Corso di Laurea in Scienza dei Materiali

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 05/06/2014

Soluzioni

Esercizio 1. Si considerino, nello spazio affine $\mathbb{R}^3$, i punti

$$A = (1, 0, 1), \quad B = (0, 1, 1), \quad C = (-1, 2, 0), \quad D = (1, 3, 0).$$

(1) Si verifichi che le rette AB e CD sono sghembe.
(2) Si calcoli il volume del tetraedro di vertici A, B, C, D.
(3) Si trovi la distanza tra le rette AB e CD.

Soluzione. Le due rette sono sghembe se e soltanto se la matrice

$$(A - B, C - D, A - D)$$

ha determinante non nullo. Il valore assoluto di questo determinante è infatti sei volte il volume del tetraedro di vertici A, B, C, D. Abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Quindi: (1) le due rette sono sghembe e (2) il volume del tetraedro è $\frac{1}{6}|-3| = \frac{1}{2}$.

(3) La distanza tra le rette AB e CD è la lunghezza della componente del vettore $A - D$ nella direzione perpendicolare alle due rette, cioè parallela al vettore

$$(A - B) \times (C - D) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Poiché $[(A - B) \times (C - D)] \cdot (A - D) = \det(A - B, C - D, A - D)$, otteniamo

$$\operatorname{dist}(AB, CD) = \left| \frac{[(A - B) \times (C - D) \cdot (A - D)}{\|(A - B) \times (C - D)\|} \right| = \frac{3}{3} = 1.$$

□

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 5×5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dica se A è invertibile.

(2) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(3) Si trovi la sua forma di Jordan.

Soluzione. (1) La matrice A ha le prime due colonne uguali e quindi non è invertibile.

(2) Sono uguali tra loro anche le ultime due colonne e la terza è somma della prima e della quinta. Siano u e v la prima e la quinta colonna, rispettivamente. Poiché u e v non sono proporzionali, sono linearmente indipendenti e quindi a matrice A ha rango due ed un autovalore nullo con molteplicità algebrica e geometrica 3. Sia V il sottospazio vettoriale generato da u e v. È

$$Au = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u + 3v, \quad Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3u + v.$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante -8 e traccia 2 e quindi autovalori -2 e 4. Perciò la matrice A ha autovalori 0 con molteplicità algebrica e geometrica 3 e -2, 4, ciascuno con molteplicità algebrica e geometrica 1.

(3) Poiché molteplicità algebriche e geometrice coincidono, la matrice A è diagonalizzabile, ed ha quindi forma di Jordan diagonale

$$\begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(i coefficienti fuori della diagonale sono nulli).}$$

□

Esercizio 3. Si classifichi, al variare del parametro reale k, la quadrica affine Q_k di $\mathbb{R}^3$ di equazione

$$Q_k : \ x^2 + y^2 + 2(k+1)xy + 2kxz + 2kyz + 2x = 0$$

Soluzione. La matrice completa associata alla quadrica è

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & k & 1 \\ k+1 & 1 & k & 0 \\ k & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il suo determinante è k^2 e quindi la quadrica è non degenere ed ha determinante positivo se $k \neq 0$. Il determinante dell'incompleta è $2k^3$. Poiché Q_k è non vuota perché contiene sempre il punto $(0, 0, 0)$, ed è a centro con $\det(B_k) > 0$, ne ricaviamo che è un iperboloide a una falda per ogni valore di $k \neq 0$.

Per $k = 0$ otteniamo la quadrica degenere

$$Q_0 : \quad x^2 + y^2 + 2xy + 2x = (x + y)^2 + 2x = 0,$$

che è il cilindro, con generatrici parallele all'asse delle z, che interseca il piano x, y nella parabola $(x + y)^2 + 2x = 0$. $\square$