PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 24/2/2015
SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1. Si consideri la quadrica affine d'equazione

$$x^2 + 2yz - z^2 + 4x + 2z = 1$$

(1) Se ne determini il tipo.
(2) Si dica se è o no a centro, e in caso affermativo se ne trovi il centro.

Soluzione. Associamo alla quadrica la matrice completa B e la matrice incompleta A definite da:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

(1) La matrice completa è non degenere, ha determinante positivo e non è definita perché non é definita positiva in quanto $\det(A) < 0$. La quadrica proiettiva è perciò una rigata. Poiché A è non degenere, l'iperpiano all'infinito la interseca in una conica non degenere e quindi la quadrica affine è un *iperboloide a una falda*.

(2) Poiché $\det(A) \neq 0$, la quadrica è a centro. Il centro è il polare dell'iperpiano all'infinito e si trova quindi risolvendo il sistema lineare

$${}^t e_i B c = 0 \quad \text{per } i = 1, 2, 3,$$

dove e_i sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $c = {}^t(x, y, x, 1)$ per le coordinate x, y, z del centro in $\mathbb{R}^3$. Dobbiamo cioè risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2 = 0, \\ z = 0, \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2, \\ y = -1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Il centro della quadrica è il punto di coordinate $(-2,-1,0)$. Nelle coordinate riferite al centro la sua equazione è

$$(x+2)^2+2(y+1)z-z^2=5 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+1)^2=5+(y+z-1)^2.$$

La seconda equazione mostra in modo esplicito che si tratta di un iperboloide a una falda. $\square$

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 5×5

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\1&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

(1) Si dica se A è invertibile.
(2) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(3) Si dica se A è diagonalizzabile.
(4) Se ne scriva la forma di Jordan.

Soluzione. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A.

$$\begin{aligned}-p_A(\lambda)&=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0&0&0\\0&1-\lambda&1&0&1\\0&0&1-\lambda&0&1\\1&0&0&1-\lambda&0\\0&0&0&0&1-\lambda\end{vmatrix}\\&=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0&1\\0&1-\lambda&0&1\\0&0&1-\lambda&0\\0&0&0&1-\lambda\end{vmatrix}\\&=(1-\lambda)^2\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\0&1-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^5\end{aligned}$$

Quindi $p_A(\lambda)=(\lambda-1)^5$.

(1) È $\det(A)=-p_A(0)=1\neq 0$ e quindi A è invertibile.

(2) A ha unico autovalore 1 con molteplicità algebrica 5. Per calcolare la molteplicità geometrica, calcoliamo il rango della matrice $A-I$. È

$$A-I=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=B,$$

dove $\sim$ indica che le due matrici hanno lo stesso rango. Poiché $\det(B) = 1 \neq 0$, la matrice B, e quindi anche $A - I$, ha rango tre.

Ne segue che *la molteplicità geometrica dell'autovalore* 1 è 2.

(3) Poiché le molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore 1 sono diverse, la matrice A *non* è diagonalizzabile.

(4) Facciamo agire la matrice A sugli elementi della base canonica. Abbiamo

$$\begin{cases} A(e_1) = e_1 + e_4, \\ A(e_2) = e_2, \\ A(e_3) = e_2 + e_3, \\ A(e_4) = e_4, \\ A(e_5) = e_2 + e_3 + e_5. \end{cases}$$

In particolare i sottospazi $V = L(e_1, e_4)$ e $W = L(e_2, e_3, e_5)$ sono A-invarianti e complementari in $\mathbb{R}^5$. Poiché sappiamo che la decomposizione di Jordan rispetto ad A di $\mathbb{R}^5$ consta di due sottospazi, la $\mathbb{R}^5 = V \oplus W$ è proprio la decomposizione di Jordan e quindi la forma di Jordan di A ha due blocchi, uno di ordinde due, l'altro di ordine tre. La forma di Jordan di A è

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$\square$

Esercizio 3. Siano dati, nello spazio affine $\mathbb{R}^3$, il piano

$$\alpha : \quad x + y + z = 3,$$

ed i punti $A = (1, 0, 1)$ e $B = (1, 1, 0)$.

(1) Si calcolino le proiezioni ortogonali A', B' dei punti A, B sul piano α.
(2) Si determini l'equazione del piano perpendicolare al piano α che contiene i punti A e B.
(3) Si calcoli l'area del triangolo piano che ha come vertici i punti A, B ed il punto medio del segmento $A'B'$.

Soluzione. Il vettore $\vec{n} = (1, 1, 1)$ è perpendicolare al piano α.

(1) Possiamo calcolare i punti A', B' come intersezioni del piano α con le rette $A + \mathbb{R}\vec{n} = \{(1 + t, t, 1 + t)$ e $B + \mathbb{R}\vec{n} = \{1 + t, 1 + t, t)\}$. Abbiamo

$$(1 + t) + t + (1 + t) = 3 \Longrightarrow t = \frac{1}{3} \Longrightarrow A' = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}),$$
$$(1 + t) + (1 + t) + t = 3 \Longrightarrow t = \frac{1}{3} \Longrightarrow B' = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}).$$

(2) Troviamo una direzione perpendicolare al piano β cercato calcolando il prodotto vettore di $\vec{n}$ e di $\overrightarrow{AB} = (0, 1, -1)$. È

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Imponendo al piano di contenere il punto A otteniamo l'equazione

$$\beta : \quad 2x - y - z = 1.$$

(3) Il punto medio M di $A'B'$ ha coordinate $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$. L'area del triangolo ABM è la metà del modulo del prodotto vettore $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/6 \\ -1/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'area del triangolo è perciò:

$$\text{Area}\left(\overset{\triangle}{ABM}\right) = \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{6} \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$\square$