PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 23/9/2015
SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1. Si consideri la quadrica affine d'equazione

$$3x^2 - 2xy + xz - 3yz + 2x + 1.$$

(1) Si verifichi se è o non è degenere.
(2) Se ne determini il tipo.
(3) Si dica se è o no a centro, e in caso affermativo se ne trovi il centro.

Soluzione. La matrice incompleta A e la matrice completa B associate alla quadrica sono

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I loro determinanti sono

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{27}{4} = -\frac{21}{4},$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \det(A) \\ &= \frac{9}{4} - \frac{21}{4} = -\frac{12}{4} = -3. \end{aligned}$$

(1) La quadrica è non degenere perché il determinante della sua matrice completa è diverso da zero.
(2) Poiché il determinante di B è negativo, ed A non è definita perché ha due coefficienti nulli sulla diagonale, la quadrica assegnata è un iperboloide a due falde.
(3) La quadrica è a centro perché il determinante della sua matrice incompleta è diverso da zero. Le coordinate (x, y, z) del centro risolvono il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x - y + \frac{1}{2}z + 1 = 0, \\ -x - \frac{3}{2}z = 0, \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y = 0. \end{cases}$$

Sostituendo $x = 3y$, $z = -2y$, che si ricavano dalle ultime due equazioni, nella prima otteniamo

$$9y - y - y + 1 = 0 \Longrightarrow y = -\frac{1}{7}, \quad x = -\frac{3}{7}, \quad z = \frac{2}{7}.$$

Il centro è quindi nel punto $C = \left(-\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)$.

$\square$

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 4×4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dica se A è invertibile.
(2) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(3) Si dica se A è diagonalizzabile.
(4) Se ne scriva la forma di Jordan.

Soluzione. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 2+2\lambda & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1+\lambda & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2+2\lambda & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)^3 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+1)^3 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^3 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)^3 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3(\lambda-5).$$

(1) Il determinante di A è $p_A(0) = -5 \neq 0$ e quindi la matrice è invertibile.
(2) Gli autovalori di A sono (-1) con molteplicità algebrica tre e 5 con molteplicità algebrica, e quindi anche geometrica, 1. La $A + I$ è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha tutte le colonne uguali e dunque rango 1. Allora $\ker(A+I)$ ha dimensione tre e quindi la molteplicità geometrica di (-1) è 3.

(3) Poiché le molteplicità algebriche e geometriche degli autovalori coincidono, la A è diagonalizzabile.

(4) Essendo la A diagonalizzabile, la sua forma di Jordan coincide con la sua forma diagonale

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 5 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Esercizio 3. Siano dati, nello spazio affine $\mathbb{R}^3$, i quattro punti

$$A = (1,0,1), \quad B = (-1,1,0), \quad C = (0,2,-1), \quad D = (0,0,3).$$

(1) Si verifichi che i quattro punti non appartengano ad uno stesso piano.

(2) Si determini il punto D', simmetrico di D rispetto al piano ABC.

(3) Si determini il volume dell'esaedro convesso di vertici A, B, C, D, D'.

Soluzione. Consideriamo i tre vettori

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Essi formano le colonne di una matrice con determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

(1) I quattro punti non sono complanari perché il determinante della matrice con colonne $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ è diverso da zero, e quindi i tre vettori non appartengono ad uno stesso piano vettoriale e di conseguenza i punti A, B, C, D non appartengono allo stesso piano affine.

(2) La direzione della perpendicolare al piano ABC è parallela al vettore

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il piano ABC ha quindi equazione cartesiana $y + z = 1$. Il punto D' appartiene alla retta r per D parallela a $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$, di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

La $f(x, y, x) = y + z - 1$ assume sulle coordinate di D il valore 2. Deve assumere il valore opposto sulle coordinate di D', che corrispondono dunque al valore di t per cui

$$t + (3 + t) - 1 = -2 \Longleftrightarrow 2t + 2 = -2 \Longleftrightarrow t = -2.$$

È quindi $D' = (0, -2, 1)$.

(3) Il volume dell'esaedro convesso di vertici A, B, C, D, D' è il doppio del volume del tetraedro di vertici A, B, C, D, che è uguale ad (1/3) del valore assoluto del determinante della matrice di colonne $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$. Quindi

$$\text{volume dell'esaedro} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 = 4.$$

□