Corso di Laurea in Scienza dei Materiali

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 21/06/2016
SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1. Si consideri la quadrica affine d'equazione

$$x^2 - 3xz + y^2 - z^2 + 2x + 4y = 0.$$

(1) Se ne determini il tipo.
(2) Si dica se è o no a centro, e in caso affermativo se ne trovi il centro.

Soluzione. La matrice incompleta A e la matrice completa B associate alla quadrica sono, rispettivamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo (calcoliamo il determinante di B sviluppandolo rispetto alla seconda riga)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (9/4) = -13/4 < 0,$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -3/2 & 1 \\ -3/2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ -3/2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3/2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 13 = 11 > 0.$$

(1) La quadrica è quindi un iperboloide a una falda, perché $\det(B) > 0$ ed A è non degenere ed indefinita, in quanto ha determinante negativo.
(2) Poiché $\det(A) \neq 0$, la quadrica ha un centro C, le cui coordinate (x, y, z) sono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} x - \frac{3}{2}z + 1 = 0, \\ y + 2 = 0, \\ -\frac{3}{2}x - z = 0. \end{cases}$$

Quindi $C = \left(-\frac{4}{13}, -2, \frac{6}{13}\right)$. □

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 6×6 che si ottiene come prodotto righe per colonne ($A = BC$) delle matrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dica se A è invertibile e se ne calcoli il rango.
(2) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(3) Si dica se A è diagonalizzabile.
(4) Se ne scriva la forma di Jordan.

Soluzione. Per il teorema di Sylvester, il polinomio caratteristico di A è il prodotto

$$p_A(x) = x^4 p_{CB}(x).$$

Abbiamo

$$CB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} p_{CB}(x) = x^2 - 2x - 6, \\ \text{con radici } x_\pm = 1 \pm \sqrt{7}. \end{cases}$$

Gli autovalori di A sono quindi 0, con molteplicità algebrica 4 e $(1 - \sqrt{7})$, $(1 + \sqrt{7})$, ciascuno con molteplicità algebrica e geometrica uguali ad 1. Il nucleo di L_A contiene i quattro vettori linearmente indipendenti

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

e questo di dice che anche la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è uguale a 4. In conclusione:
(1) A non è invertibile perché ha autovalore 0 ed ha rango 2, perché la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è 4.
(2) Gli autovalori sono 0, con molteplicità algebrica e geometrica 4 ed $(1 \pm \sqrt{7})$, ciascuno con molteplicità algebrica e geometrica 1.
(3) A è diagonalizzabile perché tutti i suoi autovalori hanno la stessa molteplicità algebrica e geometrica.

(4) La forma di Jordan di A coincide quindi con la sua forma diagonale ed è dunque

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} & & & & & \\ & 1-\sqrt{7} & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$ con tutti i termini fuori dalla diagonale principale nulli.

$\square$

Esercizio 3. Siano dati, nello spazio affine $\mathbb{R}^3$, i punti

$$A=(1,0,1),\ B=(-1,1,2),\ C=(3,2,0),\ D=(0,3,-1).$$

(1) Si dica se le due rette AB e CD siano sghembe e si calcoli la loro distanza.
(2) Si determini la distanza di C dalla retta AB.
(3) Si determini la retta r, perpendicolare al piano ABC per il baricentro dei tre punti A, B, C.
(4) Si determini la distanza di D da r.

Soluzione. (1) Condizione necessaria e sufficiente affinché le rette AB e CD siano sghembe è che i vettori $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{AC}$ siano linearmente indipendenti, cioè che sia non nullo il determinante

$$\det(\vec{AB},\vec{CD},\vec{AC}) = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -15 \neq 0.$$

Le due rette sono quindi sghembe.
(2) La distanza di C dalla retta AB è l'altezza rispetto alla base AB del triangolo $\triangle(ABC)$. Possiamo trovarla dividendo il doppio dell'area di $\triangle(ABC)$ per la lunghezza del lato AB. Otteniamo

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi}$$

$$\operatorname{dist}(C,AB) = \frac{\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\sqrt{(-3)^2+(-6)^2}}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}} = \sqrt{\frac{45}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

(3) Il baricentro dei tre punti A, B, C è il punto

$$E = \tfrac{1}{3}(A+B+C) = (1,1,1).$$

(4) Poiché la direzione della retta r è parallela al vettore $\vec{AB} \times \vec{AC}$, le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1, \\ z = 1 + 2t, \end{cases} \qquad \text{avendo scelto come velocità sulla retta il vettore } \vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right).$$

La distanza di D da r si può calcolare, con procedimento analogo a quello seguito nel punto (2), utilizzando la formula

$$\operatorname{dist}(D, r) = \frac{\|\vec{v} \times \vec{ED}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Poiché

$$\vec{ED} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \text{è} \quad \vec{v} \times \vec{ED} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

otteniamo

$$\operatorname{dist}(D, r) = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2.$$

□

Esercizio 4. Sia A la matrice reale 6×6 che si ottiene come prodotto righe per colonne ($A = BC$) delle matrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dica se A è invertibile e se ne calcoli il rango.
(2) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(3) Si dica se A è diagonalizzabile.
(4) Se ne scriva la forma di Jordan.

Soluzione. Per il teorema di Sylvester, il polinomio caratteristico di A è il prodotto

$$p_A(x) = x^4 p_{CB}(x).$$

Abbiamo

$$CB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} p_{CB}(x) = (x-3)^2 + 9, \\ \text{con radici complesse } x_\pm = 3(1 \pm i). \end{cases}$$

Gli autovalori di A sono quindi 0, con molteplicità algebrica 4 e $(3+3i)$, $(3-3i)$, ciascuno con molteplicità algebrica e geometrica uguali ad 1. Il nucleo di L_A contiene i quattro vettori linearmente indipendenti

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

e questo di dice che anche la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è uguale a 4. In conclusione:

(1) A non è invertibile perché ha autovalore 0 ed ha rango 2, perché la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è 4.

(2) Gli autovalori sono 0, con molteplicità algebrica e geometrica 4 e $3(1 \pm i)$, ciascuno con molteplicità algebrica e geometrica 1.

(3) A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, perché ha autovalori non reali; lo è su $\mathbb{C}$, perché su $\mathbb{C}$ tutti i suoi autovalori hanno la stessa molteplicità algebrica e geometrica.

(4) La forma di Jordan complessa di A coincide quindi con la sua forma diagonale ed è dunque

$$\begin{pmatrix} 3+3i & & & & & \\ & 3-3i & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{r} \text{con tutti i termini fuori dalla} \\ \text{diagonale principale nulli.} \end{array}$$

$\square$