PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 24/06/2015
SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1. Si consideri la quadrica affine d'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + yz + 2x = 1.$$

(1) Se ne determini il tipo.
(2) Si dica se è o no a centro, e in caso affermativo se ne trovi il centro.

Soluzione. Associamo alla quadrica $\mathcal{Q}$ proposta le matrici completa e incompleta

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

È $\det(A) = -\frac{13}{4}$, $\det(B) = \frac{5}{2}$. Poiché $\det(B) > 0$, la quadrica proiettiva corrispondente $\overline{\mathcal{Q}}$, che è non vuota perché la matice B non è semidefinita avendo due termini sulla diagonale non nulli e di segni opposti, è la rigata; poiché $\det(A) \neq 0$ la $\overline{\mathcal{Q}}$ interseca l'iperpiano all'infinito in una conica reale non degenere. Dunque:

(1) la quadrica affine $\mathcal{Q}$ è un iperboloide a una falda;
(2) poiché $\det(A) \neq 0$, la $\mathcal{Q}$ è a centro. Il suo centro è il polare dell'iperpiano all'infinito e le sue coordinate (x, y, z) sono quindi soluzione del sistema lineare $(x, y, z, 1)Be_i = 0$ per $i = 1, 2, 3$, con e_1, e_2, e_3, e_4 base canonica di $\mathbb{R}^4$, cioè:

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0, \\ 2x + y + \frac{1}{2}z = 0, \\ \frac{1}{2}y + z = 0. \end{cases}$$

Perciò il centro è $C = \left(\frac{3}{13}, -\frac{8}{13}, \frac{4}{13}\right)$.

□

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 5×5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dica se A è invertibile.

(2) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(3) Si dica se A è diagonalizzabile.
(4) Se ne scriva la forma di Jordan.

Soluzione. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda & \lambda-1 & \lambda(1-\lambda) \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 1+\lambda \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda & \lambda-1 & \lambda(1-\lambda) \\ -(1+\lambda) & 0 & 1+\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)^2\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda-\lambda^2 \\ -(\lambda+1) & 0 & \lambda+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda-\lambda^2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda+1)(2\lambda-\lambda^2+1) \\
&= -(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda-1-\sqrt{2})(\lambda-1+\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico è quindi

$$p_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda-1).$$

(1) Poiché $\det(A) = -p_A(0) = 1 \neq 0$, la matrice A è invertibile.
(2) Gli autovalori di A sono -1, $1+\sqrt{2}$ e $1-\sqrt{2}$ con molteplicità algebrica e geometrica 1, ed 1 con molteplicità algebrica 2. Per calcolare la molteplicità geometrica di 1, consideriamo la matrice

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Indichiamo con $\sim$ la relazione di avere lo stesso rango. Abbiamo allora

$$A - I \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

Abbiamo

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

e quindi $A - I$ ha rango quattro, da cui ricaviamo che la molteplicità geometrica di 1 è uno.

(3) Poiché l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica diversa da quella geometrica, la matrice A non è diagonalizzabile.

(4) La sua forma di Jordan ha quatto blocchi, tre di dimensione 1 corrispondenti agli autovalori -1, $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$, ed uno di dimensione 2, corrispondente all'autovalore 1: è perciò (i coefficienti non indicati sono nulli)

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & & & \\ & \boxed{1+\sqrt{2}} & & \\ & & \boxed{1-\sqrt{2}} & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 3. Siano dati, nello spazio affine $\mathbb{R}^3$, i punti $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (0, 2, 2)$.

(1) Si verifichi che i tre punti non sono allineati.
(2) Si calcoli il loro baricentro P.
(3) Si calcoli l'area del triangolo di vertici A, B, C.
(4) Si trovino le equazioni parametriche della retta r passante per il baricentro P e perpendicolare al piano α che contiene i punti A, B, C.
(5) Si scriva l'equazione cartesiana del piano α.

Soluzione. (1) Condizione necessaria e sufficiente affinché i tre punti non siano allineati è che i due vettori $B - A = (1, 1, -1)$ e $C - A = (-1, 2, 1)$ siano linearmente indipendenti. Possiamo dimostrarlo calcolando il loro prodotto vettore e verificando che è diverso da zero:

$$v = (B - A) \times (C - A) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

(2) Le coordinate del baricentro sono la media aritmetica delle coordinate dei tre punti:

$$P = \tfrac{1}{3}(A + B + C) = (1, 1, 1).$$

(3) L'area del triangolo ABC è la metà del modulo del prodotto vettore $(B - A) \times (C - A)$. È quindi

$$\text{Area}(ABC) = \tfrac{1}{2}\|v\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

(4) La velocità lungo la retta cercata è proporzionale a v. Scegliendo quindi come velocità il vettore ${}^t(1, 0, 1) = \tfrac{1}{3}v$, e come punto iniziale il baricentro $P = (1, 1, 1)$ otteniamo le equazioni parametriche della retta r:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1, \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

(5) Il piano α è perpendicolare alla direzione v e quindi della forma $x + z = c$. Sostituendo le coordinate di uno qualsiasi dei punti A, B, C si trova che lo scalare c deve essere uguale a due, e pertanto l'equazione cartesiana di α si può scrivere nella forma $x + z = 2$. $\square$