<u>Corso di Laurea in Scienza dei Materiali</u>

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 26/06/2014

Soluzioni

Esercizio 1. Si considerino nello spazio affine $\mathbb{R}^3$ i punti $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (3, 0, 1)$ e $D = (2, 0, 2)$.

(1) Si determini l'area del triangolo di vertici A, B, C.
(2) Si trovino le equazioni parametriche della retta r, perpendicolare al piano α per A, B, C e passante per D.
(3) Si trovi il punto E, simmetrico del punto D rispetto al piano α, e la lunghezza del segmento DE.

Soluzione. L'area del triangolo ABC è la metà della lunghezza del prodotto vettore $(A - B) \times (C - A)$. Da

$$(A-B) \times (A-C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ricaviamo che

$$\text{area}(\triangle_{ABC}) = \tfrac{1}{2}\|(A-B) \times (A-C)\| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

(2) Il vettore $v = -(A - B) \times (C - A)$ può essere preso come velocità lungo la retta r, che quindi si può descrivere con le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 2t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

(3) L'equazione del piano α è $v \cdot (P - A) = 0$, cioè $x + 2y + z - 4 = 0$. Poiché il punto D appartiene al piano, esso coincide con il suo simmetrico rispetto ad esso. □

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 5×5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dica se A è invertibile.
(2) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(3) Si trovi la sua forma di Jordan.

Soluzione. (1) La matrice A ha uguali la prima e l'ultima riga e quindi ha determinante nullo e non è invertibile.

(2) La prima, la terza e la quinta riga sono uguali tra loro, e la seconda e la quarta riga sono uguali tra loro e non proporzionali alla prima. Quindi la matrice A ha rango due ed un autovalore uguale a 0 con molteplicità algebrica e geometrica 3.

L'immagine di A è il sottospazio V generato dai vettori

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori non nulli ed i corrispondenti autovettori sono quelli della restrizione di A a V. Abbiamo

$$Au = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3u + 3v, \quad Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3v.$$

La matrice della restrizione di A a V nella base u, v è dunque

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

che ha autovalore 3 con molteplicità algebrica due e molteplicità geometrica 1. Quindi A ha due autovalori: 0 con molteplicità algebrica e geometrica tre, e 3 con molteplicità algebrica due e molteplicità geometrica uno. (3) La forma di Jordan di A è

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & & & \\ & \boxed{0} & & \\ & & \boxed{0} & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 3. Si classifichi, al variare del parametro reale k, la quadrica affine Q_k di $\mathbb{R}^3$ di equazione

$$Q_k: \ 4kx^2 + 2xy - 2xz + 2yz - 4kx + k = 0.$$

Soluzione. La matrice completa associata alla quadrica Q_k è

$$B_k = \begin{pmatrix} 4k & 1 & -1 & -2k \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2k & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che A_k e B_k non sono mai definite, perché ci sono elementi della diagonale nulli. Il determinante di B_k è $-2k$. La quadrica è quindi non degenere se $k \neq 0$. La sua matrice incompleta ha determinante $-2(2k+1)$, e perciò la quadrica è a centro per $k \neq \frac{-1}{2}$. Otteniamo quindi:

Q_k è un iperboloide a due falde se $k < 0$ e $k \neq -\frac{1}{2}$.

Per $k = -\frac{1}{2}$ è $\det B_{-\frac{1}{2}} = 1$ e $\det A_{-\frac{1}{2}} = 0$. Quindi $Q_{-\frac{1}{2}}$ è un paraboloide iperbolico.

Per $k = 0$ è $\det B_0 = 0$, ma $\det A_0 = -2 \neq 0$ e quindi la quadrica degenera in un cono.

Per $k > 0$, è $\det B_k < 0$ e quindi, poiché A_k non è definita, la quadrica è un iperboloide a una falda. $\square$