**PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 17/02/2017**
**SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI**

**Esercizio 1.** Si consideri, la quadrica affine $\mathcal{Q}'$ d'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 1 = 0$$

(1) Se ne determini il tipo.
(2) Si dica se è o no a centro, e in caso affermativo se ne trovi il centro.
(3) Si trovi la sua forma canonica metrica.

*Soluzione.* Associamo alla quadrica $\mathcal{Q}$ proposta le matrici completa ed incompleta

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det(A) = -1 \ \neq 0$, la matrice simmetrica $A$ è indefinita e la quadrica è non vuota ed a centro. Abbiamo

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

(1) La quadrica è non degenere e la quadrica proiettiva $Q$ corrispondente è un elissoide. Poiché $\det(A) < 0$, la $Q$ interseca l'iperpiano all'infinito in una conica ed è perciò un iperboloide ellittico, o a due falde.
(2) Poiché $\det(A) = -1 \ \neq 0$, la quadrica $Q'$ è a centro. Il centro è la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} x + z + 1 = 0, \\ y + z + 1 = 0, \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1, \\ z = -2. \end{cases}$$

(3) Abbiamo

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1\ )^3 - 2(\lambda - 1\ ).$$

La $A$ ha quindi gli autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 1 - \sqrt{2}$. Inoltre $\det(B)/\det(A) = 3$. Quindi la $Q'$ è metricamente equivalente alla

$$\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} + 1 = \frac{Z^2}{\gamma^2} \qquad \text{con} \quad \begin{cases} \alpha^2 = 3, \\ \beta^2 = \frac{3}{1+\sqrt{2}}, \\ \gamma^2 = \frac{3}{\sqrt{2}-1}. \end{cases}$$

$\square$

**Esercizio 2.** Sia $A$ la matrice reale $6 \times 6$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dica se $A$ è invertibile e, in caso non lo sia, se ne calcoli il rango.
(2) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(3) Si dica se $A$ è diagonalizzabile.
(4) Se ne scriva la forma di Jordan.

*Soluzione.* (1) La prima e la terza riga di $A$ sono uguali e quindi $A$ ha determinante zero e non è invertibile. Calcoliamone il rango (utilizziamo "$\sim$" per indicare che due matrici hanno lo stesso rango)

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

La matrice $A$ ha quindi rango due, perché ha lo stesso rango di una matrice che ha tutte le colonne proporzionali alle due colonne della matrice $B$, che sono linearmente indipendenti perché il minore delle prime due righe e colonne è 1 e quindi diverso da zero.
(2) Possiamo scrivere la matrice $A$ come il prodotto della matrice $B$ per una matrice $2 \times 6$:

$$A = B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per il teorema di Sylvester, gli autovalori non nulli di $A$ sono anche autovalori della matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$p_{A'}(\lambda) = (\lambda - 2)^2 - 8 = 0 \iff \lambda = 2 \pm 2\sqrt{2}.$$

Poiché $A$ ha rango due, ha l'autovalore 0 con molteplicità algebrica 4. Poiché $A$ ha anche due autovalori non nulli, l'autovalore 0 ha anche molteplicità algebrica 4, mentre gli autovalori $2 \pm 2\sqrt{2}$ hanno entrambi molteplicità algebrica e geometrica 1.

Poiché tutti i suoi autovalori hanno uguali la molteplicità algebrica e geometrica, la $A$ è diagonalizzabile.
(4) La sua forma di Jordan coincide allora con la sua forma diagonale:

$$\text{forma di Jordan di } A = \operatorname{diag}(2-2\sqrt{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2+2\sqrt{2}).$$

□

**Esercizio 3.** Siano dati, nello spazio affine $\mathbb{R}^3$, i punti $A = (5,2,1)$, $B = (2,1,0)$, $C = (0,2,0)$, $D = (1,3,3)$.

(1) Si verifichi che i quattro punti non appartengono ad uno stesso piano e si calcoli il volume del tetraedro di vertici $ABCD$.
(2) Si calcoli il baricentro $P$ dei punti $A, B, C, D$
(3) Si verifichi che le rette $AB$ e $CD$ siano sghembe.
(4) Si trovino le equazioni parametriche della retta $r$ passante per il baricentro $P$ ed incidente alle rette $AB$ e $CD$.

*Soluzione.* (1) Condizione necessaria e sufficiente affinché i quattro punti non appartengano allo stesso piano è che i tre vettori $A - C$, $B - C$, $D - C$ siano linearmente indipendenti, che cioè sia diverso da zero il determinante della matrice che li ha come colonne.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

ci mostra che i quattro punti non sono complanari. Il volume del tetraedro è il valore assoluto di questo determinante diviso per 6:

$$\text{volume del tetraedro } ABCD = \frac{12}{6} = 2.$$

(2) Il baricentro ha come coordinate la media aritmetica delle coordinate dei quattro punti:

$$P = \frac{1}{4}\left((5,2,1) + (2,1,0) + (0,2,0) + (1,3,3)\right) = \tfrac{1}{4}(8,8,4) = (2,2,1).$$

(3) Le rette $AB$ e $CD$ sono sghembe perché sono le rette di due lati opposti di un tetraedro non degenere (con volume positivo).
(4) La retta cercata congiunge il baricentro $(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ dei punti $A, B$ al baricentro $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ dei punti $C, D$. La possiamo quindi scrivere, poiché passa anche per il baricentro dei quattro punti, mediante

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 2 - t, \\ z = 1 - t. \end{cases} \tag{1}$$

□