CAPITOLO XVI

# FORME REALI

## §1 Sistemi di Chevalley

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice complessa, $\mathfrak{h}$ una sua sottoalgebra di Cartan e $\mathcal{R}$ il sistema di radici di $\mathfrak{g}$ rispetto ad $\mathfrak{h}$.

Per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$ indichiamo con $H_\alpha$ l'elemento di $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ per cui $\beta(H_\alpha) = (\beta|\alpha^\vee)$, cioè $[H_\alpha, X] = (\beta|\alpha^\vee)X$ se $X \in \mathfrak{g}^\beta$. Fissiamo poi $X_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ in modo che siano verificate le:

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha\,,\ [H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha\,,\ [H_\alpha, X_{-\alpha}] = -2X_{-\alpha}\,. \tag{1.1}$$

Osserviamo che, se $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $\mathcal{R} = \{\pm\alpha\}$, allora le

$$X_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,\ X_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\,,\ H_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

soddisfano le relazioni (1.1).

Definiamo i coefficienti $N_{\alpha,\beta}$ mediante:

$$\begin{cases} [X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta} & \text{se} \quad \alpha, \beta, \alpha+\beta \in \mathcal{R} \\ N_{\alpha,\beta} = 0 & \text{se} \quad \alpha, \beta \in \mathcal{R}\,,\ \beta \neq -\alpha \text{ e } \alpha+\beta \notin \mathcal{R}\,. \end{cases} \tag{1.2}$$

Chiaramente abbiamo $N_{\alpha,\beta} = -N_{\beta,\alpha}$ per l'antisimmetria delle parentesi di Lie. Vale inoltre:

Lemma 1.1 *Se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$ e $\alpha + \beta + \gamma = 0$, allora:*

$$\frac{N_{\alpha,\beta}}{\|\gamma\|^2} = \frac{N_{\beta,\gamma}}{\|\alpha\|^2} = \frac{N_{\gamma,\alpha}}{\|\beta\|^2}\,. \tag{1.3}$$

Dim. Scriviamo l'identità di Jacobi per i vettori $X_\alpha$, $X_\beta$, $X_\gamma$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} [[X_\alpha, X_\beta], X_\gamma] &= N_{\alpha,\beta} H_\gamma \\ &= [[X_\alpha, X_\gamma], X_\beta] + [X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] \\ &= -N_{\gamma,\alpha} H_\beta - N_{\beta,\gamma} H_\alpha\,. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che l'applicazione $\eta \to \|\eta\|^2 H_\eta$ si estende a un'applicazione lineare di $\mathfrak{h}^*$ su $\mathfrak{h}$. Quindi $\|\gamma\|^2 H_\gamma = -\|\alpha\|^2 H_\alpha - \|\beta\|^2 H_\beta$. Inoltre, $H_\alpha$ e $H_\beta$ sono linearmente indipendenti. Da questo segue la (1.3). □

Lemma 1.2 *Se $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\mathcal{R}$ e $\beta-q\alpha,\dots,\beta+p\alpha$ è l'$\alpha$-stringa di $\alpha$ per $\beta$, allora:*

$$\frac{\|\alpha+\beta\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{q+1}{p}\,. \tag{1.4}$$

Dim. Consideriamo i vari casi possibili. Abbiamo $(\beta|\alpha^\vee)\in\{0,-1,-2,-3\}$.

Se $(\beta|\alpha^\vee)=0$, allora $p=q$. Poiché $p+q\leq 3$, abbiamo $p=q=1$. Poiché $\|\beta+\alpha\|^2>\|\beta\|^2$, la condizione che $(\alpha+\beta|\beta^\vee)=2$ ci dice che $\|\beta+\alpha\|^2=2\|\beta\|^2$, dimostrando la validità di (1.4) in questo caso.

Quando $(\beta|\alpha^\vee)=-1$, abbiamo $k\|\beta\|^2=\|\alpha\|^2$ se $(\alpha|\beta^\vee)=k\in\{-1,-2,-3\}$. Allora:

$$\|\alpha+\beta\|^2=k\|\beta\|^2+\|\beta\|^2+2(\alpha|\beta)=\|\beta\|^2$$

perché $2(\alpha|\beta)=-k\|\beta\|^2$. Poiché $q-p=-1$, abbiamo $p=q+1$ e ne deduciamo la (1.4).

Se $(\beta|\alpha^\vee)=-2$, allora $\|\beta\|^2=2\|\alpha\|$ e $(\alpha|\beta^\vee)=-1$. Quindi:

$$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2+\|\beta\|^2(\alpha|\beta^\vee)=\frac{1}{2}\|\beta\|^2\,.$$

Poiché $q-p=-2$ e $q=0$, otteniamo anche in questo caso la (1.4).

Consideriamo ora l'ultimo caso, in cui $(\beta|\alpha^\vee)=-3$. Abbiamo allora $\|\beta\|^2=3\|\alpha\|^2$ e $(\alpha|\beta^\vee)=-1$. Quindi:

$$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2+\|\beta\|^2(\alpha|\beta^\vee)=\frac{1}{3}\|\beta\|^2\,.$$

Poiché $q-p=-3$ e $q=0$, otteniamo la (1.4). $\square$

Lemma 1.3 *Siano $\alpha,\beta\in\mathcal{R}$ e sia $\beta-q\alpha,\dots,\beta,\dots,\beta+p\alpha$, con $p,q$ interi non negativi, la $\alpha$-stringa per $\beta$ in $\mathcal{R}$. Allora:*

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X_\alpha,X_{-\alpha})=-\frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}}(H_\alpha,H_\alpha) \tag{i}$$

$$N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}=-p(q+1) \tag{ii}$$

$$N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,-\beta}=(q+1)^2\,. \tag{iii}$$

Dim. Abbiamo:

$$2\kappa_{\mathfrak{g}}(X_\alpha,X_{-\alpha})=\kappa_{\mathfrak{g}}([H_\alpha,X_\alpha],X_{-\alpha})=\kappa_{\mathfrak{g}}(H_\alpha,[X_\alpha,X_{-\alpha}])=-\kappa_{\mathfrak{g}}(H_\alpha,H_\alpha)\,,$$

da cui (i).

Consideriamo il sottospazio vettoriale $V=\sum_{h\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^{\beta+h\alpha}=\sum_{h=-q}^{p}\mathfrak{g}^{\beta+h\alpha}$ di $\mathfrak{g}$. La restrizione a $V$ dell'endomorfismo $T=\mathrm{ad}(H_\alpha)$ ha traccia nulla. Poiché $T(X_{\beta+h\alpha})=[H_\alpha,X_{\beta+h\alpha}]=((\beta|\alpha^\vee)+2h)\,X_{\beta+h\alpha}$ otteniamo che:

$$(p+q+1)(\beta|\alpha^\vee)+p(p+1)-q(q+1)=0 \implies (\beta|\alpha^\vee)=q-p\,.$$

Abbiamo poi:

$$\begin{aligned}[X_{-\alpha},[X_\alpha,X_\beta]] &= N_{-\alpha,\alpha+\beta}N_{\alpha,\beta}X_\beta\\ &= [H_\alpha,X_\beta]+[X_\alpha,[X_{-\alpha},X_\beta]]\\ &= (\beta|\alpha^\vee)\,X_\beta + N_{\alpha,-\alpha+\beta}N_{-\alpha,\beta}\,X_\beta\end{aligned}$$

Dimostriamo la (ii) per induzione su $q$. Quando $q=0$, $\beta-\alpha\notin\mathcal{R}$ e quindi $N_{-\alpha,\beta}=0$, $(\beta|\alpha^\vee)=-p=-p(0+1)$ ci danno la (ii). Altrimenti, se $\beta-\alpha\in\mathcal{R}$ osserviamo che la $\alpha$-stringa per $\beta-\alpha$ è $(\beta-\alpha)-(q-1)\alpha,\dots,(\beta-\alpha)+(p+1)\alpha$ e quindi, supponendo per ricorrenza che la (ii) valga per $\alpha$ e $(\beta-\alpha)$, abbiamo:

$$N_{-\alpha,\alpha+\beta}N_{\alpha,\beta}=(q-p)-(p+1)q=-p(q+1)\,.$$

Per le (1.3) e la (1.4) abbiamo:

$$N_{-\alpha,-\beta}=N_{\alpha+\beta,-\alpha}\frac{\|\alpha+\beta\|^2}{\|\beta\|^2}=-N_{-\alpha,\alpha+\beta}\frac{q+1}{p}\,.$$

Quindi, utilizzando anche (i):

$$N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,-\beta}=-N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}\frac{q+1}{p}=p(q+1)\frac{q+1}{p}=(q+1)^2\,.$$

La dimostrazione è completa. □

Si dice *Sistema di Chevalley* di $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ una famiglia $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ tale che:

(I) $X_\alpha\in\mathfrak{g}^\alpha \quad \forall\alpha\in\mathcal{R}$

(II) $[X_\alpha,X_{-\alpha}]=-H_\alpha \quad \forall\alpha\in\mathcal{R}$

(III) $\exists\Theta\in\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ con $\Theta(H)=-H\ \forall H\in\mathfrak{h}\,,\ \Theta(X_\alpha)=X_{-\alpha}\ \forall\alpha\in\mathcal{R}\,.$

Teorema 1.4 *Esistono sistemi di Chevalley di* $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

Dim. Dalla costruzione di algebre di Lie complesse associate a un sistema di radici ridotto ricaviamo il seguente fatto:

*Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi di $\mathcal{R}$. Per ogni $\alpha\in\mathcal{B}$ sia $X_\alpha$ un elemento non nullo di $\mathfrak{g}^\alpha$ e per ogni $\alpha'\in\mathcal{B}'$ sia $Y_{\alpha'}$ un elemento non nullo di $\mathfrak{g}^{\alpha'}$. Allora esiste uno ed un solo automorfismo $\Phi$ di $\mathfrak{g}$ tale che $\Phi(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$ e $\Phi(\{X_\alpha\,|\,\alpha\in\mathcal{B}\})=\{Y_{\alpha'}\,|\,\alpha'\in\mathcal{B}'\}$.*
Fissiamo quindi un sistema di vettori non nulli $(Y_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ per cui sia soddisfatte le (I), (II). Sia $\Theta\in\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ tale che $\Theta(Y_\alpha)=Y_{-\alpha}$ per ogni $\alpha\in\mathcal{B}$. Necessariamente avremo anche $\Theta(Y_{-\alpha})=Y_\alpha$ e quindi $\Theta$ è un'involuzione. Per ogni $\alpha\in\mathcal{R}$ avremo $\Theta(Y_\alpha)=t_\alpha Y_{-\alpha}$ con $t_\alpha\in\mathbb{C}^*$ e $t_\alpha t_{-\alpha}=1$ perché $\Theta$ è un'involuzione. Scegliamo per ogni $\alpha\in\mathcal{R}$ un elemento $u_\alpha\in\mathbb{C}^*$ con $u_\alpha^2=t_\alpha$ e $u_{-\alpha}=u_\alpha^{-1}$. Allora $X_\alpha=u_\alpha Y_\alpha$ è un sistema di Chevalley per $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. □

Proposizione 1.5 *Se $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ è un sistema di Chevalley per $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, se $\alpha,\beta\in\mathcal{R}$ sono linerarmente indipendenti e $\beta-q\alpha,\dots,\beta+p\alpha$ è l'$\alpha$-stringa di $\alpha$ per $\beta$, allora:*

$$N_{\alpha,\beta}=N_{-\alpha,-\beta}=\pm(q+1)\,. \tag{1.5}$$

Dim. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} N_{-\alpha,-\beta}X_{-\alpha,-\beta} &= [X_{-\alpha}, X_{-\beta}] = [\Theta(X_\alpha), \Theta(X_\beta)] \\ &= \Theta([X_\alpha), X_\beta]) = N_{\alpha,\beta}X_{-\alpha,-\beta} \end{aligned}$$

da cui $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$. Poiché $N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,-\beta} = (q+1)^2$, otteniamo la tesi. $\square$

## §2 Forma compatta e forma split

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice complessa, $\mathfrak{h}$ una sua sottoalgebra di Cartan e $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ un sistema di Chevalley di $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

Proposizione 2.1 *I due sottospazi reali di $\mathfrak{g}$ :*

$$\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{h}_\mathbb{R} \oplus \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \mathbb{R}\, X_\alpha \tag{2.1}$$

$$\mathfrak{u} \,=\, i\mathfrak{h}_\mathbb{R} \oplus \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} (\mathbb{R}(X_\alpha + X_{-\alpha}) + i\mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha})) \tag{2.2}$$

*sono sottoalgebre di Lie reali semisemplici di $\mathfrak{g}$. Abbiamo $\mathfrak{g} = \mathbb{C}\otimes_\mathbb{R}\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ e $\mathfrak{g} = \mathbb{C}\otimes_\mathbb{R}\mathfrak{u}$. La restrizione a $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ e a $\mathfrak{u}$ della forma di Killing $\kappa_\mathfrak{g}$ è a valori reali ed è la forma di Killing di $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ e di $\mathfrak{u}$ rispettivamente, ed è definito negativo su $\mathfrak{u}$. Se $\tau$ è il coniugio definito su $\mathfrak{g}$ dalla forma reale $\mathfrak{u}$, se cioè $\tau(X+iY) = X - iY$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{u}$, la forma Hermitiana :*

$$\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \ni (X,Y) \longrightarrow -\kappa_\mathfrak{g}(X, \tau(Y)) \in \mathbb{C} \tag{2.3}$$

*è un prodotto scalare Hermitiano su $\mathfrak{g}$.*

Dim. La prima affermazione segue dal fatto che i coefficienti $N_{\alpha,\beta}$ rispetto al sistema di Chevalley $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ sono reali.

Se $Y_1 = H_1 + \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} c_1^\alpha X_\alpha$, $Y_2 = H_2 + \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} c_2^\alpha X_\alpha$, allora :

$$\begin{aligned} \kappa_\mathfrak{g}(Y_1, Y_2) &= \kappa_\mathfrak{g}(H_1, H_2) + \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} c_1^\alpha c_2^{-\alpha} \kappa_\mathfrak{g}(X_\alpha, X_{-\alpha}) \\ &= \kappa_\mathfrak{g}(H_1, H_2) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\mathcal{R}} c_1^\alpha c_2^{-\alpha} \kappa_\mathfrak{g}(H_\alpha, H_{-\alpha})\,. \end{aligned}$$

Abbiamo poi $\tau(X_\alpha) = X_{-\alpha}$ e quindi si verificano facilmente le altre affermazioni della proposizione. $\square$

Una sottoalgebra di Lie reale $\mathfrak{g}_0$ di $\mathfrak{g}$ si dice una *forma reale* di $\mathfrak{g}$ se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\,\mathfrak{g}_0$.

Se $\mathfrak{g}_0$ è una forma reale di $\mathfrak{g}$, l'applicazione $\sigma_{\mathfrak{g}_0} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ definita da $\sigma_{\mathfrak{g}_0}(X+iY) = X - iY$ se $X, Y \in \mathfrak{g}_0$ definisce un automorfismo anti-$\mathbb{C}$-lineare di $\mathfrak{g}$.

Una forma reale $\mathfrak{g}_0$ di $\mathfrak{g}$ si dice :

*split* se contiene una sottoalgebra di Cartan $\mathfrak{h}_0$ con $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(H)$ diagonalizzabile per ogni $H \in \mathfrak{h}_0$ ;

*compatta* se la forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}_0}$ è definita negativa.

Se $\mathfrak{u}$ è una forma compatta di $\mathfrak{g}$, allora:

$$(Z_1|Z_2) = -\kappa_{\mathfrak{g}}(Z_1, \tau(Z_2)) \quad \text{per} \quad Z_1, Z_2 \in \mathfrak{g}$$

è un prodotto scalare Hermitiano su $\mathfrak{g}$.

## §3 La decomposizione di Cartan

Teorema 3.1 *Sia $\mathfrak{g}$ la complessificazione di un'algebra di Lie semisemlice reale $\mathfrak{g}_0$ e $\sigma$ il coniugio in $\mathfrak{g}$ definito da $\mathfrak{g}_0$. Allora esiste una forma compatta $\mathfrak{u}$ di $\mathfrak{g}$ con $\sigma(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$.*

Dim. Fissiamo una qualsiasi forma compatta $\mathfrak{u}_0$ di $\mathfrak{g}$ e sia $\tau_0$ il coniugio di $\mathfrak{g}$ definito da $\mathfrak{u}_0$. La composizione $\nu = \sigma \circ \tau_0$ è un automorfismo dell'algebra di Lie complessa $\mathfrak{g}$, e lascia quindi invariata la sua forma di Killing. Indicando con $(X|Y)$ il prodotto scalare Hermitiano $(X, Y) = -\kappa_{\mathfrak{g}}(X, \tau_0(Y))$, abbiamo allora:

$$\begin{aligned}(X|\nu(Y)) &= -\kappa_{\mathfrak{g}}(X, \tau_0 \circ \sigma \circ \tau_0(Y)) = -\kappa_{\mathfrak{g}}(X, \nu^{-1} \circ \tau_0(Y)) \\ &= -\kappa_{\mathfrak{g}}(\nu(X), \tau_0(Y)) = (\nu(X)|Y) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}\,.\end{aligned}$$

Quindi $\nu$ è una trasformazione autoaggiunta per il prodotto scalare Hermitiano che abbiamo definito su $\mathfrak{g}$. Consideriamo allora la trasformazione autoaggiunta positiva $p = \nu^2 = \nu \circ \nu^*$. Essa ha autovalori reali positivi e $\mathfrak{g} = \oplus_{\lambda>0} E_\lambda$, ove $E_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, p(X) = \lambda X\}$. Abbiamo $[E_\lambda, E_\mu] \subset E_{\lambda\mu}$ per ogni $\lambda, \mu > 0$, perché $p$ è un automorfismo di $\mathfrak{g}$. Poiché $p$ è una trasformazione Hermitiana definita positiva su $\mathfrak{g}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ possiamo definire la sua potenza $p^t$ come una trasformazione Hermitiana definita positiva, caratterizzata da $p^t(X) = \lambda^t X$ se $X \in E_\lambda$, con $\lambda, \lambda^t > 0$. Essendo:

$$p^t([X, Y]) = (\lambda\mu)^t([X, Y]) = [\lambda^t X, \mu^t Y] = [p^t(X), p^t(Y)] \quad \text{se} \quad X \in E_\lambda,\ Y \in E_\mu\,,$$

anche $p^t$ è un automorfismo di $\mathfrak{g}$. Consideriamo ora, per ogni $t \in \mathbb{R}$, l'automorfismo anti-$\mathbb{C}$-lineare $\tau_t = p^t \circ \tau_0 \circ p^{-t}$ di $\mathfrak{g}$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, esso è il coniugio rispetto alla forma reale compatta $\mathfrak{u}_t = p^t(\mathfrak{u}_0)$. Da

$$\tau_0 \circ \nu \circ \tau_0^{-1} = \tau_0 \circ (\sigma \circ \tau_0) \circ \tau_0 = \tau_0 \circ \sigma = \nu^{-1}$$

otteniamo che $\tau_0 \circ p \circ \tau_0 = p^{-1}$ e, in generale, $\tau_0 \circ p^t \circ \tau_0 = p^{-t}$. Quindi:

$$\begin{aligned}&\sigma \circ \tau_t = \sigma \circ p^t \circ \tau_0 \circ p^{-t} = \sigma \circ \tau_0 \circ (\tau_0 \circ p^t \circ \tau_0 \circ p^{-t}) = \nu \circ p^{-2t} \\ &\tau_t \circ \sigma = (\sigma \circ \tau_t)^{-1} = p^{2t} \circ \nu^{-1} = \nu^{-1} \circ p^{2t}\end{aligned}$$

perché $\nu$ commuta con tutte le potenze reali di $p$ in quanto $\nu$, $p$ e $p^t$ sono tutte diagonalizzabili rispetto ad una stessa base di $\mathfrak{g}$.

Poiché $p = \nu^2$, abbiamo $\nu^{-1} \circ p^{1/2} = \nu \circ p^{-1/2}$, e quindi $\tau_{1/4} \circ \sigma = \sigma \circ \tau_{1/4}$. Otteniamo perciò la tesi con $\mathfrak{u} = p^{1/4}(\mathfrak{u}_0)$. □

Osserviamo che la $t \longrightarrow p^t$ è un gruppo a un parametro di automorfismi di $\mathfrak{g}$. Abbiamo quindi $p^t = \exp(t\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(P))$ per un elemento $P$ di $\mathfrak{g}$. Ricaviamo quindi dalla dimostrazione del teorema precedente:

Proposizione 3.2 *Se $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{u}_1$ sono due forme reali compatte della stessa algebra di Lie complessa semisemplice $\mathfrak{g}$, allora esiste un automorfismo interno $\phi \in \mathrm{Int}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ tale che $\phi(\mathfrak{u}_0) = \mathfrak{u}_1$.*

Dim. La dimostrazione del Teorema 3.1 ci dice che, data una forma reale $\mathfrak{g}_0$, luogo di punti fissi di un coniugio $\sigma$ di $\mathfrak{g}$ e una forma compatta $\mathfrak{u}_0$ di $\mathfrak{g}$, possiamo trovare un automorfismo interno $\psi \in \mathbf{Int}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ tale che $\psi(\mathfrak{u}_0) = \mathfrak{u}$ sia una forma compatta $\sigma$-invariante, cioè con $\sigma(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$. Utilizziamo questo fatto nel caso speciale in cui $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}_1$ sia anch'essa una forma compatta. Indichiamo con $\tau_0$ e $\tau_1 = \sigma$ i coniugi rispetto alle forme compatte $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{u}_1$, rispettivamente e sia $\psi \in \mathbf{Int}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ tale che $\tau_1(\psi(\mathfrak{u}_0)) = \psi(\mathfrak{u}_0)$. Allora $\psi^{-1} \circ \tau_1 \circ \psi$ è un automorfismo involutivo di $\mathfrak{g}$, con $\psi^{-1} \circ \tau_1 \circ \psi(\mathfrak{u}_0) = \mathfrak{u}_0$. Consideriamo la forma bilineare simmetrica:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(X,Y) &= -\kappa_{\mathfrak{g}}(X, \psi^{-1} \circ \tau_1 \circ \psi(Y)) \\ &= -\kappa_{\mathfrak{g}}(\psi(X), \tau_1(\psi(Y)) .\end{aligned}$$

Essa è definita positiva su $\mathfrak{u}_0$. Poiché $\psi^{-1} \circ \tau_1 \circ \psi$ è un'inovoluzione che trasforma $\mathfrak{u}_0$ in sé, $\mathfrak{u}_0$ si decompone nella somma diretta dell'autospazio relativo all'autovalore 1 e dell'autospazio relativo all'autovettore $-1$. Se $\psi^{-1} \circ \tau_1 \circ \psi(X) = -X$ per un $X \in \mathfrak{u}_0$, otteniamo:

$$\begin{aligned}0 \geq &\kappa_{\mathfrak{g}}(X, \psi^{-1} \circ \tau_1 \circ \psi(X)) \\ &= \kappa_{\mathfrak{g}}(X, -X) = -\kappa_{\mathfrak{g}}(X, \tau_0(X)) \geq 0 .\end{aligned}$$

Quindi $X = 0$, e questo prova che $\psi \circ \tau_1 \circ \psi^{-1}$, essendo l'identità su $\mathfrak{u}_0$, è proprio uguale a $\tau_0$. Ne segue che $\psi(\mathfrak{u}_0)$ è il luogo dei punti fissi di $\tau_1$ ed è perciò uguale ad $\mathfrak{u}_1$. □

Sia $\mathfrak{g}_0$ un'algebra di Lie semisemplice reale. Ricordiamo che una sottoalgebra $\mathfrak{k}_0$ di $\mathfrak{g}_0$ è *compatta*[1] se la restrizione a $\mathfrak{k}_0$ della forma di Killing di $\mathfrak{g}_0$ è definita negativa.

Un'*involuzione di Cartan* di un'algebra di Lie semisemplice reale $\mathfrak{g}_0$ è un automorfismo involutivo $\vartheta$ di $\mathfrak{g}_0$ per cui:

$$(X|Y)_\vartheta = -\kappa_{\mathfrak{g}_0}(X, \vartheta(Y)) \qquad \text{per} \quad X, Y \in \mathfrak{g}_0 \tag{3.1}$$

sia un prodotto scalare (definito positivo) su $\mathfrak{g}_0$.

Il luogo $\mathfrak{k}_0$ dei punti fissi di un'involuzione di Cartan è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{g}_0$ su cui la forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}_0}$ è definita negativa. Indichiamo con $\mathfrak{p}_0$ l'autospazio di $\mathfrak{g}_0$ corrispondente all'autovalore $-1$ di $\vartheta$. Poiché $\vartheta$ è un automorfismo involutivo, $\mathfrak{p}_0$ è l'ortogonale di $\mathfrak{k}_0$ rispetto alla forma di Killing. In particolare:

- $\mathfrak{k}_0$ è una sottoalgebra di Lie compatta di $\mathfrak{g}_0$ (in particolare è riduttiva);
- $\kappa_{\mathfrak{g}_0}$ è definita positiva su $\mathfrak{p}_0$ e $\mathrm{ad}(\mathfrak{k}_0)$ opera su $\mathfrak{p}_0$ come un'algebra di trasformazioni antisimmetriche rispetto al prodotto scalare definito su $\mathfrak{p}_0$ dalla forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}_0}$.

[1] Per il criterio di Cartan, un'algebra di Lie compatta $\mathfrak{k}$, cioè con $\kappa_{\mathfrak{k}_0}$ definita negativa, è semisemplice. La compattezza di un'algebra di Lie semisemplice reale $\mathfrak{k}$ è equivalente al fatto che il gruppo di Lie *lineare* $\mathbf{Int}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{k})$ degli automorfismi interni di $\mathfrak{k}$, che ha algebra di Lie $\mathfrak{k}$, sia compatto. Più in generale, una sottoalgebra di Lie compatta $\mathfrak{k}_0$ di $\mathfrak{g}$ è riduttiva, ma non necessariamente compatta. È compatto il sottogruppo analitico di $\mathbf{Int}(\mathfrak{g}_0)$ con algebra di Lie $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{k}_0)$ e l'applicazione $\mathfrak{k}_0 \ni X \longrightarrow \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(X) \in \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{k}_0)$ è un isomorfismo di algebre di Lie.

La decomposizione:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0 \tag{3.2}$$

associata ad un'involuzione di Cartan si dice una *decomposizione di Cartan* di $\mathfrak{g}_0$.

Osserviamo che, poiché $\kappa_{\mathfrak{g}_0}$ è definita positiva su $\mathfrak{p}_0$, la $\mathfrak{k}_0$ è una sottoalgebra compatta massimale di $\mathfrak{g}_0$.

TEOREMA 3.3 *Se $\mathfrak{g}$ è la complessificazione di un'algebra di Lie semisemlice reale $\mathfrak{g}_0$ e $\mathfrak{u}$ una forma reale compatta di $\mathfrak{g}$ invariante rispetto al coniugio $\sigma$ associato a $\mathfrak{g}_0$, allora $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}) \oplus (\mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u})$ è una decomposizione di Cartan di $\mathfrak{g}_0$.*

*Viceversa, se (3.2) è una decomposizione di Cartan di $\mathfrak{g}_0$, allora $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 \oplus i\mathfrak{p}_0$ è una forma reale compatta di $\mathfrak{g}$.*

*Date due decomposizioni di Cartan di $\mathfrak{g}_0$, vi è un automorfismo interno di $\mathfrak{g}_0$ che le trasforma l'una nell'altra.*

DIM. Siano $\sigma$ il coniugio rispetto alla forma reale $\mathfrak{g}_0$ e $\tau$ quello rispetto ad una forma reale compatta $\mathfrak{u}$ di $\mathfrak{g}$ e supponiamo che $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$. Allora la restrizione $\vartheta$ di $\tau \circ \sigma$ a $\mathfrak{g}_0$ è un'involuzione di Cartan. Infatti:

$$\kappa_{\mathfrak{g}_0}(X, \vartheta(Y)) = \kappa_{\mathfrak{g}}(X, \tau(Y)) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}\,.$$

Viceversa, osserviamo che se (3.2) è una decomposizione di Cartan di $\mathfrak{g}_0$, allora $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 \oplus i\mathfrak{p}$ è una forma reale di $\mathfrak{g}$. Il coniugio rispetto a $\mathfrak{u}$ è $\tau = \vartheta \circ \sigma = \sigma \circ \vartheta$, dove si è indicato con lo stesso simbolo $\vartheta$ l'estensione $\mathbb{C}$-lineare di $\vartheta$ a $\mathfrak{g}$. Se $X \in \mathfrak{k}_0$, $Y \in \mathfrak{p}_0$ abbiamo:

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X + iY, \tau(X + iY)) = \kappa_{\mathfrak{g}_0}(X, X) - \kappa_{\mathfrak{g}_0}(Y, Y)\,.$$

La forma Hermitiana $\kappa_{\mathfrak{g}}(\,\cdot\,, \tau(\,\cdot\,))$ è definita positiva su $\mathfrak{g}$, essendo un'estensione di un prodotto scalare definito sulla forma reale $\mathfrak{u}$ e quindi $\mathfrak{u}$ è una forma compatta di $\mathfrak{g}$.

Siano ora $\vartheta$ e $\vartheta'$ due involuzioni di Cartan su $\mathfrak{g}_0$. Siano $\mathfrak{k}_0 = \{X | \vartheta(X) = X\}$, $\mathfrak{p}_0 = \{X | \vartheta(X) = -X\}$, $\mathfrak{k}'_0 = \{X | \vartheta'(X) = X\}$ e $\mathfrak{p}'_0 = \{X | \vartheta'(X) = -X\}$. Indichiamo con $(X|Y)_\vartheta = -\kappa_{\mathfrak{g}_0}(X, \vartheta(Y))$ il prodotto scalare su $\mathfrak{g}_0$ associato a $\vartheta$. Se $\nu_0 = \vartheta \circ \vartheta'$, abbiamo:

$$(X|\nu_0(Y))_\vartheta = -\kappa_{\mathfrak{g}_0}(X, \vartheta'(Y)) = -\kappa_{\mathfrak{g}_0}(\vartheta'(X), Y) = (\nu_0(X)|Y)_\vartheta\,.$$

Questo dimostra che $\nu_0$ è una trasformazione simmetrica rispetto al prodotto scalare $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_\vartheta$ su $\mathfrak{g}_0$. Quindi $p_0 = \nu_0^2$ è simmetrica e definita positiva. Possiamo quindi inserire $p_0 = p_0^1$ in un gruppo a un parametro $p_0^t = \exp(t \cdot [\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(P_0)])$ di automorfismi interni di $\mathfrak{g}_0$, tutti simmetrici e definiti positivi per $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_\vartheta$ . Utilizzando gli argomenti della dimostrazione del Teorema 3.1, possiamo allora dimostrare che $p_0^{1/4} \circ \vartheta' \circ p_0^{-1/4}$ commuta con $\vartheta$. Allora $p_0^{1/4}(\mathfrak{k}'_0)$ è una sottoalgebra compatta di $\mathfrak{g}_0$ invariante per $\vartheta$, ed il suo ortogonale $p_0^{1/4}(\mathfrak{p}'_0)$ un sottospazio invariante per $\vartheta$ su cui la forma di Killing è definita positiva. Ne segue che $p_0^{1/4}(\mathfrak{k}'_0) = \mathfrak{k}_0$, $p_0^{1/4}(\mathfrak{p}'_0) = \mathfrak{p}_0$ e quindi anche $p_0^{1/4} \circ \vartheta' \circ p_0^{-1/4} = \vartheta$. $\square$

Osserviamo che vale la:

Proposizione 3.4 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice complessa. Indichiamo con $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ l'algebra di Lie reale ottenuta da $\mathfrak{g}$ per restrizione del campo degli scalari. Allora la decomposizione di Cartan (3.2) di $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ è della forma:*

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u} \tag{3.3}$$

*ove $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{u}$ è una forma reale compatta di $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{p}_0 = i\mathfrak{u}$.*

Dim. Infatti, se $\mathfrak{u}$ è una forma reale compatta di $\mathfrak{g}$, la (3.3) è una decomposizione di Cartan di $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, e tutte le decomposizioni di Cartan di $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ sono coniugate ad essa da un automorfismo interno. Poiché gli automorfismi interni di $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ trasformano forme reali compatte in forme reali compatte di $\mathfrak{g}$, otteniamo la tesi della proposizione.□

## §4 Le algebre semisemplici classiche

**1.** Tipo $\mathrm{A}_\ell$

Sia $n = \ell + 1$ e consideriamo l'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. La forma bilineare simmetrica

$$B(X, Y) = \text{traccia}(XY)$$

è non degenere su $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ perché $B(X, X^*) > 0$ per ogni $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \setminus \{0\}$. Quindi $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ è riduttiva. Il suo centro è costituito dalle matrici che sono multiple della matrice identica $I_n$ e quindi $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ è l'ideale semisemplice di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Definiamo, per ogni coppia di indici $1 \leq i, j \leq n$:

$E_{i,j}$ =matrice con coefficiente dell'$i$-esima riga e $j$-esima colonna uguale a 1 e tutti gli altri coefficienti uguali a zero.

Posto $H_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$ per $1 \leq i \leq \ell = n - 1$, le matrici

$\{E_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{H_i \mid 1 \leq i \leq \ell\}$ formano una base di $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

Sia $\mathfrak{h}$ il sottospazio di $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ generato da $H_1, \ldots, H_\ell$. Indicando con $e_i(H)$ l'$i$-esimo elemento della diagonale di $H \in \mathfrak{h}$, abbiamo, per ogni $1 \leq i, j \leq n$:

$$\mathrm{ad}(H)(E_{i,j}) = [H, E_{i,j}] = (e_i(H) - e_j(H))E_{i,j}\,.$$

Otteniamo perciò:

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})}(H, H) &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} (e_i(H) - e_j(H))^2 \\ &= 2n \cdot (\text{traccia}(H^2)) - 2(\text{traccia}(H))^2 = 2n \cdot B(H^2)\,.\end{aligned}$$

Osserviamo che $\mathfrak{h}$ è formato da tutte le matrici diagonali di $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Se $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ è un endomorfismo semisemplice, esiste una $g \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ per cui $H = g \circ X \circ g^{-1} \in \mathfrak{h}$. Poiché $\mathrm{Ad}(g)$ è un automorfismo di $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, abbiamo allora:

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})}(X, X) &= \kappa_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})}(\mathrm{Ad}(g)(X), \mathrm{Ad}(g)(X)) = \kappa_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})}(H, H) \\ &= 2n \cdot \text{traccia}(H^2) = 2n \cdot \text{traccia}(X^2)\,.\end{aligned}$$

Poiché le matrici semisemplici di $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ formano un sottoinsieme denso di $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, le due forme quadratiche $\kappa_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})}(X, X)$ e $2n\cdot$traccia$(X \circ X)$ sono uguali per ogni $X \in$

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ e quindi lo sono anche le forme bilineari simmetriche associate. Abbiamo perciò:

$$\kappa_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})}(X,Y) = 2n \cdot \text{traccia}(X \circ Y) \qquad \forall X,Y \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\,. \tag{4.1}$$

Abbiamo ancora:

$$\mathcal{R} = \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}\,. \tag{4.2}$$

Inoltre i vettori

$$X_{i,j} = \begin{cases} E_{i,j} & \text{se} \quad 1 \leq i < j \leq n \\ -E_{i,j} & \text{se} \quad 1 \leq j < i \leq n \end{cases} \tag{4.3}$$

formano un sistema di Chevalley di $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. L'automorfismo di Chevalley è:

$$\Theta\colon \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \ni X \longrightarrow -{}^tX \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\,. \tag{4.4}$$

La forma compatta di $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, che si ottiene da questo sistema di Chevalley, è la sottoalgebra $\mathfrak{su}(n)$ delle matrici $X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ che soddisfano $X + X^* = 0$, ove $X^* = {}^t\bar{X}$ è la trasposta coniugata, è cioè l'algebra di Lie reale delle matrici Hermitiane antisimmetriche. La decomposizione di Cartan di $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, considerata come un'algebra di Lie reale, è la decomposizione $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(n) \oplus i\mathfrak{su}(n)$, ove $i\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{p}(n)$ è lo spazio vettoriale delle matrici Hermitiane simmetriche. Il coniugio rispetto alla forma reale $\mathfrak{su}(n)$ è $X \longrightarrow \tau(X) = -X^*$.

La forma split di $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, con la scelta del sistema di Chevalley che abbiamo fatto, è l'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ delle matrici reali $n \times n$ con traccia nulla.

**2.** Tipo $\mathrm{B}_\ell$

Sia $n = 2\ell + 1$ un numero dispari e consideriamo l'algebra di Lie delle matrici complesse $n \times n$ antisimmetriche. È conveniente introdurre la matrice simmetrica:

$$S_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \cdot & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

e identificare l'algebra di Lie delle matrici antisimmetriche a

$$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \mid {}^tXS_n + S_nX = 0\}\,. \tag{4.6}$$

Abbiamo:

$$X = (x_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) \iff x_{i,j} = -x_{n+1-j,n+1-i} \quad \text{per } 1 \leq i,j \leq n\,.$$

Osserviamo che, se $X \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$, anche $X^* = {}^t\bar{X} \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$, e quindi la restrizione a $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ di $B(X,Y) = \text{traccia}(X \circ Y)$ è non degenere.

Con le notazioni introdotte sopra, definiamo le matrici:

$$H_i = E_{i,i} - E_{n+1-i,n+1-i},\ i = 1,\ldots,\ell\,,$$
$$F_{i,j} = E_{i,j} - E_{n+1-j,n+1-i},\ 1 \leq i,j \leq n\,.$$

Osserviamo che $F_{i,j} = 0$ se $i + j = n + 1$ e $F_{n+1-j,n+1-i} = -F_{i,j}$. Quindi gli $H_i$, con $1 \leq i \leq \ell$ e gli $F_{i,j}$, con $i + j \leq n = 2\ell + 1$, formano una base di $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$.

Indichiamo con $\mathfrak{h}$ il sottospazio delle matrici diagonali di $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$, che è generato da $H_1, \ldots, H_\ell$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\operatorname{ad}(H)(F_{i,j}) &= [H, F_{i,j}] = [H, E_{i,j} - E_{n+1-j,n+1-i}] \\ &= (e_i(H) - e_j(H))E_{i,j} - (e_{n+1-j}(H) - e_{n+1-i}(H))E_{n+1-j,n+1-i}] \\ &= (e_i(H) - e_j(H))(E_{i,j} - E_{n+1-j,n+1-i}) = (e_i(H) - e_j(H))F_{i,j}\,.\end{aligned}$$

Risulta allora, per $H \in \mathfrak{h}$:

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})}(H, H) &= \sum_{i+j \leq n} (e_i(H) - e_j(H))^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (e_i(H) - e_j(H))^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (e_i(H) - e_{n+1-i}(H))^2 \\ &= n \sum_{i=1}^{n} (e_i(H))^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} (e_i(H))^2 \\ &= (2\ell - 1) \sum_{i=1}^{n} (e_i(H))^2\,.\end{aligned}$$

Otteniamo allora:

$$\kappa_{\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})}(H, H) = (2\ell - 1)\operatorname{traccia}(H^2)\,,$$

e quindi, poiché la formula vale allora, per il coniugio, per tutte le matrici diagonalizzabili di $\mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C})$, che formano un aperto denso, abbiamo infine:

$$\kappa_{\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})}(X, Y) = (2\ell - 1)\operatorname{traccia}(X \circ Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C})\,. \tag{4.7}$$

Il sistema di radici $\mathcal{R}$ associato a $\mathfrak{h}$ è formato da:

$$\mathcal{R} = \{\pm e_i \,|\, i = 1, \ldots, \ell\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \,|\, 1 \leq i \neq j \leq \ell\} \tag{4.8}$$

ove gli $F_{i,\ell+1}$, con $i = 1, \ldots, \ell$ e gli $F_{\ell+1,i}$ sono autovettori che corrispondono alle radici $\pm e_i$, e gli $F_{i,j}$, con $i + j \leq n$ ed $i, j \neq \ell + 1$, alle radici $e_i - e_j$ (identificando $e_i$ con $-e_{n+1-i}$ per $i = \ell+1, \ldots, n$). Definiamo un sistema di Chevalley in $\mathfrak{so}(2\ell+1, \mathbb{C})$ ponendo:

$$\begin{cases} X_{e_i} = F_{i,\ell+1} & 1 \leq i \leq \ell \\ X_{-e_i} = -F_{\ell+1,i} & 1 \leq i \leq \ell \\ X_{e_i - e_j} = F_{i,j} & 1 \leq i < j \leq \ell \\ X_{e_i + e_j} = F_{i,\ell+1-j} & 1 \leq i < j \leq \ell \\ X_{-e_i + e_j} = -F_{j,i} & 1 \leq i < j \leq \ell \\ X_{-e_i - e_j} = -F_{\ell+1-i,\ell+1-j} & 1 \leq i < j \leq \ell\,. \end{cases}$$

Utilizzando questo sistema di Chevalley, otteniamo la forma compatta:

$$\mathfrak{u} = \{X \in \mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C}) \,|\, X + X^* = 0\} = \mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{su}(2\ell + 1)\,.$$

Quest'algebra di Lie reale è isomorfa all'algebra di Lie delle matrici reali antisimmetriche:

$$\mathfrak{so}(2\ell+1) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n+1,\mathbb{R}) \mid X + {}^tX = 0\}\,.$$

A partire dal sistema di Chevalley sopra descritto, otteniamo la forma split. Essa è la sottoalgebra delle matrici reali di $\mathfrak{so}(2\ell+1,\mathbb{C})$:

$$(\mathfrak{so}(2\ell+1,\mathbb{C}))^{\mathbb{R}} = \mathfrak{so}(\ell,\ell+1) = \{X \in \mathfrak{sl}(2\ell+1,\mathbb{R}) \mid {}^tXS_{2\ell+1} + S_{2\ell+1}X = 0\}\,.$$

**3.** Tipo $\mathrm{C}_\ell$

Consideriamo la matrice antisimmetrica $(2\ell)\times(2\ell)$:

$$J_\ell = \begin{pmatrix} & S_\ell \\ -S_\ell & \end{pmatrix}$$

e sia $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ l'algebra di Lie delle matrici complesse:

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}(2\ell,\mathbb{C}) \mid {}^tXJ_\ell + J_\ell X = 0\}\,. \tag{4.9}$$

Se $X = (x_{i,j})_{1\le i,j\le 2\ell} \in \mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})$, abbiamo:

$$x_{i,j} = \begin{cases} -x_{2\ell+1-j,2\ell+1-i} & \text{per } \begin{cases} 1\le i,j\le \ell \\ \quad\text{oppure} \\ \ell+1\le i,j\le 2\ell \end{cases} \\[2ex] x_{2\ell+1-j,2\ell+1-i} & \text{per } \begin{cases} 1\le i\le \ell, \quad \ell+1\le j\le 2\ell \\ \quad\text{oppure} \\ \ell+1\le i\le 2\ell, \quad 1\le j\le \ell\,. \end{cases} \end{cases}$$

Possiamo quindi definire una base di $\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})$ mediante

$$\begin{aligned} H_i &= E_{i,i} - E_{2\ell+1-i,2\ell+1-i} && \text{per} \quad 1\le i\le \ell \\ F_{i,j} &= E_{i,j} - E_{2\ell+1-j,2\ell+1-i} && \text{per} \quad 1\le i,j\le \ell \\ F_{i,j} &= E_{i,j} + E_{2\ell+1-j,2\ell+1-i} && \text{per} \quad 1\le i\le \ell,\ \ell<j\le 2\ell+1-i \\ F_{i,j} &= E_{i,j} + E_{2\ell+1-j,2\ell+1-i} && \text{per} \quad \ell<i\le 2\ell,\ 1\le j\le 2\ell+1-i\,. \end{aligned}$$

Indichiamo con $\mathfrak{h}$ la sottoalgebra complessa abeliana di $\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})$ generata da $H_1$, …, $H_\ell$. Essa contiene tutte le matrici diagonali di $\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})$. Se $H\in\mathfrak{h}$, abbiamo:

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})}(H)(F_{i,j}) = \begin{cases} (e_i(H)-e_j(H))F_{i,j} & 1\le i\ne j\le \ell \\ (e_i(H)+e_{2\ell+1-j}(H))F_{i,j} & 1\le i\le \ell,\ \ell<j\le 2\ell+1-i \\ -(e_{2\ell+1-i}(H)+e_j(H)) & \ell<i\le 2\ell,\ 1\le j\le 2\ell+1-i \end{cases}$$

Abbiamo perciò:

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})}(H,H) &= \sum_{i,j=1}^{\ell}(e_i(H)-e_j(H))^2 + 2\sum_{1\le i\le j\le \ell}(e_i(H)+e_j(H))^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{\ell}\big((e_i(H)-e_j(H))^2 + (e_i(H)+e_j(H))^2\big) + \sum_{i=1}^{\ell}(2e_i(H))^2 \\ &= (4\ell+4)\sum_{i=1}^{\ell}(e_i(H))^2 = (2\ell+2)\mathrm{traccia}(H^2)\,. \end{aligned}$$

Poiché ogni elemento regolare di $\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})$ è coniugato a una matrice di $\mathfrak{h}$, otteniamo che le due forme quadratiche $\kappa_{\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})}(H,H)$ e $(2\ell+2)\text{traccia}(H\circ H)$ coincidono su tutti gli elementi regolari di $\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})$, e quindi su tutto $\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})$, perché gli elementi regolari formano un aperto denso. Da questa osservazione ricaviamo:

$$\kappa_{\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})}(X,Y) = (2\ell+2)\text{traccia}(X\circ Y) \quad \forall X,Y\in\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})\,. \tag{4.10}$$

Poiché $X^* = {}^t\bar{X} \in \mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})$ se $X\in\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})$, la forma di Killing è non degenere su $\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})$ e quindi questa è un'algebra di Lie semisemplice (complessa) per il criterio di Cartan.

Osserviamo che $\mathfrak{h}$ è un'algebra di Cartan di $\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})$. Il corrispondente sistema di radici è:

$$\mathcal{R} = \{\pm(e_i\pm e_j)\,|\,1\le i<j\le\ell\}\cup\{2e_i\,|\,1\le i\le\ell\}\,. \tag{4.11}$$

Le matrici reali di $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ sono una sua *forma split*:

$$\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{R}) = \{X\in\mathfrak{sl}(2\ell,\mathbb{R})\,|\,{}^tXJ_\ell + J_\ell X = 0\}\,. \tag{4.12}$$

La forma compatta è:

$$\mathfrak{sp}(\ell) = \mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})\cap\mathfrak{su}(2\ell)\,. \tag{4.13}$$

**4.** Tipo $\mathrm{D}_\ell$

Sia $n = 2\ell \ge 8$ un numero pari e consideriamo l'algebra di Lie delle matrici complesse $n\times n$ antisimmetriche. È conveniente identificare l'algebra di Lie delle matrici antisimmetriche a

$$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) = \{X\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\,|\,{}^tXS_n + S_nX = 0\}\,. \tag{4.14}$$

Abbiamo:

$$X = (x_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) \iff x_{i,j} = -x_{n+1-j,n+1-i} \quad \text{per } 1\le i,j\le n\,.$$

Osserviamo che, se $X\in\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$, anche $X^* = {}^t\bar{X}\in\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$, e quindi la restrizione a $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ di $B(X,Y) = \text{traccia}(X\circ Y)$ è non degenere.

Con le notazioni introdotte sopra, definiamo le matrici:

$$\begin{gathered} H_i = E_{i,i} - E_{n+1-i,n+1-i},\ i = 1,\dots,\ell\,,\\ F_{i,j} = E_{i,j} - E_{n+1-j,n+1-i},\ 1\le i,j\le n\,. \end{gathered}$$

Osserviamo che $F_{i,j} = 0$ se $i+j = n+1$ e $F_{n+1-j,n+1-i} = -F_{i,j}$. Quindi gli $H_i$, con $1\le i\le\ell$ e gli $F_{i,j}$, con $i+j\le n = 2\ell$, formano una base di $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$.

Indichiamo con $\mathfrak{h}$ il sottospazio delle matrici diagonali di $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$, che è generato da $H_1,\dots,H_\ell$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)(F_{i,j}) = [H,F_{i,j}] &= [H, E_{i,j} - E_{n+1-j,n+1-i}]\\ &= (e_i(H)-e_j(H))E_{i,j} - (e_{n+1-j}(H) - e_{n+1-i}(H))E_{n+1-j,n+1-i}]\\ &= (e_i(H)-e_j(H))(E_{i,j} - E_{n+1-j,n+1-i}) = (e_i(H)-e_j(H))F_{i,j}\,. \end{aligned}$$

Risulta allora, per $H \in \mathfrak{h}$:

$$
\begin{aligned}
\kappa_{\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})}(H,H) &= \sum_{i+j\leq n} (e_i(H) - e_j(H))^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (e_i(H) - e_j(H))^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (e_i(H) - e_{n+1-i}(H))^2 \\
&= n\sum_{i=1}^{n} (e_i(H))^2 - 2\sum_{i=1}^{n} (e_i(H))^2 \\
&= (2\ell - 2)\sum_{i=1}^{n} (e_i(H))^2 \,.
\end{aligned}
$$

Otteniamo allora:

$$\kappa_{\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})}(H,H) = (2\ell-2)\mathrm{traccia}(H^2)\,,$$

e quindi, poiché la formula vale allora, per il coniugio, per tutte le matrici diagonalizzabili di $\mathfrak{so}(2\ell+1,\mathbb{C})$, che formano un aperto denso, abbiamo infine:

$$\kappa_{\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})}(X,Y) = (2\ell-2)\mathrm{traccia}(X\circ Y) \quad \forall X,Y \in \mathfrak{so}(2\ell,\mathbb{C})\,. \tag{4.15}$$

Il sistema di radici $\mathcal{R}$ associato a $\mathfrak{h}$ è formato da:

$$\mathcal{R} = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq \ell\} \tag{4.16}$$

ove gli $F_{i,j}$, con $i+j \leq n$ sono associati alle radici $e_i - e_j$ (identificando $e_i$ con $-e_{n+1-i}$ per $i = \ell+1,\ldots,n$). Definiamo un sistema di Chevalley in $\mathfrak{so}(2\ell+1,\mathbb{C})$ ponendo:

$$
\begin{cases}
X_{e_i-e_j} = F_{i,j} & 1 \leq i < j \leq \ell \\
X_{e_i+e_j} = F_{i,\ell+1-j} & 1 \leq i < j \leq \ell \\
X_{-e_i+e_j} = -F_{j,i} & 1 \leq i < j \leq \ell \\
X_{-e_i-e_j} = -F_{\ell+1-i,\ell+1-j} & 1 \leq i < j \leq \ell\,.
\end{cases}
$$

La forma compatta di $\mathfrak{so}(2\ell,\mathbb{C})$, calcolata a partire da questo sistema di Chevalley, è

$$\mathfrak{u} = \{X \in \mathfrak{so}(2\ell,\mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\} = \mathfrak{so}(2\ell,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{su}(2\ell+1)\,.$$

Quest'algebra di Lie reale è isomorfa all'algebra di Lie delle matrici reali antisimmetriche:

$$\mathfrak{so}(2\ell) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n+1,\mathbb{R}) \mid X + {}^tX = 0\}\,.$$

A partire dal sistema di Chevalley sopra descritto, otteniamo la forma split. Essa è la sottoalgebra delle matrici reali di $\mathfrak{so}(2\ell,\mathbb{C})$:

$$(\mathfrak{so}(2\ell,\mathbb{C}))^{\mathbb{R}} = \mathfrak{so}(\ell,\ell) = \{X \in \mathfrak{sl}(2\ell,\mathbb{R}) \mid {}^tXS_{2\ell} + S_{2\ell}X = 0\}\,.$$