PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 20/11/2017
SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1. Si considerino, nello spazio affine $\mathbb{R}^3$, i quattro punti $A = (1,0,1)$, $B = (1,2,-1)$, $C = (3,1,0)$, $D = (0,1,4)$.

(1) Si verifichi che le rette AB e CD sono sghembe.
(2) Si calcoli il volume del tetraedro di vertici A, B, C, D.
(3) Si trovi la distanza del punto D dal piano α che contiene i punti A, B, C.

Soluzione. (1) Consideriamo i vettori

$$\overrightarrow{AB}=(0,2,-2),\ \ \overrightarrow{CD}=(-3,0,4)\ \text{ ed }\ \overrightarrow{AC}=(2,1,-1).$$

Il primo ci dà una velocità di percorrenza della retta AB, il secondo una velocità di percorrenza della retta CD. La condizione per cui le rette AB e CD siano sghembe è che il vettore $\overrightarrow{AC}$ sia linearmente indipendente dai vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$. Ciò equivale al fatto che la matrice che ha per colonne i tre vettori abbia determinante diverso da zero. Abbiamo

$$(*)\qquad \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 = 16 \neq 0.$$

Questo prova che le rette sono sghembe.

(2) Il volume del tetraedro è un sesto del determinante $(*)$. Abbiamo perciò

$$\text{Volume}(\triangle(ABCD)) = \frac{1}{6} \cdot 16 = \frac{8}{3}.$$

Un vettore perpendicolare al piano ABC si può trovare facendo il prodotto vettore di $\overrightarrow{AB}=(0,2,-2)$ e di $\overrightarrow{AC}=(2,1,-1)$. Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

La distanza è il valore assoluto del prodotto scalare di $\overrightarrow{CD}=(-3,0,4)$ per il versore $\frac{1}{5}(0,3,4)$ del vettore $-\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Quindi

$$\text{dist}(D, ABC) = \frac{1}{5} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{16}{5}.$$

$\square$

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 5×5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Si calcoli il determinante di A.
(2) Si dica se esiste, ed in caso affermativo si calcoli, l'inversa di A.

Soluzione. (1) Calcoliamo il determinante di A.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \det(e_5, e, 4, e, 3, e_2, e_1) = 1$$

perché la matrice $(e_5, e, 4, e, 3, e_2, e_1)$ è ottenuta dalla matrice I_5 con la permutazione $(1,5)\cdot(2,4)$ di $\{1,2,3,4,5\}$, che ha segnatura 1.

(2) La matrice A è invertibile perché ha determinante diverso da zero.

Per trovare l'inversa, operiamo per trasformazioni sulle righe per la matrice $(A, \mathrm{I}_5) \in \mathbb{R}^{5\times 10}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice inversa è quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 3. Si trovi la forma di Smith della matrice a coefficienti in $\mathbb{R}[x]$:

$$M = \begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x-1 & x-1 & x-1 & x+1 \\ x^2-1 & x^2+1 & x^2+2 & x^2-1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Abbiamo

$$M \sim \begin{pmatrix} x & x & x & x \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché ci sono coefficienti scalari diversi da zero, il MCD dell'ideale dei coefficienti è 1. Analogamente, poiché -2 è il minore delle prime due colonne e seconda e terza riga, il MCD dell'ideale generato dai minori di ordine 2 è 1. Ogni minore di ordine tre è multiplo di x ed il minore della prima e delle ultime due colonne è $-6x$. Quindi in MCD dei minori di ordine tre è x ed otteniamo quindi per M la forma canonica di Smith

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix}.$$

□