Corso di Laurea in Scienza dei Materiali

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 27/09/2016
SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1. Si consideri la quadrica affine $\mathcal{C}$ d'equazione cartesiana

$$xy + 2yz - z^2 + 4x = 0.$$

(1) Si dica se è o no degenere.
(2) Si dica se è a centro, e se lo è se ne determini il centro.
(3) Se ne determini il tipo.
(4) Si trovi l'equazione cartesiana del suo piano tangente α nel punto $(0,0,0)$ e si descriva l'intersezione $\alpha \cap \mathcal{C}$.

Soluzione. La matrice incompleta A e la matrice completa B associate alla quadrica sono, rispettivamente,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$\det(A) = -\tfrac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} > 0,$$

$$\det(B) = -2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

(1) La quadrica $\mathcal{C}$ è non degenere perché $\det(B) = 4 \neq 0$.
(2) Poiché $\det(A) \neq 0$, la quadrica ha un centro C, le cui coordinate (x, y, z) sono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot y + 2 = 0, \\ \frac{1}{2} \cdot x + z = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Quindi $C = (8, -4, -4)$. $\square$

(3) Poiché $\det(B) = 4 > 0$ e la quadrica $\mathcal{C}$ è non vuota e a centro, essa è un iperboloide a una falda.
(4) Il piano α tangente a $\mathcal{C}$ in $(0,0,0)$ ha equazione cartesiana $\{x = 0\}$ ed interseca la quadrica in

$$\{(0, y, z) \mid 2yz - z^2 = z \cdot (2y - z) = 0\},$$

che è l'unione delle due rette $\{x = 0,\ z = 0\}$ (l'asse y) e della retta $\{x = 0,\ z = 2y\}$, di equazioni parametriche $\{(0, t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice reale quadrata di ordine sei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Si calcoli il rango della matrice A e si dica se è o no invertibile.
(2) Si calcolino gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica e geometrica.
(3) Si dica se A è diagonalizzabile in campo reale e se ne calcoli la forma di Jordan.

Soluzione. (1) La seconda, terza e quarta riga della matrice sono uguali tra loro e così la prima e la quinta e la sesta. La matrice quindi non è invertibile. Il suo rango è uguale a quello della matrice delle prime due colonne, e dunque uguale a due.

(2) Possiamo rappresentare A come il prodotto righe per colonne $A = BC$ delle matrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per il Teorema di Sylvester, il suo polinomio caratteristico è

$$p_A(x) = p_{BC}(x) = x^4 \cdot p_{CB}(x).$$

È

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$p_{CB}(x) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 6 \Longrightarrow p_A(x) = x^4[(x-3)^2 - 6].$$

Quindi gli autovalori di A sono tutti reali, uguali a 0, $3 - \sqrt{6}$, $3 + \sqrt{6}$. Poiché A ha rango due, l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica e geometrica uguali entrambe a quattro. Gli autovalori $2 \pm \sqrt{6}$ hanno invece entrambi moltelpicità algebrica e geometrica 1.

Poiché tutti gli autovalori di A sono reali ed hanno uguali molteplicità algebrica e geometrica, la matrice A è diagonalizzabile ed ha quindi forma di Jordan diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 3-\sqrt{6} & \\ & & & & & 3+\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 3. Si considerino nello spazio affine $\mathbb{R}^3$ le due rette r_1 ed r_2, di equazioni cartesiane

$$r_1 : \begin{cases} x + y = 0, \\ 2x - y + z = 1 \end{cases} , \quad r_2 : \begin{cases} x - 2z = 0, \\ y + 4z = 5. \end{cases}$$

(1) Si dica se le due rette sono sghembe o complanari.
(2) Si trovi una retta parallela all'asse delle x che le intersechi entrambe.
(3) Si calcoli la distanza tra le due rette.

Soluzione. Descriviamo le due rette in forma parametrica. Possiamo scrivere ad esempio

$$r_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = -t, \\ z = 1 - 3t, \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 5 - 4t, \\ z = t. \end{cases}$$

A queste descrizioni corrispondono i vettori di velocità $\vec{v}_1 = (1, -1, -3)^t$ e $\vec{v}_2 = (2, -4, 1)^t$. Inoltre (in corripondenza del valore 0 del parametro t sulle due rette) $P_1 = (0, 0, 1) \in r_1$, $P_2 = (0, 5, 0) \in r_2$.
(1) È $\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 5, -1)^t$. La condizione necessaria e sufficiente affinché r_1 ed r_2 siano sghembe è che sia diverso da zero il determinante della matrice $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1P_2})$. Abbiamo

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1P_2}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 5 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 30 - 5 - 2 = -33 \neq 0$$

e quindi r_1 ed r_2 sono sghembe.
(2) La retta cercata si ottiene intersecando il piano α_1 delle parallele all'asse x passanti per r_1 con il piano α_2 delle parallele all'asse x passanti per r_2. Siano

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 \wedge e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \vec{v}_2 \wedge e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Poiché α_i contiene il punto p_i, le equazioni cartesiane dei due piani sono

$$\alpha_1 = \{3y + z = 1\}, \quad \alpha_2 = \{y + 4z = 5\}.$$

Poiché il sistema lineare

$$\begin{cases} 3y + z = 1, \\ y + 4z = 5 \end{cases} \qquad \text{ha l'unica soluzione} \qquad \begin{cases} y = -\frac{1}{11}, \\ z = \frac{14}{11}, \end{cases}$$

la retta cercata ha equazioni parametriche

$$x = t, y = -\frac{1}{11}, z = \frac{14}{11}.$$

(3) Per calcolare la distanza tra le due rette possiamo utilizzare la formula

$$\operatorname{dist}(r_1, r_2) = \frac{|\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1P_2})|}{\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\|} = \frac{33}{\sqrt{222}},$$

perché

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad 13^2 + 7^2 + 2^2 = 222.$$

□

Esercizio 4 (Non assegnato)**.** Sia A la matrice reale 6×6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Si dica se A è invertibile e se ne calcoli il rango.
(2) Si calcolino quanti siano i suoi autovalori reali e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(3) Si dica se A è diagonalizzabile in campo reale.

Proof. (1) Le ultime quattro righe della matrice A sono uguali. La A non è quindi invertibile ed ha lo stesso rango della matrice 3×6 formata dalle sue prime tre righe:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché il minore delle prime tre colonne di A' è 1, il rango di A' e quindi anche quello di A è tre.

(2) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix},$$

dove nel primo passaggio abbiamo uguagliato il determinante ottenuto sottraendo alla prima la sesta, alla seconda la quinta ed alla terza la quarta colonna e nel secondo abbiamo raccolto a fattore λ nelle prime tre colonne. Quindi

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 \cdot \{(\lambda-2)^3 - 6(\lambda-2) - 6\}$$

Quindi A ha l'autovalore 0 con molteplicità algebrica e geometrica 3. Consideriamo il polinomio di terzo grado $f(t) = t^3 - 6t - 6$. È $f'(t) =$

$3(t^2-2)$, con le due radici $-\sqrt{2}$ e $+\sqrt{2}$ che corrispondono rispettivamente al massimo e al minimo locali di $f(t)$. Poiché

$$f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 6 = 4\sqrt{2} - 6 < 0, \quad f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2} - 6 < 0,$$

vi è una sola radice reale di $p_A(\lambda) = 0$ diversa da zero, che è semplice. Quindi A ha un solo autovalore reale diverso da zero con molteplicità algebrica e geometrica 1 e due autovalori complessi, tra loro coniugati, anch'essi con molteplicità algebrica e geometrica uno.

(3) Poiché A ha autovalori non reali, non è diagonalizzabile in campo reale. $\square$