SOLUZIONI PER LA PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 25/09/2014

Esercizio 1. Si consideri la matrice reale simmetrica 3×3, dipendente da un parametro reale k:

$$M_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

(1) Si trovino i valori del parametro reale k per cui M_k è definita positiva.
(2) Si fissi a piacere un valore di k per cui k è definita positiva e si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ ortonormale rispetto ad M_k.

Soluzione. 1) Per il teorema di Silvester, M_k è definita positiva se e soltanto se sono positivi i determinanti dei suoi tre minori principali. Essi sono:

$$D_1 = k, \quad D_2 = k^2 - 1, \quad D_3 = (k+2)(k-1)^2.$$

Quindi M_k è definita positiva se e soltanto se $k > 1$.

2) Scegliamo ad esempio $k = 2$, ed osserviamo che M_2 ha allora autovalori 1 con molteplicità due e 4 con molteplicità 1. Una base di autovettori ortogonale in $\mathbb{R}^3$ per il prodotto scalare standard sarà anche una base ortogonale per il prodotto scalare definito da M_2. Possiamo scegliere

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Normalizzando, cioè imponendo ai vettori $\vec{w}_i = c_i \vec{v}_i$ ($c_i \in \mathbb{R}$) la condizione ${}^t\vec{w}_i M_2 \vec{w}_i = 1$, troviamo la base $\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}_1$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{v}_2$, $\frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{v}_3$. □

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 6×6

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dica se A è invertibile.
(2) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(3) Si dica se A è diagonalizzabile.

Soluzione. La matrice A è triangolare superiore a blocchi, ed ha sulla diagonale due blocchi 3×3 uguali a $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Il suo determinante è il prodotto dei determinanti dei due blocchi diagonali. Quindi $\det A = (\det B)^2 = (-1)^2 = 1$ e la matrice A, avendo determinante diverso da zero, è invertibile.

2) Il suo polinomio caratteristico è il quadrato del polinomio caratteristico di B:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}^2 = (\lambda-1)^2(\lambda^2-1)^2 = (\lambda-1)^4(\lambda+1)^2.$$

La matrice A ha quindi autovalori 1, con molteplicità algebrica 4, e (-1), con molteplicità algebrica 2.

La molteplicità geometrica di 1 è la dimensione del nucleo della matrice

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché la seconda colonna è nulla e la prima l'opposta della terza, il rango è al più 4. Il determinante del minore delle prime quattro righe ed ultime quattro colonne è (-2). Quindi $\operatorname{rank}(A-I) = 4$ e la molteplicità geometrica di 1 è uguale a due (uguale alla dimensione sei dello spazio meno quattro del rango).

Abbiamo poi

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La prima e la terza riga sono uguali, quindi il rango è al più cinque. Il determinante del minore formato dalle prime cinque righe e le ultime cinque colonne è 8. Quindi il rango di $(A+I)$ è 5 e di conseguenza la molteplicità geometrica di (-1) è 1.

3) Poiché le molteplicità algebrica e geometrica sono differenti, la matrice non è diagonalizzabile.

Si potrebbe (non richiesto dall'esercizio) verificare che A ha la forma di Jordan

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Esercizio 3. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i punti $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (-1, 0, 0)$ e $D = (0, 1, 1)$.

(1) Si dica se le rette AB e CD sono sghembe.
(2) Si determini la distanza tra le rette AB e CD.
(3) Si calcoli il volume del tetraedro di vertici A, B, C, D.

Soluzione. 1) Condizione necessaria e sufficiente affinché le due rette siano sghembe è che i vettori $B - A$, $D - C$ e $C - A$ siano linearmente indipendenti, cioè che sia diverso da zero il determinante

$$(*) \qquad \Delta = |(B - A), (D - C), (C - A)| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Poiché $\Delta = 0$, le due rette sono complanari e non sghembe.

2) Poiché $B - A$ e $D - C$ sono lineramente indipendenti, le due rette complanari sono incidenti ed hanno quindi distanza 0 tra loro.

3) Il tetraedro $ABCD$ degenera in un quadrilatero piano ed ha quindi volume nullo. $\square$

Versione con testo modificato dell'esercizio precedente:

Esercizio 4. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i punti $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (0, 1, 1)$ e $D = (2, 0, 0)$.

(1) Si dica se le rette AB e CD sono sghembe.
(2) Si determini la distanza tra le rette AB e CD.
(3) Si calcoli il volume del tetraedro di vertici A, B, C, D.

Soluzione. 1) Condizione necessaria e sufficiente affinché le due rette siano sghembe è che i vettori $B - A$, $D - C$ e $C - A$ siano linearmente indipendenti, cioè che sia diverso da zero il determinante

$$(**) \qquad \Delta = |(B - A), (D - C), (C - A)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Poiché $\Delta = -3 \neq 0$, le due rette sono sghembe.

2) Una direzione $\vec{v}$ perpendicolare alle due rette sghembe si ottiene come prodotto vettore delle direzioni delle due rette:

$$\vec{v} = (B - A) \times (D - C) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La distanza tra le due rette è, in valore assoluto, la componente del vettore $C - A$ nella direzione $\vec{v}$ e quindi uguale a

$$\mathrm{dist}(AB, CD) = \frac{|\vec{v} \cdot (C - A)|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|\Delta|}{\sqrt{2^2 + 1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

3) Il volume del tetraedro di vertici A, B, C, D è un sesto del valore assoluto del determinante $(**)$:

$$\mathrm{volume}(\triangle_{ABCD}) = \frac{|\Delta|}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

Non ci sono ammessi all'orale.