PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 12/07/2016
SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1. Si consideri la conica affine d'equazione

$$9x^2 + 6y^2 - 4xy - 6x + 8y = 1.$$

(1) Se ne determini il tipo.
(2) Si dica se è o no a centro, e in caso affermativo se ne trovi il centro.
(3) Se ne trovino gli assi.
(4) Se ne determini l'eccenticità (rapporto tra la distanza da un fuoco e dalla corrispondente direttrice).

Soluzione. (1) Le matrici incompleta A e completa B associate alla conica sono, rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \det(A) = 50 > 0, \\ \det(B) = -200 < 0. \end{cases}$$

Infatti,

$$\begin{vmatrix} 9 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & -14 & -3 \\ -14 & 22 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 14^2 - (18 \cdot 22) = 196 - 396 = -200.$$

Inoltre, gli autovalori della matrice incompleta sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$(x-9)(x-6)-4 = x^2-15x+50 = 0 \Rightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{225-200}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2} = \begin{cases} 5, \\ 10. \end{cases}$$

La conica è quindi non degenere, non vuota e la matrice incompleta è non degenere e definita positiva. Si tratta perciò di un'ellisse.

(2) Poiché il determinante della matrice incompleta è diverso da zero, la conica è a centro. Le coordinate x, y del centro sono le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 9x - 2y = 3, \\ -2x + 6y = -4. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{5}, \\ y = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

(3) Nelle nuove variabili X, Y, con $x = X + \frac{1}{5}$, $y = Y - \frac{3}{5}$ l'equazione della conica è

$$(*) \qquad 9X^2 + 6Y^2 - 4XY = 4.$$

La matrice A ha autovalori $5, 10$, con corrispondenti autovettori

$$v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_{10} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Gli assi dell'ellisse sono quindi le rette (passanti per il centro e di direzioni v_5, v_{10}) di equazioni parametriche:

$$r' : \begin{cases} x = t + \frac{1}{5}, \\ y = 2t - \frac{3}{5}, \end{cases} \qquad r'' : \begin{cases} x = 2t + \frac{1}{5}, \\ y = -t - \frac{3}{5}. \end{cases}$$

(4) Poiché gli autovalori di A sono 5, 10, possiamo scegliere coordinate ortonormali ξ, η, con centro in $(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$ in cui la conica ha equazione

$$(**) \qquad 5\,\xi^2 + 10\,\eta^2 = 4.$$

I suoi semiassi sono quindi $a = 2/\sqrt{5}$ e $b = 2/\sqrt{10}$, mentre la distanza dei fuochi dal centro è

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{4}{5} - \frac{4}{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

L'eccentricità è quindi

$$\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{2/\sqrt{10}}{2/\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$ □

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 6×6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dica se A è invertibile e se ne calcoli il rango.
(2) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(3) Si dica se A è diagonalizzabile.
(4) Se ne scriva la forma di Jordan.

Soluzione. (1) La matrice A non è invertibile perché ha uguali le prime due e le due ultime colonne e quindi ha determinante zero e rango minore o uguale a quattro. Cancellando la prima riga e la prima colonna e l'ultima riga e l'ultima colonna otteniamo la sottomatrice 4×4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha determinante uno. Quindi A ha rango quattro.

(2) La matrice $\lambda\mathrm{I} - A$ è diagonale a blocchi ed abbiamo perciò

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I} - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda^2 - 2\lambda)^2 \cdot (\lambda - 1)^2 = \lambda^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2.$$

La matrice A ha quindi autovalori $0, 1, 2$, ciascuno con molteplicità algebrica due. Poiché abbiamo verificato nel punto (1) che A ha rango 4, la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è due.

Abbiamo (il segno $\sim$ significa che le matrici considerate hanno lo stesso rango)

$$A - \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $(\mathrm{I} - A)$ ha rango quattro (l'ultima è una sua sottomatrice 4×4 con determinante uno) e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è due e coincide con la sua molteplicità algebrica.

Abbiamo poi

$$A - 2\mathrm{I} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo il minore di ordine 5 ottenuto cancellando l'ultima riga e la prima colonna (le prime due colonne e le ultime due righe sono l'una l'opposta dell'altra):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

Quindi $(2\mathrm{I} - A)$ ha rango 5 e perciò l'autovalore 2 ha molteplicità geometrica uno, diversa dalla sua molteplicità algebrica, che è uguale a due.

(3) Poiché l'autovalore 2 di A ha molteplicità algebrica e geometrica diverse, la matrice A non è diagonalizzabile.

(4). La forma di Jordan di A è, per la discussione del punto (2), la

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 3. Siano dati, nello spazio affine $\mathbb{R}^3$, i punti

$$A = (5, 1, -3), \; B = (1, 6, 0), \; C = (-3, 1, 3), \; D = (0, 3, -1).$$

(1) Si determini il piano α passante per i punti A, B, C.
(2) Si determini il volume del tetraedro di vertici A, B, C, D.
(3) Si determini il centro e il raggio della circonferenza κ del piano α che contiene i punti A, B, C.
(4) Si determini il volume del cono circolare che ha per base il cerchio limitato dalla circonferenza κ e vertice in D.

Soluzione. (1) Il piano α è formato dai punti $P = (x, y, z)$ per cui il vettore $\overrightarrow{AP}$ sia linearmente dipendente dai vettori

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

L'equazione cartesiana di α si può scrivere allora nella forma

$$\begin{vmatrix} -4 & -4 & x-5 \\ 5 & 0 & y-1 \\ 3 & 3 & z+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & x-1 \\ 5 & 0 & y-1 \\ 0 & 3 & z \end{vmatrix} = 5(3(x-1) + 4z) = 0.$$

È quindi

$$\alpha : \quad 3x + 4z = 3.$$

(2) Il volume del tetraedro è uguale ad un sesto del volume del parallelepipedo generato dai vettori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. Quest'ultimo è il valore assoluto di

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 2 \begin{vmatrix} -4 & -4 & -5 \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 70.$$

□

Quindi

$$\text{Volume}(\triangle(ABCD)) = \frac{70}{6} = \frac{35}{3}.$$

(3) Il centro della circonferenza appartiene al piano α ed ai piani ortogonali ai lati del triangolo $\triangle(ABC)$ passanti per i loro punti medi. Indichiamo con β il piano dei punti equidistanti da A e B e con γ quello dei punti

equidistanti da A e C. Poiché $\frac{1}{2}(A + B) = (3, \frac{7}{2}, -\frac{3}{2})$ e $\frac{1}{2}(A + C) = (1, 1, 0)$, otteniamo

$$\beta: \quad -4(x-3) + 5\left(y - \frac{7}{2}\right) + 3\left(z + \frac{3}{2}\right) = 0 \;\sim\; 4x - 5y - 3z + 1 = 0,$$

$$\gamma: \quad -4(x-1) + 3(y-1) = 0 \quad \sim \quad 4x - 3y = 1.$$

Le coordinate x, y, z del centro Q della circonferenza sono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + 4z = 3, \\ 4x - 5y - 3z + 1 = 0, \\ 4x - 3y = 1, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Il raggio R è la distanza di uno dei punti di κ dal centro:

$$R = \mathrm{dist}(Q, A) = \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

(4) Il volume del cono è un terzo del prodotto dell'area di base per l'altezza h, che è la distanza del vertice D dal piano α della circonferenza κ. Poiché

$$h = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot -1 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{7}{5},$$

otteniamo

$$\text{volume del cono} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{7}{5} = \frac{35 \cdot \pi}{3}.$$