PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 17/02/2017
SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1. Si consideri, al variare del parametro reale k, la quadrica affine $\mathcal{Q}_k$ d'equazione

$$2xy + z^2 + 2k(x + y + z) = k.$$

(1) Se ne determini il tipo.
(2) Si dica se è o no a centro, e in caso affermativo se ne trovi il centro.

Soluzione. Associamo alla quadrica $\mathcal{Q}_k$ proposta le matrici completa e incompleta

$$B_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & k \\ k & k & k & -k \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det(A) = -1 \neq 0$ e la matrice simmetrica A è indefinita, la quadrica è non vuota e a centro per ogni valore di k. Abbiamo poi (sviluppando il determinante rispetto alla terza riga)

$$\det(B_k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & k \\ k & k & -k \end{vmatrix} - k \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ k & k & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 1+k & 0 \\ 1+k & k & 0 \\ k & k & -k \end{vmatrix} + k^2$$
$$= 3k^2 + k.$$

Quindi:

(1) Per $k \neq 0, -\frac{1}{3}$, la $\mathcal{Q}_k$ è non degenere ed è

- un iperboloide ad una falda quando $\det(B_k) > 0$, cioè per $k < -\frac{1}{3}$ oppure $k > 0$;
- un iperboloide a due falde, perché $\det(B_k) < 0$ ed A è indefinita non degenere, quando $-\frac{1}{3} < k < 0$;
- un cono quando $k = 0, -\frac{1}{3}$, perché A è indefinita non degenere e $\det(B_k) = 0$.

(2) Poiché $\det(A) \neq 0$, la quadrica Q_k è a centro per ogni k reale. Possiamo riscrivere la sua equazione nella forma:

$$2(x + k)(y + k) + (z + k)^2 = 3k^2 + k,$$

che mostra che il centro è il punto $C_k = (-k, -k, -k)$. □

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 6×6

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dica se A è invertibile.
(2) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(3) Si dica se A è diagonalizzabile.
(4) Se ne scriva la forma di Jordan.

Soluzione. (1) Calcoliamo il determinante di A. Sviluppandolo rispetto alla quinta riga abbiamo

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Avendo determinante diverso da zero, la A è invertibile.

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A. Abbiamo

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^2 - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^2 - 1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1+\lambda-\lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1 - \lambda^2) \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \\ 1+\lambda-\lambda^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)^2 \cdot (\lambda^2 - \lambda - 1).$$

Il polinomio caratteristico è quindi

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2 \cdot (\lambda^2 - \lambda - 1).$$

Gli autovalori di A sono quindi ± 1, ciascuno con molteplicità algebrica 2, e $(1 \pm \sqrt{5})/2$, ciascuno con molteplicità algebrica e geometrica 1.

Calcoliamo le molteplicità geometriche degli autovalori ± 1. Abbiamo ($\sim$ indica matrici dello stesso rango)

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M.$$

Poiché $\det(M) = 1 \neq 0$, la matrice $A + I$ ha rango 4 e quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore (-1) è 2.

Abbiamo poi

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = N$$

La sottomatrice formata dalle prime quattro righe di N ha determinante 2 e quindi $A - I$ ha rango 4 ed anche l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica 2. In conclusione:

(2) La matrice A ha gli autovalori

- -1 ed 1 entrambi con molteplicità sia algebrica che geometrica uguali a 2;
- $(1 \pm \sqrt{5})/2$ entrambi con moltplicità algebrica e geometrica 1.

(3) Poiché gli autovalori di A sono tutti reali ed hanno uguali le molteplicità algebriche e geometriche, la matrice A è diagonalizzabile.
(4) La forma di Jordan di A coincide con la sua forma diagonale

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & & & & & \\ & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 3. Siano dati, nello spazio affine $\mathbb{R}^3$, i punti $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 1, 1)$, $C = (0, 2, 1)$, $D = (0, 1, 0)$.

(1) Si verifichi che i quattro punti non appartengano ad uno stesso piano.
(2) Si calcoli il baricentro P dei punti A, B, C.
(3) Si calcoli l'area del triangolo di vertici A, B, C.
(4) Si trovino le equazioni parametriche della retta r passante per il baricentro P e per il punto D.
(5) Si verifichi che le rette AB e PD sono sghembe.

Soluzione. (1) Condizione necessaria e sufficiente affinché i quattro punti non appartengano allo stesso piano è che i tre vettori $A - D$, $B - D$, $C - D$ siano linearmente indipendenti, che cioè sia diverso da zero il determinante della matrice che li ha come colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

ci mostra che i quattro punti non sono complanari.

(2) Il baricentro ha come coordinate la media aritmetica delle coordinate dei tre punti:

$$P = \frac{1}{3}\left((1, 1, 1) + (2, 1, 1) + (0, 2, 1)\right) = (1, \tfrac{4}{3}, 1).$$

(3) L'area del triangolo è la metà della lunghezza del prodotto vettore $(B - A) \times (C - A)$. Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi l'area del triangolo $\triangle(ABC)$ è $1/2$.

(4) Poiché $\overrightarrow{DP} = (1, \frac{1}{3}, 1) = \frac{1}{3}(3, 1, 3)$, una rappresentazione parametrica della retta r è

$$r : \begin{cases} x = 3t, \\ y = 1 + t, \\ z = 3t. \end{cases}$$

(4) Per verificare che le rette AB e PD siano sghembe, basta verificare che il determinante della matrice che ha come colonne i vettori $B - A$, $P - D$ ed $A - D$ sia diverso da zero. Le due rette sono sghembe perché

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

$\square$