tutte e sole le trasformazioni affini f rispetto alla connessione di Levi-Civita per cui $df(p_0) : T_{p_0}M \longrightarrow T_{f(p_0)}M$ è un'isometria in qualche punto $p_0 \in M$.

La restrizione ω' della forma ω della connessione di Levi-Civita è una $\mathbf{O}(m)$-connessione affine.

Otteniamo perciò:

Teorema 3.7 *Sia* (M, g) *una varietà Riemanniana. Un'isometria di* M *è un automorfismo differenziabile* $f : M \longrightarrow M$ *il cui sollevamento è un'affinità per la connessione di Levi-Civita e per cui* $\hat{f}(\mathfrak{O}(M)) = \mathfrak{O}(M)$.

Il gruppo delle isometrie $\mathbf{O}(M, g)$ *è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale di* $m(m+1)/2$.

Lo stabilizzatore $\mathbf{O}_p(M, g)$ *di un punto* $p \in M$ *nel gruppo* $\mathbf{O}(M, g)$ *delle isometrie di* (M, g) *è un gruppo compatto.*

Dim. Il teorema è una conseguenza delle osservazioni precedenti e del Corollario 3.5. Infatti $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{o}(m) = m(m-1)/2$ e quindi $\mathfrak{O}(M)$ è una varietà differenziabile di dimensione $[m(m-1)/2] + m = m(m+1)/2$. □

Citiamo a questo punto, senza dimostrazione[6], il seguente:

[6] Vedi ad esempio: [S.Kobayashi *Transformation groups in Differential Geometry*, New York, Springer 1972] a pag.46.

Teorema 3.8 *Sia (M,g) una varietà Riemanniana di dimensione m. Se il suo gruppo delle isometrie $\mathbf{O}(M,g)$ ha dimensione massima $m(m+1)/2$, allora (M,g) è isometrico a uno dei seguenti spazi a curvatura costante:*

(a) *Lo spazio Euclideo $\mathbb{R}^m$;*
(b) *La sfera m-dimensionale S^m;*
(c) *Lo spazio proiettivo m-dimensionale $\mathbb{RP}^m$;*
(d) *Lo spazio iperbolico semplicemente connesso m-dimensionale H^m.*

Descriviamo brevemente un modello dello spazio iperbolico m-dimensionale H^m. Consideriamo l'ipersuperficie regolare di $\mathbb{R}^{m+1}$:

$$H^m = \left\{ x = (x_0, x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \;\middle|\; x_0^2 = 1 + \sum_{i=1}^m x_i^2 \right\}$$

Abbiamo:

$$T_x H^m = \left\{ v = (v_0, v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \;\middle|\; x_0 v_0 = \sum_{i=1}^m x_i v_i \right\}$$

e definiamo la metrica iperbolica g su H^m ponendo:

$$g_x(v,v) = c \cdot \left(-v_0^2 + \sum_{i=1}^m {v_i}^2 \right) \quad \forall x \in H^m\,, \forall v \in T_x H^m$$

per una costante $c > 0$. Osserviamo che H^m è l'orbita del punto $(1,0,\ldots,0)$ rispetto al gruppo $\mathbf{O}(1,m)$ delle trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^{m+1}$ che preservano la forma bilineare simmetrica definita dalla matrice $\operatorname{diag}(-1,1,\ldots,1)$. Il gruppo $\mathbf{O}(1,m)$ è il gruppo delle isometrie di H^m, che si identifica allo spazio omogeneo $\mathbf{O}(1,m)/(\mathbf{O}(1) \times \mathbf{O}(m))$, dove:

$$\mathbf{O}(1) \times \mathbf{O}(m) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbf{O}(m) \right\}$$

è lo stabilizzatore in $\mathbf{O}(1,m)$ del punto $(1,0,\ldots,0)$.

§4 Spazi Riemanniani globalmente simmetrici

Sia (M,g) uno spazio Riemanniano. Diciamo che (M,g) è *uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico* se, per ogni punto $p \in M$ esiste un'isometria involutiva $s_p \in \mathbf{O}(M,g)$ che abbia p come punto fisso isolato.

Osserviamo che vale il seguente:

Lemma 4.1 *Sia (M,g) uno spazio Riemanniano e $p \in M$. Allora esiste al più un'isometria involutiva s_p che abbia p come punto fisso isolato. Se una tale s_p esiste, allora $ds_p(p) = -\mathrm{Id}$ su T_pM ed s_p coincide, in un intorno di p, con la simmetria geodetica rispetto alla connessione di Levi-Civita.*

Dim. Sia s_p un'isometria involutiva di (M,g) con p come punto fisso isolato. Abbiamo $(ds_p(p))^2 = \mathrm{Id}$ su T_pM e quindi T_pM si decompone nella somma diretta dei sottospazi corrispondenti agli autovalori 1 e -1 di $(ds_p(p))$. Se ci fosse un $v \in T_pM \setminus \{0\}$ con $ds_p(p)(v) = v$, allora s_p lascerebbe fissi tutti i punti della geodetica uscente da p con vettore tangente v e quindi p non sarebbe punto fisso isolato. Perciò $ds_p(p) = -\mathrm{Id}$. Poiché, essendo un'isometria, s_p trasforma geodetiche in geodetiche, essa è allora, in un intorno di p, la simmetria geodetica rispetto a p. $\square$

Lemma 4.2 *Ogni spazio Riemanniano globalmente simmetrico è completo.*

Dim. Sia (M, g) uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico. Sia $\gamma : (a, b) \longrightarrow M$ una geodetica massimale. Se fosse ad esempio $b < +\infty$, fissato ϵ con $0 < 2\epsilon < b - a$, posto $p = \gamma(b - \epsilon)$, la simmetria s_p ci permette di prolungare la geodetica γ a una geodetica $\tilde{\gamma}$ definita su $(a, 2b - a - 2\epsilon)$:

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se} \quad a < t < b \\ s_p(\gamma(2b - 2\epsilon - t)) & \text{se} \quad b \leq t < 2b - a - 2\epsilon \,, \end{cases}$$

contraddicendone la massimalità. Deve quindi essere $b = +\infty$, e con ragionamento analogo si dimostra che $a = -\infty$. $\square$

Osserviamo che, se $\gamma \colon \mathbb{R} \longrightarrow M$ è una geodetica massimale con $\gamma(0) = p$, allora $s_p \circ \gamma(t) = \gamma(-t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Da questo fatto ricaviamo subito che :

Teorema 4.3 *Il gruppo delle isometrie di uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico connesso è un gruppo transitivo di trasformazioni.*

Dim. Sia (M, g) uno spazio Riemanniano connesso globalmente simmetrico. Indichiamo con d_g la distanza definita dalla metrica g. Siano p_0, p_1 due qualsiasi punti di M. Poiché (M, g) è completo, esiste una geodetica $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$, di lunghezza $\ell(\gamma) = d_g(p_0, p_1)$. Abbiamo allora $p_1 = s_{\gamma(\frac{1}{2})}(p_0)$. Infatti $s_{\gamma(\frac{1}{2})}$ è la simmetria geodetica rispetto al punto $\gamma(\frac{1}{2})$ e quindi trasforma la geodetica $\gamma(t)$ nella geodetica $\gamma(1 - t)$. $\square$

Teorema 4.4 *Sia (M, g) uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico, connesso. Indichiamo con $\mathbf{G}$ la componente connessa dell'identità nel gruppo di Lie $\mathbf{O}(M, g)$ delle isometrie di (M, g). Fissiamo un punto $p_0 \in M$ e sia $\mathbf{K}$ lo stabilizzatore di p_0 in $\mathbf{G}$.*

(i) Lo stabilizzatore $\mathbf{K}$ di p_0 in $\mathbf{G}$ è un sottogruppo di Lie compatto di $\mathbf{G}$ e il diagramma commutattivo :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G} \arrow[r] \arrow[d] & M \\ \mathbf{G}/\mathbf{K} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

in cui la freccia orizzontale è l'applicazione $\pi \colon \mathbf{G} \ni a \longrightarrow a(p_0) \in M$ e la freccia verticale la proiezione nel quoziente, definisce un diffeomorfismo f dello spazio omogeneo $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ su M.

(ii) L'applicazione $\sigma = \mathrm{ad}(s_{p_0}) \colon \mathbf{G} \ni a \longrightarrow s_{p_0} \circ a \circ s_{p_0} \in \mathbf{G}$ è un automorfismo involutivo di $\mathbf{G}$ tale che, detto $\mathbf{K}_\sigma$ l'insieme dei punti fissi di σ e $\mathbf{K}_\sigma^0$ la componente connessa dell'identità in $\mathbf{K}_\sigma$, risulta :

$$\mathbf{K}_\sigma^0 \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_\sigma \,.$$

Il gruppo $\mathbf{K}$ non contiene sottogruppi normali non banali di $\mathbf{G}$.

(iii) Siano $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$ le algebre di Lie di $\mathbf{G}$ e $\mathbf{K}$, rispettivamente. Allora

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, d\sigma(p_0)(X) = X\}$$

e, posto

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, d\sigma(p_0)(X) = -X\}$$

abbiamo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} .$$

Abbiamo poi $d\pi(e)(\mathfrak{k}) = \{0\}$ *e* $d\pi(e) : \mathfrak{p} \longrightarrow T_{p_0}M$ *è un isomorfismo. Se* $X \in \mathfrak{p}$, *allora:*

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow \exp(tX)(p_0) \in M$$

è la geodetica uscente da p_0 *con velocità* $d\pi(e)(X)$. *Per ogni* $v \in T_{p_0}M$, *il vettore* $[d\exp(tX)](p_0)(v)$ *è il traslato di* v *parallelamente lungo la geodetica.*

DIM. L'affermazione (i) è conseguenza del Teorema 3.7.

(ii) Per ogni $k \in \mathbf{K}$, le due isometrie k e $\sigma(k) = \mathrm{ad}(s_{p_0})(k) = (s_{p_0} \circ k \circ s_{p_0})$ di (M, g) coincidono con il loro differenziale in p_0. È quindi, per il Corollario 3.6, $\sigma(k) = \mathrm{ad}(s_{p_0})(k) = k$ per ogni $k \in \mathbf{K}$. In particolare, $d\sigma(e)(\mathfrak{k}) = \mathrm{Ad}(s_{p_0})(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$, e $d\sigma(e)$ è l'identità su $\mathfrak{k}$. D'altra parte, se $X \in \mathfrak{g}$ è un punto fisso di $d\sigma(e)$, avremo anche:

$$s_{p_0} \circ \exp_{\mathbf{G}}(tX) \circ s_{p_0} = \mathrm{ad}(s_{p_0})(\exp_{\mathbf{G}}(tX)) = \exp_{\mathbf{G}}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(s_{p_0})(X)) = \exp_{\mathbf{G}}(tX) ,$$

onde $s_{p_0}(\exp_{\mathbf{G}}(tX)(p_0)) = \exp_{\mathbf{G}}(tX)(p_0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi $\exp_{\mathbf{G}}(tX)(p_0) = p_0$, perché p_0 è un punto fisso isolato di s_{p_0}. Quindi $\mathfrak{k}$ è proprio l'insieme dei punti fissi di $d\sigma(e)$. Poiché il gruppo delle isometrie $\mathbf{O}(M, g)$ e $\mathbf{G}$ operano su $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ in modo effettivo, $\mathbf{K}$ non contiene sottogruppi normali non banali di $\mathbf{G}$.

(iii) Poiché $d\sigma(e)$ è un'involuzione e $\mathfrak{k}$ è il sottospazio dei suoi punti fissi, abbiamo la decomposizione $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.

Poiché $d\pi(e)$ ha nucleo uguale a $\mathfrak{k}$, ne segue che la sua restrizione a $\mathfrak{p}$ è un isomorfismo su $T_{p_0}M$.

Sia ora $X \in \mathfrak{p}$ e sia $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ la geodetica uscente da p_0 con velocità $d\pi(e)(X)$. Consideriamo, per ogni numero reale t, l'isometria $u_t = s_{\gamma(t/2)} \circ s_{p_0}$. Dico che $\mathbb{R} \ni t \longrightarrow u_t \in \mathbf{O}(M, g)$ è un sottogruppo a un parametro di $\mathbf{O}(M, g)$. Infatti, se $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} u_{t_1} \circ u_{t_2}(p_0) &= u_{t_1} \circ s_{\gamma(t_2/2)}(p_0) = s_{\gamma(t_1/2)} \circ s_{p_0}(\gamma(t_2)) \\ &= s_{\gamma(t_1/2)}(\gamma(-t_2)) = \gamma(t_1 + t_2) \\ &= s_{\gamma([t_1+t_2]/2)}(p_0) = u_{t_1+t_2}(p_0) . \end{aligned}$$

Inoltre, $du_t : T_{\gamma(s)} \longrightarrow T_{\gamma(t+s)}$ definisce, per ogni coppia di numeri reali t, s, il trasporto parallelo lungo la geodetica γ.

Per verificare questo fatto, osserviamo in primo luogo che, per ogni numero reale s, la $-ds_{p_0}(\gamma(s))$ definisce il trasporto parallelo da $T_{\gamma(s)}$ a $T_{\gamma(-s)}$ lungo la geodetica γ. A questo scopo, indichiamo con $\tau^{\gamma}_{s_1,s_2} : T_{\gamma(s_1)}M \longrightarrow T_{\gamma(s_2)}M$ il trasporto parallelo da $\gamma(s_1)$ a $\gamma(s_2)$ lungo γ. Abbiamo allora un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_{p_0}M & \xrightarrow{\tau^{\gamma}_{0,s}} & T_{\gamma(s)}M \\ {\scriptstyle ds_{p_0}(p_0)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle ds_{p_0}(\gamma(s))} \\ T_{p_0}M & \xrightarrow[\tau^{\gamma}_{0,-s}]{} & T_{\gamma(-s)}M \end{array}$$

Da questa ricaviamo che

$$\begin{aligned}\tau_{0,-s} \circ ds_{p_0}(p_0) = ds_{p_0}(\gamma(s)) \circ \tau^{\gamma}_{s,0} \quad \text{e, poiché } -ds_{p_0}(p_0) = I\,,\\ \tau^{\gamma}_{0,-s} = -ds_{p_0}(\gamma(s)) \circ \tau^{\gamma}_{s,0}\,, \quad \text{da cui otteniamo:}\\ -ds_{p_0}(\gamma(s)) = \tau^{\gamma}_{0,-s} \circ \left[\tau^{\gamma}_{0,s}\right]^{-1} = \tau^{\gamma}_{0,-s} \circ \tau^{\gamma}_{s,0} = \tau^{\gamma}_{s,-s}\,.\end{aligned}$$

Analogamente, $-ds_{\gamma(s)}$ definisce, per ogni coppia di numeri reali s, t, il trasporto parallelo da $T_{\gamma(t)}M$ a $T_{\gamma(2s-t)}M$ lungo la geodetica γ. Quindi, per composizione, $du_t = (-ds_{\gamma(t/2)} \circ (-ds_{p_0})$ definisce il trasporto parallelo lungo γ da $\gamma(s)$ a $\gamma(t+s)$. È perciò $du_{t_1} \circ du_{t_2} = du_{t_1+t_2}$, perché il trasporto parallelo da $\gamma(s)$ a $\gamma(s+t_1+t_2)$ si può ottenere componendo il trasporto parallelo da $\gamma(s)$ a $\gamma(s+t_2)$ con quello da $\gamma(s+t_2)$ a $\gamma(s+t_1+t_2)$.

In particolare $(u_{t_1} \circ u_{t_2})$ ed $u_{t_1+t_2}$ coincidono con i loro differenziali in p_0 ed, essendo isometrie, coincidono dappertutto: $u_{t_1} \circ u_{t_2} = u_{t_1+t_2}$ e $\mathbb{R} \ni t \longrightarrow u_t \in \mathbf{O}(M, g)$ è un gruppo a un parametro di isometrie. Possiamo quindi trovare $Y \in \mathfrak{g}$ tale che $u_t = \exp_{\mathbf{G}}(tY)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Risulta poi

$$\sigma \circ u_t = s_{p_0} \circ s_{\gamma(t/2)} = s_{\gamma(-t/2)} \circ s_{p_0} = u_{-t}\,.$$

Da questa ricaviamo che $d\sigma(e)(Y) = -Y$, quindi $Y \in \mathfrak{p}$ e perciò $Y = X$. $\square$

§5 Coppie simmetriche e simmetriche Riemanniane

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie connesso ed $\mathbf{H}$ un suo sottogruppo chiuso. La coppia $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ si dice una *coppia simmetrica* se esiste un automorfismo analitico involutivo $\sigma : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$ con

$$\mathbf{H}^0_\sigma \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{H}_\sigma\,,$$

ove $\mathbf{H}_\sigma = \{a \in \mathbf{G} \mid \sigma(a) = a\}$ e $\mathbf{H}^0_\sigma$ è la componente connessa dell'identità di $\mathbf{H}_\sigma$.

Se $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{H})$ è compatto[7] in $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{G})$, la coppia $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ si dice *simmetrica Riemanniana.*

Teorema 5.1 *Sia $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ una coppia simmetrica Riemanniana e sia M lo spazio omogeneo $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$. Siano $\pi : \mathbf{G} \longrightarrow M$ la proiezione naturale nel quoziente e $\tau : \mathbf{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ la rappresentazione di $\mathbf{G}$ come gruppo di diffeomorfismi di M, indotta dalla traslazione a sinistra su M:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} \times \mathbf{G} & \xrightarrow{(a,b)\to(a,\pi(b))} & \mathbf{G} \times M \\ {\scriptstyle (a,b)\to ab}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (a,p)\to\tau(a)(p)} \\ \mathbf{G} & \xrightarrow[a\to\pi(a)]{} & M\,. \end{array}$$

Sia σ un automorfismo analitico involutivo di $\mathbf{G}$ tale che $\mathbf{K}^0_\sigma \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_\sigma$ (ove $\mathbf{K}_\sigma$ è il sottogruppo dei punti fissi di σ e $\mathbf{K}^0_\sigma$ la sua componente dell'identità). Allora esistono metriche Riemanniane $\mathbf{G}$-invarianti g su M. Rispetto a una qualsiasi

[7] Questo è vero in particolare se $\mathbf{H}$ è un sottogruppo compatto di $\mathbf{G}$.

metrica $\mathbf{G}$*-invariante* g*, lo spazio* (M,g) *è globalmente simmetrico Riemanniano. Sia* $\mathbf{o}=\pi(e)$ *e sia* $s_{\mathbf{o}}$ *la corrispondente simmetrica geodetica. Essa soddisfa:*

$$\begin{aligned} s_{\mathbf{o}}\circ\pi &= \pi\circ\sigma \\ \tau(\sigma(a)) &= s_{\mathbf{o}}\circ\tau(a)\circ s_{\mathbf{o}} \qquad \forall a\in\mathbf{G}\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che, in particolare, la simmetria geodetica $s_{\mathbf{o}}$ è indipendente dalla scelta della metrica Riemanniana $\mathbf{G}$-invariante. In effetti, la connessione di Levi-Civita su M risulta indipendente dalla particolare scelta della metrica $\mathbf{G}$-invariante su M.

Dim. Indichiamo con $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$ le algebre di Lie di $\mathbf{G}$ e $\mathbf{K}$, rispettivamente e poniamo $\mathfrak{p}=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,d\sigma(e)(X)=-X\}$. Allora $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$. Se $X\in\mathfrak{p}$ e $k\in\mathbf{K}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \sigma(\exp_{\mathbf{G}}(t\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X)) &= \sigma(\mathrm{ad}(k)(\exp_{\mathbf{G}}(tX))) = \mathrm{ad}(k)(\exp_{\mathbf{G}}(-tX)) \\ &= \exp_{\mathbf{G}}(-t\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X))\,, \end{aligned}$$

da cui otteniamo subito che $d\sigma(e)(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X)) = -\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X)$. Quindi $\mathfrak{p}$ è invariante rispetto ad $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$. L'applicazione $d\pi(e)$ manda $\mathfrak{g}$ su $T_{\mathbf{o}}M$ ed ha come nucleo $\mathfrak{k}$. Se $X\in\mathfrak{p}$, abbiamo:

$$\pi(\exp_{\mathbf{G}}(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(tX)) = \pi(\mathrm{ad}(k)(\exp(tX))) = \tau(k)(\exp(tX))\,.$$

Differenziando quest'espressione per $t=0$, otteniamo:

$$d\pi(e)\circ\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(X) = d\tau(k)\circ d\pi(e)(X) \qquad \forall k\in\mathbf{K}\ \forall X\in\mathfrak{p}\,.$$

Poiché $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(K)$ è compatto il $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$, esiste un prodotto scalare $\mathbf{b}$ su $\mathfrak{p}$, invariante rispetto alla restrizione a $\mathfrak{p}$ di $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$. Allora $g_{\mathbf{o}}=\mathbf{b}\circ(d\pi(e)|_{\mathfrak{p}})^{-1}$ è un prodotto scalare su $T_{\mathbf{o}}M$, invariante rispetto a $\tau(k)$ per ogni $k\in\mathbf{K}$. Definiamo allora una metrica Riemanniana su M ponendo:

$$g_{\tau(g)(\mathbf{o})}(d\tau(g)(v),d\tau(g)(w)) = g_{\mathbf{o}}(v,w) \qquad \forall g\in\mathbf{G}\,,\ \forall v,w\in T_{\mathbf{o}}M\,.$$

Questa definizione è consistente perché $\mathbf{b}$ è invariante rispetto ad $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$.

Viceversa, ogni metrica Riemanniana $\mathbf{G}$-invariante su $M=\mathbf{G}/\mathbf{K}$ è di questa forma per qualche prodotto scalare invariante $\mathbf{b}$ su $\mathfrak{p}$.

Definiamo ora la simmetria $s_{\mathbf{o}}$ di M mediante la condizione:

$$s_{\mathbf{o}}\circ\pi=\pi\circ\sigma.$$

Chiaramente $s_{\mathbf{o}}$ è un diffeomorfismo involutivo di M in sé, con $ds_{\mathbf{o}}(\mathbf{o})=-\mathrm{Id}$ su $T_{\mathbf{o}}M$.

Dimostriamo che $s_{\mathbf{o}}$ è un'isometria. Sia $p=\pi(a)=\tau(a)(\mathbf{o})\in M$. Se $X,Y\in T_pM$, allora $X_0=d\tau(a^{-1})(p)(X), Y_0=d\tau(a^{-1})(p)(Y)\in T_{\mathbf{o}}M$. Per ogni $x\in\mathbf{G}$ abbiamo:

$$s_{\mathbf{o}}\circ\tau(a)(\pi(x)) = s_{\mathbf{o}}(\pi(ax)) = \pi(\sigma(ax)) = \pi(\sigma(a)\sigma(x)) = (\tau(\sigma(a))\circ s_{\mathbf{o}})(\pi(x))\,.$$

Quindi $s_{\mathbf{o}}\circ\tau(a)=\tau(\sigma(a))\circ s_{\mathbf{o}}$. Ricaviamo:

$$\begin{aligned} g(ds_{\mathbf{o}}(X),ds_{\mathbf{o}}(Y)) &= g(ds_{\mathbf{o}}\circ d\tau(a)(X_0), ds_{\mathbf{o}}\circ d\tau(a)(Y_0)) \\ &= g(d\tau(\sigma(a))\circ ds_{\mathbf{o}}(X_0), d\tau(\sigma(a))\circ ds_{\mathbf{o}}(Y_0)) \\ &= g(ds_{\mathbf{o}}(X_0), ds_{\mathbf{o}}(Y_0)) = g(X_0,Y_0) = g(X,Y)\,. \end{aligned}$$

Quindi $s_{\mathbf{o}}$ è un'isometria e, poiché $s_{\mathbf{o}}(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ e $ds_{\mathbf{o}}(\mathbf{o}) = -\mathrm{Id}$ su $T_{\mathbf{o}}M$, coincide con la simmetria geodetica rispetto a $\mathbf{o}$. Per un qualsiasi punto $p = \pi(a)$, la simmetria geodetica rispetto a p è l'isometria $s_p = \tau(a) \circ s_{\mathbf{o}} \circ \tau(a^{-1})$. Questo dimostra che $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$ è globalmente simmetrico. $\square$

La $\mathbf{G} \ni a \to \tau(a) \in \mathbf{O}(M, g)$ è un omomorfismo di gruppi di Lie. Il suo nucleo $\mathbf{N}$ è un sottogruppo chiuso normale di $\mathbf{G}$, contenuto in $\mathbf{K}$. Se $\mathbf{Z}$ è il centro di $\mathbf{G}$, i gruppi $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ e $\mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{Z})$ sono isomorfi. Poiché $\mathbf{K} \cap \mathbf{Z} \subset \mathbf{N}$, ne segue che $\mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{N})$ è compatto. Chiaramente la $(\mathbf{G}/\mathbf{N}, \mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{N}))$ è un'altra coppia simmetrica Riemanniana, che definisce lo stesso spazio simmetrico della coppia $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$.

Teorema 5.2 *Sia $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ una coppia simmetrica Riemanniana. Sia $\mathfrak{k}$ l'algebra di Lie di $\mathbf{K}$ e $\mathfrak{z}$ quella del centro $\mathbf{Z}$ di $\mathbf{G}$. Se $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$, allora esiste un unico automorfismo involutivo $\sigma : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ tale che $\mathbf{K}^0_\sigma \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_\sigma$ (dove $\mathbf{K}_\sigma$ è il sottogruppo dei punti fissi di σ e $\mathbf{K}^0_\sigma$ la sua componente connessa dell'identità).*

Dim. Osserviamo che il differenziale in e dell'involuzione σ cercata è l'identità su $\mathfrak{k}$, e l'opposto dell'identità su un sottospazio di $\mathfrak{g}$ complementare di $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{g}$, e trasforma in sé l'ortogonale $\mathfrak{k}^\perp$ di $\mathfrak{k}$ rispetto alla forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ di $\mathfrak{g}$.

Poiché $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$, la forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ è definita negativa su $\mathfrak{k}$. Infatti, poiché $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ è un sottogruppo compatto, gli elementi $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$, per $X \in \mathfrak{k}$, si esprimono come matrici antisimmetriche $(a_{i,j}(X))$, in una opportuna base[8] di $\mathfrak{g}$. Quindi, se $X \in \mathfrak{k}$:

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X, X) = -\sum_{i,j} [a_{i,j}]^2 \leq 0$$

e vale l'uguaglianza se e soltanto se $a_{i,j}(X) = 0$ per ogni i, j, cioè se $X \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{z}$. Quindi $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}^\perp$, dove $\mathfrak{k}^\perp$ è l'ortogonale di $\mathfrak{k}$ rispetto alla forma di Killing e $d\sigma(e)$ è completamente determinato perché è l'identità su $\mathfrak{k}$ e $-\mathrm{Id}$ su $\mathfrak{k}^\perp$. A sua volta $d\sigma(e)$ determina completamente σ. $\square$

Un'*algebra di Lie ortogonale simmetrica* è una coppia $(\mathfrak{g}, \varsigma)$, formata da:

(*i*) un'algebra di Lie reale di dimensione finita $\mathfrak{g}$,

(*ii*) un automorfismo involutivo $\varsigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, tale che:

(*iii*) l'insieme $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \varsigma(X) = X\}$ dei punti fissi di ς sia una sottoalgebra immersa in $\mathfrak{g}$ in modo compatto.

Diciamo che la coppia $(\mathfrak{g}, \varsigma)$ è *effettiva* se, detto $\mathfrak{z}$ il centro di $\mathfrak{g}$, è:

(*iv*) $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$.

Ricordiamo che il fatto che $\mathfrak{k}$ sia immersa in modo compatto in $\mathfrak{g}$ significa che la sottoalgebra $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ di $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ genera un sottogruppo compatto del gruppo $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ degli automorfismi interni di $\mathfrak{g}$. Nel caso in cui la coppia $(\mathfrak{g}, \varsigma)$ sia effettiva, la condizione è equivalente al fatto che la forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ di $\mathfrak{g}$ sia definita negativa su $\mathfrak{k}$.

Abbiamo osservato che, ad una coppia simmetrica Riemanniana $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$, a cui sia associato un automorfismo involutivo σ di $\mathbf{G}$, è associata l'algebra di Lie ortogonale simmetrica $(\mathfrak{g}, \varsigma)$, ove $\mathfrak{g}$ è l'algebra di Lie di $\mathbf{G}$ e $\varsigma = d\sigma(e)$.

[8] È sufficiente considerare una base ortonormale di $\mathfrak{g}$ rispetto a un prodotto scalare invariante per $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$.

Sia $(\mathfrak{g}, \varsigma)$ un'algebra di Lie simmetrica ortogonale e sia $\mathfrak{k}$ il luogo dei punti fissi di ς.

Una coppia $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ di gruppi di Lie *associata a* $(\mathfrak{g}, \varsigma)$ è una coppia formata da un gruppo di Lie connesso $\mathbf{G}$ ed un suo sottogruppo *chiuso* $\mathbf{K}$ con algebre di Lie uguali a $\mathfrak{g}$ e a $\mathfrak{k}$, rispettivamente.

Abbiamo:

TEOREMA 5.3 *Sia $(\mathfrak{g}, \varsigma)$ un'algebra di Lie ortogonale simmetrica e sia $\mathfrak{k}$ la sottoalgebra di Lie dei punti fissi di ς.*

(a) *Sia $\tilde{\mathbf{G}}$ un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algegbra di Lie $\mathfrak{g}$ e sia $\tilde{\mathbf{K}}$ il suo sottogruppo analitico con algebra di Lie $\mathfrak{k}$. Allora $\tilde{\mathbf{K}}$ è un sottogruppo chiuso di $\tilde{\mathbf{G}}$ e $(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}})$ è una coppia simmetrica Riemanniana. Lo spazio simmetrico $\tilde{M} = \tilde{\mathbf{G}}/\tilde{\mathbf{K}}$ è semplicemente connesso.*

(b) *Se $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ è una qualsiasi coppia di gruppi di Lie associata a $(\mathfrak{g}, \varsigma)$, allora $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$ è uno spazio Riemanniano localmente simmetrico rispetto a qualsiasi metrica $\mathbf{G}$-invariante.*

(c) *$\tilde{M}$ è il rivestimento universale di M.*

DIM. Poiché $\tilde{\mathbf{G}}$ è semplicemente connesso, l'involuzione ς di $\mathfrak{g}$ definisce univocamente un automorfismo $\tilde{\sigma}$ di $\tilde{\mathbf{G}}$ con $d\tilde{\sigma}(e) = \varsigma$. Il luogo $\tilde{\mathbf{K}}_{\tilde{\sigma}}$ dei punti fissi di $\tilde{\sigma}$ è chiuso in $\mathbf{G}$ e quindi è tale anche la sua componente connessa dell'identità $\tilde{\mathbf{K}}$. Poiché $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(\tilde{\mathbf{K}})$ è il sottogruppo analitico di $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ generato da $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$, è compatto e quindi $(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}})$ è una coppia Riemanniana simmetrica e $\tilde{M} = \tilde{\mathbf{G}}/\tilde{\mathbf{K}}$ è uno spazio globalmente simmetrico Riemanniano rispetto a qualsiasi metrica $\hat{\mathbf{G}}$-invariante su $\tilde{M}$, definita a partire da un prodotto scalare $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$-invariante su $T_{\mathbf{o}}\tilde{M}$.

Se $\mathbf{G}$ è un gruppo di Lie con algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathbf{K}$ un suo sottogruppo chiuso con algebra di Lie $\mathbf{K}$, il rivestimento $\tilde{\mathbf{G}} \to \mathbf{G}$ definisce per passaggio al quoziente il rivestimento universale $\tilde{M} \to M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$. La simmetrie geodetiche globali di $\tilde{M}$ definiscono, per diffeomorfismi locali, simmetrie Riemanniane locale di M, rispetto a qualsiasi metrica $\mathbf{G}$-invariante di M. $\square$